

ANALYSIS 3

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Maß und Integral	4
1.1	Maßräume und Maße	4
1.2	Konstruktion des Lebesguemaßes auf \mathbb{R}	12
1.3	Vervollständigung von Maßräumen*	24
1.4	Meßbare Abbildungen	25
1.5	Integral von nichtnegativen Funktionen	34
1.6	Integrierbare Funktionen und ihr Integral	40
1.7	Integration auf Produkträumen	46
1.8	Rechnen mit dem Lebesgueintegral	58
1.9	Flächenmaß einer Fastfaltung	63
1.10	Regularität von Borelmaßen	67
2	Funktionsräume und Fourierreihen	71
2.1	Lebesgueintegral vektorwertiger Funktionen	71
2.2	Quadratintegrierbare Funktionen	72
2.3	Räume integrierbarer Funktionen	77
2.4	Hilberträume und Hilbertbasen	82
2.5	Vervollständigung metrischer Räume*	87
2.6	Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen	91
2.7	Fourierreihen und Charaktere	93
2.8	Orthogonale Projektionen in Hilberträumen	101
3	Fouriertransformation	106
3.1	Definition und erste Eigenschaften	106
3.2	Fouriertransformation ohne Koordinaten	112
3.3	Poissonformel und Inversionsformel	121
3.4	Natürlichkeit der Fouriertransformation	127
3.5	Faltung von Maßen und Funktionen	131
3.6	Wellengleichung und Fouriertransformation	140
3.7	Inversionsformel für Fouriergruppen*	143
3.8	Translationsinvariante Teilräume*	151
3.9	Faltung von Maßen und Funktionen*	153
3.10	Topologie der Charaktergruppe*	157
4	Spektraltheorie in Hilberträumen*	164
4.1	Unitäre Darstellungen von \mathbb{R}	164
4.2	Selbstadjungierte Operatoren	171
4.3	Spektren in Banach-Ringalgebren	177
4.4	Weitere Eigenschaften des Spektrums*	182

4.5	Spektren selbstadjungierter Operatoren	184
4.6	Riesz'scher Darstellungssatz	190
4.7	Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren	193
4.8	Beweis des Spektralsatzes	199
4.9	Spektralzerlegung unitärer Darstellungen	203
4.10	Operationen von Maßen auf Darstellungen	206
4.11	Variationen zum Spektralsatz	211
4.12	Unbeschränkte Operatoren	214
5	Danksagung	219
6	Planung und Tagebuch Analysis 3 WS 23/24	220
7	Die Vorlesung Analysis 3 im WS 15/16	224
	Literaturverzeichnis	228
	Indexvorwort	229
	Index	230

1 Maß und Integral

Es mag nahe liegen zu versuchen, jeder Teilmenge des \mathbb{R}^n ein „Volumen“ in $[0, \infty]$ so zuzuordnen, daß (1) das Verschieben oder Verdrehen von Mengen ihr Volumen nicht ändert, daß (2) bei beliebigen disjunkten Vereinigungen das Volumen der Vereinigung die Summe der Volumina ist, und daß (3) dem Einheitswürfel $[0, 1]^n$ das Volumen Eins zugeordnet wird. Kurzes Nachdenken zeigt jedoch, daß das unmöglich gelingen kann: Für solch ein Volumen müßte nämlich jeder Punkt Volumen Null haben, da ja unendlich viele Punkte im Einheitswürfel liegen, und dann müßte auch der ganze Einheitswürfel Volumen Null haben als disjunkte Vereinigung einpunktiger Teilmengen. Um diesen Widerspruch zu vermeiden, mag man etwas schwächer statt (2) nur noch bei *abzählbaren* oder noch schwächer *endlichen* disjunkten Vereinigungen fordern wollen, daß das Volumen der Vereinigung die Summe der Volumina ist, aber auch solch einen Volumenbegriff kann es für beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^n nicht geben, wie im abzählbaren Fall in 1.1.34 bereits für $n = 1$ ausgeführt wird und im endlichen Fall für $n \geq 3$ aus dem sogenannten „Banach-Tarski-Paradoxon“ 1.1.35 oder auch schon aus seinem Vorläufer, dem sogenannten „Hausdorff-Paradoxon“ folgt. Hausdorff zeigte in seinem Buch über Mengenlehre aus dem Jahre 1914 auch, daß es in den Dimensionen $n \leq 2$ durchaus endlich additive Volumenbegriffe der oben beschriebenen Art gibt, aber diese haben in der Mathematik wenig Relevanz. Es ist jedoch möglich, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gewisse Teilmengen des \mathbb{R}^n als „meßbar“ auszuzeichnen derart, daß alle „einigermaßen vernünftigen“ Teilmengen meßbar sind, und jeder dieser meßbaren Mengen ein Volumen so zuzuordnen, daß Bedingung (1), die abzählbare Variante von (2) sowie (3) entsprechend gelten. Im folgenden will ich das ausführen und auch zeigen, wie davon ausgehend eine sehr allgemeine Integrationstheorie entwickelt werden kann, die sich sowohl in der weiteren Entwicklung der Analysis als auch bei der mathematischen Modellierung der Wahrscheinlichkeit als außerordentlich nützlich erweisen wird: Das Lebesgue-Integral.

1.1 Maßräume und Maße

1.1.1. Gegeben eine Menge X erinnere ich daran, daß wir nach [GR] 1.2.6 die Menge aller ihrer Teilmengen bilden dürfen und daß diese Menge die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ von X heißt. Weiter erinnere ich daran, daß in diesem Text aus rein didaktischen Erwägungen heraus Teilmengen der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X vorzugsweise als **Systeme von Teilmengen von X** oder **Mengensysteme** angesprochen werden.

Definition 1.1.2. Ein System \mathcal{A} von Teilmengen einer Menge X alias eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine **Mengenalgebra**, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$;
3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{A}$.

In Worten ist ein System von Teilmengen einer Menge X also eine Mengenalgebra, wenn es stabil ist unter dem Bilden von endlichen Vereinigungen und unter dem Bilden von Komplementen bezüglich X .

1.1.3. Ich will kurz diskutieren, warum unsere Definition in Formeln zu unserer Definition in Worten gleichbedeutend ist. Bei der Definition in Worten ist gemeint, daß eine Mengenalgebra die leere Menge enthalten soll als „die Vereinigung über überhaupt keine Teilmenge von X “, vergleiche [LA1] 1.5.13. Bei der Definition in Formeln folgt umgekehrt die Stabilität von \mathcal{A} unter endlichen Vereinigungen von mehr als zwei Mengen induktiv.

1.1.4. Eine Mengenalgebra ist nach den de Morgan'schen Regeln [GR] 1.3.7 auch stabil unter dem Bilden von endlichen Schnitten und von Differenzmengen.

Definition 1.1.5. Eine Mengenalgebra, die sogar stabil ist unter abzählbaren Vereinigungen, heißt eine σ -**Algebra**. Ein Paar (X, \mathcal{M}) bestehend aus einer Menge X und einer σ -Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein **Meßraum**. Die Mengen aus \mathcal{M} heißen dann die **meßbaren Mengen** von (X, \mathcal{M}) oder kurz die **meßbaren Teilmengen von X** .

1.1.6. In Formeln ist eine σ -Algebra also eine Mengenalgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ derart, daß für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{M} \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$. Gegeben ein Meßraum (X, \mathcal{M}) ist natürlich auch ganz X meßbar und abzählbare Schnitte meßbarer Mengen sind wieder meßbar nach den de Morgan'schen Regeln in ihrer etwas allgemeineren Form [AN2] 1.3.26.

1.1.7. Auf Französisch heißt eine σ -Algebra **tribu**.

Beispiel 1.1.8. In jeder Menge bilden die endlichen Teilmengen mitsamt ihren Komplementen eine Mengenalgebra, die jedoch nur dann eine σ -Algebra ist, wenn wir unsere Konstruktion in einer endlichen Menge durchführen. In jeder Menge bilden die abzählbaren Teilmengen mitsamt ihren Komplementen eine σ -Algebra.

Beispiel 1.1.9. Alle endlichen Vereinigungen von Intervallen bilden eine Mengenalgebra von Teilmengen von \mathbb{R} . Die abzählbaren Vereinigungen von Intervallen bilden *keine* σ -Algebra von Teilmengen von \mathbb{R} , da dieses Mengensystem nicht unter dem Bilden von Komplementen stabil ist: Zum Beispiel ist die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung von Intervallen, genauer von einpunktigen Intervallen, aber ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist keine abzählbare Vereinigung von Intervallen.

1.1.10. Ich benutze gerne wie in [LA2] 7.7.18 erklärt für Vereinigungen das Symbol \sqcup statt \cup , wenn ich andeuten will, daß die zu vereinigenden Teilmengen paarweise disjunkt sein sollen.

Definition 1.1.11. Sei $X = (X, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Ein **Maß** oder genauer ein **nichtnegatives Maß** auf X ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ derart, daß gilt $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten meßbaren Mengen, in Formeln Mengen mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Diese Gleichheit ist in $[0, \infty]$ zu verstehen. Die Summe auf der rechten Seite ist dabei zu verstehen als das Supremum über alle $\sum_{n=0}^N \mu(A_n)$ mit $N \in \mathbb{N}$ und diese endlichen Summen hinwiederum sind zu verstehen im offensichtlichen Monoid $([0, \infty], +)$.

Lemma 1.1.12. Sei $X = (X, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ ist genau dann ein Maß, wenn für jede abzählbare Familie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten meßbaren Mengen gilt

$$\mu \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

mit der Summe auf der rechten Seite zu verstehen als das Supremum über alle Teilsummen $\sum_{i \in E} \mu(A_i)$ für $E \subset \mathbb{N}$ endlich.

1.1.13. Die durch dieses Lemma gegebene äquivalente Charakterisierung von Maßen scheint mir konzeptionell richtiger. Sie verwendet aber verschiedene weniger vertraute Konventionen und ist deshalb vielleicht weniger verständlich.

Beweis. Erfüllt eine Abbildung μ also die Bedingungen des Lemmas, so ist sie ein Maß. In der Tat sind sowohl $N = \mathbb{N}$ als auch $N = \emptyset$ abzählbare Mengen. Genauer ist die leere Menge in unseren Konventionen zwar nicht abzählbar unendlich, aber wie jede andere endliche Menge durchaus abzählbar. Weiter ist in unseren Konventionen die Summe über eine die Familie von Elementen von $([0, \infty], +)$ stets Null. Andererseits erfüllt auch jedes Maß μ die Bedingungen des Lemmas. Wir können nämlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N \subset \mathbb{N}$ annehmen und unsere Mengenfamilie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zu einer Mengenfolge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ergänzen durch die Bedingung $n \notin N \Rightarrow A_n = \emptyset$ dann gilt

$$\mu \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{i \in N} \mu(A_i)$$

wegen $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und den Eigenschaften eines Maßes. □

Definition 1.1.14. Ein **Maßraum** ist ein Tripel $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ bestehend aus einer Menge X , einer σ -Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ und einem Maß $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$.

Ergänzung 1.1.15. Ein Maßraum, bei dem die ganze Menge Maß Eins hat, heißt ein **Wahrscheinlichkeitsraum**. Mit diesem Wort geht meist eine eigene Motivation, Intuition und Buchstabenwahl einher: Das Ziel ist dann nicht mehr ein begrifflicher Rahmen zur Berechnung von Volumina und dergleichen, sondern die mathematische Modellierung des Zufalls. Man notiert Wahrscheinlichkeitsräume statt (X, \mathcal{M}, μ) meist (Ω, \mathcal{A}, P) und denkt sich dabei Ω als eine völlig unstrukturierte und von der speziell untersuchten Fragestellung unabhängige Menge von „sich paarweise ausschließenden Möglichkeiten“. Das Maß $P(A)$ mit P wie „Probability“ denkt man sich dann als die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten einer Möglichkeit aus A . Die meßbaren Teilmengen von Ω heißen auch **Ereignisse**. Ist jede einelementige Teilmenge von Ω meßbar, so mag man die Elemente der Menge Ω **Elementar-Ereignisse** nennen.

Beispiele 1.1.16. Einfache Beispiele für Maße auf der gesamten Potenzmenge einer beliebigen Menge X sind das **Dirac-Maß** δ_x an einem Punkt $x \in X$, gegeben durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Des weiteren das **Zählmaß** $\zeta(A) = |A| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, das jeder Teilmenge die Zahl ihrer Elemente zuordnet. Allgemeiner kann man für jede Menge X und jede Abbildung $f : X \rightarrow [0, \infty]$ wieder auf der gesamten Potenzmenge von X das Maß $A \mapsto \sum_{x \in A} f(x)$ betrachten, bei dem in gewisser Weise „jeder Punkt $x \in X$ mit dem Faktor $f(x)$ gewichtet wird“. Das vielleicht wichtigste Beispiel für ein Maß ist das „Lebesgue-Maß“ auf den „topologisch meßbaren Mengen“ oder „Borelmengen“ des \mathbb{R}^n , dessen Konstruktion noch aussteht.

1.1.17. Sei X eine feste Menge. Sind $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ zwei σ -Algebren, so ist auch ihr Schnitt $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ eine σ -Algebra. Sogar ein beliebiger Schnitt von σ -Algebren in X ist wieder eine σ -Algebra in X .

Definition 1.1.18. Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ irgendein System von Teilmengen einer Menge X , so betrachten wir den Schnitt aller σ -Algebren, die \mathcal{E} umfassen. Dieser Schnitt ist offensichtlich die kleinste σ -Algebra in X , die \mathcal{E} umfaßt. Er heißt die **von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra** und wird $\sigma(\mathcal{E})$ notiert.

1.1.19 (**Diskussion des Konzepts einer σ -Algebra**). Eine umgangssprachlich „explizite“ Beschreibung für die von einem Mengensystem erzeugte σ -Algebra zu geben, ist salopp gesprochen unmöglich, aber für uns im weiteren Verlauf dieser Vorlesung auch nicht relevant. Um Ihnen die Schwierigkeiten einer expliziten Beschreibung zu zeigen, will ich erst einmal andeuten, wie es *nicht* geht. Man

könnte versucht sein, unser Mengensystem zunächst einmal zu ergänzen durch das Hinzunehmen aller abzählbaren Vereinigungen. Dann durch Hinzunehmen aller Komplementmengen solcher abzählbaren Vereinigungen. Dann wieder durch Hinzunehmen aller abzählbaren Vereinigungen, und immer so weiter. Kriegt man so jede Menge der von unserem Mengensystem erzeugten σ -Algebra in endlich vielen Schritten? Eben nicht: Denn nun muß man auch noch die Vereinigungsmengen aller Mengenfolgen dazunehmen, bei denen die erste Menge nach einem Schritt erhalten wurde, die zweite nach zwei Schritten und so weiter. Um die ganze σ -Algebra zu beschreiben, muß man stattdessen mit transfiniten Induktion arbeiten, wie etwa im Beweis von Lemma [AL] 5.4.5 ausgeführt wird, und expliziter wird's nicht mehr.

1.1.20. Gegeben eine Menge X und ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ gibt es stets eine kleinste Topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, die \mathcal{E} umfaßt, nämlich den Schnitt aller Topologien, die \mathcal{E} umfassen. Dieser Schnitt heißt die **von \mathcal{E} erzeugte Topologie**. Man kann diese Topologie explizit beschreiben, indem man erst die Gesamtheit \mathcal{S} aller endlichen Schnitte von Mengen aus \mathcal{E} betrachtet und dann beliebige Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{S} bildet. In der Tat ist das so entstehende Mengensystem schon automatisch stabil unter endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen.

1.1.21. Man beachte den Kontrast zwischen der von einem Mengensystem erzeugten Topologie, die recht explizit angegeben werden kann, und der von einem Mengensystem erzeugten σ -Algebra. Der Ursprung dieser Diskrepanz liegt darin, daß die Potenzmenge einer endlichen Menge stets wieder endlich ist, die Potenzmenge einer abzählbaren Menge aber im allgemeinen nicht abzählbar. Man könnte aber das kleinste Mengensystem, das ein vorgegebenes Mengensystem umfaßt und stabil ist unter abzählbaren Schnitten und beliebigen Vereinigungen, ebenso explizit angeben wie die von einem Mengensystem erzeugte Topologie.

Definition 1.1.22. Die von den offenen Mengen eines metrischen oder allgemeiner eines topologischen Raums X erzeugte σ -Algebra nennen wir die σ -Algebra der **topologisch meßbaren Teilmengen** oder auch der **Borelmengen** von X oder auch die **borelsche σ -Algebra** und notieren sie

$$\text{Borel}(X)$$

Unter einem **topologischen Maß** verstehen wir ein Maß auf der σ -Algebra aller topologisch meßbaren Mengen eines topologischen Raums. Ein **Borelmaß** auf einem topologischen Raum definieren wir als ein topologisches Maß, das auf allen abgeschlossenen Kompakta endliche Werte annimmt.

1.1.23. In einem Hausdorffraum ist nach [AN2] 5.1.9 jedes Kompaktum abgeschlossen.

1.1.24 (**Diskussion der Terminologie**). Das Zählmaß auf \mathbb{R} ist in unserem Sinne ein topologisches Maß, aber kein Borelmaß. Für den Begriff eines Borelmaßes sind jedoch auch viele andere Bedeutungen in der Literatur verbreitet.

Ergänzung 1.1.25. Auch ohne die Kontinuumshypothese vorauszusetzen kann man zeigen, daß jede überabzählbare Borelmenge in \mathbb{R} bereits in Bijektion zu ganz \mathbb{R} ist. Wie das genau geht, können Sie etwa in der Mengenlehre lernen.

1.1.26. Natürlich sind mit unserer Definition auch alle abgeschlossenen Mengen topologisch meßbar. Für jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und beliebiges $a \in \mathbb{R}^n$ ist weiter auch die verschobene Menge $a + A$ eine Borelmenge.

Definition 1.1.27. Ein topologisches Maß auf \mathbb{R}^n heißt **translationsinvariant**, wenn für beliebiges $a \in \mathbb{R}^n$ und jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda(a + A) = \lambda(A)$.

Satz 1.1.28 (Charakterisierung des Lebesguemaßes). *Es gibt auf dem \mathbb{R}^n genau ein translationsinvariantes topologisches Maß λ , das dem Einheitswürfel das Maß Eins zuordnet $\lambda([0, 1]^n) = 1$.*

1.1.29. Dieses Maß λ heißt das **Lebesgue-Maß** auf dem \mathbb{R}^n . Wenn wir zum Ausdruck bringen wollen, welches n gemeint ist, notieren wir es auch λ^n . Die zweite Bedingung an unser Lebesguemaß nennen wir seine **Normierung**. In dieser Terminologie können wir also das Lebesguemaß charakterisieren als das eindeutig bestimmte normierte translationsinvariante Maß auf den Borelmengen des \mathbb{R}^n . Anschaulich ordnet λ jeder Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ihr **Volumen** oder **Maß** $\lambda(A) \in [0, \infty]$ zu. Der Nachweis der Eindeutigkeit wird dem Leser als Übung 1.2.35 und 1.2.36 überlassen. Die Existenz zeigen wir für $n = 1$ im folgenden Abschnitt in Bemerkung 1.2.13 und für beliebiges n in 1.7.3.

1.1.30 (**Diskussion der Terminologie**). Viele Autoren verstehen unter dem Lebesguemaß abweichend die „Vervollständigung“ im Sinne von 1.3.2 des hier beschriebenen Maßes. Wenn es auf derlei Feinheiten ankommt, mag man das in Satz 1.1.28 beschriebene Maß genauer das „Lebesguemaß auf den Borelmengen“ nennen.

Satz 1.1.31 (Regularität des Lebesguemaßes). *Für das Lebesguemaß λ auf dem \mathbb{R}^n und jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U \text{ offen in } \mathbb{R}^n}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

1.1.32. Dieser Satz wird in 1.10.1 gezeigt. Er deutet eine mögliche Konstruktion des Lebesgue-Maßes λ auf dem \mathbb{R}^n an: Um das Lebesguemaß einer Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ zu bestimmen können, wir beginnen mit dem Fall endlicher disjunkter Vereinigungen von Produkten von Intervallen. Solche „Quadermengen“ haben

noch ein anschauliches Volumen. Dann wird für U offen der Wert $\lambda(U)$ definiert als das Supremum über die Volumina aller in U enthaltenen Quadermengen, und schließlich erhält man das Maß $\lambda(A)$ einer beliebigen Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ als Infimum von $\lambda(U)$ über alle offenen U , die A umfassen. Diese Beschreibung von $\lambda(A)$ ähnelt unserer definitiven Konstruktion des Lebesguemaßes. Die wesentliche Schwierigkeit ist, zu zeigen, daß die so konstruierte Abbildung von den Borelmengen in die um ∞ erweiterten nichtnegativen reellen Zahlen auch tatsächlich ein Maß ist.

1.1.33. Wir wollen uns zur besseren Motivation sofort überlegen, daß es schon im Fall $n = 1$ keinen vernünftigen Volumenbegriff für *beliebige* Teilmengen des \mathbb{R}^n geben kann.

Lemma 1.1.34. *Es gibt kein Maß $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ auf der σ -Algebra aller Teilmengen von \mathbb{R} , das translationsinvariant und normiert ist.*

Erster Beweis, mit etwas Algebra. Wir argumentieren durch Widerspruch. Gäbe es solch ein Maß, so fänden wir auch ein „rotationsinvariantes“ Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Kreislinie mit allen Teilmengen als meßbaren Mengen, in Formeln

$$\mu : \mathcal{P}(S^1) \rightarrow [0, \infty]$$

mit $\mu(zB) = \mu(B)$ für alle $z \in S^1, B \subset S^1$ und mit $\mu(S^1) = 1$. Wir können etwa $\mu(B) := \lambda(\varphi^{-1}B)$ setzen für $\varphi : [0, 1) \xrightarrow{\sim} S^1$ gegeben durch $\varphi(t) := \exp(2\pi it)$. Ist nun $z \in S^1$ keine Einheitswurzel, so sind seine Potenzen z^n für $n \in \mathbb{Z}$ paarweise verschieden. Ist dann $B \subset S^1$ ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen der von z erzeugten Untergruppe $\langle z \rangle \subset S^1$, so liefert die Multiplikation eine Bijektion $\langle z \rangle \times B \xrightarrow{\sim} S^1$. In andern Worten haben wir eine disjunkte Zerlegung

$$S^1 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} z^n B$$

Es folgt $1 = \mu(S^1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(z^n B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(B)$ und das kann weder für $\mu(B) = 0$ noch für $\mu(B) > 0$ gelten. Widerspruch! \square

Zweiter Beweis, mit wenig Algebra. Wir werden eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und Folgen r_n und q_n reeller Zahlen konstruieren derart, daß gilt:

1. Die Mengen $r_n + A$ sind paarweise disjunkt und alle in $[0, 3]$ enthalten.
2. Die Mengen $q_n + A$ überdecken \mathbb{R} .

Für unsere Menge A müßte also gleichzeitig gelten

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(r_n + A) \leq \lambda([0, 3]) \leq 3\lambda([0, 1]) = 3 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(q_n + A) \geq \lambda(\mathbb{R}) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(2n + [0, 1]) = \infty \end{aligned}$$

und dieser Widerspruch zeigt dann das Lemma. Um unsere Menge A zu konstruieren, wählen wir mithilfe von [LA1] 1.9.20 eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ derart, daß $\{1\} \cup I$ eine \mathbb{Q} -Basis von \mathbb{R} ist, und betrachten den von I erzeugten \mathbb{Q} -Untervektorraum $\langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ und die Menge $A = \langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \cap [0, 2]$. Für jede Folge r_n von paarweise verschiedenen rationalen Zahlen aus $[0, 1]$ sind dann die $r_n + A$ paarweise disjunkt und in $[0, 3]$ enthalten. Andererseits finden wir auch für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein $b_n \in \langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \cap [n - 1, n]$, es folgt $\langle I \rangle_{\mathbb{Q}} = \bigcup b_n + A$ und dann

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}} q + b_n + A \quad \square$$

Ergänzung 1.1.35. Es kommt sogar noch schlimmer: Nach Banach und Tarski ist es möglich, die abgeschlossene Einheitskugel im \mathbb{R}^3 so in sechs paarweise disjunkte Teilmengen zu zerlegen, daß sich diese Teilmengen geeignet verschoben und im Raum gedreht ohne Überlappungen zu *zwei* Einheitskugeln zusammenfügen lassen. Das ist das sogenannte **Banach-Tarski-Paradoxon**. Die fraglichen sechs Teilmengen sind dann natürlich nicht alle meßbar.

Übungen

Übung 1.1.36. Man zeige, daß die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten die σ -Algebra aller Borelmengen der reellen Zahlengeraden erzeugen.

Übung 1.1.37. Gegeben ein Maßraum und darin eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ zeige man

$$\mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Hinweis: Man schreibe die fragliche Vereinigung als die disjunkte Vereinigung der $A_{n+1} \setminus A_n$.

Übung 1.1.38. Gegeben ein Maßraum und darin eine absteigende Folge meßbarer Mengen endlichen Maßes $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ zeige man

$$\mu \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Man zeige auch durch ein Gegenbeispiel, daß das nicht mehr gelten muß, wenn alle Mengen unserer Folge unendliches Maß haben.

Übung 1.1.39 (Vorbereitungen zum Beweis des Satzes von Fubini). Seien X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Mengenalgebra. Man zeige: (1) Genau dann ist \mathcal{A} eine σ -Algebra, wenn \mathcal{A} stabil ist unter abzählbaren *disjunkten* Vereinigungen. (2) Genau dann ist \mathcal{A} eine σ -Algebra, wenn \mathcal{A} stabil ist unter abzählbaren *aufsteigenden* Vereinigungen im Sinne von 1.2.19.

Übung 1.1.40. Konstruieren Sie in \mathbb{R} eine offene dichte Teilmenge von endlichem Lebesguemaß.

Übung 1.1.41 (Restriktion von Maßen). Ist (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $A \subset X$ eine meßbare Teilmenge, so bilden die in A enthaltenen meßbaren Mengen von X eine σ -Algebra $\mathcal{M}|_A \subset \mathcal{P}(A)$ und die Einschränkung von μ ist ein Maß $\mu|_A : \mathcal{M}|_A \rightarrow [0, \infty]$, das wir je nach Kontext auch ausführlicher $\mu|_A$ oder $\mu|_A$ oder $i^! \mu$ notieren für $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung. Wir nennen $(A, \mathcal{M}|_A, \mu|_A)$ den **induzierten Maßraum**.

Übung 1.1.42 (Verkleben von Maßen). Sei ein Maßraum X die Vereinigung einer Folge X_n meßbarer Teilmengen. Sei auf jeder unserer Teilmengen X_n ein Maß μ_n gegeben derart, daß gilt $\mu_n|(X_n \cap X_m) = \mu_m|(X_n \cap X_m)$ für alle m, n . Man zeige, daß es dann genau ein Maß μ auf X gibt mit $\mu_n = \mu|_{X_n}$ für alle n .

Ergänzende Übung 1.1.43. Seien X ein Maßraum und μ_i eine Folge von endlichen Maßen derart, daß für jedes meßbare $A \subset X$ die Folge der $\mu_i(A)$ monoton wachsend und beschränkt ist. So wird durch die Formel $\mu(A) := \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i(A)$ ein weiteres Maß auf X erklärt.

Übung 1.1.44. Ist A_0, A_1, \dots eine Folge von Mengen aus einer σ -Algebra, so gehört auch die Menge

$$\limsup A_n := \{x \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n\}$$

zu unserer σ -Algebra. Man nennt sie den **Limes superior** unserer Mengenfolge.

1.2 Konstruktion des Lebesguemaßes auf \mathbb{R}

Definition 1.2.1. Ein System von Teilmengen einer gegebenen Menge heißt ein **Mengenring**, wenn es stabil ist unter dem Bilden von endlichen Vereinigungen und von Differenzmengen. In Formeln ausgedrückt ist ein System von Teilmengen $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ einer Menge X also ein Mengenring, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$;
2. $A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{I}$;
3. $A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow (B \setminus A) \in \mathcal{I}$.

1.2.2. Daß unsere Definition in Worten und unsere Definition in Formeln gleichbedeutend sind, erkennt man wie in 1.1.3. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine Mengenalgebra genau dann, wenn \mathcal{A} ein Mengenring ist mit $X \in \mathcal{A}$.

1.2.3 (Diskussion der Terminologie). Identifiziert man $\mathcal{P}(X)$ mit der Menge $\text{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$ aller Abbildungen von X in den zweielementigen Körper, indem man jeder Menge ihre Indikatorfunktion zuordnet, so entsprechen unsere Mengenalgebren $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ genau den „nicht-unitären Teilringen“ oder in unserer Terminologie den \mathbb{Z} -Unter-algebren von $\text{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$. Unsere Mengenalgebren $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ dahingegen entsprechen den „unitären Teilringen“, die wir in unserer Terminologie [AL] 2.2.1 schlicht Teilringe nennen. Ich komme nicht umhin, hier einen Zusammenstoß kollidierender Begriffswelten zu konstatieren.

Definition 1.2.4. Seien X eine Menge und $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengerring. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ heißt ein **Prämaß auf \mathcal{I}** oder gleichbedeutend **σ -additiv**, wenn gilt $\mu(\emptyset) = 0$ und wenn für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus unserem Mengerring mit der Eigenschaft, daß ihre Vereinigung wieder zu unserem Mengerring gehört $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{I}$, gilt

$$\mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

1.2.5 (Alternative Definition der σ -Additivität). Unsere Forderungen an ein Prämaß auf einem Mengerring \mathcal{I} sind gleichbedeutend zur Bedingung, daß für jede abzählbare Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus \mathcal{I} , deren Vereinigung wieder zu \mathcal{I} gehört, gilt

$$\mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Man zeigt das wie im Fall von Maßen 1.1.12.

1.2.6 (Eigenschaften von Prämaßen). Seien X eine Menge und $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengerring und $\mu : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß. Gegeben $A, B \in \mathcal{I}$ mit $B \supset A$ folgt $\mu(B) \geq \mu(A)$, es gilt ja sogar genauer $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Gegeben $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{I}$ nicht notwendig paarweise disjunkt gilt weiter

$$\mu \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) \leq \sum_{i=0}^n \mu(A_i)$$

In der Tat können wir $B_i := A_i \setminus (A_{i-1} \cup \dots \cup A_0)$ betrachten und finden damit $\bigcup_{i=0}^n A_i = \bigsqcup_{i=0}^n B_i$. Ist schließlich $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Folge in \mathcal{I} mit $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ in \mathcal{I} , so folgt in derselben Weise

$$\mu \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

Lemma 1.2.7 (Ein Prämaß zum Lebesguemaß). *Auf dem Mengerring aller endlichen Vereinigungen von beschränkten Intervallen $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gibt es genau ein Prämaß λ derart, daß für jedes nichtleere beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$\lambda(I) = \sup I - \inf I$$

Beweis. Gegeben $A \in \mathcal{I}$ betrachten wir die bis auf Reihenfolge eindeutige Darstellung $A = I_1 \cup \dots \cup I_r$ von A als disjunkte Vereinigung der maximalen in A enthaltenen Intervalle und müssen setzen

$$\lambda(A) = \lambda(I_1) + \dots + \lambda(I_r)$$

Das zeigt die Eindeutigkeit. Es gilt nur noch zu zeigen, daß für $A := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine disjunkte Vereinigung mit $A, A_n \in \mathcal{I}$ gilt

$$\lambda(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n)$$

Offensichtlich gilt schon einmal $\lambda(B \sqcup C) = \lambda(B) + \lambda(C)$ für $B, C \in \mathcal{I}$ disjunkt. Wir setzen nun $B_n := A \setminus (A_0 \sqcup \dots \sqcup A_n)$. Dann gilt $B_n \in \mathcal{I}$ und $B_0 \supset B_1 \supset \dots$ sowie $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Es reicht, wenn wir folgern

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B_n) = 0$$

Wären unsere B_n kompakt, so folgte mit [AN2] 5.1.13 bereits $B_n = \emptyset$ für fast alle n und wir wären fertig. Der Rest des Beweises besteht darin, zu zeigen, daß wir salopp gesprochen beliebig nah an dieser Situation sind. Sei genauer $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden für jedes n ein kompaktes $C_n \in \mathcal{I}$ mit $C_n \subset B_n$ und

$$\lambda(B_n \setminus C_n) \leq 2^{-n} \varepsilon$$

Jetzt betrachten wir $D_n := C_0 \cap \dots \cap C_n$. Auch die D_n sind kompakt, es gilt $D_n \subset C_n \subset B_n$ und zusätzlich haben wir nach Konstruktion $D_0 \supset D_1 \supset \dots$. Wir zeigen nun $\lambda(B_n \setminus D_n) \leq 2\varepsilon$ für alle n . In der Tat gilt ja

$$B_n \setminus D_n = \bigcup_{k=0}^n B_n \setminus C_k \subset \bigcup_{k=0}^n B_k \setminus C_k$$

und folglich

$$\lambda(B_n \setminus D_n) \leq \sum_{k=0}^n \lambda(B_k \setminus C_k) \leq \sum_{k=0}^n 2^{-k} \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Nun folgt aber aus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \emptyset$ und der Kompaktheit der D_n und [AN2] 5.1.13 bereits $D_N = \emptyset$ für ein N . Damit ergibt sich $\lambda(B_n) \leq 2\varepsilon$ für $n \geq N$. \square

1.2.8. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **linksseitig stetig**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{y \nearrow x} f(y) = f(x)$.

Lemma 1.2.9 (Stieltjes-Prämaße). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig. So gibt es auf dem Mengenring \mathcal{I} aller endlichen Vereinigungen beschränkter Intervalle der Gestalt $[a, b)$ genau ein Prämaß $\lambda = df$ mit $\lambda([a, b)) = f(b) - f(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Beweis. Wir können den Beweis des vorhergehenden Lemmas 1.2.7 im wesentlichen übernehmen. Im hier betrachteten Mengenring ist allerdings \emptyset das einzige Kompaktum. Stattdessen suchen wir nun Elemente $C_n \in \mathcal{I}$ mit $\bar{C}_n \subset B_n$ und $\lambda(B_n \setminus C_n) \leq 2^{-n}\varepsilon$. Wir finden solche C_n aufgrund unserer Annahme, daß f linksseitig stetig sein soll. Dann argumentieren wir wie zuvor und folgern $D_N = \emptyset$ für hinreichend großes N aus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{C}_n = \emptyset$. Die \bar{C}_n sind ja schließlich kompakt und wir können wieder [AN2] 5.1.13 anwenden. \square

Definition 1.2.10. Eine Teilmenge eines Raums mit Prämaß heißt **σ -endlich**, wenn sie sich durch eine abzählbare Familie von Mengen endlichen Maßes aus dem entsprechenden Mengenring überdecken läßt. Ein Prämaß heißt **σ -endlich**, wenn der ganze Raum in diesem Sinne σ -endlich ist.

Satz 1.2.11 (Maßfortsetzung nach Caratheodory). Gegeben eine Menge X , ein Mengenring $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ und ein σ -endliches Prämaß $\mu : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ existiert genau eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf der von \mathcal{I} erzeugten σ -Algebra $\sigma(\mathcal{I})$.

1.2.12. Sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit von Maßfortsetzungen unter den gegebenen Voraussetzungen sind zentrale Aussagen der Maßtheorie. Der Beweis des Maßfortsetzungssatzes wird nach einigen Vorbereitungen direkt vor 1.2.27 geführt werden.

1.2.13 (**Lebesguemaß auf \mathbb{R}**). In 1.2.7 haben wir auf dem Mengenring aller endlichen Vereinigungen beschränkter reeller Intervalle ein translationsinvariantes Prämaß konstruiert, das dem abgeschlossenen Einheitsintervall den Wert Eins zuweist. Mit dem Satz über Maßfortsetzungen 1.2.11 folgt sofort die in 1.1.28 behauptete Existenz eines normierten translationsinvarianten topologischen Maßes auf der reellen Zahlengeraden. Den Nachweis der Eindeutigkeit in 1.1.28 überlassen wir dem Leser als Übung 1.2.35.

1.2.14. Gegeben Maße μ, ν auf demselben Meßraum (X, \mathcal{M}) sagen wir, μ sei **größergleich** ν und schreiben $\mu \geq \nu$, wenn gilt $\mu(A) \geq \nu(A) \forall A \in \mathcal{M}$. Unter einer **größten Maßfortsetzung** eines Prämaßes auf einem Mengenring verstehen wir das in dieser Teilordnung größte Maß auf der von unserem Mengenring erzeugten σ -Algebra, das unser Prämaß fortsetzt. Als größtes Element einer teilgeordneten Menge ist so eine größte Maßfortsetzung eindeutig, wenn sie existiert.

Proposition 1.2.15 (Konstruktion der größten Maßfortsetzung). Gegeben eine Menge X , ein Mengenring $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ und ein Prämaß $\mu : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ existiert eine größte Fortsetzung von μ zu einem Maß μ^* auf der von \mathcal{I} erzeugten σ -Algebra $\sigma(\mathcal{I})$ und der Wert dieser größten Maßfortsetzung wird für alle $M \in \sigma(\mathcal{I})$ gegeben durch

$$\mu^*(M) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Folge in } \mathcal{I} \text{ mit } M \subset \bigcup A_n \right\}$$

1.2.16. Ich erinnere hier an unsere Konvention, nach der das Infimum der leeren Menge das Element $\infty \in \bar{\mathbb{R}}$ ist. Der Beweis der Proposition wird im Anschluß an den Beweis des Zerlegerlemmas 1.2.25 gegeben. Wir zeigen darin nur noch, daß die Formel in der Proposition auch wirklich eine Maßfortsetzung liefert. Daß diese Maßfortsetzung die größte Maßfortsetzung sein muß, ist dann eh klar.

1.2.17. Ist unser Prämaß nicht σ -endlich, so muß die größte Maßfortsetzung nicht die einzige Maßfortsetzung sein. Als erstes Beispiel betrachte man in einer nicht-leeren Menge den Mengenring, der nur aus der leeren Menge besteht. Als etwas feineres Beispiel betrachte man den Mengenring aller endlichen Teilmengen von \mathbb{R} und darauf das Prämaß, das jeder endlichen Menge die Null zuordnet. Die von unserem Mengenring erzeugte σ -Algebra besteht aus allen Teilmengen von \mathbb{R} , die entweder abzählbar sind oder abzählbares Komplement haben, und die möglichen Fortsetzungen unseres Prämaßes sind alle die Abbildungen, die allen abzählbaren Mengen die Null zuordnen und allen Komplementen abzählbarer Mengen ein beliebiges aber festes Element von $[0, \infty]$. Die größte Fortsetzung kann im übrigen auch charakterisiert werden als die eindeutig bestimmte Fortsetzung, die allen den Mengen von $\sigma(\mathcal{I})$ das Maß Unendlich zuordnet, die nicht in einer abzählbaren Vereinigung von Mengen endlichen Maßes aus \mathcal{I} enthalten sind.

Definition 1.2.18. Seien X eine Menge und $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra. Ein **äußeres Maß auf \mathcal{N}** ist eine Abbildung $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty]$ derart, daß aus $Y \subset Z$ folgt $\alpha(Y) \leq \alpha(Z)$ und daß gilt $\alpha(\emptyset) = 0$ und daß für jede Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen aus unserer σ -Algebra \mathcal{N} gilt

$$\alpha \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(Y_n)$$

Die erste Bedingung nennen wir die **Monotonie**, die zweite die **σ -Subadditivität**.

1.2.19. Wir werden in diesem Text äußere Maße fast nur auf der gesamten Potenzmenge einer vorgegebenen Menge betrachten. Nach den in 1.2.6 sogar für Prämaße gezeigten Abschätzungen ist jedes Maß auch ein äußeres Maß.

Lemma 1.2.20 (Konstruktion äußerer Maße). Gegeben eine Menge X , ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{E}$ und eine Abbildung $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ erhalten wir ein äußeres Maß $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ durch die Vorschrift

$$\mu^*(Y) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \mathcal{E} \text{ mit } Y \subset \bigcup A_n \right\}$$

1.2.21. Die Bedingungen $\emptyset \in \mathcal{E}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ könnten unterdrückt werden, wenn wir statt mit Folgen allgemeiner mit abzählbaren Familien arbeiten würden, was ja nach unseren Konventionen die leere Familie mit einschließt. Mir schien aber hier das Arbeiten mit Folgen vom didaktischen Standpunkt aus so viel günstiger, daß ich diese Unnatürlichkeit der Darstellung dafür in Kauf genommen habe.

Beweis. Es ist klar, daß μ^* die von einem äußeren Maß geforderte Monotonie hat. Es bleibt, die σ -Subadditivität zu zeigen. Es reicht, die fragliche Abschätzung für jede Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen $Y_n \subset X$ mit $\mu^*(Y_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ nachzuweisen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(A_n^i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E} mit $Y_n \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_n^i$ und

$$\mu^*(Y_n) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_n^i) \leq \mu^*(Y_n) + \varepsilon/2^n$$

Dann gilt aber $\bigcup Y_n \subset \bigcup_{i,n} A_n^i$ und aus der Definition von μ^* folgern wir

$$\mu^* \left(\bigcup Y_n \right) \leq \sum_{i,n} \mu(A_n^i) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(Y_n) + 2\varepsilon$$

Da das nun gilt für alle $\varepsilon > 0$, ist μ^* auch σ -subadditiv. \square

Lemma 1.2.22 (Ausdehnen von Prämaß zu äußerem Maß). Gegeben eine Menge X , ein Mengenring $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ und ein Prämaß $\mu : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ stimmt das in 1.2.20 konstruierte äußere Maß μ^* auf dem vorgegebenen Mengenring \mathcal{I} mit dem vorgegebenen Prämaß μ überein, in Formeln

$$\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{I}$$

Beweis. Die Abschätzungen $\mu^*(A) \leq \mu(A) \forall A \in \mathcal{I}$ folgen daraus, daß jede Menge A sich selber überdeckt. Wir müssen also nur noch $\mu(A) \leq \mu^*(A) \forall A \in \mathcal{I}$ zeigen. Es reicht zu zeigen $\mu(A) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \forall \varepsilon > 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir aber eine Folge A_n in \mathcal{I} mit $A \subset \bigcup A_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$. Indem wir A_n verkleinern zu $A_n \setminus (A_{n-1} \cup \dots \cup A_0)$, dürfen wir hier sogar die Folgenglieder paarweise disjunkt annehmen. Wegen $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap A_n)$ erhalten wir dann wie gewünscht

$$\mu(A) = \sum \mu(A \cap A_n) \leq \sum \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \quad \square$$

1.2.23. Gegeben eine feste Menge X und eine Teilmenge $A \subset X$ verwenden wir im folgenden für das Komplement von A die Abkürzung $A^c := X \setminus A$.

Definition 1.2.24. Seien X eine Menge und α ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt α -**meßbar** oder auch ein α -**Zerleger**, wenn für jede Teilmenge $Y \subset X$ gilt

$$\alpha(Y) = \alpha(Y \cap A) + \alpha(Y \cap A^c)$$

Lemma 1.2.25 (Zerleger-Lemma). Gegeben eine Menge X und ein äußeres Maß $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ auf ihrer Potenzmenge ist das System $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(X)$ aller α -Zerleger eine σ -Algebra und α ist ein Maß auf \mathcal{Z} .

Ergänzung 1.2.26. Ist allgemeiner X eine Menge und α ein äußeres Maß auf einer σ -Algebra $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$, so definieren wir analog das System $\mathcal{Z} \subset \mathcal{N}$ der \mathcal{N} - α -Zerleger. Derselbe Beweis zeigt, daß auch diese Zerleger eine σ -Algebra bilden und daß unser äußeres Maß zu einem Maß auf \mathcal{Z} einschränkt.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß \mathcal{Z} eine Mengenalgebra ist. Sicher gilt $\emptyset \in \mathcal{Z}$, und aus $A \in \mathcal{Z}$ folgt $A^c \in \mathcal{Z}$. Wir müssen nun noch zeigen, daß aus $A, B \in \mathcal{Z}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{Z}$. Sei dazu $Y \subset X$ beliebig. Es gilt, für α -Zerleger A und B zu zeigen

$$\alpha(Y) = \alpha(Y \cap (A \cap B)) + \alpha(Y \cap (A \cap B)^c)$$

Da A und B schon α -Zerleger sind, finden wir aber in der Tat

$$\begin{aligned} \alpha(Y \cap (A \cap B)^c) + \alpha(Y \cap A \cap B) &= \alpha(Y \cap (A \cap B)^c \cap A) \\ &\quad + \alpha(Y \cap (A \cap B)^c \cap A^c) \\ &\quad + \alpha(Y \cap A \cap B) \\ &= \alpha(Y \cap B^c \cap A) \\ &\quad + \alpha(Y \cap A^c) \\ &\quad + \alpha(Y \cap A \cap B) \\ &= \alpha(Y \cap A) + \alpha(Y \cap A^c) = \alpha(Y) \end{aligned}$$

Also ist \mathcal{Z} schon mal eine Mengenalgebra. Als nächstes zeigen wir, daß \mathcal{Z} auch stabil ist unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen und damit eine σ -Algebra. Sind zunächst einmal $A, B \in \mathcal{Z}$ disjunkt, so gilt

$$\alpha(Y \cap (A \sqcup B)) = \alpha(Y \cap A) + \alpha(Y \cap B)$$

für beliebiges $Y \subset X$, denn unter der Voraussetzung $A \cap B = \emptyset$ können wir schreiben $Y \cap A = Y \cap (A \sqcup B) \cap A$ und $Y \cap B = Y \cap (A \sqcup B) \cap A^c$. Induktiv

folgt für $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{Z}$ paarweise disjunkt und $Y \subset X$ beliebig die Gleichheit

$$\alpha(Y \cap (A_0 \sqcup \dots \sqcup A_n)) = \sum_{\nu=0}^n \alpha(Y \cap A_\nu)$$

Haben wir also eine Folge (A_ν) von paarweise disjunkten Zerlegern mit Vereinigung $A := \bigsqcup_{\nu \in \mathbb{N}} A_\nu$ gegeben, so gilt für jede Teilmenge $Y \subset X$ aufgrund der Monotonie unseres äußeren Maßes die Abschätzung

$$\begin{aligned} \alpha(Y) &= \alpha(Y \cap (A_0 \sqcup \dots \sqcup A_n)^c) + \alpha(Y \cap (A_0 \sqcup \dots \sqcup A_n)) \\ &\geq \alpha(Y \cap A^c) + \sum_{\nu=0}^n \alpha(Y \cap A_\nu) \end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ergibt sich so die erste Ungleichung der Ungleichungskette

$$\alpha(Y) \geq \alpha(Y \cap A^c) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha(Y \cap A_\nu) \geq \alpha(Y \cap A^c) + \alpha(Y \cap A) \geq \alpha(Y)$$

Die anderen beiden Ungleichungen folgen aus der σ -Subadditivität unseres äußeren Maßes. Damit haben wir überall Gleichheit und A ist auch ein Zerleger und \mathcal{Z} eine σ -Algebra. Setzen wir in unserer Ungleichungskette $Y = A$, so folgt wiederum die σ -Additivität von $\alpha : \mathcal{Z} \rightarrow [0, 1]$. Also ist α in der Tat ein Maß auf der σ -Algebra \mathcal{Z} aller Zerleger. \square

Beweis zur größten Maßfortsetzung. Seien \mathcal{I} ein Mengenring, $\mu : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf \mathcal{I} und $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ das in 1.2.22 konstruierte äußere Maß. Um Proposition 1.2.15 zur Konstruktion der größten Maßfortsetzung aus dem Zerlegerlemma 1.2.25 abzuleiten, müssen wir nur noch zeigen, daß \mathcal{I} aus μ^* -Zerlegern besteht. Für jedes äußere Maß auf $\mathcal{P}(X)$ und beliebige $A, Y \subset X$ gilt per definitionem

$$\mu^*(Y) \leq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

Wir müssen für $A \in \mathcal{I}$ und beliebiges $Y \subset X$ auch die andere Ungleichung zeigen. Das ist nur im Fall $\mu^*(Y) < \infty$ problematisch. Unter dieser Voraussetzung finden wir aber für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Folge (B_n) in \mathcal{I} mit $Y \subset \bigcup_n B_n$ und

$$\begin{aligned} \mu^*(Y) + \varepsilon &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n \cap A) + \mu(B_n \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \end{aligned}$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die andere Ungleichung

$$\mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

und damit die Gleichheit. Also besteht \mathcal{I} in der Tat aus μ^* -meßbaren Mengen und die Proposition 1.2.15 ist bewiesen. \square

Beweis des Maßfortsetzungssatzes von Caratheodory 1.2.11. Die Existenz einer Maßfortsetzung haben wir bereits als Proposition 1.2.15 gezeigt und nur die Eindeutigkeit ist noch zu zeigen. Sei dazu ν eine zweite Fortsetzung. Es gilt zu zeigen $\mu(C) = \nu(C)$ für alle $C \in \mathcal{M}$. Aus der Konstruktion von μ in 1.2.15 folgt bereits $\nu(C) \leq \mu(C)$. Da wir unser Prämaß σ -endlich angenommen hatten, gibt es jedoch eine aufsteigende Folge $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ in \mathcal{I} mit $\bigcup A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty \forall n$. Wir müssen nur für alle n die Gleichungen

$$\mu(C \cap A_n) = \nu(C \cap A_n)$$

zeigen, dann ergibt sich $\mu(C) = \nu(C)$ im Grenzwert $n \rightarrow \infty$. Wie bereits erwähnt gilt jedoch $\nu(C \cap A_n) \leq \mu(C \cap A_n)$ und ganz genauso auch $\nu(C^c \cap A_n) \leq \mu(C^c \cap A_n)$, und da die Summe dieser Ungleichungen die Gleichung $\nu(A_n) = \mu(A_n)$ liefert, müssen unsere Ungleichungen beide schon Gleichungen gewesen sein. \square

Proposition 1.2.27 (Maße und ihre Integrale). *Gegeben Intervall $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ mit $(\sup I) \notin I$ alias ein „nach oben offenes Intervall“ und ein Punkt $p \in I$ erhalten wir eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \{ \text{Borelmaße auf } I \} &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Monoton wachsende} \\ \text{linksseitig stetige Funktionen} \\ f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(p) = 0 \end{array} \right\} \\ \mu &\mapsto \left(f_\mu : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \mu[p, x) & \text{falls } x \geq p; \\ -\mu[x, p) & \text{falls } x \leq p. \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

1.2.28. Die Umkehrabbildung zur Bijektion aus unserer Proposition notieren wir $f \mapsto df$. Das Maß df heißt auch das **Stieltjes-Maß zu f** . Insbesondere notieren wir das Lebesguemaß auf \mathbb{R} auch dx für $x = \text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Man prüft leicht, daß unsere Abbildungsvorschrift $\mu \mapsto f_\mu$ in der Tat eine Abbildung zwischen den im Satz beschriebenen Mengen liefert. Es gilt, eine Umkehrabbildung zu konstruieren. Zunächst nehmen wir $I = \mathbb{R}$ an, betrachten zu f monoton wachsend linksseitig stetig das in 1.2.9 konstruierte Prämaß df und erweitern es mit dem Maßfortsetzungssatz zu einem Maß df auf den Borelmengen. Das so konstruierte Maß $\mu = \mu_f$ hat offensichtlich die Eigenschaft $f = f_\mu + f(p)$. Gehen wir andererseits von μ aus, so stimmt das Maß df_μ auf einem erzeugenden Mengenring der borelschen σ -Algebra mit μ überein und wir haben folglich $\mu = df_\mu$. Es bleibt, den Fall $I = [0, \infty)$ zu diskutieren. In diesem Fall setzen wir f konstant durch $f(0)$ zu einer linksseitig stetigen Funktion auf \mathbb{R} fort und schränken das zugehörige Stieltjes-Maß df auf $[0, \infty)$ ein. \square

1.2.29. Es gibt also für jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau ein topologisches Maß df auf \mathbb{R} mit $(df)([a, b)) = f(b) - f(a)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Unser Lebesguemaß kann man in dieser Notation auch schreiben als das Maß dx , mit x als alternativer Bezeichnung für die Identität $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ auf der reellen Zahlengeraden. Etwas allgemeiner kann man so auch für jeden orientierten eindimensionalen reellen affinen Raum X und jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ in natürlicher Weise ein topologisches Maß df auf X erklären. Die Beziehung zu unseren Kovektorfeldern df für differenzierbare Funktionen f diskutieren wir in 1.5.28.

Korollar 1.2.30 (Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungsfunktionen). *Wir erhalten eine Bijektion*

$$\left\{ \text{Wahrscheinlichkeitsmaße auf } \mathbb{R} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Monoton wachsende} \\ \text{linksseitig stetige Funktionen} \\ V : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \text{ mit} \\ \inf V(\mathbb{R}) = 0 \text{ und } \sup V(\mathbb{R}) = 1 \end{array} \right\}$$

$$\mu \quad \mapsto \quad (V_{\mu} : x \mapsto \mu(-\infty, x))$$

Ergänzung 1.2.31. Im Fall von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ auf \mathbb{R} mit seiner σ -Algebra der topologisch meßbaren Mengen ist es üblich, eine Variante der Konstruktion aus Satz 1.2.27 zu betrachten und die **Verteilungsfunktion** des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ zu definieren durch die Vorschrift $V_{\mu}(x) = \mu(-\infty, x)$ und allgemeiner $V_{\mu}(x_1, \dots, x_n) = \mu((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n))$ für Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R}^n . Damit erhalten wir dann, wie oben formuliert, eine eindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} und der Menge aller linksseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Infimum Null und Supremum Eins, in Formeln $\inf(V(\mathbb{R})) = 0$ und $\sup(V(\mathbb{R})) = 1$, oder allgemeiner zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R}^n und der Menge aller in jeder Variablen linksseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Infimum Null und Supremum Eins. Andere Quellen erklären die Verteilungsfunktion abweichend als $F_{\mu}(x) = \mu(-\infty, x]$ und erhalten dann analog eine eindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} und der Menge aller rechtsseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Infimum Null und Supremum Eins.

Übungen

Übung 1.2.32. Gegeben Mengen X und Y sowie Mengerringe $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(Y)$ ist auch das System aller endlichen Vereinigungen von paarweise disjunkten Mengen der Gestalt $A \times B$ mit $A \in \mathcal{I}$ und $B \in \mathcal{J}$ ein Mengerring in

$\mathcal{P}(X \times Y)$. Diese Übung ist wichtig zur Vorbereitung der Diskussion von Produktmaßen.

Übung 1.2.33 (Mengenalgebra oder -ring erzeugt von Mengensystem). Seien X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen. Der Schnitt aller Mengenalgebren, die \mathcal{E} umfassen, heißt die **von \mathcal{E} erzeugte Mengenalgebra**. Weiter heißt der Schnitt aller Mengenalgebren, die \mathcal{E} umfassen, der **von \mathcal{E} erzeugte Mengenring**. Man zeige: Die von einem endlichen System $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Teilmengen einer gegebenen Menge X erzeugte Mengenalgebra kann beschrieben werden als das System aller Mengen, die man erhält, wenn man erst für alle $I \subset \Lambda$ die paarweise disjunkten Mengen

$$A_{(I)} = \bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda \cap \bigcap_{\lambda \notin I} (X \setminus A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda \notin I} A_\lambda$$

bildet und dann Vereinigungen derartiger $A_{(I)}$ nimmt. Nimmt man Vereinigungen derartiger $A_{(I)}$ mit $I \neq \emptyset$, so ergibt sich der von den A_λ erzeugte Mengenring. Die von einem beliebigen System von Teilmengen einer gegebenen Menge erzeugte Mengenalgebra ist die Vereinigung der von allen endlichen Teilsystemen erzeugten Mengenalgebren. Der von einem beliebigen System von Teilmengen einer gegebenen Menge erzeugte Mengenring ist die Vereinigung der von allen endlichen Teilsystemen erzeugten Mengenringe.

Übung 1.2.34 (Vergleich von Maßen). Gegeben eine Menge X heißt ein Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ **zweischchnittstabil**, wenn gilt $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$. Man zeige, daß zwei Maße auf ein- und derselben σ -Algebra übereinstimmen, sobald sie auf einem zweischchnittstabilen Erzeugendensystem unserer σ -Algebra übereinstimmen, das darüber hinaus für beide Maße **σ -endlich** ist in dem Sinne, daß die ganze Menge durch eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus besagtem Erzeugendensystem überdeckt werden kann. Hinweis: Man zeige, daß die beiden Maße auf dem von \mathcal{S} erzeugten Mengenring übereinstimmen, und wende dann Caratheodory an. In der Literatur sagt man meist einfacher „schnittstabil“, aber das könnte dahingehend mißverstanden werden, daß möglicherweise die Stabilität unter endlichen Schnitten oder gar unter beliebigen Schnitten gefordert würde.

Übung 1.2.35. Zeigen Sie, daß es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf \mathbb{R} geben kann. Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\lambda(\{a\}) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$; Zeigen Sie anschließend, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lambda([0, 1/n]) = 1/n$. Erweitern Sie als nächstes die Aussage auf Intervalle mit rationalen Endpunkten und schließlich auf beliebige Intervalle. Wenden Sie dann den Satz über Maßfortsetzungen an.

Übung 1.2.36. Zeigen Sie, daß es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf \mathbb{R}^n geben kann. Hinweis: 1.2.35.

Ergänzende Übung 1.2.37 (Benford's Gesetz). Zeigen Sie, daß es auf jedem nichtleeren kompakten Intervall $I = [a, b]$ genau ein topologisches Maß μ gibt, das dem ganzen Intervall das Maß Eins zuweist und das „partiell translationsinvariant“ ist in dem Sinne, daß für jede Borelmenge $A \subset I$ und jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a + A \subset I$ gilt $\mu(A) = \mu(a + A)$. Zeigen Sie, daß es auf jedem nichtleeren kompakten Intervall $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_{>0}$ genau ein topologisches Maß μ gibt, das dem ganzen Intervall das Maß Eins zuweist und das „partiell skaleninvariant“ ist in dem Sinne, daß für jede Borelmenge $A \subset I$ und jedes $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $cA \subset I$ gilt $\mu(A) = \mu(cA)$. Zeigen Sie weiter, daß dieses Maß, wenn unser Intervall nicht nur aus einem Punkt besteht, von der Gestalt $a d \log$ ist mit $a > 0$. Gegeben ein derartiges Maß und I so groß, daß gilt $\beta > 10^n \alpha$ für $n \geq 1$, wird dann für jede Ziffer $i \in \{1, \dots, 9\}$ das Maß der Menge M_i aller $x \in I$, die als Dezimalbruch mit erster von Null verschiedener Ziffer i geschrieben werden können, von $(\log(i+1) - \log(i))/\log(10)$ um weniger als $1/(n+1)$ abweichen. Diese Verteilung der Anfangsziffern „zufälliger“ Zahlenreihen tritt in der Wirklichkeit häufig auf und heißt **Benford's Gesetz**. Benford fand es beim Nachdenken über die Tatsache, daß bei gut gebrauchten Büchern mit Logarithmentafeln die Seiten mit den Logarithmen zu kleinen Anfangsziffern am Rand viel schwärzer sind als die Seiten mit den Logarithmen zu großen Anfangsziffern. Benford's Gesetz wird unter anderem eingesetzt, um Steuerbetrug zu entlarven, da von Menschen willkürlich hingeschriebene Zahlenreihen typischerweise eine andere Verteilung von Anfangsziffern haben.

Ergänzende Übung 1.2.38 (Gleichverteilung im Folgenraum). Auf dem Raum $\text{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\})$ aller Folgen in der zweielementigen Menge $\{W, Z\}$ mit der in [AN2] 1.5.21 erklärten Metrik gibt es genau ein Borelmaß, das für jeden n -gliedrigen Folgenanfang der Menge aller Folgen mit diesem Anfang das Maß 2^{-n} zuordnet. Man zeige weiter, daß die durch die dyadische Entwicklung gegebene Surjektion $\text{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\}) \rightarrow [0, 1]$ stetig ist und daß hier das Maß des Urbilds einer Borelmenge gerade das Lebesguemaß der ursprünglichen Menge ist. Hinweis: Man mag eine Teilmenge unseres Folgenraums „ n -vernünftig“ nennen, wenn sie mit einer Folge auch alle anderen Folgen enthält, die sich von dieser frühestens im n -ten Folgenglied unterscheiden. Man mag eine Teilmenge unseres Folgenraums „vernünftig“ nennen, wenn sie n -vernünftig ist für mindestens ein n . Man mag von der Erkenntnis ausgehen, daß die vernünftigen Teilmengen einen Mengenring bilden, und verwenden, daß alle vernünftigen Teilmengen sowohl offen als auch abgeschlossen und damit nach [AN2] 1.5.21 kompakt sind. Jede Überdeckung einer vernünftigen Teilmenge durch vernünftige Teilmengen besitzt folglich eine endliche Teilüberdeckung.

Ergänzende Übung 1.2.39. Wir betrachten die **Cantor-Menge** C , die aus dem Einheitsintervall $C_0 = [0, 1]$ entsteht, indem wir das mittlere Drittel $(1/3, 2/3)$

herausnehmen, dann aus den beiden so entstehenden kompakten Intervallen wieder jeweils das offene mittlere Drittel und so weiter, und schließlich als C den

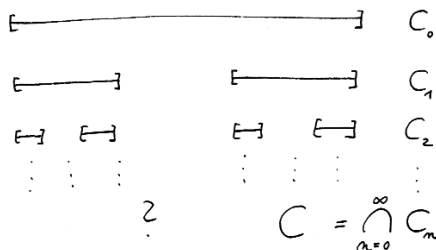


Illustration zur Cantor-Menge

Schnitt über alle Mengen C_n nehmen, die wir in dieser Weise in n Schritten erhalten. Man zeige, daß die Cantor-Menge das Lebesguemaß $\lambda(C) = 0$ Null hat und überabzählbar ist. Hinweis: Man kann die Cantor-Menge auch beschreiben als die Menge aller Zahlen, die sich in der Basis Drei mit einer Null vor dem Komma und ohne die Ziffer Eins ausdrücken lassen, in Formeln

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

Ergänzende Übung 1.2.40. Die Menge aller reellen Zahlen, die sich darstellen lassen durch einen unendlichen Dezimalbruch, in dem die Ziffer 6 nicht vorkommt, bilden eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} vom Lebesguemaß Null.

1.3 Vervollständigung von Maßräumen*

Definition 1.3.1. Eine Teilmenge eines Maßraums, die in einer meßbaren Menge vom Maß Null enthalten ist, heißt eine **Nullmenge** unseres Maßraums. Ein Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt **vollständig**, wenn jede Nullmenge bereits meßbar ist alias zu \mathcal{M} gehört.

Proposition 1.3.2 (Vervollständigung von Maßräumen). 1. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) gibt es genau eine Fortsetzung von μ zu einem Maß μ^* auf der von \mathcal{M} und den μ -Nullmengen erzeugten σ -Algebra \mathcal{M}^* und der so entstehende Maßraum $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ ist vollständig;

2. Die σ -Algebra \mathcal{M}^* besteht aus allen $E \subset X$ derart, daß es $A, B \in \mathcal{M}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$.

Beweis. Erweitern wir μ zu einem äußeren Maß μ^* auf $\mathcal{P}(X)$ wie in Lemma 1.2.22 und wenden auf dieses äußere Maß das Zerlegerlemma 1.2.25 an, so folgt, daß alle μ -Nullmengen bereits μ^* -meßbar sind und daß mithin μ^* ein Maß ist auf

\mathcal{M}^* . Das zeigt die Existenz von μ^* . Für die Eindeutigkeit prüft man, daß \mathcal{M}^* genau aus allen Teilmengen $E \subset X$ besteht derart, daß es $A, B \in \mathcal{M}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$. In der Tat bilden nämlich alle diese E eine σ -Algebra, wie Sie als Übung 1.3.4 selbst prüfen mögen. Jedes erweiterte Maß μ^* nimmt aber auf einer solchen Teilmenge E notwendig den Wert $\mu^*(E) = \mu(A)$ an. \square

1.3.3. Der Maßraum $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ heißt die **Vervollständigung** des Maßraums (X, \mathcal{M}, μ) . Die bezüglich der Vervollständigung des Lebesguemaßes meßbaren Teilmengen von \mathbb{R} oder auch \mathbb{R}^n nennt man die **Lebesgue-meßbaren** Teilmengen oder kurz **Lebesgue-Mengen**. Es ist nicht ganz einfach, eine Lebesgue-Menge in \mathbb{R} explizit anzugeben, die nicht topologisch meßbar ist. Genauer gesagt wüßte ich selbst nicht, wie ich das machen sollte, und müßte einen Logiker um Hilfe bitten. Man kann jedoch zeigen, daß es im Sinne der Mengenlehre „mehr“ Lebesgue-Mengen in \mathbb{R} gibt als topologisch meßbare Teilmengen, vergleiche etwa [AL] 5.4.6.

Übungen

Übung 1.3.4. Man arbeite den Schluß des Beweises von 1.3.2 aus und zeige, daß gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) das Mengensystem aller $E \subset X$ derart, daß es $A, B \in \mathcal{M}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$, eine σ -Algebra ist.

Übung 1.3.5. Zeigen Sie, daß es in \mathbb{R} Teilmengen gibt, die nicht Borel-meßbar und noch nicht einmal Lebesgue-meßbar sind. Hinweis: 1.1.34.

Übung 1.3.6. Man zeige: Eine Teilmenge der reellen Zahlengeraden ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesguemaß genau dann, wenn sie sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge von kompakten Intervallen $[a_n, b_n]$ überdecken läßt derart, daß gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$. Hinweis: 1.2.11 und 1.2.15.

1.4 Meßbare Abbildungen

1.4.1. Bis jetzt haben wir uns nur mit dem Messen von Mengen beschäftigt. Wir haben gesehen, daß das Messen ganz beliebiger Teilmengen der reellen Zahlengerade problematisch ist, konnten jedoch gewisse Mengen als meßbar auszeichnen und solchen Mengen sinnvoll ein Maß zuordnen. Nun wollen wir reellwertigen Funktionen auf Maßräumen ein Integral zuordnen. Wieder ist das für ganz beliebige Funktionen problematisch, und wieder können wir gewisse Funktionen als „meßbar“ auszeichnen und zumindest allen nichtnegativen meßbaren Funktionen sinnvoll ein Integral zuordnen. In einem zweiten Schritt geben wir dann auch eine Definition für das Integral beliebiger meßbarer reellwertiger Funktionen, wann immer ihr Betrag ein endliches Integral hat.

Definition 1.4.2. Seien (X, \mathcal{M}) und (Y, \mathcal{N}) Meßräume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **meßbar**, wenn das Urbild jeder meßbaren Menge meßbar ist, in Formeln $V \in \mathcal{N} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$.

Beispiel 1.4.3. Nach Übung 1.3.5 sind nicht alle Teilmengen von \mathbb{R} borelmeßbar. Die charakteristische Funktion einer nicht borelmeßbaren Teilmenge ist dann eine nicht borelmeßbare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ergänzung 1.4.4. Eine meßbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) in einen Meßraum heißt eine **Zufallsvariable** auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum mit Werten in besagtem Meßraum oder ein **zufälliges Element** von besagtem Meßraum. So würde etwa ein gerechter Würfel modelliert durch eine Abbildung $W : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}$ mit $W^{-1}(i)$ meßbar und $P(W^{-1}(i)) = 1/6$ für $1 \leq i \leq 6$. Das Interesse konzentriert sich in diesem Zusammenhang auf das Studium der Beziehungen zwischen derartigen Zufallsvariablen.

Lemma 1.4.5. *Jede Verknüpfung meßbarer Abbildungen ist meßbar.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Definition. □

1.4.6. Wenn nichts anderes gesagt ist, denken wir uns metrische oder allgemeiner topologische Räume stets mit der durch die Borel'sche σ -Algebra gegebenen Struktur eines Meßraums versehen. Wir machen unsere erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ zu einem Meßraum, indem wir darauf die von allen Intervallen erzeugte σ -Algebra betrachten. Für die natürliche Topologie auf $\bar{\mathbb{R}}$ im Sinne von [AN2] 1.3.6 ist das auch genau die Borel'sche σ -Algebra.

Proposition 1.4.7. *Alle stetigen Abbildungen sind meßbar.*

Beweis. Da die Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen nach [AN2] 1.5.1 offen sind, folgt das aus dem anschließenden Lemma 1.4.10. □

Definition 1.4.8. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

1. Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f_*\mathcal{M} := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{M}\}$ eine σ -Algebra. Es heißt das **Bild unter f** der σ -Algebra \mathcal{M} ;
2. Ist $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine σ -Algebra, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f^*\mathcal{N} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{N}\}$ eine σ -Algebra. Sie heißt das **Urbild unter f** der σ -Algebra \mathcal{N} ;

Beispiel 1.4.9. Ist $i : B \hookrightarrow Y$ die Einbettung einer Teilmenge $B \subset Y$ eines Meßraums (Y, \mathcal{N}) , so erklären wir die **auf B induzierte σ -Algebra** durch

$$\mathcal{N}|_B := i^*\mathcal{N}$$

Die auf B induzierte σ -Algebra besteht also gerade aus allen Schnitten mit B von meßbaren Mengen in Y , in Formeln $\mathcal{N}|_B = \{Z \cap B \mid Z \in \mathcal{N}\}$.

Lemma 1.4.10. Seien (X, \mathcal{M}) und (Y, \mathcal{N}) Meßräume und sei die σ -Algebra \mathcal{N} erzeugt von einem Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{N}$, in Formeln $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{N}$. Genau dann ist $f : X \rightarrow Y$ meßbar, wenn die Urbilder aller Mengen aus \mathcal{E} meßbar sind, wenn also in Formeln gilt

$$V \in \mathcal{E} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$$

Beweis. Wir verwenden unsere Notation $f_*\mathcal{M}$ für das Bild einer σ -Algebra und insbesondere die Erkenntnis 1.4.8, daß $f_*\mathcal{M}$ auch selbst wieder eine σ -Algebra ist. Aus $\mathcal{E} \subset f_*\mathcal{M}$ folgt also $\sigma(\mathcal{E}) \subset f_*\mathcal{M}$ und damit $\mathcal{N} \subset f_*\mathcal{M}$. Das aber bedeutet gerade die Meßbarkeit von f . \square

1.4.11. Weil die Beweise vollständig analog sind und die Terminologie sich als nützlich erweisen wird, formulieren wir auch gleich noch die Analoga dieser Aussagen für topologische Räume.

Definition 1.4.12. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

1. Ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Topologie, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f_*\mathcal{T} := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie, die **Finaltopologie**;
2. Ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine Topologie, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f^*\mathcal{S} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{S}\}$ eine Topologie auf X , die **Initialtopologie**;

Beispiel 1.4.13. Ist $i : B \hookrightarrow Y$ die Einbettung einer Teilmenge in einen topologischen Raum, so ist die Initialtopologie unsere induzierte Topologie aus [AN2] 1.3.16.

Lemma 1.4.14. Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) zwei topologische Räume und sei die Topologie \mathcal{S} erzeugt im Sinne von 1.1.20 von einem Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$. Genau dann ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, wenn die Urbilder aller Mengen aus \mathcal{E} offen sind, wenn also in Formeln gilt

$$V \in \mathcal{E} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$$

Beweis. Vollständig analog zum Beweis von 1.4.10. \square

Definition 1.4.15. Gegeben Meßräume (X, \mathcal{M}) und (Y, \mathcal{N}) heißt die von allen Produkten $A \times B$ mit $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{N}$ erzeugte σ -Algebra $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ die **Produkt- σ -Algebra** oder auch das **äußere Produkt** unserer σ -Algebren.

1.4.16. Die Projektionen eines Produkts von Meßräumen auf seine Faktoren sind meßbar nach 1.4.10. Sind X, Y, Z Meßräume und $f : Z \rightarrow X$ sowie $g : Z \rightarrow Y$ Abbildungen, so sind weiter nach 1.4.10 Abbildungen f und g meßbar genau

dann, wenn $(f, g) : Z \rightarrow X \times Y$ meßbar ist. In der Sprache der Kategorientheorie [LA2] 7.7.1 bedeutet das, daß wir so ein „Produkt in der Kategorie der Meßräume“ erhalten, mit Meßräumen als Objekten und meßbaren Abbildungen als Morphismen.

Definition 1.4.17. Gegeben topologische Räume X, Y erklärt man auf $X \times Y$ die **Produkttopologie** als die Topologie, die erzeugt wird von allen $U \times V$ mit $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$.

Vorschau 1.4.18. Mehr zur Produkttopologie, insbesondere im Fall unendlicher Produkte, findet man in [TM] 1.6.17.

1.4.19. Die Projektionen eines Produkts topologischer Räume auf seine Faktoren sind stetig nach 1.4.14. Sind X, Y, Z topologische Räume und $f : Z \rightarrow X$ sowie $g : Z \rightarrow Y$ Abbildungen, so sind weiter nach 1.4.14 Abbildungen f und g stetig genau dann, wenn $(f, g) : Z \rightarrow X \times Y$ stetig ist. In der Sprache der Kategorientheorie [LA2] 7.7.1 bedeutet das, daß wir so ein „Produkt in der Kategorie der topologischen Räume“ erhalten, mit topologischen Räumen als Objekten und stetigen Abbildungen als Morphismen.

1.4.20. Man sieht zusätzlich leicht ein, daß gegeben zwei metrische Räume die Topologie zur Produktmetrik mit der Produkttopologie zusammenfällt.

Definition 1.4.21. Gegeben ein topologischer Raum X heißt ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine **Basis der Topologie**, wenn die offenen Mengen unseres topologischen Raums X alle beliebigen Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{E} sind. Ein topologischer Raum heißt **abzählbar basiert**, wenn er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Beispiel 1.4.22 (**Basis der Produkttopologie**). Gegeben X, Y topologische Räume bilden die Produkte $U \times V$ mit $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ eine Basis der Produkttopologie. In der Tat ist das System all dieser Produkte stabil unter endlichen Schnitten und nun müssen wir nur unsere explizite Beschreibung 1.1.20 der von einem Mengensystem erzeugten Topologie erinnern.

Beispiel 1.4.23 (**Basis der Produkttopologie, Variante**). Gegeben topologische Räume X, Y und \mathcal{E}, \mathcal{F} jeweils eine Basis der Topologie bilden die Produkte $U \times V$ mit $U \in \mathcal{E}$ und $V \in \mathcal{F}$ eine Basis der Produkttopologie. In der Tat folgt das sofort aus dem vorhergehenden Beispiel.

Beispiel 1.4.24 (**Beispiele zur Eigenschaft „abzählbar basiert“**). Ein überabzählbarer diskreter Raum ist nicht abzählbar basiert. Der \mathbb{R}^n ist abzählbar basiert, wie man leicht einsieht und auch aus der anschließenden Bemerkung folgern kann. Jede Teilmenge eines abzählbar basierten Raums ist abzählbar basiert in Bezug auf ihre Spurtopologie.

Lemma 1.4.25 (Abzählbar basierte metrische Räume). *Ein metrischer Raum ist genau dann abzählbar basiert, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Beweis. Wählen wir aus jeder Menge einer Basis der Topologie einen Punkt aus, so erhalten wir sicher eine dichte Teilmenge. Ist umgekehrt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dicht in einem metrischen Raum, so bilden die offenen Bälle $B(x_n; 1/m)$ eine abzählbare Basis der Topologie. \square

1.4.26 (**Diskussion der Terminologie**). Man nennt metrische Räume, die eine abzählbare dichte Teilmenge besitzen, auch **separabel**. Statt „abzählbar basiert“ sagt man in der Literatur meist, der Raum „besitze eine abzählbare Basis“ oder er „gehörte dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom“. Weiter nennen viele Autoren auch einen allgemeinen topologischen Raum „separabel“, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Das gefällt mir nicht, da dies Konzept meines Erachtens in dieser Allgemeinheit nicht relevant genug ist, um eine eigene Bezeichnung zu verdienen. Im Buch von Halmos zur Maßtheorie wird der Begriff „separabel“ für allgemeine topologische Räume als Synonym für unser „abzählbar basiert“ verwendet, aber damit steht er alleine da.

1.4.27. Besitzt ein topologischer Raum eine abzählbare Basis der Topologie, so erzeugen die offenen Mengen aus dieser Basis die Borel'sche σ -Algebra.

Proposition 1.4.28. *Gegeben abzählbar basierte topologische Räume X, Y ist die Borel'sche σ -Algebra ihres Produkts die Produkt- σ -Algebra der Borel'schen σ -Algebren der Faktoren, in Formeln*

$$\text{Borel}(X) \boxtimes \text{Borel}(Y) = \text{Borel}(X \times Y)$$

Beweis. Die Projektionen auf die Faktoren sind stetig, also sind die Urbilder von Borelmengen wieder Borelmengen. Gegeben $A \in \text{Borel}(X)$ und $B \in \text{Borel}(Y)$ folgt so $A \times Y, X \times B \in \text{Borel}(X \times Y)$. Dann gilt aber auch für den Schnitt $A \times B \in \text{Borel}(X \times Y)$ und es folgt

$$\text{Borel}(X) \boxtimes \text{Borel}(Y) \subset \text{Borel}(X \times Y)$$

sogar für beliebige topologische Räume X, Y . Um die Gegenrichtung zu zeigen, wählen wir zu X und Y jeweils eine abzählbare Basis \mathcal{E}, \mathcal{F} der Topologie. Nach 1.4.23 bilden dann die Produkte $U \times V$ mit $U \in \mathcal{E}$ und $V \in \mathcal{F}$ eine Basis der Produkttopologie. Nach 1.4.27 erzeugen aber diese Produkte bereits die Borel'sche σ -Algebra von $X \times Y$ und so folgt die umgekehrte Inklusion $\text{Borel}(X) \boxtimes \text{Borel}(Y) \supset \text{Borel}(X \times Y)$. \square

Korollar 1.4.29. *Die Summe und das Produkt reellwertiger meßbarer Funktionen sind wieder meßbar.*

Beweis. Sei X ein Meßraum und seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ meßbare Funktionen. Nach 1.4.19 ist dann $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ meßbar in Bezug auf die Produkt- σ -Algebra $\text{Borel}(\mathbb{R}) \boxtimes \text{Borel}(\mathbb{R})$ in \mathbb{R}^2 . Andererseits sind Addition und ebenso die Multiplikation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und folglich meßbar für die σ -Algebra $\text{Borel}(\mathbb{R}^2)$. Da \mathbb{R} abzählbar basiert ist, stimmen diese σ -Algebren nach 1.4.28 überein. Folglich sind $f + g$ und fg als Verknüpfungen meßbarer Abbildungen auch wieder meßbar. \square

Satz 1.4.30 (Meßbarkeit von Grenzwerten von Funktionenfolgen). *Sei ein Meßraum (X, \mathcal{M}) gegeben.*

1. *Eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann meßbar, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \mid f(x) > a\} = f^{-1}(a, \infty]$ meßbar ist in X ;*
2. *Für jede Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind auch ihr Supremum und ihr Infimum $s, i : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s(x) = \sup_n f_n(x)$ beziehungsweise $i(x) = \inf_n f_n(x)$ meßbar;*
3. *Konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ punktweise gegen $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so ist auch f meßbar.*

Beweis. 1. Die Intervalle der Form $(a, \infty]$ erzeugen die σ -Algebra der Borel-Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$ und wir können 1.4.10 anwenden.

2. Es gilt $s^{-1}(a, \infty] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}(a, \infty]$ und $i^{-1}[-\infty, a) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}[-\infty, a)$ und wir können wieder 1.4.10 anwenden.

3. Nach 2 sind auch die Funktionen $s_N(x) = \sup_{n \geq N} f_n(x)$ meßbar, und dann auch die Funktion $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) = \inf_N s_N(x)$. Diese Funktion bezeichnet man auch mit $g = \limsup f_n$ und wir haben gezeigt, daß sie meßbar ist für eine beliebige Folge meßbarer Funktionen. Falls die f_n nun sogar punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergieren, so gilt $f = \limsup f_n$ und mithin ist dann auch f meßbar. \square

Lemma* 1.4.31 (Meßbarkeit punktwieser Grenzwerte, Variante). *Ist X ein Meßraum und Y ein metrischer Raum und konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow Y$ punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : X \rightarrow Y$, so ist auch die Grenzfunktion f meßbar.*

1.4.32. Wir können den dritten Teil von Satz 1.4.30 alternativ als Spezialfall dieses Lemmas erhalten, wenn wir etwa beachten, daß unsere Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ auch als eine metrische Topologie erhalten werden kann. Das Lemma gilt im übrigen mit demselben Beweis für einen beliebigen Hausdorffraum mit der Eigenschaft, daß jede seiner abgeschlossenen Mengen als der Schnitt einer abzählbaren Familie offener Mengen geschrieben werden kann.

Beweis. Nach 1.4.10 reicht es, für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq Y$ zu zeigen, daß ihr Urbild $f^{-1}(A)$ unter f meßbar ist. Nun gibt es jedoch eine absteigende Folge offener Mengen $U_0 \supset U_1 \supset \dots$ mit Schnitt A . Dann ist $f(x) \in A$ gleichbedeutend dazu, daß es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $N = N(x, i)$ gibt mit $f_n(x) \in U_i$ für $n \geq N(x, i)$. Damit können wir $f^{-1}(A)$ wie folgt beschreiben: Wir bilden zunächst für jedes i die Menge

$$V_i := \{x \in X \mid \exists N \text{ mit } n \geq N \Rightarrow f_n(x) \in U_i\} = \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(U_i)$$

und erhalten $f^{-1}(A) = \bigcap_{i \geq 0} V_i$. Diese Darstellung zeigt, daß mit den $f_n^{-1}(U_i)$ auch $f^{-1}(A)$ meßbar sein muß. \square

Ergänzung 1.4.33. Eine Funktion auf einem Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) , die meßbar ist auf dem in Bezug auf das Maß μ vervollständigten Maßraum $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$, nennen wir μ -**meßbar**. Insbesondere heißt eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **Lebesgue-meßbar**, wenn sie λ -**meßbar** ist für λ das Lebesguemaß. Wir werden nach Möglichkeit versuchen, ohne diese Begrifflichkeit auszukommen. Die Beziehung dieses Begriffs zur Meßbarkeit in Bezug auf \mathcal{M} klärt 1.5.17.

1.4.34. Geht man von diskreten Mengen zu allgemeineren „Räumen“ über, so gibt es zwei besonders natürliche Verallgemeinerungen für das Konzept einer Funktion: Funktionen und Maße. Gegeben eine Abbildung $X \rightarrow Y$ können Funktionen auf Y zu Funktionen auf X zurückgezogen werden, Maße auf X jedoch liefern in der Gegenrichtung Bildmaße auf Y . Diese zugegebenermaßen vagen Andeutungen werden im folgenden in speziellen Situationen ausgeführt.

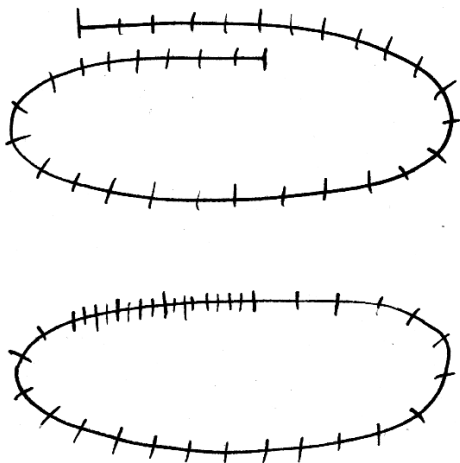
Definition 1.4.35. Gegeben eine meßbare Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ von Meßräumen und ein Maß μ auf X erklärt man das **Bildmaß** $\phi_*\mu$ auf Y dadurch, daß man für jede meßbare Menge $A \subset Y$ setzt

$$(\phi_*\mu)(A) := \mu(\phi^{-1}A)$$

1.4.36. Offensichtlich liefert diese Vorschrift in der Tat ein Maß auf Y . Zusätzlich gilt für jede weitere meßbare Abbildung $\psi : Y \rightarrow Z$ von Meßräumen die Formel $\psi_*(\phi_*\mu) = (\psi \circ \phi)_*\mu$ und für die Identität auf X die Formel $\text{id}_*\mu = \mu$.

Beispiel 1.4.37 (Diracmaß als Bildmaß). Das Bildmaß des Diracmaßes δ auf dem **einpunktigen Meßraum** meß unter einer meßbaren Abbildung in einen Meßraum X ist das Diracmaß am Bildpunkt, in Formeln gilt also für jeden Punkt $x \in X$ und $\text{em}_x : \text{meß} \rightarrow X$ die Abbildung mit Bild $\{x\}$ die Identität

$$\delta_x = \text{em}_{x*} \delta$$



Versuch der graphischen Darstellung eines Bildmaßes. Das Maß einer Teilmenge ist hier so in etwa zu verstehen als die Zahl der Strichle in besagter Teilmenge.

1.4.38. Gegeben ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) heißt das Bildmaß des Wahrscheinlichkeitsmaßes unter einer Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow Y$ die **Verteilung der Zufallsvariable** und wird $P^X := X_*P$ notiert. Im Fall einer reellwertigen Zufallsvariable $Y = \mathbb{R}$ ist also P^X ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} . Seine Verteilungsfunktion im Sinne von 1.2.31 heißt die **Verteilungsfunktion** oder präziser die **kumulative Verteilungsfunktion** unserer Zufallsvariablen.

Beispiel 1.4.39. Die **geometrische Verteilung** mit Parameter $p \in [0, 1)$ auf $\mathbb{N}_{\geq 1}$ ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu = \mu_p$ auf $\mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $\mu(i) = p^{i-1}(1-p)$. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem gerechten Würfel beim i -ten Wurf zum ersten Mal eine Sechs zu würfeln, ist zum Beispiel $\mu_{5/6}(i) = (5/6)^{i-1}(1/6)$.

1.4.40. Manchmal scheint mir die äquivalente Terminologie der **Verwandtschaft** transparenter, die ich nun einführe. Gegeben eine meßbare Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ von Meßräumen und ein Maß μ auf X und ein Maß ν auf Y heißen die beiden Maße **ϕ -verwandt** und wir schreiben

$$\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$$

wenn gilt $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}A)$ für jede meßbare Teilmenge $A \subset Y$. Gleichbedeutend ist per definitionem $\nu = \phi_*\mu$. Jedes Maß hat also unter jeder meßbaren Abbildung genau einen „Vorwärtsverwandten“. Das mag den konzeptionellen Unterschied zwischen Maßen und Funktionen deutlich machen, die im Gegensatz dazu stets genau einen „Rückwärtsverwandten“ haben. Die Verwandtschaft von Maßen erfüllt offensichtlich die für Verwandtschaften gewohnten Regeln, genauer gilt $\text{id} : \mu \rightsquigarrow \mu$ und aus $\psi : \lambda \rightsquigarrow \mu$ sowie $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$ folgt $(\phi \circ \psi) : \lambda \rightsquigarrow \nu$.

1.4.41. Unter einer **Verfeinerung** eines Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, \mathcal{A}, P) verstehe ich eine meßbare Abbildung $\Omega' \rightarrow \Omega$ von einem weiteren Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ nach Ω derart, daß P das Bildmaß von P' ist. Ganz allgemein interessieren in der Wahrscheinlichkeitstheorie nur diejenigen Konstruktionen und Definitionen, die veträglich sind mit dem Zurückholen unter einer beliebigen Verfeinerung. Im Fall eines Würfels könnte die Menge Ω etwa aus den sechs möglichen Ausgängen eines Würfelxperiments bestehen, sie könnte jedoch auch viel größer sein und etwa aus allen möglichen Ausgängen eines einmaligen Würfelns mit hundert Würfeln bestehen, von denen unser Würfel nur einer ist, oder aus allen Paaren in $\{1, \dots, 6\} \times \{\text{an, aus}\}$ bestehen, bei denen der zweite Eintrag erinnert, ob das Licht in dem Raum, in dem gewürfelt wurde, nun an oder aus war. Man beachte, daß bei Verfeinerungen neue Ereignisse hinzukommen können und Elementarereignisse im allgemeinen keine Elementarereignisse bleiben werden. Insofern ist der Begriff eines Elementarereignisses der Wahrscheinlichkeitstheorie fremd.

Übungen

Übung 1.4.42. Man zeige, daß jede linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar ist. Hinweis: Man schreibe f als punktweisen Grenzwert stückweise konstanter Funktionen. Man zeige, daß jede in jeder Variablen monoton wachsende und linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar ist.

Übung 1.4.43. Alle monotonen Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sind meßbar.

Ergänzende Übung 1.4.44. Jeder kompakte metrische Raum ist abzählbar basiert.

Übung 1.4.45. Jede offene Überdeckung eines abzählbar basierten Raums besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung. In einem abzählbar basierten Raum ist jede diskrete Teilmenge abzählbar.

Übung 1.4.46. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **final**, wenn Y die Finaltopologie in Bezug auf f trägt. Man zeige: Gegeben $f : X \rightarrow Y$ final und ein weiterer topologischer Raum Z ist eine Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ genau dann stetig, wenn $g \circ f$ stetig ist.

Übung 1.4.47. Das Produkt von zwei kompakten topologischen Räumen ist wieder kompakt. Hinweis: Es reicht zu zeigen, daß jede Überdeckung durch „offene Quader“ eine endliche Teilüberdeckung hat.

1.5 Integral von nichtnegativen Funktionen

Definition 1.5.1. Eine Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt, nenne ich eine **Stufenfunktion**.

1.5.2. Ist X eine Menge und $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist die **charakteristische Funktion** $\chi_A = [A] : X \rightarrow \{0, 1\}$ von A eine Stufenfunktion. Ich erinnere daran, daß sie definiert wird durch die Vorschrift

$$[A](x) := \begin{cases} 1 & x \in A; \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Sie heißt auch die **Indikatorfunktion von A** und wird oft alternativ 1_A notiert. Ich ziehe jedoch in meinem Kampf gegen den Index die Notation $[A]$ vor.

Beispiele 1.5.3. Ist (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, so ist jede reellwertige meßbare Stufenfunktion $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ von der Form

$$s = \sum_{i=1}^n c_i [A_i]$$

für eine Zerlegung $X = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ von X in endlich viele paarweise disjunkte meßbare Teilmengen und geeignete $c_i \in \mathbb{R}$. Offensichtlich bilden dann auch die reellwertigen meßbaren Stufenfunktionen einen Untervektorraum im Raum aller reellwertigen Funktionen auf X .

Definition 1.5.4 (Integral nichtnegativer meßbarer Stufenfunktionen). Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und eine meßbare reellwertige nichtnegative Stufenfunktion $s : X \rightarrow [0, \infty)$ erklärt man das **Integral** $\int s = \int_X s = \int_X s\mu \in [0, \infty)$ **von s über X** durch die Formel

$$\int_X s\mu := \sum_{c \in s(X) \setminus 0} c \cdot \mu(s^{-1}(c))$$

1.5.5. Ich habe in dieser Formel den Summanden für $c = 0$ weggelassen, um den Ausdruck $0 \cdot \infty$ zu vermeiden. Im folgenden erweist es sich jedoch als bequemer, diesen Summanden zuzulassen und mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$ zu arbeiten. Weiter habe ich nur $c \in s(X)$ statt $c \in \mathbb{R}$ geschrieben, um eine endliche Summe zu erhalten. Da aber die Summanden für $c \notin s(X)$ eh Null sind, hätten wir, ohne etwas am Resultat zu ändern, mit dem Begriff der Summierbarkeit beliebiger Familien [AN1] 4.1.23 auch über alle $c \in \mathbb{R}$ summieren können.

1.5.6 (**Eigenschaften des Integrals reeller meßbarer Stufenfunktionen**). Natürlich gilt $\int \alpha s = \alpha \int s \forall \alpha \in (0, \infty)$. Ist $t : X \rightarrow [0, \infty)$ eine zweite meßbare Stufenfunktion, so gilt weiter

$$\int s + t = \int s + \int t$$

und mithin auch $s \leq t \Rightarrow \int s \leq \int t$. In der Tat, schreiben wir $X_{a,b} := s^{-1}(a) \cap t^{-1}(b)$, so ergibt sich mit der Additivität des Maßes unmittelbar

$$\begin{aligned} \int s + t &= \sum_c c \cdot \mu(\bigcup_{c=a+b} X_{a,b}) = \sum_{a,b} (a+b) \cdot \mu(X_{a,b}) \\ \int s &= \sum_a a \cdot \mu(\bigcup_b X_{a,b}) = \sum_{a,b} a \cdot \mu(X_{a,b}) \\ \int t &= \sum_b b \cdot \mu(\bigcup_a X_{a,b}) = \sum_{a,b} b \cdot \mu(X_{a,b}) \end{aligned}$$

Für $s := \sum_{i=1}^n c_i [A_i]$ mit $c_i \in [0, \infty)$ wird also das Integral gegeben durch die Formel $\int s = \sum_i c_i \mu(A_i)$.

Definition 1.5.7 (Integral nichtnegativer Funktionen). Gegeben ein Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ und eine meßbare Abbildung $f : X \rightarrow [0, \infty]$ definieren wir ein Element $\int f\mu$ aus $[0, \infty]$, das **Integral von f über X** , als das Supremum der Integrale aller reellwertigen nichtnegativen meßbaren Stufenfunktionen $s : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $s(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$, in Formeln

$$\int f\mu := \sup_{s \leq f} \int_X s\mu$$

1.5.8. Ist f bereits selbst eine reelle Stufenfunktion, so wird das fragliche Supremum bei $s = f$ angenommen, da ja für Stufenfunktionen gilt $s \leq f \Rightarrow \int s \leq \int f$, und wir erhalten unser Integral von Stufenfunktionen 1.5.4 für $s = f$.

1.5.9. Wir verwenden für dies Integral auch die Notationen

$$\int f = \int_X f \mu = \int_X f(x) \mu \langle x \rangle$$

Die eckigen Klammern sollen andeuten, daß mit $\mu \langle x \rangle$ nicht der Wert einer etwaigen Funktion μ an einer Stelle x gemeint ist. Vielmehr wird dieser Ausdruck erst in Verbindung mit dem Integralzeichen sinnvoll.

1.5.10 (**Diskussion der Notation**). In der Literatur findet man meist die Notation $\int_X f \, d\mu$. Diese leider allgemein übliche Notation scheint mir jedoch im Lichte der ursprünglichen Bedeutung des Symbols d unter dem Integralzeichen völlig abwegig, um nicht zu sagen irreführend: Das Differential d kann aus einer Funktion ein Maß machen, wie etwa in 1.2.9, aber wo bereits ein Maß steht, hat das Differential nichts mehr zu suchen. Neuerdings sieht man vielfach die Notation $\int f(x) \mu(dx)$, die mich aber im Fall allgemeiner Maßräume auch nicht überzeugt: Man denke nur einmal an das Zählmaß auf einem diskreten Raum.

1.5.11 (**Bedeutung der Meßbarkeit**). Unsere Definition des Integrals 1.5.7 ist sogar für beliebige nicht notwendig meßbare Funktionen $f : X \rightarrow [0, \infty]$ sinnvoll. Das Supremum heißt dann das **Unterintegral von f** . Der Beweis des folgenden Satzes über monotone Konvergenz zeigt, welche Rolle die Meßbarkeit von f spielt. Der Beweis des gleich anschließenden Satzes 1.5.14 wird weiter zeigen, wie die Meßbarkeit von f und g in den Beweis der Additivität $\int f + g = \int f + \int g$ eingeht, die im allgemeinen nicht mehr gilt.

Satz 1.5.12 (über monotone Konvergenz). *Gegeben (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und (f_n) eine monoton wachsende Folge $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \dots$ meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ist auch der punktweise Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ der f_n eine meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ und es gilt*

$$\int_X f \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \mu$$

1.5.13. Das Bild zu [AN1] 6.1.14 der immer spitzeren Dächer direkt rechts vom Ursprung zeigt eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergieren, ohne daß ihre Integrale gegen Null streben. Die Annahme der Monotonie unserer Folge ist also wesentlich.

Beweis. Die Meßbarkeit von f folgt aus 1.4.30. Die Abschätzung \geq ist evident. Es gilt, \leq zu zeigen. Dafür reicht es, wenn wir für jede meßbare Stufenfunktion $s : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $s \leq f$ und jedes $\eta \in (0, 1)$ die Abschätzung

$$\eta \int s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

zeigen. Nun haben wir ja $s = \sum_{i=0}^r c_i [A_i]$ für geeignete paarweise disjunkte meßbare Mengen A_i und $c_i \in (0, \infty)$. Setzen wir $A_i^n = \{x \in A_i \mid f_n(x) \geq \eta c_i\}$, so sind auch die A_i^n meßbar und es gilt $A_i^0 \subset A_i^1 \subset A_i^2 \subset \dots$ sowie $\bigcup A_i^n = A_i$. Nach 1.1.37 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_i^n) = \mu(A_i)$$

Betrachten wir die Stufenfunktionen $s_n = \sum_i c_i [A_i^n]$, so gilt mithin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \eta s_n = \int \eta s$$

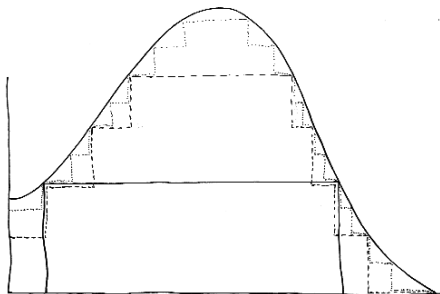
Andererseits haben wir aber nach Konstruktion $\eta s_n \leq f_n$ und folglich $\int \eta s_n \leq \int f_n$. Bilden wir nun auf beiden Seiten den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$, so ergibt sich zusammenfassend $\int \eta s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ wie gewünscht. \square

Satz 1.5.14 (Eigenschaften des Integrals nichtnegativer Funktionen). Gegeben nichtnegative meßbare Funktionen f, g mit Werten in $[0, \infty]$ auf einem Maßraum gilt

1. $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$;
2. $\int cf = c \int f \quad \forall c \in (0, \infty)$;
3. $\int f + g = \int f + \int g$.

Beweis. Nur der dritte Punkt braucht einen Beweis. Sind f und g reelle Stufenfunktionen, so haben wir die Behauptung schon in 1.5.6 gezeigt. Um den allgemeinen Fall daraus abzuleiten, brauchen wir ein Lemma.

Lemma 1.5.15 (Monotone Approximation durch Stufenfunktionen). Gegeben (X, \mathcal{M}) ein Maßraum und $f : X \rightarrow [0, \infty]$ eine meßbare Funktion existiert eine monotone Folge $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots$ von meßbaren Stufenfunktionen mit Werten in $[0, \infty)$, die punktweise gegen f konvergiert.



Die ersten Glieder unserer monotonen Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen, die punktweise gegen eine gegebene nichtnegative Funktion konvergieren.

Beweis. Wir konstruieren φ_n zum Beispiel wie folgt: Sei $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = n$ die äquidistante Einteilung von $[0, n]$ in Stücke der Länge 2^{-n} , also $r = n2^n$ und $a_i = i2^{-n}$. Wir setzen $A_i = f^{-1}[a_i, a_{i+1})$ für $0 \leq i < r$ sowie $A_r = f^{-1}[n, \infty]$ und bilden $\varphi_n = \sum_{i=0}^r a_i \mathbb{1}_{A_i}$. Es ist offensichtlich, daß wir so eine monotone Folge von Stufenfunktionen erhalten, die punktweise gegen f konvergiert. \square

Jetzt schreiben wir f und g als punktweise Grenzwerte von monotonen Folgen meßbarer Stufenfunktionen $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots$ und $0 \leq \psi_0 \leq \psi_1 \leq \dots$ nach 1.5.15 und folgern mit dem Satz 1.5.12 über monotone Konvergenz

$$\int f + g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n + \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n = \int f + \int g \quad \square$$

1.5.16 (Integrale über Restriktionen von Maßen). Ist (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $A \subset X$ eine meßbare Teilmenge und $(A, \mathcal{M}|_A, \mu|_A)$ der induzierte Maßraum nach 1.1.41, so notieren wir Integrale in Bezug auf diesen Maßraum gerne $\int_A f \mu$ oder auch $\int_A f$. Ist $f : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar, so haben wir offensichtlich

$$\int_A f = \int_X [A]f$$

Hier ist links das Integral der Restriktion von f auf A gemeint und rechts das Integral des Produkts von f mit der charakteristischen Funktion von A , gebildet mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

Ergänzung 1.5.17. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Für jede μ -meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ im Sinne von 1.4.33 gibt es eine meßbare Funktion $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$, die außerhalb einer μ -Nullmenge mit f übereinstimmt. In der Tat können wir f nach 1.5.15 schreiben als punktweisen Grenzwert einer Folge von μ -meßbaren Stufenfunktionen $f(x) = \lim s_n(x)$. Wir können nun nach 1.3.2 die Grundflächen aller Stufen von s_n zu meßbaren Mengen verkleinern, indem wir jeweils eine μ -Nullmenge wegnehmen. Die Vereinigung dieser Nullmengen ist eine meßbare Nullmenge A_n mit $[A_n]s_n$ meßbar. Die Vereinigung aller A_n ist dann eine meßbare Menge A vom Maß Null mit $[A]s_n$ meßbar für alle n . Dann ist aber $[A]f$ der punktweise Grenzwert der $[A]s_n$ und ist auch meßbar.

Übungen

Übung 1.5.18 (Verwandtschaftsverträglichkeit des Integrals). Sei $\phi : X \rightarrow Y$ eine meßbare Abbildung von Meßräumen. Seien μ und ν unter ϕ verwandte Maße auf X beziehungsweise Y , in Formeln $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$, und seien f und g unter ϕ verwandte meßbare Funktionen nach $[0, \infty]$, in Formeln $\phi : f \rightsquigarrow g$. So gilt

$$\int_X f \mu = \int_Y g \nu$$

Ist gleichbedeutend in unserer alternativen Terminologie μ ein Maß auf X und $g : Y \rightarrow [0, \infty]$ meßbar, so gilt $\int_X (g \circ \phi) \mu = \int_Y g(\phi_* \mu)$.

Übung 1.5.19. Sei (X, \mathcal{M}) ein Maßraum. Man zeige: Die Summe zweier Maße μ, ν auf \mathcal{M} ist wieder ein Maß $\mu + \nu$ auf \mathcal{M} und für jede meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ gilt $\int f(\mu + \nu) = \int f\mu + \int f\nu$.

Übung 1.5.20. Sei (N, μ) ein Maßraum mit dem Nullmaß $\mu(N) = 0$. So verschwindet für jede meßbare Funktion $f : N \rightarrow [0, \infty]$ das Integral, in Formeln

$$\int_N f\mu = 0$$

Übung 1.5.21. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ eine Zerlegung in abzählbar viele paarweise disjunkte meßbare Teilmengen. So gilt für jede meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ die Formel

$$\int_X f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{X_n} f$$

Ergänzende Übung 1.5.22. Gegeben eine meßbare nichtnegative Funktion g auf einem Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) mit $\int_X g\mu < \infty$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\alpha = \alpha_\varepsilon > 0$ derart, daß für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt

$$\mu(A) < \alpha \Rightarrow \int_A g\mu < \varepsilon$$

Hinweis: Es gibt sicher eine meßbare Stufenfunktion $h : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $h \leq g$ und $\int g\mu \leq \int h\mu + \varepsilon/2$.

Ergänzende Übung 1.5.23. Gegeben eine meßbare nichtnegative Funktion g auf einem Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) mit $\int_X g\mu < \infty$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\beta = \beta_\varepsilon > 0$ mit

$$\int \inf(g, \beta)\mu < \varepsilon$$

Hinweis: Es gibt sicher eine meßbare Stufenfunktion $h : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $h \leq g$ und $\int g\mu \leq \int h\mu + \varepsilon/2$.

Übung 1.5.24. Man zeige: Gegeben ein Maßraum X und eine Folge (f_n) nichtnegativer meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ist auch ihre Summe $\sum f_n$ meßbar und es gilt

$$\int \sum f_n = \sum \int f_n$$

Diese Aussage wird sich als ein Spezialfall des positiven Fubini 1.7.6 erweisen.

Übung 1.5.25 (Produkte von Maßen mit Funktionen). Man zeige: Ist (X, μ) ein Maßraum und $g : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar, so erhalten wir ein weiteres Maß $g\mu$ auf X durch die Vorschrift $(g\mu)(A) := \int_A g\mu$. Für jede weitere meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ gilt mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0 = \infty \cdot 0$ die Identität von Maßen $f(g\mu) = (fg)\mu$.

Übung 1.5.26 (Bildmaße zu Produkten von Maßen mit Funktionen). Sei $\phi : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus von Meßräumen. Seien $f : X \rightarrow [0, \infty]$ und $g : Y \rightarrow [0, \infty]$ die dazu verwandte meßbare Funktion $\phi : f \rightsquigarrow g$. Seien μ ein Maß auf X und ν das dazu verwandte Maß auf Y , also $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$. So sind auch die Maße $f\mu$ und $g\nu$ verwandt, in Formeln

$$\phi : f\mu \rightsquigarrow g\nu$$

Übung 1.5.27. Ist (X, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sind $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar, so gilt die Gleichheit von Maßen $f\mu = g\mu$ genau dann, wenn f und g außerhalb einer meßbaren Menge vom Maß Null übereinstimmen. Man gebe auch ein Gegenbeispiel im Fall nicht σ -endlicher Maßräume. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $\mu(X) < \infty$ zurück und betrachte dann zunächst die Mengen $\{x \mid n > f(x) > g(x) + 1/n\}$.

Ergänzende Übung 1.5.28. Nach 1.2.27 gibt es für jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau ein topologisches Maß df auf \mathbb{R} mit $(df)([a, b)) = f(b) - f(a)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man zeige: Ist unser f zusätzlich stetig differenzierbar, so stimmt df überein mit dem Vielfachen $f'(x) dx$ des Lebesguemaßes im Sinne von 1.5.25.

1.6 Integrierbare Funktionen und ihr Integral

Definition 1.6.1. Gegeben ein Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ **integrierbar**, wenn sie meßbar ist und wenn zusätzlich gilt $\int |f| < \infty$ im Sinne des Integrals nichtnegativer Funktionen 1.5.7. Wir erklären das **Integral** $\int f \in \mathbb{R}$ einer integrierbaren Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

Hier bezeichnet $f^+, f^- : X \rightarrow [0, \infty)$ den **positiven** beziehungsweise **negativen Anteil** von f , der gegeben wird durch $f^\pm(x) = \sup(\pm f(x), 0)$. Die Menge aller integrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ notieren wir je nach der gewünschten Präzision $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X; \mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X; \mathcal{M}, \mu)$.

1.6.2 (Beziehung unserer beiden Varianten des Integralbegriffs). Wir haben nun genau genommen für jeden Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) zwei Integrale definiert: Ein Integral für meßbare nichtnegative Funktionen mit Werten in $[0, \infty]$, das Werte in

$[0, \infty]$ annimmt, und ein Integral für integrierbare Funktionen mit Werten in \mathbb{R} , das Werte in \mathbb{R} annimmt. Offensichtlich stimmen im Fall einer nichtnegativen reellwertigen integrierbaren Funktion diese beiden Integrale überein, auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche liefern unsere beiden Varianten des Integralbegriffs in anderen Worten dasselbe. Es ist deshalb sinnvoll, für beide Konzepte dasselbe Symbol zu verwenden.

Ergänzung 1.6.3 (Erweiterungen des Integralbegriffs). Man kann in einer gemeinsamen Verallgemeinerung unserer beiden Varianten des Integralbegriffs auch beliebigen meßbaren Funktionen mit Werten in $(-\infty, \infty]$ und integrierbarem Negativteil f_- noch sinnvoll ein Integral in $(-\infty, \infty]$ zuordnen. In dieser Allgemeinheit werde ich jedoch das Integral nie verwenden.

Ergänzung 1.6.4 (Erweiterungen des Begriffs der Integrierbarkeit). Der Begriff der Integrierbarkeit wird in der Literatur oft weiter gefaßt als in diesem Text, um alle Funktionen einzuschließen, denen man „noch irgendwie in sinnvoller Weise ein Integral zuordnen kann“. Eine so abgeänderte Terminologie entspricht möglicherweise besser unserem Sprachempfinden, sie schien mir jedoch für die präzise Formulierung der Theorie ungeschickt. Hier will ich die verschiedenen in der Literatur gängigen Begriffsvarianten Revue passieren lassen. Zunächst mag man auch solche Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ noch „integrierbar“ nennen wollen, die im Sinne der vorhergehenden Definition integrierbar sind in Bezug auf den vervollständigten Maßraum. In einer anderen Richtung mag man auch solche Funktionen $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ noch „integrierbar“ nennen wollen, für die die Stellen, an denen sie einen der Werte $\pm\infty$ annimmt, eine Nullmenge bilden, auf deren Komplement sie in dann unserem Sinne integrierbar sind. Weiter kann man diese beiden Erweiterungen auch noch kombinieren. Und schließlich versteht man oft unter einer „integrierbaren Funktion“ gewisse Objekte, die im Sinne der Mengenlehre streng genommen gar keine Funktionen mehr sind und die wir in 2.2.20 als „integrierbare fast überall definierte Funktionen“ einführen werden. Diese Objekte hängen dann nicht mehr davon ab, mit Hilfe welcher der obigen Begriffsvarianten wir sie konstruieren.

Ergänzung 1.6.5. Gegeben eine reellwertige integrierbare Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) heißt ihr Integral der **Erwartungswert** der Zufallsvariable und wird $E(X) := \int_{\Omega} X(\omega)P\langle\omega\rangle$ notiert.

Beispiel 1.6.6 (Integrierbarkeit und absolute Konvergenz). Ist I eine abzählbare Menge, so ist eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für das Zählmaß genau dann, wenn für eine oder gleichbedeutend jede „Abzählung“ von I die Reihe $\sum_{i \in I} f(i)$ absolut konvergiert. Das Integral unserer Funktion ist in diesem Fall genau der Grenzwert der Reihe. Ist I eine beliebige Menge, so ist eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für das Zählmaß genau dann, wenn die Familie der $f(i)$

summierbar ist im Sinne von [AN1] 4.1.23, was ja nach [AN1] 4.1.25 auch im Wesentlichen absolute Konvergenz bedeutet.

1.6.7. Aus der Definition erhalten wir für f, g integrierbar sofort $|\int f| \leq \int |f|$ und $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

Satz 1.6.8 (Linearität des Integrals). *Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) ist der Raum $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X)$ aller integrierbaren Funktionen ein Untervektorraum im Raum aller Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}$ und das Integral ist eine lineare Abbildung*

$$\int : \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

Beweis. Wir überlassen den Nachweis der ersten Aussage dem Leser und zeigen nur die Linearität des Integrals. Man kann sie direkt aus Übung [LA1] 3.6.14 alias der anschließenden Ergänzung 1.6.9 folgern, und im folgenden schreiben wir nur eine Lösung dieser Übung in unserem Spezialfall aus. Zunächst zeigen wir die Additivität

$$\int f + g = \int f + \int g$$

Seien $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ und $f + g = h = h^+ - h^-$ die Zerlegungen in den positiven und negativen Anteil. Wir folgern durch Einsetzen $f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$ und mit 1.5.14 ergibt sich $\int f^+ + \int g^+ + \int h^- = \int f^- + \int g^- + \int h^+$, woraus mit der Definition dann wieder $\int f + \int g = \int f + g$ folgt. Nun zeigen wir noch die Verträglichkeit mit der Multiplikation mit Skalaren

$$\int cf = c \int f$$

Für $c = -1$ folgt das aus den Definitionen, für $c \geq 0$ folgt es aus 1.5.14, und der allgemeine Fall ergibt sich aus diesen beiden Spezialfällen. \square

1.6.9 (Integral als lineare Fortsetzung). Gegeben Vektorräume V, W über einem angeordneten Körper und ein erzeugender Konvexkegel $C \subset V$ erinnere ich daran, daß man nach Übung [LA1] 3.6.14 jede positivlineare Abbildung $\varphi : C \rightarrow W$ eindeutig fortsetzen kann zu einer linearen Abbildung $V \rightarrow W$. Unser Raum $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X)$ ist quasi per definitionem der vom Konvexkegel der nichtnegativen integrierbaren Funktionen erzeugte Untervektorraum im Raum aller Funktionen, unser Lebesgueintegral ist genau diese Fortsetzung und unsere Argumentation liefert allgemeiner auch eine Lösung der erwähnten Übungsaufgabe aus der linearen Algebra. Allgemeiner zeigt man induktiv, daß gegeben Vektorräume V_1, \dots, V_r, W über einem angeordneten Körper und erzeugende Konvexkegel $C_i \subset V_i$ auch jede in jeder Variablen positivlineare Abbildung

$$\varphi : C_1 \times \dots \times C_r \rightarrow W$$

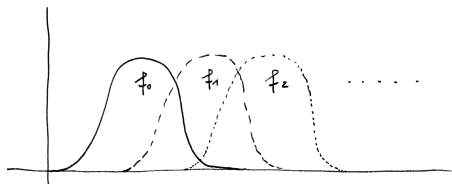
auf genau eine Weise zu einer multilinearen Abbildung $\varphi : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$ fortgesetzt werden kann. Auch das wird sich in der Integrationstheorie als hilfreich erweisen.

Satz 1.6.10 (über dominierte Konvergenz). Seien (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge meßbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Gibt es eine integrierbare Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f_n| \leq g$ für alle n , so sind alle f_n und auch f integrierbar und es gilt

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

1.6.11. Eine eher unwesentliche Verallgemeinerung erhält man, wenn man allgemeiner nur eine Domination der Konvergenz durch eine meßbare Funktion $g : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $\int g < \infty$ voraussetzt: Aus dieser Annahme folgt nämlich, daß g außerhalb einer Nullmenge doch wieder reelle Werte annehmen muß, und so finden wir uns dann unmittelbar in der Situation des Satzes wieder.

1.6.12. Andere Quellen sprechen gleichbedeutend vom **Satz über majorisierte Konvergenz**.



Eine Folge integrierbarer Funktionen auf der reellen Zahlengeraden, die zwar punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Integrale jedoch keine Nullfolge bilden. In diesem Fall können wir auch offensichtlich keine alle Funktionen unserer Folge dominierende integrierbare Funktion g finden.

Beweis. Aus unseren Annahmen folgt $\int |f_n| \leq \int g < \infty$, also sind die f_n integrierbar. Weiter ist f auch meßbar als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen und dann ist mit demselben Argument auch f integrierbar. Um die Vertauschbarkeit des Grenzwerts mit dem Integral zu zeigen, betrachten wir nun die Funktionenfolgen

$$\begin{aligned} i_n(x) &= \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\} \\ s_n(x) &= \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\} \end{aligned}$$

Sie bestehen aus meßbaren Funktionen, beide Folgen konvergieren punktweise gegen f , und es gilt

$$-g \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq s_1 \leq s_0 \leq g$$

Mit dem Satz über monotone Konvergenz erhalten wir also $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g + i_n = \int g + f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g - s_n = \int g - f$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int i_n = \int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n$$

Da aber nach Definition gilt $i_n \leq f_n \leq s_n$, folgt die Behauptung aus dem Quetschlemma [AN1] 3.5.35. \square

Korollar 1.6.13 (Riemannintegral als Lebesgueintegral). *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten reellen Intervall ist integrierbar im Sinne der vorhergehenden Definition 1.6.1 und ihr Riemannintegral stimmt mit ihrem Lebesgueintegral überein.*

Beweis. Jede stetige reellwertige Funktion f auf einem kompakten reellen Intervall $[a, b]$ ist meßbar und beschränkt. Aus $|f| \leq M$ folgt dann sofort $\int |f| \leq M(b - a) < \infty$ und damit die Integrierbarkeit von f . Bilden wir Stufenfunktionen f_r , indem wir $[a, b]$ äquidistant unterteilen durch Zwischenpunkte $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ und f_r auf $[a_{i-1}, a_i)$ konstant den Wert $f(a_i)$ geben und bei b den Wert $f(b)$, so konvergieren die f_r wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f punktweise gegen f . Andererseits sind ihre Integrale offensichtlich genau unsere Riemannsummen $S^r(f)$ aus [AN1] 5.2.5, in Formeln $S^r(f) = \int f_r$, und für $r \rightarrow \infty$ strebt die linke Seite nach [AN1] 5.2.5 gegen das Riemannintegral und die Rechte nach dem Satz über dominierte Konvergenz 1.6.10 gegen das Lebesgueintegral von f . \square

Übungen

Übung 1.6.14 (Produkte von Maßen mit Funktionen, Variante). Ist (X, μ) ein Maßraum und $g : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, so ist f integrierbar in Bezug das Maß $(g\mu)$ aus Übung 1.5.25 genau dann, wenn unter der Konvention $0 \cdot \infty = 0$ die Funktion fg integrierbar ist in Bezug auf μ , und unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int (fg) \mu = \int f (g\mu)$$

Übung 1.6.15. Auf einem topologischen Raum mit einem Borelmaß ist jede stetige reellwertige Funktion mit kompaktem Träger integrierbar.

Übung 1.6.16. Man zeige, daß für jede integrierbare Funktion die Menge der Punkte, auf denen sie nicht den Wert Null annimmt, σ -endlich sein muß.

Übung 1.6.17 (Vertauschen von Integration und Ableitung). Sei (X, μ) ein Maßraum und $I \subset \mathbb{R}$ halboffen und $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung derart, daß $x \mapsto f(x, t)$ integrierbar ist für alle $t \in I$ und $t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar für alle $x \in X$. Existiert eine integrierbare Abbildung $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \geq |\partial_t f(x, t)|$ für alle x und t , so ist $x \mapsto \partial_t f(x, t)$ integrierbar für alle t und es gilt

$$\partial_t \int f(x, t) \mu\langle x \rangle = \int \partial_t f(x, t) \mu\langle x \rangle$$

Hinweis: Dominierte Konvergenz 1.6.10 und Mittelwertsatz.

Übung 1.6.18 (Integrale unter Bildmaßen). Man folgere aus 1.5.18, daß das Integral auch in dieser Situation Verwandtschaft respektiert. Sind genauer $\phi : X \rightarrow Y$ eine meßbare Abbildung von Meßräumen, μ ein Maß auf X und $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Abbildung, so ist $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar in Bezug auf $\phi_*\mu$ genau dann, wenn $g \circ \phi$ integrierbar ist in Bezug auf μ , und unter dieser Voraussetzung

$$\int_Y g(\phi_*\mu) = \int_X (g \circ \phi)\mu$$

Übung 1.6.19 (Satz von Beppo Levi). Sei f_n eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen. Ist die Folge ihrer Integrale beschränkt, so ist die Menge N aller $x \in X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$ meßbar vom Maß Null und die Funktion $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n : (X \setminus N) \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar mit Integral $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

Übung 1.6.20. Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein nichtleerer kompakter zweidimensionaler Quader und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Träger in Q . Sei weiter μ ein Borelmaß auf \mathbb{R}^2 . Für $r \geq 1$ definieren wir dann die r -te **Riemannsumme** $S^r(f; \mu)$ von f wie folgt: Wir betrachten die äquidistanten Unterteilungen

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$$

$$c = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_r = d$$

der Kanten unseres Rechtecks, erhalten auf diese Weise r^2 klitzekleine halboffene Rechtecke $Q_{i,j}^{\pm} = [a_i, a_{i+1}) \times [c_j, c_{j+1})$ und setzen

$$S^r(f; \mu) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(a_i, c_j) \mu(Q_{i,j}^{\pm})$$

Man zeige, daß unter unseren Annahmen diese Riemannsummen gegen das Integral streben, in Formeln

$$\int_Q f \mu = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f; \mu)$$

Übung 1.6.21. Ist (X, μ) ein Maßraum und $g : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar und $g\mu$ das in 1.5.25 konstruierte Maß, so zeige man für $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, daß f integrierbar ist in Bezug auf $(g\mu)$ genau dann, wenn unter der üblichen Konvention $0 \cdot \infty = 0$ die Funktion fg integrierbar ist in Bezug auf μ , und daß unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int (fg) \mu = \int f (g\mu)$$

Übung 1.6.22. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und (Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f : \Omega \rightarrow I$ integrierbar. Man zeige, daß dann auch $\int_{\Omega} f \mu$ in I liegt.

Übung 1.6.23. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, also nach [AN1] 3.2.48 stetig im Inneren von I . Seien weiter (Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f : \Omega \rightarrow I$ integrierbar. So gilt die **Jensen'sche Ungleichung**

$$\phi \left(\int_{\Omega} f \mu \right) \leq \int_{\Omega} (\phi \circ f) \mu$$

Auf der rechten Seite ist die Formulierung etwas sorglos, man möge genauer $\int_{\Omega} (\phi \circ f)^- \mu < \infty$ zeigen und die rechte Seite als $\int_{\Omega} (\phi \circ f)^+ \mu - \int_{\Omega} (\phi \circ f)^- \mu$ verstehen. Hinweis: Ist $t := \int_{\Omega} f \mu$ ein Randpunkt von I , so muß f außerhalb einer Nullmenge konstant sein. Sonst liegt der Graph von ϕ oberhalb einer Geraden durch $(t, \phi(t))$, es gibt also in Formeln $c \in \mathbb{R}$ mit $\phi(s) \geq \phi(t) + c(s - t)$ für alle $s \in I$. Nun setze man $s = f(\omega)$ ein und integriere. Einen diskreten Spezialfall kennen Sie im übrigen bereits aus [AN1] 2.2.17.

Übung 1.6.24. Besitzt die nichtnegative reelle Zufallsvariable X einen Erwartungswert $E(X)$, so gilt für alle $\varepsilon > 0$ die **Markov-Ungleichung**

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1} E(X)$$

1.7 Integration auf Produkträumen

Satz 1.7.1 (Produktmaß). Für σ -endliche Maßräume (X, \mathcal{M}, μ) und (Y, \mathcal{N}, ν) gibt es auf der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ genau ein Maß $\mu \boxtimes \nu$ derart, daß für alle $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{N}$ gilt

$$(\mu \boxtimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

1.7.2. Die Produkte rechts sind im Sinne unserer Konvention $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ zu verstehen. In der Literatur wird für die Produkt- σ -Algebra und Produktmaße meist das Symbol \otimes verwendet, aber mir gefällt das Symbol \boxtimes hier besser, da es sich beim Produkt von Maßen eher um eine Art „äußeres Produkt“ und jedenfalls nicht um ein Tensorprodukt handelt.

1.7.3. Mit diesem Satz und der Erkenntnis $\text{Borel}(\mathbb{R}^n) \boxtimes \text{Borel}(\mathbb{R}) = \text{Borel}(\mathbb{R}^{n+1})$ aus 1.4.28 können wir durch Induktion über n das Lebesguemaß auf dem \mathbb{R}^n aus dem Lebesguemaß auf \mathbb{R} konstruieren und so dessen in 1.1.28 behauptete Existenz im allgemeinen zeigen.

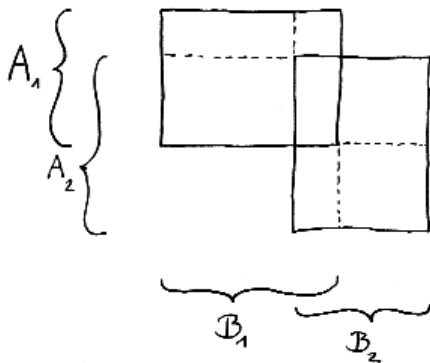


Illustration der Tatsache, daß die Vereinigung zweier Quader auch als die disjunkte Vereinigung von sieben Quadern geschrieben werden kann.

Beweis. Die Gesamtheit aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern $A \times B$ mit $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{N}$ bildet nach Übung 1.2.32 einen Mengenring, ja sie bildet offensichtlich sogar eine Mengenalgebra, die wir $[\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ notieren. Wir zeigen, daß es auf dieser Mengenalgebra $[\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ genau ein Prämaß $\mu \times \nu$ gibt mit $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \forall A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$. Dessen Eindeutigkeit ist klar. Um die Existenz zu zeigen, bemerken wir, daß für $C \in [\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ und beliebiges $y \in Y$ die Abbildung $x \mapsto [C](x, y)$ eine meßbare Stufenfunktion $X \rightarrow \{0, 1\}$ ist und daß wir weiter mit $y \mapsto \int_X [C](x, y) \mu \langle x \rangle$ eine meßbare Stufenfunktion $Y \rightarrow [0, \infty]$ erhalten. Wir können also für $C \in [\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ in $[0, \infty]$ das Element

$$(\mu \times \nu)(C) := \int_Y \left(\int_X [C](x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle$$

bilden. Die σ -Additivität von $\mu \times \nu$ folgt dann aus der Additivität der Integrale 1.5.14 zusammen mit dem Satz über monotone Konvergenz 1.5.12. Unser Satz zum Produktmaß folgt damit, und erst hier wird die σ -Endlichkeit der beteiligten Maße benötigt, aus dem Maßfortsetzungssatz 1.2.11. \square

1.7.4. Bezeichnet $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$ das Vertauschen der Komponenten in einem Produkt σ -endlicher Maßräume, so haben wir offensichtlich eine Verwandtschaft von Maßen $\tau : \mu \boxtimes \nu \rightsquigarrow \nu \boxtimes \mu$.

1.7.5 (**Einschränkung und Produkt von Maßen**). Gegeben $A \subset X$ und $B \subset Y$ meßbare Teilmengen σ -endlicher Maßräume (X, \mathcal{M}, μ) und (Y, \mathcal{N}, ν) stimmt die

Einschränkung des Produktmaßes überein mit dem Produktmaß der Einschränkungen, in Formeln

$$(\mu \boxtimes \nu)|(A \times B) = (\mu|A) \boxtimes (\nu|B)$$

In der Tat stimmen beide Maße auf einem zweischnittstabilen Erzeugendensystem nach 1.2.34 überein, das darüberhinaus für beide Maße σ -endlich ist.

Satz 1.7.6 (positiver Fubini). Gegeben σ -endliche Maßräume (X, μ) und (Y, ν) sowie eine meßbare Funktion $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ ist $x \mapsto f(x, y)$ für alle $y \in Y$ eine meßbare Funktion $X \rightarrow [0, \infty]$ und das partielle Integral $y \mapsto \int f(x, y) \mu \langle x \rangle$ ist eine meßbare Funktion $Y \rightarrow [0, \infty]$ und es gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle$$

1.7.7. Unser Satz impliziert, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die partiellen Integrale vertauscht werden dürfen. Bezeichnet genauer $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$ das Vertauschen, so haben wir die Verwandtschaft $\tau : \mu \boxtimes \nu \rightsquigarrow \nu \boxtimes \mu$ von Maßen und die Verwandtschaft $\tau : f \rightsquigarrow \tilde{f}$ von Funktionen mit $\tilde{f}(y, x) := f(x, y)$ und damit unmittelbar und formal nach 1.5.18 die Gleichheit

$$\int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle = \int_{Y \times X} \tilde{f}(y, x) (\nu \boxtimes \mu) \langle y, x \rangle$$

1.7.8. Dieser Satz und verschiedene seiner Varianten werden auch oft als **Satz von Tonelli** zitiert. Daß die partiellen Integrale bei nicht notwendig σ -endlichen Maßräumen im allgemeinen nicht mehr vertauscht werden dürfen, zeigt das folgende Beispiel. Seien $X = Y = [0, 1]$ versehen mit der borelschen σ -Algebra \mathcal{B} und dem Lebesguemaß λ beziehungsweise dem Zählmaß ζ . Die Diagonale Δ ist dann meßbar, für ihre charakteristische Funktion $[\Delta]$ gilt jedoch

$$\int_Y \left(\int_X [\Delta](x, y) \lambda \langle x \rangle \right) \zeta \langle y \rangle = 0 \neq 1 = \int_X \left(\int_Y [\Delta](x, y) \zeta \langle y \rangle \right) \lambda \langle x \rangle$$

Für das Produktmaß ?? hätte unsere Diagonale im übrigen das Maß ∞ und wäre noch nicht einmal σ -endlich. Das ist auch besser so, denn für meßbare Abbildungen $X \times Y \rightarrow [0, \infty]$, die außerhalb einer σ -endlichen Menge verschwinden, gilt der positive Fubini 1.7.6 analog und kann leicht aus 1.7.6 in der oben formulierten Gestalt abgeleitet werden.

1.7.9 (**Korollar zum Satz über monotone Konvergenz**). Gegeben (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ eine aufsteigende Folge meßbarer Teilmengen von X mit Vereinigung $A := \bigcup_n A_n$ gilt für jede meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ die Identität

$$\int_A f \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f \mu$$

In der Tat können wir die Behauptung mit 1.5.16 umschreiben zur Behauptung $\int_X [A] f \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X [A_n] f \mu$ und in dieser Gestalt folgt sie unmittelbar aus dem Satz über monotone Konvergenz 1.5.12.

Beweis. Für jedes $y \in Y$ ist die y -Horizontale $i_y : X \rightarrow X \times Y, x \mapsto (x, y)$ meßbar nach Lemma 1.4.10, da die Urbilder von Erzeugern der σ -Algebra der meßbaren Mengen des Produkts meßbar sind. Also ist auch $x \mapsto f(x, y)$ meßbar auf X als die Verknüpfung $f \circ i_y$ von f mit der y -Horizontalen. Um die anderen Aussagen des Satzes zu zeigen, müssen wir weiter ausholen. Zunächst einmal dürfen wir annehmen, daß X und Y endliches Maß haben: Sonst schreiben wir X beziehungsweise Y als aufsteigende Vereinigungen von meßbaren Teilmengen X_n beziehungsweise Y_m endlichen Maßes und erhalten aus dem Fall, in dem die Gesamträume endliches Maß haben, die Meßbarkeit des partiellen Integrals über X_n und die Gleichheit

$$\int_{X_n \times Y_m} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle = \int_{Y_m} \left(\int_{X_n} f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle$$

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ergibt sich dann auf der linken Seite nach dem Korollar 1.7.9 zur monotonen Konvergenz $\int_{X \times Y_m} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle$ und auf der rechten Seite streben die meßbaren Funktionen $y \mapsto \int_{X_n} f(x, y) \mu \langle x \rangle$ ebenfalls nach dem Korollar 1.7.9 zur monotonen Konvergenz punktweise monoton gegen $y \mapsto \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle$. Mithin ist diese Funktion auch meßbar und wir finden im Grenzwert

$$\int_{X \times Y_m} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle = \int_{Y_m} \left(\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle$$

Bilden wir dann den Grenzwert für $m \rightarrow \infty$, so folgt wieder nach dem Korollar 1.7.9 zur monotonen Konvergenz $\int_{X \times Y} f = \int_Y \int_X f$ wie gewünscht. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß X und Y endliches Maß haben. Wir zeigen nun den Satz zunächst für Funktionen der Gestalt $f = [C]$ mit $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$. Dazu brauchen wir einen neuen Begriff.

Definition 1.7.10. Sei Z eine Menge. Ein System $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(Z)$ von Teilmengen von Z heißt **monoton**, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:

1. Es gilt $\emptyset \in \mathcal{O}$ und liegen $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ alle in \mathcal{O} , so auch $\bigcup A_n$;
2. Es gilt $Z \in \mathcal{O}$ und liegen $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$ alle in \mathcal{O} , so auch $\bigcap B_n$.

In Worten fordern wir also, daß die Vereinigung und der Schnitt über jedes abzählbare angeordnete Teilsystem wieder zu unserem Mengensystem gehören sollen.

Lemma 1.7.11 (über monotone Systeme). *Gegeben eine Menge Z und eine Mengenalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Z)$ ist die von \mathcal{A} erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{A})$ das kleinste monotone System $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(Z)$, das \mathcal{A} umfaßt, alias als der Schnitt aller monotonen Systeme, die \mathcal{A} umfassen.*

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Wir müssen also nur zeigen, daß \mathcal{O} eine σ -Algebra ist. Dazu reicht es nach 1.1.39 zu zeigen, daß \mathcal{O} eine Mengenalgebra ist. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Zunächst zeigen wir, daß \mathcal{O} stabil ist unter dem Bilden von Komplementen. Bezeichne für $Y \subset Z$ wieder $Y^c := Z \setminus Y$ sein Komplement. Gegeben ein Mengensystem \mathcal{T} setzen wir $\mathcal{T}^c := \{T^c \mid T \in \mathcal{T}\}$. Ist nun \mathcal{A} ein beliebiges System von Teilmengen von Z und $\mathcal{O} \supset \mathcal{A}$ das kleinste monotone System über \mathcal{A} , so ist offensichtlich $\mathcal{O}^c \supset \mathcal{A}^c$ das kleinste monotone System über \mathcal{A}^c . Insbesondere folgt aus $\mathcal{A} = \mathcal{A}^c$ sofort $\mathcal{O} = \mathcal{O}^c$ und \mathcal{O} ist in der Tat stabil unter dem Bilden von Komplementen.

2. Jetzt bemerken wir eine Hilfsaussage, nämlich daß für jede Teilmenge $Y \subset Z$ mit \mathcal{O} auch $\mathcal{O}_Y := \{A \in \mathcal{O} \mid A \cap Y \in \mathcal{O}\}$ ein monotones System ist.

3. Für $Y \in \mathcal{A}$ gilt, da unser \mathcal{A} ja eine Mengenalgebra ist, stets $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_Y$. Daraus folgt mit der Minimalität von \mathcal{O} sofort $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Y$. Damit haben wir gezeigt:

$$A \in \mathcal{O} \text{ und } Y \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap Y \in \mathcal{O}.$$

4. Mit dieser Erkenntnis lassen wir nun dasselbe Argument noch einmal laufen: Nicht nur für $Y \in \mathcal{A}$ sondern sogar für $Y \in \mathcal{O}$ wissen wir nach dem vorhergehenden Schritt nämlich, daß gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_Y$. Daraus folgt wie zuvor $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_Y$ und sogar $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Y$ sogar für alle $Y \in \mathcal{O}$. Damit haben wir gezeigt

$$A \in \mathcal{O} \text{ und } Y \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cap Y \in \mathcal{O}.$$

Also ist \mathcal{O} eine Mengenalgebra. Da es auch stabil ist unter abzählbaren aufsteigenden Vereinigungen, ist es dann wie bereits erwähnt sogar eine σ -Algebra. \square

Mit dem Lemma über monotone Systeme 1.7.11 können wir nun den positiven Fubini im Fall $f = [C]$ für $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ zeigen. Da wir uns nämlich bereits auf den Fall $\mu(X), \nu(Y) < \infty$ zurückgezogen haben, ist die konstante Funktion $1 = [X \times Y]$ integrierbar auf $X \times Y$. Natürlich dominiert diese Funktion die charakteristischen Funktionen aller Teilmengen von $X \times Y$. Aus dem Satz über dominierte Konvergenz 1.6.10 folgt also, daß das System \mathcal{O} aller der $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, für deren charakteristische Funktion der Satz gilt, ein monotones System ist. Dies monotone System enthält aber offensichtlich alle $C \in [\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$, mithin besteht es nach dem Lemma über monotone Systeme 1.7.11 aus allen meßbaren Mengen $C \subset X \times Y$ des Produkts alias allen $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$. Damit ist der Satz für

$f = [C]$ mit $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ bewiesen und folgt sofort für meßbare Stufenfunktion $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty)$. Für beliebiges meßbares $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ folgert man die Aussage, indem man f mithilfe von 1.5.15 als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge meßbarer Stufenfunktionen schreibt und beachtet, daß nach dem Satz über monotone Konvergenz 1.5.12 auf beiden Seiten Integral und Grenzwert vertauscht werden dürfen. \square

1.7.12. Nimmt man im vorherigen Satz für f die charakteristische Funktion einer σ -endlichen meßbaren Menge $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, so ergibt sich, daß für $C_x = i_x^{-1}(C)$ das Urbild von C unter der x -Vertikalen $i_x : Y \rightarrow X \times Y, y \mapsto (x, y)$ die Abbildung $X \rightarrow [0, \infty], x \mapsto \mu(C_x)$ meßbar ist und daß gilt

$$(\mu \boxtimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x) \mu \langle x \rangle$$

Kippen wir das in unserer Vorstellung, so folgt das **Prinzip von Cavalieri**, nach dem zwei Borelmengen $C, D \subset \mathbb{R}^3$ dasselbe Volumen haben, wenn ihre horizontalen Schnitte in jeder Höhe dieselbe Fläche haben, in Formeln

$$\lambda^2(i_z^{-1}(C)) = \lambda^2(i_z^{-1}(D)) \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda^3(C) = \lambda^3(D)$$

mit $i_z : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $i_z : (x, y) \mapsto (x, y, z)$. Weiter können wir so beweisen, daß das Integral einer nichtnegativen meßbaren Funktion auf \mathbb{R} tatsächlich die zwischen ihrem Graphen und der x -Achse eingeschlossene Fläche ist, wie im folgenden Korollar ausgeführt wird.

Korollar 1.7.13 (Integral als Fläche unter dem Graphen). *Gegeben (X, μ) ein σ -endlicher Maßraum und $f : X \rightarrow [0, \infty]$ eine meßbare Funktion ist auch die Teilmenge $M_f \subset X \times \mathbb{R}$ gegeben durch $M_f := \{(x, y) \mid 0 \leq y < f(x)\}$ meßbar und es gilt*

$$(\mu \boxtimes \lambda)(M_f) = \int_X f \mu$$

Beweis. Um zu zeigen, daß M_f meßbar ist, schreiben wir es als abzählbare Vereinigung von Quadern $M_f = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_{>0}} f^{-1}([q, \infty]) \times [0, q)$. Die Formel für das Maß von M_f folgt sofort aus dem positiven Fubini 1.7.6. \square

1.7.14. Im Rückblick könnten wir das Integral über σ -endliche Maßräume auch mit Hilfe des Produktmaßes als Fläche unter dem Graphen im Sinne von 1.7.13 einführen. Wir müßten dazu aber bei der Konstruktion des Produktmaßes auf den Satz über monotone Konvergenz verzichten. Das wäre nun nicht weiter schlimm, wir brauchen ihn dabei nur für meßbare Stufenfunktionen, für die er besonders leicht zu zeigen ist. Ich habe diesen Zugang dennoch nicht gewählt, weil mir die direkte Konstruktion des Integrals didaktisch geschickter schien. Man kann so nämlich früher einen Kontakt zu bekannten Konzepten herstellen.

Ergänzung 1.7.15. Man findet bei Lebesgue und auch in vielen anderen Texten die Bemerkung, das Lebesgue-Integral unterscheidet sich vom Riemann-Integral dadurch, daß die Fläche unter dem Graphen der Funktion in horizontale statt in vertikale Streifen aufgeschnitten werde, deren Flächen man dann addiert. Ich kann das nur bedingt nachvollziehen. Nach Cavalieri liefert ja beides dasselbe Integral. Der wesentliche Schritt ist meines Erachtens vielmehr der Übergang vom Messen reeller Intervalle zum Messen beliebiger „meßbarer Mengen“. Ich gebe aber zu, daß die horizontalen Streifen im Gegensatz zu den vertikalen Streifen eben keine Intervalle und dadurch näher an allgemeinen meßbaren Mengen sind.

Satz 1.7.16 (Fubini). Gegeben σ -endliche Maßräume (X, μ) und (Y, ν) und eine integrierbare Funktion $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Menge N aller $y \in Y$, für die $x \mapsto f(x, y)$ nicht integrierbar ist, meßbar vom Maß $\nu(N) = 0$, und die Funktion $Y \setminus N \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle$ ist integrierbar mit Integral

$$\int_{Y \setminus N} \left(\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle = \int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle$$

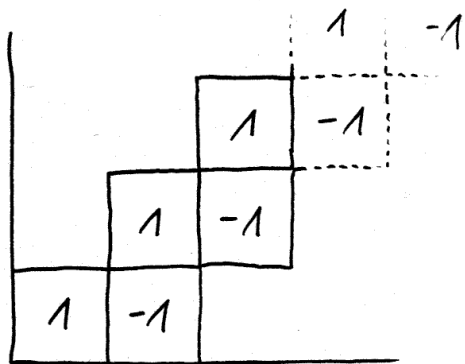
1.7.17. Will man diesen Satz in der Praxis anwenden, so wird man in der Regel zuerst den positiven Fubini 1.7.6 benutzen, um die Integrierbarkeit von f nachzuweisen.

Beweis. Ist f nichtnegativ, so folgt die Behauptung aus dem positiven Fubini 1.7.6, denn aus $\int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle < \infty$ folgt, daß die Menge N aller $y \in Y$ mit $\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle = \infty$ Maß Null hat. Im allgemeinen folgt die Behauptung dann mit der Zerlegung $f = f^+ - f^-$ unsere Funktion in ihren positiven und negativen Anteil wie bei der Definition des Integrals 1.6.1. \square

Beispiel 1.7.18. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die außerhalb der x -Achse verschwindet und auf der x -Achse bei $(x, 0)$ jeweils den Wert x annimmt, ist integrierbar auf \mathbb{R}^2 . Jedoch ist $x \mapsto f(x, y)$ nur integrierbar für $y \neq 0$.

Beispiel 1.7.19 (Probleme beim Vertauschen der Integrationsreihenfolge). Unser Satz sagt insbesondere, daß wir unter gewissen Umständen „die Integrationsreihenfolge vertauschen dürfen“. Das folgende Beispiel zeigt, welche Probleme beim Vertauschen der Integrationsreihenfolge im allgemeinen auftreten können. Sei ζ das Zählmaß auf \mathbb{N} . Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Träger in der „treppenförmigen“ Menge $\{(i, j) \mid 0 \leq i - j \leq 1\}$ mit $f(i, j) = (-1)^{i-j}$. Die beiden partiellen Integrale von f existieren und sind integrierbar. Ihre Integrale sind jedoch verschieden, genauer gilt

$$\int \left(\int f(n, m) \zeta \langle n \rangle \right) \zeta \langle m \rangle = 0 \neq 1 = \int \left(\int f(n, m) \zeta \langle m \rangle \right) \zeta \langle n \rangle$$



Eine meßbare Funktion auf \mathbb{R}^2 wie in 1.7.19 derart, daß die partiellen Integrale existieren und selbst wieder integrierbar sind, das Endresultat jedoch von der Integrationsreihenfolge abhängt. Der „positive Fubini“ greift hier nicht, da unsere Funktion auch negative Werte annimmt, der „Fubini“ greift nicht, da unsere Funktion nicht integrierbar ist.

Indem wir unsere Funktion etwas „verschmieren“ erhalten wir auch eine stetige Funktion auf \mathbb{R}^2 mit entsprechenden Eigenschaften, und durch eine geeignete Transformation sogar eine stetige reellwertige Funktion auf dem offenen Einheitsquadrat derart, daß die partiellen Integrale existieren und selbst wieder integrierbar sind, das Endresultat jedoch von der Integrationsreihenfolge abhängt.

Beispiel 1.7.20. Wir integrieren die Funktion y über die durch eine Parabel und die Gerade $y = 0$ begrenzte Fläche $P = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_P y &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} y \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^2}{2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Teilen wir noch durch die Gesamtfläche

$$\int_P 1 = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

so ergibt sich die Höhe des Schwerpunkts unserer abgeschnittenen Parabelfläche zu $2/5$. Hier haben wir den Satz von Fubini in seiner positiven Variante 1.7.6 angewandt auf das Produkt der Funktion y mit der charakteristischen Funktion $[P]$ unserer Fläche P . Die Funktion y ist meßbar, weil sie stetig ist. Die Funktion $[P]$ ist meßbar als charakteristische Funktion einer meßbaren da abgeschlossenen Menge. Das Produkt dieser beiden meßbaren Funktionen ist damit auch meßbar nach 1.4.29.

Proposition 1.7.21 (Partielle Integration). *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit „Stammfunktionen“ $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $F(y) = \int_a^y f(x) dx$ und $G(x) = \int_a^x g(y) dy$ gilt*

$$\int_a^b Fg = FG \Big|_a^b - \int_a^b fG$$

Dieselbe Formel gilt allgemeiner auch dann noch, wenn wir F oder G jeweils um eine additive Konstante abändern.

Beweis. Die zweite Aussage folgt leicht aus der ersten. Um die erste Aussage zu zeigen, berechnen wir das Integral der Funktion $f(x)g(y)$ über das Quadrat $[a, b]^2$ und finden mit Fubini $F(b)G(b)$. Andererseits können wir dies Integral auch schreiben als das Integral über das dreieckige Gebiet unterhalb der Diagonalen plus das Integral über das dreieckige Gebiet oberhalb der Diagonalen. Diese Integrale ergeben sich aber wieder mit Fubini leicht zu $\int_a^b Fg$ und $\int_a^b fG$. \square

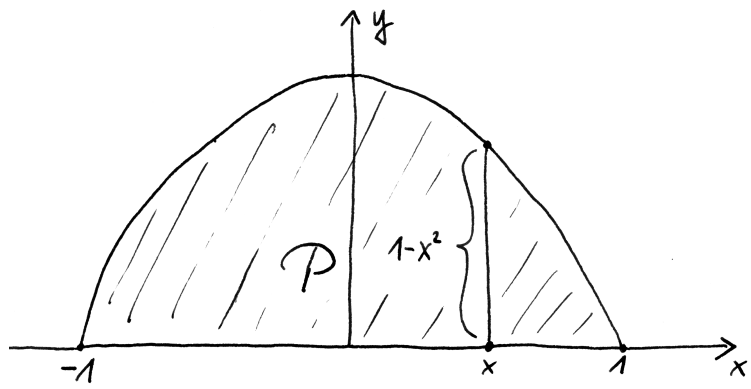


Illustration zur Anwendung des Satzes von Fubini in 1.7.20.

Übungen

Ergänzende Übung 1.7.22 (Gitterpunkte und Volumen). Gegeben eine kompakte konvexe Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ zeige man

$$\lambda(K) = \lim_{l \searrow 0} l^n |K \cap l\mathbb{Z}^n| = \lim_{l \searrow 0} l^n |\{q \in l\mathbb{Z}^n \mid K \cap (q + [0, l]^n) \neq \emptyset\}|$$

In Worten hängt das Maß von K also eng zusammen mit der Zahl der Gitterpunkte in K , und je feiner das Gitter wird, desto besser wird diese Approximation. Hinweis: Liegt K nicht in einem echten affinen Teilraum von \mathbb{R}^n , so umfaßt es einen offenen Ball, ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen offenen Ball um den Ursprung. Dann versuche man, K auf Rechenpapier zu zeichnen und zwischen K und eine gestreckte Kopie $(1 + \varepsilon)K$ eine Vereinigung von Rechenkästchen einzuschachteln.

Übung 1.7.23. Hat $T \subset \mathbb{R}^n$ Minkowskidimension $\text{mdim}(T) < n$ im Sinne von [AN2] 5.4.2, so hat der Abschluß von T Lebesguemaß $\lambda(\bar{T}) = 0$.

Ergänzende Übung 1.7.24. Gegeben zwei Mengen X, Y erhalten wir eine Bijektion

$$\text{Ens}(X, \mathcal{P}(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(X \times Y)$$

durch die Vorschrift $f \mapsto \{(x, y) \mid y \in f(x)\}$. Die Gesamtheit aller Abbildungen, die nur abzählbar viele Werte annehmen, entspricht dann sicher einer σ -Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$. Diese fällt zusammen mit der von allen Produkten $A \times B$ mit $A \subset X$ und $B \subset Y$ in $\mathcal{P}(X \times Y)$ erzeugten σ -Algebra. Für zwei überabzählbare diskrete metrische Räume ist mithin das Produkt der borelschen σ -Algebren eine echte Teilmenge der borelschen σ -Algebra des Produkts.

Übung 1.7.25 (Formelsammlung für Produktmaße). Für Produktmaße gelten die folgenden Identitäten:

Natürlichkeit: Gegeben meßbare Abbildungen $f : X \rightarrow A$ und $g : Y \rightarrow B$ von Meßräumen gilt für Maße μ auf X und ν auf Y mit σ -endlichen Vorschüben $f_*\mu, g_*\nu$ im Raum der Maße auf $A \times B$ die Gleichheit

$$(f_*\mu) \boxtimes (g_*\nu) = (f \times g)_*(\mu \boxtimes \nu)$$

Eins: Gegeben ein Meßraum X und ein Maß μ auf X und das Diracmaß δ auf dem einpunktigen Meßraum gilt

$$(\text{pr}_X)_*(\mu \boxtimes \delta) = \mu$$

Assoziativität: Gegeben X, Y, Z Meßräume und μ, ν, λ jeweils σ -endliche Maße ist die offensichtliche Bijektion $\text{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ meßbar und es gilt

$$\text{ass}_*((\mu \boxtimes \nu) \boxtimes \lambda) = \mu \boxtimes (\nu \boxtimes \lambda)$$

Kommutativität: Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschungsabbildung für Meßräume X, Y und σ -endliche Maße μ auf X und ν auf Y gilt

$$\tau_*(\mu \boxtimes \nu) = \nu \boxtimes \mu$$

Ich will schlage für die obigen Formeln die zusammenfassende Bezeichnung als „Verschmelzungsidentitäten“ vor. Der Hintergrund dafür wird in der folgenden Bemerkung erklärt.

Vorschau 1.7.26. Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit ausgezeichnetem Produkt $X \times Y$ für jedes Paar (X, Y) von Objekten und ausgezeichnetem finalen Objekt pt . Sei weiter ein Tripel

$$(M, \boxtimes, \delta)$$

gegeben bestehend aus einem Funktor $M : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$, den wir auf Morphismen $M(f) = f_*$ notieren, sowie Abbildungen $M(X) \times M(Y) \rightarrow M(X \times Y)$, $(a, b) \mapsto a \boxtimes b$ und einem ausgezeichneten Element $\delta \in M(\text{pt})$. In diesem Kontext bleiben die in der obigen Übung 1.7.25 durchdeklinierten Eigenschaften Natürlichkeit, Eins, Assoziativität und Kommutativität sinnvoll und wir fassen sie zusammen unter der Bezeichnung **Verschmelzungsidentitäten**. In [TSK] 4.1.19 wird erklärt, inwiefern Daten (M, \boxtimes, δ) , für die die Verschmelzungsidentitäten gelten, eineindeutig sogenannten „Schmelzfunktoren“ $M : \text{kart}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{kart}(\text{Ens})$ entsprechen.

1.7.27. Im Spezialfall der Kategorie Meß der Meßräume erhalten wir so einen „Schmelzfunktor“ $M : \text{kart}(\text{Meß}) \rightarrow \text{kart}(\text{Ens})$ von der kartesischen Schmelzkategorie der Meßräume in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen, der jedem Meßraum X die Menge $M(X; [0, \infty))$ aller endlichen Maße auf X zuordnet und jeder Verschmelzung $X \curlywedge Y \rightarrow Z$ alias meßbaren Abbildung $f : X \times Y \rightarrow Z$ die Abbildung $(\mu, \nu) \mapsto f_*(\mu \boxtimes \nu)$. Das Diracmaß δ auf dem einpunktigen Meßraum ist in diesem Kontext zu verstehen als das Produktmaß mit überhaupt keinem Faktor auf dem kartesischen Produkt über die leere Familie von Meßräumen. Die Assoziativität zeigt, daß man auch für drei Faktoren sinnvoll Produktmaße $\lambda \boxtimes \mu \boxtimes \nu$ auf $X \times Y \times Z$ und allgemeiner sinnvoll Produktmaße mit endlich vielen Faktoren erklären kann.

Übung 1.7.28 (Bildmaß unter Projektion und partielle Integration). Gegeben σ -endliche Maßräume $(X, \mu), (Y, \nu)$ und eine meßbare Funktion $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ gilt für das Bildmaß unter der Projektion auf die zweite Komponente

$$\text{pr}_{Y*}(f(x, y) \mu \boxtimes \nu) = \left(\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu$$

Ergänzende Übung 1.7.29. Gegeben ein endlichdimensionaler Raum X induziert das Bilden des Produkts mit dem Lebesguemaß eine Bijektion zwischen der Menge aller Borelmaße auf X und der Menge derjenigen Borelmaße auf $X \times \mathbb{R}$, die invariant sind unter allen Translationen in der zweiten Komponente. Hinweis: Gegeben ein in dieser Weise translationsinvariantes Borelmaß μ auf $X \times \mathbb{R}$ beachte man, daß für $A \subset X$ mit kompaktem Abschluß die Vorschrift $B \mapsto \mu(A \times B)$ ein translationsinvariantes Borelmaß auf \mathbb{R} definiert.

Übung 1.7.30. Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Quader im \mathbb{R}^n ist integrierbar und ihr Riemannintegral nach [AN2] 3.1.4 stimmt mit ihrem Lebesgueintegral überein. Hinweis: 1.6.13.

Übung 1.7.31. Zeige: Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$ hat das Volumen $(n!)^{-1}$.

Übung 1.7.32. Man diskutiere den Zusammenhang zwischen dem Satz von Fubini und dem Satz über das Produkt von Reihen [AN1] 4.2.14.

Übung 1.7.33 (Partielle Integration, Variante). Proposition 1.7.21 gilt noch etwas allgemeiner. Ist $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig und dG das zugehörige Maß auf $[a, b]$ nach 1.2.9 und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar nach dem Lebesguemaß λ und F eine Stammfunktion wie in der Proposition, so gilt

$$\int_{[a,b)} F dG = FG|_a^b - \int_a^b fG\lambda$$

Dieselbe Formel gilt auch allgemeiner, wenn wir F noch um eine additive Konstante abändern. Hinweis: Man berechne $\int_{[a,b)^2} f(x)(\lambda \boxtimes dG)\langle x, y \rangle$ auf zwei Weisen wie im Beweis der Proposition.

1.8 Rechnen mit dem Lebesgueintegral

Satz 1.8.1 (Transformationsformel). Gegeben $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\phi : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus gilt in $[0, \infty]$ für jede meßbare Funktion $f : V \rightarrow [0, \infty]$ die Gleichheit

$$\int_V f = \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi|$$

Ist stattdessen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so ist auch die Funktion $(f \circ \phi) |\det d\phi| : U \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und dieselbe Formel gilt in \mathbb{R} .

1.8.2. Wir kennen unsere Formel aus [AN2] 5.2.8 bereits für stetige Funktionen f mit kompaktem Träger.

1.8.3. Steht x für eine Veränderliche des \mathbb{R}^n , so benutzen wir auch für Integrale bezüglich des Lebesguemaßes die Notation $\int f(x) d^n x$. In diesem Zusammenhang hat also $d^n x$ dieselbe Bedeutung wie $\lambda^n \langle x \rangle$. Wir können die Aussage des Satzes mit dieser Notation interpretieren als die Verwandtschaft von Maßen

$$\phi : |\det d\phi| d^n x \rightsquigarrow d^n y$$

Lemma 1.8.4. *Gegeben eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es eine monoton wachsende Folge von stetigen, ja sogar von glatten nichtnegativen Funktionen mit kompaktem Träger, die punktweise gegen die charakteristische Funktion $[W]$ von W strebt.*

Beweis. Man schreibe W als Vereinigung einer Folge offener Quader Q_k mit kompaktem Abschluß. Man wähle etwa mithilfe von [AN1] 5.4.15 für jeden Quader Q_k eine glatte Funktion g_k auf \mathbb{R}^n , die auf Q_k positiv ist und außerhalb von Q_k verschwindet, und betrachte die Folge der Funktionen $f_k = g_1 + \dots + g_k$. Des weiteren wähle man eine Folge von glatten Funktionen $h_k : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ derart, daß h_k unterhalb von $1/(k+1)$ verschwindet und oberhalb von $1/k$ konstant den Wert 1 annimmt. Die Verknüpfungen $h_k \circ f_k$ bilden dann eine Folge von Funktionen der gewünschten Art. \square

Beweis der Transformationsformel 1.8.1. Es gilt, die Gleichheit von Maßen

$$\phi_*(|\det d\phi| d^n x) = d^n y$$

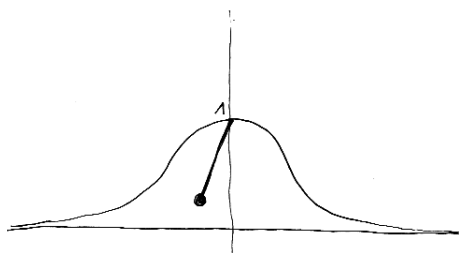
zu zeigen. Mit Lemma 1.8.4 folgt unsere Transformationsformel schon einmal für die charakteristischen Funktionen $f = [W]$ von offenen Teilmengen $W \subseteq V$, indem wir $[W]$ als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge aus $\mathcal{C}_1(V, [0, \infty])$ schreiben und den Satz über monotone Konvergenz 1.5.12 verwenden und erinnern, daß wir die Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger bereits als [AN2] 5.2.8 gezeigt haben. Folglich nehmen unsere beiden Maße auf allen offenen Mengen dieselben Werte an. Andererseits bilden die offenen Mengen im Sinne von Übung 1.2.34 ein zweischnittstabiles Erzeugendensystem der σ -Algebra der Borelmengen von V , das σ -endlich ist für unsere beiden Maße, deshalb stimmen sie dann nach Übung 1.2.34 bereits überein. Alternativ sind unsere Maße beide Borelmaße und damit nach 1.10.10 regulär. Folglich müssen unsere beiden Maße, wenn sie auf allen offenen Mengen dieselben Werte annehmen, bereits auf allen Borelmengen dieselben Werte annehmen. \square

Proposition 1.8.5 (Nützliche Nullmengen). *Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $k < n$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist $\varphi(U)$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^n .*

Ergänzung 1.8.6. Der **Satz von Sard** besagt, daß auch für $k \geq n$ und φ mindestens $(k-n+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar auf U das Bild unter φ der Menge aller Stellen $p \in U$, an denen $d_p\varphi$ nicht surjektiv ist, eine Lebesgue-Nullmenge sein muß. Wir werden das nicht zeigen.

Beweis. Nach Übung 1.4.45 können wir U schreiben als abzählbare Vereinigung über eine Folge von offenen Quadern Q_ν mit \bar{Q}_ν kompakt und $\bar{Q}_\nu \subset U$. Folglich dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß \bar{U} selbst ein kompakter Quader ist und daß $|d\varphi|$ beschränkt ist auf U . Von hier ausgehend können wir mit der Minkowski-Dimension argumentieren und [AN2] 5.4.5 sowie Übung 1.7.23 verwenden. Wir können aber auch mit weniger Begrifflichkeit auskommen und die Argumentation explizit ausschreiben. Nach einer affinen Koordinatentransformation dürfen wir zusätzlich sogar $U = (0, 1)^k$ annehmen. Wir arbeiten wie immer mit der Maximumsnorm auf \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^k , die Bälle $B(x, \delta)$ sind also offene Würfel und ihre Abschlüsse $\bar{B}(x; \delta)$ abgeschlossene Würfel. Ist C eine Schranke für $|d\varphi|$, so gilt nach dem Schrankensatz $\varphi(U \cap \bar{B}(x; \delta)) \subset \bar{B}(\varphi(x); C\delta)$ für alle $x \in U$. Für $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ finden wir nun eine Überdeckung von $(0, 1)^k$ durch r^k abgeschlossene Würfelchen der Gestalt $\bar{B}(x; 1/r)$, also finden wir eine Überdeckung von $\varphi(U)$ durch r^k abgeschlossene Würfelchen der Gestalt $\bar{B}(y; C/r)$ mit Gesamtvolumen $r^k(2C/r)^n$. Dies Gesamtvolumen strebt aber gegen Null für $r \rightarrow \infty$, mithin ist $\varphi(U)$ eine Nullmenge. \square

Satz 1.8.7 (Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve). Für die Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve gilt die Formel $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$.



Skizze der Gauß'schen Glockenkurve alias dem Graphen von $x \mapsto \exp(-x^2)$ mit zusätzlich eingezeichnetem Klöppel.

Vorschau 1.8.8. Als **Gauß'sche Glockenkurve** bezeichnet man den Graphen der Funktion $x \mapsto \exp(-x^2)$. Diese Funktion spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie wir in 3.5.18 noch sehen werden.

Beweis. Wir rechnen das Integral über die Ebene der nichtnegativen Funktion $\exp(-(x^2 + y^2))$ auf zwei Weisen aus, einmal direkt mit dem positiven Fubini und

ein zweites Mal, indem wir mithilfe von 1.8.5 die Ebene längs der negativen x -Achse aufschneiden und mit 1.8.1 zu Polarkoordinaten übergehen. Ein Vergleich der Resultate liefert die Behauptung. Genauer rechnen wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \exp(-y^2) dx dy \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right)^2 \\
 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \leq 0\}} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy \\
 &= \int_{(0,\infty) \times (-\pi,\pi)} \exp(-r^2) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-r^2) r dr d\theta \\
 &= -\pi \exp(-r^2) \Big|_0^{\infty} \\
 &= \pi \quad \square
 \end{aligned}$$

1.8.9. Wir hätten dies Ergebnis auch mit unseren Resultaten zur Integration über Fastfaltungen [AN2] 5.5.10 erzwingen können, indem wir geeignete Integrationskarten verwenden, um $\sup_h \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \exp(-(x^2 + y^2))$ mit dem Supremum über alle kompakt getragenen stetigen Funktionen $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ auf zwei Weisen ausrechnen. So ist es zwar viel transparenter, aber die Frage ist dennoch berechtigt, ob das den Aufbau von so viel Theorie rechtfertigen kann. Sobald wir aber zur Fouriertheorie kommen, werden aber hoffentlich auch die letzten Zweifler von der Sinnhaftigkeit der Lebesgue'schen Integrationstheorie überzeugt werden.

Beispiel 1.8.10 (Beweisvariante zur Integration über Fastfaltungen). Ich will nochmal auf unseren Beweis zur Integration über Fastfaltungen [AN2] 5.5.10 zurückgehen und ausführen, wie einfach er sich im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie zu Ende bringen läßt. Ich gebe zu, daß das ziemlich überflüssig ist, da das in 1.9.2 eingeführte Flächenmaß einer Fastfaltung ein viel stärkeres Hilfsmittel ist, aber sei's drum. Wir hatten beim Beweis von [AN2] 5.5.10 eine endliche disjunkte Vereinigung kompakter Quader $Q \subset \mathbb{R}^k$ betrachtet, in unserer Anwendung den Definitionsbereich einer Integrationskarte. Wir hatten sie zerlegt als $Q = A \sqcup S \sqcup U$ mit $S \pitchfork Q$ und $A, U \circlearrowleft Q$ und so, daß S eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen einer Minkowskidimension $\text{mdim } S < k$ ist, nach 1.7.23 also eine Nullmenge. Wir hatten ein zweites Datum $P = B \sqcup T \sqcup V$ derselben Art zu unserer zweiten Karte konstruiert und es galt, die Gleichheit

$$\int_Q g = \int_P h$$

von Integralen stetiger Funktionen $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ zu zeigen unter der

Annahme, daß gilt $g|_A = 0$ und $h|_B = 0$ und daß es einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus

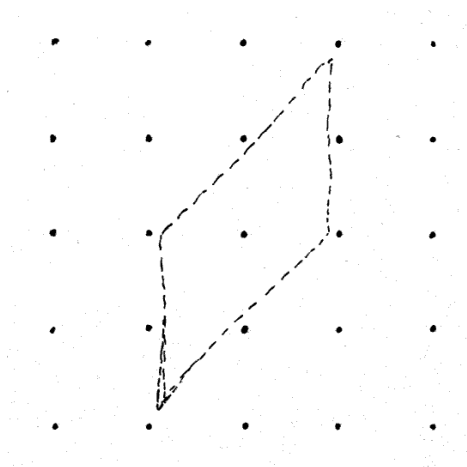
$$\kappa : Q^\circ \cap U \xrightarrow{\sim} P^\circ \cap V$$

gibt mit $g = (h \circ \kappa)|\det d\kappa|$ auf $Q^\circ \cap U$, in unserer Anwendung den Kartenwechsel. Hier bezeichnet Q°, P° das jeweilige Innere. Um das im Rahmen der Lebesgue-Theorie zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß g als stetige Funktion auf einem Kompaktum integrierbar ist. Damit ist auch die Einschränkung von g auf jede meßbare Teilmenge von Q integrierbar. Da der Rand ∂Q eine Nullmenge ist, gilt für die Integrale $\int_Q g = \int_{Q^\circ} g$. Nun zerlegen wir Q° in die meßbaren Teilmengen

$$Q^\circ = (Q^\circ \cap A) \sqcup (Q^\circ \cap S) \sqcup (Q^\circ \cap U)$$

Wieder ist das Integral die Summe der Integrale der Einschränkungen. Wegen $g|_A = 0$ und $\lambda(S) = 0$ finden wir also weiter $\int_{Q^\circ} g = \int_{Q^\circ \cap U} g$. In derselben Weise finden wir, daß $h|(P^\circ \cap V)$ integrierbar ist und daß gilt $\int_P h = \int_{P^\circ \cap V} h$. Die Gleichheit $\int_{Q^\circ \cap U} g = \int_{P^\circ \cap V} h$ folgt dann mit der Transformationsformel 1.8.1 direkt aus unseren Annahmen.

Übungen



Skizze zum Gitterpunktsatz einer konvexen zum Ursprung punktsymmetrischen Teilmenge der Ebene, die fast die Fläche 4 hat und dennoch außer dem Ursprung keinen Punkt des Gitters \mathbb{Z}^2 trifft. Der Gitterpunktsatz besagt, daß das ab einer Fläche > 4 nicht mehr möglich ist.

Übung 1.8.11 (Gitterpunktsatz von Minkowski). Für jede offene konvexe Teilmenge K eines \mathbb{R}^n mit $x \in K \Rightarrow (-x) \in K$ und Lebesguemaß $\lambda(K) > 1$ enthält $2K$ außer dem Ursprung noch weitere Punkte aus \mathbb{Z}^n . Hinweis: Wir schreiben K als disjunkte Vereinigung der $K \cap (x + [0, 1]^n)$ für $x \in \mathbb{Z}^n$. Aus Volumengründen gibt es $x \neq y \in \mathbb{Z}^n$ mit $x + K \cap y + K \neq \emptyset$, also $k, h \in K$ mit $k - h = x - y$, also $(x - y) \in 2K$. Die Bedingung K offen ist hier sogar unnötig nach 1.8.16. Ist K kompakt, so reicht sogar die Annahme $\lambda(K) \geq 1$, denn dann ist das Bild von K in $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ abgeschlossen.

Übung 1.8.12. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Man zeige: Liefern zwei Borelmaße auf A dasselbe Integral für alle stetigen Funktionen auf A mit kompaktem Träger, so stimmen sie überein. Hinweis: Man verwende 1.8.4 und die Regularität 1.10.10.

Übung 1.8.13. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Man zeige: Liefern zwei Borelmaße auf W dasselbe Integral für alle glatten Funktionen auf W mit kompaktem Träger, so stimmen sie überein. Hinweis: Man verwende 1.8.4 und die Regularität 1.10.10 oder Übung 1.2.34 zum Vergleich von Maßen.

Übung 1.8.14. Man zeige: Gegeben eine meßbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(cA) = |c|^n \lambda(A)$. Zum Beispiel hat eine Kugel vom doppelten Radius das achtfache Volumen.

Übung 1.8.15. Gegeben ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ mit $P \neq 0$ hat seine Nullstellenmenge $P^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguemaß Null. Hinweis: Induktion über den Grad des Polynoms. Außerhalb der kritischen Stellen ist $P^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit.

Übung 1.8.16. Jede konvexe Teilmenge K eines \mathbb{R}^n ist Lebesgue-meßbar, genauer ist $\bar{K} \setminus K^\circ$ eine Nullmenge. Hinweis: Man zeige zunächst, daß K entweder in einem echten affinen Teilraum von \mathbb{R}^n enthalten ist oder aber einen inneren Punkt besitzt. Weiter zeige man im Fall, daß die Null ein innerer Punkt von K ist, daß gilt $\bar{K} \subset \lambda K^\circ$ für alle $\lambda > 1$. Schließlich ziehe man sich auf den Fall von beschränktem K zurück.

1.9 Flächenmaß einer Fastfaltigkeit

1.9.1. Ich erinnere aus [AN2] 5.5.7 an die Begriffe einer Fastfaltigkeit und einer Integrationskarte.

Satz 1.9.2. Auf jeder k -Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein topologisches Maß $\sigma = \sigma_M$ derart, daß für jede Integrationskarte $\varphi : Q \rightarrow M$ und jede topologisch meßbare Menge $A \subset \varphi(Q)$ gilt

$$\sigma(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det(d_x \varphi^\top(d_x \varphi))} \, d^k x$$

mit dem Lebesgue-Integral über $\varphi^{-1}(A) \subset Q \subset \mathbb{R}^k$ auf der rechten Seite. Dieses Maß heißt das **Flächenmaß von M** . Es ist ein Borelmaß.

Beweis von Satz 1.9.2. Wie bereits in 1.4.24 erwähnt ist jede Teilmenge eines abzählbar basierten topologischen Raums abzählbar basiert für die Spurtopologie. Insbesondere gilt das für jede Teilmenge und a fortiori jede Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Nach 1.4.45 besitzt jede offene Überdeckung eines abzählbar basierten

Raums eine abzählbare Teilüberdeckung. Folglich existiert eine Folge von Integrationskarten (Q_n, φ_n) , deren Bilder unsere Fastfaltung überdecken. Auf dem Bild jeder dieser Integrationskarten (Q, φ) liefert unsere Vorschrift ein topologisches Maß, den Vorschub unter φ des Produkts nach 1.5.25 des Lebesguemaßes $d^k x$ mit der stetigen Funktion $\text{vol}(d_x \varphi) := \sqrt{\det(d_x \varphi)^T (d_x \varphi)}$. Wir wollen diese Maße mit Hilfe von Übung 1.1.42 verkleben. Wir müssen dazu nur zeigen, daß gegeben zwei Integrationskarten (Q, φ) und (P, ψ) von M und $A \subset \varphi(Q) \cap \psi(P)$ meßbar gilt

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \text{vol}(d_x \varphi) d^k x = \int_{\psi^{-1}(A)} \text{vol}(d_y \psi) d^k y$$

Im Fall $A \subset \varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$ folgt das analog zu [AN2] 5.3.1 aus der Transformationsformel 1.8.1, angewandt auf den Kartenwechsel. Es reicht also, im Fall $A = (\varphi(Q) \cap \psi(P)) \setminus (\varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ))$ zu zeigen, daß beide Seiten Null werden. Es reicht weiter, das für die linke Seite zu zeigen. Dafür hinwiederum reicht es zu zeigen, daß für die Restriktion $\varphi_\circ : Q^\circ \hookrightarrow M$ von φ auf Q° das Urbild $\varphi_\circ^{-1}(\psi(\partial P))$ von $\psi(\partial P)$ unter dieser Restriktion eine Nullmenge ist. Nach [AN2] 4.4.13 angewandt auf die Mannigfaltigkeit $\varphi(Q^\circ)$ ist aber $(\varphi_\circ^{-1} \circ \psi) : \psi^{-1}(\varphi(Q^\circ)) \rightarrow Q^\circ$ stetig differenzierbar und nach 1.8.5 wird darunter $\psi^{-1}(\varphi(Q^\circ)) \cap \partial P$ in der Tat auf eine Nullmenge abgebildet. Wir zeigen nun noch, daß unser Flächenmaß ein Borelmaß ist. Es ist sicher endlich auf dem Bild jeder Integrationskarte. Da sich nun jedes Kompaktum aus M durch endlich viele Bilder von Integrationskarten überdecken läßt, ist unser Flächenmaß in der Tat endlich ist auf Kompakta und damit ein Borelmaß. \square

1.9.3 (Rückwärtskompatibilität zur Integration über Fastfaltungen). Gegeben eine k -Fastfaltung M und eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $f \in \mathcal{C}_c(M, \mathbb{R})$ gilt die Gleichheit

$$\int_M f = \int_M f(x) \sigma \langle x \rangle$$

des Integrals nach [AN2] 5.5.10 und des Integrals der Funktion f über den Maßraum $(M, \text{Borel}(M), \sigma)$ in Bezug auf das Flächenmaß σ auf M aus 1.9.2. Unsere Funktion f ist auf diesem Maßraum integrierbar, da sie meßbar ist und betragsmäßig beschränkt durch die integrierbare Funktion $(\sup |f|)[\text{supp } f]$. Folglich ist auch die rechte Seite eine wohldefinierte reelle Zahl. Die behauptete Gleichheit folgt für f mit Träger im Bild einer Integrationskarte (Q, φ) unmittelbar aus der Erkenntnis $\sigma|_{\varphi(Q)} = \varphi_*((\text{vol } d_x \varphi) d^k x)$ und damit

$$\int_M f(x) \sigma \langle x \rangle = \int_{\varphi(Q)} f(x) \sigma \langle x \rangle = \int_Q (f \circ \varphi) (\text{vol } d_x \varphi) d^k x = \int_M f$$

Im allgemeinen folgt sie dann, da beide Seiten \mathbb{R} -linear sind und wir jede Funktion $f \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$ mithilfe einer Teilung der Eins als Summe endlich vieler Funktionen aus $\mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$ schreiben können, deren Träger jeweils im Bild nur einer Integrationskarte liegt.

1.9.4 (Diskussion der Notation). Der Buchstabe σ steht für englisch und französisch „surface“. Die Bezeichnung suggeriert zwar die Vorstellung zweidimensionaler Fastfaltigkeiten, aber wir benutzen sie auch in anderen Dimensionen. Gegeben eine integrierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ notieren wir ihr Integral bezüglich des Flächenmaßes

$$\int_M f = \int_M f \sigma = \int_M f(x) \sigma \langle x \rangle$$

In der Literatur ist es üblich, stattdessen $d\sigma$ hinter das Integral zu schreiben. Man findet auch die Notationen dS und in der deutschen Literatur $d\omega$ oder dO mit ω oder O wie „Oberfläche“.

1.9.5 (Rückwärtskompatibilität zum Lebesguemaß). Wie bereits beim Beweis des Satzes zum Flächenmaß 1.9.2 diskutiert existiert für jede Fastfaltigkeit eine Folge von Integrationskarten (Q_i, φ_i) , deren Bilder unsere Fastfaltigkeit überdecken. Insbesondere ist jede k -Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Vereinigung von Kompakta und damit eine borelmeßbare Teilmenge. Wir zeigen nun, daß im Fall $k = n$ unser Flächenmaß aus 1.9.2 mit dem auf M eingeschränkten Lebesguemaß des \mathbb{R}^n übereinstimmt, in Formeln

$$\sigma_M = \lambda|_M$$

Gegeben eine Folge von Integrationskarten wie zuvor sind die Bilder der Ränder $\varphi_i(\partial Q_i)$ Nullmengen für beide Maße und dasselbe folgt für ihre Vereinigung. Damit ist a fortiori das Komplement in M der Vereinigung $U := \bigcup_i \varphi_i(Q_i^\circ)$ eine Nullmenge für beide Maße und es reicht $\sigma_M|_U = \lambda|_U$ zu zeigen. Nun haben wir sowohl $U \subseteq M$ als auch $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist U selbst eine n -Fastfaltigkeit und jede Integrationskarte von U ist auch eine Integrationskarte von M . Für jeden kompakten Quader $Q \subset U$ haben wir also $\sigma_M(Q) = \lambda(Q)$. Da nun diese kompakten Quader ein zweischnittstabiles Erzeugendensystem der σ -Algebra $\text{Borel}(U)$ bilden und unsere Maße $\sigma_M|_U$ und $\lambda|_U$ für dieses Erzeugendensystem beide σ -endlich sind, folgt mit Übung 1.2.34 wie gewünscht $\sigma_M|_U = \lambda|_U$.

Beispiel 1.9.6. Man kriegt also salopp gesprochen dasselbe Kugelvolumen heraus, egal ob man wie in [AN2] 5.6.7 eine Integrationskarte zu Hilfe nimmt oder ob man vielmehr mit dem Prinzip von Cavalieri 1.7.12 arbeitet.

Beispiel 1.9.7. Es folgt sofort, daß für $k < n$ die Teilmenge $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist. Es folgt weiter mit [AN1] 5.8.8, daß das Lebesguemaß einer Kreisscheibe D vom Radius r in der Tat gegeben wird durch $\lambda^2(D) = \pi r^2$. Ist schließlich $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall oder allgemeiner eine meßbare Teilmenge und $f : I \rightarrow$

$[0, \infty]$ stetig oder allgemeiner meßbar, so folgt für das **Volumen des Rotationskörpers** $R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$ die Formel

$$\lambda^3(R) = \pi \int_I f(z)^2 dz$$

Sie verallgemeinert unsere Formel aus [AN2] 5.6.10 im Fall, daß I ein kompaktes Intervall ist und $f : I \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Das ist ein Spezialfall der Rückwärtskompatibilität zum Lebesguemaß 1.9.5.

Übungen

Übung 1.9.8. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -Fastfaltung. Man zeige: Ist $K \subset \mathbb{R}^{k-1}$ ein kompakter Quader und $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit Bild $\varphi(K) \subset M$, so ist $\varphi(K)$ für das Flächenmaß von M eine Nullmenge.

Übung 1.9.9. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. So ist die **Mantelfläche**

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$$

eine zweidimensionale Randfaltung im \mathbb{R}^3 . Man zeige man für das Bildmaß des Oberflächenmaßes unter der orthogonalen Projektion $p : M \rightarrow I$ unserer Mantelfläche auf die z -Achse die Formel $p_*\sigma = 2\pi f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2} dz$. Ist speziell M die Einheitskugel, so zeige man $p_*\sigma = 2\pi dz$ und berechne nochmals die Oberfläche der Einheitskugel.

Übung 1.9.10 (Zwiebelformel). Ist $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitskugel mit ihrem Flächenmaß σ , so ist unter der Multiplikationsabbildung $\text{mult} : \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \setminus 0$ das Produktmaß $r^{n-1} dr \boxtimes \sigma$ verwandt zum Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n \setminus 0$, in Formeln

$$\text{mult} : r^{n-1} dr \boxtimes \sigma \rightsquigarrow \lambda^n$$

Hinweis: Man rechne mit einer beliebigen Integrationskarte von S^{n-1} und erweitere sie zu einer Integrationskarte von $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Man beachte, daß für eine differenzierbare Kurve, die ganz in der Einheitskugel verläuft, der Geschwindigkeitsvektor stets auf dem Ortsvektor senkrecht steht.

Übung 1.9.11. Genau dann ist die Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty], x \mapsto \|x\|^\alpha$ für gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}$ integrierbar auf dem Komplement eines und jedes offenen Balls um den Ursprung, wenn gilt $\alpha < (-n)$. Hinweis: Zwiebelformel 1.9.10.

Übung 1.9.12. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter, als da heißt das Gruppenerzeugnis einer Basis von \mathbb{R}^n als \mathbb{R} -Vektorraum. Genau dann konvergiert $\sum_{\omega \in \Gamma \setminus 0} \|\omega\|^\alpha$, wenn gilt $\alpha < (-n)$. Hinweis: 1.9.11.

1.10 Regularität von Borelmaßen

Satz 1.10.1 (Regularität des Lebesguemaßes). Für das Lebesguemaß λ auf dem \mathbb{R}^n und jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U \text{ offen in } \mathbb{R}^n}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

1.10.2. Das „umgekehrte“ Approximieren durch Kompakta von außen oder durch offene Mengen von innen ist nicht möglich. Das zeigen bereits die Fälle der Mengen M aller rationalen beziehungsweise aller irrationalen Punkte in $[0, 1]$.

Beispiel 1.10.3. Das Maß auf der Zahlengerade, das allen abzählbaren Teilmengen Null zuordnet und allen überabzählbaren Borelmengen unendlich, ist kein Borelmaß. In der Tat ist es nicht endlich auf allen Kompakta. Für dieses Maß gilt die Aussage des Satzes auch nicht.

Beweis. Wir betrachten in \mathbb{R}^n das Mengensystem aller endlichen disjunkten Vereinigungen von „halboffenen Quadern“, worunter wir Teilmengen der Gestalt $(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$ verstehen. Sie bilden einen Mengenring \mathcal{Q} , der die Borel'sche σ -Algebra erzeugt. Nach dem Maßfortsetzungssatz von Caratheodory 1.2.11 gibt es also für jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(M) < \infty$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine überdeckende Folge Q_ν in \mathcal{Q} mit

$$\lambda(M) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_\nu) \leq \lambda(M) + \varepsilon$$

Weiter finden wir für jedes dieser Q_ν offensichtlich eine offene Obermenge U_ν mit $\lambda(Q_\nu) \leq \lambda(U_\nu) \leq \lambda(Q_\nu) + 2^{-\nu}\varepsilon$. Für die offene Menge $U = \bigcup_\nu U_\nu$ folgt dann

$$\lambda(M) \leq \lambda(U) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(U_\nu) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_\nu) + 2^{-\nu}\varepsilon \leq \lambda(M) + 3\varepsilon$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist das Maß von M in der Tat das Infimum über die Maße aller offenen Mengen, die M umfassen. Um die zweite Behauptung zu zeigen, wählen wir eine Folge $L_0 \subset L_1 \subset \dots$ kompakter Teilmengen von X mit $\bigcup L_i = \mathbb{R}^n$. Nach Übung 1.1.37 gilt $\lambda(M) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(M \cap L_i)$ und es reicht folglich, die zweite Behauptung für alle $M \cap L_i$ zu zeigen. In anderen Worten dürfen wir also annehmen, daß es ein Kompaktum L gibt mit $M \subset L$. Nach dem schon bewiesenen Teil und mit der Notation $M^c := L \setminus M$ gilt für alle meßbaren Teilmengen $M \subset L$ a fortiori

$$\lambda(M) = \inf_{M \subset U, U \Subset L} \lambda(U) = \inf_{M^c \supset A, A \Subset L} \lambda(L) - \lambda(A)$$

und wir finden $\lambda(M^c) = \lambda(L) - \lambda(M) = \sup_{M^c \supset A, A \Subset L} \lambda(A)$ wie gewünscht. \square

1.10.4. Im folgenden zeigen wir, daß das vorhergehende analog für beliebige Borelmaße auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen gilt. Das ist für den Rest dieser Vorlesung allerdings nicht mehr relevant. Wir beginnen mit topologischen Vorbereitungen.

1.10.5. Ein topologischer Raum heißt **lokal kompakt**, wenn sich jede Umgebung jedes Punktes zu einer kompakten Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt.

1.10.6 (**Diskussion der Terminologie**). Diese Terminologie ist nicht unumstritten. Viele Autoren schreiben „lokalkompakt“ zusammen und nennen einen Raum „lokalkompakt“, wenn er Hausdorff ist und jeder Punkt darin eine kompakte Umgebung besitzt. Nach Übung 1.10.15 ist ein Raum „lokalkompakt“ genau dann, wenn er Hausdorff ist und lokal kompakt im Sinne unserer Definition 1.10.5. Ich befolge die Konvention, nach der für jede Eigenschaft (E) topologischer Räume ein Raum „lokal (E)“ heißt, wenn sich jede Umgebung jedes Punktes zu einer Umgebung desselben Punktes mit der Eigenschaft (E) verkleinern läßt.

Beispiele 1.10.7. Der \mathbb{R}^n ist lokal kompakt. Jede abgeschlossene Teilmenge eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt. Jede offene Teilmenge eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt. Jeder kompakte Hausdorffraum ist lokal kompakt nach Übung 1.10.15.

1.10.8. Wir erinnern aus [AN2] 5.1.9, daß in einem Hausdorffraum jedes Kompaktum abgeschlossen ist. Wir erinnern aus [AN2] 5.1.12, daß jede endliche Vereinigung von Kompakta kompakt ist.

1.10.9. In einem lokal kompakten Hausdorffraum liegt jede kompakte Menge in einer offenen Menge mit kompaktem Abschluß. In der Tat besitzt jeder Punkt eine offene Umgebung mit kompaktem Abschluß und endlich viele solcher offenen Umgebungen überdecken bereits unsere kompakte Menge.

Satz 1.10.10 (Regularität von Borelmaßen). *Gegeben ein Borelmaß λ auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum X gelten für jede Borelmengenge $M \subset X$ die Identitäten*

$$\lambda(M) = \inf_{\substack{U \supset M \\ U \text{ offen in } X}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K \subset M \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

1.10.11. Ein Borelmaß auf einem Hausdorffraum heißt **regulär**, wenn das Maß jeder offenen Menge das Supremum über die Maße der in ihr enthaltenen Kompakta ist und das Maß jeder Borelmengenge das Infimum über die Maße der sie umfassenden offenen Mengen. Satz 1.10.10 zeigt insbesondere, daß auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum jedes Borelmaß regulär ist.

Ergänzung 1.10.12. Der Beweis unseres Satzes 1.10.10 zeigt unter anderem auch, daß gegeben ein reguläres Borelmaß auf einem Hausdorffraum das Maß jeder σ -endlichen Borelmengenge das Supremum über die Maße der in ihr enthaltenen Kompakta sein muß.

Beweis. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Der von den Kompakta eines Hausdorffraums erzeugte Mengering \mathcal{Q} läßt sich nach Übung 1.2.33 beschreiben als das Mengensystem aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Komplementen eines Kompaktums in einem anderen.

2. In einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum X ist jede offene Menge $U \subseteq X$ die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Kompakta. Sei in der Tat $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie. Für jeden Punkt $p \in U$ finden wir eine offene Umgebung V von p mit $\bar{V} \subset U$ und \bar{V} kompakt. Da $V \subseteq X$ eine Vereinigung von Mengen unserer Basis ist, finden wir ein n mit $p \in U_n \subset V$ und folglich \bar{U}_n kompakt und $\bar{U}_n \subset U$. Die Vereinigung dieser \bar{U}_n ist dann U .

3. Wir zeigen, daß sich jede Menge $Q \in \mathcal{Q}$ als Schnitt einer absteigenden Folge offener Mengen mit kompaktem Abschluß schreiben läßt. Es reicht offensichtlich, das für jedes Komplement Q eines Kompaktums in einem anderen zu zeigen alias für den Schnitt eines Kompaktums mit einer offenen Menge. Es reicht dann offensichtlich sogar, das für jedes Kompaktum Q zu zeigen. Nun liegt nach 1.10.9 jede kompakte Menge Q in einer offenen Menge U mit kompaktem Abschluß \bar{U} . Dann ist $(U \setminus Q)$ nach Schritt 2 Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Kompakta $L_0 \subset L_1 \subset \dots$ und damit Q der Schnitt der absteigenden Folge offener Mengen $(U \setminus L_0) \supset (U \setminus L_1) \subset \dots$

4. Gegeben ein Borelmaß λ auf X existiert nach 1.1.38 also für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Obermenge U mit $\lambda(Q) \leq \lambda(U) \leq \lambda(Q) + \varepsilon$. Nun erzeugt der Mengering $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$ unter unseren Annahmen die borelsche σ -Algebra. Indem wir die Beschreibung der größten Maßfortsetzung 1.2.15 in Verbindung mit der Eindeutigkeitsaussage aus dem Satz von Caratheodory 1.2.11 auf diesen Mengering anwenden, erhalten wir für jede Borelmenge $M \subset X$ die Identität $\lambda(M) = \inf \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_{\nu}) \right)$ mit dem Infimum über alle Folgen Q_{ν} in \mathcal{Q} mit $M \subset \bigcup_{\nu} Q_{\nu}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir demnach eine überdeckende Folge Q_{ν} in \mathcal{Q} mit

$$\lambda(M) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_{\nu}) \leq \lambda(M) + \varepsilon$$

Weiter finden wir für jedes dieser Q_{ν} eine offene Obermenge U_{ν} mit $\lambda(Q_{\nu}) \leq \lambda(U_{\nu}) \leq \lambda(Q_{\nu}) + 2^{-\nu}\varepsilon$. Für die offene Menge $U = \bigcup_{\nu} U_{\nu}$ folgt dann

$$\lambda(M) \leq \lambda(U) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(U_{\nu}) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_{\nu}) + 2^{-\nu}\varepsilon \leq \lambda(M) + 3\varepsilon$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist das Maß von M in der Tat das Infimum über die Maße aller offenen Mengen, die M umfassen.

5. Um die zweite Behauptung zu zeigen, wählen wir eine Folge $L_0 \subset L_1 \subset \dots$

kompakter Teilmengen von X mit $\bigcup L_i = X$. Nach Übung 1.1.37 gilt $\lambda(M) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(M \cap L_i)$ und es reicht folglich, die zweite Behauptung für alle $M \cap L_i$ zu zeigen. In anderen Worten dürfen wir also annehmen, daß es ein Kompaktum L gibt mit $M \subset L$. Nun ist auch L ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum. Nach dem schon bewiesenen Teil und mit der Notation $M^c := L \setminus M$ gilt für alle meßbaren Teilmengen $M \subset L$ also

$$\lambda(M) = \inf_{M \subset U, U \Subset L} \lambda(U) = \inf_{M^c \supset A, A \Subset L} \lambda(L) - \lambda(A)$$

und wir finden $\lambda(M^c) = \lambda(L) - \lambda(M) = \sup_{M^c \supset A, A \Subset L} \lambda(A)$ wie gewünscht. \square

Übungen

Übung 1.10.13. Eine Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesguemaß genau dann, wenn sie sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge von kompakten Quadern Q_n überdecken läßt mit $\sum_{n=0}^{\infty} \text{vol } Q_n < \varepsilon$.

Übung 1.10.14 (Disjunkte Umgebungen disjunkter Kompakta). Sind A, B disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums X , so gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \Subset X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß A nur aus einem Punkt besteht.

Übung 1.10.15. In einem kompakten Hausdorffraum läßt sich jede Umgebung eines Punktes zu einer abgeschlossenen Umgebung desselben Punktes verkleinern. Hinweis: 1.10.14. Man folgere, daß ein Hausdorffraum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt, bereits lokal kompakt ist.

2 Funktionenräume und Fourierreihen

2.1 Lebesgueintegral vektorwertiger Funktionen

2.1.1. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow V$ heißt **integrierbar**, wenn sie meßbar ist und für eine und jede Norm auf V gilt $\int \|f\| < \infty$. Unter diesen Umständen erklären wir das **Integral** unserer Funktion f als den eindeutig bestimmten Vektor

$$v = \int f = \int_X f(x) \mu \langle x \rangle$$

mit der Eigenschaft $L(v) = \int L(f(x)) \mu \langle x \rangle$ für jede Linearform $L : V \rightarrow \mathbb{R}$. Um die Existenz und Eindeutigkeit von v zu zeigen, können wir etwa $V = \mathbb{R}^n$ annehmen und müssen nur prüfen, daß dann das komponentenweise Integral den einzig möglichen Vektor v mit den angeführten Eigenschaften liefert. Das ist leicht zu sehen.

2.1.2. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Die integrierbaren V -wertigen Funktionen auf X bilden einen Untervektorraum $\mathcal{L}_V^1(X; \mu) \subset \text{Ens}(X, V)$ im Raum aller V -wertigen Funktionen auf X . Ist V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum, so bilden sie sogar einen komplexen Untervektorraum. Das Integral ist dann eine \mathbb{R} -lineare beziehungsweise \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\int : \mathcal{L}_V^1(X; \mu) \rightarrow V$$

Im Fall $V = \mathbb{C}$ bezeichnen wir den komplexen Vektorraum der komplexwertigen integrierbaren Funktionen auf X mit $\mathcal{L}^1(X; \mu)$.

2.1.3 (**Rückwärtskompatibilität**). In [AN2] 6.3.3 hatten wir bereits eine Verallgemeinerung des Integrationsbegriffs zu einem Integral für stetige Funktionen auf kompakten reellen Intervallen mit Werten in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen besprochen. Obige Variante liefert offensichtlich dasselbe Integral für stetige Funktionen.

Übungen

Übung 2.1.4. Unsere Sätze über dominierte Konvergenz und Integration auf Produkträumen gelten unverändert auch für Funktionen mit Werten in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen. Für jede lineare Abbildung $\Lambda : V \rightarrow W$ in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt weiter die Formel $\int (\Lambda \circ f) = \Lambda \left(\int f \right)$.

Übung 2.1.5. Sei (X, μ) ein Maßraum. Nimmt eine integrierbare Abbildung $f : X \rightarrow V$ mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum nur endlich viele Werte an, so haben wir

$$\int_X f(x) \mu\langle x \rangle = \sum_{v \neq 0} \mu(f^{-1}(v)) v$$

Übung 2.1.6. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Gegeben eine integrierbare Abbildung $f : X \rightarrow V$ mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt für jede Norm $\| \cdot \|$ auf V die Abschätzung

$$\left\| \int f \right\| \leq \int \|f\|$$

Hinweis: Man zeige das zunächst für meßbare Stufenfunktionen und argumentiere dann mit dem Satz über dominierte Konvergenz.

Ergänzung 2.1.7. Im Fall komplexwertiger Funktionen und der Standardnorm auf \mathbb{C} kann man die Abschätzung $|\int f| \leq \int |f|$ aus 2.1.6 auch einfacher zeigen, indem man $\lambda \in \mathbb{C}$ wählt mit $|\lambda| = 1$ und $\lambda \int f > 0$, woraus dann folgt

$$\left| \int f \right| = \lambda \int f = \int \lambda f = \int \operatorname{Re}(\lambda f) \leq \int |\lambda f| = \int |f|$$

2.2 Quadratintegrierbare Funktionen

2.2.1. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **quadratintegrierbar**, wenn sie meßbar ist und ihr Betragsquadrat integrierbar ist, in Formeln $\int |f|^2 < \infty$. Die Menge $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(X; \mu)$ aller quadratintegrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein Untervektorraum im \mathbb{C} -Vektorraum aller meßbaren komplexwertigen Funktionen auf X , denn wir haben $2|f| \cdot |g| \leq |f|^2 + |g|^2$ und folglich $|f + g|^2 \leq |f|^2 + 2|f| \cdot |g| + |g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$. Dieselben Abschätzungen zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle = \int \bar{f} g \end{aligned}$$

wohldefiniert ist und schieflinear im ersten Eintrag sowie linear im zweiten. Es gilt auch offensichtlich $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{L}^2$. Dennoch liefert unsere Paarung im allgemeinen kein Skalarprodukt auf \mathcal{L}^2 im Sinne von [LA2] 1.3.5, da aus $\langle f, f \rangle = 0$ nicht notwendig folgt $f = 0$. Um einen Skalarproduktraum zu erhalten, betrachten wir den Untervektorraum $\mathcal{R} := \{f \in \mathcal{L}^2 \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall g \in \mathcal{L}^2\}$, das sogenannte Radikal. Unsere hermitesche Form induziert dann offensichtlich und formal nach Übung [LA2] 4.5.9 ein Skalarprodukt auf dem Quotientenvektorraum

$$L^2(X, \mu) := \mathcal{L}^2 / \mathcal{R}$$

2.2.2. Ich erinnere an den Begriff der Summierbarkeit von Familien [AN2] 7.1.5. Gegeben ein normierter Vektorraum V nennt man eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V **summierbar mit Summe** $s \in V$ und schreibt $\sum_{i \in I} v_i = s$, wenn es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt $\sum_{i \in J} v_i \in U$.

Satz 2.2.3 (Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen). Sei das Intervall $[0, 2\pi]$ mit dem auf Gesamtmaß Eins normierten Lebesguemaß $\mu := dt/2\pi$ versehen und \mathbb{Z} mit dem Zählmaß ζ . So liefert $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ einen Isomorphismus von Skalarprodukträumen

$$L^2(\mathbb{Z}, \zeta) \xrightarrow{\sim} L^2([0, 2\pi], \mu)$$

Insbesondere und noch genauer ausgeschrieben ist für jede Familie $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von komplexen Zahlen mit $\sum |c_n|^2 < \infty$ die Familie der Nebenklassen $c_n e^{int} + \mathcal{R}$ summierbar in $L^2([0, 2\pi], \mu)$.

2.2.4. Den Beweis dieses Satzes müssen wir zurückstellen, bis wir die Theorie weiter ausgebaut haben. Er wird dann im Anschluß an 2.6.4 ausgeführt. Im folgenden geben wir alternative Beschreibungen unserer Räume $L^2(X, \mu)$, die eine bessere Anschauung geben mögen und sich auch sonst als nützlich erweisen.

Definition 2.2.5. Seien (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und Y eine Menge. Auf der Menge $\text{Ens}(X, Y)$ aller Abbildungen von unserem Maßraum X in die Menge Y können wir eine Äquivalenzrelation \sim_μ erklären durch die Vorschrift

$$f \sim_\mu g \Leftrightarrow \{\exists N \in \mathcal{M} \text{ mit } \mu(N) = 0 \text{ und } f(x) = g(x) \forall x \in X \setminus N\}$$

In Worten sind also Abbildungen f, g äquivalent, wenn sie außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen. Die Äquivalenzklassen von \sim_μ heißen **μ -fast überall definierte Abbildungen** von X nach Y . Wir notieren fast überall definierte Abbildungen

$$f : X \dashrightarrow Y$$

Wenn wir betonen wollen, daß eine Abbildung im ursprünglichen Sinne zu verstehen ist, sprechen wir von einer **überall definierten Abbildung**. Die Menge aller μ -fast überall definierten Abbildungen von X nach Y notieren wir

$$\text{Ens}_\mu(X, Y) := \text{Ens}(X, Y) / \sim_\mu$$

2.2.6. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Gilt eine Aussage für alle $x \in X$ außerhalb einer Nullmenge, so sagt man auch, die Aussage gelte **fast überall** oder genauer **μ -fast überall**.

2.2.7 (Nachschalten einer überall definierten Abbildung). Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Gegeben eine überall definierte Abbildung $h : Y \rightarrow Z$ von Mengen liefert das Nachschalten von h eine wohlbestimmte Abbildung

$$h \circ : \text{Ens}_\mu(X, Y) \rightarrow \text{Ens}_\mu(X, Z)$$

2.2.8 (Vektorräume von fast überall definierten Funktionen). Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Ist K ein Körper, so bildet im Vektorraum $\text{Ens}(X, K)$ der K -wertigen Funktionen auf X die Teilmenge

$$\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow K \mid f \sim_\mu 0\}$$

der fast überall verschwindenden Funktionen einen Untervektorraum. Offensichtlich ist auch $f \sim_\mu g$ gleichbedeutend zu $(f - g) \in \mathcal{N}$. Folglich induziert die kanonische Surjektion $\text{Ens}(X, K) \twoheadrightarrow \text{Ens}_\mu(X, K)$ eine Bijektion

$$\text{Ens}(X, K)/\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_\mu(X, K)$$

und die Menge $\text{Ens}_\mu(X, K)$ der fast überall definierten K -wertigen Funktionen besitzt genau eine Struktur als K -Vektorraum derart, daß die kanonische Surjektion $\text{Ens}(X, K) \twoheadrightarrow \text{Ens}_\mu(X, K)$ linear ist.

2.2.9 (Diskussion der Terminologie). Den Begriff *fast überall* verwende ich in zwei Bedeutungen: Auf einem Maßraum X als Abkürzung für „die Ausnahmen bilden eine Nullmenge“, auf einer beliebigen Menge X als Abkürzung für „die Ausnahmen bilden eine endliche Menge“. Mir ist keine griffige Terminologie eingefallen, die diese Unschärfe ausräumt. Ich kann nur hoffen, daß aus dem Kontext erschlossen werden kann, welche Bedeutung im Einzelfall gemeint ist.

2.2.10 (Operationen mit fast überall definierten Funktionen). Man kann reellwertige oder auch komplexwertige fast überall definierte Funktionen addieren und multiplizieren, man darf beim Rechnen mit fast überall definierten Funktionen sogar auch dann noch den Quotienten f/g bilden, falls g nur fast überall von Null verschieden ist. Es ist sinnvoll, von einer Folge fast überall definierter Funktionen zu sagen, daß sie fast überall punktweise gegen eine weitere fast überall definierte Funktion konvergiert. Man kann die Verknüpfung $g \circ f$ einer fast überall definierter Funktion f mit einer überall definierten Funktion g bilden und erhält so wieder eine fast überall definierte Funktion. Nicht sinnvoll ist das Auswerten einer fast überall definierten Funktion an einem Punkt, es sei denn, der fragliche Punkt habe positives Maß.

Definition 2.2.11. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und Y ein Meßraum. Eine fast überall definierte Abbildung $f : X \dashrightarrow Y$ heißt **meßbar**, wenn sie einen meßbaren Repräsentanten besitzt. Wir notieren die Menge der meßbaren fast überall definierten Abbildungen

$$\text{Meß}_\mu(X, Y)$$

2.2.12. Ist unser Maßraum nicht vollständig, so kann eine meßbare fast überall definierte Abbildung durchaus auch nicht-meßbare Repräsentanten haben.

2.2.13. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und eine meßbare überall definierte Abbildung $h : Y \rightarrow Z$ induziert das Nachschalten von h nach 2.2.7 eine wohldefinierte Abbildung

$$h \circ : \text{Meß}_\mu(X, Y) \rightarrow \text{Meß}_\mu(X, Z)$$

Definition 2.2.14. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) setzen wir

$$L^1(X; \mu) := \text{im}(\mathcal{L}^1(X; \mu) \rightarrow \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C}))$$

Die Elemente von L^1 sind mithin alle μ -fast überall definierten komplexwertigen Funktionen auf X mit mindestens einem integrierbaren Repräsentanten.

2.2.15. Es ist etwas unglücklich, daß eine L^1 -Funktion damit genau genommen gar keine Funktion ist sondern vielmehr eine Äquivalenzklasse von Funktionen. Der Buchstabe L steht in diesem Zusammenhang für „Lebesgue“.

2.2.16. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) verschwindet das Integral auf allen fast überall verschwindenden integrierbaren Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(X; \mu) \cap \mathcal{N}$ und induziert mithin eine \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\int : L^1(X; \mu) \rightarrow \mathbb{C}$$

2.2.17. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und zwei fast überall gleiche meßbare Funktionen $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ sind auch $|f|, |g| : X \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar und fast überall gleich nach 2.2.7 und 2.2.13.

Lemma 2.2.18. Seien (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $f : X \rightarrow [0, \infty]$ eine nicht-negative meßbare Funktion. Genau dann gilt $\int f = 0$, wenn f außerhalb einer Nullmenge verschwindet.

Beweis. Verschwindet f außerhalb von einer Nullmenge, so gilt offensichtlich $\int f = 0$. Gilt umgekehrt $\int f = 0$, so hat $f^{-1}([1/n, \infty])$ Maß Null für alle n , und damit hat auch $f^{-1}((0, \infty])$ Maß Null als abzählbare Vereinigung von Mengen vom Maß Null. \square

Satz 2.2.19. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) ist $\|g\|_1 := \int |g|$ eine Norm auf dem komplexen Vektorraum $L^1(X)$.

Beweis. Wir überlassen alles dem Leser bis auf den Nachweis der Implikation $\|g\|_1 = 0 \Rightarrow g = 0$. Per definitionem haben wir $\|g\|_1 = \int |\tilde{g}|$ für einen und jeden integrierbaren Repräsentanten $\tilde{g} : X \rightarrow \mathbb{C}$ von g . Aus $\|g\|_1 = \int |\tilde{g}| = 0$ folgt nun erst $|\tilde{g}| \sim_\mu 0$ nach 2.2.18 und dann offensichtlich $\tilde{g} \sim_\mu 0$ und dann aus den Definitionen $g = 0$. \square

Definition 2.2.20. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) setzen wir

$$L^2(X; \mu) := \text{im}(\mathcal{L}^2(X; \mu) \rightarrow \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C}))$$

Die Elemente von L^2 sind mithin alle μ -fast überall definierten komplexwertigen Funktionen auf X mit mindestens einem quadratintegrierbaren Repräsentanten.

2.2.21. Wieder ist es etwas unglücklich, daß eine L^2 -Funktion damit genau genommen gar keine Funktion ist, sondern vielmehr eine Äquivalenzklasse von Funktionen.

Satz 2.2.22. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und $f, g \in L^2(X)$ haben wir $\bar{f}g \in L^1(X)$ und $\langle f, g \rangle := \int \bar{f}g$ ist ein Skalarprodukt auf $L^2(X)$.

Beweis. Dem Leser überlassen. Das Produkt ist in $\text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$ zu verstehen. \square

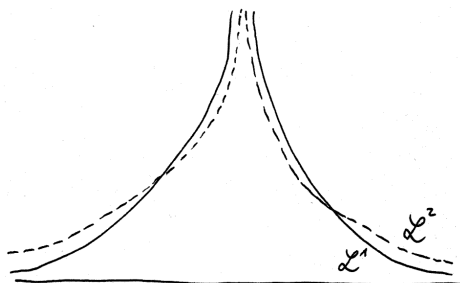
Lemma 2.2.23. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) induziert die kanonische Surjektion $\mathcal{L}^2(X; \mu) \rightarrow L^2(X; \mu)$ einen Isomorphismus

$$L^2(X, \mu) \xrightarrow{\sim} L^2(X; \mu)$$

Beweis. Wir hatten in 2.2.1 den Raum $L^2(X, \mu) := \mathcal{L}^2(X, \mu)/\mathcal{R}$ erklärt als den Quotient von \mathcal{L}^2 nach dem Radikal $\mathcal{R} = \{f \in \mathcal{L}^2 \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall g \in \mathcal{L}^2\}$. Nach dem allgemeinen Isomorphismus $V/(\ker L) \xrightarrow{\sim} \text{im } L$ für lineare Abbildungen $L : V \rightarrow W$ reicht es zu zeigen, daß das Radikal übereinstimmt mit dem Raum der fast überall verschwindenden Funktionen aus \mathcal{L}^2 , in Formeln $\mathcal{R} = \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{N}$. In der Tat ist \supset offensichtlich und \subset folgt aus der Kette von Implikationen

$$f \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow \int |f|^2 = 0 \Rightarrow |f|^2 \sim_\mu 0 \Rightarrow f \sim_\mu 0$$

Die dritte Implikation kommt dabei von 2.2.18 her. \square



Anschaulich und unpräzise gesprochen ist die Quadratintegrierbarkeit im Vergleich zur Integrierbarkeit für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine schwächere Bedingung an das Abfallen für $x \rightarrow \pm\infty$, aber eine stärkere Bedingung an die Natur möglicher Polstellen.

Übungen

Übung 2.2.24. Man gebe eine quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nicht integrierbar ist. Man gebe eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nicht quadratintegrierbar ist. Man zeige, daß jede quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger integrierbar ist.

Übung 2.2.25. Sind $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ fast überall gleich und stetig bei $p \in \mathbb{R}^n$, so gilt $f(p) = g(p)$.

Ergänzende Übung 2.2.26. Seien X ein topologischer Raum und $p \in X$ ein Punkt und μ ein Maß auf X , das auf jeder offenen Umgebung von p positiv ist. Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall gleich und stetig bei p , so gilt $f(p) = g(p)$.

Übung 2.2.27. Man zeige für $f, g \in L^2$ die sogenannte **Hölder-Ungleichung** $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Hinweis: Man wende die Cauchy-Schwartz'sche Ungleichung auf die Beträge unserer Funktionen an.

2.3 Räume integrierbarer Funktionen

2.3.1. Um unsere Räume integrierbarer und quadratintegrierbarer fast überall definierter Funktionen simultan behandeln zu können, führen wir eine gemeinsame Verallgemeinerung ein, die sogenannten L^p -Räume. Im Rahmen dieser Vorlesung könnte man im Folgenden stets mit $p \in \{1, 2\}$ arbeiten und so die Diskussion allgemeiner L^p -Räume vermeiden. In anderen Zusammenhängen scheinen jedoch auch die L^p -Räume für andere p von Bedeutung zu sein.

2.3.2. Wir erinnern aus [AN1] 5.5.26 und [AN1] 5.5.27 zwei nützliche Ungleichungen: Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt die **Young'sche Ungleichung** $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$ aus der Konvexität der Exponentialfunktion. Weiter folgt, sogar für $p \geq 1$, die Ungleichung $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ aus der Konvexität der Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^p$.

Definition 2.3.3. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und $p \in [1, \infty)$ setzen wir

$$\mathcal{L}^p(X; \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar mit } \int |f|^p < \infty\}$$

2.3.4. Die Abschätzung $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ nach 2.3.2 zeigt, daß $\mathcal{L}^p(X; \mu) \subset \text{Ens}(X, \mathbb{C})$ ein Untervektorraum ist.

Definition 2.3.5. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und $p \in [1, \infty)$ setzen wir

$$L^p(X; \mu) := \text{im}(\mathcal{L}^p(X; \mu) \rightarrow \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C}))$$

Die Elemente von L^p sind mithin alle μ -fast überall definierten komplexwertigen Funktionen auf X mit mindestens einem Repräsentanten aus \mathcal{L}^p .

Beispiel 2.3.6. Für $p = 1$ und $p = 2$ erhalten wir die bereits in 2.2 ausführlich diskutierten Räume $L^1(X)$ und $L^2(X)$.

Proposition 2.3.7. Gegeben ein Maßraum (X, μ) und $p \in (1, \infty)$ erhalten wir eine Norm auf $L^p(X)$ durch die Vorschrift

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \right)^{1/p}$$

Beweis. Sicher gilt $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$ und aus $\|f\|_p = 0$ folgt $f = 0$ fast überall mit 2.2.18. Um die Dreiecksungleichung zu zeigen müssen wir weiter ausholen. Wir finden sicher $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alias $p + q = pq$. Solche p, q heißen **konjugierte Exponenten**. Nach 2.3.2 gilt für reelle $a, b > 0$ dann

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Aus $f \in L^p$ und $g \in L^q$ folgt mithin $fg \in L^1$. Wir behaupten unter diesen Annahmen sogar stärker die **Hölder-Ungleichung**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Auch das folgt im Fall $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ sofort aus unserer obigen Ungleichung, dann müssen wir ja nur $\|fg\|_1 \leq 1$ zeigen. Im allgemeinen folgt es durch Reskalieren. Gegeben $f, g \in L^p$ zeigen wir nun schließlich $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir f und g nichtnegativ und von Null verschieden annehmen. Setzen wir $h := (f+g)^{p-1}$, so ergibt sich $h^q = (f+g)^p$. Es folgt $h \in L^q$ und wir erhalten

$$\|f+g\|_p^p = \|(f+g)h\|_1 \leq \|fh\|_1 + \|gh\|_1 \leq \|f\|_p \|h\|_q + \|g\|_p \|h\|_q$$

Beachten wir nun $\|h\|_q = \|f+g\|_p^{(p/q)}$ und teilen das auf beiden Seiten weg, so ergibt sich die Behauptung. \square

Definition 2.3.8. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und setzen wir

$$\mathcal{L}^\infty(X; \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar mit } |f| \text{ beschränkt}\}$$

2.3.9. Offensichtlich ist $\mathcal{L}^\infty(X; \mu) \subset \text{Ens}(X, \mathbb{C})$ ein Untervektorraum. Offensichtlich ist $\|f\|_\infty := \sup(\{|f(x)| | x \in X\} \cup \{0\})$ eine Norm auf \mathcal{L}^∞ .

Definition 2.3.10. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) setzen wir

$$L^\infty(X; \mu) := \text{im}(\mathcal{L}^\infty(X; \mu) \rightarrow \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C}))$$

Die Elemente von L^∞ sind mithin alle μ -fast überall definierten komplexwertigen Funktionen auf X mit mindestens einem meßbaren betragsmäßig beschränkten Repräsentanten.

Lemma 2.3.11. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) erhalten wir eine Norm $\| \cdot \|_{\infty}^{\text{ess}}$ auf $L^{\infty}(X; \mu)$ durch die Vorschrift

$$\|f\|_{\infty}^{\text{ess}} := \inf\{\|g\|_{\infty} \mid g \in \mathcal{L}^{\infty}(X; \mu) \text{ repräsentiert } f\}$$

Beweis. Alle Eigenschaften einer Norm sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur der Nullvektor die Norm Null haben kann. Sei $h \in \mathcal{L}^{\infty}$ ein Repräsentant von $f \in L^{\infty}$. Gilt $\|f\|_{\infty}^{\text{ess}} = 0$, so wird aber für alle $n \in \mathbb{N}$ unser f auch repräsentiert durch ein g mit $\|g\|_{\infty} \leq 1/n$ und es folgt $\mu(\{x \mid |h(x)| > 1/n\}) = 0$. Das gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit ist auch die abzählbare Vereinigung dieser Nullmengen eine Nullmenge und wir folgern $h \sim_{\mu} 0$ alias $f = 0$. \square

2.3.12. Ähnlich wie im vorherigen Beweis sieht man auch, daß jedes $f \in L^{\infty}$ einen Repräsentanten $g \in \mathcal{L}^{\infty}$ hat mit $\|f\|_{\infty}^{\text{ess}} = \|g\|_{\infty}$.

2.3.13. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) führen wir für $g \in \mathcal{L}^{\infty}(X; \mu)$ das **essentielle Supremum** ein durch

$$\|g\|_{\infty}^{\text{ess}} := \sup(\{c \mid \mu\{x \mid |g(x)| \geq c\} > 0\} \cup \{0\})$$

Dann haben fast überall gleiche \mathcal{L}^{∞} -Funktionen dasselbe essentielle Supremum und man erkennt unschwer, daß die so auf L^{∞} induzierte Abbildung genau unsere Norm $\| \cdot \|_{\infty}^{\text{ess}}$ aus 2.3.11 ist.

2.3.14 (**Diskussion der Notation**). Vielfach kürzt man $\| \cdot \|_{\infty}^{\text{ess}}$ zu $\| \cdot \|_{\infty}$ ab und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, was genau gemeint ist.

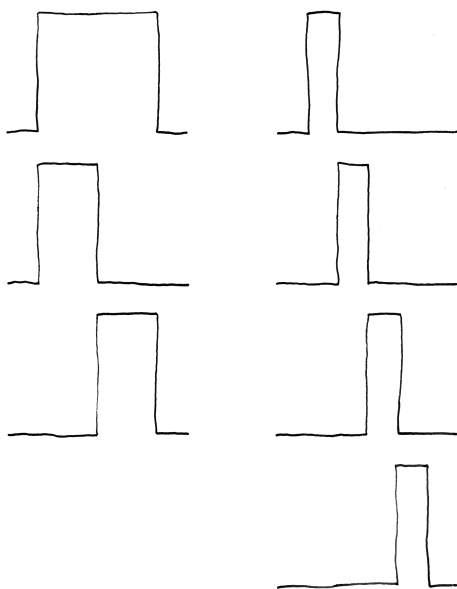
2.3.15. Man bezeichnet etwas allgemeiner als zuvor eingeführt auch 1 und ∞ als **konjugierte Exponenten**. Ist dann (X, μ) ein Maßraum und sind $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exponenten, so folgt aus $f \in L^p$ und $g \in L^q$ stets $fg \in L^1$ und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Für $p, q \in (1, \infty)$ hatten wir das bereits im vorhergehenden Beweis gesehen und im verbleibenden Fall ist es eh klar.

Satz 2.3.16 (Vollständigkeit der L^p -Räume). Für jeden Maßraum X und alle $p \in [1, \infty]$ sind die normierten Vektorräume $L^p(X)$ vollständig. Jede konvergente Folge in einem dieser Räume besitzt des weiteren eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion konvergiert.

Beispiel 2.3.17. Die charakteristischen Funktionen der Intervalle $[0, 1]$, $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, $[0, 1/4]$, $[1/4, 2/4]$, $[2/4, 3/4]$, $[3/4, 1]$, $[0, 1/8]$, $[1/8, 2/8]$, ... bilden eine Nullfolge im Raum der L^1 -Funktionen auf dem Einheitsintervall, die nicht fast überall punktweise gegen Null konvergiert. Diese Folge besitzt aber durchaus eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen Null konvergiert.



Spaltenweise aufgereiht hier die ersten Glieder der Nullfolge in L^1 aus 2.3.17, die nicht fast überall punktweise gegen Null konvergiert. Die graphische Darstellung ist etwas fragwürdig, da Graphen von Funktionen keine senkrechten Linien enthalten dürfen, aber wir vereinbaren einfach, daß in diesem Fall stets der oberste mögliche Wert gemeint ist.

Beweis. Wir überlassen den Fall $p = \infty$ dem Leser zur Übung und führen den Beweis nur im Fall $p < \infty$. Es gilt zu zeigen, daß jede Cauchy-Folge in $L^p(X)$ konvergiert. Seien die $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ Repräsentanten aus $\mathcal{L}^p(X)$ der Glieder einer Cauchy-Folge in $L^p(X)$. Indem wir falls nötig zu einer Teilfolge übergehen, dürfen wir $\|f_n - f_{n+1}\|_p \leq 2^{-n}$ annehmen. Wir betrachten nun die Funktionen $g_k, g : X \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch

$$g_k = \sum_{n=0}^k |f_n - f_{n+1}| \quad \text{und} \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n - f_{n+1}|$$

Aus unseren Annahmen folgt $\|g_k\|_p \leq 2$ für alle k . Da die Funktion g^p der monotone punktweise Grenzwert der g_k^p ist, erhalten wir mit dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz $\int g^p \leq 2^p$. Insbesondere gilt also $g(x) < \infty$ fast überall auf X . Sicher gilt aber auch

$$f_0 - f_{k+1} = \sum_{n=0}^k (f_n - f_{n+1})$$

und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - f_{n+1}(x)$ konvergiert absolut an allen Stellen $x \in X$ mit $g(x) < \infty$, als da heißt fast überall. Mithin konvergiert auch die Folge der $f_k(x)$ außerhalb der meßbaren Menge vom Maß Null $N := g^{-1}(\infty)$ und wir erhalten als ihren punktweisen Grenzwert eine meßbare Funktion f auf $X \setminus N$, die wir durch Null fortsetzen können zu einer meßbaren Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Wir zeigen nun, daß f in \mathcal{L}^p liegt und daß die Folge der f_k auch in der L^p -Norm gegen f konvergiert. Offensichtlich sind die Funktionen $|f_0 - f_k|$ auf $X \setminus N$ beschränkt durch g , folglich ist $|f_0 - f|$ auf $X \setminus N$ beschränkt durch g , also gilt $f_0 - f \in \mathcal{L}^p$ und dann auch $f \in \mathcal{L}^p$. Weiter können wir mit 2.3.2 abschätzen

$$|f - f_k|^p \leq 2^{p-1}(|f - f_0|^p + |f_0 - f_k|^p) \leq 2^p g^p$$

Damit folgt dann $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_p = 0$ aus dem Satz über dominierte Konvergenz, angewandt auf die Funktionenfolge $|f - f_k|^p$, die auf $X \setminus N$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. \square

2.3.18. Ich habe mir bis hierher Mühe gegeben, sorgfältig zwischen Funktionen und fast überall definierten Funktionen zu unterscheiden. Im weiteren Verlauf der Vorlesung werde ich nachlässiger werden in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was genau gemeint ist und wann es auf diese Unterscheidung überhaupt ankommt.

Übungen

Übung 2.3.19. Ist (X, μ) ein Maßraum und $E \subset X$ eine meßbare Teilmenge endlichen Maßes, so liefert für alle $p \in [1, \infty]$ die Einschränkung von Funktionen eine stetige Abbildung $L^p(X) \rightarrow L^1(E)$. Hinweis: Hölder-Ungleichung.

Übung 2.3.20. Gegeben (E, μ) ein Maßraum endlichen Maßes und $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt $L^q(E) \subset L^p(E)$. Hinweis: Gegeben $f \in L^q(E)$ gilt $|f|^p \in L^{q/p}(E)$. Nun multipliziere man mit der konstanten Funktion 1 und wende die Hölderungleichung an mit konjugierten Exponenten, von denen der erste q/p ist.

Übung 2.3.21 (Dichtheit der integrierbaren Stufenfunktionen). Gegeben ein Maßraum liegen für $1 \leq p < \infty$ die Bilder der integrierbaren Stufenfunktionen auf unserem Raum dicht im Raum der L^p -Funktionen. Hinweis: Man verwende Lemma 1.5.15 zur monotonen Approximation durch Stufenfunktionen.

Übung 2.3.22. Gegeben eine Menge X und ein Prämaß μ auf einem Mengenring $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugen für $1 \leq p < \infty$ die charakteristischen Funktionen der Mengen endlichen Maßes aus \mathcal{A} einen dichten Teilraum im Raum der L^p -Funktionen in Bezug auf die größte Maßfortsetzung auf der von \mathcal{A} erzeugten σ -Algebra. Hinweis: Man verwende die vorhergehende Übung 2.3.21 und die Konstruktion der größten Maßfortsetzung 1.2.15.

Übung 2.3.23. Gegeben Maßräume (X, μ) und (Y, ν) erzeugen für alle $p \in [1, \infty)$ die charakteristischen Funktionen $[A \times B]$ für $A \subset X$ und $B \subset Y$ meßbar von endlichem Maß einen dichten Teilraum von $L^p(X \times Y; \mu \boxtimes \nu)$. Speziell erzeugen die Funktionen mit $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ mit $f \in L^2(X; \mu)$ und $g \in L^2(Y; \nu)$ einen dichten Teilraum von $L^2(X \times Y; \mu \boxtimes \nu)$. Hinweis: 2.3.22.

Übung 2.3.24. Gegeben ein Borelmaß μ auf \mathbb{R} und $1 \leq p \leq \infty$ ist der Raum $L^p(\mathbb{R}; \mu)$ endlichdimensional genau dann, wenn μ eine endliche Linearkombination von Diracmaßen ist. Hinweis: Man betrachte die Variante 1.2.27 der Verteilungsfunktion unseres Maßes.

2.4 Hilberträume und Hilbertbasen

Definition 2.4.1. Ein **Hilbertraum** ist ein komplexer Skalarproduktraum, der vollständig ist für die von diesem Skalarprodukt induzierte Metrik. Bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ unser Skalarprodukt, so wird die davon induzierte Metrik gegeben durch die Vorschrift $d(x, y) = \|x - y\|_2$ mit $\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, vergleiche [LA2] 1.3.8. Einen reellen oder komplexen Skalarproduktraum bezeichnet man insbesondere dann, wenn unser Raum nicht vollständig ist, auch als **Prähilbertraum**.

2.4.2 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Quellen fordern von einem Hilbertraum zusätzlich noch, daß er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzen möge.

Wir schließen uns dieser Konvention nicht an und nennen derartige Hilberträume „separabel“, da es sich dabei offensichtlich genau um die Hilberträume handelt, die als metrische Räume separabel sind im Sinne von 1.4.26.

Beispiel 2.4.3. Nach 2.3.16 ist für jeden Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ der Raum $L^2(X)$ der fast überall definierten quadratintegrierbaren Funktionen auf X ein Hilbertraum. Wir werden im folgenden zeigen, daß es keine wesentlich anderen Beispiele für Hilberträume gibt, ja sogar, daß jeder Hilbertraum bereits isomorph ist zum Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer mit dem Zählmaß versehenen Menge. Dazu müssen wir jedoch zunächst etwas mehr Theorie entwickeln.

2.4.4. Ich erinnere daran, daß nach [LA2] 1.3.13 eine Familie von Vektoren $(e_i)_{i \in I}$ eines Skalarproduktraums ein **Orthonormalsystem** heißt, wenn mit dem Kronecker-delta aus [LA1] 2.4.2 gilt $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Ich erinnere daran, daß nach [LA2] 1.3.14 eine Teilmenge eines Skalarproduktraums ein **Orthonormalsystem** heißt, wenn alle ihre Vektoren die Norm 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht sehen, wenn also unsere Teilmenge als durch sich selbst indizierte Familie die fragliche Eigenschaft für Familien hat.

Definition 2.4.5. Eine **Hilbertbasis** eines Hilbertraums oder gleichbedeutend ein **vollständiges Orthonormalsystem** ist ein Orthonormalsystem, dessen Vektorraumergänzung dicht ist in unserem Hilbertraum.

2.4.6. Eine Hilbertbasis ist im allgemeinen keine Basis unseres Hilbertraums im Sinne der linearen Algebra. Genauer gilt das nur für endlichdimensionale Hilberträume und für diese ist eine Hilbertbasis dasselbe wie eine Orthonormalbasis. Man vergleiche dazu auch Übung 2.4.19.

Definition 2.4.7. Für eine Menge I bezeichne $L^2(I) = L^2(I; \zeta)$ den Raum der in Bezug auf das Zählmaß ζ quadratintegrierbaren Funktionen $I \rightarrow \mathbb{C}$ und $\chi_i \in L^2(I)$ die charakteristische Funktion der einelementigen Menge $\{i\}$. In der Literatur wird unser $L^2(I)$ auch oft $l^2(I)$ notiert.

2.4.8. Nach 2.3.21 bilden die χ_i eine Hilbertbasis von $L^2(I)$. Nach [AN1] 4.1.25 ist jede quadratintegrierbare Funktion $I \rightarrow \mathbb{C}$ höchstens auf einer abzählbaren Teilmenge von I verschieden von Null.

2.4.9. Wir erinnern daran, daß wir nach [AN2] 7.1.5 eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren eines normierten Vektorraums V summierbar mit Summe $s \in V$ nennen und

$$\sum_{i \in I} v_i = s$$

schreiben als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt $\sum_{i \in J} v_i \in U$.

Satz 2.4.10 (über Hilbertbasen). 1. Ist $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum \mathcal{H} , so gibt es genau eine stetige lineare Abbildung $\varphi : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\chi_i \mapsto e_i$ für alle $i \in I$, und diese Abbildung erhält das Skalarprodukt;

2. Ist $(e_i)_{i \in I}$ sogar eine Hilbertbasis, so ist besagte Abbildung ein Isomorphismus von Hilberträumen $L^2(I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$ und ihre Inverse $\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} L^2(I)$, $v \mapsto \hat{v}$ wird gegeben durch $\hat{v}(i) = \langle e_i, v \rangle$;

3. Gegeben eine Hilbertbasis $(e_i)_{i \in I}$ in einem Hilbertraum \mathcal{H} gilt für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ im Sinne von 2.4.9 die Darstellung

$$v = \sum_{i \in I} \langle e_i, v \rangle e_i$$

2.4.11. Wir schicken dem Beweis zwei Lemmata voraus.

Lemma 2.4.12 (Stetige Fortsetzung von dichten Teilmengen). Seien X, Y metrische Räume und $A \subset X$ eine dichte Teilmenge. So gilt:

1. Jede Abbildung $g : A \rightarrow Y$ besitzt höchstens eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $\tilde{g} : X \rightarrow Y$;

2. Ist $g : A \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig und Y vollständig, besitzt g genau eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $\tilde{g} : X \rightarrow Y$.

2.4.13. Im wesentlichen haben Sie das Lemma bereits als Übung [AN2] 1.6.11 gezeigt. Die Abbildung $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (1/x)$ ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig. Sie läßt sich nicht stetig auf die Vervollständigung $[0, 1]$ des offenen Intervalls $(0, 1)$ fortsetzen.

Vorschau 2.4.14. In [TM] 1.6.30 wird erklärt, unter welchen Voraussetzungen sich die erste Aussage auf den Fall topologischer Räume verallgemeinern läßt. Die zweite Aussage läßt sich allgemeiner für sogenannte „uniforme Räume“ zeigen, wie sie in [TM] 4.1 eingeführt werden. Wir gehen hier darauf nicht näher ein.

Beweis. Gegeben $x \in X$ finden wir eine Folge a_n in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. Natürlich muß für jede stetige Erweiterung \tilde{g} von g gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \tilde{g}(x)$$

und das zeigt auch schon die Eindeutigkeit von \tilde{g} . Ist g nun gleichmäßig stetig, so ist mit a_n auch $g(a_n)$ eine Cauchy-Folge, und ist Y vollständig, so muß $g(a_n)$

konvergieren. Haben weiter zwei Folgen a_n, b_n in A denselben Grenzwert x , so strebt auch die Folge c_n mit den Gliedern $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ gegen x . Wir folgern

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n)$$

und können also definieren $\tilde{g}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)$ für eine und jede Folge a_n aus A , die gegen x strebt. Wir müssen nur noch zeigen, daß \tilde{g} stetig ist. Sei dazu für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gegeben mit $d(a, b) \leq \delta \Rightarrow d(g(a), g(b)) \leq \varepsilon$. Wir zeigen $d(x, z) \leq \delta/2 \Rightarrow d(\tilde{g}(x), \tilde{g}(z)) \leq \varepsilon$ für alle $x, z \in X$. In der Tat, ist $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $z = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, so folgt aus der Dreiecksungleichung $d(a_n, b_n) \leq \delta$ für fast alle n und damit $d(g(a_n), g(b_n)) \leq \varepsilon$ für fast alle n und dann im Grenzwert auch $d(\tilde{g}(x), \tilde{g}(z)) \leq \varepsilon$ mithilfe der Stetigkeit der Metrik $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ nach [AN2] 1.1.18. \square

2.4.15. Wir erinnern daran, daß nach [LA2] 1.4.1 eine lineare Abbildung zwischen zwei Skalarprodukträumen $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ **unitär** heißt, wenn sie das Skalarprodukt erhält, wenn also in Formeln gilt $\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in \mathcal{H}$.

2.4.16. Eine unitäre Einbettung von einem Hilbertraum in einen Prähilbertraum und allgemeiner eine normerhaltende Einbettung von einem Banachraum in einen weiteren normierten Vektorraum hat stets abgeschlossenes Bild. In der Tat ist nach [AN2] 1.6.8 eine vollständige Teilmenge eines metrischen Raums stets abgeschlossen.

Lemma 2.4.17. *Seien X, Y normierte Vektorräume, $A \subset X$ ein dichter Teilraum und $g : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ist die Einschränkung $g|_A : A \rightarrow Y$ linear, so ist auch g linear. Sind X, Y Skalarprodukträume und ist die Einschränkung $g|_A : A \rightarrow Y$ unitär, so ist auch g unitär.*

Beweis. Die Abbildung $X \times X \rightarrow Y, (v, w) \mapsto g(v) + g(w)$ ist stetig und stimmt auf der dichten Teilmenge $A \times A$ mit der stetigen Abbildung $(v, w) \mapsto g(v + w)$ überein. Also sind diese Abbildungen gleich und es gilt $g(v + w) = g(v) + g(w)$ für alle $v, w \in X$. Mit ähnlichen Argumenten beendet man den Nachweis der Linearität von g und zeigt die Verträglichkeit mit dem Skalarprodukt. \square

Beweis von Satz 2.4.10 über Hilbertbasen. Bezeichne $\mathbb{C}I \subset L^2(I)$ den Raum aller Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{C}$, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschieden sind. Natürlich bilden die χ_i eine Basis von $\mathbb{C}I$ und wir erhalten eine lineare Abbildung $\mathbb{C}I \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\chi_i \mapsto e_i$. Da sowohl die χ_i als auch die e_i Orthonormalsysteme sind, ist unsere Abbildung mit den Skalarprodukten verträglich, insbesondere erhält sie Abstände. Da \mathcal{H} vollständig ist und $\mathbb{C}I$ dicht liegt in $L^2(I)$, läßt sich unsere Abbildung nach Lemma 2.4.12 auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung $\varphi : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$ ausdehnen, und nach 2.4.17 ist diese Ausdehnung sogar unitär. Damit ist Teil 1 bewiesen. Nach 2.4.16 ist das Bild unserer

unitären Abbildung notwendig abgeschlossen, und im Fall einer Hilbertbasis folgt ihre Surjektivität. Um die inverse Abbildung zu beschreiben, rechnen wir

$$\hat{v}(i) = \langle \chi_i, \hat{v} \rangle = \langle \varphi(\chi_i), \varphi(\hat{v}) \rangle = \langle e_i, v \rangle$$

Mit der Notation aus 2.4.9 kann die im Beweis konstruierte Abbildung $\varphi : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$ auch suggestiver geschrieben werden in der Form

$$\varphi : f \mapsto \sum_{i \in I} f(i)e_i$$

In der Tat gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches $I_\varepsilon \subset I$ mit $\sum_{i \notin I_\varepsilon} |f(i)|^2 < \varepsilon^2$, und für J endlich mit $I_\varepsilon \subset J \subset I$ und der Notation χ_A für die charakteristische Funktionen einer Teilmenge $A \subset I$ folgt $f = \chi_J f + (1 - \chi_J)f$ und zusätzlich $\|(1 - \chi_J)f\|_2 < \varepsilon$, mithin $\|\varphi(f) - \varphi(\chi_J f)\|_2 < \varepsilon$. Daraus folgt unmittelbar der letzte Teil des Satzes. \square

Übungen

Übung 2.4.18. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von paarweise orthogonalen Vektoren eines Hilbertraums ist summierbar genau dann, wenn gilt $\sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty$, und in diesem Fall haben wir

$$\left\| \sum_{i \in I} v_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|v_i\|^2$$

Übung 2.4.19. Man zeige, daß ein unendlichdimensionaler Hilbertraum keine Orthonormalbasis im Sinne der linearen Algebra besitzen kann.

Ergänzende Übung 2.4.20. Gegeben ein Maßraum (X, μ) und ein abzählbar basierter alias separabler Hilbertraum \mathcal{H} bilden die meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : X \rightarrow \mathcal{H}$, für die $\| \cdot \|^2 \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist, mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int \langle f(x), g(x) \rangle$ selbst einen Hilbertraum

$$L^2(X, \mathcal{H}) = L^2(X, \mathcal{H}; \mu)$$

und die meßbaren Stufenfunktionen mit Träger von endlichem Maß bilden darin einen dichten Teilraum. Hinweis: Man verallgemeinere den Beweis von 2.3.16. Die Bedingung der Separabilität von \mathcal{H} ist nötig wegen 1.4.28, da im allgemeinen $\langle f(x), g(x) \rangle$ nicht meßbar sein müßte, etwa wenn X endliches Maß hat und f jedem Punkt von X den durch diesen Punkt indizierten Vektor einer durch X indizierten Orthonormalbasis zuordnet. Die Aussage gilt aber entsprechend für beliebige Hilberträume \mathcal{H} , wenn wir $L^2(X, \mathcal{H})$ feiner erklären als die Menge aller meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : X \dashrightarrow \mathcal{H}$, deren Bild in einem separablen Teilraum von \mathcal{H} enthalten ist und für die $\| \cdot \|^2 \circ f : X \dashrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Ergänzende Übung 2.4.21. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und eine Menge Z notieren wir die Menge der fast überall definierten Abbildungen von X nach Z als $\text{Ens}_\mu(X, Z)$. Gegeben zwei σ -endliche Maßräume X, Y und eine Menge Z induziert die offensichtliche Bijektion zwischen den entsprechenden Räumen überall definierter Abbildungen aus [GR] 1.6.5 nach Fubini eine Bijektion

$$\text{Ens}_\mu(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_\mu(X, \text{Ens}_\mu(Y, Z))$$

Man zeige, daß diese Abbildung im Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{C}$ einen Isomorphismus $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$ induziert. Hinweis: Geeignete Stufenfunktionen bilden auf beiden Seiten dichte Teilräume, die als Prähilberträume unter unserer Abbildung identifiziert werden. Dann benutze man, daß punktweise Konvergenz fast überall unter unserer Abbildung punktweise Konvergenz fast überall wird, und schließe mit 2.3.16.

2.5 Vervollständigung metrischer Räume*

2.5.1. Dieser Abschnitt ist für den weiteren Fortgang der Vorlesung nicht unmittelbar relevant. Es stellt sich jedoch heraus, daß viele unserer Funktionenräume auch als Vervollständigungen einfacherer Funktionenräume konstruiert werden können. So mag dieser alternative Zugang zum Verständnis beitragen. In vielen Zusammenhängen spielen auch direkte Summen von unendlichen Familien von Hilberträumen eine wichtige Rolle, die bequem als Vervollständigungen konstruiert werden können. Wir erinnern aus [LA2] 1.10.3, daß eine Abbildung von metrischen Räumen isometrisch heißt, wenn sie alle Abstände unverändert läßt. Sind (X, d) und (X', d') unsere metrischen Räume, so heißt also in Formeln eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ isometrisch, wenn gilt

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Definition 2.5.2. Eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild von einem metrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum heißt eine **Vervollständigung** des Ausgangsraums.

Satz 2.5.3 (Vervollständigung). 1. Für jeden metrischen Raum X existiert eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild $a : X \rightarrow Y$ in einen vollständigen metrischen Raum Y ;

2. Ist $b : X \rightarrow Z$ eine weitere isometrische Abbildung mit dichtem Bild in einen vollständigen metrischen Raum Z , so existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ mit $f \circ a = b$, und diese Abbildung f ist isometrisch und bijektiv.

2.5.4. Der vollständige metrische Raum Y oder genauer das Paar (Y, a) ist also durch X eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus von metrischen Räumen. Wir gönnen ihm deshalb den bestimmten Artikel und nennen (Y, a) oder auch einfach den Raum Y selbst die **Vervollständigung von X** .

Beweis. 2. Nach 2.4.12 kann man jede gleichmäßig stetige Abbildung von einer dichten Teilmenge eines metrischen Raums in einen vollständigen metrischen Raum auf genau eine Weise stetig fortsetzen. Sind also $a : X \rightarrow Y$ und $b : X \rightarrow Z$ Vervollständigungen eines metrischen Raums X , so gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ mit $fa = b$ und genau eine stetige Abbildung $g : Z \rightarrow Y$ mit $gb = a$ und wegen $gfa = a$ und $fgb = b$ gilt $gf = \text{id}$ und $fg = \text{id}$. Weiter prüft man leicht, daß auch f und g Isometrien sein müssen.

1. Zu jedem metrischen Raum (X, d) kann man wie folgt eine Vervollständigung $\text{can} : X \rightarrow \hat{X}$ konstruieren: Auf der Menge \mathcal{C} aller Cauchy-Folgen in X betrachte man die Äquivalenzrelation \sim gegeben durch

$$a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$$

und erkläre \hat{X} als die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in X unter dieser Äquivalenzrelation, in Formeln

$$\hat{X} = \mathcal{C} / \sim$$

Gegeben eine Cauchyfolge $a \in \mathcal{C}$ bezeichne $[a] \in \hat{X}$ ihre Äquivalenzklasse. Der Leser mag selbst prüfen, daß es genau eine Abbildung $d : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft

$$d([a], [b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) \quad \forall a, b \in \mathcal{C}$$

und daß diese Abbildung eine Metrik auf \hat{X} ist. Die Abbildung $\text{can} : X \rightarrow \hat{X}$, die jedem Punkt $x \in X$ die Klasse der konstant bei x verweilenden Folge zuordnet, heißt die **kanonische Einbettung**. Sie ist offensichtlich isometrisch mit dichtem Bild. Es bleibt nur zu zeigen, daß jede Cauchy-Folge in \hat{X} konvergiert. Seien dazu $a_0, a_1, \dots \in \mathcal{C}$ Repräsentanten für die Glieder einer Cauchy-Folge in \hat{X} . Jedes a_i ist also eine Cauchy-Folge in X alias eine Abbildung $a_i : \mathbb{N} \rightarrow X$, und wir notieren die Glieder dieser Folge $a_i(0), a_i(1), \dots$. Man zeigt nun mühelos, daß die „diagonale“ Folge $l : \mathbb{N} \rightarrow X$ mit $i \mapsto a_i(i)$ eine Cauchy-Folge in X ist und daß die Klasse $[l] \in \hat{X}$ von l der Limes in \hat{X} der Folge der $[a_i]$ ist. \square

2.5.5 (**Produkt von Vervollständigungen**). Das Produkt zweier Vervollständigungen ist wieder eine Vervollständigung. Sind also in Formeln $X \rightarrow Y$ und

$Y \rightarrow W$ Vervollständigungen, so ist auch $X \times Y \rightarrow V \times W$ eine Vervollständigung. In der Tat ist $V \times W$ nach [AN2] 1.6.7 wieder vollständig. Nach der Eindeutigkeit von Vervollständigungen 2.5.4 existiert also für metrische Räume X, Y stets genau eine Isometrie zwischen dem Produkt ihrer Vervollständigungen und der Vervollständigung ihres Produkts, die als untere Horizontale das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & = & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{X} \times \hat{Y} & \xrightarrow{\sim} & (\hat{X} \times \hat{Y})^\wedge \end{array}$$

zum Kommutieren bringt, mit dem Produkt der kanonischen Einbettungen beziehungsweise der kanonischen Einbettung des Produkts als vertikalen Abbildungen.

Definition 2.5.6. Gegeben ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ bildet man einen weiteren normierten Vektorraum $(\hat{V}, \|\cdot\|)$, seine **Vervollständigung**, indem man auf dem vervollständigten metrischen Raum \hat{V} die Addition, Multiplikation mit Skalaren und Norm „durch stetige Fortsetzung“ nach 2.4.12 erklärt. So erhält man etwa die Addition als stetige Fortsetzung auf $\hat{V} \times \hat{V}$ von $\text{can} \circ \text{add} : V \times V \rightarrow \hat{V}$, und so weiter. Die Axiome eines normierten Vektorraums folgen dann aus der Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzungen nach 2.4.12.

Ergänzung 2.5.7. Eine **Pseudometrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die alle Eigenschaften einer Metrik [AN2] 1.1.1 hat mit Ausnahme der Eigenschaft, daß verschiedene Punkte positiven Abstand haben müssen. Ein **pseudometrischer Raum** ist eine Menge mit einer Pseudometrik. Eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild von einem pseudometrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum heißt wieder eine **Vervollständigung** des Ausgangsraums. Alle oben gezeigten Eigenschaften übertragen sich auf den pseudometrischen Fall, in dem nur die kanonische Abbildung $X \rightarrow \hat{X}$ in die Vervollständigung eben nicht mehr injektiv zu sein braucht.

Ergänzung 2.5.8 (Alternativer Zugang zur Integrationstheorie). Man könnte das Konzept der Vervollständigung dazu benutzen, sich eine Weile alle Maßtheorie zu sparen und etwa $L^p(\mathbb{R}^n)$ schlicht definieren als die Vervollständigung des Raums der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Bezug auf die L^p -Norm, für $p \in [0, \infty)$. Mithilfe einer Variante von 2.3.16 identifiziert man dann Elemente dieser Vervollständigungen mit gewissen fast überall definierten Funktionen, wobei Nullmengen ohne Rückgriff auf das Lebesgue-Maß erklärt werden als solche Mengen, die von einer Folge von Quadern mit beliebig kleinem Gesamtvolumen überdeckt werden können. Im Fall $n = 1$ erklärt man dann das Integral $\int : L^1 \rightarrow \mathbb{C}$ als die stetige Fortsetzung des Riemann-Integrals, und erklärt schließlich Lebesgue-Mengen endlichen Maßes als solche Teilmengen des \mathbb{R}^n , deren charakteristische Funktion integrierbar ist, und das Maß der Menge

eben als besagtes Integral. Dieser Zugang scheint mir recht elegant, da sich das Konzept eines Maßes und eines Maßraums natürlich ergibt und nicht willkürlich vorgegeben werden muß. Ich habe dennoch den maßtheoretischen Zugang vorgezogen, da er mit sehr viel weniger Vorkenntnissen verstanden werden kann und die grundlegenden Resultate direkt in der Allgemeinheit liefert, in der sie auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie gebraucht werden.

Übungen

Übung 2.5.9. Die Vervollständigung eines Prähilbertraums besitzt stets genau eine Struktur als Hilbertraum derart, daß die kanonische Einbettung unitär ist. Hinweis: Man dehne zuerst das Skalarprodukt mit einem festen Vektor auf die Vervollständigung aus.

Übung 2.5.10. Gegeben eine dichte Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raums X liefert 2.4.12 eine isometrische Bijektion $\hat{A} \xrightarrow{\sim} X$. Insbesondere erhalten wir so für jede offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ einen Isomorphismus von Hilberträumen $\mathcal{C}_1(\Omega)^\wedge \xrightarrow{\sim} L^2(\Omega)$, wo die Kompletterung des Prähilbertraums $\mathcal{C}_1(\Omega)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ bezüglich der L^2 -Norm $\|f\|_2 := (\int |f|^2)^{1/2}$ gemeint ist.

Übung 2.5.11. Gegeben eine Familie von Hilberträumen $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ erklären wir auf der direkten Summe $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ der zugrundeliegenden Vektorräume ein Skalarprodukt durch die Vorschrift $\langle (v_i), (w_i) \rangle := \sum_{i \in I} \langle v_i, w_i \rangle$. Die Vervollständigung dieses Prähilbertraums im Sinne von 2.5.9 heißt die **Hilbertsumme** unserer Hilberträume und wird

$$\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$$

notiert. Man zeige, daß sich die Hilbertsumme auch beschreiben läßt als der Teilraum ihres Produkts aller Tupel (v_i) mit der Eigenschaft $\sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty$, mit dem Skalarprodukt $\langle (v_i), (w_i) \rangle := \sum_{i \in I} \langle v_i, w_i \rangle$. Ist speziell $B_i \subset \mathcal{H}_i$ jeweils eine Hilbertbasis, so ist die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} \text{in}_i(B_i)$ eine Hilbertbasis unserer Hilbertsumme.

Übung 2.5.12. Man erinnere die Konstruktion $L^2(X, \mathcal{H})$ aus 2.4.20. Gegeben ein σ -endlicher Maßraum und eine abzählbare Familie \mathcal{H}_i von separablen Hilberträumen liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\hat{\bigoplus} L^2(X, \mathcal{H}_i) \xrightarrow{\sim} L^2\left(X, \hat{\bigoplus} \mathcal{H}_i\right)$$

Ergänzende Übung 2.5.13. Gegeben zwei Hilberträume \mathcal{H} und \mathcal{L} definiert man ihr **vervollständigtes Tensorprodukt**

$$\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{L}$$

als die Vervollständigung ihres algebraischen Tensorprodukts mit seiner offensichtlichen Struktur als Prähilbertraum. Man zeige, daß für (v_i) eine Hilbertbasis von \mathcal{H} und (w_j) eine Hilbertbasis von \mathcal{L} die Tensoren $(v_i \otimes w_j)$ eine Hilbertbasis von $\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{L}$ bilden. Gegeben Maßräume (X, μ) und (Y, ν) zeige man allgemeiner: Für das Produktmaß $\mu \boxtimes \nu$ nach ?? liefert die von $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ mit $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ induzierte Abbildung einen Hilbertraumisomorphismus

$$L^2(X; \mu) \hat{\otimes} L^2(Y; \nu) \xrightarrow{\sim} L^2(X \times Y; \mu \boxtimes \nu)$$

Hinweis: Das Bild ist dicht nach 2.3.23.

2.6 Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen

Satz 2.6.1 (Approximation durch glatte Funktionen). *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und μ ein Borelmaß auf U , so liegen die glatten Funktionen mit kompaktem in U enthaltenen Träger für alle $p \in [1, \infty)$ dicht im Raum der L^p -Funktionen auf U , in Formeln*

$$\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)} = L^p(U; \mu)$$

2.6.2. Diese Aussage ist im Fall $p = \infty$ nicht mehr richtig. Zum Beispiel kann man auf \mathbb{R} mit dem Lebesguemaß die konstante Funktion 1 in L^∞ nicht als Grenzwert einer Folge von Funktionen mit kompaktem Träger erhalten.

Beweis. Natürlich ist $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)} \subset L^p(U; \mu)$ ein Untervektorraum. Wir zeigen nun für immer größere Funktionenklassen, daß sie zu $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$ gehören.

1. Ist $A \subseteq U$ offen von endlichem Maß $\mu(A) < \infty$, so gehört die charakteristische Funktion $[A]$ von A zu $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$. Das folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz sofort aus Lemma 1.8.4, nach dem eine Folge nichtnegativer glatter Funktionen mit kompaktem, in A enthaltenem Träger monoton gegen die charakteristische Funktion von A konvergiert.

2. Ist $B \subset U$ meßbar von endlichem Maß $\mu(B) < \infty$, so gehört $[B]$ zu $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$. In der Tat, für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir aufgrund der Regularität unseres Maßes nach 1.10.10 eine offene Teilmenge $A \subseteq U$ mit $B \subset A$ und $\mu(B) \leq \mu(A) \leq \mu(B) + \varepsilon$. Für deren charakteristische Funktion gilt dann $\|[B] - [A]\|_p < \varepsilon^{1/p}$. Also ist $[B]$ Grenzwert einer Folge aus $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$ und gehört mithin selbst zu $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$.

3. Für jeden Maßraum liegen die integrierbaren Stufenfunktionen für alle $p \in [1, \infty)$ dicht im Raum der L^p -Funktionen, siehe 2.3.21. \square

Korollar 2.6.3 (Approximation durch stetige Funktionen). *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und μ ein Borelmaß auf A , so liegen die stetigen*

Funktionen mit kompaktem Träger auf A für alle $p \in [1, \infty)$ dicht im Raum der L^p -Funktionen auf A , in Formeln

$$\overline{C_1(A)} = L^p(A; \mu)$$

Beweis. Wir wenden den obigen Satz an auf das Borelmaß $i_*\mu$ für $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Einbettungsabbildung. \square

Vorschau 2.6.4. Ist (X, μ) ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum mit einem Borelmaß, so liegen für $p \in [1, \infty)$ die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht im Raum der L^p -Funktionen. Das zeigen wir hier nicht.

Satz 2.6.5 (Fourierreihen für L^2 -Funktionen). Sei das Intervall $[0, 2\pi]$ mit dem auf Gesamtmaß Eins normierten Lebesgue-Maß $\mu := dt/2\pi$ versehen und \mathbb{Z} mit dem Zählmaß ζ . So liefert die Fourierentwicklung $f \mapsto f^\wedge$ gegeben durch $f^\wedge(n) := \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mu\langle t \rangle$ einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2([0, 2\pi]; \mu) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{Z}; \zeta)$$

Beweis. Wir müssen nach 2.4.10 nur zeigen, daß die Funktionen $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ im Sinne von 2.4.5 eine Hilbertbasis von $L^2([0, 2\pi]; \mu)$ bilden. Wir haben schon im Beweis von [AN2] 7.1.3 gesehen, daß sie ein Orthonormalsystem bilden. Aus [AN2] 7.2.16 wissen wir weiter, daß sich jede stetige Funktion der Periode 2π beliebig gut gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren läßt. Da wiederum die stetigen, ja sogar die glatten Funktionen auf $[0, 2\pi]$ mit Träger im offenen Intervall $(0, 2\pi)$ nach 2.6.1 ihrerseits dicht in L^2 liegen, liegen auch die trigonometrischen Polynome dicht in L^2 . \square

Übungen

Übung 2.6.6. Man berechne die Fourierkoeffizienten der Sägezahnfunktion $t \mapsto |t|$ für $t \in [-\pi, \pi]$ und der Funktion $t \mapsto \exp(\exp(it))$.

Übung 2.6.7. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von der Periode 2π und integrierbar auf $[0, 2\pi]$. So gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt = 0$.

Ergänzende Übung 2.6.8. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von der Periode 2π und integrierbar auf $[0, 2\pi]$ und sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Lassen sich die Restriktionen $f|_{(-\infty, a)}$ und $f|_{(a, \infty)}$ auf die jeweiligen abgeschlossenen reellen Intervalle fortsetzen zu bei a differenzierbaren Funktionen, so konvergiert die die Folge $\sum_{|\nu| \leq n} c_\nu e^{i\nu a}$ der Partialsummen der Fourierreihe von f bei a gegen den Wert

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{t \nearrow a} f(t) + \lim_{t \searrow a} f(t) \right)$$

Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a = 0$ und f gerade und stetig bei Null mit $f(0) = 0$. Nun setze man $P_n = \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu t}$ und prüfe $P_n(t) = \cos(nt) + \cot(t/2) \sin(nt)$. Dann zeige man $\langle f, P_n \rangle \rightarrow 0$.

Übung 2.6.9 (Fourierreihen in mehreren Veränderlichen). Man zeige, daß die Funktionen $x \mapsto e^{2\pi i x \cdot \xi}$ für $\xi \in \mathbb{Z}^n$ eine Hilbertbasis des Raums $L^2([0, 1]^n; \lambda)$ der in Bezug auf das Lebesgue-Maß quadratintegrierbaren Funktionen auf dem n -dimensionalen Einheitswürfel bilden.

Übung 2.6.10. Gegeben $y \in \mathbb{R}^n$ und $p \in [1, \infty)$ bezeichne $\tau_y : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ die Verschiebung, in Formeln $(\tau_y f)(x) = f(x - y)$. Man zeige die Stetigkeit der Abbildung $\mathbb{R}^n \times L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, $(y, f) \mapsto \tau_y f$. Hinweis: Man zeige zunächst die Stetigkeit von $y \mapsto \tau_y f$ für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Der Buchstabe τ steht für das Wort „Translation“.

Ergänzende Übung 2.6.11. Hier dürfen Sie zeigen, daß für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ meßbar von positivem Maß die Menge $A + B$ eine nichtleere offene Teilmenge umfaßt. Man folgere zunächst aus 2.6.10, daß für alle $g \in L^1(\mathbb{R}^n; \lambda)$ die Funktion $y \mapsto \int f(y - x)[B](x) \lambda(x)$ stetig sein muß. Dann beachte man, daß diese Funktion im Fall $f = [A]$ mit A meßbar von positivem endlichen Maß nichtnegativ ist und positives Integral hat. Man folgere, daß jede meßbare echte Untergruppe von \mathbb{R}^n Maß Null haben muß. Man folgere, daß jeder meßbare Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ konstant sein muß.

Ergänzende Übung 2.6.12. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und μ darauf ein Borelmaß, so gibt es für jede beschränkte meßbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge f_n in $C_c^\infty(U)$ mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ für alle n und $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für fast alle $x \in U$. Hinweis: Da unser Maß notwendig σ -endlich ist, findet man ein endliches Maß mit denselben Nullmengen, für das dann f integrierbar ist. Nun verwende man 2.3.16.

2.7 Fourierreihen und Charaktere

2.7.1. Seine natürlichste Form erhält unser Satz über Fourierreihen, wenn man das Intervall $[0, 2\pi]$ zur Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ zusammenbiegt. Das soll im folgenden ausgeführt werden.

Definition 2.7.2. Eine **topologisches Monoid** ist ein Monoid G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ stetig ist für die **Produkttopologie** auf $G \times G$. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ und die Inversenabbildung $G \rightarrow G$ stetig sind. Eine Hausdorff'sche topologische Gruppe nenne ich eine **Hausdorffgruppe**.

2.7.3. Gegeben topologische Gruppen G, H bezeichne $\text{GrpTop}(G, H)$ die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von G nach H .

Beispiele 2.7.4. Die additive Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ mit der Standardtopologie auf \mathbb{R} ist eine topologische Gruppe. Die additive Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums mit seiner natürlichen Topologie ist eine topologische Gruppe. Die additive Gruppe jedes normierten reellen Vektorraums mit der metrischen Topologie ist eine topologische Gruppe. Die multiplikative Gruppe \mathbb{C}^\times des Körpers der komplexen Zahlen ist eine topologische Gruppe. Die **Kreisgruppe** S^1 aller komplexen Zahlen der Norm Eins ist mit der von \mathbb{C} induzierten Topologie eine topologische Gruppe. Jede Gruppe ist mit der diskreten Topologie eine topologische Gruppe. In der Zahlentheorie sind auch die topologischen Gruppen der sogenannten „ p -adischen Zahlen“ und „Adele“ von großer Bedeutung.

Definition 2.7.5. Gegeben eine topologische Gruppe G nennen wir die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ nach G alias die Elemente von $\text{GrpTop}(\mathbb{R}, G)$ die **Gruppenwege in G** .

2.7.6 (**Diskussion der Terminologie**). Unsere Gruppenwege heißen in der Literatur meist „Einparameteruntergruppen“. Diese Terminologie schien mir jedoch ungeschickt, da es sich dabei nicht um Untergruppen handelt.

Beispiele 2.7.7. Gruppenwege in \mathbb{R}^\times haben wir bereits in [AN1] 4.3.8 besprochen und Gruppenwege in der Kreisgruppe in [AN1] 4.5.8. Genauer haben wir dort gezeigt, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ von der Gestalt $\varphi(t) = e^{iat}$ ist für genau ein $a \in \mathbb{R}$.

Definition 2.7.8. Gegeben eine topologische Gruppe G nennen wir die stetigen Gruppenhomomorphismen von G in die Kreisgruppe S^1 alias die Elemente von $\text{GrpTop}(G, S^1)$ die **Charaktere** oder genauer die **unitären multiplikativen Charaktere von G** .

2.7.9. Sei G eine topologische Gruppe. Die Menge der Charaktere von G bildet mit der Verknüpfung $(\chi \dot{+} \psi)(g) := \chi(g)\psi(g)$ eine abelsche Gruppe

$$\hat{G} = \mathfrak{X}(G) := \text{GrpTop}(G, S^1)$$

Diese Gruppe heißt die **Charaktergruppe von G** . Ihre Verknüpfung notiert man additiv, wenn man sich die Charaktere als Elemente einer abstrakten abelschen Gruppe denkt, und multiplikativ, wenn man sie sich als konkrete Funktionen denkt. Für jeden unitären Charakter χ ist sein Negatives alias Inverses in der Charaktergruppe der komplex konjugierte Charakter $\bar{\chi}$, denn für jede komplexe Zahl z vom Betrag Eins gilt $z^{-1} = \bar{z}$.

2.7.10 (**Mehrdeutigkeiten bei der Addition von Charakteren**). Meist notiert man die Verknüpfung der Charaktergruppe einfacher $\chi + \psi$ statt $\chi \dot{+} \psi$. Das führt jedoch leicht zu Verwirrung, da $\chi + \psi$ alternativ auch die Summe der Funktionen $\chi, \psi : G \rightarrow \mathbb{C}$ bedeuten kann, die ihrerseits kein Charakter mehr ist. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

Beispiel 2.7.11 (Charaktere der Zahlengeraden). Unser Satz 2.7.7 über die Gruppenwege in der Kreisgruppe beschreibt auch die Charaktere der additiven Gruppe \mathbb{R} . Genauer erhalten wir durch die Abbildungsvorschrift $y \mapsto (x \mapsto e^{ixy})$ einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

Dies Beispiel wird bei der Fouriertransformation wichtig werden.

Beispiel 2.7.12 (Charaktere zyklischer Gruppen). Das Auswerten eines Charakters auf dem Erzeuger $1 \in (\mathbb{Z}, +)$ liefert nach der universellen Eigenschaft [GR] 2.3.31 von \mathbb{Z} einen Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} S^1$$

Gegeben $m \in \mathbb{N}$ liefert das Auswerten eines Charakters auf der Nebenklasse der Eins nach der universellen Eigenschaft [LA2] 4.2.1 des Quotienten weiter einen Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mu_m := \{\zeta \in S^1 \mid \zeta^m = 1\}$$

der Charaktergruppe von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit der Gruppe μ_m der m -ten Einheitswurzeln. Wir können das Auswerten auch als Paarung $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mu_m \rightarrow S^1, (\bar{n}, \zeta) \mapsto \zeta^n$ lesen. Diese Paarung liefert dann auch umgekehrt einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mu_m)$$

In der Tat prüft man leicht die Injektivität. Weil es nun aber Gruppenisomorphismen $\mu_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gibt, haben beide Seiten gleichviele Elemente.

Lemma 2.7.13 (Charaktere der Kreisgruppe). *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\chi : S^1 \rightarrow S^1$ ist von der Form $\chi = \chi_n : z \mapsto z^n$ für genau ein $n \in \mathbb{Z}$ und die Abbildung $n \mapsto \chi_n$ ist ein Gruppenisomorphismus*

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(S^1)$$

Beweis. Das einzige Problem ist nachzuweisen, daß es außer den χ_n keine weiteren stetigen Gruppenhomomorphismen $\chi : S^1 \rightarrow S^1$ gibt. Ist aber χ solch ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\varphi : t \mapsto \chi(\exp(it))$ ein Gruppenweg in S^1 . Nach 2.7.7 gibt es folglich $a \in \mathbb{R}$ mit $\chi(\exp(it)) = \exp(iat)$. Wegen $\chi(1) = 1$ folgt erst $\exp(2\pi ia) = 1$ und dann $a \in \mathbb{Z}$ und dann schließlich $\chi(\exp(it)) = (\exp(it))^n$ alias $\chi = \chi_n$. \square

Zweiter Beweis. Die Algebra zeigt, daß das Auswerten an der Restklasse von 1 für jede Gruppe G eine Bijektion $\text{Grp}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} \{g \in G \mid g^n = e\}$ liefert. Jeder Gruppenhomomorphismus $\chi : S^1 \rightarrow S^1$ induziert nun auf den 2^s -ten Einheitswurzeln einen Gruppenhomomorphismus, der nach dem Vorhergehenden die Gestalt $\chi(z) = z^{n(s)}$ haben muß. Hier wird $n(s)$ durch die zusätzlichen Bedingung $-2^{s-1} < n(s) \leq 2^{s-1}$ eindeutig festgelegt. Ist χ stetig, so liegt für hinreichend großes s das Bild von $\exp(2\pi i/2^s)$ in der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil, und dann gilt sogar $-2^{s-2} < n(s) \leq 2^{s-2}$. Dann zeigt aber die Rückwärtskompatibilität $n(s) \equiv n(s+1) \pmod{2^s}$, daß unsere Folge stagnieren muß, und ein Dichtheitsargument beendet den Beweis. \square

Definition 2.7.14. Unter einer **Fourier-Gruppe** verstehen wir eine topologische Gruppe, die isomorph ist zum Produkt einer endlich erzeugten diskreten abelschen Gruppe mit endlich vielen Kopien der Kreisgruppe und endlich vielen Kopien der additiven Gruppe \mathbb{R} .

2.7.15 (**Verträglichkeit von induzierter Topologie und Produkttopologie**). Aus der Definition der Produkttopologie folgt, daß gegeben $A \subset X$ und $B \subset Y$ die Produkttopologie der induzierten Topologien auf $A \times B$ übereinstimmt mit der induzierten Topologie unter der Einbettung $A \times B \hookrightarrow X \times Y$ zur Produkttopologie auf $X \times Y$. Insbesondere ist jede Fouriergruppe homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n .

2.7.16 (**Diskussion der Terminologie**). Der Begriff einer „Fouriergruppe“ ist nicht gebräuchlich. Für diese topologischen Gruppen läßt sich jedoch die Theorie der allgemeinen Fouriertransformation sehr viel leichter entwickeln als für allgemeine abelsche lokal kompakte Hausdorffgruppen. Für die meisten Anwendungen außerhalb der Zahlentheorie ist diese Allgemeinheit darüberhinaus ausreichend. Deshalb will ich mich hier auf diesen Fall beschränken und dafür braucht er einen griffigen Namen. In der üblichen Terminologie, wie sie in [ML] 3.2.19 eingeführt wird, sind unsere Fouriergruppen genau die „abelschen Liegruppen mit endlich erzeugter Komponentengruppe“, vergleiche [ML] 4.5.20 und [ML] 4.5.2.

Beispiel 2.7.17. Die multiplikativen Gruppen \mathbb{C}^\times und \mathbb{R}^\times sind Fouriergruppen. Jeder endlichdimensionale reelle Vektorraum ist eine Fouriergruppe.

Definition 2.7.18. Ein **Haar-Maß** auf einer Fouriergruppe G ist ein von Null verschiedenes Borelmaß μ mit $\mu(gA) = \mu(A)$ für jede Borelmenge $A \subset G$ und alle $g \in G$.

Beispiele 2.7.19. Ein erstes Beispiel für ein Haarmaß ist das Lebesguemaß. Vielleicht sogar noch davor kommt das Zählmaß auf einer beliebigen diskreten endlichen abelschen Gruppe. Ein Haarmaß auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V konstruiert man unschwer als Bildmaß des mehrdimensionalen Lebesguemaßes mit einem Isomorphismus $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ von Vektorräumen.

Vorschau 2.7.20. Allgemeiner betrachtet man Haarmaße auf beliebigen lokal kompakten Hausdorffgruppen G und versteht darunter von Null verschiedene reguläre Borelmaße μ mit $\mu(gA) = \mu(A)$ für jede Borelmenge $A \subset G$ und alle $g \in G$. Die Regularität mußten wir im Fall von Fouriergruppen in unserer Definition nicht extra fordern, da sie in diesem Fall bereits aus Satz 1.10.10 über die Regularität von Borelmaßen folgt. Für Matrixliegruppen diskutieren wir Haarmaße in [ML] 2.4.4, in der Allgemeinheit abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffgruppen in [TM] 4.3.14 und in der Allgemeinheit beliebiger lokal kompakter Hausdorffgruppen als Radonmaße in [TM] 4.3.3.

Satz 2.7.21 (Haar­maße auf Fouriergruppen, Existenz und Eindeutigkeit). *Auf jeder Fouriergruppe existiert ein Haarmaß und je zwei Haar­maße unterscheiden sich höchstens um eine positive multiplikative Konstante.*

Beweis. Im Fall $G = \mathbb{R}$ hatten wir das Lebesguemaß bereits dadurch definiert, daß es das einzige Haarmaß ist, das dem Einheitsintervall den Wert Eins zuordnet. In diesem Fall stimmt also unser Satz. Den Fall der Kreisgruppe kann der Leser leicht ableiten. Im Fall einer endlich erzeugten abelschen Gruppe sind offensichtlich das Zählmaß und seine Vielfachen die einzigen Haar­maße. Im allgemeinen können wir die Existenz eines Haar­maßes zeigen, indem wir Produkte dieser Haar­maße bilden. Für die Eindeutigkeit reicht es zu zeigen, daß gegeben zwei Fouriergruppen G, H mit einem jeweils bis auf eine positive multiplikative Konstante eindeutigen Haar­maß jedes Haar­maß ν auf dem Produkt das Produktmaß zu Haar­maßen auf den Faktoren ist. An die Arbeit! Sicher gibt es in $G \times H$ ein Kompaktum C derart, daß abzählbar viele verschobene Kopien von C ganz $G \times H$ überdecken. Für unser Haar­maß ν gilt wegen $\nu \neq 0$ folglich $\nu(C) > 0$. Die Projektionen von C sind dann Kompakta $K \subset G$ und $L \subset H$ mit $\nu(K \times L) > 0$. Durch Multiplikation mit einer Konstante dürfen wir sogar $\nu(K \times L) = 1$ annehmen. Dann erhalten wir offensichtlich ein Haar­maß λ auf G durch die Vorschrift $\lambda(A) := \nu(A \times L)$ und ein Haar­maß μ auf H durch die Vorschrift $\mu(B) := \nu(K \times B)$. Ist A enthalten in einem Kompaktum, so liefert weiter die Vorschrift $\mu_A(B) := \nu(A \times B)$ ein Haar­maß oder das Nullmaß auf H . Also gibt es nach Annahme eine nur von A abhängende Konstante $c_A \geq 0$ mit $\mu_A(B) = c_A \mu(B)$ und durch Einsetzen von $B = L$ ergibt sich

$$\lambda(A) = \nu(A \times L) = \mu_A(L) = c_A \mu(L) = c_A$$

Das zeigt für alle meßbaren Mengen $A \subset G$ und $B \subset H$ mit A enthalten in einem Kompaktum die Identität

$$\nu(A \times B) = \mu_A(B) = c_A \mu(B) = \lambda(A) \mu(B)$$

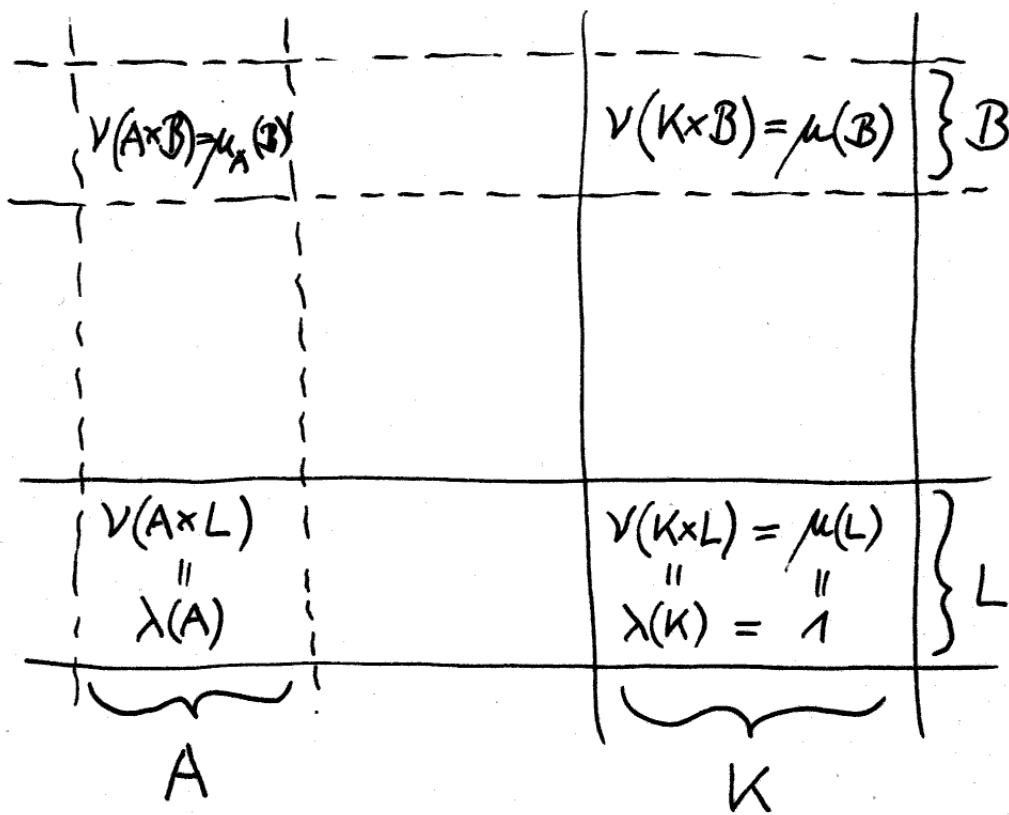


Illustration zum Beweis der Eindeutigkeit von Haarmaßen für Fouriergruppen.

Da aber jede Fouriergruppe als abzählbare Vereinigung von Kompakta geschrieben werden kann, erzeugen die Produkte $A \times B$ mit in Kompakta enthaltenen meßbaren Mengen A, B bereits die borelsche σ -Algebra von $A \times B$. Mit dem Maßfortsetzungssatz von Caratheodory 1.2.11 folgt wie gewünscht $\nu = \lambda \boxtimes \mu$. \square

Definition 2.7.22. Ein Haarmaß heißt **normiert**, wenn es der ganzen Gruppe das Maß Eins zuordnet.

Satz 2.7.23 (Fourierreihen und Charaktere). *Jede kompakte Fouriergruppe K besitzt genau ein normiertes Haarmaß $\mu = \mu_K$ und die Menge $\mathfrak{X}(K)$ ihrer Charaktere ist eine Hilbertbasis des Raums $L^2(K; \mu)$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf K .*

Vorschau 2.7.24. Der Satz gilt allgemeiner für jede abelsche kompakte Hausdorffgruppe. Für einen Beweis in dieser Allgemeinheit verweise ich auf [TM] 4.7.8.

Beispiel 2.7.25 (Der Fall einer Kreisgruppe). Im Fall der Kreisgruppe liefert die Abbildung $E : t \mapsto \exp(it)$ einen Isomorphismus $([0, 2\pi], dt/2\pi) \xrightarrow{\sim} (S^1, \mu)$ von Maßräumen und folglich einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2([0, 2\pi]; dt/2\pi) \xrightarrow{\sim} L^2(S^1; \mu)$$

Die Charaktere $\chi_n : z \mapsto z^n$ bilden also genau dann eine Hilbertbasis von $L^2(S^1; \mu)$, wenn die Funktionen $\chi_n \circ E : t \mapsto \exp(int)$ eine Hilbertbasis von $L^2([0, 2\pi]; dt/2\pi)$ oder gleichbedeutend von $L^2([0, 2\pi]; dt/2\pi)$ bilden. So sehen wir, daß unser Satz 2.7.23 in diesem Fall nur eine Umformulierung des Satzes 2.6.5 über die Fourierreihe ist.

Beispiel 2.7.26 (Der Fall einer endlichen Gruppe). Unser Satz ist bereits im Fall einer endlichen Gruppe durchaus relevant, wenn er auch in diesem Fall besser in eine Vorlesung über Algebra paßt. Im Spezialfall einer zyklischen Gruppe von Einheitswurzeln $\mu_m := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^m = 1\} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ etwa sind die Charaktere genau alle Abbildungen $\chi_n : \zeta \mapsto \zeta^n$ für $n = 0, 1, \dots, m-1$ und der in unserem Satz versteckte Hilbertraumisomorphismus

$$L^2(\mathfrak{X}(K); \zeta) \xrightarrow{\sim} L^2(K; \mu)$$

heißt die **diskrete Fouriertransformation**. Die diskrete Fouriertransformation ist für konkrete Anwendungen von besonderer Bedeutung, da in der Praxis stets nur endlich viele Messungen durchgeführt werden können.

Vorschau 2.7.27. In der Algebra werden wir dieses Beispiel in [NAS] 1.2.14 auf den Fall allgemeinerer Grundkörper verallgemeinern und in [NAS] 4.3.6 auf den Fall endlicher nicht notwendig kommutativer Gruppen. In [TM] 4.9.5 schließlich führen wir im Fall komplexer Koeffizienten diese Verallgemeinerungen in verschiedene Richtungen wieder zusammen unter dem Dach einer „Fouriertransformation für kompakte Hausdorffgruppen“.

Beweis des Satzes über Fourierreihen und Charaktere. Nach 2.7.21 gibt es auf jeder Fouriergruppe ein bis auf eine positive multiplikative Konstante eindeutiges Haarmaß. Damit gibt es offensichtlich auf jeder kompakten Fouriergruppe genau ein normiertes Haarmaß μ . Für jedes Element $g \in K$ gilt nun per definitionem $(g \cdot)_* \mu = \mu$. Gegeben ein Charakter $\chi : K \rightarrow S^1$ gilt weiter $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$ und damit

$$\int \chi \mu = \int \chi (g \cdot)_* \mu = \int (\chi \circ (g \cdot)) \mu = \int \chi(g) \chi \mu = \chi(g) \int \chi \mu$$

Ist insbesondere χ ein nichttrivialer Charakter von K , gibt es in anderen Worten $g \in K$ mit $\chi(g) \neq 1$, so folgt $\int \chi \mu = 0$. Gegeben zwei Charaktere χ, ψ gilt in $L^2(K; \mu)$ also

$$\langle \chi, \psi \rangle = \int \bar{\chi} \psi \mu = \delta_{\chi, \psi}$$

Das zeigt, daß die Charaktere ein Orthonormalsystem bilden. Es bleibt zu zeigen, daß es vollständig ist. Wir wissen das bereits für K endlich zyklisch durch Dimensionsvergleich und für K die Kreisgruppe aus der Theorie der Fourierreihen. Im allgemeinen folgt es dann aus 2.3.23 oder alternativ aus dem Approximationsatz von Stone-Weierstraß [AN2] 7.2.13. In der Tat ist der von den Charakteren aufgespannte Untervektorraum $\langle \mathfrak{X}(K) \rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{C}(K)$ eine unter der komplexen Konjugation stabile Unterringalgebra, die die Punkte trennt, und folglich eine dichte Teilmenge für die Norm $\| \cdot \|_{\infty}$ der gleichmäßigen Konvergenz. Die stetigen Funktionen hinwiederum sind nach 2.6.3 dicht in $L^2(K; \mu)$. \square

Übungen

Übung 2.7.28. Gegeben eine topologische Gruppe G ist jede Untergruppe $H \subset G$ mit ihrer induzierten Topologie auch eine topologische Gruppe. Hinweis: 2.7.15.

Übung 2.7.29. Man konstruiere eine Bijektion zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen $(S^1)^m \rightarrow (S^1)^n$ und der Menge $\text{Mat}(n \times m; \mathbb{Z})$ aller $(n \times m)$ -Matrizen mit ganzzahligen Einträgen. Hinweis: 2.7.13.

Ergänzende Übung 2.7.30. Gegeben $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \{0, 1\}$ betrachten wir den Gruppenhomomorphismus $\rho_{\lambda, \varepsilon} : \mathbb{R}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ mit $\rho_{\lambda, \varepsilon}(x) = |x|^{\lambda} (\text{sgn}(x))^{\varepsilon}$. Man zeige, daß wir so genau alle stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ erhalten. Hinweis: Man beachte $\mathbb{R} \times \{1, -1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0} \times \{1, -1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{\times}$ mittels $(\exp \times \text{id})$ beziehungsweise der Multiplikation und wende Übung [AN1] 4.5.28 an, in der alle Gruppenwege in \mathbb{C}^{\times} beschrieben werden.

Übung 2.7.31 (Charaktere von Produkten). Gegeben G, H topologische Gruppen zeige man, daß die durch $\chi \mapsto (\chi \circ i, \chi \circ j)$ gegebene Abbildung ein Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

ist, mit $i : G \hookrightarrow G \times H, g \mapsto (g, 1)$ und $j : H \hookrightarrow G \times H, h \mapsto (1, h)$.

Übung 2.7.32 (Meßbare Homomorphismen von Fouriergruppen). Man zeige, daß jeder meßbare Gruppenhomomorphismus von Fouriergruppen stetig ist. Hier darf meßbar sogar in Bezug auf die Vervollständigung der Borel'schen σ -Algebra nach dem Haar-Maß verstanden werden. Hinweis: Man zeigt wie in 2.6.10 für jede Fouriergruppe G , daß die Abbildung $G \times L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ gegeben durch $(w, f) \mapsto (f \circ (w \cdot))$ stetig ist. Man folgere, daß für kompaktes G jeder meßbare Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow S^1$ stetig ist. Wie in 2.6.11 zeigt man, daß für jede Fouriergruppe G jeder meßbare Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \Gamma$ in eine diskrete Fouriergruppe stetig ist. Damit kann man sich dann durchtricksen.

2.8 Orthogonale Projektionen in Hilberträumen

2.8.1. Wir holen den Beweis nach für unsere Behauptung, daß jeder Hilbertraum eine Hilbertbasis besitzt. Dem liegt der folgende allgemeine Satz zugrunde.

Satz 2.8.2 (Hilbertraumkomplemente). 1. Gegeben eine Teilmenge U eines Prähilbertraums \mathcal{H} ist ihr Orthogonalraum $U^\perp := \{v \in \mathcal{H} \mid \langle u, v \rangle = 0 \forall u \in U\}$ ein abgeschlossener Teilraum;

2. Gegeben ein vollständiger Teilraum U eines Prähilbertraums \mathcal{H} liefert die Addition eine Bijektion $U \times U^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$;

3. Gegeben ein abgeschlossener Teilraum U eines Hilbertraums \mathcal{H} liefert die Addition eine Bijektion $U \times U^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$;

Beweis. 1. Sicher ist für alle $x \in \mathcal{H}$ die Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, v \mapsto \langle x, v \rangle$ stetig und linear. Das Urbild x^\perp von $0 \in \mathbb{C}$ unter dieser Abbildung ist also ein abgeschlossener Teilraum von \mathcal{H} , und dann muß auch für beliebiges $U \subset \mathcal{H}$ die Menge

$$U^\perp = \{v \in \mathcal{H} \mid \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall x \in U\} = \bigcap_{x \in U} x^\perp$$

ein abgeschlossener Teilraum von \mathcal{H} sein.

2. Ist U ein Teilraum, so gilt offensichtlich $U \cap U^\perp = 0$ und damit ist unsere Additionsabbildung injektiv. Um für U einen vollständigen Teilraum ihre Surjektivität zu zeigen, wählen wir ein $v \in \mathcal{H}$ und setzen $d = d(v, U) := \inf_{u \in U} \|v - u\|$. Sicher gibt es eine Folge u_n von Vektoren aus U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - u_n\| = d$. Wir erinnern nun die Parallelogrammregel [LA2] 1.1.25, nach der die Summe der Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms gleich ist zur Summe der Quadrate der beiden Diagonalen. Ist also eine Diagonale fast so lang wie der halbe Umfang, so muß die andere Diagonale sehr kurz sein. In Formeln erhalten wir

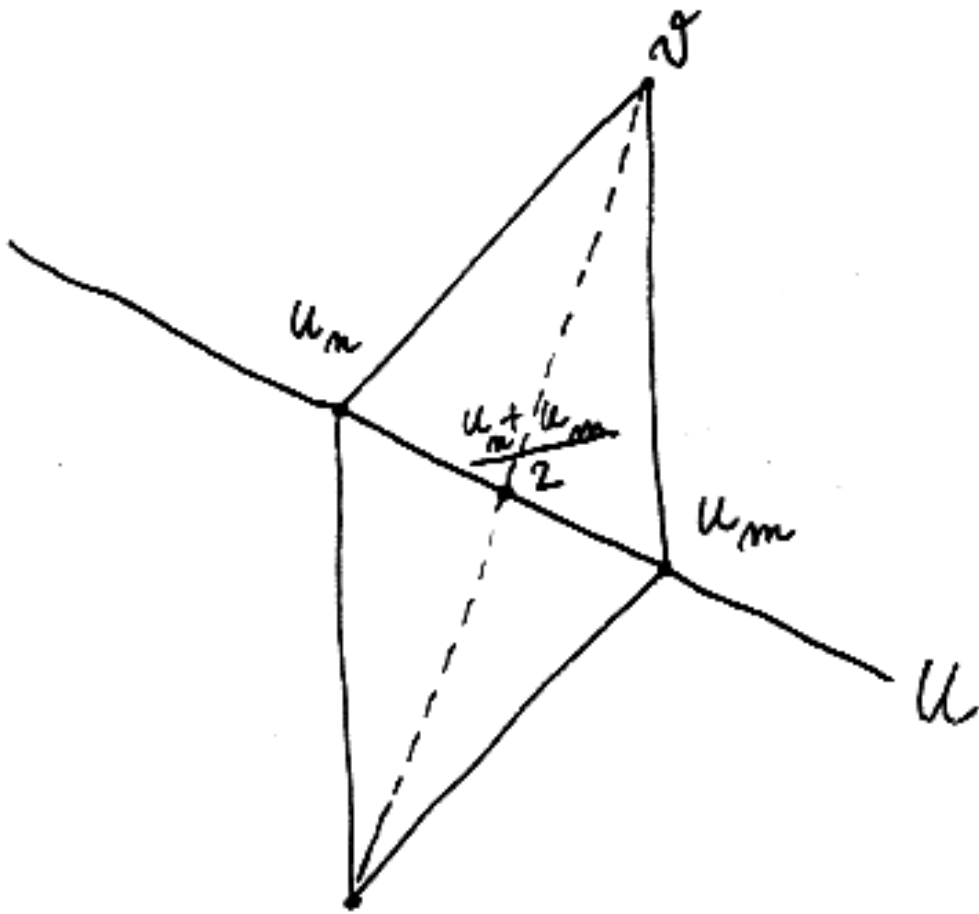


Illustration zum Beweis des Satzes über das orthogonale Komplement: Ist in einem Parallelogramm eine Diagonale, hier etwa die gestrichelt eingezeichnete, fast so lang wie der halbe Umfang, so muß die andere Diagonale sehr kurz sein.

$$\begin{aligned} 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 &= \|u_n - u_m\|^2 + \|2v - u_n - u_m\|^2 \\ &= \|u_n - u_m\|^2 + 4\|v - (u_n + u_m)/2\|^2 \end{aligned}$$

Da aber $(u_n + u_m)/2$ auch in U liegt, folgt

$$2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4d^2 \geq \|u_n - u_m\|^2$$

Aus dieser Abschätzung erkennt man, daß die u_n eine Cauchyfolge bilden. Da U vollständig ist, gibt es $u \in \mathcal{H}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Da die Norm stetig ist, gilt weiter $d = \|v - u\|$. Wir behaupten $(v - u) \in U^\perp$. In der Tat, für alle $h \in U$ nimmt die Funktion

$$t \mapsto \|v - u + th\|^2 = \|v - u\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle v - u, h \rangle + t^2 \|h\|^2$$

bei $t = 0$ ein Minimum an, folglich verschwindet dort ihre Ableitung und wir erhalten $\operatorname{Re}\langle v - u, h \rangle = 0$ für alle $h \in U$. Damit haben wir die gesuchte Zerlegung $v = u + (v - u)$ mit $u \in U$ und $(v - u) \in U^\perp$ gefunden.

3. Im Fall eines Hilbertraums sind nach [AN2] 1.6.8 und [AN2] 1.6.5 die vollständigen Teilräume genau die abgeschlossenen Teilräume. Damit folgt unsere Behauptung aus Teil 2. \square

Korollar 2.8.3 (Riesz'scher Darstellungssatz für Hilberträume). *Jede stetige Linearform auf einem Hilbertraum kann beschrieben werden als das Bilden des Skalarprodukts mit einem durch die besagte Linearform eindeutig bestimmten Vektor.*

Beweis. Sei \mathcal{H} unser Hilbertraum und $l : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ unsere Linearform. Der Kern $\ker l \subset \mathcal{H}$ ist ein abgeschlossener Teilraum und die Linearform l induziert eine Injektion $(\ker l)^\perp \hookrightarrow \mathbb{C}$. Wir haben also $\dim(\ker l)^\perp \leq 1$. Im Fall $l = 0$ ist $x = 0$ das gesuchte Element von \mathcal{H} . Sonst finden wir genau ein $x \in (\ker l)^\perp$ mit $\langle x, v \rangle = l(v) \forall v \in (\ker l)^\perp$. Da diese Gleichung eh gilt für alle $v \in \ker l$, folgt sie für alle $v \in \mathcal{H}$. \square

Korollar 2.8.4. *Jeder Hilbertraum besitzt eine Hilbertbasis.*

Beweis. Nach dem Zorn'schen Lemma finden wir ein bezüglich Inklusion maximales Orthonormalsystem. Wäre der Abschluß seines Erzeugnisses nicht der ganze Raum, so könnten wir unser Orthonormalsystem nach 2.8.2 doch noch vergrößern durch Hinzunahme eines Vektors der Länge Eins aus seinem orthogonalen Komplement im Widerspruch zur Maximalität. \square

2.8.5. Damit ist insbesondere gezeigt, daß sich jeder Hilbertraum schreiben läßt als ein Raum von quadratintegrierbaren Funktionen, und das sogar auf einer Menge mit Zählmaß.

Ergänzung 2.8.6 (Keele-Vermutung). Gegeben eine abgeschlossene beschränkte nichtleere Teilmenge eines Hilbertraums wird vermutet, daß es zu jedem Punkt unseres Hilbertraums nur einen nächsten Punkt in unserer Teilmenge gibt genau dann, wenn unsere Teilmenge konvex ist. Das ist derzeit (2004) meines Wissens nur für endlichdimensionale Räume bewiesen.

Beispiel 2.8.7. Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum muß keine abzählbare Hilbertbasis besitzen. Um ein Beispiel dafür anzugeben, muß ich jedoch mehr Wissen voraussetzen. Betrachten wir den Raum $X = \text{Ens}(I, \{1, -1\})$ aller Abbildungen von einer beliebigen Menge I in die zweielementige Menge $\{1, -1\}$. Mit der Produkttopologie zur diskreten Topologie auf $\{1, -1\}$ ist X kompakt nach dem Satz von Tychonoff [TM] 3.2.10. Jetzt liefert eine analoge Argumentation wie in 1.2.38 ein wohlbestimmtes Borelmaß auf X , das jedem Urbild eines Punktes unter der Projektion auf einen der Faktoren das Maß $1/2$ zuordnet. Die Projektionen auf die Faktoren bilden dann ein Orthonormalsystem in $L^2(X)$.

Definition 2.8.8. Sei $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ eine lineare Abbildung von Hilberträumen und $B : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung in die Gegenrichtung. Die beiden Abbildungen A und B heißen **adjungiert**, wenn gilt

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Bw \rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}, w \in \mathcal{H}'$$

2.8.9. Wir werden in 4.2.1 zeigen, daß eine lineare Abbildung zwischen Hilberträumen genau dann stetig ist, wenn sie eine adjungierte Abbildung besitzt. In Übung 2.8.10 sollen Sie von dieser Aussage die einfache Richtung zeigen.

Übungen

Übung 2.8.10. Jede stetige lineare Abbildung von Hilberträumen hat genau eine adjungierte Abbildung und diese ist auch stetig. Man notiert die adjungierte Abbildung zu A in der mathematischen Literatur meist A^* , in der physikalischen Literatur dahingegen meist A^\dagger . Man zeige nun weiter $(A^*)^* = A$ und $(AB)^* = B^*A^*$ und $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\|A\| = \|A^*\|$ sowie $\|A^*A\| = \|A\|^2$ für die Operatornorm. Hinweis: Zuerst mag der Riesz'sche Darstellungssatz helfen, angewandt auf $v \mapsto \langle Av, w \rangle$ für festes w , dann die Erkenntnis $\|A\| = \sup\{\langle Av, v' \rangle \mid \|v\| = \|v'\| = 1\}$ im Fall, daß keiner unserer beiden Räume der Nullraum ist.

Übung 2.8.11. Die orthogonalen Projektionen auf abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraums sind genau die idempotenten selbstadjungierten Operatoren, als da heißt die stetigen linearen Selbstabbildungen P unseres Hilbertraums mit $P^2 = P$ und $P^* = P$.

Übung 2.8.12. Eine stetige lineare Abbildung zwischen Hilberträumen hat dichtes Bild genau dann, wenn die adjungierte Abbildung injektiv ist. Allgemeiner zeige man, daß das orthogonale Komplement des Bildes der Kern der adjungierten Abbildung ist.

Übung 2.8.13. Hier sollen sie ein direktes Argument ausarbeiten, das für jeden selbstadjungierten Operator T auf einem Hilbertraum die Identität

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| \mid \|x\| \leq 1\}$$

zeigt: Bezeichnet M die rechte Seite, so ist $\|T\| \geq M$ eh klar. Für die andere Ungleichung betrachte man für x von der Länge Eins mit $Tx \neq 0$ sein auf Länge Eins normiertes Bild $y = Tx/\|Tx\|$. Dann gilt $\|Tx\| = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ und man erhält von der Mitte ausgehend

$$4M = M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \geq \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle = 4\|Tx\|$$

Übung 2.8.14. Man zeige: Genau dann besitzt ein Hilbertraum eine abzählbare dichte Teilmenge, wenn er eine abzählbare Hilbertbasis besitzt.

3 Fouriertransformation

3.1 Definition und erste Eigenschaften

3.1.1 (**Motivation**). Im akustischen Beispiel bedeutet die Fouriertransformation, ein zeitabhängiges Signal nach seinen Frequenzanteilen zu zerlegen und in der umgekehrten Richtung eine Vorgabe von Frequenzanteilen mit ihren jeweiligen Stärken zu einem zeitabhängigen Signal zusammenzufassen. Letztere Operation leistet etwa eine Orgel und Ersteres unser Ohr, so daß man fast Lust hätte, statt von Fouriertransformationen und ihren Inversen von „Orgeltransformationen“ und „Hörtransformationen“ zu reden. Mich verblüfft immer wieder, daß diese Transformationen beide durch dieselbe mathematische Formel beschrieben werden. Aber genug geredet, her mit den Formeln!

Definition 3.1.2. Gegeben eine in Bezug auf das Lebesguemaß 1.1.28 integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ erklärt man ihre **Fouriertransformierte** als die Funktion $f^\wedge : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$f^\wedge(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} d^n x$$

Hier bezeichnet $x \cdot y \in \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt der Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wenn ich auf der in diese Formeln eingearbeiteten Standardisierung bestehen will, rede ich von der **physikalisch standardisierten Fouriertransformierten**. Offensichtlich liefert die Abbildungsvorschrift $f \mapsto f^\wedge$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

von zumindest im Fall $n \geq 1$ unendlichdimensionalen komplexen Vektorräumen, die **Fouriertransformation** oder genauer **Fouriertransformation auf integrierbaren Funktionen**.

3.1.3. Natürlich kann man die Fouriertransformierte auch berechnen, wenn man eine integrierbare Funktion nur fast überall kennt. Unsere Fouriertransformation induziert also eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

mit $L^1(\mathbb{R}^n)$ dem Raum der fast überall definierten integrierbaren Funktionen alias L^1 -Funktionen aus 2.2.14 und auch diese nennen wir Fouriertransformation. Das Vorzeichen im Exponenten kommt her vom Vorzeichen aus unserer Formel für die Koeffizienten der Fourierreihe am Ende des Beweises von [AN2] 7.1.3 und verbessert die Verträglichkeit beider Formalismen. Es gibt noch verschiedene andere

gängige Standardisierungen. Für das Lösen von Differentialgleichungen besonders beliebt und praktisch ist die Variante $f^\wedge(y) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} d^n x$. Ich nenne sie die **mathematisch standardisierte Fouriertransformation**. In der Stochastik arbeitet man meist mit der Variante $f^\wedge(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix \cdot y} d^n x$. Ich nenne sie die **stochastisch standardisierte Fouriertransformation** ohne implizieren zu wollen, daß die Stochastik kein Teil der Mathematik sei. Normalisierungsfragen werden wir später noch ausführlicher besprechen. In jeder unserer Normalisierungen werden wieder andere Formeln besonders einfach. Ich ziehe die physikalische Standardisierung vor, weil sie am besten zu meiner Anschauung paßt. Wenn nichts anderes gesagt ist, ist im folgenden stets die **physikalische Standardisierung** gemeint.

Beispiel 3.1.4. Wir berechnen die Fouriertransformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{-|x|}$ und erhalten

$$\begin{aligned} f^\wedge(y) &= \int e^{-|x|} e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(2\pi i y + 1)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-(2\pi i y - 1)x} dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i y + 1} - \frac{1}{2\pi i y - 1} \right) \\ &= \frac{2}{4\pi^2 y^2 + 1} \end{aligned}$$

Satz 3.1.5 (Formeln für die Fouriertransformation). *Gegeben eine integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

1. Die Fouriertransformierte f^\wedge von f ist stetig und beschränkt und es gilt genauer $|f^\wedge(y)| \leq \|f\|_1$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$;
2. Für $g(x) := f(x) e^{2\pi i \alpha \cdot x}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^n$ haben wir $g^\wedge(y) = f^\wedge(y - \alpha)$;
3. Für $g(x) := f(x - b)$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ haben wir $g^\wedge(y) = f^\wedge(y) e^{-2\pi i b \cdot y}$;
4. Für $g(x) := \overline{f(x)}$ haben wir $g^\wedge(y) = \overline{f^\wedge(-y)}$;
5. Für $g(x) := f(cx)$ mit $c \in \mathbb{R}^\times$ haben wir $g^\wedge(y) = |c|^{-n} f^\wedge(y/c)$;
6. Ist für ein ν mit $1 \leq \nu \leq n$ die Funktion g mit $g(x) := x_\nu f(x)$ auch integrierbar, so ist f^\wedge partiell differenzierbar nach der ν -ten Variablen und es gilt $g^\wedge(y) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f^\wedge}{\partial y_\nu}(y)$;
7. Ist für ein ν mit $1 \leq \nu \leq n$ die Funktion f stetig partiell differenzierbar nach der ν -ten Variablen und ist $h(x) := \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)$ auch integrierbar, so gilt $h^\wedge(y) = 2\pi i y_\nu f^\wedge(y)$.

Vorschau 3.1.6. In 3.1.16 zeigen wir zusätzlich, daß die Fouriertransformierte f^\wedge einer integrierbaren Funktion f für $\|y\| \rightarrow \infty$ stets gegen Null strebt.

Beweis. Per definitionem ist die Fouriertransformierte von f beschränkt durch $\|f\|_1$. Nach der Charakterisierung der Stetigkeit als Folgenstetigkeit aus [AN1] 3.5.43 reicht es zum Nachweis der Stetigkeit (1), wenn wir für jede konvergente Folge $y_r \rightarrow y$ zeigen, daß gilt $f^\wedge(y_r) \rightarrow f^\wedge(y)$. Das folgt jedoch leicht aus dem Satz über dominierte Konvergenz 1.6.10. Die Behauptungen (2) bis (5) ergeben sich durch mühelose Rechnungen. Um (6) zu zeigen, wenden wir unsere Erkenntnisse zum Differenzieren unter dem Integral aus 1.6.17 an. Formal ist das allerdings etwas mühsam, da wir dort noch keine vektorwertigen Funktionen betrachtet hatten und hier zumindest mit komplexwertigen Funktionen arbeiten müssen. Ich führe deshalb den Beweis nochmal in unserem Fall mit den entsprechenden Variationen aus. Dazu bezeichnen wir mit $e_\nu \in \mathbb{R}^n$ den ν -ten Einheitsvektor und rechnen

$$\frac{f^\wedge(y + t e_\nu) - f^\wedge(y)}{t} = \int f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} \frac{e^{-2\pi i t x_\nu} - 1}{t} d^n x$$

Jetzt beachten wir die Abschätzung $|e^{ia} - 1| \leq |a|$ für $a \in \mathbb{R}$. Der Integrand ist damit beschränkt durch die integrierbare Funktion $|2\pi x_\nu f(x)|$. Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt also für jede Folge t_r aus \mathbb{R}^\times mit $t_r \rightarrow 0$ notwendig

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f^\wedge(y + t_r e_\nu) - f^\wedge(y)}{t_r} = \int f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} (-2\pi i x_\nu) d^n x = -2\pi i g^\wedge(y)$$

Die Behauptung folgt damit aus Übung [AN1] 3.5.51. Um (7) zu zeigen beginnen wir mit dem Fall $n = 1$ und finden

$$f'^\wedge(y) = \int f'(x) e^{-2\pi i x y} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{a_r}^{b_r} f'(x) e^{-2\pi i x y} dx$$

für beliebige Folgen a_r, b_r mit $a_r \rightarrow -\infty$ und $b_r \rightarrow \infty$. Mit einer partiellen Integration dürfen wir das umschreiben zu

$$f'^\wedge(y) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(f(x) e^{-2\pi i x y} \Big|_{a_r}^{b_r} - \int_{a_r}^{b_r} f(x) (-2\pi i y) e^{-2\pi i x y} dx \right)$$

Da f integrierbar ist, können wir unsere Folgen a_r, b_r sogar so wählen, daß gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} f(a_r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(b_r) = 0$. Auf diese Weise sehen wir

$$f'^\wedge(y) = 2\pi i y f^\wedge(y)$$

Für beliebiges n folgt unsere Behauptung dann mit dem Satz von Fubini. □

3.1.7. Nach dem vorhergehenden faktorisiert die Fouriertransformation über eine wohlbestimmte Abbildung

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$$

vom Raum der integrierbaren Funktionen in den Raum der stetigen beschränkten Funktionen.

3.1.8. Bezeichnet $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation und τ_a die Verschiebung wie in 2.6.10, also $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$, so bedeuten die Formeln 2 und 3 der Proposition 3.1.5 kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n) \\ \tau_b \downarrow & & \downarrow e^{-2\pi i b \cdot y} \\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n) \\ e^{2\pi i a \cdot x} \downarrow & & \downarrow \tau_a \\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Steht hier neben einem vertikalen Pfeil eine Funktion, so ist die durch Multiplikation mit besagter Funktion gegebene Abbildung gemeint.

Definition 3.1.9. Der **Schwartzraum** $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum aller glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ derart, daß für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ die Funktion $x^\alpha \partial^\beta f$ beschränkt ist. Hier verwenden wir die Multiindexschreibweise aus [AN2] 3.2.3. Im Fall einer Veränderlichen bedeutet unsere Forderung also in Worten, daß alle Ableitungen unserer Funktion multipliziert mit beliebigen Polynomfunktionen beschränkt bleiben.

3.1.10. Im Schwartzraum liegen insbesondere alle glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Offensichtlich ist der Schwartzraum stabil unter Multiplikationen mit beliebigen x^α und unter allen partiellen Ableitungen ∂^β . Offensichtlich sind alle Funktionen des Schwartzraums integrierbar.

Beispiel 3.1.11. Die Funktion $x \mapsto e^{-x^2}$ liegt im Schwartzraum.

Lemma 3.1.12. Die Fouriertransformation führt den Schwartzraum in sich selber über.

Beweis. Für eine Funktion aus dem Schwartzraum $f \in \mathcal{S}$ finden wir nach 3.1.10 und Proposition 3.1.5 induktiv, daß f^\wedge beliebig stetig partiell differenzierbar ist und daß für alle Multiindizes α, β gilt

$$(\partial^\beta x^\alpha f)^\wedge = (2\pi i)^{|\beta| - |\alpha|} y^\beta \partial^\alpha f^\wedge$$

Die Fouriertransformierten integrierbarer Funktionen sind aber nach 3.1.5.1 stets beschränkt, und damit gehört f^\wedge auch zum Schwartzraum. \square

3.1.13. Bezeichnet $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum und bezeichnet τ_a die Verschiebung wie in 2.6.10, in Formeln gegeben durch

$(\tau_a f)(x) = f(x - a)$, so liefert die Proposition 3.1.5 uns vier kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\
 \tau_b \downarrow & & \downarrow e^{-2\pi i b \cdot y} \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\
 e^{2\pi i a \cdot x} \downarrow & & \downarrow \tau_a \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\
 x_\nu \downarrow & & \downarrow -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_\nu} \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\
 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \downarrow & & \downarrow 2\pi i y_\nu \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}
 \end{array}$$

Steht hier neben einem vertikalen Pfeil eine Funktion, so ist die durch Multiplikation mit besagter Funktion gegebene Abbildung $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ gemeint, im Fall des vertikalen Pfeils links unten also die Abbildung $f \mapsto x_\nu f$, wobei $x_\nu f$ die Funktion meint mit den Werten $(x_\nu f)(x_1, \dots, x_n) = x_\nu f(x_1, \dots, x_n)$. Die Fouriertransformation verwandelt nach den unteren Diagrammen insbesondere partielles Ableiten in algebraische Operationen. Eine beliebige Anwendung ist denn auch das Lösen von Differentialgleichungen. Im weiteren Verlauf wird die Inversionsformel 3.3.19 auch noch zwei unserer vier Diagramme überflüssig machen.

Ergänzung 3.1.14. Hätten wir hier statt mit unseren Konventionen mit der mathematischen Standardisierung $(\mathcal{F}f)(y) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} d^n x$ gearbeitet, so würden sich obige Diagramme dahingehend vereinfachen, daß alle Faktoren 2π darin wegfallen. Der Vorfaktor $(2\pi)^{-n/2}$ bei der mathematischen Standardisierung ist an dieser Stelle noch irrelevant.

3.1.15 (Grenzwertbegriff, Variante). Gegeben $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow Z$ Abbildungen von einer Menge X in topologische Räume Y, Z schreibt man manchmal

$$\lim_{g(x) \rightarrow z} f(x) = y$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von y eine Umgebung U' von z gibt mit $g(x) \in U' \setminus z \Rightarrow f(x) \in U$. Wir erlauben uns das nur, wenn Y Hausdorff ist und z ein Häufungspunkt zu $g(X)$ in Z , weil nur dann solch ein Grenzwert auch eindeutig bestimmt ist, wenn er existiert. Im Fall $g = \text{id}$ erhalten wir unseren üblichen Grenzwertbegriff zurück.

3.1.16 (Werte von Fouriertransformierten fern vom Ursprung). Für integrierbare Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} f^\wedge(y) = 0$$

mit der Notation 3.1.15. Für $f \in \mathcal{C}_1^\infty$ folgt das bereits aus unserer Erkenntnis 3.1.12, daß die Fouriertransformation den Schwartzraum in sich selber überführt.

Für beliebiges $f \in \mathcal{L}^1$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ finden wir nach 2.6.1 ein $g \in \mathcal{C}_1^\infty$ mit $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ und damit folgt dann sofort $|f^\wedge(y) - g^\wedge(y)| < \varepsilon \forall y$. So erhalten wir unsere Aussage für beliebiges integrierbares f . Anschaulich mag man das etwa im Fall $n = 1$ wie folgt verstehen: Ist $|y|$ sehr groß, so beschreibt $x \mapsto e^{-2\pi ixy}$ eine Funktion, die sehr schnell oszilliert. Ändert sich f nicht ganz so schnell, so wird sich beim Integrieren von $f(x)e^{-2\pi ixy}$ sehr viel wegheben, so daß das Integral sehr klein wird.

Übungen

Übung 3.1.17 (Fouriertransformierte der Glockenkurve). Die Gauß'sche Glockenkurve ist unter der mathematisch standardisierten Fouriertransformation 3.1.3 ihre eigene Fouriertransformierte, in Formeln gilt für die Funktion $g(x) = e^{-x^2/2}$ also $g^\wedge(y) = e^{-y^2/2}$. Hinweis: g erfüllt die Differentialgleichung $g'(x) = -xg(x)$. Auch ohne den Eindeigkeitsatz über Lösungen von Differentialgleichungen zu bemühen, kann man durch Ableiten von $f(x)/(e^{-x^2/2})$ zeigen, daß diese Differentialgleichung bis auf konstante Faktoren keine anderen Lösungen f hat. Jetzt zeige man, daß $\hat{g} := g^\wedge$ dieselbe Differentialgleichung löst. So folgt $g = c\hat{g}$. Die Konstante c schließlich ergibt sich aus 1.8.7.

Übung 3.1.18. Gegeben integrierbare Funktionen f_1, \dots, f_n einer reellen Veränderlichen ist die Fouriertransformierte von $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$ das Produkt $f^\wedge(y) = f_1^\wedge(y_1) \dots f_n^\wedge(y_n)$. Das gilt für alle drei Standardisierungen. Speziell ist die Funktion $g(x) = e^{-x \cdot x/2}$ auf \mathbb{R}^n für die mathematische Standardisierung ihre eigene Fouriertransformierte $\hat{g} = g$.

Übung 3.1.19 (Fouriertransformierte einer Rechtecksfunktion). Man berechne die Fouriertransformierte der Rechtecksfunktion f , die gegeben wird durch die Vorschrift $f(x) = 1$ für $|x| \leq 1/2$ und Null sonst, und zeige $f^\wedge(y) = (\sin \pi y)/\pi y$. Man berechne auch die Fouriertransformierten der Produkte $f(x) \sin(\alpha x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und diskutiere den Zusammenhang mit dem Hören von Akkorden.

Weiterführende Übung 3.1.20. Für $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $g|_{(-\infty, 0]} = 0$ gibt es eine holomorphe Funktion g^\wedge auf der komplexen oberen Halbebene $\text{Im } z > 0$, die die auf $\mathbb{R} = \{z \mid \text{Im } z = 0\}$ definierte stochastisch standardisierte Fouriertransformierte g^\wedge stetig fortsetzt. Im übrigen kann man im Rahmen der Funktionentheorie [FT1] 4.3.13 zeigen, daß diese stetige Fortsetzung sogar eindeutig ist. Die unter der Einbettung $\mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \{z \mid \text{Im } z \geq 0\}$ gegeben durch $t \mapsto it$ zurückgezogene holomorphe Fortsetzung der stochastisch standardisierten Fouriertransformierten $(\mathcal{F}g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ixy} dx$ heißt die **Laplace-Transformierte** $\mathcal{L}\{g\}$ von g , in Formeln

$$\mathcal{L}\{g\}(t) = (\mathcal{F}g)(it) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-xt} dx$$

Die Laplacetransformierte kann auch für allgemeinere Funktionen oft noch sinnvoll berechnet werden, eventuell auch erst für hinreichend großes t , vergleiche [FT1] 7.1.13. Sie hat weiter sehr ähnliche Eigenschaften wie die Fouriertransformation und wird von Ingenieuren gerne zum Lösen der bei Schwingungsvorgängen relevanten Differentialgleichungen benutzt.

Ergänzung 3.1.21. Wir erinnern den Gruppenisomorphismus $\exp : (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Gegeben eine „vernünftige“ Funktion $h : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt die Laplace-Transformation von $h \circ \exp$, wenn man ihr noch die Multiplikation mit (-1) vorschaltet, auch die **Mellin-Transformation** $\mathcal{M}h$ von h . In Formeln haben wir also

$$(\mathcal{M}h)(t) := \mathcal{L}\{h\}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(e^x)e^{tx} dx = \int_0^{\infty} h(s)s^{t-1} ds$$

mit der Substitution $s = e^x$ und $dx = ds/s$ im letzten Schritt.

Übung 3.1.22. Die Fouriertransformierte f^\wedge einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist genau dann reellwertig, wenn gilt $f(-x) = \overline{f(x)}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$.

Ergänzende Übung 3.1.23. Wir betrachten in dieser Übung der Einfachheit halber nur Funktionen auf der reellen Zahlengeraden. Man zeige: Die Fouriertransformierte einer geraden Funktion ist gerade; die Fouriertransformierte einer ungeraden Funktion ist ungerade. Die Fouriertransformierte einer geraden reellwertigen Funktion ist reellwertig; die Fouriertransformierte einer ungeraden reellwertigen Funktion nimmt nur rein imaginäre Werte an. Schreiben wir eine integrierbare Funktion f als Summe $f = g + u$ ihres geraden und ihres ungeraden Anteils, so gilt $g^\wedge(y) = (2\pi)^{-1/2} \int f(x) \cos(xy) dx$ und $iu^\wedge(y) = (2\pi)^{-1/2} \int f(x) \sin(xy) dx$ für die mathematische Fouriertransformation. Diese beiden Integrale, aufgefaßt als Funktionen von y , sind auch bekannt als die **Cosinustransformation** und die **Sinustransformation** von f . Sie haben den Vorteil, reelle Funktionen wieder zu reellen Funktionen zu machen. Ihre diskreten Analoga sind von großer technischer Bedeutung.

Übung 3.1.24. Man zeige für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im}(\alpha) < 0$, daß die Funktion g gegeben durch $g(x) = -2\pi i e^{-2\pi i x \alpha}$ für $x > 0$ und $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ die Fouriertransformierte $g^\wedge(y) = -1/(y + \alpha)$ hat.

3.2 Fouriertransformation ohne Koordinaten

3.2.1. Um die Beziehung zwischen Fouriertransformationen und Fourierreihen herauszuarbeiten, um die verschiedenen Standardisierungen zu vereinheitlichen und insbesondere, um der wahren Natur unserer Konstruktionen näher zu kommen, diskutiere ich nun einen allgemeineren Formalismus.

Definition 3.2.2. Sei (X, \mathcal{M}) ein Meßraum. Ein nichtnegatives Maß auf X im Sinne von 1.1.11 heißt **endlich**, wenn es den Wert ∞ nicht annimmt. Ein **komplexes Maß auf X** ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, die sich schreiben läßt als eine endliche Linearkombination mit komplexen Koeffizienten von endlichen nichtnegativen Maßen $\mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$. Ein komplexes Maß, das nur reelle Werte annimmt, nennen wir ein **reelles Maß**. Wir verwenden für die Räume aller komplexen, reellen, endlichen nichtnegativen und beliebigen nichtnegativen Maße auf einem vorgegebenen Meßraum X die Bezeichnungen

$$M(X) \supset M(X; \mathbb{R}) \supset M(X; [0, \infty)) \subset M(X; [0, \infty])$$

Manchmal schreiben wir statt $M(X)$ auch ausführlicher $\text{Maß}(X)$ und erweitern unsere anderen Notationen entsprechend. Mehr zu komplexen Maßen diskutieren wir in den Übungen.

3.2.3. Eine **reelle Form** eines \mathbb{C} -Vektorraums V ist ein \mathbb{R} -Untervektorraum $V_{\mathbb{R}}$ derart, daß die Abbildung $(v, w) \mapsto v + iw$ eine Bijektion $V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} V$ induziert. Zum Beispiel sind unsere Räume integrierbarer reeller Funktionen stets reelle Formen der entsprechenden Räume integrierbarer komplexer Funktionen.

3.2.4 (**Komplexe Fortsetzung multilinearer Abbildungen**). Gegeben \mathbb{C} -Vektorräume V_1, \dots, V_r, W und reelle Formen $V_{i, \mathbb{R}} \subset V_i$ besitzt jede \mathbb{R} -multilineare Abbildung $V_{1, \mathbb{R}} \times \dots \times V_{r, \mathbb{R}} \rightarrow W$ genau eine Fortsetzung zu einer \mathbb{C} -multilinearen Abbildung $V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$. Das scheint mir offensichtlich. Es wird im folgenden oft implizit verwendet.

Beispiel 3.2.5 (Integration über komplexe Maße). Gegeben ein Meßraum X betrachten wir die Mengen

$$\text{Meß}^b(X, \mathbb{C}) \supset \text{Meß}^b(X, \mathbb{R}) \supset \text{Meß}^b(X, [0, \infty))$$

der betragsmäßig beschränkten meßbaren komplexwertigen Funktionen mit ihrer reellen Form der reellwertigen Funktionen und dem erzeugenden Konvexkegel der nichtnegativen Funktionen. Nach 1.6.9 und 3.2.4 läßt sich die in beiden Variablen positivlineare Abbildung $\text{Meß}^b(X, [0, \infty)) \times M(X; [0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $(f, \mu) \mapsto \int f \mu$ auf genau eine Weise zu einer \mathbb{C} -bilinearen Abbildung

$$\text{Meß}^b(X, \mathbb{C}) \times M(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

fortsetzen. Für das so definierte Integral verwenden wir dieselbe Notation wie für seine reellen Varianten

$$\int f \mu = \int_X f(x) \mu \langle x \rangle$$

3.2.6. Gegeben ein Maßraum (X, λ) und $f \in L^1(X; \lambda)$ erhalten wir offensichtlich ein komplexes Maß $f \lambda$ auf X durch die Vorschrift $(f \lambda)(A) := \int_A f(x) \lambda \langle x \rangle$.

Definition 3.2.7. Gegeben drei abelsche Gruppen A, B, C heißt eine Abbildung $p : A \times B \rightarrow C$ ein **Bimorphismus**, wenn gilt $p(a + a', b) = p(a, b) + p(a', b)$ und $p(a, b + b') = p(a, b) + p(a, b')$ für alle $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$.

3.2.8. In der Notation sind wir hier von additiv notierten Gruppen ausgegangen. In diesem Zusammenhang nenne ich einen Bimorphismus auch eine **biadditive Abbildung**. Alternativ sagt man in diesem Kontext auch oft „ \mathbb{Z} -bilinear“.

3.2.9 (**Topologie der Charaktergruppe**). Gegeben eine Fouriergruppe G und $K \subset G$ kompakt und $U \subseteq \mathbb{C}$ offen setzen wir

$$\mathcal{O}(K, U) := \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(K) \subset U\}$$

und versehen die Charaktergruppe \hat{G} mit der Topologie, die von allen diesen Teilmengen $\mathcal{O}(K, U)$ erzeugt wird. Sie heißt die **kompakt-offene Topologie** oder auch die „Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta“. Offensichtlich macht diese Topologie \hat{G} zu einem Hausdorffraum.

Definition 3.2.10. Unter einer **Charakterpaarung** von Fouriergruppen G, H verstehen wir einen stetigen Bimorphismus $s : G \times H \rightarrow S^1$ in die Kreisgruppe, der sowohl einen Homöomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \hat{H}, g \mapsto s(g, \cdot)$ als auch einen Homöomorphismus $H \xrightarrow{\sim} \hat{G}, h \mapsto s(\cdot, h)$ induziert. Wir notieren Charakterpaarungen meist in der Form $s : (g, h) \mapsto \langle\langle g, h \rangle\rangle = \langle\langle g, h \rangle\rangle_s$. Unter der **dualen Charakterpaarung zu s** verstehen wir die Charakterpaarung $\bar{s} : H \times G \rightarrow S^1$ gegeben durch

$$\langle\langle h, g \rangle\rangle_{\bar{s}} := \overline{\langle\langle g, h \rangle\rangle_s}$$

Vorschau 3.2.11. Sie mögen als Übung 3.2.30 zeigen, daß für jede Fouriergruppe G auch \hat{G} eine Fouriergruppe und das Auswerten $a = a_G : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$ gegeben durch $(g, \chi) \mapsto \langle\langle g, \chi \rangle\rangle := \chi(g)$ eine Charakterpaarung ist. Dasselbe gilt für die duale Paarung

$$\langle\langle \chi, g \rangle\rangle := \overline{\langle\langle g, \chi \rangle\rangle}$$

Ich vermeide im folgenden die Notation $\chi(g)$, da ich weniger durcheinanderkomme, wenn eine Änderung der Reihenfolge dieser Symbole standardmäßig eine komplexe Konjugation bedeutet.

Beispiele 3.2.12. Charakterpaarungen von Fouriergruppen sind etwa die Abbil-

dungen

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} \times S^1 &\rightarrow S^1, (n, z) \mapsto z^n \\
\mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow S^1, (x, y) \mapsto e^{ixy} \\
\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} &\rightarrow S^1, (a, y) \mapsto a^{iy} \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow S^1, (x, y) \mapsto e^{ix \cdot y} \\
\vec{\mathbb{T}}^* \times \vec{\mathbb{T}} &\rightarrow S^1, (\nu, t) \mapsto e^{2\pi i \nu t} \\
V^* \times V &\rightarrow S^1, (\phi, v) \mapsto e^{i\phi(v)} \\
\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\rightarrow S^1, (a, b) \mapsto e^{2\pi i ab/m}
\end{aligned}$$

für $\vec{\mathbb{T}}$ den Raum der Zeitspannen, Richtungsraum des affinen Raums \mathbb{T} der Zeiten, und $\vec{\mathbb{T}}^*$ seinen Dualraum, den Raum der Frequenzen, und V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit Dualraum V^* . Etwas allgemeiner ist auch $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1, (x, y) \mapsto e^{icxy}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}^\times$ eine Charakterpaarung.

Definition 3.2.13 (Fouriertransformation zu einer Charakterpaarung). Gegeben eine Charakterpaarung von Fouriergruppen $s : G \times H \rightarrow S^1$ und ein Maß $\mu \in M(G)$ erklären wir seine **Fouriertransformierte** $\mu^\wedge : H \rightarrow \mathbb{C}$ als die Funktion, die bei $h \in H$ den Wert

$$\mu^\wedge(h) := \int_G \langle\langle g, h \rangle\rangle \mu\langle g \rangle$$

annimmt. Wir erklären die zu unserer Charakterpaarung s gehörige **Fouriertransformation** als die durch $\mathcal{F} : \mu \mapsto \mu^\wedge$ gegebene lineare Abbildung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_s : M(G) \rightarrow \text{Ens}(H, \mathbb{C})$$

vom Raum der komplexen Maße auf G in den Raum der komplexwertigen Funktionen auf H .

3.2.14 (Eigenschaften der Fouriertransformierten von Maßen). Gegeben eine Charakterpaarung von Fouriergruppen $s : G \times H \rightarrow S^1$ ist die Fouriertransformierte μ^\wedge eines komplexen Maßes notwendig stetig und beschränkt. Es reicht, das für endliche nichtnegative Maße μ zu zeigen. Für diese folgt die Folgenstetigkeit von μ^\wedge aus dem Satz über dominierte Konvergenz und die Beschränktheit ergibt sich aus der Schranke

$$|\mu^\wedge(h)| = \left| \int_G \langle\langle g, h \rangle\rangle \mu\langle g \rangle \right| \leq \int_G |\langle\langle g, h \rangle\rangle| \mu\langle g \rangle = \int_G 1 \mu\langle g \rangle = \mu(G)$$

Unsere Fouriertransformation zur Charakterpaarung $s : G \times H \rightarrow S^1$ ist mithin eine Abbildung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_s : M(G) \rightarrow \mathcal{C}^b(H)$$

Beispiel 3.2.15 (Fouriertransformierte von Diracmaßen). Gegeben eine Charakterpaarung $s : G \times H \rightarrow S^1$ wirft die zugehörige Fouriertransformation für alle $g \in G$ das Diracmaß $\delta_g \in M(G)$ auf den zugehörigen Charakter, in Formeln

$$(\mathcal{F}_s(\delta_g))(h) = \langle\langle g, h \rangle\rangle_s \quad \forall h \in H$$

Beispiel 3.2.16 (Orgeltransformation). Die Fouriertransformation

$$M(\vec{\mathbb{T}}^*) \rightarrow \mathcal{C}^b(\vec{\mathbb{T}})$$

ordnet salopp gesprochen jeder Wahl von Tasten einer Orgel, aufgefaßt als Linearkombination von Diracmaßen zu verschiedenen Frequenzen, diejenige Funktion auf der Zeitachse zu, die den Luftdruck als Funktion der Zeit angibt, der beim Anschlagen unseres Akkordes entsteht. Noch genauer würde diese Anschauung von der Abbildung

$$M(\vec{\mathbb{T}}_{>0}^*) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^b(\vec{\mathbb{T}})$$

modelliert, die durch $\mu \mapsto (\bar{\mu} + \iota_*\mu)^\wedge$ gegeben wird mit $\bar{\mu}$ dem komplex konjugierten Maß und $\iota : \nu \mapsto -\nu$ dem Negativieren, vergleiche 3.1.22. Der komplexe Vorfaktor beim Diracmaß zu einer Taste kodiert dabei die Lautstärke und „Phase“ der entsprechenden Schwingung. Die Taste zur Frequenz Null haben wir weggelassen, sie würde salopp gesprochen den „durchschnittlichen Luftdruck in der Kirche einstellen“. Die Fouriertheorie ist der Ausgangspunkt eines Teilgebiets der Mathematik, das man als **Harmonische Analysis** bezeichnet.

3.2.17 (Hörtransformation). Wenn wir den durch unsere Orgel erzeugten Luftdruck als Funktion der Zeit auf ein im Vergleich zum Inversen der Frequenz jedes einzelnen Tons großes Zeitintervall einschränken, durch Null ausdehnen, und dann die Fouriertransformation zur dualen Charakterpaarung anwenden, so erhalten wir wieder eine Funktion auf dem Raum aller möglichen Tonhöhen alias Frequenzen, die in der Nähe der angeschlagenen Tonhöhen sehr große Werte annimmt und sonst nur sehr kleine Werte, vergleiche 3.1.19. In diesem Sinne ist sowohl das Verwandeln eines durch die beteiligten Frequenzen bestimmten Akkordes in eine Funktion der Zeit als auch das Auflösen dieser Funktion der Zeit in einzelne Töne eine Fouriertransformation. Diese Transformationen sind sogar zueinander invers in dem Sinne, in dem es die „Inversionsformel“ 3.3.5 präzisieren wird.

Beispiel 3.2.18 (Physikalische Standardisierung). Betrachtet man die Charakterpaarung $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow S^1$ gegeben durch $p : (x, y) \mapsto e^{-2\pi i x \cdot y}$ und die durch $f \mapsto f(x) d^n x$ gegebene Einbettung $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(\mathbb{R}^n)$, so ist die Verknüpfung

$$L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d^n x} M(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathcal{F}_p} \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$$

der abstrakten Fouriertransformation zur Charakterpaarung p mit der Einbettung des Raums der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße unsere physikalisch standardisierte Fouriertransformation aus 3.1.2.

Beispiel 3.2.19 (Mathematische Standardisierung). Betrachtet man die Charakterpaarung $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow S^1$ gegeben durch $s : (x, y) \mapsto e^{-ix \cdot y}$ und die durch $f \mapsto (2\pi)^{-n/2} f(x) d^n x$ gegebene Einbettung $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(\mathbb{R}^n)$, so ist die Verknüpfung

$$L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{(2\pi)^{-n/2} d^n x} M(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$$

der abstrakten Fouriertransformation zur Charakterpaarung s mit einer entsprechend reskalierten Einbettung des Raums der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße unsere mathematisch standardisierte Fouriertransformation aus 3.1.3.

Beispiel 3.2.20 (Entwicklung in eine Fourierreihe). Betrachtet man die Charakterpaarung $p : S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ gegeben durch $p : (z, n) \mapsto z^{-n}$, so können wir die Abbildung, die jeder integrierbaren periodischen Funktion mit der Periode 2π ihre Fourierkoeffizienten zuordnet, schreiben als die Komposition

$$L^1([0, 2\pi)) \xrightarrow{dt/2\pi} M([0, 2\pi)) \xrightarrow{u_*} M(S^1) \xrightarrow{\mathcal{F}_p} \mathcal{C}^b(\mathbb{Z})$$

der abstrakten Fouriertransformation zur Charakterpaarung p mit einer entsprechend reskalierten Einbettung des Raums der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße gefolgt vom Bilden des Bildmaßes unter der Einschränkung der Umlaufabbildung $u : [0, 2\pi) \xrightarrow{\sim} S^1$ gegeben durch $t \mapsto e^{it}$.

Beispiel 3.2.21 (Aufsummieren einer Fourierreihe). Das Aufsummieren einer Fourierreihe ist die Komposition

$$L^1(\mathbb{Z}; \zeta) \xrightarrow{\zeta} M(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}_{\bar{p}}} \mathcal{C}^b(S^1) \xrightarrow{ou} \mathcal{C}^b(\mathbb{R})$$

der Multiplikation einer absolut summierbaren Familie mit dem Zählmaß ζ gefolgt von der abstrakten Fouriertransformation zu der zur Charakterpaarung p aus dem vorhergehenden Beispiel dualen Charakterpaarung \bar{p} gefolgt vom Vorschalten der Umlaufabbildung $u : \mathbb{R} \rightarrow S^1$.

Beispiel 3.2.22 (Diskrete Fouriertransformation). Unsere diskrete Fouriertransformation aus 2.7.26 kann geschrieben werden als abstrakte Fouriertransformation zur Charakterpaarung $s : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ mit der Abbildungsvorschrift $(a, b) \mapsto e^{2\pi i ab/m}$, genauer als die Komposition

$$L^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \zeta/m) \xrightarrow{\zeta/m} M(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \mathcal{C}^b(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = L^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \zeta)$$

3.2.23. Die Frage nach einer Verallgemeinerung des Schwartzraums in dieser Allgemeinheit stellen wir zurück bis 3.7.8 und entwickeln im nächsten Abschnitt erst einmal die konkrete Theorie weiter.

Vorschau 3.2.24. Ich schlage vor, die Fouriergruppen als Objekte einer Schmelzkategorie Fou im Sinne von [TSK] 1.1 zu betrachten, mit analog zu unseren Bimorphismen aus 3.2.7 erklärten Verschmelzungen. Insbesondere sind Leerver Verschmelzungen nach G Elemente von G und $1 \in \mathbb{Z}$ ist eine stabil universelle Leerver Verschmelzung. Diese Schmelzkategorie besitzt nach 3.10.8 internes Hom, aber der Auswertungsmorphismus $G \rightarrow ((G \rightrightarrows \mathbb{Z}) \rightrightarrows \mathbb{Z})$ ist im allgemeinen kein Isomorphismus. Dahingegen ist der Auswertungsmorphismus nach 3.10.16 stets ein Isomorphismus

$$G \xrightarrow{\sim} ((G \rightrightarrows S^1) \rightrightarrows S^1)$$

Ich schlage nun vor, die Superisierung sFou von Fou nach [TSK] 2.1.18 zu betrachten und die Wertegruppe S^1 der Charaktere als Objekt von geradem Grad verstehen, also $S^1 = (S^1)^{\bar{0}}$, unsere Fouriergruppen G dahingegen a priori als Objekte von ungeradem Grad $G = G^{\bar{1}}$. Ein Paar von zueinander dualen Charakterpaarungen ist in dieser Sprache eine Verschmelzung $G \curlywedge H \rightarrow S^1$ in sFou , die Isomorphismen $G \xrightarrow{\sim} (H \rightrightarrows S^1)$ und $H \xrightarrow{\sim} (G \rightrightarrows S^1)$ induziert. Ich erinnere daran, daß so eine Verschmelzung eine Vorschrift ist, die jeder Anordnung der verschmolzenen Objekte eine Verschmelzung in Fou zuordnet derart, daß eine Änderung der Anordnung nach gewissen festen Regeln dasselbe Resultat oder das inverse Resultat liefert. Die im weiteren bessere Wahl des Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$ ergibt sich dann nach [TSK] 2.1.25, indem man dem offensichtlichen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$ das Invertieren nachschaltet.

Übungen

Übung 3.2.25. Die Charaktergruppe \hat{V} eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V wird selbst ein reeller Vektorraum, indem man für jeden Charakter χ und jeden Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ den Charakter $\alpha\chi$ erklärt durch die Vorschrift

$$\langle\langle v, \alpha\chi \rangle\rangle := \langle\langle \alpha v, \chi \rangle\rangle$$

Ich nenne die Charaktergruppe in diesem Fall auch den **Charakterraum**. Der Charakterraum hat dieselbe Dimension wie der ursprüngliche Raum. Jede lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ von endlichdimensionalen reellen Vektorräumen liefert durch Vorschalten eine lineare Abbildung $\hat{L} : \hat{W} \rightarrow \hat{V}$ in die Gegenrichtung auf den Charakterräumen.

Übung 3.2.26 (**Charakterraum und Dualraum**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V liefert das Nachschalten der Exponentialabbildung

einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, i\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \hat{V} \\ \phi & \mapsto & \exp \circ \phi \end{array}$$

Dessen Inverse kann durch die Formel $\chi \mapsto d_0\chi$ beschrieben werden, wobei man $\chi \in \hat{V}$ als Abbildung $\chi : V \rightarrow \mathbb{C}$ auffaßt und beachtet, daß deren Differential im Ursprung $d_0\chi : V \rightarrow \mathbb{C}$ nur rein imaginäre Werte annehmen kann.

3.2.27. Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) erklärt man ein nichtnegatives reelles Maß $|\mu|$, seine **Variation**, durch die Vorschrift

$$|\mu|(A) = \sup \sum |\mu(A_\nu)|$$

mit dem Supremum über alle Zerlegungen $A = \bigsqcup A_\nu$ von A in eine disjunkte Vereinigung einer abzählbaren Familie von meßbaren Teilmengen.

Übung 3.2.28. Man zeige für die Fouriertransformation zu einer Charakterpaarung $G \times H \rightarrow S^1$ additiv notierter Fouriergruppen $(G, +)$, $(H, +)$ und $a, g \in G$ sowie $b, h \in H$ die Verallgemeinerungen

$$((a+)_*\mu)^\wedge(h) = \langle\langle a, h \rangle\rangle \mu^\wedge(h) \quad \text{und} \quad (\langle\langle g, b \rangle\rangle \mu)^\wedge(h) = \mu^\wedge(b+h)$$

unserer Formeln 3.1.5.2 und 3.1.5.3.

Übung 3.2.29. Man zeige für die stochastische Fouriertransformierte eines Maßes $\mu \in M(\mathbb{R})$, daß unter der Voraussetzung, daß x integrierbar ist nach μ , die Fouriertransformierte differenzierbar ist mit der Ableitung $(\mu^\wedge)'(y) = i(x\mu)^\wedge$.

Übung 3.2.30. Man zeige: Gegeben Fouriergruppen G, H ist die in 2.7.31 angegebene Bijektion ein Homöomorphismus $\mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$. Zusammen mit den Beispielen 3.2.12 für Charakterpaarungen zeigt das, daß für jede Fouriergruppe G auch \hat{G} eine Fouriergruppe und das Auswerten $G \times \hat{G} \rightarrow S^1$ eine Charakterpaarung ist.

Übung 3.2.31. Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) nimmt seine in 3.2.27 erklärte Variation $|\mu|$ Werte in $[0, \infty)$ an und ist ein Maß auf \mathcal{M} . Weiter ist $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(X)$ eine Norm auf dem Raum $M(X)$ der komplexen Maße auf X , die **Variationsnorm**. Jedes komplexe Maß μ auf einem Meßraum läßt sich darstellen als Linearkombination von vier nichtnegativen reellen Maßen in der Form

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$$

und so, daß zusätzlich gilt $\mu_r \leq |\mu|$ für $1 \leq r \leq 4$ als da heißt $\mu_r(A) \leq |\mu|(A)$ für jede meßbare Menge $A \subset X$. Hinweis: Im Fall eines reellen Maßes mag man etwa mit $\mu_1 = (|\mu| + \mu)/2$ beginnen.

Übung 3.2.32 (Integration nach komplexen Maßen). Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) gibt es genau eine Linearform $L^1(X; |\mu|) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f \mapsto \int f \mu$$

mit der Eigenschaft $\int f \mu = \int f \mu_1 - \int f \mu_2 + i \int f \mu_3 - i \int f \mu_4$ für eine und jede Darstellung von μ wie in 3.2.31. Man zeige weiter die Abschätzung $|\int f \mu| \leq \int |f| |\mu|$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß f eine Stufenfunktion ist.

Übung 3.2.33 (Produkte komplexer Maße mit Funktionen). Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) und eine Funktion $f \in L^1(X; |\mu|)$ erhalten wir ein weiteres komplexes Maß $f\mu$ auf X durch die Vorschrift

$$(f\mu)(A) = \int [A] f \mu \quad \text{für alle meßbaren } A \subset X$$

Dieses Maß hat dann die Variation $|f\mu| = |f| |\mu|$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß f eine Stufenfunktion ist. Ist $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere meßbare Funktion, so gilt $g \in L^1(X; |f\mu|)$ genau dann, wenn fg zu $L^1(X; |\mu|)$ gehört, und in diesem Fall haben wir die Gleichheit komplexer Maße

$$g(f\mu) = (gf)\mu$$

Übung 3.2.34. Sei (X, μ) ein Maßraum und $f \in L^1(X; \mu)$ integrierbar. Ist das Maß $f\mu$ Null, so war f bereits die Null von $L^1(X; \mu)$.

Übung 3.2.35 (Formelsammlung für komplexe Maße). Bezeichnet $X \times Y$ das Produkt zweier Meßräume, versehen mit der Produkt- σ -Algebra aus 1.7.1, so liefert das Bilden des Produktmaßes mit zweimaligem Anwenden von 3.2.5 eine bilineare Abbildung auf den zugehörigen Räumen komplexwertiger Maße

$$\begin{aligned} M(X) \times M(Y) &\rightarrow M(X \times Y) \\ (\mu, \nu) &\mapsto \mu \boxtimes \nu \end{aligned}$$

Gegeben eine meßbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von Meßräumen und ein komplexes Maß μ auf X erklärt man wie in 1.4.35 das **Bildmaß** $f_*\mu$ auf Y dadurch, daß man für jede meßbare Menge $A \subset Y$ setzt

$$(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

Offensichtlich gilt wieder $\text{id}_*\mu = \mu$ und für verknüpfbare Abbildungen haben wir $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Man zeige, daß auch die anderen Formel unserer Formelsammlung 1.7.25 weiter gelten.

Übung 3.2.36 (Integration über Bildmaße). Gegeben eine meßbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von Meßräumen und ein komplexes Maß μ auf X ist die Variation des Bildmaßes nach oben beschränkt durch das Bildmaß der Variation, in Formeln

$$|f_*\mu| \leq f_*|\mu|$$

Gehört für eine meßbare Funktion $h : Y \rightarrow \mathbb{C}$ die Verknüpfung $h \circ f$ zu $L^1(X; |\mu|)$, so ist h integrierbar nach $|f_*\mu|$ und es gilt

$$\int_Y h (f_*\mu) = \int_X (h \circ f) \mu$$

Ergänzende Übung 3.2.37. Man zeige: Gegeben eine stetige beschränkte Abbildung von einem topologischen Raum in einen Hilbertraum $f : X \rightarrow \mathcal{H}$ und ein komplexes Maß $\mu \in M(X)$ gibt es genau einen Vektor $\int f(x) \mu\langle x \rangle$ in \mathcal{H} mit Eigenschaft

$$\left\langle w, \int f(x) \mu\langle x \rangle \right\rangle = \int \langle w, f(x) \rangle \mu\langle x \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Man zeige weiter, daß dieses Integral $\int f(x) \mu\langle x \rangle$ linear ist in f und μ . Hinweis: 2.8.3.

Übung 3.2.38. Man zeige, daß jeder abgeschlossene Teilraum von $L^2(S^1)$, der unter dem Vorschalten aller Multiplikationen $(z \cdot)$ für $z \in S^1$ stabil ist, der Abschluß des Erzeugnisses der in ihm enthaltenen Charaktere sein muß. Hinweis: Man betrachte die linearen Abbildungen $p_n : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ mit

$$(p_n(f))(w) = \int_{S^1} z^n f(zw) \mu\langle z \rangle$$

und überlege sich etwa mit 3.2.37, daß sie auch unsere abgeschlossenen Teilräume von oben in sich überführen müssen.

3.3 Poissonformel und Inversionsformel

3.3.1. In diesem Abschnitt treiben wir wieder die konkrete Theorie voran, bevor wir in den anschließenden Abschnitten ihre koordinatenfreie Bedeutung und Verallgemeinerungen diskutieren.

Satz 3.3.2 (Poisson'sche Summationsformel). Seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine Schwartzfunktion und f^\wedge ihre physikalisch standardisierte Fouriertransformierte gegeben durch $f^\wedge(y) := \int f(x) e^{-2\pi ixy} dx$. So gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^\wedge(n)$$

3.3.3. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ zeigt man analog $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f^\wedge(n)$. In 3.7.16 werden wir lernen, wie man diese Aussage aus allgemeinen Prinzipien herleiten kann.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $g(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n)$ mit der Periode Eins. Sie ist glatt nach [AN1] 6.1.32. Ihre Entwicklung in eine Fourierreihe hat die Form $g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i t k}$ mit $a_k = \int_0^1 g(t) e^{-2\pi i t k} dt$ im Sinne der Summierbarkeit bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ nach [AN2] 7.3.7. Damit finden wir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = g(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 g(t) e^{-2\pi i t k} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t k} dt$$

Im letzten Schritt haben wir die Identität $e^{-2\pi i t k} = e^{-2\pi i (t-n)k}$ verwendet. \square

Ergänzung 3.3.4. Sogar für jede integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ konvergiert die Summe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n)$ für fast alle t absolut und für die so gegebene L^1 -Funktion g gilt $\int_0^1 g(t) e^{-2\pi i t k} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t k} dt$. Man erkennt das, indem man von dem durch Addition gegebenen Isomorphismus von Maßräumen $\mathbb{Z} \times [0, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ ausgeht und den Satz von Fubini 1.7.16 anwendet.

Satz 3.3.5 (Inversionsformel für Schwartzfunktionen). *Gegeben eine Schwartzfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt für die zweimal fouriertransformierte Funktion $f^{\wedge\wedge}$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ die Identität*

$$f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$$

3.3.6. In \mathbb{R}^d folgt dieselbe Aussage analog. Die Aussage gilt auch für unsere mathematische Fouriertransformation aus 3.1.3. Genau um das zu erreichen wird bei dieser Normalisierung der merkwürdige Vorfaktor $(2\pi)^{-d/2}$ mit hinzugenommen.

Beweis. Unsere Formeln 3.1.5.2 und 3.1.5.3 zeigen $\tau_a(f^{\wedge\wedge}) = (\tau_{-a}f)^{\wedge\wedge}$. Es reicht also, die Identität $f^{\wedge\wedge}(0) = f(0)$ zu zeigen. Die Poisson'sche Summationsformel 3.3.2 liefert durch Umnormieren für alle $b > 0$ die Identität

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nb) = \frac{1}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^\wedge(n/b)$$

Die linke Seite strebt für $b \rightarrow \infty$ gegen $f(0)$, da f eine Schwarzfunktion ist. Andererseits ist dann auch $g := f^\wedge$ eine Schwarzfunktion und damit strebt, wie wir uns gleich überlegen, die rechte Seite gegen $\int f^\wedge = f^{\wedge\wedge}(0)$. Es reicht, wenn wir uns das für $b = 2^N$ und $N \rightarrow \infty$ überlegen. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es sicher $K \in \mathbb{N}$ mit $|\int_{-\infty}^{-K} g| < \varepsilon$ und $|\int_K^\infty g| < \varepsilon$ und $|\frac{1}{b} \sum_{n/b \leq -K} g(n/b)| < \varepsilon$ und $|\frac{1}{b} \sum_{n/b \geq K} g(n/b)| < \varepsilon$. Da aber auf dem Intervall $[-K, K]$ die Riemannsummen von g gegen das Integral von g streben, folgt die Behauptung. \square

Satz 3.3.7 (Fouriertransformation von L^2 -Funktionen). Die physikalisch standardisierte Fouriertransformation nach 3.1.2 läßt sich auf genau eine Weise vom Schwartzraum fortsetzen zu einem unitären Isomorphismus von Hilberträumen

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}^n)$$

Beispiel 3.3.8. In Übung 3.1.24 haben wir für $\text{Im}(\alpha) < 0$ eine integrierbare Funktion g angegeben mit Fouriertransformierter $g^\wedge(y) = -1/(y + \alpha)$. Die Fouriertransformierte ist als quadratintegrierbar, aber nicht integrierbar. Wir wissen dennoch $g^{\wedge\wedge} = g\iota$. Ich wüßte jedoch nicht, wie ich die Fouriertransformierte von g^\wedge mit den uns hier zur Verfügung stehenden Methoden direkt berechnen sollte.

Beweis. Bezeichne $\iota : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Multiplikation mit (-1) und $f\iota = f \circ \iota$. Natürlich gilt dann $(f^\wedge)\iota = (f\iota)^\wedge$ und unsere Inversionsformel sagt $f = (f\iota)^{\wedge\wedge}$. Als nächstes prüfen wir, daß die Abbildungen $f \mapsto f^\wedge$ und $g \mapsto (g\iota)^\wedge$ für die L^2 -Skalarprodukte auf unseren Schwartzräumen zueinander adjungiert sind. In Formeln behaupten wir also $\langle f^\wedge, g \rangle = \langle f, (g\iota)^\wedge \rangle$ oder ausgeschrieben

$$\int \overline{f(x)}g(-y)e^{-2\pi ixy} d^n x d^n y = \int \overline{f(x)e^{-2\pi ixy}}g(y) d^n x d^n y$$

Das war auch schon der Beweis für die behauptete Adjunktion. Für jede Schwartzfunktion f folgt daraus

$$\langle f^\wedge, f^\wedge \rangle = \langle f, (f\iota)^{\wedge\wedge} \rangle = \langle f, f \rangle$$

mit der Inversionsformel 3.3.5 im zweiten Schritt. Nach 2.6.1 liegt jedoch der Schwartzraum dicht im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen. Unser Satz folgt damit aus dem Lemma über die Existenz stetiger Fortsetzungen 2.4.12 und dem Lemma über die Linearität und Unitarität stetiger Fortsetzungen 2.4.17. \square

Proposition 3.3.9. Für Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ stimmt die durch unsere explizite Formel 3.1.2 gegebene Fouriertransformierte überein mit der durch stetige Fortsetzung vom Schwartzraum 3.3.7 erhaltenen.

Beweis. Wir bezeichnen nur für diesen Beweis unsere durch stetige Fortsetzung vom Schwartzraum 3.3.7 konstruierte Fouriertransformation mit \mathcal{F}_2 . Nun bilden wir den algebraischen Dualraum \mathcal{S}^* des Schwartzraums, also den Raum

$$\mathcal{S}^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}, \mathbb{C})$$

aller Linearformen auf dem Schwartzraum. Das „Daranmultiplizieren und Integrieren“ liefert für alle $p \in [1, \infty]$ eine lineare Abbildung $\text{int} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}^*$, die in Formeln durch die Vorschrift $f \mapsto (g \mapsto \int fg)$ gegeben wird. Mit der zu

unserer Fouriertransformation auf dem Schwartzraum transponierten Abbildung $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$ erhalten wir, wie wir gleich prüfen, kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \text{int} \downarrow & & \downarrow \text{int} \\ \mathcal{S}^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{S}^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \text{int} \downarrow & & \downarrow \text{int} \\ \mathcal{S}^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{S}^* \end{array}$$

Die Kommutativität des linken Diagramms zeigt dieselbe Rechnung, wie wir sie bereits im Beweis der Inversionsformel durchgeführt haben, wenn man darin das komplexe Konjugieren wegläßt. Die Kommutativität des rechten Diagramms folgt, wenn man statt quadratintegrierbarer Funktionen sich in der oberen Horizontale auf Schwartzfunktionen beschränkt. Für beliebige Schwartzfunktionen f, g gilt also $(\text{int } \mathcal{F}f)(g) = (\text{int}(f))(\mathcal{F}g)$ alias $\langle \overline{\mathcal{F}f}, g \rangle = \langle \overline{f}, \mathcal{F}g \rangle$ mit unserem L^2 -Skalarprodukt. Aus Stetigkeitsgründen gilt das dann für beliebige L^2 -Funktionen f und das zeigt dann die Kommutativität des rechten Diagramms. Im folgenden konstruieren wir in 3.3.13 einen Raum $L_S^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ von fast überall definierten meßbaren Funktionen, der alle $L^p(\mathbb{R}^n)$ umfaßt, nebst einer linearen Abbildung $\text{int} : L_S^{\text{loc}} \rightarrow \mathcal{S}^*$, die alle unsere vorherigen Abbildungen int fortsetzt. Zusätzlich zeigen wir noch, daß diese Abbildung injektiv ist. Dann ist der Beweis zu Ende und wir können unsere Notation \mathcal{F}_2 wieder stornieren. \square

Ergänzung 3.3.10. Man kann allgemeiner zeigen, daß unter \mathcal{F}^\top für konjugierte Exponenten p, q mit $1 \leq p \leq 2$ Funktionen aus $L^p \subset \mathcal{S}^*$ in Funktionen aus $L^q \subset \mathcal{S}^*$ übergehen, vergleiche etwa [Wer05].

Definition 3.3.11. Eine fast überall definierte Funktion $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ heißt **lokal integrierbar**, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Funktion auf besagte Umgebung integrierbar ist in Bezug auf das Lebesguemaß. Wir bezeichnen die Räume aller reellwertigen beziehungsweise komplexwertigen lokal integrierbaren Funktionen auf dem \mathbb{R}^n mit

$$L^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset L^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

Lemma 3.3.12. *Zwei lokal integrierbare Funktionen auf dem \mathbb{R}^n , deren Produkt mit jeder kompakt getragenen glatten Funktion dasselbe Integral hat, stimmen bereits als fast überall definierte Funktionen überein.*

Beweis. In Formeln ausgedrückt besagt unser Lemma, daß $f \mapsto (g \mapsto \int fg)$ eine Injektion

$$L^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n)^*$$

induziert. Sicher reicht es, wenn wir zeigen, daß dieselbe Abbildungsvorschrift im Fall reellwertiger Funktionen eine Injektion

$$L^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \hookrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$$

liefert. Sicher reicht es sogar zu zeigen, daß die Restriktion dieser Abbildung auf die Teilmenge $L^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$ aller nichtnegativen lokal integrierbaren Funktionen injektiv ist, denn gilt $f \neq 0$ und schreiben wir $f = f^+ - f^-$ mit f^+, f^- nichtnegativ, so gilt $f^+ \neq f^-$, und finden wir g glatt mit kompaktem Träger und $\int g f^+ \neq \int g f^-$, so gilt $\int g f \neq 0$. Unsere Restriktion jedoch können wir schreiben als die Verknüpfung von Injektionen

$$L^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0}) \hookrightarrow \{\text{Borelmaße auf } \mathbb{R}^n\} \hookrightarrow C_1^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$$

Die erste Abbildung ordnet dabei jeder Funktion f das Borelmaß $f(x) d^n x$ zu und ist injektiv nach Übung 1.5.27. Die zweite Abbildung ordnet jedem Borelmaß das Integrieren nach diesem Maß zu und ist injektiv nach Übung 1.8.13. \square

3.3.13. Etwas feiner betrachten wir den Raum $L_S^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ aller meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß ihr Produkt mit jeder Schwartzfunktion integrierbar ist. Offensichtlich erhalten wir so einen Untervektorraum

$$L_S^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

und ebenso offensichtlich liegen alle L^p -Funktionen, ja sogar alle meßbaren Funktionen von höchstens polynomialem Wachstum bereits in diesem Untervektorraum. Nach 3.3.12 erhalten wir aber durch die Vorschrift $f \mapsto (g \mapsto \int f g)$ erst recht eine Inklusion

$$\text{int} : L_S^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}^*$$

3.3.14 (**Berechnung der Fouriertransformierten einer L^2 -Funktion**). Es ist etwas delikat, eine explizite Formel für die Fouriertransformierte einer L^2 -Funktion $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{C}$ anzugeben. In der Tat kann man nicht erwarten, daß das Integral 3.1.2 für alle y konvergiert, ja das wäre sogar beunruhigend, da es uns unter Verwendung der Inversionsformel erlauben würde, zu jeder quadratintegrierbaren Funktion einen wohlbestimmten „überall definierten Repräsentanten“ auszuzeichnen. Stattdessen können wir wie folgt vorgehen: Wir wählen reelle Folgen a_n, b_n mit $a_n \rightarrow -\infty$ und $b_n \rightarrow \infty$ und betrachten die integrierbaren Funktionen f_n , die durch Restriktion von f auf das kompakte Intervall $[a_n, b_n]$ und Ausdehnen durch Null entstehen. Dann gilt $f_n \rightarrow f$ in L^2 und folglich auch $\mathcal{F}(f_n) \rightarrow \mathcal{F}(f)$ in L^2 . Da die f_n integrierbar sind, kann nach Proposition 3.3.9 nun aber $\mathcal{F}(f_n) = f_n^\wedge$ mit unserer Formel 3.1.2 jedenfalls im Prinzip ausgerechnet werden. Die so gebildeten fast überall definierten Funktionen f_n^\wedge streben demnach in L^2 gegen $\mathcal{F}(f)$. Gelingt es uns nun, Folgen a_n, b_n so geschickt zu wählen, daß die Folge der Fouriertransformierten f_n^\wedge fast überall punktweise konvergiert, so ist dieser punktweise Grenzwert nach 2.3.16 notwendig bereits quadratintegrierbar und ist unsere gesuchte Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f)$.

Proposition 3.3.15. Die Fouriertransformation von Maßen ist injektiv, als da heißt, nur das Nullmaß liefert die Nullfunktion.

3.3.16. Das rechtfertigt die in der Stochastik übliche Bezeichnung der Fouriertransformierten eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf \mathbb{R} als dessen **charakteristische Funktion**. Man beachte jedoch, daß man in der Stochastik üblicherweise mit der Charakterpaarung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $(x, y) \mapsto e^{ixy}$ arbeitet.

Beweis. Nach 1.8.13 ist, wie bereits im vorhergehenden Beweis bemerkt, auch $\text{int} : M(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}^*$ gegeben durch $\mu \mapsto (f \mapsto \int f\mu)$ eine Injektion. Mit derselben Rechnung wie zuvor erhalten wir auch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n) \\ \text{int} \downarrow & & \downarrow \text{int} \\ \mathcal{S}^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{S}^* \end{array}$$

Das zeigt, daß verschiedene reelle Maße in $M(\mathbb{R}^n)$ auch verschiedene Fouriertransformierte haben. □

Vorschau 3.3.17. Bezeichne λ das Lebesguemaß auf dem \mathbb{R}^n . Motiviert durch die vorhergehenden Überlegungen erklärt man den Raum

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}^*$$

aller **temperierten Distributionen** als den kleinsten Untervektorraum des vollen Dualraums \mathcal{S}^* des Raums der Schwartzfunktionen, der (1) alle Linearformen umfaßt, die die Gestalt $\varphi \mapsto \int f\varphi\lambda$ haben für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ stetig von höchstens polynomialem Wachstum, und der (2) stabil ist unter den Transponierten $\partial_\nu^\top : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$ der partiellen Ableitungen $\partial_\nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Man überlegt sich ohne große Schwierigkeiten, daß die Transponierte der Fouriertransformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^*$ einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'$$

auf den temperierten Distributionen induziert und daß sich alle L^p -Funktionen f als temperierte Distributionen auffassen lassen, ja daß das Bild unserer Einbettung $\text{int} : L_S^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}^*$ aus 3.3.13 gegeben durch die Vorschrift $\varphi \mapsto \int f\varphi\lambda$ aus temperierten Distributionen besteht, in Formeln $L^p \subset L_S^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$. Darüberhinaus lassen sich auch alle endlichen Borelmaße μ als temperierte Distributionen auffassen vermittels der immergleichen Vorschrift $\varphi \mapsto \int \varphi\mu$ und alle bisher betrachteten Varianten der Fouriertransformation können als Einschränkung unserer Transformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'$ verstanden werden. Welche Vorteile die temperierten Distributionen gegenüber allgemeinen Linearformen auf dem Schwartzraum bieten und wie allgemeiner beliebige, nicht notwendig temperierte Distributionen erklärt werden, mögen Sie in Vorlesungen zur Funktionalanalysis lernen.

Übungen

Übung 3.3.18. Jede L^p -Funktion auf \mathbb{R}^n für $p \in [1, \infty]$ ist lokal integrierbar. Genau dann ist eine fast überall definierte Funktion lokal integrierbar, wenn ihre Einschränkung auf jedes Kompaktum integrierbar ist. Jede lokal integrierbare Funktion ist meßbar.

Übung 3.3.19. Ist die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion $f \in \mathcal{L}^1$ wieder integrierbar, so gilt $f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$ für fast alle x . Insbesondere besitzt jede L^1 -Funktion mit einer integrierbaren Fouriertransformierten einen stetigen Repräsentanten.

Ergänzende Übung 3.3.20. Ist μ ein topologisches Maß auf einem topologischen Raum X , so nennen wir eine μ -fast überall definierte Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ **lokal integrierbar in Bezug auf μ** , wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Funktion auf besagte Umgebung integrierbar ist in Bezug auf μ . Diesen Funktionenraum notieren wir dann $L^{\text{loc}}(X; \mu)$. Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Borelmaß μ auf U zeige man, daß lokal integrierbare Funktionen aus $L^{\text{loc}}(U; \mu)$ genau dann fast überall übereinstimmen, wenn ihr Produkt mit jeder Funktion aus $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ in Bezug auf μ dasselbe Integral hat.

Übung 3.3.21. Die Fouriertransformation zu unserer Charakterpaarung $S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ mit $(z, n) \mapsto z^n$ ist eine Injektion $M(S^1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Z})$. Das wir beim Beweis des Abtastsatzes gebraucht.

3.4 Natürlichkeit der Fouriertransformation

3.4.1. Ist G eine Fouriergruppe und \hat{G} ihre Charaktergruppe, so ist das Auswerten eines Charakters auf einem Gruppenelement nach 3.2.30 stets eine Charakterpaarung $a_G = a : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$. Die zugehörige Fouriertransformation \mathcal{F}_a notieren wir meist ohne Index als \mathcal{F} oder manchmal als \mathcal{F}_G und schreiben $\mathcal{F} : \mu \mapsto \mu^\wedge$ und nennen sie die **kanonische Fouriertransformation**

$$\mathcal{F} : M(G) \rightarrow \mathcal{C}^b(\hat{G})$$

3.4.2 (**Natürlichkeit der Fouriertransformation**). Für jeden stetigen Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ von Fouriergruppen ist das Vorwärtsdrücken von Maßen eine Abbildung $\varphi_* : M(G) \rightarrow M(H)$. Umgekehrt liefert das Vorschalten von φ eine Abbildung $\hat{\varphi} : \hat{H} \rightarrow \hat{G}$ auf den Charakteren in die Gegenrichtung. Nach unseren Erkenntnissen 1.6.18 zu Integralen über Bildmaße kommutiert mit unseren

kanonischen Fouriertransformationen in den Horizontalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\hat{G}) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \circ \hat{\varphi} \\ M(H) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\hat{H}) \end{array}$$

3.4.3 (Natürlichkeit der Fouriertransformation, Variante). Gegeben Charakterpaarungen von Fouriergruppen $a : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$ und $b : H \times \hat{H} \rightarrow S^1$ gibt es für jeden stetigen Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ genau einen stetigen Homomorphismus $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_{a,b} : \hat{H} \rightarrow \hat{G}$ in die Gegenrichtung mit

$$\langle\langle g, \hat{\varphi} \hat{h} \rangle\rangle_a = \langle\langle \varphi g, \hat{h} \rangle\rangle_b \quad \forall g \in G, \hat{h} \in \hat{H}$$

Wir nennen ihn den **adjungierten Homomorphismus**. In diesen Notationen kommutiert mit den Fouriertransformationen zu den besagten Charakterpaarungen in den Horizontalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}_s} & \mathcal{C}^b(\hat{G}) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \circ \hat{\varphi} \\ M(H) & \xrightarrow{\mathcal{F}_t} & \mathcal{C}^b(\hat{H}) \end{array}$$

Das ist nur eine Umformulierung der vorhergehenden Aussage in die Sprache der Charakterpaarungen.

3.4.4 (Eigenschaften der Fouriertransformierten von Maßen, Variante). Wir geben noch einen natürlicheren Beweis für unsere Erkenntnis aus 3.2.14, daß die Fouriertransformierte eines komplexen Maßes stets eine stetige Funktion auf der Charaktergruppe ist. Sei G unsere Fouriergruppe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei μ ein endliches nichtnegatives Maß. Da G als die Vereinigung einer Folge von Kompakta geschrieben werden kann, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset G$ mit $\mu(K) \leq \mu(G) \leq \mu(K) + \varepsilon$. Gilt dann $|\chi - \psi| \leq \varepsilon$ auf diesem Kompaktum und beachten wir $|\chi - \psi| \leq 2$ überall, so folgt die Abschätzung

$$|\mu^\wedge(\chi) - \mu^\wedge(\psi)| \leq \int_G |\chi - \psi| \mu \leq 2\varepsilon + \int_K |\chi - \psi| \mu \leq 2\varepsilon + \varepsilon \mu(G)$$

Also ist μ^\wedge stetig für die kompaktoffene Topologie.

Beispiel 3.4.5 (Fouriertransformation und Koordinatenwechsel). Wir betrachten den Homomorphismus $A : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ zu einer Matrix $A \in \text{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ und unsere üblichen physikalisch standardisierten Charakterpaarungen. Der zugehörige adjungierte Homomorphismus im Sinne von 3.4.3 wird gegeben durch

die transponierte Matrix $A^\top : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$ und wir erhalten nach 3.4.3 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{R}^m) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^m) \\ A_* \downarrow & & \downarrow \circ A^\top \\ M(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Gilt $m = n$ und ist A ein Isomorphismus, so können wir es mit Hilfe der Transformationsformel erweitern zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} L^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{d^n x} & M(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n) \\ |\det A|^{-1} \circ A^{-1} \downarrow & & A_* \downarrow & & \downarrow \circ A^\top \\ L^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{d^n x} & M(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Explizit gilt also

$$\int |\det A|^{-1} f(A^{-1}x) e^{-2\pi i x^\top y} d^n x = \int f(x) e^{-2\pi i x^\top A^\top y} d^n x$$

Das sieht man auch ohne alle Theorie leicht ein. Es verallgemeinert unsere Formel 3.1.5.5 für die Fouriertransformierte einer „gestreckten“ Funktion und zeigt, daß unsere Fouriertransformationen salopp gesprochen „mit dem Vorschalten orthogonaler Abbildungen A vertauschen“.

Ergänzung 3.4.6. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Der **Satz von Bochner** beschreibt das Bild der durch die Fouriertransformation gegebenen Einbettung $\mathcal{F} : M(V; [0, \infty)) \hookrightarrow \mathcal{C}^b(\hat{V})$ des Raums der nichtnegativen endlichen Borelmaße in den Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf der Charaktergruppe als die Menge aller beschränkten stetigen Funktionen $\phi : \hat{V} \rightarrow \mathbb{C}$, die „positiv semidefinit“ sind in dem Sinne, daß für beliebiges n und beliebige paarweise verschiedene $\chi_1, \dots, \chi_n \in \hat{V}$ die quadratische Matrix mit Einträgen $\phi(\chi_i - \chi_j)$ positiv semidefinit ist. Daß unsere Abbildung in den positiv semidefiniten Funktionen landet, mag der Leser zur Übung selbst prüfen. Daß auch alle beschränkten positiv semidefiniten Funktionen im Bild liegen, ist nicht so leicht zu sehen.

3.4.7 (Abtastatz für bandbeschränkte Signale). Wir gehen aus von der Charakterpaarung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $(x, y) \mapsto e^{-2\pi i xy}$ und der Charakterpaarung $S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ mit $(z, n) \mapsto z^{-n}$. Der stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $x \mapsto e^{2\pi i x}$ ist dann adjungiert im Sinne von 3.4.3 zur Einbettung $\bar{\varphi} = i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Damit liefert uns 3.4.3 das rechte Quadrat in einem kommutati-

ven Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 M([-1/2, 1/2]) & \xrightarrow{j_*} & M(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\mathbb{R}) \\
 & \searrow \sim & \downarrow \varphi_* & & \downarrow oi \\
 & & M(S^1) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\mathbb{Z})
 \end{array}$$

Die Injektivität der Fouriertransformation auf Maßen kennen wir aus 3.3.15 beziehungsweise 3.3.21. In voller Allgemeinheit werden wir sie in 3.7.17 kennenlernen. Von links kommend bezeichnet $j : [-1/2, 1/2) \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Einbettungsabbildung. Unser Diagramm zeigt, daß die Komposition von links oben nach rechts unten längs der oberen Kante gefolgt von der Vertikalen eine Injektion ist. Das besagt im Sprech der Signalverarbeiter, daß ein „auf ein Frequenzband beschränktes Signal“ durch das „Abtasten mit dem Doppelten der Maximalfrequenz“ eindeutig wiedererkannt werden kann.

3.4.8. Um eine Formel dafür anzugeben, wie aus den abgetasteten Werten das bandbeschränkte Signal zurückgewonnen werden kann, ziehen wir uns auf quadratintegrierbare Funktionen zurück, weil wir die Inversionsformel nur in dieser Allgemeinheit kennen. Unser Diagramm enthält ein Teildiagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
 L^2([-1/2, 1/2]) & \xrightarrow{\sim} & \chi_{[-1/2, 1/2)} L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}(\chi_{[-1/2, 1/2)} L^2(\mathbb{R})) \\
 & \searrow \sim & & & \downarrow oi \\
 & & L^2(S^1) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{Z})
 \end{array}$$

Die quadratintegrierbaren Funktionen links oben machen wir bei dieser Einbettung zu Maßen durch Multiplikation mit dx und links unten durch Multiplikation mit dem normierten Haarmaß. Das ist möglich, da alle unsere L^2 -Funktionen in diesem Kontext auch L^1 -Funktionen sind. Oben rechts stehen unsere frequenzbandbeschränkten Funktionen, sie sind sogar stetig. Um eine frequenzbandbeschränkte Funktion f aus ihren ganzzahligen Werten $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ zurückzugewinnen, gehen wir in unserem Diagramm einmal ganz herum von unten rechts nach oben rechts und erhalten der Reihe nach mit in den jeweiligen L^2 -Räumen zu verstehenden Summen

$$\begin{array}{c}
 \sum_n f(n) e^{2\pi i n x} \longmapsto \sum_n f(n) \chi_{[-1/2, 1/2)} e^{2\pi i n x} \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin \pi(y-n)}{\pi(y-n)} \\
 \longleftarrow \sum_n f(n) z^n \longleftarrow (f(n))_{n \in \mathbb{Z}}
 \end{array}$$

Hier verwenden wir im letzten Schritt die Formel $\mathcal{F}(\chi_{[-1/2, 1/2)})(y) = (\sin \pi y) / \pi y$ aus 3.1.19 für die Fouriertransformation von Rechteckfunktionen und die Formel 3.1.5.2 für die Fouriertransformierte des Produkts mit einem Charakter.

Definition 3.4.9. Wir sagen, ein topologisches Maß auf einem topologischen Raum sei **kompakt getragen**, wenn es in unserem Raum ein Kompaktum gibt, in dessen Komplement allen meßbaren Teilmengen die Null zugeordnet wird.

3.4.10 (**Fouriertransformierte kompakt getragener Maße**). Die Fouriertransformierte eines von Null verschiedenen kompakt getragenen Maßes $\lambda \in M(\mathbb{R})$ kann nie kompakten Träger haben. In der Tat fänden wir zu solch einem Maß mithilfe der Natürlichkeit 3.4.3 auch ein von Null verschiedenes Maß auf der Kreisgruppe $\mu \in M(S^1)$, das allen Teilmengen des „oberen Halbkreises“ Null zuordnet und dessen Fouriertransformierte dennoch nur auf endlich vielen Elementen von \mathbb{Z} von Null verschiedene Werte annähme. Wegen der Injektivität der Fouriertransformation $M(S^1) \hookrightarrow C^b(\mathbb{Z})$ muß aber dann μ das Produkt von einem Haarmaß mit einem Laurentpolynom in $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ sein und ein von Null verschiedenes Laurentpolynom kann unmöglich auf dem oberen Halbkreis verschwinden.

3.4.11 (**Abtastatz mit Einheiten**). Jetzt versuche ich, den Abtastatz noch einmal physikalischer aufzuschreiben. Wir gehen aus vom orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum $\vec{\mathbb{T}}$ der Zeitspannen und der Charakterpaarung $\vec{\mathbb{T}}^* \times \vec{\mathbb{T}} \rightarrow S^1$ durch $(\omega, t) \mapsto e^{i\omega t}$. Gegeben eine positive Frequenz $F \in \vec{\mathbb{T}}_{>0}^*$ und $k \in \mathbb{N}$ liefert uns die zur Auswertung duale Charakterpaarung $\vec{\mathbb{T}}^* \times \vec{\mathbb{T}} \rightarrow S^1$ das rechte Quadrat in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 M([- (k + 1)F, -kF) \cup [kF, (k + 1)F]) & \xrightarrow{u_*} & M(\vec{\mathbb{T}}^*) \hookrightarrow C(\vec{\mathbb{T}}) \\
 \searrow \sim & & \downarrow p_* \qquad \downarrow oi \\
 & & M(\vec{\mathbb{T}}^*/2F\mathbb{Z}) \hookrightarrow C((2F)^{-1}\mathbb{Z})
 \end{array}$$

Es sagt uns salopp gesprochen, daß wir ein auf das Frequenzband $[kF, (k + 1)F]$ beschränktes Signal zurückgewinnen können, indem wir es in Zeitintervallen der Länge $(2F)^{-1}$ alias mit der verdoppelten Frequenz $2F$ abtasten. Ich verzichte in diesem Fall darauf, die Formel explizit anzugeben, die das Signal aus seinen Abtastwerten zurückgewinnt.

3.4.12. Auf Englisch heißt unser Abtastatz das **Sampling Theorem** und wird Shannon und Nyquist zugeschrieben, neuerdings auch Kotelnikow.

3.5 Faltung von Maßen und Funktionen

3.5.1 (**Formelsammlung für komplexe Maße**). Ich fasse für das folgende zusammen, was wir über Bildmaße und Produkte komplexer Maße auf Meßräumen nach 1.7.25 und 3.2.35 wissen.

Funktorialität: Gegeben meßbare Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ gilt $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* : M(X) \rightarrow M(Z)$. Für die Identität auf einem Meßraum X gilt $\text{id}_* = \text{id} : M(X) \rightarrow M(X)$;

Natürlichkeit von Produkten: Gegeben meßbare Abbildungen $f : X \rightarrow A$ und $g : Y \rightarrow B$ gilt für Maße $\mu \in M(X)$ und $\nu \in M(Y)$ stets die Gleichheit $(f_*\mu) \boxtimes (g_*\nu) = (f \times g)_*(\mu \boxtimes \nu)$ in $M(A \times B)$;

Eins: Gegeben ein Meßraum X und $\mu \in M(X)$ und auf dem einpunktigen Meßraum meß das Diracmaß $\delta \in M(\text{meß})$ gilt $(\text{pr}_X)_*(\mu \boxtimes \delta) = \mu$;

Assoziativität: Gegeben X, Y, Z Meßräume und μ, ν, λ jeweils komplexe Maße ist die offensichtliche Bijektion $\text{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ meßbar und es gilt $\text{ass}_*((\mu \boxtimes \nu) \boxtimes \lambda) = \mu \boxtimes (\nu \boxtimes \lambda)$;

Kommutativität: Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschungsabbildung für Meßräume X, Y und $\mu \in M(X)$ und $\nu \in M(Y)$ gilt $\tau_*(\mu \boxtimes \nu) = \nu \boxtimes \mu$.

Vorschau 3.5.2. Diese ganze Formelsammlung kann man in der entsprechenden Terminologie zusammenfassen als die Aussage, daß $X \mapsto M(X)$ ein Schmelzfunktor von der kartesischen Schmelzkategorie der Meßräume in die Schmelzkategorie der komplexen Vektorräume ist. Eine Verschmelzung von Meßräumen $f : X_1 \curlywedge \dots \curlywedge X_r \rightarrow Y$ ist dabei zu verstehen als eine meßbare Abbildung $f : X_1 \times \dots \times X_r \rightarrow Y$ und eine Verschmelzung von komplexen Vektorräumen $V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r \rightarrow W$ als eine multilineare Abbildung $V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$ und eine Verschmelzung von Meßräumen wie oben wird dabei abgebildet auf die Verschmelzung von Vektorräumen $M(X_1) \curlywedge \dots \curlywedge M(X_r) \rightarrow M(Y)$ alias die multilineare Abbildung $M(X_1) \times \dots \times M(X_r) \rightarrow M(Y)$ gegeben durch $(\mu_1, \dots, \mu_r) \mapsto f_*(\mu_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mu_r)$.

Definition 3.5.3. Ein **Meßmonoid** ist ein Monoid (G, \top) mit der Struktur eines Meßraums derart, daß die Verknüpfung $\top : G \times G \rightarrow G$ meßbar ist.

Beispiel 3.5.4. Jedes abzählbar basierte topologische Monoid ist mit seiner borelschen σ -Algebra ein Meßmonoid, denn die Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ ist stetig, also borelmeßbar, und wegen $\text{Borel}(G \times G) = \text{Borel}(G) \boxtimes \text{Borel}(G)$ nach 1.4.28 auch meßbar in Bezug auf die Produkt- σ -Algebra.

Definition 3.5.5. Gegeben komplexe Maße μ, ν auf einem Meßmonoid G erklären wir ein Maß $\mu * \nu$ auf G , die **Faltung** oder **Konvolution** unserer beiden Maße, als das Bildmaß unter der Verknüpfung $\top : G \times G \rightarrow G$ des Produktmaßes $\mu \boxtimes \nu$, in Formeln

$$\mu * \nu = \mu *_{\top} \nu := \top_*(\mu \boxtimes \nu)$$

3.5.6. Der Begriff der Faltung scheint auf eine Arbeit aus dem Jahre 1923 von Gustav Doetsch mit dem Titel „Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus“ zurückzugehen. Doetsch begründete den Gebrauch der Laplace-Transformation in den Ingenieurwissenschaften und wurde 1931 Professor in Freiburg.

3.5.7 (**Faltung σ -endlicher Maße**). Die obige Definition der Faltung bleibt sinnvoll für σ -endliche nichtnegative Maße. Allerdings muß die Faltung σ -endlicher Maße nicht mehr σ -endlich sein. Zum Beispiel liefert die Faltung des Lebesguemaßes auf \mathbb{R} mit sich selbst das Maß, das jeder meßbaren Nullmenge den Wert Null zuordnet und jeder anderen meßbaren Menge den Wert Unendlich.

Beispiele 3.5.8 (Faltung mit Diracmaßen). Sei (G, \top) ein Meßmonoid. Die Faltung des Diracmaßes an einer Stelle $g \in G$ mit dem Diracmaß bei $h \in G$ ist das Diracmaß bei $g \top h$, in Formeln $\delta_g * \delta_h = \delta_{g \top h}$. Die Faltung eines beliebigen komplexen Maßes μ mit dem Diracmaß bei $g \in G$ ist das „um g verschobene Maß μ “, in Formeln

$$\delta_g * \mu = (g \top)_* \mu \quad \mu * \delta_g = (\top g)_* \mu$$

Insbesondere gilt stets $\delta_e * \mu = \mu * \delta_e = \mu$ für $e \in G$ das neutrale Element. Ich zeige nun beispielhaft, wie man die Formel $\mu * \delta_g = (\top g)_* \mu$ aus den Formeln unserer Formelsammlung 3.5.1 herleiten kann. Bezeichne dazu $\text{em}_g : \text{meß} \hookrightarrow G$ die Abbildung, die den Punkt auf $g \in G$ wirft. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times \text{meß} & \xrightarrow{\text{id} \times \text{em}_g} & G \times G \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \top \\ G & \xrightarrow{(\top g)} & G \end{array}$$

Oben links füllen wir das Maß $\mu \boxtimes \delta$ ein. Sein Bildmaß unter der oberen und der unteren Verknüpfung muß übereinstimmen. Mit den Formeln unserer Formelsammlung und der Identität $\delta_g = \text{em}_{g*} \delta$ bedeutet diese Erkenntnis dann genau die behauptete Formel $\mu * \delta_g = (\top g)_* \mu$.

Lemma 3.5.9 (Faltungsalgebra). *Die Faltung von komplexen Maßen auf einem Meßmonoid ist assoziativ und im Fall eines kommutativen Monoids kommutativ.*

3.5.10. Da wir bereits wissen, daß die Faltung bilinear ist und das Dirac-Maß beim neutralen Element ein Einselement, ist für jedes Meßmonoid G der Vektorraum $M(G)$ mit der Konvolution als Multiplikation eine \mathbb{C} -Ringalgebra.

Beispiel 3.5.11 (Polynomring als Faltungsalgebra). Für $(G, \top) = (\mathbb{N}, +)$ mit der diskreten Topologie liefert etwa die Vorschrift $\sum a_n X^n \mapsto \sum a_n \delta_n$ einen injektiven Homomorphismus von Ringalgebren $\mathbb{C}[X] \hookrightarrow M(\mathbb{N})$. Dieselbe Vorschrift liefert auch im Fall $(G, \top) = (\mathbb{Z}, +)$ einen injektiven Homomorphismus von Ringalgebren $\mathbb{C}[X, X^{-1}] \hookrightarrow M(\mathbb{Z})$.

Beweis. Sei G unser Meßmonoid. Wir zeigen nur die Assoziativität und überlassen den Beweis der zweiten Aussage dem Leser zur Übung. Wir gehen aus vom kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (G \times G) \times G & \xrightarrow{\top \times \text{id}} & G \times G & \xrightarrow{\top} & G \\ \downarrow \text{ass} & & & & \parallel \\ G \times (G \times G) & \xrightarrow{\text{id} \times \top} & G \times G & \xrightarrow{\top} & G \end{array}$$

Gegeben komplexe Maße $\mu, \nu, \lambda \in M(G)$ wird $(\mu \boxtimes \nu) \boxtimes \lambda$ auf beiden Wegen auf dasselbe Maß abgebildet. Das zeigt $(\mu * \nu) * \lambda = \mu * (\nu * \lambda)$ wie behauptet. \square

Satz 3.5.12 (Fouriertransformation und Faltung). Die Fouriertransformierte der Faltung zweier komplexer Maße auf einer Fouriergruppe ist das punktweise Produkt der Fouriertransformierten unserer beiden Maße, in Formeln

$$\mathcal{F}(\mu * \nu) = \mathcal{F}\mu \cdot \mathcal{F}\nu$$

Beispiel 3.5.13. Im Fall eines Diracmaßes $\mu = \delta_g$ erhalten wir insbesondere in Verallgemeinerung von 3.1.5.3 die Formel $(\mathcal{F}(g^\top)_*\nu)(\chi) = \langle g, \chi \rangle ((\mathcal{F}\nu)(\chi))$. Im Fall der Charakterpaarung $\mathbb{Z} \times S^1 \rightarrow S^1$ mit $(n, z) \mapsto z^n$ ist die Verknüpfung

$$\mathbb{C}[X, X^{-1}] \hookrightarrow M(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}^b(S^1)$$

das Einsetzen der durch die Einbettung gegebenen Funktion $z : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ in ein Laurentpolynom.

Beweis. Sei $(G, +)$ unsere Fouriergruppe und seien $\mu, \nu \in M(G)$ komplexe Maße. Da in der Behauptung beide Seiten bilinear sind, dürfen wir unsere Maße endlich und nichtnegativ annehmen, vergleiche 1.6.9, 3.2.4. Gegeben $\chi \in \hat{G}$ gilt es zu zeigen $(\mu * \nu)^\wedge(\chi) = \mu^\wedge(\chi)\nu^\wedge(\chi)$ alias

$$\int_G \langle g, \chi \rangle (\mu * \nu)\langle g \rangle = \left(\int_G \langle h, \chi \rangle \mu\langle h \rangle \right) \left(\int_G \langle k, \chi \rangle \nu\langle k \rangle \right)$$

Mit der Verwandtschaftsverträglichkeit des Integrals 1.6.18 und der Definition der Faltung können wir die linke Seite umformen zu

$$\int_{G \times G} (\chi \circ +)(h, k) (\mu \boxtimes \nu)\langle h, k \rangle = \int_{G \times G} \langle h + k, \chi \rangle (\mu \boxtimes \nu)\langle h, k \rangle$$

Wegen $\chi(h + k) = \chi(h)\chi(k)$ folgt die Behauptung so aus dem Satz von Fubini. \square

3.5.14. Gegeben Mengen X, Y und Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sowie $g : Y \rightarrow \mathbb{C}$ notieren wir $f \boxtimes g : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion $f \boxtimes g : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ und nennen $f \boxtimes g$ das **äußere Produkt** der Funktionen f und g .

3.5.15 (**Fouriertransformation und äußeres Produkt**). Gegeben Charakterpaarungen $a : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$ und $b : H \times \hat{H} \rightarrow S^1$ von Fouriergruppen kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(G) \times M(H) & \xrightarrow{\mathcal{F}_a \times \mathcal{F}_b} & \mathcal{C}^b(\hat{G}) \times \mathcal{C}^b(\hat{H}) \\ \boxtimes \downarrow & & \downarrow \boxtimes \\ M(G \times H) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{a \boxtimes b}} & \mathcal{C}^b(\hat{G} \times \hat{H}) \end{array}$$

mit der Fouriertransformation zur Charakterpaarung $a \boxtimes b : (G \times H) \times (\hat{G} \times \hat{H}) \rightarrow S^1$ gegeben durch $a \boxtimes b : ((g, h), (\hat{g}, \hat{h})) \mapsto a(g, \hat{g})b(h, \hat{h})$. Sind in Formeln $\sigma \in M(G)$ und $\tau \in M(H)$ komplexe Maße, so gilt

$$\mathcal{F}_{a \boxtimes b}(\sigma \boxtimes \tau) = \mathcal{F}_a \sigma \boxtimes \mathcal{F}_b \tau$$

Um das zu sehen, muß man nur für $\hat{g} \in \hat{G}$ und $\hat{h} \in \hat{H}$ die Werte beider Seiten an der Stelle (\hat{g}, \hat{h}) vergleichen. Es gilt also, die Identität

$$\int_{G \times H} (\hat{g} \boxtimes \hat{h}) \sigma \boxtimes \tau = \left(\int_G \hat{g} \sigma \right) \left(\int_H \hat{h} \tau \right)$$

zu prüfen. Die aber ist klar nach dem Satz von Fubini erst für nichtnegative reelle Maße, dann aber mit der Bilinearität beider Seiten auch im allgemeinen.

Beweisvariante zu 3.5.12. Wir zeigen nun unsere Identität $\mathcal{F}(\sigma * \tau) = \mathcal{F}\sigma \cdot \mathcal{F}\tau$ für komplexe Maße auf einer Fouriergruppe $(G, +)$ ein weiteres Mal. Wir können im Fall $G = H$ unser Diagramm von 3.5.15 durch eine untere Hälfte ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(G) \times M(G) & \xrightarrow{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\hat{G}) \times \mathcal{C}^b(\hat{G}) \\ \downarrow \boxtimes & & \downarrow \boxtimes \\ M(G \times G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\hat{G} \times \hat{G}) \\ \downarrow +_* & & \downarrow \circ \Delta \\ M(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^b(\hat{G}) \end{array}$$

Das folgt aus 3.4.3, denn die Verknüpfung $+$ und die diagonale Einbettung Δ sind adjungiert für die Charakterpaarungen $a \boxtimes a$ und a alias

$$\langle\langle +, (g, h), \hat{g} \rangle\rangle_a = \langle\langle (g, h), \Delta(\hat{g}) \rangle\rangle_{a \boxtimes a} \quad \forall g, h \in G, \hat{g} \in \hat{G}$$

In der Tat können wir das umschreiben zu $a(g + h, \hat{g}) = a(g, \hat{g})a(h, \hat{g})$ und das gilt, da a eine Charakterpaarung ist. \square

3.5.16 (Falten von Maßen mit integrierbaren Funktionen). Gegeben $(G, +, \lambda)$ eine Fouriergruppe mit Haarmaß betrachten wir die Einbettung $(\cdot\lambda) : L^1(G; \lambda) \hookrightarrow M(G)$. Das Bild dieser Einbettung ist stabil unter der Faltung mit beliebigen komplexen Maßen. Genauer behaupten wir für alle $\sigma \in M(G)$ und $f \in \mathcal{L}^1(G; \lambda)$ die Gleichheit

$$\sigma * (f\lambda) = h\lambda$$

mit h der fast überall definierten Funktion $h(y) := \int f(y-x)\sigma\langle x \rangle$. Es reicht, das für σ ein reelles nichtnegatives Maß zu zeigen. Hier gilt es zu beachten, daß $(x, y) \mapsto f(y-x)$ in Bezug auf $(\sigma \boxtimes \lambda)\langle x, y \rangle$ integrierbar ist auf $G \times G$ nach Fubini, denn wir können $|f(y-x)|$ erst über $\lambda\langle y \rangle$ integrieren und erhalten eine von x unabhängige endliche Konstante. Also liefert nach Fubini 1.7.16 auch das partielle Integral nach $\sigma\langle x \rangle$ eine integrierbare Funktion $h(y)$. Um nun die behauptete Identität von Maßen zu zeigen, nehmen wir eine meßbare Funktion $\phi : G \rightarrow [0, \infty]$ her und finden

$$\begin{aligned} \int \phi(x) (\sigma * (f\lambda))\langle x \rangle &= \int \phi(x+y) (\sigma \boxtimes (f\lambda))\langle x, y \rangle = \int \phi(x+y) f(y) (\sigma \boxtimes \lambda)\langle x, y \rangle \\ &= \int \phi(x) (h\lambda)\langle x \rangle = \int \phi(y) \int f(y-x)\sigma\langle x \rangle \lambda\langle y \rangle = \int \phi(y) f(y-x) (\sigma \boxtimes \lambda)\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

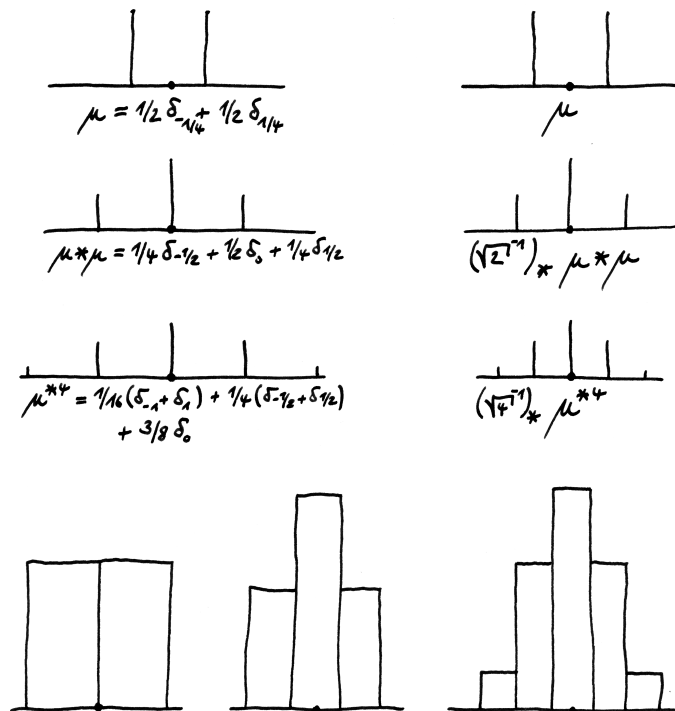
Auf der rechten Seite können wir hier erst über y und dann über x integrieren und im ersten Schritt beim unteren Integral y durch $x+y$ substituieren und sehen so, daß das in der Tat gleich ist.

3.5.17 (Falten integrierbarer Funktionen). Gegeben $(G, +, \lambda)$ eine Fouriergruppe mit Haarmaß erhalten wir für integrierbare Funktionen $f, g \in L^1(G; \lambda)$ insbesondere $(f\lambda) * (g\lambda) = (h\lambda)$ mit der Funktion $h \in L^1(G; \lambda)$ gegeben durch $h(y) = \int f(y-x)g(x)\lambda\langle x \rangle$. Man erklärt oft die Faltung von Funktionen direkt mittels dieser Formel und setzt

$$f * g = f *_{\lambda} g := \int f(y-x)g(x)\lambda\langle x \rangle$$

Satz 3.5.18 (Abstrakter zentraler Grenzwertsatz). Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} , unter dem x und x^2 integrierbar sind mit $\int x\mu\langle x \rangle = 0$ und $\int x^2\mu\langle x \rangle = 1$, so konvergiert die Folge der jeweils um den Faktor \sqrt{n} gestauchten iterierten Faltungen μ^{*n} gegen die **Standard-Normalverteilung** $e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$ im Sinne einer gleichmäßigen Konvergenz der Verteilungsfunktionen. In Formeln haben wir also gleichmäßig in $a \in \mathbb{R}$ die Konvergenz

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{n}\cdot a} \mu^{*n} \longrightarrow \int_{-\infty}^a \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$



In der linken Spalte sind die erste, zweite und vierte Faltungspotenz desjenigen Wahrscheinlichkeitsmaßes μ dargestellt, das die Summe der Hälfte der Diracmaße an den Stellen $1/4$ und $-1/4$ ist. Diese Faltungspotenzen sind wieder Summen von Diracmaßen, und das Maß eines Punktes entspricht der Länge des an der entsprechenden Stelle angehefteten vertikalen Strichleins. In der rechten Spalte sind entsprechend für $n = 1, 2, 4$ die um den Faktor \sqrt{n} in x -Richtung gestauchten Maße dargestellt. Die untere Zeile schließlich entsteht aus der rechten Spalte, indem wir jedes Strichlein durch ein Türmchen ersetzen, dessen Fläche gerade die Länge unseres Strichleins ist. Der zentrale Grenzwertsatz bedeutet in obigem Spezialfall anschaulich, daß auf jedem kompakten Intervall die Treppenfunktionen der unteren Zeile gleichmäßig gegen eine entsprechend normalisierte Gauss'sche Glockenkurve streben.

Ergänzung 3.5.19. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie hört sich unser zentraler Grenzwertsatz 3.5.18 dann so an: Gegeben eine Folge identisch verteilter stochastisch unabhängiger reeller Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots mit Erwartungswert Null und Varianz Eins konvergiert die Folge der Zufallsvariablen

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)$$

in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung.

Beweis. Wir arbeiten mit der stochastisch standardisierten Fouriertransformation, also der Charakterpaarung $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $s(x, y) = e^{ixy}$. Unsere Bedingungen liefern, daß die Fouriertransformierte alias die charakteristische Funktion μ^\wedge von μ im Sinne von 3.3.16 zweimal stetig differenzierbar ist. Ihre Taylorentwicklung um den Nullpunkt liefert mithilfe einer offensichtlichen Verallgemeinerung von 3.1.5.6 eine Darstellung

$$\mu^\wedge(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + y^2 \varepsilon(y)$$

für $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\varepsilon(0) = 0$. Nach 3.5.12 ist nun die Fouriertransformierte der Faltung das Produkt der Fouriertransformierten. Verwenden wir zusätzlich die Natürlichkeit 3.1.5.5 oder besser 3.2.29, so ergibt sich für die charakteristische Funktion der um den Faktor \sqrt{n} gestauchten n -fach iterierten Faltung die Darstellung

$$\left((n^{-1/2})_* \mu^{*n} \right)^\wedge (y) = \left(1 - \frac{y^2}{2n} + \frac{y^2}{n} \varepsilon\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right)^n$$

Hier steht $(n^{-1/2})_*$ für das Bildmaß im Sinne von 1.4.35 unter der durch die Multiplikation mit $n^{-1/2}$ gegebenen Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Unsere Funktionenfolge strebt nun nach [AN1] 4.2.22 punktweise gegen die Funktion $e^{-y^2/2}$ und all ihre Glieder sind als charakteristische Funktionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen betragsmäßig beschränkt durch Eins. Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt damit für jede Funktion ψ des Schwartzraums

$$\int \left((n^{-1/2})_* \mu^{*n} \right)^\wedge (y) \psi(y) dy \rightarrow \int e^{-y^2/2} \psi(y) dy$$

bei $n \rightarrow \infty$. Nach 3.1.17 ist die Funktion $e^{-y^2/2}$ die charakteristische Funktion im Sinne von 3.3.16 des Maßes $e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$, so daß wir wie im Beweis von 3.3.15 mit der Erkenntnis, daß die Fouriertransformation im wesentlichen ihre eigene

Transponierte ist, folgern können, daß für alle Funktionen φ des Schwarzraums gilt

$$\int \varphi(x) ((n^{-1/2})_* \mu^{*n}) \langle x \rangle \rightarrow \int \varphi(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

bei $n \rightarrow \infty$. Das anschließende Lemma 3.5.20 beendet dann den Beweis. \square

Lemma 3.5.20. *Seien $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf \mathbb{R} und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit einer stetigen Verteilungsfunktion $V = V_\mu$. Gilt*

$$\int \varphi(x) \mu_n \langle x \rangle \rightarrow \int \varphi(x) \mu \langle x \rangle \quad \text{bei } n \rightarrow \infty$$

für jede Schwartzfunktion φ , so streben die Verteilungsfunktionen V_n der μ_n gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion V von μ .

Beweis. 1. Alle unsere Verteilungsfunktionen streben gegen Null für $b \rightarrow -\infty$ und gegen Eins für $b \rightarrow \infty$ und wachsen monoton. Die Funktion V ist stetig und sogar gleichmäßig stetig nach [AN1] 5.1.19. Es ist damit nicht schwer einzusehen, daß aus der punktweisen Konvergenz $V_n(b) \rightarrow V(b)$ bereits die gleichmäßige Konvergenz folgt.

2. Gegeben $I \subset J \subset \mathbb{R}$ beschränkte Intervalle mit $\bar{I} \subset J^\circ$ finden wir eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, die auf I Eins ist und die außerhalb von J verschwindet. Sicher gilt dann $\mu(I) \leq \int \varphi(x) \mu \langle x \rangle \leq \mu(J)$ und ebenso für alle μ_n . Wir finden folglich für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(I, J, \varepsilon)$ derart, daß für $n \geq N$ sowohl gilt $\mu_n(I) \leq \int \varphi(x) \mu_n \langle x \rangle \leq \mu(J) + \varepsilon$ als auch $\mu(I) - \varepsilon \leq \int \varphi(x) \mu_n \langle x \rangle \leq \mu_n(J)$.

3. Sind also $I \subset J \subset K \subset \mathbb{R}$ beschränkte Intervalle mit $\bar{I} \subset J^\circ$ und $\bar{J} \subset K^\circ$, so folgt

$$\mu(I) - \varepsilon \leq \mu_n(J) \leq \mu(K) + \varepsilon$$

für hinreichend großes $n \geq N(I, J, K, \varepsilon)$.

4. Da wir die Verteilungsfunktion von μ stetig angenommen hatten, können wir für ein gegebenes beschränktes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ auch beschränkte Intervalle I, K wie oben finden mit $\mu(K) - \mu(I) \leq \varepsilon$. Zusammen folgt so für jedes beschränkte Intervall $J \subset \mathbb{R}$ bereits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(J) = \mu(J)$$

5. Schließlich finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein Intervall $[a, b)$ mit $\mu([a, b)) \geq 1 - \varepsilon$ und folglich $\mu((-\infty, a)) \leq \varepsilon$. Für hinreichend großes n gilt dann $\mu_n([a, b)) \geq 1 - 2\varepsilon$ und damit $\mu_n((-\infty, a)) \leq 2\varepsilon$. Für $x \leq a$ gilt bereits für diese n die Abschätzung $|\mu((-\infty, x)) - \mu_n((-\infty, x))| \leq 3\varepsilon$. Für $x > a$ müssen wir zusätzlich

n noch so groß wählen, daß $|\mu([a, x]) - \mu_n([a, x])| \leq \varepsilon$, und dann folgt für derart große n offensichtlich

$$|\mu((-\infty, x)) - \mu_n((-\infty, x))| \leq 4\varepsilon$$

alias die punktweise Konvergenz der Verteilungsfunktionen. \square

Vorschau 3.5.21. Wir haben nun zwei Schmelzfunkoren von der kartesischen Schmelzkategorie der Fouriergruppen in die Schmelzkategorie der komplexen Vektorräume, den Schmelzfunktor $G \mapsto M(G)$ aus der Spezialisierung von 3.5.2 und einen Schmelzfunktor $G \mapsto \mathcal{C}(\hat{G})$. Die Fouriertransformation ist nach dem vorhergehenden eine Transformation vom ersten dieser Schmelzfunktoren zum zweiten.

3.6 Wellengleichung und Fouriertransformation

3.6.1. Eine **Halbmetrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $d(x, y) = d(y, x)$ und $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

3.6.2 (**Topologie zu einer Halbmetrik**). Gegeben eine Halbmetrik d auf einer Menge X erklären wir die zugehörige Topologie als die Topologie, die von allen Bällen

$$B(x; r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

für $x \in X$ und $r > 0$ erzeugt wird. Diese Topologie ist Hausdorff genau dann, wenn d eine Metrik ist.

3.6.3. Eine **Halbnorm** auf einem reellen oder komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ und $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ für alle reellen beziehungsweise komplexen Skalare.

3.6.4 (**Halbmetrik zu einer Halbnorm**). Jede Halbnorm auf einem reellen oder komplexen Vektorraum V induziert eine Halbmetrik durch die Vorschrift $d(v, w) := \|v - w\|$.

3.6.5 (**Topologie auf dem Schwartzraum**). Wir betrachten auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Halbnormen

$$\|f\|_{s,r} := \|x^s \partial^r f\|_{\infty}$$

für $s, r \in \mathbb{N}$ und versehen ihn mit der Topologie, die von den Topologien zu allen diesen Halbnormen erzeugt wird. Mit dieser Topologie wird der Schwartzraum offensichtlich ein Hausdorffraum.

Proposition 3.6.6 (Fouriertransformation als Homöomorphismus). *Die Fouriertransformation induziert auf dem Schwartzraum einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{F} \circ (\cdot dx) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Beweis. Wir arbeiten mit der Charakterpaarung $s(x, y) = e^{-ixy}$. Aufgrund der Inversionsformel 3.3.5 reicht es, die Stetigkeit zu zeigen. Wir bemerken nun, daß auch die Halbnormen

$$\|f\|_{(r,s)} := \|\partial^r x^s f\|_\infty$$

unsere Topologie erzeugen, wie der Leser leicht selbst einsehen kann. Nun ist $1/(1+x^2)$ integrierbar. Bezeichnet C sein Integral, so finden wir von der Mitte ausgehend

$$\begin{aligned} (\|f\|_{0,0} \leq A/2 \text{ und } \|f\|_{2,0} \leq A/2) &\Rightarrow \|(1+x^2)f\|_\infty \leq A \\ &\Rightarrow |f| \leq A/(1+x^2) \\ &\Rightarrow \|\mathcal{F}f\|_\infty = \|\mathcal{F}f\|_{0,0} \leq AC \end{aligned}$$

und mit den Formeln 3.1.13 für das Vertauschen zwischen Multiplikation mit Koordinaten und Ableitung unter der Fouriertransformation ebenso

$$(\|f\|_{(r,s)} \leq A/2 \text{ und } \|f\|_{(r,s+2)} \leq A/2) \Rightarrow \|\mathcal{F}f\|_{s,r} \leq AC. \quad \square$$

3.6.7 (Fouriertransformation und Wellengleichung). Wir erinnern aus [AN2] 3.1.17 die eindimensionale Wellengleichung $\partial_t^2 f = \partial_x^2 f$ für $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ und die Menge ihrer Lösungen. Hier diskutiere ich einen anderen Zugang, der sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. Wir suchen bei diesem Zugang zweimal stetig differenzierbare Abbildungen der Zahlengeraden in den Schwartzraum

$$q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

in der Notation $q : t \mapsto q(t)$ oder $(q(t))(x) = q(x, t)$ mit

$$\partial_t^2 q = \partial_x^2 q$$

Hier meinen wir mit $(\partial_t q)(s) := \lim_{h \rightarrow 0} (q(s+h) - q(s))/h$ den Grenzwert im Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit seiner in 3.6.5 erklärten Topologie. Es ist leicht zu sehen, daß $f(x, t) := q(x, t)$ unsere ursprüngliche Wellengleichung löst, wenn der Weg $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Schwartzraum die oben beschriebene Eigenschaft hat. Wir erhalten so zwar nicht alle Lösungen, weil wir ja in [AN2] 3.1.17 durchaus Lösungen gefunden hatten, deren Einschränkung auf eine feste Zeit t nicht im Schwartzraum liegt. Dahingegen erhalten wir ein Lösungsverfahren, das sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}_s \circ (\cdot dx) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

zur Charakterpaarung $s(x, y) = e^{-ixy}$ ist nun nämlich Vektorraumisomorphismus und nach 3.6.6 auch ein Homöomorphismus und das Nachschalten von $\mathcal{F}_s \circ (\cdot dx)$

liefert folglich eine Bijektion zwischen den Lösungen q unserer Gleichung und der Menge der zweimal stetig differenzierbaren Abbildungen $\hat{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit

$$\partial_t^2 \hat{q} = -y^2 \hat{q}$$

Halten wir hier y fest, so ist das eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die wir mit dem Ansatz $\hat{q}(y, t) = \exp \lambda(y)t$ lösen können. Wir erhalten $\lambda(y)^2 = -y^2$ und $\lambda(y) = \pm iy$ und die allgemeine Lösung

$$\hat{q}(y, t) = ae^{iyt} + be^{-iyt} = (a + b) \cos(yt) + i(a - b) \sin(yt)$$

mit $\hat{q}(y, 0) = a + b$ sowie $\hat{q}_t(y, 0) = iy(a - b)$. Wir können mithin jede Lösung \hat{q} schreiben als

$$\hat{q}(y, t) = (\cos yt)\hat{q}(y, 0) + ((\sin yt)/y)\hat{q}_t(y, 0)$$

Mit etwas sorgfältigeren Abschätzungen sehen wir auch, daß die durch diese Gleichung gegebene Funktion $\hat{q}(y, t)$ für beliebige Vorgaben von zwei Schwartzfunktionen $\hat{q}(y, 0)$ und $\hat{q}_t(y, 0)$ in der Tat eine zweimal stetig nach t differenzierbare Abbildung $\hat{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ liefert. Nun wissen wir bereits $\mathcal{F}_s(\delta_t + \delta_{-t})/2 = \cos yt$ für $\delta_{\pm t}$ das Diracmaß bei $y = \pm t$ und als Variante von 3.1.19 erhalten wir $\mathcal{F}_s(\chi_{[-t,t]})/2 = (\sin yt)/y$ für $t \geq 0$ und entsprechend $\mathcal{F}_s(-\chi_{[t,-t]})/2 = (\sin yt)/y$ für $t \leq 0$. Da die Fouriertransformation Faltung in Multiplikation verwandelt, ist unsere Beschreibung von \hat{q} äquivalent zu

$$\mathcal{F}_s(q(x, t)dx) = \mathcal{F}_s\left(\frac{1}{2}(\delta_t + \delta_{-t}) * q(x, 0)dx\right) + \mathcal{F}_s\left(\frac{1}{2}(\chi_{[-t,t]} - \chi_{[t,-t]})dx * q_t(x, 0)dx\right)$$

Da die Fouriertransformation des weiteren injektiv und komplexlinear ist, können wir sie weglassen und erhalten

$$q(x, t)dx = \frac{1}{2}(\delta_t + \delta_{-t}) * q(x, 0)dx + \frac{1}{2}(\chi_{[-t,t]} - \chi_{[t,-t]})dx * q_t(x, 0)dx$$

oder ausgeschrieben

$$q(x, t) = \frac{q(x - t, 0) + q(x + t, 0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-t}^t q_t(x + s, 0) ds$$

Das ist also die Beschreibung einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Abbildung $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}(R)$, die die obige Gleichung $\partial_t^2 q = \partial_x^2 q$ erfüllt, durch „Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ “.

3.6.8 (Anschauliche Bedeutung obiger Lösungen der Wellengleichung). In meiner Anschauung tritt die Bedeutung der in 3.6.7 beschriebenen Lösungen der Wellengleichung besonders deutlich hervor, wenn wir darin, obwohl das unser begrifflicher Rahmen bis jetzt noch nicht erlaubt, $q(x, 0) = \delta_0/dx$ und $q_t(x, 0) = 0$

beziehungsweise $q(x, 0) = 0$ und $q_t(x, 0) = \delta_0/dx$ einsetzen. Im ersten Fall sehe ich zwei Teilchen der Masse $1/2$, die von rechts und links kommend sich zum Zeitpunkt Null zu einem Teilchen der Masse 1 am Ursprung ergänzen um dann wieder auseinanderzulaufen. Im zweiten Fall sehe ich eine am Ursprung zentrierte Rechtecksfunktion der Höhe $-1/2$, deren Träger mit der Zeit immer schmaler wird um beim Zeitpunkt $t = 0$ zu verschwinden, wobei die Funktion ins Positive umschlägt um sich als Rechtecksfunktion der Höhe $1/2$ wieder zunehmend zu verbreitern. Einen begrifflichen Rahmen, der diese Anschauung erlaubt und rechtfertigt, bilden die sogenannten Distributionen. Mit deren Hilfe läßt sich dann auch die Wellengleichung in höherdimensionalen Räumen ganz ähnlich lösen. Mehr dazu können Sie in Vorlesungen über Funktionalanalysis oder partielle Differentialgleichungen lernen.

3.7 Inversionsformel für Fouriergruppen*

3.7.1. Wir beginnen mit der Konstruktion des Schwartzraums für allgemeine Fouriergruppen und verallgemeinern dazu unsere Formeln 3.1.5.7 und 3.1.5.6 für die Beziehung zwischen partiellen Ableitungen und der Fouriertransformation.

Definition 3.7.2. Gegeben ein Gruppenweg $\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ in einer Fouriergruppe $(G, +)$ und eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sagen wir, f besitze bei $g \in G$ eine **Richtungsableitung in Richtung** ξ , wenn $t \mapsto f(\xi(t) + g)$ bei $t = 0$ differenzierbar ist. Die Ableitung dieser Abbildung bei $t = 0$ notieren wir dann

$$(\partial_\xi f)(g)$$

Existiert sie für alle $g \in G$, so nennen wir f **differenzierbar nach** ξ und notieren die entsprechende Funktion auf unserer Gruppe $\partial_\xi f$. Ist $\partial_\xi f(\xi(t) + g)$ zusätzlich stetig in t für alle g , so nennen wir f **partiell stetig differenzierbar nach** ξ .

3.7.3. Gegeben eine Fouriergruppe G nennen wir einen stetigen Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow i\mathbb{R}$ eine **Imaginärkoordinate von G** .

3.7.4. Sei $a : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen. Gegeben eine Imaginärkoordinate $\xi : G \rightarrow i\mathbb{R}$ erklären wir den **adjungierten Gruppenweg** $\hat{\xi} = \hat{\xi}_a : \mathbb{R} \rightarrow \hat{G}$ durch die Identität

$$\langle\langle g, \hat{\xi}(t) \rangle\rangle_a = e^{\xi(g)t} \quad \forall g \in G, t \in \mathbb{R}$$

In der Terminologie aus 3.4.3 ist das der zu ξ adjungierte Homomorphismus in Bezug auf die Charakterpaarung $s : i\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $(r, t) \mapsto e^{rt}$ und wir könnten ihn ausführlicher $\hat{\xi}_a = \hat{\xi}_{a,s}$ notieren. Weiter erklären wir für jeden Gruppenweg $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow G$ die **adjungierte Imaginärkoordinate** $\hat{\kappa} = \hat{\kappa}_a : \hat{G} \rightarrow i\mathbb{R}$ durch die Identität

$$e^{-t\hat{\kappa}(\hat{g})} = \langle\langle \kappa(t), \hat{g} \rangle\rangle_a \quad \forall t \in \mathbb{R}, \hat{g} \in \hat{G}$$

In der Terminologie aus 3.4.3 ist das der zu κ in Bezug auf die duale Charakterpaarung $\hat{s} : \mathbb{R} \times i\mathbb{R} \rightarrow S^1$ adjungierte Homomorphismus und wir könnten ihn auch ausführlicher $\hat{\kappa}_a = \hat{\kappa}_{\hat{s},a}$ notieren.

Beispiel 3.7.5. Gehen wir von der Charakterpaarung $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow S^1$ aus, die gegeben wird durch $a(x, y) := e^{-ix \cdot y}$, so ist $-ix_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Imaginärkoordinate mit adjungiertem Gruppenweg $t \mapsto te_\nu$ im \mathbb{R}^n mit y -Koordinaten. Umgekehrt ist $t \mapsto te_\nu$ ein Gruppenweg im \mathbb{R}^n mit x -Koordinaten mit $iy_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ als adjungierter Imaginärkoordinate.

Proposition 3.7.6. *Seien $a : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, λ ein Haarmaß auf G und $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow G$ ein Gruppenweg. Ist $f \in \mathcal{L}^1(G, \lambda)$ partiell stetig differenzierbar nach κ mit $\partial_\kappa f \in \mathcal{L}^1(G, \lambda)$, so gilt für die adjungierte Imaginärkoordinate*

$$\mathcal{F}((\partial_\kappa f)\lambda) = \hat{\kappa}\mathcal{F}(f\lambda)$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $G \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $(g, t) \mapsto f(\kappa(t) + g)$. An jeder Stelle $(g, t) \in G \times \mathbb{R}$ ist sie differenzierbar nach t mit der Ableitung

$$\partial_t (f(\kappa(t) + g)) = (\partial_\kappa f)(\kappa(t) + g)$$

und diese Ableitung ist stetig in t . Also gilt für festes $g \in G$ und $c \in \mathbb{R}$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_0^c (\partial_\kappa f)(\kappa(t) + g) dt = f(\kappa(c) + g) - f(g)$$

Nach unseren Annahmen ist $(g, t) \mapsto (\partial_{\kappa} f)(\kappa(t) + g)$ für festes $c > 0$ integrierbar auf $G \times [0, c]$ und wir erhalten durch Multiplikation mit $\langle\langle g, \hat{g} \rangle\rangle$ und Integration über G für jeden Charakter $\hat{g} \in \hat{G}$ die Identität

$$\begin{aligned} (\langle\langle \kappa(-c), \hat{g} \rangle\rangle - 1)(\mathcal{F}f\lambda)(\hat{g}) &= \int_G \int_0^c \langle\langle g, \hat{g} \rangle\rangle (\partial_{\kappa} f)(\kappa(t) + g) dt \boxtimes \lambda \\ &= \int_0^c \int_G \langle\langle \kappa(-t) + g, \hat{g} \rangle\rangle (\partial_{\kappa} f)(g) \lambda \boxtimes dt \\ &= (\mathcal{F}(\partial_{\kappa} f)\lambda)(\hat{g}) \int_0^c \langle\langle \kappa(-t), \hat{g} \rangle\rangle dt \end{aligned}$$

Teilen wir beide Seiten unserer obigen Identität durch c und erinnern $e^{-t\hat{\kappa}(\hat{g})} = \langle\langle \kappa(t), \hat{g} \rangle\rangle$, so sehen wir, daß im Grenzwert $c \rightarrow 0$ der Quotient $(e^{c\hat{\kappa}(\hat{g})} - 1)/c$ wie gewünscht gegen $\hat{\kappa}(\hat{g})$ strebt. \square

Proposition 3.7.7. Seien $a : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, λ ein Haarmaß auf G und $\xi : G \rightarrow i\mathbb{R}$ eine Imaginärkoordinate. Gegeben $f \in \mathcal{L}^1(G, \lambda)$ mit $\xi f \in \mathcal{L}^1(G, \lambda)$ ist $\mathcal{F}(f\lambda) \in \mathcal{C}^b(\hat{G})$ partiell differenzierbar nach $\hat{\xi}$ und es gilt

$$\mathcal{F}(\xi f\lambda) = \partial_{\hat{\xi}}(\mathcal{F}f\lambda)$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{F}f\lambda)(\hat{\xi}(t) + \hat{g}) - (\mathcal{F}f\lambda)(\hat{g})}{t} &= \frac{1}{t} \int_G (\langle\langle g, \hat{\xi}(t) + \hat{g} \rangle\rangle - \langle\langle g, \hat{g} \rangle\rangle) f(g) \lambda \langle g \rangle \\ &= \int_G \frac{\langle\langle g, \hat{\xi}(t) \rangle\rangle - 1}{t} \langle\langle g, \hat{g} \rangle\rangle f(g) \lambda \langle g \rangle \end{aligned}$$

Nun gilt per definitionem $\langle\langle g, \hat{\xi}(t) \rangle\rangle = e^{\xi(g)t}$. Damit strebt der Bruch gegen $\xi(g)$ für $t \rightarrow 0$. Die Aussage folgt so aus dem Satz über dominierte Konvergenz. \square

Definition 3.7.8. Der **Schwartzraum** $\mathcal{S}(G)$ einer Fouriergruppe G bestehe aus allen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ derart, daß für beliebige Gruppenwege $\kappa_1, \dots, \kappa_r : \mathbb{R} \rightarrow G$ die iterierten partiellen Ableitungen $\partial_{\kappa_1} \dots \partial_{\kappa_r} f$ existieren und daß für beliebige Imaginärkoordinaten $\xi_1, \dots, \xi_l : G \rightarrow i\mathbb{R}$ die Produkte $\xi_1 \dots \xi_l \partial_{\kappa_1} \dots \partial_{\kappa_r} f$ betragsmäßig beschränkt bleiben.

Beispiel 3.7.9. Im Fall der Fouriergruppe \mathbb{Z} ist der Schwartzraum der Untervektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{C}^b(\mathbb{Z})$ aller $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^l a_n| < \infty$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3.7.10. Im Fall der Kreisgruppe S^1 besteht der Schwartzraum $\mathcal{S}(S^1)$ aus allen Funktionen $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, für die $t \mapsto f(e^{it})$ eine glatte Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist.

Lemma 3.7.11 (Fouriertransformierte von Schwartzfunktionen). Gegeben eine Fouriergruppe G ist für jede Schwartzfunktion f und jedes Haarmaß λ auch die Fouriertransformierte von $f\lambda$ eine Schwartzfunktion, in Formeln

$$f \in \mathcal{S}(G) \Rightarrow \mathcal{F}(f\lambda) \in \mathcal{S}(\hat{G})$$

Beweis. Man prüft unschwer $\partial_\kappa(\xi f) = (\partial_\kappa \xi)f + \xi(\partial_\kappa f)$ und $\partial_\kappa \xi$ ist eine Konstante. \square

3.7.12. Der Raum der **Schwartzmaße** $\mathcal{M}(G) \subset M(G)$ einer Fouriergruppe G bestehe aus allen Maßen, die Vielfache eines Haarmaßes mit einer Schwartzfunktion sind. Die Multiplikation mit jedem Haarmaß λ von G induziert folglich einen Isomorphismus

$$(\cdot\lambda) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$$

Satz 3.7.13 (Inversionsformel für Fouriergruppen). Sei $a : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen mit dualer Charakterpaarung \hat{a} . So gilt:

1. Für jedes Haarmaß λ auf G gibt es genau ein Haarmaß $\hat{\lambda}$ auf \hat{G} derart, daß im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(G) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}_a} & \mathcal{S}(\hat{G}) \\ \cdot\lambda \uparrow \wr & & \wr \downarrow \cdot\hat{\lambda} \\ \mathcal{S}(G) & \xleftarrow[\sim]{\mathcal{F}_{\hat{a}}} & \mathcal{M}(\hat{G}) \end{array}$$

das „Einmal-im-Kreis-Herumgehen“ an jeder Stelle die Identität liefert. Man nennt $\hat{\lambda}$ das **Plancherel-Maß zu λ** . Wir nennen es auch das **zu λ duale Haarmaß** in Bezug auf unsere Charakterpaarung;

2. Für λ und $\hat{\lambda}$ duale Haarmaße erhalten die zwischen den Schwartzräumen induzierten Isomorphismen $\mathcal{F}_a \circ (\cdot\lambda)$ und $\mathcal{F}_{\hat{a}} \circ (\cdot\hat{\lambda})$ die L^2 -Norm und induzieren zueinander inverse Hilbertraumisomorphismen

$$L^2(G; \lambda) \xleftrightarrow{\sim} L^2(\hat{G}; \hat{\lambda})$$

3.7.14. Das Vorzeichen bei der Formel $f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$ aus 3.3.5 zeigt sich im hier diskutierten Formalismus darin, daß man die Fouriertransformation in die Gegenrichtung zur dualen Charakterpaarung nimmt.

Beweis. Im Fall $G = \mathbb{R}$ sind das genau unsere Inversionsformeln 3.3.5 und 3.3.7. Im Fall der Kreisgruppe $G = S^1$ ist das Übung [AN2] 7.3.10 und 2.7.23, 2.7.26. Der Fall der Gruppe \mathbb{Z} ist damit auch abgedeckt. Im Fall einer endlichen abelschen Gruppe ist die Aussage in 2.7.23, 2.7.26 enthalten, das Plancherelmaß zum normierten Haarmaß ist das Zählmaß. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß unser Satz für

das Produkt $G = G_1 \times G_2$ zweier Fouriergruppen folgt, wenn wir ihn für die Faktoren kennen. Seien λ_1 und λ_2 Haarmaße. Das Erzeugnis von äußeren Produkten $f_1 \boxtimes f_2$ mit $f_1 \in \mathcal{S}(G_1)$ und $f_2 \in \mathcal{S}(G_2)$ liegt sicher dicht in $L^2(G_1 \times G_2; \lambda_1 \boxtimes \lambda_2)$. Stetige Fortsetzung zeigt, daß es genau einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2(G_1 \times G_2; \lambda_1 \boxtimes \lambda_2) \xrightarrow{\sim} L^2(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2; \hat{\lambda}_1 \boxtimes \hat{\lambda}_2)$$

gibt mit $f_1 \boxtimes f_2 \mapsto \mathcal{F}(f_1 \lambda_1) \boxtimes \mathcal{F}(f_2 \lambda_2)$ für alle $f_1 \in \mathcal{S}(G_1), f_2 \in \mathcal{S}(G_2)$. Da wir das für die Schwartzfunktionen auf G_1 und G_2 bereits wissen, folgt auch hier, daß der zur dualen Charakterpaarung in derselben Weise konstruierte Isomorphismus die inverse Abbildung sein muß. Da schließlich beide Transformationen Schwartzfunktionen zu Schwartzfunktionen machen, folgt auch unsere Inversionsformel für Schwartzfunktionen auf beliebigen Fouriergruppen. \square

3.7.15. Die Propositionen 3.7.6 und 3.7.7 liefern für $a : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, λ ein Haarmaß auf G und $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow G$ ein Gruppenweg und $\xi : G \rightarrow i\mathbb{R}$ eine Imaginärkoordinate jeweils ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(G) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}_a} & \mathcal{S}(\hat{G}) \\ \partial_\kappa \downarrow & & \downarrow \hat{\kappa} \cdot \\ \mathcal{M}(G) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}_a} & \mathcal{S}(\hat{G}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(G) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}_a} & \mathcal{S}(\hat{G}) \\ \xi \cdot \downarrow & & \downarrow \partial_{\hat{\xi}} \\ \mathcal{M}(G) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}_a} & \mathcal{S}(\hat{G}) \end{array}$$

mit der hoffentlich offensichtlichen partiellen Ableitung von Schwartzmaßen nach Gruppenwegen. Diese beiden Diagramme sind äquivalent unter der Inversionsformel. Schalten wir genauer an jeder Stelle rechts $(\lambda \cdot) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$ vor und gehen im rechten Diagramm zu den inversen Horizontalen $\mathcal{F}_{\hat{a}} \circ (\hat{\lambda} \cdot)$ über und beachten, daß ξ die unter \hat{a} adjungierte Imaginärkoordinate zu $\hat{\xi}$ ist, so verwandelt sich das rechte Diagramm in das linke Diagramm beim Übergang zur dualen Charakterpaarung.

Beispiel 3.7.16 (Poissonformel und Natürlichkeit). Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $t \mapsto e^{2\pi it}$ sowie die Charakterpaarungen $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $(t, \omega) \mapsto e^{-2\pi it\omega}$ und $p : S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ mit $(z, n) \mapsto z^{-n}$, so daß die Einbettung $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ adjungiert ist zu φ . Mit der Natürlichkeit der Fouriertransformation 3.4.3 erhalten wir das Kommutieren im

oberen rechten Quadrat des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\cdot dt} & \mathcal{M}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_b} & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\
 \sigma \downarrow & & \varphi_* \downarrow & & \downarrow oi \\
 \mathcal{S}(S^1) & \xrightarrow{\cdot \mu} & \mathcal{M}(S^1) & \xrightarrow{\mathcal{F}_p} & \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \\
 & \searrow & \uparrow \cdot \mu & & \downarrow \cdot \zeta \\
 & & \mathcal{S}(S^1) & \xleftarrow{\mathcal{F}_{\bar{p}}} & \mathcal{M}(\mathbb{Z})
 \end{array}$$

Im Quadrat unten rechts meint μ das normierte Haarmaß auf der Kreisgruppe und ζ dem Zählmaß auf \mathbb{Z} , das das zugehörige Plancherelmaß ist, so daß einmal im Kreis herumgehen an jeder Stelle die Identität ist nach der Inversionsformel 3.7.13. Ganz links ist $\sigma : f \mapsto \tilde{g}$ gegeben durch das Aufsummieren $\tilde{g}(\varphi(t)) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n)$ und macht das linke obere Quadrat kommutativ. Füllen wir oben links eine Schwartzfunktion ein und lassen sie auf beiden Wegen nach unten in die Mitte laufen und werten das Resultat bei Null aus, so ergibt sich die Poissonformel.

3.7.17 (Injektivität der Fouriertransformation auf Maßen). Gegeben eine Fouriergruppe G erhalten wir durch die Vorschrift $f \mapsto (\mu \mapsto \int f \mu)$ eine Inklusion $\text{int} : L^\infty(G) \hookrightarrow \mathcal{M}(G)^*$ und durch die Vorschrift $\mu \mapsto (f \mapsto \int f \mu)$ eine Inklusion $\text{int} : \mathcal{M}(G) \hookrightarrow \mathcal{S}(G)^*$ und mit diesen Vertikalen und der Transponierten der Fouriertransformation $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{\bar{a}}$ zur Charakterpaarung $\bar{a} : \hat{G} \times G \rightarrow S^1$, $(\chi, g) \mapsto \chi(g)$ in der unteren Horizontalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^\infty(\hat{G}) \\
 \text{int} \downarrow & & \downarrow \text{int} \\
 \mathcal{S}(G)^* & \xrightarrow{\bar{\mathcal{F}}^\top} & \mathcal{M}(\hat{G})^*
 \end{array}$$

Es zeigt, daß unsere Fouriertransformation von komplexen Maßen nur das Maß Null zur Nullfunktion macht. Die behaupteten Injektivitäten in den Vertikalen zeigt man wie im Fall $G = \mathbb{R}^n$ in 3.3.12 folgende.

3.7.18 (Verträglichkeit der Transformation von Maßen und L^2 -Funktionen). Gegeben eine Fouriergruppe G betrachten wir den Raum $L_S^{\text{loc}}(G)$ aller meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : G \dashrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß ihr Produkt mit jeder Schwartzfunktion nach jedem Haarmaß integrierbar ist. Offensichtlich liegen für alle $p \in [1, \infty]$ alle L^p -Funktionen in Bezug auf ein und jedes Haarmaß in diesem Teilraum. Halten wir ein Haarmaß λ fest, so erhalten wir durch die Vorschrift $f \mapsto (g \mapsto \int f g \lambda)$ eine Inklusion $\text{int}_\lambda : L_S^{\text{loc}}(G) \hookrightarrow \mathcal{S}(G)^*$. Mit

diesen Abbildungen erhalten wir nun kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L^1(G; \lambda) & \xrightarrow{\cdot\lambda} & M(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^\infty(\hat{G}) \\
 \text{int}_\lambda \downarrow & & \text{int} \downarrow & & \downarrow \text{int} \\
 \mathcal{S}(G)^* & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{S}(G)^* & \xrightarrow{\bar{\mathcal{F}}^\top} & \mathcal{M}(\hat{G})^*
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 L^2(G; \lambda) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\hat{G}; \hat{\lambda}) \\
 \text{int}_\lambda \downarrow & & \downarrow \text{int} \\
 \mathcal{S}(G)^* & \xrightarrow{\bar{\mathcal{F}}^\top} & \mathcal{M}(\hat{G})^*
 \end{array}$$

mit derselben Abbildung $\bar{\mathcal{F}}^\top$ wie in 3.7.17 und der Fouriertransformation für L^2 -Funktionen oben rechts. Man zeigt das wie im Fall von \mathbb{R}^n beim Beweis von 3.3.9, ich führe das hier nicht mehr so genau aus. Es folgt wieder, daß die durch direktes Integrieren auf L^1 -Funktionen erklärte Transformation und die durch stetige Fortsetzung vom Schwartzraum auf L^2 -Funktionen erklärte Transformation auf dem Schnitt $L^1(G; \lambda) \cap L^2(G; \lambda)$ übereinstimmen. Ebenso folgt auch, daß uns für L^1 -Funktionen f mit nach Haarmaßen integrierbarer Fouriertransformierten eine nochmalige Transformation ihres Produkts mit dem Plancherelmaß die ursprüngliche Funktion zurückgibt, in Formeln $\mathcal{F}(\mathcal{F}f\lambda)\hat{\lambda} = f$.

Vorschau 3.7.19. Sei G eine Fouriergruppe mit Haarmaß μ . Wie in 3.3.17 mag man wieder den Raum

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}^*$$

aller **temperierten Distributionen** als den kleinsten Untervektorraum des vollen Dualraums \mathcal{S}^* des Raums der Schwartzfunktionen erklären, der (1) alle Linearformen umfaßt, die die Gestalt $\varphi \mapsto \int f\varphi\mu$ haben für $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und betragsmäßig beschränkt durch ein Vielfaches eines Produkts von stetigen Gruppenhomomorphismen $G \rightarrow \mathbb{R}$, und der (2) stabil ist unter den Transponierten $\partial_\xi^\top : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$ der partiellen Ableitungen $\partial_\xi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ nach Gruppenwegen $\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$. Man überlegt sich ohne große Schwierigkeiten, daß die Transponierte der Fouriertransformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^*$ einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$$

auf den temperierten Distributionen induziert und daß sich alle L^p -Funktionen f als temperierte Distributionen auffassen lassen. Darüberhinaus lassen sich auch alle endlichen Borelmaße μ als die temperierte Distributionen auffassen mittels der immergleichen Vorschrift $\varphi \mapsto \int \varphi\mu$, und alle bisher betrachteten Varianten der Fouriertransformation können als Einschränkung unserer Transformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$ verstanden werden. Es sollte nun weiter so sein, daß es für Fouriergruppen G, H und temperierte Distributionen Λ auf G und Γ auf H genau eine temperierte Distribution $\Lambda \boxtimes \Gamma$ auf $G \times H$ gibt mit $(\Lambda \boxtimes \Gamma)(f \boxtimes g) = \Lambda(f)\Gamma(g)$ und daß die Fouriertransformation von temperierten Distributionen mit \boxtimes verträglich ist. Das habe ich mir aber nicht so genau überlegt.

Beispiel 3.7.20. Zum Beispiel sollte die Dirac'sche δ_1 -Distribution auf S^1 der konstanten Funktion auf \mathbb{Z} entsprechen, so daß wir sie formal als $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$ zu entwickeln hätten.

Ergänzung 3.7.21 (Fouriertransformation von Halbdichten). Ich will kurz erklären, wie man die Inversionsformel für quadratintegrierbare Funktionen von der Wahl Haar'scher Maße befreien kann. Gegeben eine Fouriergruppe G erklärt man dazu den Vektorraum $\mathcal{H}(G)$ der **Schwartz-Halbdichten auf G** , indem man ausgeht von der Menge aller Paare (f, λ) bestehend aus einer Schwartzfunktion $f \in \mathcal{S}(G)$ und einem Haarmaß λ , modulo der Äquivalenzrelation gegeben durch $(f, a\lambda) \sim (\sqrt{a}f, \lambda)$ für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Äquivalenzklasse von (f, λ) notieren wir $f\sqrt{\lambda}$ und die Äquivalenzklasse von $(1, \lambda)$ abkürzend $\sqrt{\lambda}$. Es ist klar, wie wir Schwartzhalbdichten mit Schwartzfunktionen zu multiplizieren haben, und daß für jedes Haarmaß λ das Multiplizieren mit $\sqrt{\lambda}$ eine Bijektion

$$(\cdot\sqrt{\lambda}) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(G)$$

induziert. Weiter ist klar, daß es auf $\mathcal{H}(G)$ genau eine Struktur als \mathbb{C} -Vektorraum gibt, unter der alle diese Bijektionen Vektorraumisomorphismen werden. Schließlich ist auch klar, daß wir für jedes Haarmaß λ einen Vektorraumisomorphismus

$$(\cdot\sqrt{\lambda}) : \mathcal{H}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$$

erklären können durch die Vorschrift, daß er nach Vorschalten mit dem zuvor erklärten Isomorphismus den offensichtlichen Isomorphismus $(\cdot\lambda) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$ liefert. Der Sinn dieser Konstruktion besteht nun darin, daß für eine exakte Charakterpaarung $p : G \times H \rightarrow S^1$ von Fouriergruppen und ein Haarmaß λ auf G mit zugehörigem Plancherelmaß $\hat{\lambda}$ auf H die Komposition

$$\mathcal{H}(G) \xrightarrow{\sqrt{\lambda}} \mathcal{M}(G) \xrightarrow{\mathcal{F}_p} \mathcal{S}(H) \xrightarrow{\sqrt{\hat{\lambda}}} \mathcal{H}(H)$$

von der Wahl von λ gar nicht mehr abhängt und daß die duale Charakterpaarung die inverse Abbildung liefert. Weiter können wir auf $\mathcal{H}(G)$ ein Skalarprodukt erklären durch die Vorschrift $\langle f\sqrt{\lambda}, g\sqrt{\lambda} \rangle := \int \bar{f}g\lambda$ für ein und jedes Haarmaß λ und unsere Fouriertransformation von Halbdichten wird dann ein Isomorphismus von Skalarprodukträumen. Die Vervollständigung des Skalarproduktraums $\mathcal{H}(G)$ zu einem Hilbertraum notieren wir $L^2(G)$ und beachten, daß dieser Hilbertraum von keinerlei Wahlen mehr abhängt und daß die Fouriertransformation zu jeder exakten Charakterpaarung $p : G \times H \rightarrow S^1$ von Fouriergruppen einen vollständig kanonischen Hilbertraumisomorphismus $\mathcal{F}_{p,2} : L^2(G) \xrightarrow{\sim} L^2(H)$ mit Inversem $\mathcal{F}_{\bar{p},2}$ induziert. Die Elemente von $L^2(G)$ nennen wir **quadratintegrierbare Halbdichten auf G** . Wir können also unser Diagramm aus 3.7.13 ergänzen zu einem

kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{M}(G) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}_p} & \mathcal{S}(H) \\
 & \nearrow^{\cdot\sqrt{\lambda}} & & & \searrow_{\cdot\sqrt{\mu}} \\
 \mathcal{H}(G) & \xrightarrow{\quad} & L^2(G) & \xleftrightarrow[\mathcal{F}_{\bar{p},2}]{\mathcal{F}_{p,2}} & L^2(H) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{H}(H) \\
 & \searrow_{\cdot\sqrt{\lambda}} & & & \nearrow_{\cdot\sqrt{\mu}} \\
 & & \mathcal{S}(G) & \xleftarrow[\sim]{\mathcal{F}_{\bar{p}}} & \mathcal{M}(H)
 \end{array}$$

In diesem Diagramm sind alle Morphismen des äußeren Sechsecks Isomorphismen und einmal im Kreis herumgehen ist die Identität und zusätzlich hängen weder unsere Räume von glatten und quadratintegrierbaren Halbdichten noch die jeweils dazwischen induzierten Isomorphismen von der Wahl eines Haarmaßes λ mit zugehörigem Plancherelmaß μ ab.

Übungen

Übung 3.7.22 (Koordinatenfreie Poisson'sche Summationsformel). Gegeben seien eine Charakterpaarung $a : V \times \hat{V} \rightarrow S^1$ endlichdimensionaler reeller Vektorräume und $\Gamma \subset V$ ein Gitter alias das Gruppenerzeugnis einer Basis von V und $\lambda = \lambda_\Gamma$ das Haarmaß auf V , das dadurch normalisiert ist, daß für eine und jede Basis v_1, \dots, v_n von V , die das Gitter Γ erzeugt, gilt $\lambda(\sum_{i=1}^n [0, 1]v_i) = 1$. Sei weiter

$$\Gamma^\wedge := \{\hat{v} \in \hat{V} \mid \langle \gamma, \hat{v} \rangle_a = 1 \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

das zu Γ „duale Gitter“. Ist dann $f \in \mathcal{S}(V)$ eine Schwartzfunktion auf V und $\hat{f} := \mathcal{F}_a(f\lambda)$ die Fouriertransformierte des Maßes $f\lambda$, so gilt

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \sum_{\kappa \in \Gamma^\wedge} \hat{f}(\kappa)$$

3.8 Translationsinvariante Teilräume*

3.8.1. In diesem Abschnitt wird erklärt, wie man mithilfe der Fouriertheorie die abgeschlossenen translationsinvarianten Teilräume des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum bestimmen kann. Wir werden das Resultat nicht benötigen, es wird später durch die Theorie der unitären Darstellungen von Vektorräumen überholt. Jedoch mag es für manche Vorlesung einen netten Abschluß liefern.

Definition 3.8.2. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Ein Teilraum $M \subset L^2(V)$ heißt **translationsinvariant**, wenn er für alle $a \in V$ invariant

ist unter der Translation $\tau_a : L^2(V) \rightarrow L^2(V)$ gegeben durch $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$, wenn also in Formeln gilt

$$f \in M \Rightarrow \tau_a f \in M \quad \forall a \in V$$

Beispiel 3.8.3. Für $E \subset \hat{V}$ Borel-meßbar ist das Bild von $\chi_E L^2(\hat{V}) = L^2(E)$ unter der Fouriertransformation nach 3.5.13 ein translationsinvarianter Teilraum von $L^2(V)$, und nach [AN1] ?? ist dieser Teilraum auch abgeschlossen. Wir zeigen nun, daß diese Konstruktion bereits alle Beispiele für abgeschlossene translationsinvariante Teilräume liefert.

Satz 3.8.4 (Translationsinvariante Teilräume in $L^2(V)$). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. So gilt:

1. Jeder translationsinvariante abgeschlossene Teilraum $M \subset L^2(V)$ ist von der Form $M = L^2(E)^\wedge$ für eine Borelmenge $E \subset \hat{V}$.
2. Gegeben eine weitere Borelmenge $F \subset \hat{V}$ gilt $L^2(E)^\wedge = L^2(F)^\wedge$ genau dann, wenn $E \setminus F$ und $F \setminus E$ in Bezug auf ein und jedes Haarmaß Nullmengen sind.

3.8.5. Im Fall einer Veränderlichen mag man die Aussage dieses Satzes dahingehend zusammenfassen, daß die translationsinvarianten abgeschlossenen Teilräume durch die Vorgabe gewisser „erlaubter Frequenzanteile“ beschrieben werden können, also umgangssprachlich durch die Angabe des „erlaubten Tonumfangs“.

Beweis. Die zweite Behauptung ist klar. Für die Erste wählen wir ein Haarmaß λ und bemerken, daß ein Teilraum von $L^2(V; \lambda)$ nach 3.5.13 invariant ist unter allen Translationen genau dann, wenn sein Bild unter der Fouriertransformation invariant ist unter allen Multiplikationen mit Charakteren. Damit folgt unser Satz aus der anschließenden Proposition 3.8.6. \square

Proposition 3.8.6. Seien W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und μ ein Borelmaß auf W . So hat jeder unter der Multiplikation mit allen unitären Charakteren von W invariante abgeschlossene Teilraum $M \subset L^2(W; \mu)$ die Gestalt $M = L^2(E)$ für eine Borelmenge in $E \subset W$.

Beweis. Sei $P : L^2(W; \mu) \rightarrow M$ der orthogonale Projektor. Natürlich gilt

$$\langle Pf, g \rangle = \langle Pf, Pg \rangle = \langle f, Pg \rangle$$

für alle $f, g \in L^2(W; \mu)$. Für jeden Charakter $\chi \in \hat{W}$ gilt offensichtlich $P(\chi f) = \chi(Pf)$. Wir folgern $\langle Pf, \chi g \rangle = \langle f, \chi Pg \rangle$ für alle $\chi \in \hat{W}$ oder ausgeschrieben

$$\int \overline{Pf} \cdot \chi g = \int \bar{f} \cdot \chi Pg$$

Nach 3.3.15 haben aber zwei komplexe Maße nur dann dieselbe Fouriertransformierte, wenn sie übereinstimmen. Damit folgt die Gleichheit von Maßen

$$(\overline{Pf})g\mu = \overline{f}(Pg)\mu$$

Wir wählen nun $g \in \mathcal{L}^2$ Borelmeßbar und quadratintegrierbar mit $g(y) > 0$ für alle $y \in W$ und setzen $\varphi(y) = (Pg)(y)/g(y)$. Dann folgt aus unserer Gleichheit von Maßen mit 3.2.34 die Gleichheit $(Pf)(y) = \varphi(y)f(y)$ für fast alle y . Da aber gilt $P^2 = P$, nimmt $\varphi(y)$ fast überall nur die Werte 0 und 1 an. Also gibt es eine Borelmenge $E \subset W$ mit $Pf = [E]f$. Nun gilt aber $f = [E]f \Leftrightarrow f \in L^2(E)$ und es folgt $M = L^2(E)$. \square

3.9 Faltung von Maßen und Funktionen*

Definition 3.9.1 (Faltung von Maßen mit stetigen Funktionen). Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu \in M(V)$ ein komplexes Maß auf V und $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, so erklären wir eine weitere stetige beschränkte Funktion $\mu * f$ auf V durch die Vorschrift

$$(\mu * f)(x) := \int f(x - y) \mu\langle y \rangle$$

Es reicht hier, die Stetigkeit der Funktion $\mu * f$ im Fall positiver endlicher Maße μ zu zeigen, in dem sie leicht aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt.

Beispiel 3.9.2 (Faltung mit Diracmaßen). Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $E \subset V$ eine endliche Teilmenge und $\mu = \sum_{y \in E} a_y \delta_y$ eine Linearkombination von Diracmaßen mit komplexen Koeffizienten, so haben wir

$$\mu * f = \sum_{y \in E} a_y (\tau_y f)$$

für $\tau_y f$ die um y verschobene Funktion gegeben durch $(\tau_y f)(x) = f(x - y)$. Ähnliches gilt allgemeiner für abzählbare Linearkombinationen von Diracmaßen mit einer absolut konvergenten Familie von Koeffizienten.

Lemma 3.9.3 (Faltung von Maßen mit L^p -Funktionen). Seien V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu \in M(V; [0, \infty))$ ein endliches Maß auf V und $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ eine L^p -Funktion in Bezug auf ein Haar-Maß λ für $1 \leq p < \infty$. So ist die Funktion $y \mapsto f(x - y)$ für alle $x \in V$ außerhalb einer λ -Nullmenge integrierbar in Bezug auf μ und die fast überall definierte Funktion

$$x \mapsto \int f(x - y) \mu\langle y \rangle$$

ist wieder eine L^p -Funktion. Sie heißt die **Faltung** $(\mu * f)(x)$ **des Maßes** μ **mit der Funktion** f und erfüllt die Abschätzung $\|\mu * f\|_p \leq \mu(V) \|f\|_p$.

3.9.4. Wir erklären die Faltung von beliebigen komplexen Maßen mit L^p -Funktionen $M(V) \times L^p(V) \rightarrow L^p(V)$, $(\mu, f) \mapsto \mu * f$ dann durch lineare Fortsetzung. Im Rückblick wird sich die Konvolution von Maßen mit stetigen Funktionen oder auch mit L^p -Funktionen als Spezialfall der allgemeinen Konstruktion einer „Operation von Maßen auf Darstellungen“ erweisen, wie sie in 4.10.3 in einem anderen Spezialfall diskutiert wird.

Beweis. Der Satz von Fubini zeigt, daß für jedes Haar-Maß λ das Produktmaß $\lambda \boxtimes \mu$ unter der Scherung $S : V \times V \rightarrow V \times V$, $(x, y) \mapsto (x - y, y)$ invariant ist, in Formeln $S : \lambda \boxtimes \mu \rightsquigarrow \lambda \boxtimes \mu$. Wir behandeln nun zunächst den Fall $p = 1$. Für $f \in L^1(V; \lambda)$ bilden wir die Funktion $(f \circ \text{pr}_1) : (x, y) \mapsto f(x)$ und nach Fubini gilt

$$(f \circ \text{pr}_1) \in L^1(V \times V; \lambda \boxtimes \mu)$$

Daraus folgt, daß auch $(f \circ \text{pr}_1 \circ S) : (x, y) \mapsto f(x - y)$ integrierbar ist unter dem Produktmaß, und der Satz von Fubini zeigt dann die Behauptung. Im Fall von beliebigem p können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit f nichtnegativ annehmen. Dann können wir unsere bis hier gewonnenen Erkenntnisse auf die Funktion f^p anwenden und erhalten so, daß $y \mapsto f(x - y)^p$ für alle x außerhalb einer λ -Nullmenge nach $\mu\langle y \rangle$ integriert werden kann. Bemerkung 2.3.15 aus dem Kontext der Hölderungleichung angewandt auf die Funktion $h_x(y) = f(x - y)$ aus $L^p(V; \mu)$ und die konstante Funktion 1 aus $L^q(V; \mu)$ zeigt dann, daß für alle x außerhalb derselben λ -Nullmenge die Funktion h_x nach $\mu\langle y \rangle$ integrierbar ist. Bezeichnen wir dies Integral wie im Satz mit $(\mu * f)(x)$, so zeigt die Hölderungleichung 2.3.15 weiter

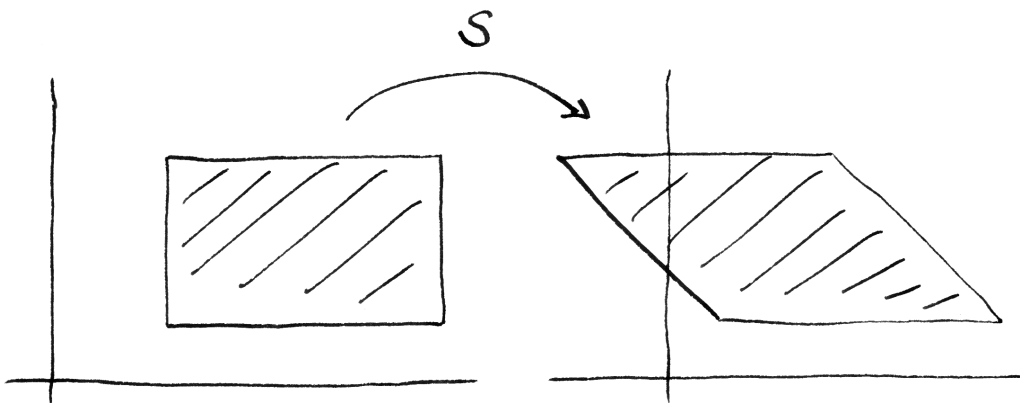
$$|(\mu * f)(x)| \leq \|h_x\|_1 \leq \|1\|_q \|h_x\|_p$$

für alle x außerhalb unserer λ -Nullmenge. Schreiben wir andererseits f als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge nichtnegativer integrierbarer Funktionen, so zeigt der bereits behandelte Fall $p = 1$ auch, daß $x \mapsto (\mu * f)(x)$ als fast überall definierte Funktion meßbar sein muß. Bilden wir nun auf beiden Seiten die p -te Potenz und integrieren über $\lambda\langle x \rangle$, so ergibt sich wegen $\|1\|_q = \mu(V)^{1/q}$ sofort

$$\begin{aligned} \int |(\mu * f)(x)|^p \lambda\langle x \rangle &\leq \mu(V)^{p/q} \left(\int |f(x - y)|^p (\lambda \boxtimes \mu)\langle x, y \rangle \right) \\ &= \mu(V)^{1+p/q} \|f\|_p^p = \mu(V)^p \|f\|_p^p \end{aligned}$$

und damit ist $\mu * f$ wieder eine L^p -Funktion mit $\|\mu * f\|_p \leq \mu(V) \|f\|_p$. \square

3.9.5 (Faltung von integrierbaren Funktionen). Sei λ ein Haar-Maß auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V . Gegeben integrierbare Funktionen



Ein Quader Q und sein Bild $S(Q)$ unter der Scherung $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (x - y, y)$. Berechnen wir die Maße unter $\lambda \boxtimes \mu$ für λ ein Haarmaß und μ ein beliebiges σ -endliches Maß, indem wir erst horizontal nach x und dann vertikal nach y integrieren, so erkennen wir unmittelbar, daß Q und $S(Q)$ dasselbe Maß haben.

$f, g \in L^1(V; \lambda)$ erklären wir ihre **Faltung**, eine weitere integrierbare Funktion, durch die Vorschrift

$$f *_{\lambda} g := (f\lambda) * g$$

oder explizit $(f *_{\lambda} g)(x) = \int g(x - y)f(y)\lambda\langle y \rangle$. Die durch Multiplikation mit dem Maß λ nach 3.2.34 induzierte Einbettung $L^1(V; \lambda) \hookrightarrow M(V)$ ist nach 3.9.7 verträglich mit den jeweiligen Konvolutionen, in Formeln

$$(f *_{\lambda} g)\lambda = (f\lambda) * (g\lambda)$$

Insbesondere ist also auch die Faltung $*_{\lambda}$ von integrierbaren Funktionen assoziativ und kommutativ. Unsere mathematisch standardisierte Fouriertransformation aus 3.1.2 verträgt sich jedoch nicht so gut mit der Faltung von Funktionen wie die abstrakte Fouriertransformation mit der Faltung von Maßen, genauer gilt für integrierbare Funktionen f, g auf \mathbb{R}^n und Faltung in Bezug auf das Lebesgue-Maß die Formel

$$(f * g)^{\wedge} = (2\pi)^{n/2}(f^{\wedge} \cdot g^{\wedge})$$

Der Vorfaktor rührt daher, daß wir ja die mathematisch standardisierte Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n; d^n x)$ erklärt hatten als die Fouriertransformierte des Maßes $(2\pi)^{-n/2} f d^n x$. In diesem Zusammenhang erweist sich die in 3.1.3 erwähnte stochastisch standardisierte Fouriertransformation als günstiger, die jedoch hinwiederum in 3.1.5 Komplikationen verursacht.

Übungen

Übung 3.9.6. Sind V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu, \nu \in M(V)$ komplexe Maße auf V und $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, so gilt

$$\mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f$$

Übung 3.9.7. Gegeben ein Haarmaß λ auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und $f \in L^1(V; \lambda)$ zeige man für jedes weitere komplexe Maß $\mu \in M(V)$ die Gleichheit von Maßen $(\mu * f)\lambda = \mu * (f\lambda)$.

Übung 3.9.8. Für die für $v > 0$ um den Faktor \sqrt{v} verzerrten und auf Integral Eins normierten Gauss'schen Glockenkurven $G_v(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp(-x^2/2v)$ wird die Faltung in Bezug auf das Lebesguemaß gegeben durch

$$G_u * G_v = G_{u+v}$$

Übung 3.9.9. Man prüfe für die Standard-Normalverteilung $\mu = e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$ die Formel $\int x^2 \mu\langle x \rangle = 1$. Weiter prüfe man für das G_v aus 3.9.8 auch die Formel $\int x^2 G_v(x) dx = v$. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie hat also eine reelle Zufallsvariable mit der Verteilung $G_v(x) dx$ Varianz v und Standardabweichung \sqrt{v} .

3.10 Topologie der Charaktergruppe*

3.10.1. In diesem Abschnitt soll besprochen werden, warum und inwiefern es zu jeder Fouriergruppe im wesentlichen nur genau eine Charakterpaarung gibt.

Definition 3.10.2. Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\text{Top}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y . Gegeben Teilmengen $K \subset X$ und $U \subset Y$ bezeichne

$$\mathcal{O}(K, U) \subset \text{Top}(X, Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(K) \subset U$. Die auf $\text{Top}(X, Y)$ von den Mengen $\mathcal{O}(K, U)$ für $K \subset X$ kompakt und $U \Subset Y$ offen erzeugte Topologie heißt die **kompakt-offene Topologie**. Wir denken uns Räume stetiger Abbildungen im Zweifelsfall stets mit dieser Topologie versehen und verwenden für den so entstehenden topologischen Raum die Notation

$$\mathcal{C}(X, Y)$$

Lemma 3.10.3 (Funktorialitäten der kompakt-offenen Topologie). Gegeben stetige Abbildungen $f : X' \rightarrow X$ und $g : Y \rightarrow Y'$ sind auch die induzierten Abbildungen $(\circ f) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X', Y)$ und $(g \circ) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')$ stetig.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus $(\circ f)^{-1}\mathcal{O}(K', U) = \mathcal{O}(f(K'), U)$, da das Bild $f(K')$ eines Kompaktums K' nach ?? wieder kompakt ist. Die zweite Behauptung folgt aus $(g \circ)^{-1}\mathcal{O}(K, U') = \mathcal{O}(K, g^{-1}(U'))$, da das Urbild $g^{-1}(U')$ einer offenen Menge U' wieder offen ist. \square

Satz 3.10.4 (Exponentialgesetz). Gegeben X, Y, Z topologische Räume und $f : X \times Y \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung ist auch die induzierte Abbildung $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig. Ist Y lokal kompakt, so erhalten wir auf diese Weise eine Bijektion

$$\text{Top}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

Beweis. Gegeben $K \subset Y$ kompakt und $W \Subset Z$ offen und $x \in X$ mit $F(x) \in \mathcal{O}(K, W)$ gilt es, eine Umgebung $U \Subset X$ von x zu finden mit $F(U) \subset \mathcal{O}(K, W)$, denn dann ist $F^{-1}(\mathcal{O}(K, W))$ offen und damit F nach 1.4.14 stetig. Nun sagen unsere Annahmen $f(x \times K) \subset W$. Für jedes $y \in K$ gibt es nach der Definition der Produkttopologie eine Umgebung $U_y \Subset X$ von x und eine Umgebung $V_y \Subset Y$ von y mit $f(U_y \times V_y) \subset W$. Endlich viele der V_y überdecken das Kompaktum K , sagen wir die V_y für $y \in E$ mit $E \subset K$ endlich. Dann ist $U := \bigcap_{y \in E} U_y$ die gesuchte Umgebung U von x . Sei nun umgekehrt $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig und sei $f : X \times Y \rightarrow Z$ die induzierte Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß f stetig ist an jeder Stelle $(x, y) \in X \times Y$. Sei also $W \Subset Z$ eine offene Umgebung

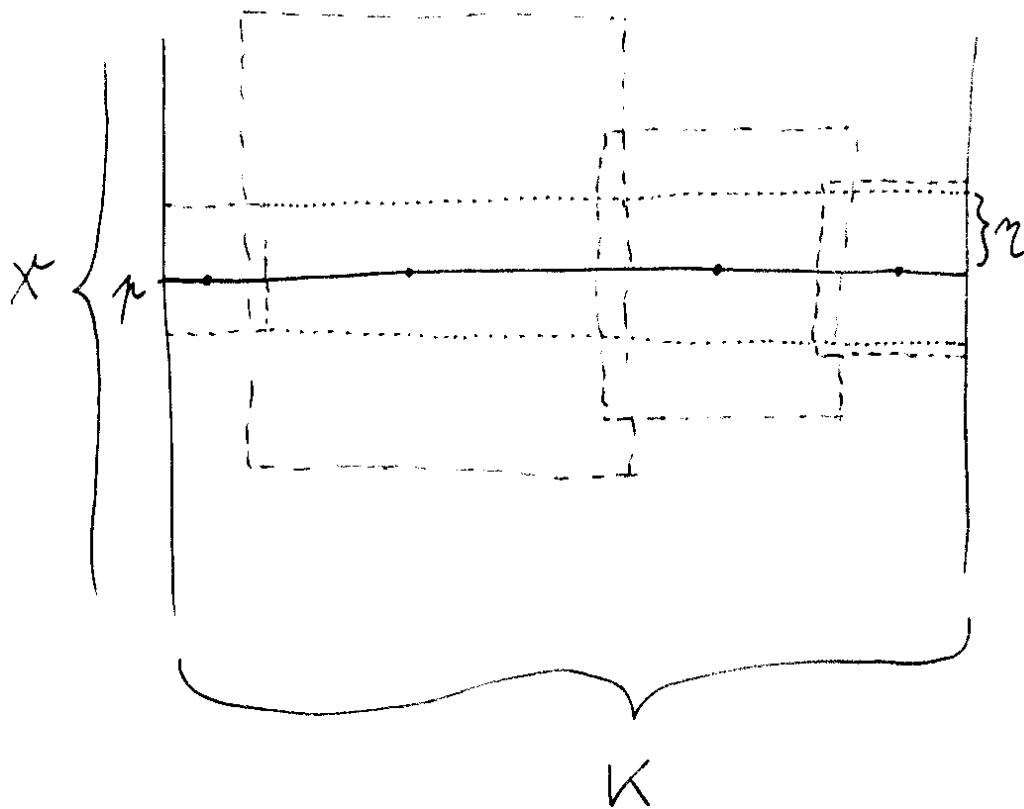


Illustration zum Beweis von Satz 3.10.4. Das Bild kommt von dem Beweis des Spezialfalls [AN1] ?? . Das p im Bild heißt in unserem Beweis x , das η im Bild ist so gewählt, daß der η -Ball um x alias p in V enthalten wäre.

von $f(x, y) = (F(x))(y)$. Nach Annahme ist $F(x) : Y \rightarrow Z$ stetig und Y lokal kompakt, folglich gibt es eine kompakte Umgebung K von y mit $(F(x))(K) \subset W$ alias $F(x) \in \mathcal{O}(K, W)$. Da nun auch die Abbildung $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig ist bei x , gibt es dann auch eine Umgebung $U \subset X$ von x mit $F(U) \subset \mathcal{O}(K, W)$, also mit $f(U \times K) \subset W$. Damit ist $U \times K$ die gesuchte Umgebung von (x, y) , die unter f nach W abgebildet wird. \square

Korollar 3.10.5. *Gegeben topologische Räume X, Y, Z mit X lokal kompakt liefert die offensichtliche stetige Abbildung einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z)$$

Vorschau 3.10.6. In kategorieller Sprache ausgedrückt besagt unser Korollar, daß der Funktor $\mathcal{C}(X, _) : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ verträglich ist mit Produkten.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für jeden topologischen Raum T unsere stetige Abbildung eine Bijektion

$$\text{Top}(T, \mathcal{C}(X, Y \times Z)) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(T, \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z))$$

induziert. Mit dem Exponentialgesetz 3.10.4 folgt das, wenn wir zeigen, daß die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\text{Top}(T \times X, Y \times Z) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(T \times X, Y) \times \text{Top}(T \times X, Z)$$

induziert. Das aber ist klar. \square

Korollar* 3.10.7 (Starkes Exponentialgesetz). *Gegeben X und Y lokal kompakt ist die Bijektion des Exponentialgesetzes ein Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß unsere Bijektion für jeden topologischen Raum T eine Bijektion

$$\text{Top}(T, \mathcal{C}(X \times Y, Z)) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(T, \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)))$$

induziert. Da Produkte von Kompakta nach Übung 1.4.47 kompakt sind und da sich die induzierte Topologie nach 2.7.15 mit der Produkttopologie verträgt, ist auch $X \times Y$ lokal kompakt. Nach dem Exponentialgesetz 3.10.4 können wir also beide Seiten in verträglicher Weise identifizieren mit $\text{Top}(T \times X \times Y, Z)$. \square

Korollar 3.10.8. *Die Schmelzkategorie der Fouriergruppen hat internes Hom.*

Beweis. Seien B, Z Fouriergruppen. Wir versehen die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen $\text{AbTop}(B, Z) \subset \mathcal{C}(B, Z)$ mit der kompaktoffenen Topologie und erhalten nach 3.10.9 eine topologische Gruppe $B \rightrightarrows Z$, von der wir zeigen wollen, daß sie das fragliche interne Hom realisiert. Gegeben weitere Fouriergruppen A_1, \dots, A_s induziert die Bijektion

$$\text{Top}(A_1 \times \dots \times A_s, \mathcal{C}(B, Z)) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(A_1 \times \dots \times A_s \times B, Z)$$

aus dem Exponentialgesetz 3.10.4 eine Bijektion

$$\text{AbTop}(A_1 \times \dots \times A_s, B \rightrightarrows Z) \xrightarrow{\sim} \text{AbTop}(A_1 \times \dots \times A_s \times B, Z)$$

Wir sind also fertig, sobald wir zeigen, daß die abelsche topologische Gruppe $B \rightrightarrows Z$ auch selbst wieder eine Fouriergruppe ist. Dazu müssen wir nur unsere Fälle $\mathbb{R}, S^1, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ jeweils für B und Z durchgehen und in allen sechzehn Fällen prüfen, daß es paßt. \square

Lemma 3.10.9. *Gegeben ein lokal kompakter topologischer Raum X und eine topologische Gruppe S ist auch $\mathcal{C}(X, S)$ mit seiner kompaktoffenen Topologie eine topologische Gruppe.*

Beweis. Die Verknüpfung von $\mathcal{C}(X, S)$ ist stetig als die Komposition

$$\mathcal{C}(X, S) \times \mathcal{C}(X, S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, S \times S) \rightarrow \mathcal{C}(X, S)$$

unserer Produktverträglichkeit 3.10.5 mit dem Nachschalten der stetigen Verknüpfung $S \times S \rightarrow S$. Die Inversenbildung ist stetig als das Nachschalten der Inversenbildung in S . \square

Beispiel 3.10.10 (Topologie der Charaktergruppe). Gegeben eine lokal kompakte topologische Gruppe G wird ihre Charaktergruppe

$$\hat{G} = \mathfrak{X}(G) \subset \mathcal{C}(G, S^1)$$

mit der von der kompaktoffenen Topologie induzierten Topologie als Untergruppe einer topologischen Gruppe nach Übung 2.7.28 selbst eine topologische Gruppe. Wir denken uns die Charaktergruppe einer lokal kompakten topologischen Gruppe von nun an stets mit dieser Topologie versehen. Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ in eine weitere lokal kompakte topologische Gruppe induziert nach 3.10.3 durch Vorschalten einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\hat{\varphi} : \hat{H} \rightarrow \hat{G}$ alias $\mathfrak{X}(\varphi) : \mathfrak{X}(H) \rightarrow \mathfrak{X}(G)$ in die Gegenrichtung auf den Charaktergruppen.

Beispiel 3.10.11 (Charaktergruppe von \mathbb{R}). Die durch $(x, y) \mapsto \exp(ixy)$ gegebene Charakterpaarung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ induziert einen Homöomorphismus

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

In der Tat ist diese Abbildung bijektiv aufgrund unserer Beschreibung 2.7.7 der Einparameteruntergruppen der Kreisgruppe. Sie ist stetig nach dem schwachen Exponentialgesetz 3.10.4, da die ursprüngliche Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ stetig war. Schließlich ist das Bild des offenen Intervalls $(-a, a)$ die offene Menge $\mathcal{O}([-\pi/2a, \pi/2a], (\operatorname{Re}(z) > 0))$ aller Abbildungen, die besagtes Kompaktum in die offene Halbebene $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ abbilden. Durch Verschieben sehen wir, daß alle offenen Intervalle $c + (-a, a) = (c - a, c + a)$ auf offene Mengen abgebildet werden. Damit ist unsere Abbildung auch offen.

Beispiel 3.10.12 (Charaktergruppe von S^1). Ganz allgemein ist die Topologie auf der Charaktergruppe jeder kompakten Hausdorffgruppe K , die ja stets lokal kompakt sein muß nach 1.10.7, die diskrete Topologie. In der Tat besteht die offene Teilmenge $\mathfrak{X}(K) \cap \mathcal{O}(K, (\operatorname{Re}(z) > 0))$ nur aus dem neutralen Element, denn unsere Halbebene umfaßt keine nichttriviale Untergruppe von S^1 . Die Charakterpaarung $S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ gegeben durch $(z, n) \mapsto z^n$ liefert mithin einen Homöomorphismus

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(S^1)$$

Beispiel 3.10.13 (Charaktergruppe von \mathbb{Z}). Die durch $(z, n) \mapsto z^n$ gegebene Charakterpaarung $S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ liefert einen Homöomorphismus

$$S^1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{Z})$$

Die Stetigkeit ist wieder klar. Andererseits ist $\mathfrak{X}(\mathbb{Z})$ Hausdorff, ja $\mathcal{C}(X, Y)$ ist für Y Hausdorff offensichtlich stets auch Hausdorff. Unsere stetige Abbildung $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{Z})$ bildet nun Kompakta auf Kompakta ab und damit auch abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen und ist folglich ein Homöomorphismus.

Beispiel 3.10.14 (Charaktergruppen endlicher Gruppen). Die Charaktergruppe einer endlichen Gruppe ist diskret als Charaktergruppe einer kompakten Hausdorffgruppe, vergleiche 3.10.12, und ist offensichtlich endlich, da jedes Element endliche Ordnung hat und unter einem Gruppenhomomorphismus nach S^1 nur auf die endlich vielen entsprechenden Einheitswurzeln abgebildet werden kann.

Lemma 3.10.15 (Produktverträglichkeit der Charaktergruppe). Gegeben lokal kompakte Hausdorffgruppen G, H ist die vom Rückzug längs der Einbettungen $\operatorname{in}_G : G \rightarrow G \times H, g \mapsto (g, 1)$ und $\operatorname{in}_H : H \rightarrow G \times H, h \mapsto (1, h)$ induzierte Abbildung ein Homöomorphismus

$$(\mathfrak{X}(\operatorname{in}_G), \mathfrak{X}(\operatorname{in}_H)) : \mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

Beweis. Sie haben bereits in 2.7.31 geprüft, daß diese Abbildung bijektiv ist. Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von $\mathfrak{X}(\text{in}_G)$ und $\mathfrak{X}(\text{in}_H)$. Andererseits betrachten wir die stetigen Abbildungen $\mathfrak{X}(\text{pr}_G) : \mathfrak{X}(G) \rightarrow \mathfrak{X}(G \times H)$ und $\mathfrak{X}(\text{pr}_H) : \mathfrak{X}(H) \rightarrow \mathfrak{X}(G \times H)$. Die Abbildung

$$(+)\circ(\mathfrak{X}(\text{pr}_G)\times\mathfrak{X}(\text{pr}_H)):\mathfrak{X}(G)\times\mathfrak{X}(H)\rightarrow\mathfrak{X}(G\times H)$$

ist dann stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen. Man sieht aber leicht, daß sie zur Abbildung aus unserem Lemma invers ist. \square

Satz 3.10.16 (Pontrjagin-Dualität für Fouriergruppen). *Gegeben eine Fouriergruppe G ist auch ihre Charaktergruppe $\hat{G} = \mathfrak{X}(G)$ eine Fouriergruppe, das Auswerten induziert eine Charakterpaarung $a : G \times \mathfrak{X}(G) \rightarrow S^1$ und die zugehörige Abbildung ist ein Isomorphismus von topologischen Gruppen*

$$G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$$

Beweis. Für G die reelle Zahlengerade, die Kreisgruppe oder eine diskrete zyklische Gruppe hatten wir das schon in den vorangehenden Beispielen gesehen. Der Fall einer beliebigen Fouriergruppe folgt dann aus der Produktverträglichkeit der Charaktergruppe 3.10.15. \square

Vorschau 3.10.17. Der vorhergehende Satz gilt allgemeiner für lokal kompakte abelsche Hausdorffgruppen an Stelle unserer Fouriergruppen, aber die Beweise werden dann mühsamer.

Satz 3.10.18 (Eindeutigkeit von Charakterpaarungen). *Ist $G \times X \rightarrow S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, so ist die davon induzierte Bijektion ein Homöomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G)$.*

Beweis. Ist $G \times X \rightarrow S^1$ eine Charakterpaarung von Fouriergruppen, so folgt die Stetigkeit der induzierten Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G)$ aus dem schwachen Exponentialgesetz 3.10.4. Als stetiger bijektiver Homomorphismus von Fouriergruppen muß unsere Abbildung dann nach dem anschließenden Lemma 3.10.19 ein Homöomorphismus sein. \square

Lemma 3.10.19. *Jeder stetige bijektive Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ von Fouriergruppen ist bereits ein Homöomorphismus.*

3.10.20. Dieses Lemma ist für lokal kompakte Hausdorffgruppen nicht mehr richtig. Zum Beispiel ist der stetige Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R}^\delta \rightarrow \mathbb{R}$ von \mathbb{R} mit der diskreten Topologie nach \mathbb{R} mit seiner üblichen Topologie kein Homöomorphismus.

Beweis. Jeder stetige Homomorphismus bildet die Zusammenhangskomponente der Eins alias die **Einskomponente** $G^\circ \subset G$ in die Einskomponente $H^\circ \subset H$ ab. Diese Einskomponenten sind offene Untergruppen und isomorph zu topologischen Gruppen der Gestalt $\mathbb{R}^a \times (S^1)^b$. Wir finden nach dem, was wir schon wissen, eine Ergänzung der von φ induzierten Abbildung $\varphi^\circ : G^\circ \rightarrow H^\circ$ zu einem kommutativen Diagramm von stetigen Gruppenhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^\circ & \xrightarrow{\varphi^\circ} & H^\circ \end{array}$$

mit offenen Surjektionen mit abzählbarem Kern in den Vertikalen und einer \mathbb{R} -linearen Abbildung als oberer Horizontale. Ist φ injektiv, so muß diese \mathbb{R} -lineare Abbildung abzählbaren Kern haben, also injektiv sein. Ist φ surjektiv, so muß $H^\circ/\varphi^\circ(G^\circ)$ abzählbar sein, da G/G° für eine Fouriergruppe G stets abzählbar ist. Also muß unsere \mathbb{R} -lineare Abbildung dann surjektiv sein. Ist φ bijektiv, so muß sie mithin bijektiv und insbesondere offen sein. Dann aber ist auch $\varphi : G^\circ \rightarrow H^\circ$ und schließlich $\varphi : G \rightarrow H$ selbst offen, also ein Homöomorphismus. \square

Übungen

Übung 3.10.21 (Nichtunitäre Charaktergruppe). Gegeben eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G erklären wir ihre **nichtunitäre Charaktergruppe** als die Gruppe

$$\mathfrak{X}_{\text{nu}}(G) := \text{GrpTop}(G, \mathbb{C}^\times)$$

aller stetigen Gruppenhomomorphismen nach \mathbb{C}^\times . Man zeige, daß $\mathfrak{X}_{\text{nu}}(G) \subset \mathcal{C}(G, \mathbb{C}^\times)$ mit der von der kompaktoffenen Topologie induzierten Topologie eine topologische Gruppe ist und daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ durch Vorschalten einen stetigen Gruppenhomomorphismus in die Gegenrichtung $\hat{\varphi} : \mathfrak{X}_{\text{nu}}(H) \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{nu}}(G)$ induziert.

Übung 3.10.22 (Nichtunitäre Charaktergruppe von \mathbb{R}). Die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \exp(ixy)$ induziert einen Homöomorphismus

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_{\text{nu}}(\mathbb{R})$$

4 Spektraltheorie in Hilberträumen*

4.1 Unitäre Darstellungen von \mathbb{R}

Definition 4.1.1. Die unitären Automorphismen eines Hilbertraums \mathcal{H} bilden eine Gruppe $U(\mathcal{H})$. Eine **unitäre Darstellung von \mathbb{R}** ist ein Paar (\mathcal{H}, ρ) bestehend aus einem Hilbertraum \mathcal{H} und einem Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$ derart, daß die zugehörige Operation $\mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $(t, v) \mapsto (\rho(t))(v)$ stetig ist für die Produktmetrik auf $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$. Gleichbedeutend reden wir auch von einer **unitären Operation** von \mathbb{R} auf \mathcal{H} .

4.1.2. In Formeln fordern wir von unserer Abbildung ρ also

$$\rho(s + t) = \rho(s) \circ \rho(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Unitäre Darstellungen von \mathbb{R} sind in der Quantenmechanik von grundlegender Bedeutung, da die zeitliche Entwicklung jedes quantenmechanischen Systems durch eine unitäre Operation von \mathbb{R} oder noch präziser von der dazu isomorphen Gruppe $\vec{\mathbb{T}}$ der Zeitspannen auf dem Hilbertraum \mathcal{H} seiner Zustände modelliert wird. Als erstes Beispiel betrachten wir auf \mathbb{R} das Lebesgue-Maß dt und die unitäre Darstellung von \mathbb{R} auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; dt)$ durch das Verschieben von Funktionen $\rho(t)f = \tau_t f$, deren Stetigkeit in 2.6.10 gezeigt wurde. Der folgende Satz 4.1.4 soll als Leitbild für die Entwicklung der Spektraltheorie dienen, die wir anschließend in Angriff nehmen werden. Er stellt eine große Klasse von Beispielen bereit und wirft zugleich Licht auf die allgemeine Struktur.

Vorschau 4.1.3. Man kann $U(\mathcal{H})$ so mit der Struktur einer topologischen Gruppe versehen, daß unsere unitären Darstellungen gerade die Gruppenwege in $U(\mathcal{H})$ sind. Das leistet die sogenannte „starke Operatortopologie“, die definiert ist als die „Initialtopologie“ zu allen Auswertungen an Vektoren $U(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$, vergleiche [TM] 2.1.27.

Satz 4.1.4 (Lokale Struktur unitärer Darstellungen von \mathbb{R}). *Gegeben \mathcal{H} ein Hilbertraum, $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von \mathbb{R} und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor gibt es genau ein Paar (μ, φ) bestehend aus einem endlichen nichtnegativen Borelmaß $\mu = \mu_v$ auf \mathbb{R} und einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ derart, daß gilt $\varphi(1) = v$ und*

$$\rho(t) \circ \varphi = \varphi \circ (e^{itx} \cdot) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

4.1.5. Das Symbol x ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß Elemente $f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ durch Funktionen $f(x)$ repräsentiert werden. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ ist also mit $(e^{itx} \cdot)$ die Abbildung $(e^{itx} \cdot) : L^2(\mathbb{R}; \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ gemeint ist, die ein

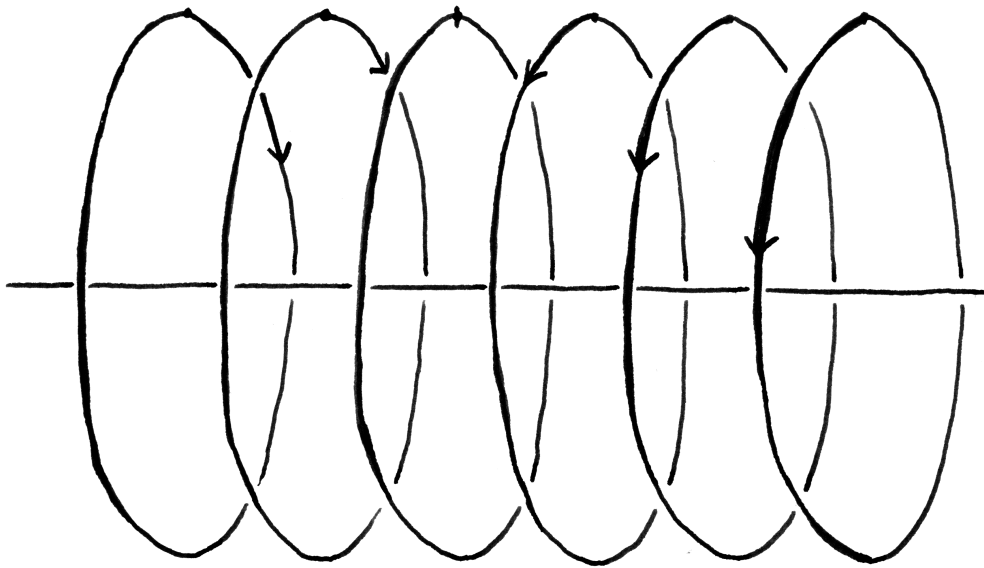


Illustration zur Operation von \mathbb{R} auf $L^2(\mathbb{R}; \mu)$. Den Graph einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mag man sich als Teilmenge von \mathbb{R}^3 vorstellen, die eingezeichneten Kreise sind jeweils als $S^1 \subset \mathbb{C}$ zu verstehen und die Multiplikation mit e^{ixt} für festes t bedeutet das Drehen um geeignet von x abhängende Winkel in den jeweiligen Ebenen $\{x\} \times \mathbb{C}$, anschaulich also ein Verdrillen des Graphen.

$f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ auf diejenige fast überall definierte Funktion abbildet, die an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ den Wert $e^{itx} f(x)$ annimmt. Die 1 meint die konstante Funktion 1 auf \mathbb{R} , die ja in Bezug auf jedes endliche Borelmaß quadratintegrierbar ist. Das Wörtchen „lokal“ spielt darauf an, daß die Darstellung in gewisser Weise nur „lokal um den Vektor v “ beschrieben wird. Eine globale Beschreibung werden wir als „Spektralzerlegung“ in 4.9.1 kennenlernen und aus dieser Spektralzerlegung leiten wir dann auch erst den obigen Satz über die lokale Struktur her. Der besseren Übersichtlichkeit halber stelle ich die Abbildungen dieses Satzes auch noch in einem kommutativen Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (x \mapsto f(x)) \in & L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} & & & \\
 \Downarrow & (e^{itx} \cdot) \downarrow & & \downarrow \rho(t) & & & \\
 (x \mapsto e^{itx} f(x)) \in & L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} & & & \\
 & 1 & \mapsto & v & & &
 \end{array}$$

4.1.6. Ich formuliere diesen Satz auch noch im unwesentlich allgemeineren Fall einer **Geradengruppe**, als da heißt der additiven Gruppe G eines eindimensionalen reellen Vektorraums. Diese Allgemeinheit scheint mir aus mehreren Gründen sinnvoll: Erstens hoffe ich, daß selbst im Fall $G = \mathbb{R}$ die Aussage übersichtlicher wird, wenn in der Notation die drei verschiedenen Bedeutungen von \mathbb{R} als (1) dargestellte Gruppe, (2) deren Charaktergruppe und (3) auf dem Hilbertraum als Unterkörper von \mathbb{C} durch die Multiplikation mit Skalaren operierender Körper getrennt werden. Zweitens sind Operationen von Geradengruppen auf Hilberträumen in der Quantenmechanik besonders natürlich, da die zeitliche Entwicklung jedes quantenmechanischen Systems genau genommen durch eine unitäre Operation der Gruppe $G = \overline{\mathbb{T}}$ aller Zeitspannen auf dem Hilbertraum \mathcal{H} aller Zustände des Systems modelliert wird. Und drittens gilt unser Satz in dieser Gestalt unverändert für die additive Gruppe jedes endlichdimensionalen reellen Vektorraums G , etwa auch für die Gruppe $\overline{\mathbb{E}}$ der Translationen des Anschauungsraums, und mutatis mutandis für G eine beliebige Fouriergruppe oder sogar eine beliebige kommutative „lokal kompakte Hausdorff’sche topologische Gruppe“. Bezeichne $\hat{G} = \text{Grpto}(G, S^1)$ den Charakterraum unserer Geradengruppe im Sinne von 3.2.25, also die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von G in die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$. Auf diesem Charakterraum haben wir in 3.2.25 die Struktur eines reellen Vektorraums erklärt und haben gezeigt, daß er im Fall einer Geradengruppe die Dimension Eins hat.

Satz 4.1.7 (Lokale Struktur unitärer Darstellungen von Geradengruppen). Gegeben G eine Geradengruppe, \mathcal{H} ein Hilbertraum, $\rho : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor gibt es genau ein Paar (μ, φ) bestehend aus einem endlichen Borelmaß $\mu = \mu_v$ auf der Charaktergruppe \hat{G} und einer unitären

Einbettung $\varphi : L^2(\hat{G}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ derart, daß gilt $\varphi(1) = v$ und

$$\rho(g) \circ \varphi = \varphi \circ (g \cdot) \quad \forall g \in G$$

4.1.8. Hier ist $(g \cdot)$ zu verstehen als die Multiplikation mit der durch das Auswerten an der Stelle g definierten Funktion $\hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ auf der Charaktergruppe. Der besseren Übersichtlichkeit halber stellen wir die Abbildungen dieses Satzes auch noch in einem kommutativen Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccccc} (\chi \mapsto f(\chi)) & L^2(\hat{G}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} & \\ \downarrow & (g \cdot) \downarrow & & \downarrow \rho(g) & \\ (\chi \mapsto \chi(g)f(\chi)) & L^2(\hat{G}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} & \\ & 1 & \mapsto & v & \end{array}$$

Hierbei meint $\chi \in \hat{G}$ einen variablen Charakter und $f(\chi)$ sowie $\chi(g)$ sind nur nur etwas ausführlichere Darstellungen einer Funktion $f : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ beziehungsweise der durch das Auswerten bei $g \in G$ gegebenen Funktion $\hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$. Ich schlage vor, das Maß μ aus dem obigen Satz das **Frequenzmaß** des Vektors v zu nennen. Im Fall $G = \mathbb{T}$ mißt es in gewisser und im endlichdimensionalen Fall in 4.1.13 präzisierter Weise, „wie stark verschiedene Frequenzanteile in v vorkommen“. Die Abbildung φ nenne ich die **kanonische Einbettung** zu unserem Vektor v .

4.1.9. Eine **Unterdarstellung** einer unitären Darstellung (\mathcal{H}, ρ) ist ein abgeschlossener Teilraum von \mathcal{H} , der unter allen $\rho(t)$ in sich selber überführt wird. Ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ einer Darstellung heißt ein **zyklischer Vektor** unserer Darstellung, wenn es außer \mathcal{H} selbst keine Unterdarstellung gibt, die unseren Vektor enthält. Ist im vorhergehenden Satz v ein zyklischer Vektor, so ist φ ein Isomorphismus und liefert sogar eine explizite Beschreibung der „globalen Struktur“ unserer Darstellung. Umgekehrt ist in unserem Satz auch die Aussage enthalten, daß für jedes Borelmaß μ auf \mathbb{R} die Funktion 1 die unitäre Darstellung $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ nach 4.1.23 zyklische Vektoren besitzt, ja sogar, daß für jedes endliche Borelmaß μ auf \mathbb{R} die konstante Funktion $1 \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ ein zyklischer Vektor ist, denn andernfalls läge 1 in einer echten Unterdarstellung $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R}; \mu)$ und wir fänden dazu neben dem Paar (μ, id) noch ein weiteres mögliches Paar (ν, φ) , bei dem φ über \mathcal{H} faktorisiert, im Widerspruch zur behaupteten Eindeutigkeit. Im allgemeinen gibt es zwar keinen zyklischen Vektor, aber in jedem Fall ist unser Raum die Hilbertsumme 2.5.11 von abgeschlossenen Unterdarstellungen, die jeweils einen zyklischen Vektor besitzen. Natürlich kann es viele verschiedene derartige Zerlegungen geben und im Fall der Existenz eines zyklischen Vektors auch noch viele andere zyklische Vektoren. Die dadurch erzeugten Mehrdeutigkeiten werden wir in späteren Abschnitten noch sorgfältig studieren. Jetzt diskutieren wir zunächst einmal beispielhaft den endlichdimensionalen Fall.

Proposition 4.1.10 (Endlichdimensionale unitäre Darstellungen von \mathbb{R}). *Ist $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{U}(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von \mathbb{R} durch unitäre Endomorphismen eines Hilbertraums \mathcal{H} endlicher Dimension, so gibt es eine Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n von \mathcal{H} und reelle Zahlen x_1, \dots, x_n mit*

$$\rho(t)v_\nu = \exp(ix_\nu t)v_\nu \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 1 \leq \nu \leq n.$$

4.1.11. In anderen Worten operiert also bezüglich einer geeigneten angeordneten Orthonormalbasis \mathcal{B} jedes $t \in \mathbb{R}$ durch die diagonale Matrix

$${}_{\mathcal{B}}[\rho(t)]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(e^{ix_1 t}, \dots, e^{ix_n t})$$

Beweis. Nach [LA2] 1.11.1 ist jede unitäre Matrix diagonalisierbar und hat nur Eigenwerte der Länge Eins. Insbesondere gilt das für alle $\rho(t)$. Nach [LA2] 7.8.10 ist weiter jede Familie von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen simultan diagonalisierbar, wir finden also eine Basis e_1, \dots, e_n von \mathcal{H} aus simultanen Eigenvektoren aller $\rho(t)$. In Bezug auf diese Basis werden alle $\rho(t)$ durch Diagonalmatrizen dargestellt. Die diagonalen Matrixeinträge sind dann stetige Gruppenhomomorphismen $\rho_{\nu\nu} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ und damit nach 2.7.7 von der Gestalt $\rho_{\nu\nu}(t) = \exp(ix_\nu t)$ für wohlbestimmte $x_\nu \in \mathbb{R}$. Da die Eigenräume der unitären Automorphismen $\rho(t)$ jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$x_\nu \neq x_\mu \Rightarrow e_\nu \perp e_\mu$$

Indem wir jeweils im Erzeugnis der e_ν zu festem $x = x_\nu$ eine Orthonormalbasis wählen, erhalten wir die gesuchte Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n von \mathcal{H} mit $\rho(t)v_\nu = \exp(ix_\nu t)v_\nu$ für alle $t \in \mathbb{R}$. \square

Vorschau 4.1.12. Mit den Methoden der Liethorie geht das auch schneller. Nach [ML] 1.4.5 und [ML] 1.2.26 ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{U}(\mathcal{H})$ von der Gestalt $\rho : t \mapsto \exp(tA)$ für genau ein schiefhermisches alias schiefadjungiertes $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$, und damit folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Spektralsatz [LA2] 1.12.15 für selbstadjungierte Abbildungen, angewandt auf die selbstadjungierte Abbildung iA .

Beispiel 4.1.13 (Frequenzmaß im Fall endlicher Dimension). Gegeben ein Vektor $v = \sum \alpha_\nu v_\nu$ mit seiner Zerlegung in simultane Eigenvektoren in unserer in der obigen Proposition 4.1.10 diskutierten endlichdimensionalen Darstellung erhalten wir ein mögliches Paar (μ, φ) zu Satz 4.1.4, also eine äquivariante unitäre Einbettung

$$\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

mit $1 \mapsto v$, indem wir als Borelmaß μ die Linearkombination von Diracmaßen

$$\mu = |\alpha_1|^2 \delta_{x_1} + \dots + |\alpha_n|^2 \delta_{x_n}$$

nehmen und als unitäre Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die Abbildung $\varphi : f \mapsto \sum f(x_\nu) \alpha_\nu v_\nu$. Der Nachweis, daß das in diesem Fall auch das einzige mögliche derartige Paar ist, sei dem Leser zur Übung überlassen.

Beispiel 4.1.14 (Frequenzmaß in einem Fall unendlicher Dimension). Wir betrachten auf \mathbb{R} das Lebesgue-Maß dt und die unitäre Darstellung von \mathbb{R} auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; dt)$ durch das Verschieben von Funktionen, $\rho(t)f = \tau_t f$, deren Stetigkeit in 2.6.10 gezeigt wurde. Eine entsprechend normalisierte Variante der Fouriertransformation induziert in diesem Fall einen unitären Isomorphismus von Hilberträumen

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}; dx/2\pi) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}; dt)$$

Durch stetige Fortsetzung von 3.1.5.2 erkennt man, daß auch für quadratintegrierbare Funktionen f gilt $\mathcal{F}(e^{itx} \cdot h) = \rho(t)(\mathcal{F}h)$. Betrachten wir nun als φ die Verknüpfung dieser Fouriertransformation mit der unitären Einbettung

$$(f^\wedge \cdot) : L^2(\mathbb{R}; (|f^\wedge|^2/2\pi) dx) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}; dx/2\pi)$$

so ergibt sich zum Vektor $g = (f^\wedge)^\wedge$, also der Funktion $g : x \mapsto f(-x)$, ein mögliches Paar (μ, φ) mit $\mu = (|f^\wedge(x)|^2/2\pi) dx$ als Frequenzmaß von g . Daß es auch das einzig mögliche Paar ist, muß jedoch erst noch gezeigt werden.

4.1.15. Um die eben vorgestellten Sätze zu beweisen gilt es, die Theorie weiter zu entwickeln. Ist (ρ, \mathcal{H}) eine unitäre Darstellung von \mathbb{R} , so nennen wir einen Vektor $v \in \mathcal{H}$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$Sv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(t)v - v}{t}$$

existiert. Sicher bilden die differenzierbaren Vektoren einen Teilraum $\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}$ und $S = S_\rho : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}$ ist eine \mathbb{C} -lineare Abbildung. Ich will bereits verraten, daß diese lineare Abbildung der **infinitesimale Erzeuger** unserer Darstellung heißt, obwohl wir noch nicht wissen, in welcher Weise diese Abbildung denn nun unsere Darstellung erzeugt. Man beachte jedoch, daß weder der Teilraum der differenzierbaren Vektoren abgeschlossen zu sein braucht noch unser infinitesimaler Erzeuger stetig.

Definition 4.1.16. Eine lineare Selbstabbildung eines Hilbertraums heißt **selbstadjungiert**, wenn sie ihre eigene Adjungierte ist. Ist in Formeln \mathcal{H} unser Hilbertraum und $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unsere lineare Abbildung, so heißt in Formeln ausgedrückt A selbstadjungiert, wenn gilt

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \in \mathcal{H}$$

4.1.17. Eine lineare Selbstabbildung eines Hilbertraums heißt **schiefadjungiert**, wenn sie das Negative ihrer Adjungierten ist. Eine lineare Abbildung S ist demnach schiefadjungiert genau dann, wenn iS selbstadjungiert ist.

Proposition 4.1.18. *Ist (ρ, \mathcal{H}) eine unitäre Darstellung von \mathbb{R} , in der sämtliche Vektoren differenzierbar sind, so ist ihr infinitesimaler Erzeuger S stetig und schiefadjungiert und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\rho(t) = \exp(tS)$$

mit der Exponentialfunktion von Operatoren aus [AN2] 1.6.15.

Beweis. Sicher gilt ganz allgemein für alle differenzierbaren Vektoren v, w unserer Darstellung die Formel

$$\langle Sv, w \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{\rho(t)v - v}{t}, w \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle v, \frac{\rho(-t)w - w}{t} \right\rangle = -\langle v, Sw \rangle$$

Sind alle Vektoren von \mathcal{H} differenzierbar, in Formeln $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}$, so ist demnach $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine schiefadjungierte lineare Abbildung. Die Stetigkeit von S folgt damit aus der im Anschluß bewiesenen Proposition 4.2.1, nach der schlicht alle selbstadjungierten und damit natürlich auch alle schiefadjungierten Selbstabbildungen eines Hilbertraums stetig sind. Damit folgt dann, daß für alle $v \in \mathcal{H}$ die Abbildung $t \mapsto \exp(-tS)\rho(t)v$ differenzierbar ist und die Ableitung Null hat, wie der Leser in der anschließenden Übung 4.1.21 selbst ausarbeiten mag. Nach [AN2] ?? ist diese Abbildung also konstant und die Proposition ist bewiesen. \square

4.1.19. Um unitäre Darstellungen von Geradengruppen zu verstehen, gilt es also, schiefadjungierte oder äquivalent selbstadjungierte Operatoren zu studieren. Damit werden wir uns nun zunächst beschäftigen.

Übungen

Übung 4.1.20. Besitzt jede endlichdimensionale unitäre Darstellung von \mathbb{R} einen zyklischen Vektor? Man finde eine dreidimensionale unitäre Darstellung von \mathbb{R} mit zyklischem Vektor.

Übung 4.1.21. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} , eine stetige lineare Abbildung $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ und eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ zeige man, daß auch die Abbildung $t \mapsto \exp(tS)f(t)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $S \exp(tS)f(t) + \exp(tS)f'(t)$. Hinweis: Man beachte dazu die Differenzierbarkeit von $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \mapsto tS$, von $\exp : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bei Null nach [AN2] 2.3.26 und von der Operation $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ nach [AN2] 2.6.5.

Übung 4.1.22. Man zeige, daß für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ der translationsinvariante Teilraum $\mathcal{H} = L^2(K; dx)^\wedge \subset L^2(\mathbb{R}; dt)$ aller Fouriertransformierten quadratintegrierbarer Funktionen mit Träger in K in Bezug auf die Darstellung von \mathbb{R} durch Translationen vollständig aus differenzierbaren Vektoren besteht und daß der infinitesimale Erzeuger S in diesem Fall schlicht das negative Ableiten $-\partial$ ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Gleichung $\exp(-t\partial)f = \tau_t f$ und der Taylorentwicklung?

Übung 4.1.23. Gegeben ein Borelmaß μ auf \mathbb{R} zeige man, daß die Abbildung $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(L^2(\mathbb{R}; \mu))$ mit $(\rho(t)f)(x) = e^{itx} f(x)$ für $f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ eine unitäre Darstellung ist, daß jedoch ρ als Abbildung von \mathbb{R} in den Raum der Operatoren auf unserem Hilbertraum mit seiner Operatornorm im allgemeinen nicht stetig ist: Ist μ das Lebesguemaß, so gilt sogar $s \neq t \Rightarrow \|\rho(t) - \rho(s)\| = 2$.

Übung 4.1.24. Man zeige unter der Annahme der Gültigkeit von 4.1.4: Betrachten wir zu einem Borelmaß μ auf \mathbb{R} den Raum $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ als unitäre Darstellung von \mathbb{R} wie in 4.1.23, so wird für $f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ das zugehörige Maß μ_f gegeben durch die Formel $\mu_f = |f|^2 \mu$.

Übung 4.1.25. Man zeige: Ein Vektor aus einer unitären Darstellung von \mathbb{R} ist differenzierbar im Sinne von 4.1.15 genau dann, wenn die Funktion x in Bezug auf sein Frequenzmaß quadratintegrierbar ist. Ist weiter $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung im Sinne von 4.1.8 zu solch einem Vektor v , so gilt

$$Sv = \varphi(ix)$$

4.2 Selbstadjungierte Operatoren

Proposition 4.2.1 (Hellinger-Toeplitz). *Jede lineare Abbildung von einem Hilbertraum in einen weiteren Hilbertraum, die eine Adjungierte besitzt, ist stetig.*

Beweis. Sei $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ unsere lineare Abbildung und $B : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ ihre Adjungierte, es gelte also $\langle Av, w \rangle = \langle v, Bw \rangle$ für alle $v \in \mathcal{H}$ und $w \in \mathcal{H}'$. Die schieflinaren Abbildungen

$$T_w : v \mapsto \langle Av, w \rangle$$

sind stetig, da sie auch als $v \mapsto \langle v, Bw \rangle$ geschrieben werden können. Die Werte der stetigen linearen Abbildungen T_w mit $\|w\| = 1$ sind auf jedem Vektor $v \in \mathcal{H}$ beschränkt durch $c(v) = \|A(v)\|$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 4.2.10, das wir gleich im Anschluß diskutieren, gibt es also C mit $\|T_w\| \leq C$ für alle w der Länge Eins alias mit

$$\langle Av, w \rangle \leq C\|v\|\|w\|$$

für alle $v \in \mathcal{H}$ und $w \in \mathcal{H}'$. Das wiederum zeigt $\|Av\|^2 \leq C\|v\|\|Av\|$ und damit $\|Av\| \leq C\|v\|$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Als auf dem Einheitsball beschränkte lineare Abbildung ist damit A stetig nach [AN2] ?? \square

4.2.2. Wir beginnen die anschließende Diskussion des „Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit“ mit einem etwas schwächeren, aber allgemeineren und anschaulicheren Lemma.

Lemma 4.2.3 (Prinzip der lokalen Beschränktheit). *Gegeben ein vollständiger nichtleerer metrischer Raum X und eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ stetiger reellwertiger Funktionen auf X , deren Werte an jedem Punkt nach oben beschränkt sind, gibt es eine nichtleere offene Teilmenge, auf der unsere Funktionen gleichmäßig nach oben beschränkt sind.*

Beweis. Unsere Annahme bedeutet $\sup\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty \forall x \in X$. Wir betrachten nun in X die abgeschlossenen Teilmengen

$$X_n := \{x \in X \mid f(x) \leq n \forall f \in \mathcal{F}\}$$

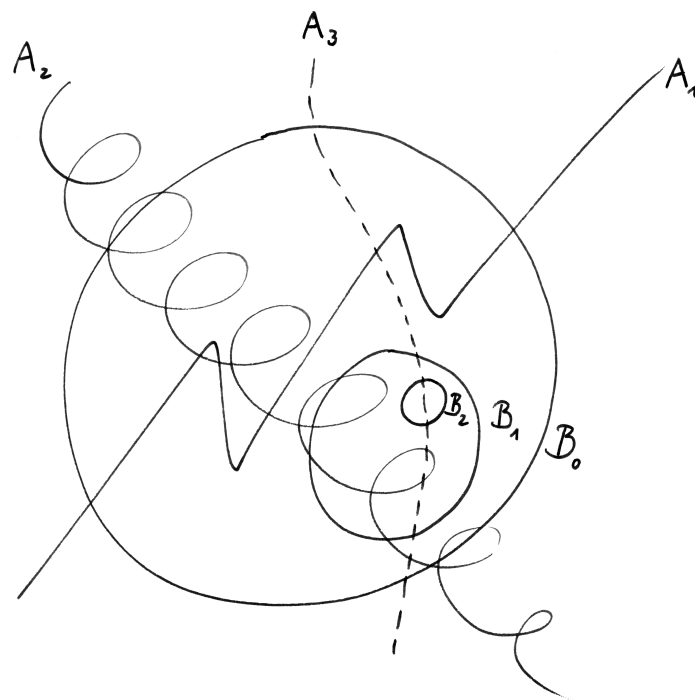
Nach Voraussetzung ist X die Vereinigung der abgeschlossenen Teilmengen X_n und nach dem Satz von Baire 4.2.5, den wir im Anschluß beweisen, besitzt folglich mindestens eines der X_n einen inneren Punkt. \square

Definition 4.2.4. Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Element $x \in A$ heißt ein **innerer Punkt von A** oder genauer ein **innerer Punkt von A in Bezug auf X** , wenn A eine Umgebung von x in X ist.

Satz 4.2.5 (Baire'scher Kategoriensatz). *In einem vollständigen metrischen Raum hat jede abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen ohne innere Punkte auch selbst keine inneren Punkte.*

4.2.6. Die Bezeichnung „Baire'scher Kategoriensatz“ kommt daher, daß Baire eine Teilmenge „von erster Kategorie“ nennt, wenn sie eine abzählbare Vereinigung ist von Mengen, deren Abschlüsse jeweils keinen inneren Punkt enthalten. Mit dieser Terminologie kann man den Satz umformulieren zu der Aussage, daß „in jedem vollständigen metrischen Raum eine Menge erster Kategorie keine inneren Punkte hat“.

Ergänzung 4.2.7. Der Baire'sche Kategoriensatz gilt mit fast demselben Beweis auch für jeden lokal kompakten Hausdorffraum. Statt der Vollständigkeit benutzt man beim Beweis dann [AN1] ??



Die Bild soll illustrieren, wie mit der Methode aus dem Beweis des Satzes von Baire 4.2.5 die Annahme, die Papierebene sei eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen ohne innere Punkte, zum Widerspruch geführt werden kann. Die abgeschlossenen Bälle B_i sollen hier die Kreisscheiben sein, von denen ich der besseren Übersichtlichkeit halber nur die Ränder eingezeichnet habe.

Beweis. Sei X unser vollständiger Raum und seien A_1, A_2, \dots abgeschlossene Teilmengen. Wir argumentieren durch Widerspruch. Unter einem Ball verstehen wir stets einen Ball mit positivem Radius. Hätte die Vereinigung $A = \bigcup A_i$ einen inneren Punkt, so enthielte sie einen abgeschlossenen Ball B_0 . Da A_1 keinen inneren Punkt hat, kann der zugehörige offene Ball nicht in A_1 enthalten sein, und es gibt folglich einen abgeschlossenen Ball $B_1 \subset B_0$ mit $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Wir dürfen dabei sogar annehmen, daß der Radius von B_1 kleiner als 1 ist. Da auch A_2 keinen inneren Punkt hat, gibt es weiter einen abgeschlossenen Ball $B_2 \subset B_1$ mit $B_2 \cap A_2 = \emptyset$ und wir dürfen sogar annehmen, daß der Radius von B_2 kleiner als $1/2$ ist. Indem wir immer so weitermachen, finden wir eine absteigende Folge von abgeschlossenen Bällen $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$, deren Radien gegen Null streben und deren Schnitt die Menge A nicht trifft. Wegen $A \supset B_0$ muß der Schnitt dann leer sein. Die Zentren unserer Bälle bilden jedoch eine Cauchy-Folge, und deren Grenzwert liegt notwendig im Schnitt aller unserer Bälle. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. \square

Definition 4.2.8. Wir nennen eine Menge von stetigen Operatoren zwischen normierten Vektorräumen **gleichmäßig beschränkt** oder lateinisierend **uniform beschränkt**, wenn die Menge ihrer Operatornormen eine reelle obere Schranke besitzt.

4.2.9. Es wird hierbei nicht vorausgesetzt, daß unsere Operatoren alle von demselben Raum ausgehen oder in demselben Raum landen. Wir denken also in Formeln an eine Menge von stetigen Operatoren $T_i : V_i \rightarrow W_i$.

Satz 4.2.10 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Eine Familie stetiger Operatoren von einem festen Banachraum in weitere normierte Vektorräume ist gleichmäßig beschränkt genau dann, wenn für jeden Vektor des Ausgangsraums die Normen seiner Bilder unter unseren Operatoren eine beschränkte Menge bilden.*

4.2.11. Dieses Resultat wird auch als **Satz von Banach-Steinhaus** zitiert. Eine alternative äquivalente Formulierung lautet: Eine Menge stetiger Operatoren von einem festen Banachraum in weitere normierte Vektorräume ist gleichmäßig beschränkt genau dann, wenn für jede Gerade in unserem Ausgangsraum die Menge der Restriktionen unserer Operatoren auf diese Gerade gleichmäßig beschränkt ist.

Beweis. Wir zeigen nur die nichttriviale Implikation. Sei V unser Ausgangsraum und \mathcal{T} unsere Menge von stetigen Operatoren. Es gilt also, die Implikation

$$\left(\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tv\| < \infty \quad \forall v \in V \right) \Rightarrow \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty$$

zu zeigen. Dazu betrachten wir in V die abgeschlossenen Teilmengen

$$V_n = \{v \in V \mid \|Tv\| \leq n \quad \forall T \in \mathcal{T}\}$$

Nach Voraussetzung ist V die Vereinigung aller V_n und nach dem Satz von Baire 4.2.5 besitzt folglich mindestens eines der V_n einen inneren Punkt. Natürlich gilt $V_n = nV_1$, also hat dann auch V_1 einen inneren Punkt und wegen $V_1 + V_1 \subset V_2$ ist damit der Ursprung ein innerer Punkt von V_2 . Folglich gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(0; \varepsilon) \subset V_2$ und das zeigt $\|v\| < \varepsilon \Rightarrow \|Tv\| \leq 2 \quad \forall T \in \mathcal{T}$ alias $\|T\| \leq 2/\varepsilon \quad \forall T \in \mathcal{T}$. \square

Ergänzung 4.2.12. Hier noch eine witzige wenn auch unwesentliche Anwendung. Es gibt ja eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die an allen irrationalen Stellen stetig ist und an allen rationalen Stellen unstetig, zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q}; \\ 1/q & x = p/q \text{ unkürzbarer Bruch mit } q \geq 1. \end{cases}$$

Es gibt jedoch keine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die an allen rationalen Stellen stetig ist und an allen irrationalen Stellen unstetig: Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nämlich

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt eine Umgebung } V \text{ von } x \text{ mit} \\ |f(y) - f(z)| \leq 1/n \quad \forall y, z \in V \end{array} \right\}$$

offen in \mathbb{R} , und $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ ist genau die Menge der Stetigkeitsstellen von f . Also sind die Komplemente $A_n = \mathbb{R} \setminus U_n$ abgeschlossen und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist die Menge der Unstetigkeitsstellen. Wäre diese Vereinigung $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so wäre die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ ganz \mathbb{R} und nach dem Baire'schen Kategoriensatz 4.2.5 müßte dann ein A_n oder ein $\{q\}$ einen inneren Punkt haben, im Widerspruch zu $A_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.2.13. Ist μ ein kompakt getragenes Borelmaß auf \mathbb{R} und T die Multiplikation $(x \cdot) : L^2(\mathbb{R}; \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ mit der Identität auf \mathbb{R} , so ist T selbstadjungiert.

Satz 4.2.14 (Lokale Struktur selbstadjungierter Operatoren). *Ist \mathcal{H} ein Hilbertraum, $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor, so gibt es genau ein Paar $(\mu, \varphi) = (\mu_v, \varphi_v)$ bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß μ auf \mathbb{R} und einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi(1) = v$ und $\varphi(xf) = T(\varphi(f)) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$.*

4.2.15. Der Beweis wird im Anschluß an 4.5.8 gegeben. Wir stellen die Aussage dieses Satzes graphisch dar im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ (x \cdot) \downarrow & & \downarrow T \\ L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ 1 & \mapsto & v \end{array}$$

Hier meint $1 \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ die konstante Funktion Eins und $(x \cdot)$ das Multiplizieren mit der Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$. Ich nenne φ_v im folgenden die **kanonische Einbettung zu v** und μ_v das **Spektralmaß von v** .

4.2.16. In der Quantenmechanik modelliert man ein „physikalisches System“ als einen Hilbertraum, einen „Zustand“ des Systems als einen von Null verschiedenen Vektor und die Messung eines reellen Parameters als einen möglicherweise unbeschränkten selbstadjungierten Operator mit der Maßgabe, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Meßergebnis bei einem gegebenen Zustand gerade das auf Gesamtmasse Eins normierte Spektralmaß unseres Zustands sein soll. Den Fall unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren besprechen wir allerdings erst in 4.12.5. Messungen mit Werten in allgemeineren Meßräumen werden modelliert als Teilungen Φ der Identität im Sinne von 4.7.4 und die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Meßergebnis bei einem gegebenen Zustand v ist dann das auf Gesamtmasse Eins normierte Maß $\langle v, \Phi v \rangle$.

Beispiel 4.2.17 (Spektralmaß im endlichdimensionalen Fall). Gegeben ein endlichdimensionaler Hilbertraum \mathcal{H} mit einem selbstadjungierten Operator T und ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ können wir sein Spektralmaß $\mu = \mu_v$ und die kanonische Einbettung $\varphi = \varphi_v$ nach 4.2.14 wie folgt erhalten: Wir schreiben $v = v_1 + \dots + v_n$ als Summe von paarweise orthogonalen Eigenvektoren zu Eigenwerten x_1, \dots, x_n und nehmen als Spektralmaß von v das Maß

$$\mu = \|v_1\|^2 \delta_{x_1} + \dots + \|v_n\|^2 \delta_{x_n}$$

und als Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die Abbildung $\varphi : f \mapsto \sum f(x_\nu) v_\nu$. Der Nachweis, daß das in diesem Fall auch das einzige mögliche derartige Paar ist, sei dem Leser zur Übung überlassen. Hinweis: Nach 2.3.24 kann unser Raum von quadratintegrierbaren Funktionen nur endlichdimensional sein, wenn das Maß μ eine endliche Linearkombination von Diracmaßen ist.

4.2.18. Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **offen**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

Satz* 4.2.19 (Satz vom offenen Bild). *Jede stetige surjektive lineare Abbildung von Banachräumen ist offen. Gegeben eine stetige bijektive lineare Abbildung von Banachräumen ist insbesondere auch die Umkehrabbildungen stetig.*

Beweis. Sei $f : V \rightarrow W$ unsere surjektive lineare Abbildung und $A \subset V$ der abgeschlossene Einheitsball. Sicher gilt

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{f(nA)}$$

Nach dem Baire'schen Kategoriensatz 4.2.5 muß dann ein $\overline{f(nA)}$ und damit auch $\overline{f(A)}$ selber mindestens einen inneren Punkt besitzen. Da $f(A)$ konvex ist und stabil unter der Multiplikation mit (-1) , folgt leicht, daß auch der Nullpunkt ein innerer Punkt von $\overline{f(A)}$ sein muß. Sei also $U \Subset W$ ein offener Ball um den Ursprung mit $U \subset \overline{f(A)}$. Offensichtlich gilt

$$\overline{f(A)} \subset f(A) + \frac{1}{2}U$$

Wegen $U \subset \overline{f(A)}$ finden wir für jedes $w \in \overline{f(A)}$ induktiv eine Folge von Elementen $w_n \in f(A)$ mit $w = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}w_n$ im Sinne der Konvergenz der Partialsummen. Wählen wir nun Urbilder $v_n \in A$ unserer w_n , so gilt offensichtlich $v = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}v_n \in 2A$ und $f(v) = w$. Es folgt $f(2A) \supset \overline{f(A)} \supset U$, mithin umfaßt $f(2A)$ eine offene Umgebung des Ursprungs. Daß dann f eine offene Abbildung sein muß, folgt ohne weitere Schwierigkeiten. \square

Satz* 4.2.20 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Eine lineare Abbildung von Banachräumen ist genau dann stetig, wenn ihr Graph abgeschlossen ist.*

Beweis. Ganz allgemein hat jede stetige Abbildung von metrischen Räumen nach Übung [AN2] ?? einen abgeschlossenen Graphen. Ist umgekehrt $f : V \rightarrow W$ unsere lineare Abbildung und ist $\Gamma(f) \subset V \times W$ abgeschlossen, so ist $\Gamma(f)$ selbst ein Banachraum mit der von der Produktnorm induzierten Norm und die Projektionen auf beide Faktoren sind stetig. Die Projektion auf den ersten Faktor ist aber sogar eine Bijektion $\Gamma(f) \xrightarrow{\sim} V$ und hat damit nach 4.2.19 eine stetige Umkehrung. So erhalten wir f als Verknüpfung stetiger Abbildungen $V \xrightarrow{\sim} \Gamma(f) \rightarrow W$. \square

Übungen

Übung 4.2.21. In einem vollständigen metrischen Raum ist der Schnitt einer abzählbaren Familie offener dichter Teilmengen zumindest noch dicht.

4.3 Spektren in Banach-Ringalgebren

Definition 4.3.1. Eine **Banach-Ringalgebra** ist ein Banachraum A mit einer stetigen bilinearen Verknüpfung $A \times A \rightarrow A$, die A zu einem Ring macht.

4.3.2. Wird nicht explizit das Gegenteil gesagt, nehmen wir \mathbb{C} als Grundkörper an. Meinen wir ausnahmsweise den Grundkörper \mathbb{R} , so sprechen wir von einer **reellen Banachringalgebra**. Wir verwenden in Formeln oft die Abkürzung $\lambda 1_A = \lambda$ für λ aus dem jeweiligen Grundkörper. In der Literatur wird diese Struktur meist als **Banach-Algebra** bezeichnet.

4.3.3 (**Kanonische Norm**). Auf jeder Banachringalgebra A erhält man eine Norm $\| \cdot \|$, die **kanonische Norm**, indem man den durch Multiplikation gegebenen Ringhomomorphismus $A \hookrightarrow \mathcal{B}(A)$, $a \mapsto (a \cdot)$ betrachtet und die Einschränkung der Operatornorm bezüglich der Ursprungsnorm $\| \cdot \|_u$ nimmt. Die kanonische Norm ist äquivalent zur Ursprungsnorm, denn es gilt $\|a\| \leq \|a\|_u \leq \|a\| \|1_A\|_u$. Weiter haben wir für die kanonische Norm offensichtlich $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ und $\|1_A\| \leq 1$ mit $\|1_A\| = 1$ falls $A \neq 0$.

4.3.4. Ist A eine Banachringalgebra und gelten für ihr Ursprungsnorm $\| \cdot \|_u$ die Abschätzungen $\|1_A\|_u \leq 1$ und $\|ab\|_u \leq \|a\|_u \|b\|_u$ für alle $a, b \in A$, so ist $\| \cdot \|_u$ offensichtlich bereits die kanonische Norm. Wenn nichts anderes explizit gesagt ist, nehmen wir meist implizit an, daß eine Banachringalgebra bereits mit ihrer kanonischen Norm versehen ist.

Beispiel 4.3.5. Alle stetigen linearen Selbstabbildungen eines vorgegebenen Banachraums bilden mit der Operatornorm eine Banachringalgebra, vergleiche [AN1] ?? und [AN1] ??, und diese Norm ist auch bereits ihre kanonische Norm.

Definition 4.3.6. Das **Spektrum** eines Elements x einer Banachringalgebra A ist die Menge

$$\sigma(x) = \sigma_A(x) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - x) \text{ ist nicht invertierbar in } A \}$$

Reden wir vom Spektrum eines Operators auf einem Banachraum alias einer stetigen linearen Abbildung $T : E \rightarrow E$ von besagtem Banachraum in sich selbst, so meinen wir sein Spektrum in Bezug auf die Banachringalgebra aller stetigen linearen Selbstabbildungen unseres Banachraums als da heißt die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $(T - \lambda \text{id}) : E \rightarrow E$ nicht stetig invertierbar ist.

Beispiel 4.3.7. Jede Norm auf \mathbb{C}^n liefert eine Operatornorm auf dem Matrizenring $\text{Mat}(n; \mathbb{C})$, der diesen Ring zu einer Banachringalgebra macht. Das Spektrum einer Matrix ist in diesem Fall genau die Menge ihrer Eigenwerte.

Ergänzung 4.3.8. In 4.4.4 zeigen wir, daß im Komplexen das Spektrum eines Elements einer von Null verschiedenen Banachringalgebra nie leer sein kann.

Ergänzung 4.3.9. Das Spektrum des Schrödinger-Operators, der ein quantenmechanisches Elektron im elektrischen Potential eines Protons beschreibt, besitzt viele isolierte Punkte. Sie entsprechen genau den Frequenzen, in die das Licht eines angeregten Wasserstoffgases beim Durchgang durch ein Prisma zerfällt. Unter diesem Blickwinkel ist die von Hilbert gewählte Bezeichnung als „Spektrum“ besonders passend.

Proposition 4.3.10 (Spektrum eines Multiplikationsoperators). Gegeben ein Maßraum (X, μ) und darauf eine L^∞ -Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ im Sinne von 2.3.5

und $p \in [0, \infty]$ ist der durch Multiplikation mit unserer Funktion erklärte Operator

$$(f \cdot) : L^p(X; \mu) \rightarrow L^p(X; \mu)$$

stetig. Ist unser Maßraum σ -endlich, so ist weiter die Operatornorm unseres Multiplikationsoperators das essentielle Supremum $\|f\|_\infty$ von f aus ?? und sein Spektrum ist die Menge

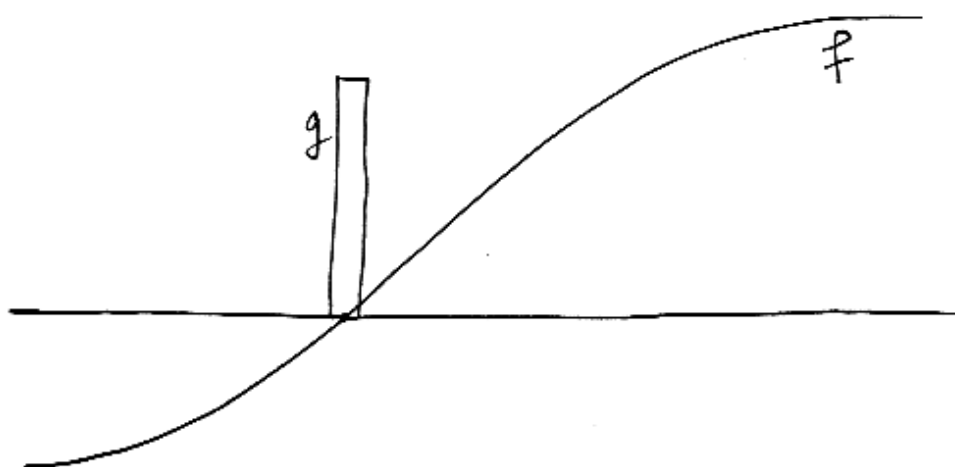
$$\sigma(f \cdot) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu(f^{-1}(U)) > 0 \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } \lambda\}$$

Beweis. Hat f einen Repräsentanten mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in X$, so folgt $|f(x)g(x)| \leq C|g(x)|$ für alle $x \in X$. Diese Ungleichung bleibt erhalten beim Potenzieren mit p , Integrieren über X und Ziehen der p -ten Wurzel. Das zeigt $\|(f \cdot)\| \leq \|f\|_\infty$ für $p < \infty$. Ist andererseits $0 < a < \|f\|_\infty$, so gibt es $A \subset X$ meßbar von positivem Maß mit $|f(x)| \geq a \forall x \in A$. Ist X sogar σ -endlich, so können wir zusätzlich sogar $\mu(A)$ endlich annehmen. Dann liegt die charakteristische Funktion $[A]$ in $L^p(X; \mu)$ und ist dort nicht Null, und wir erkennen unschwer, daß gilt $\|f \cdot [A]\| \geq a\|[A]\|$. Es folgt umgekehrt $\|(f \cdot)\| \geq a$ und damit $\|(f \cdot)\| \geq \|f\|_\infty$. Damit ist die erste Aussage gezeigt im Fall $p < \infty$. Der Fall $p = \infty$ bleibe dem Leser überlassen. Für die Beschreibung des Spektrums reicht es, indem wir f durch $f - \lambda$ ersetzen, den Fall $\lambda = 0$ zu betrachten. Gibt es für $\lambda = 0$ eine Umgebung U mit $\mu(f^{-1}(U)) = 0$, so können wir für unsere fast überall definierte Funktion f auch einen Repräsentanten f wählen, der keine Werte in U annimmt, und dann ist f^{-1} beschränkt und der zugehörige Multiplikationsoperator stetig und invers zu $(f \cdot)$. Also gehört in diesem Fall $\lambda = 0$ nicht zum Spektrum. Gibt es dahingegen für $\lambda = 0$ keine Umgebung U mit $\mu(f^{-1}(U)) = 0$, so finden wir in jeder ε -Umgebung eine Teilmenge A_ε endlichen positiven Maßes, und deren charakteristische Funktion $[A_\varepsilon]$ ist ein von Null verschiedener Vektor in $L^p(X; \mu)$ mit der Eigenschaft $\|f[A_\varepsilon]\|_p \leq \varepsilon\|[A_\varepsilon]\|_p$. Da also unser Multiplikationsoperator von Null verschiedene Vektoren um beliebig große Faktoren verkürzt, kann er unmöglich eine stetige Umkehrung besitzen: Selbst wenn er bijektiv wäre, müßte seine Umkehrabbildung von Null verschiedene Vektoren um beliebig große Faktoren verlängern und wäre mithin nie und nimmer stetig. \square

Lemma 4.3.11. Gegeben eine Banachringalgebra A ist für jedes Element $x \in A$ einer kanonischen Norm $\|x\| < 1$ die Differenz $(1 - x)$ invertierbar in A .

Beweis. Die absolut konvergente Reihe $1 + x + x^2 + \dots$ liefert nach [AN1] ?? ein Inverses. \square

Lemma 4.3.12. Die invertierbaren Elemente einer Banachringalgebra bilden eine offene Teilmenge $A^\times \subset A$.



Eine beschränkte stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine meßbare Funktion alias ein Vektor $g \in L^p(\mathbb{R}; \lambda)$, der vom Multiplikationsoperator $(f \cdot)$ sehr viel kürzer gemacht wird. Indem wir eine geeignete Folge derartiger Vektoren g_n nehmen, die alle dieselbe Norm haben aber immer kleineren Träger, erkennen wir, daß der Multiplikationsoperator $(f \cdot)$ nicht stetig invertierbar sein kann, als da heißt, daß sein Spektrum den Nullpunkt enthält.

Beweis. Nach 4.3.11 besitzt das Einselement eine Umgebung aus invertierbaren Elementen. Andererseits ist die Multiplikation mit jeder Einheit ein Homöomorphismus von A auf sich selbst, der Einheiten zu Einheiten macht. Das Lemma folgt. \square

Lemma 4.3.13. *Das Spektrum eines Elements einer Banachringalgebra ist stets eine kompakte Teilmenge der komplexen Zahlenebene und ist enthalten in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit der kanonischen Norm unseres Elements als Radius.*

Beweis. Das Spektrum ist abgeschlossen, da sein Komplement offen ist nach 4.3.12. Es ist beschränkt, da für $|\lambda| > \|x\|$ die Differenz $\lambda - x = \lambda(1 - \lambda^{-1}x)$ stets invertierbar ist nach 4.3.11, und dies Argument liefert auch gleichzeitig die behauptete Schranke. \square

4.3.14. Der **Spektralradius** eines Elements x einer Banachringalgebra A ist definiert als

$$\rho(x) = \rho_A(x) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(x)\}$$

Ist das Spektrum leer, so erhalten wir folglich $-\infty$ als Spektralradius. Wir zeigen in 4.4.4, daß dieser Fall nur bei der Banachringalgebra $A = 0$ auftritt. Das vorhergehende Lemma 4.3.13 liefert die Abschätzung $\rho(x) \leq \|x\|$ für $\|x\|$ die kanonische Norm. Das Beispiel einer von Null verschiedenen nilpotenten Matrix zeigt, daß hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Lemma 4.3.15 (Polynomialer spektraler Abbildungssatz). *Gegeben ein Element x einer Banachringalgebra A und ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ ist das Spektrum des Bildes von x unter P das Bild des Spektrums von x unter P , in Formeln*

$$\sigma_A(P(x)) = P(\sigma_A(x))$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei P nicht das Nullpolynom. Gegeben $\lambda \in \mathbb{C}$ schreiben wir $P(X) - \lambda$ als Produkt von Linearfaktoren $P(X) - \lambda = \gamma(X - \mu_1) \dots (X - \mu_r)$. Dann sind die μ_i genau die Stellen, an denen unser Polynom den Wert λ annimmt, in Formeln $P^{-1}(\lambda) = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$. Setzen wir nun x ein, so folgt $P(x) - \lambda = \gamma(x - \mu_1) \dots (x - \mu_r)$. Hier ist nun die linke Seite nicht invertierbar alias $\lambda \in \sigma_A(P(x))$ genau dann, wenn einer der Faktoren auf der rechten Seite nicht invertierbar ist, wenn also $\mu \in \sigma_A(x)$ existiert mit $P(\mu) = \lambda$. \square

Übungen

Übung 4.3.16. Gegeben eine beschränkte stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zeige man, daß das Spektrum des durch Multiplikation mit f erklärten Operators auf

$L^p(\mathbb{R}; dx)$ genau der Abschluß des Bildes $\overline{f(\mathbb{R})}$ ist. Was ist die Operatornorm dieses Operators? Hinweis: 4.3.10.

Übung 4.3.17. Man zeige, daß für $a \in \mathbb{R}$ der durch $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$ gegebene Verschiebungsoperator $\tau_a : L^2(\mathbb{R}; dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; dx)$ als Spektrum die Einheitskreislinie hat im Fall $a \neq 0$ und die einpunktige Menge $\{1\}$ im Fall $a = 0$. Hinweis: 3.1.13 und 4.3.16.

Übung 4.3.18. Man gebe einen Operator mit Spektrum $\{0\} \cup [1, 2]$ an.

Übung 4.3.19. Versetzen wir \mathbb{N} mit dem Zählmaß und betrachten den Operator T auf $L^2(\mathbb{N})$ mit $(Tf)(n) = f(n + 1)$, so gehört die Null zum Spektrum von T , ist aber kein Eigenwert von T . Genauer zeige man, daß das Spektrum von T genau die abgeschlossene Einheitskreisscheibe ist. Andererseits zeige man, etwa mit Fouriertheorie, daß das Spektrum des in derselben Weise auf $L^2(\mathbb{Z})$ erklärten Operators der Einheitskreis ist. Anders als im endlichdimensionalen Fall kann das Spektrum eines Operator also größer werden, wenn wir ihn auf einen unter unserem Operator stabilen Teilraum einschränken.

Übung 4.3.20. Man zeige: Ist x ein invertierbares Element einer Banachringalgebra, so gilt $\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(x)\}$. Hinweis: $(x - \lambda)(\lambda x)^{-1} = (\lambda^{-1} - x^{-1})$.

Übung 4.3.21. Für jeden unitären Automorphismus x eines Hilbertraums \mathcal{H} ist das Spektrum von x als Element der Banachringalgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ enthalten in der Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}$. Hinweis: Aus 4.3.11 folgt leicht, daß besagtes Spektrum in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe enthalten sein muß. Dann beachte man, daß dasselbe für das Spektrum von x^{-1} gelten muß und wende 4.3.20 an.

4.4 Weitere Eigenschaften des Spektrums*

4.4.1. Mit Funktionentheorie vertraute Leser können auch noch einige weitere fundamentale Eigenschaften des Spektrums unschwer einsehen. Sie werden jedoch im weiteren Verlauf dieser Vorlesung nicht benötigt.

4.4.2 (**Funktionentheorie für banachwertige Funktionen**). Große Teile der Funktionentheorie lassen sich ohne wesentliche Änderungen auf Funktionen auf offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene mit Werten in komplexen Banachräumen verallgemeinern. Die komplex differenzierbaren Funktionen nennen wir wieder **holomorph**. Für stetige banachwertige Funktionen erklären wir Wegintegrale durch die übliche Formel [FT1] 3.1.1 mithilfe unseres banachwertigen Integrals [AN2] ?? . Mutatis mutandis zeigt man auch für holomorphe banachwertige Funktionen den Integralsatz von Cauchy [FT1] 3.3.1, die Integralformel von Cauchy [FT1] 4.1.1, den Satz von Liouville [FT1] 4.1.6, sowie die Sätze über die Potenzreihenentwicklung [FT1] 4.2.8 und Laurententwicklung [FT1] 5.1.11, bei denen dann eben die Koeffizienten Vektoren unseres Banachraums werden.

Vielfach heißen unsere holomorphen Banachwertigen Funktionen auch **analytisch** oder genauer **komplex-analytisch**, da sie sich eben lokal in Potenzreihen entwickeln lassen. Umgekehrt liefern auch alle Potenzreihen auf ihren Konvergenzbe- reich holomorphe Funktionen.

Beispiel 4.4.3. Sei A eine komplexe Banachringalgebra und $x \in A$ ein Element. So ist die Abbildung $\mathbb{C} \setminus \sigma(A) \rightarrow A$ gegeben durch $\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ holomorph. Halten wir in der Tat ein λ fest und setzen $a := \lambda - x$, so gilt

$$(a - z)^{-1} = (a(1 - a^{-1}z))^{-1} = a^{-1}(1 + a^{-1}z + a^{-2}z^2 + \dots)$$

für $|z| < \|a^{-1}\|^{-1}$ und das ist eine Entwicklung in eine Potenzreihe.

Satz 4.4.4 (Operatornorm und Spektralradius). *In einer von Null verschiedenen komplexen Banachringalgebra A hat jedes Element $x \in A$ nichtleeres Spektrum und sein Spektralradius kann durch die kanonischen Normen seiner Potenzen ausgedrückt werden als*

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

Beweis. Für alle $n \geq 1$ gilt $\rho(x)^n = \rho(x^n) \leq \|x^n\|$ nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz 4.3.15 und der allgemeinen Abschätzung 4.3.14, also $\rho(x) \leq \sqrt[n]{\|x^n\|}$ für alle $n \geq 1$. Andererseits ist $\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ nach 4.4.3 eine holomorphe A -wertige Funktion $\mathbb{C} \setminus \sigma(x) \rightarrow A$. Diese Funktion läßt sich sogar holomorph „durch Null nach ∞ fortsetzen“. Konkreter und in Formeln läßt sich die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times \setminus \{\mu \mid \mu^{-1} \in \sigma(x)\} & \rightarrow & A \\ \mu & \mapsto & (\mu^{-1} - x)^{-1} \end{array}$$

holomorph auf den Ursprung fortsetzen, indem man $\mu = 0$ die Null aus A zu- ordnet: Für hinreichend kleines μ , genauer $|\mu| \cdot \|x\| < 1$ wird diese Abbildung nämlich dargestellt durch die Potenzreihe

$$\begin{aligned} (\mu^{-1} - x)^{-1} &= \mu(1 - \mu x)^{-1} \\ &= \mu + \mu^2 x + \mu^3 x^2 + \mu^4 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Da diese Potenzreihe auf jeder Kreisscheibe um den Ursprung konvergieren muß, auf der unsere Funktion holomorph ist, ist für alle $\lambda > \rho(x)$ die Folge $\lambda^{-n} \|x^n\|$ beschränkt und wir folgern $\lambda \geq \sqrt[n]{\|x^n\|}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt die noch fehlende Abschätzung. Daß das Spektrum nicht leer ist, folgt mit der Banachwertigen Variante des Satzes von Liouville: Da $(\lambda - x)^{-1}$ beschränkt ist, muß diese Funktion, wenn sie denn für alle λ definiert ist, bereits konstant sein. Eine Kon- stante hat aber unter der Annahme $A \neq 0$ stets nichtleeres Spektrum. \square

Übungen

Übung 4.4.5. Gegeben ein Banachraum V und ein abgeschlossener Teilraum $N \triangleleft V$ wird V/N ein Banachraum mit der **Quotientennorm**

$$\|v + N\| := \inf\{\|v + n\| \mid n \in N\}$$

Gegeben eine Banachringalgebra A und ein abgeschlossenes Ideal $I \triangleleft A$ ist auch A/I mit der Quotientennorm eine Banachringalgebra.

Übung 4.4.6. Jedes maximale Ideal einer Banachringalgebra ist abgeschlossen. Hinweis: Die Einheitengruppe einer Banachringalgebra ist offen.

Übung 4.4.7 (Gelfand-Mazur). Ist eine Banachringalgebra ein Schiefkörper, so ist die Einbettung von \mathbb{C} ein Isomorphismus. Hinweis: Jedes Element hat nichtleeres Spektrum. Insbesondere induziert für den Quotienten einer Banachringalgebra nach einem maximalen Ideal stets die Einbettung von \mathbb{C} einen Isomorphismus mit \mathbb{C} .

Übung 4.4.8. Sei A eine Banachringalgebra und $a \in A$ ein Element. Genau dann gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ zu Spektrum von a , wenn es einen Ringalgebrenhomomorphismus $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $\varphi(a) = \lambda$. Hinweis: Man konstruiert φ , indem man ein maximales Ideal \mathfrak{m} über $(a - \lambda 1)$ wählt, das nach 4.4.6 abgeschlossen sein muß, und dann folgert, daß nach Gelfand-Mazur 4.4.7 die offensichtlich Einbettung ein Isomorphismus $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ sein muß.

4.5 Spektren selbstadjungierter Operatoren

Proposition 4.5.1 (Spektralradius und Operatornorm). Für jeden selbstadjungierten Operator T auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum stimmen Spektralradius und Operatornorm überein, in Formeln

$$\rho(T) = \|T\|$$

4.5.2. Unsere Formel zeigt zumindest für jeden selbstadjungierten Operator auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum, daß sein Spektrum nicht leer sein kann. Später werden wir unsere Formel allgemeiner für „normale“ Operatoren zeigen.

Beweis. Sei $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unser Operator. Gegeben ein Vektor v der Länge Eins gilt $\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^2v \rangle \leq \|v\| \|T^2v\| = \|T^2v\|$. Das zeigt $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$. Die andere Ungleichung gilt eh, womit wir für jeden selbstadjungierten Operator T folgern

$$\|T\|^2 = \|T^2\|$$

Da unser Raum \mathcal{H} nicht Null ist, finden wir in \mathcal{H} eine Folge von Einheitsvektoren v_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^2 v_n\| = \|T^2\|$. Wegen $\|T^2 v_n\| \leq \|T\| \|T v_n\| \leq \|T\|^2 = \|T^2\|$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T v_n\| = \|T\|$ zumindest falls $\|T\| \neq 0$, und im Fall $\|T\| = 0$ ist das eh klar. Wir setzen nun $c = \|T\|$ und behaupten, daß c^2 zum Spektrum von T^2 gehört. In der Tat gilt ja

$$\|(T^2 - c^2)v_n\|^2 = \langle v_n, (T^4 - 2c^2 T^2 + c^4)v_n \rangle = \|T^2 v_n\|^2 - 2c^2 \|T v_n\|^2 + c^4$$

und das strebt für $n \rightarrow \infty$ offensichtlich gegen Null. Damit haben wir per definitionem $c^2 \in \sigma(T^2)$ und es folgt $\|T^2\| \leq \rho(T^2)$ und, da wir die andere Abschätzung nach 4.3.14 bereits kennen, $\|T^2\| = \rho(T^2)$. Der spektrale Abbildungssatz 4.3.15 zeigt jedoch $\rho(T^2) = \rho(T)^2$ und wegen $\|T^2\| = \|T\|^2$ folgt die Behauptung. \square

Proposition 4.5.3 (Spektren selbstadjungierter Operatoren). *Jeder selbstadjungierte Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} hat ein rein reelles Spektrum, in Formeln $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Ist T selbstadjungiert, so gilt $\langle v, Tv \rangle = \langle Tv, v \rangle = \overline{\langle v, Tv \rangle}$ für alle $v \in \mathcal{H}$, mithin ist $\langle v, Tv \rangle$ stets reell. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ erhalten wir so wegen der offensichtlichen Abschätzung $|\operatorname{Im} z| \leq |z| \ \forall z \in \mathbb{C}$ von der Mitte ausgehend die Ungleichungen

$$|\operatorname{Im} \lambda| \|v\|^2 \leq |\langle (T - \lambda)v, v \rangle| \leq \|(T - \lambda)v\| \|v\|$$

und damit $|\operatorname{Im} \lambda| \|v\| \leq \|(T - \lambda)v\|$. Unter der Annahme $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist demnach die Abbildung $(T - \lambda)$ injektiv und nach 4.5.5 hat sie sogar abgeschlossenes Bild und ihre auf diesem Bild definierte Umkehrabbildung ist stetig. Andererseits ist mit demselben Argument auch $(T - \lambda)^* = (T - \bar{\lambda})$ injektiv und damit hat $(T - \lambda)$ nach 2.8.12 dichtes Bild. Zusammen folgt, daß $(T - \lambda)$ invertierbar sein muß, so daß λ nicht zum Spektrum von T gehören kann. \square

Lemma 4.5.4. *Eine stetige lineare Abbildung von einem Banachraum in einen normierten Vektorraum, die keinen Vektor verkürzt, hat abgeschlossenes Bild und ihre auf diesem Bild definierte Umkehrabbildung ist stetig.*

4.5.5. Dieselbe Aussage folgt offensichtlich auch, wenn es eine positive reelle Zahl gibt derart, daß unsere Abbildung jeden Vektor höchstens um diesen Faktor verkürzt.

Beweis. Ist allgemeiner $f : V \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung von einem Banachraum in einen normierten Vektorraum und existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\|f(v)\| \geq c\|v\| \ \forall v \in V$, so ist das Bild von f abgeschlossen, denn jede konvergente Folge $f(v_0), f(v_1), \dots$ im Bild $f(V)$ ist Cauchy, also ist auch v_0, v_1, \dots Cauchy in V und konvergiert gegen ein $v \in V$, und dann muß $f(v)$ der Grenzwert der $f(v_i)$ sein, der damit auch in $f(V)$ liegt. \square

Lemma 4.5.6 (Anwenden stetiger Funktionen auf Operatoren). Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} gibt es genau einen stetigen \mathbb{C} -linearen Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\sigma(T)) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto f(T) \end{aligned}$$

vom Ring aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Spektrum von T in den Ring aller beschränkten Operatoren unseres Hilbertraums, der die Einbettung $\sigma(T) \hookrightarrow \mathbb{R}$ auf den Operator T wirft, und dieser Ringhomomorphismus wirft konjugierte Funktionen auf adjungierte Operatoren, in Formeln $\bar{f}(T) = f(T)^*$.

4.5.7. Die Stetigkeit ist hier gemeint in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$ und die Operatornorm auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Schreiben wir im folgenden $f(T)$ für eine stetige auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion, so meinen wir, daß der Operator T im Sinne des vorhergehenden Lemmas in ihre Einschränkung $f|_{\sigma(T)}$ eingesetzt werden soll. Ich habe dieser Aussage nur den Status eines Lemmas gegeben, da sie sich als eine direkte Konsequenz aus dem Spektralsatz 4.7.8 ergeben wird und unter diesem Blickwinkel nur ein Schritt zum Beweis dieses zentralen Resultats ist.

Beweis. Der Teilring $\mathbb{C}[t] \subset \mathcal{C}(\sigma(T))$ aller Einschränkungen von Polynomfunktionen liegt nach Weierstraß [AN1] ?? dicht im Raum aller stetigen Funktionen bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Gegeben ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ haben wir nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$, und hat P reelle Koeffizienten, so ist auch $P(T)$ selbstadjungiert und es folgt $\|P(T)\| = \|P|_{\sigma(T)}\|_\infty$ wegen der Gleichheit von Norm und Spektralradius bei selbstadjungierten Operatoren 4.5.1 auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum. Ist P komplex, so können wir immer noch $P = A + iB$ schreiben mit reellen Polynomen A, B und folgern

$$\|P(T)\| \leq \|A(T)\| + \|B(T)\| \leq \|A|_{\sigma(T)}\|_\infty + \|B|_{\sigma(T)}\|_\infty \leq 2\|P|_{\sigma(T)}\|_\infty$$

Der offensichtliche Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P \mapsto P(T)$ faktorisiert also über einen stetigen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[t] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, und dessen eindeutig bestimmte stetige Ausdehnung auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$ nach 2.4.17 ist die gesuchte Abbildung und ist wieder ein Ringhomomorphismus aufgrund der Stetigkeit der Multiplikationen. Ist $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, so ist $P(T)$ offensichtlich adjungiert zu $\bar{P}(T)$. Im allgemeinen ist $f(T)$ Grenzwert in Bezug auf die Operatornorm gewisser $P(T)$ und die Behauptung $\bar{f}(T) = f(T)^*$ folgt ohne weitere Schwierigkeiten. \square

Proposition 4.5.8 (Spektraler Abbildungssatz). *Ist T ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so hat $f(T)$ das Spektrum*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

Beweis. Gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ nicht zum Bild von f , so ist $f - \lambda$ invertierbar in $\mathcal{C}(\sigma(T))$ und damit $f(T) - \lambda \text{id}$ invertierbar in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und wir haben $\lambda \notin \sigma(f(T))$. Das zeigt von der behaupteten Gleichheit die Inklusion \subset . Gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ zum Bild von f , sagen wir $\lambda = f(x)$ für $x \in \sigma(T)$, so ist f der gleichmäßige Grenzwert einer Folge P_0, P_1, \dots von Polynomen mit $P_n(x) = \lambda$. Also ist $P_n(T) - \lambda \text{id}$ nicht invertierbar für alle n und damit auch $f(T) - \lambda \text{id}$ nicht invertierbar nach 4.3.12. Das zeigt die andere Inklusion \supset . \square

Beweis von 4.2.14. Gegeben ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ betrachten wir die \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto \langle v, f(T)v \rangle \end{aligned}$$

Um den Riesz'schen Darstellungssatz 4.6.2 anwenden zu können, gilt es zu zeigen, daß unter dieser Abbildung nichtnegative reelle Funktionen nichtnegative reelle Zahlen liefern. Das ist aber klar, da jede nichtnegative reelle Funktion ein Quadrat ist, so daß wir haben $\langle v, f(T)v \rangle = \|\sqrt{f}(T)v\|^2$. Es gibt nach dem Darstellungssatz von Riesz 4.6.2 also ein und sogar genau ein Borelmaß μ auf \mathbb{R} mit

$$\int f(t) \mu(t) = \langle v, f(T)v \rangle$$

für alle stetigen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Für dieses Maß μ hat die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}_1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{H} \\ f &\mapsto f(T)v \end{aligned}$$

dann die Eigenschaft $\|\varphi(f)\|^2 = \int |f|^2 \mu$. Damit faktorisiert sie erstens über das Bild der offensichtlichen Abbildung $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ und läßt sich nach 2.4.12 zweitens von diesem Bild zu einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ erweitern und wir haben ein mögliches Paar (μ, φ) gefunden. Um zu sehen, daß es auch das einzig mögliche Paar ist, müssen wir nur im Beweis einige Schritte rückwärts gehen: Gegeben ein Paar (μ, φ) haben wir ja für jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ offensichtlich $\varphi(P) = P(T)v$ und folglich $\int P \mu = \langle v, P(T)v \rangle$. Ein kompakt getragenes Borelmaß auf \mathbb{R} wird jedoch nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 4.6.2 und dem Approximationssatz von Weierstraß [AN2] 7.2.9 durch die Kenntnis der Integrale aller Polynome nach diesem Maß bereits eindeutig festgelegt. \square

4.5.9. Wir können nun den Satz über die lokale Struktur unitärer Darstellungen der reellen Zahlengeraden 4.1.4 zeigen im Fall, daß alle Vektoren unserer Darstellung (\mathcal{H}, ρ) differenzierbar sind. In der Tat ist dann der infinitesimale Erzeuger S unserer Darstellung schiefadjungiert und folglich iS selbstadjungiert. Dann aber finden wir nach 4.2.14 genau ein Paar (μ, φ) bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß μ auf \mathbb{R} und einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi(1) = v$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}; \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \\ (x \cdot) \downarrow & & \downarrow iS \\ L^2(\mathbb{R}; \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

zum Kommutieren bringt. Damit kommutiert das Diagramm auch, wenn wir beide Vertikalen mit $-it$ multiplizieren und darauf \exp anwenden, und das zeigt die in 4.1.4 behauptete Existenz von (μ, φ) in diesem Fall. Der Nachweis der Eindeutigkeit im vorliegenden Fall, also immer noch unter der Annahme, daß alle Vektoren unserer Darstellung differenzierbar sind, mag dem Leser überlassen bleiben.

Definition 4.5.10. Gegeben ein positiv semidefiniter selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum erklären wir

$$\sqrt{T}$$

als den positiv semidefiniten Operator, der daraus durch Anwenden der Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$ entsteht. Das ist erlaubt, da nach 4.5.13 für das Spektrum gilt $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definition 4.5.11. Gegeben ein beschränkter Operator A auf einem Hilbertraum ist A^*A selbstadjungiert und positiv semidefinit und wir setzen

$$|A| := \sqrt{A^*A}$$

Übungen

Übung 4.5.12. Eine stetige Abbildung von einem vollständigen metrischen Raum in einen weiteren metrischen Raum, die keinen Abstand verkleinert, ist injektiv mit abgeschlossenem Bild, und die auf dem Bild definierte Umkehrabbildung ist gleichmäßig stetig.

Übung 4.5.13. Ein beschränkter selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} heißt **positiv semidefinit**, wenn gilt

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

Man zeige, daß das Spektrum eines positiv semidefiniten Operators stets in der nichtnegativen reellen Zahlengeraden enthalten ist. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von 4.5.3.

Übung 4.5.14. Genau dann besteht das Spektrum eines selbstadjungierten Operators aus einem einzigen Punkt λ , wenn unser Operator die Multiplikation mit dem Skalar λ auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum ist. Hinweis: 4.5.1.

Übung 4.5.15. Jeder beschränkte Operator A auf einem Hilbertraum besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt

$$A = DP$$

mit P positiv semidefinit und D einer partiellen Isometrie im Sinne von [LA2] 1.12.29 mit $\ker D = (\operatorname{im} P)^\perp$. In einer solchen Darstellung gilt stets $P = |A|$. Man nennt diese Darstellung auch die **Polarzerlegung** von A . Ebenso besitzt er auch eine eindeutige Darstellung als Produkt $A = P'D'$ mit P' selbstadjungiert positiv semidefinit und D' einer partiellen Isometrie derart, daß gilt $\operatorname{im} D' = (\ker P')^\perp$. Hinweis: [LA2] 1.12.30.

Übung 4.5.16. Gegeben ein Maßraum (X, μ) und eine beschränkte meßbare Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist das Multiplizieren mit g ein selbstadjungierter Operator T auf $L^2(X; \mu)$. Gegeben $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist $f(T)$ dann das Multiplizieren mit der Funktion $f \circ g$.

Übung 4.5.17. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Hilberträumen und stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \\ T \downarrow & & \downarrow T' \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \end{array}$$

mit T, T' selbstadjungiert kommutiert für jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auch das entsprechende Diagramm mit $f(T), f(T')$ statt T, T' , in Formeln $AT = T'A \Rightarrow Af(T) = f(T')A$.

Übung 4.5.18. Wird ein selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum in einer geeigneten Basis gegeben durch eine Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$, so wird $f(T)$ in derselben Basis gegeben durch die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(f(x_1), \dots, f(x_n))$.

Übung 4.5.19. Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} verschwindet das Spektralmaß μ jedes Vektors auf dem Komplement des Spektrums unseres Operators, in Formeln $\mu(\mathbb{R} \setminus \sigma(T)) = 0$. In anderen Worten paßt also unsere kanonische Einbettung in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_l(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{C}(\sigma(T)) & \rightarrow & \mathcal{H} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\sim} & L^2(\sigma(T); \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

Die obere Horizontale wird dabei durch $f \mapsto f(T)v$ gegeben.

4.6 Riesz'scher Darstellungssatz

Definition 4.6.1. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_1(X, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **nichtnegativ**, wenn sie jeder nichtnegativen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet.

Satz 4.6.2 (Darstellungssatz von Riesz). *Ist X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum, so liefert das Bilden des Integrals eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Borelma\ss e auf } X\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{Nichtnegative Linearformen auf } \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R})\} \\ \mu & \mapsto & (f \mapsto \int f \mu) \end{array}$$

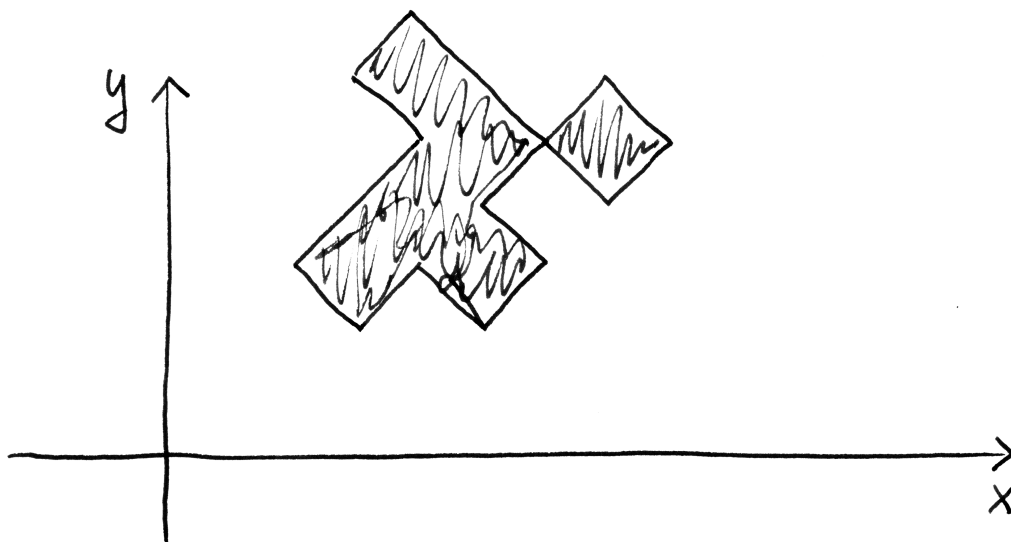
Vorschau 4.6.3. Dieser Satz gilt allgemeiner für jeden lokal kompakten abzählbar basierten Hausdorffraum X , vergleiche [TM] 4.2.4.

4.6.4. Auf der linken Seite sind nichtnegative Borelmaße gemeint, die also durchaus auch den Wert ∞ annehmen dürfen, nur eben nicht auf Kompakta. Statt nichtnegativen reell-linearen Abbildungen $\Lambda : \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mag man gleichbedeutend komplexlineare Abbildungen $\Lambda : \mathcal{C}_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten, die nichtnegativ sind in dem Sinne, daß sie jeder nichtnegativen reellen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnen.

4.6.5. Für jedes Kompaktum $K \subset X$ in unserem endlichdimensionalen reellen Raum X ist die Einschränkung einer nichtnegativen Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ auf den Raum $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit Träger in K stetig für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. In der Tat gibt es offensichtlich eine stetige nichtnegative Funktion $h \in \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R})$, die auf unserem Kompaktum K konstant Eins ist. Für $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ gilt dann $-\|f\|_\infty h \leq f \leq \|f\|_\infty h$ und Anwenden von Λ liefert $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(h) \|f\|_\infty$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $X = \mathbb{R}^n$. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung. Sicher wird die σ -Algebra der Borelmengen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ erzeugt durch den Mengenring aller endlichen Vereinigungen von Produkten endlicher Intervalle. Sicher wird sie auch erzeugt durch den Mengenring \mathcal{D} , der daraus durch Anwenden eines beliebigen Vektorraumautomorphismus von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ entsteht. Wählen wir nun unseren Automorphismus so, daß er keine der Koordinatenhyperebenen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ auf eine Koordinatenhyperebene abbildet, dann ist für $D \in \mathcal{D}$ offensichtlich das Integral seiner charakteristischen Funktion $[D]$ nach der letzten Koordinate $\int [D] dy$ stetig mit kompaktem Träger auf \mathbb{R}^n und wir können für jede nichtnegative Linearform Λ wie oben die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_\Lambda : \mathcal{D} & \rightarrow & [0, \infty) \\ D & \mapsto & \Lambda(\int [D] dy) \end{array}$$



Eine Menge des Mengengerings \mathcal{D} von Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, der durch Drehung um 45° aus dem Mengengering aller endlichen Vereinigungen von Produkten endlicher Intervalle entsteht.

betrachten. Nun zeigt der Satz von Dini [AN1] ?? zusammen mit 4.6.5, daß $\tilde{\mu}$ ein Prämaß auf \mathcal{D} ist. Nach dem Maßerweiterungssatz 1.2.11 besitzt dies Prämaß genau eine Fortsetzung zu einem Borelmaß $\tilde{\mu}$ auf $X \times \mathbb{R}$. Schließlich erklären wir ein Borelmaß $\mu = \mu_\Lambda$ auf X , indem wir für jede Borelmenge $B \subset X$ setzen

$$\mu(B) = \tilde{\mu}(B \times [0, 1])$$

Damit haben wir eine Abbildung $\Lambda \mapsto \mu$ in die Gegenrichtung konstruiert und müssen nur noch zeigen, daß unsere beiden Abbildungen zueinander invers sind. Wir beginnen mit der Situation $\nu \mapsto \Lambda \mapsto \tilde{\mu} \mapsto \mu$ und zeigen die Gleichheit von Maßen $\mu = \nu$. Nach Fubini stimmen die Maße $\tilde{\mu}$ und $\nu \boxtimes dy$ auf \mathcal{D} überein und nach dem Maßerweiterungssatz 1.2.11 sind sie folglich gleich. Damit folgt dann für jede Borelmenge $B \subset X$ sofort $\nu(B) = \tilde{\mu}(B \times [0, 1]) = \mu(B)$. Nun gehen wir umgekehrt von Λ aus, betrachten also die Situation $\Lambda \mapsto \tilde{\mu} \mapsto \mu \mapsto \Gamma$ und zeigen die Gleichheit von Linearformen $\Gamma = \Lambda$. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten auf allen nichtnegativen Funktionen $f \in \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R})$ denselben Wert $\Gamma(f) = \Lambda(f)$ annehmen. Nun läßt sich jedoch das offene durch $X \times \{0\}$ und den Graphen von f begrenzte Gebiet

$$G = \{(x, y) \mid 0 < y < f(x)\}$$

als die Vereinigung einer aufsteigenden Folge $D_0 \subset D_1 \subset \dots$ von Mengen aus \mathcal{D} darstellen. Nach dem Satz von Dini [AN2] 5.1.14 gilt dann $\int [D_r] dy \rightarrow f$ gleichmäßig und folglich $\Lambda(\int [D_r] dy) \rightarrow \Lambda(f)$ für $r \rightarrow \infty$. Da $\tilde{\mu}$ per definitionem invariant ist unter Verschiebung in der letzten Koordinate, haben wir nach 1.7.29 notwendig $\tilde{\mu} = \mu \boxtimes dy$. Also strebt $\Lambda(\int [D_r] dy)$ auch gegen

$$\tilde{\mu}(G) = (\mu \boxtimes dy)(G) = \int f(x) \mu\langle x \rangle = \Gamma(f) \quad \square$$

Übungen

Übung 4.6.6. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum und sei weiter $\Lambda : \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform mit der Eigenschaft, daß für alle Kompakta $K \subset X$ ihre Restriktion auf $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. So ist Λ die Differenz zweier nichtnegativer Linearformen. Hinweis: Für $f \in \mathcal{C}_1(X)$ mit $f \geq 0$ setze man

$$\Lambda_+(f) = \sup\{\Lambda(g) \mid 0 \leq g \leq f\}$$

und zeige, daß das endlich ist mit $\Lambda_+(f+h) = \Lambda_+(f) + \Lambda_+(h)$ für $f, h \geq 0$ und $\Lambda_+(af) = a\Lambda_+(f)$ für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gegeben $f \in \mathcal{C}_1(X)$ setze man $\Lambda_+(f) = \Lambda_+(f_+) - \Lambda_+(f_-)$ für $f = f_+ - f_-$ die Zerlegung in einen positiven und einen negativen Teil wie in 1.6.1 und zeige, daß $\Lambda_+ : \mathcal{C}_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ nichtnegativ und linear ist. Schließlich zeige man, daß auch $\Lambda_+ - \Lambda$ nichtnegativ ist.

4.7 Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Definition 4.7.1. Seien (X, \mathcal{M}) ein Meßraum und \mathcal{H} ein Hilbertraum. Ein auf X definiertes **\mathcal{H} -teilraumwertiges Maß** ist eine Abbildung E , die jeder meßbaren Menge $M \in \mathcal{M}$ einen abgeschlossenen Teilraum $E(M) \subseteq \mathcal{H}$ zuordnet derart, daß gilt:

1. Für je zwei disjunkte Mengen $M, M' \in \mathcal{M}$ sind die zugehörigen Teilräume orthogonal, in Formeln $M \cap M' = \emptyset \Rightarrow E(M) \perp E(M')$;
2. Für jede abzählbare Familie $(M_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von meßbaren Mengen mit Vereinigung M ist das Erzeugnis der $E(M_\nu)$ ein dichter Teilraum von $E(M)$.

4.7.2. Aus der ersten Bedingung folgt über den Fall $M = M' = \emptyset$ insbesondere $E(\emptyset) = 0$.

4.7.3. Das Konzept eines teilraumwertigen Maßes scheint mir besonders gut verständlich. Bei der expliziten Arbeit erweist sich jedoch das gleichwertige Konzept eines projektorwertigen Maßes als praktischer, das wir als nächstes diskutieren. Die Äquivalenz beider Konzepte dürfen sie als Übung 4.7.19 selbst ausarbeiten.

Definition 4.7.4. Seien (X, \mathcal{M}) ein Meßraum und \mathcal{H} ein Hilbertraum. Eine Abbildung $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt ein auf X definiertes **projektorwertiges Maß**, wenn die Operatoren $\Phi(M)$ alle selbstadjungiert und idempotent sind, also nach 2.8.11 orthogonale Projektoren auf abgeschlossene Teilräume, und wenn darüber hinaus gilt:

1. Aus $M \cap M' = \emptyset$ folgt $\Phi(M) \circ \Phi(M') = 0$;
2. Für jede aufsteigende Folge meßbarer Mengen $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ mit Vereinigung M gilt $\Phi(M_n)v \rightarrow \Phi(M)v \quad \forall v \in \mathcal{H}$.

Ein projektorwertiges Maß mit der zusätzlichen Eigenschaft $\Phi(X) = \text{id}_{\mathcal{H}}$ nennen wir eine **Teilung der Identität von \mathcal{H}** .

4.7.5. Gegeben ein Meßraum (X, \mathcal{M}) bezeichne $\mathcal{L}^\infty(X)$ den Vektorraum aller beschränkten meßbaren Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm. Man erkennt leicht, daß die meßbaren Stufenfunktionen darin einen dichten Teilraum bilden.

Lemma 4.7.6 (Integration nach projektorwertigen Maßen). *Gegeben ein Meßraum (X, \mathcal{M}) , ein Hilbertraum \mathcal{H} und ein projektorwertiges Maß $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gibt es genau eine stetige lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\infty(X) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto \int f \Phi = \int f(x) \Phi \langle x \rangle \end{aligned}$$

vom Raum aller beschränkten meßbaren Funktionen auf X in den Raum aller beschränkten Operatoren auf unserem Hilbertraum mit der Eigenschaft, daß der charakteristischen Funktion jeder meßbaren Menge der entsprechende Projektor zugeordnet wird, in Formeln $\int [M]\Phi = \Phi(M) \forall M \in \mathcal{M}$.

Beweis. Auf meßbaren Stufenfunktionen $s : X \rightarrow \mathbb{C}$ muß unsere Abbildung, wenn es sie denn überhaupt gibt, gegeben sein durch die Formel

$$\int s\Phi = \sum_{z \in \mathbb{C}} z \cdot \Phi(s^{-1}(z))$$

Wir haben gewonnen, sobald wir zeigen können, daß mit dieser Regel für jede Stufenfunktion s die Abschätzung $\|\int s\Phi\| \leq \|s\|_\infty$ gilt, da sich unsere Abbildung dann nach 2.4.17 und 4.7.5 auf genau eine Weise stetig und linear vom Raum aller Stufenfunktionen auf den Raum aller beschränkten meßbaren Funktionen fortsetzen läßt. Sei also s eine meßbare Stufenfunktion, die wir etwa als $s = c_1[M_1] + \dots + c_n[M_n]$ schreiben können mit M_1, \dots, M_n paarweise disjunkt und meßbar. Es gilt, für alle $v \in \mathcal{H}$ zu zeigen

$$\|(\int s\Phi)v\| \leq \|s\|_\infty \|v\|$$

oder ausgeschrieben

$$\|c_1\Phi(M_1)v + \dots + c_n\Phi(M_n)v\| \leq \|s\|_\infty \|v\|$$

Nun bilden jedoch die $v_i = \Phi(M_i)v$ zusammen mit einem weiteren w eine Zerlegung $v = v_1 + \dots + v_n + w$ von v in eine Summe von paarweise orthogonalen Vektoren. Durch Quadrieren beider Seiten sehen wir dann, daß unsere Behauptung äquivalent ist zu der offensichtlichen Aussage

$$\|c_1v_1\|^2 + \dots + \|c_nv_n\|^2 \leq \|s\|_\infty^2 (\|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2 + \|w\|^2) \quad \square$$

Definition 4.7.7. Ein projektorwertiges Maß auf den Borelmengen eines topologischen Raums heißt **kompakt getragen**, wenn es Kompakta gibt, deren Komplement der Nulloperator zugeordnet wird.

Satz 4.7.8 (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren).

1. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} erhalten wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte kompakt getragene} \\ \text{Teilungen der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Selbstadjungierte} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \qquad \qquad \mapsto \int x\Phi\langle x \rangle$$

2. Für die dem selbstadjungierten Operator T entsprechende Teilung der Identität Φ_T ist das Spektrum $\sigma(T)$ von T das kleinste Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ mit $\Phi_T(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$.
3. Gegeben eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ und selbstadjungierte Operatoren $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit $AT = T'A$ gilt für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ die Identität

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

4.7.9. In diesem Satz ist \mathbb{R} mit seiner durch die Borelmengen gegebenen Struktur eines Meßraums zu verstehen. Die folgende Übung 4.7.25 zeigt, daß die durch einen selbstadjungierten Operator definierte Teilung der Identität die Zerlegung in Eigenräume [LA2] 1.12.38 verallgemeinert. Die letzte Aussage 4.7.8.3 verallgemeinert dann unsere Erkenntnis [LA2] 3.2.5, nach der A zumindest schon mal Eigenräume von T in Eigenräume von T' zum selben Eigenwert abbilden muß.

Beispiel 4.7.10. Sei $\mathcal{H} = L^2([0, 1]; \lambda)$ und $T = (x \cdot)$ der Operator $f \mapsto Tf$ mit $(Tf)(x) = xf(x)$. So kann die zugehörige Teilung der Identität $\Phi = \Phi_T$ beschrieben werden durch die Vorschrift, daß $\Phi(M)$ die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion von M oder besser von $(M \cap [0, 1])$ ist, in Formeln $\Phi(M) = (([M] \cap [0, 1]) \cdot) : L^2([0, 1]; \lambda) \rightarrow L^2([0, 1]; \lambda)$.

Ergänzung 4.7.11. Wir werden später auch zeigen, daß dieser Satz immer noch gilt, wenn wir darin „selbstadjungiert“ durch „unitär“ und \mathbb{R} durch S^1 ersetzen. Noch allgemeiner werden wir „normale“ Operatoren auf einem Hilbertraum definieren als Operatoren, die mit ihrem Adjungierten kommutieren, und zeigen, daß der obige Satz auch dann noch gilt, wenn wir darin überall „selbstadjungiert“ durch „normal“ und \mathbb{R} durch \mathbb{C} ersetzen. Und schließlich will ich auch noch erwähnen, daß der erste Teil immer noch gilt, wenn man oben links die Forderung „kompakt getragen“ fallen läßt und oben rechts auch sogenannte „unbeschränkte Operatoren“ im Sinne von 4.12.5 zuläßt.

Ergänzung 4.7.12. Der besonders einfache Fall kompakter selbstadjungierter Operatoren wird in [TM] 4.5.2 unabhängig behandelt.

4.7.13. Der Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren wird uns bis zum Ende des anschließenden Abschnitts beschäftigen. Zunächst einmal zeigt 4.7.14 unter anderem, daß die im Satz erklärte Abbildung in der Tat jedem kompakt getragenen projektorwertigen Maß auf \mathbb{R} einen selbstadjungierten Operator zuordnet. Dann konstruieren wir in 4.8.5 eine Abbildung $T \mapsto \Phi_T$ in die Gegenrichtung und zeigen in 4.8.7 und 4.8.9, daß unsere beiden Konstruktionen zueinander invers sind. Der zweite Teil des Satzes folgt aus 4.7.15 und der letzte Teil aus 4.8.10 mit der in 4.8.5 gegebenen Beschreibung von Φ_T .

Lemma 4.7.14 (Integration nach projektorwertigem Maß, Eigenschaften).

Gegeben (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, $f, g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ beschränkt und meßbar, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß gilt

1. $\int \bar{f}\Phi = (\int f\Phi)^*$
2. $\int fg\Phi = (\int f\Phi) \circ (\int g\Phi)$
3. $\|\int f\Phi\| \leq \|f\|_\infty$

Beweis. Das alles ist für Stufenfunktionen leicht explizit zu sehen und folgt dann durch Grenzübergang im allgemeinen. Die Details können dem Leser überlassen bleiben. Man beachte, daß in Teil 2 das Produkt der Funktionen f und g gemeint ist, nicht etwa ihre Verknüpfung. \square

Lemma 4.7.15 (Spektrum eines Integrals). Ist Φ eine auf \mathbb{C} definierte kompakt getragene Teilung der Identität eines Hilbertraums \mathcal{H} und $T = \int x\Phi\langle x \rangle$, so ist $\sigma(T)$ das kleinste Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ mit $\Phi(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$.

Beweis. Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum mit $\Phi(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$, so ist nach 4.7.14 für $\lambda \notin K$ der Operator $\int_K (x - \lambda)^{-1}\Phi\langle x \rangle$ invers zu $\int_K (x - \lambda)\Phi\langle x \rangle = T - \lambda$ und es folgt $\lambda \notin \sigma(T)$. Das zeigt $\sigma(T) \subset K$. Andererseits ist für $\lambda \notin \sigma(T)$ der Operator $T - \lambda$ invertierbar, folglich existiert $c > 0$ derart, daß $T - \lambda$ von Null verschiedene Vektoren höchstens um den Faktor c verkürzt. Alle von Null verschiedenen Vektoren aus dem Bild von $\Phi(B(\lambda; c/2))$ werden jedoch von $T - \lambda$ nach 4.7.14 mindestens um den Faktor $c/2$ verkürzt, da die Funktion $(x - \lambda)$ auf $B(\lambda; c/2)$ eben beschränkt ist durch $c/2$, woraus wir sofort $\Phi(B(\lambda; c/2)) = 0$ folgern. Damit erhalten wir dann auch leicht $\Phi(H) = 0$ für jedes Kompaktum aus dem Komplement von $\sigma(T)$. Da nun dies Komplement wie jede offene Teilmenge der komplexen Zahlenebenen als eine abzählbare Vereinigung von Kompakta dargestellt werden kann, folgt $\Phi(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$. \square

Lemma 4.7.16 (Integral und Grenzübergang vertauschen). Seien (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß. Konvergiert eine Folge f_n meßbarer und simultan beschränkter Funktionen punktweise gegen eine Funktion f , so gilt $(\int f_n\Phi)v \rightarrow (\int f\Phi)v$ für alle $v \in \mathcal{H}$.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ annehmen. Gegeben $\varepsilon > 0$ bilden dann die

$$X_n = X_n^\varepsilon = \{x \in X \mid |f_\nu(x)| \leq \varepsilon \quad \forall \nu \geq n\}$$

eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen mit Vereinigung X . Aus den Eigenschaften eines projektorwertigen Maßes folgt $\Phi(X_n)v \rightarrow \Phi(X)v$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Nun schreiben wir

$$\int f_n\Phi = \int_{X_n} f_n\Phi + \int_{X \setminus X_n} f_n\Phi$$

Das erste Integral liefert einen Operator der Operatornorm $\leq \varepsilon$, und für C eine simultane Schranke der $\|f_n\|_\infty$ liefert das zweite Integral einen Operator der Operatornorm $\leq C$, der mit v dasselbe tut wie mit $\Phi(X)v - \Phi(X_n)v$. Gegeben v sinkt der Betrag von $(\int f_n \Phi) v$ also für hinreichend großes n unter $\varepsilon\|v\| + \varepsilon$, und da das für jedes positive ε gilt, folgt die Behauptung. \square

Übungen

Übung 4.7.17. Seien (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß. Gegeben $v \in \mathcal{H}$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ gilt

$$\left\langle v, \left(\int f \Phi \right) v \right\rangle = \int f \langle v, \Phi v \rangle$$

für das in 4.7.20 definierte Maß $\langle v, \Phi v \rangle$ auf (X, \mathcal{M}) .

Übung 4.7.18 (Funktorialität des Integrals). Ist $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen und sind auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) projektorwertige Maße Φ in \mathcal{H} und Φ' in \mathcal{H}' gegeben mit der Eigenschaft $A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A \quad \forall M \in \mathcal{M}$ oder in Kurzschreibweise $A \circ \Phi = \Phi' \circ A$, so gilt für jede beschränkte meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ die Identität

$$A \circ \left(\int f \Phi \right) = \left(\int f \Phi' \right) \circ A$$

Übung 4.7.19. Sei (X, \mathcal{M}) ein Meßraum und \mathcal{H} ein Hilbertraum. Wir erhalten zueinander inverse Bijektionen zwischen teilraumwertigen Maßen und projektorwertigen Maßen vermittels der Zuordnungen $E \mapsto \Phi_E$ mit $\Phi_E(M)$ der orthogonalen Projektion auf $E(M)$ und $\Phi \mapsto E_\Phi$ mit $E_\Phi(M) = \text{im } \Phi(M)$ dem Bild des Projektors $\Phi(M)$.

Übung 4.7.20. Ist (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß, so ist für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ die Zuordnung $M \mapsto \langle v, \Phi(M)v \rangle$ ein nichtnegatives endliches Maß $\langle v, \Phi v \rangle$ auf (X, \mathcal{M}) , und stimmen bei zwei projektorwertigen Maßen für alle Vektoren v diese nichtnegativen Maße überein, so stimmen die besagten projektorwertigen Maße bereits selbst überein. Hinweis: Gegeben ein orthogonaler Projektor alias selbstadjungierter Idempotenter P auf einem Hilbertraum gilt $\ker P = \{v \mid \langle v, Pv \rangle = 0\}$.

Übung 4.7.21. Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $\Phi = \Phi_T$ die zugehörige Teilung der Identität, so gilt für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Formel $f(T) = \int f \Phi$. Hinweis: Man beginne mit dem polynomialen Fall.

Übung 4.7.22. Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist μ ein kompakt getragenes Borelmaß auf \mathbb{R} und T die Multiplikation mit x auf $L^2(\mathbb{R}; \mu)$, so ist der Projektor $\Phi(M)$ der zugehörigen Teilung Φ der Identität für eine Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ gerade die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion $[M]$ von M und der Operator $\int f\Phi$ für $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ist schlicht die Multiplikation $(f \cdot) : L^2(\mathbb{R}; \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$. Hinweis: Man berechne $(\int x\Phi(x))(h)$ für h quadratintegrierbar vermittels einer Approximation der Identität auf einem geeigneten Kompaktum von \mathbb{R} durch immer feinere Stufenfunktionen.

Übung 4.7.23. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einer Teilung Φ der Identität und f beschränkt und meßbar und $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom haben wir

$$P \left(\int f\Phi \right) = \int (P \circ f)\Phi$$

Übung 4.7.24. Seien (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ beschränkt und meßbar, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Teilung der Identität. So gilt für alle $v \in \mathcal{H}$ die Abschätzung

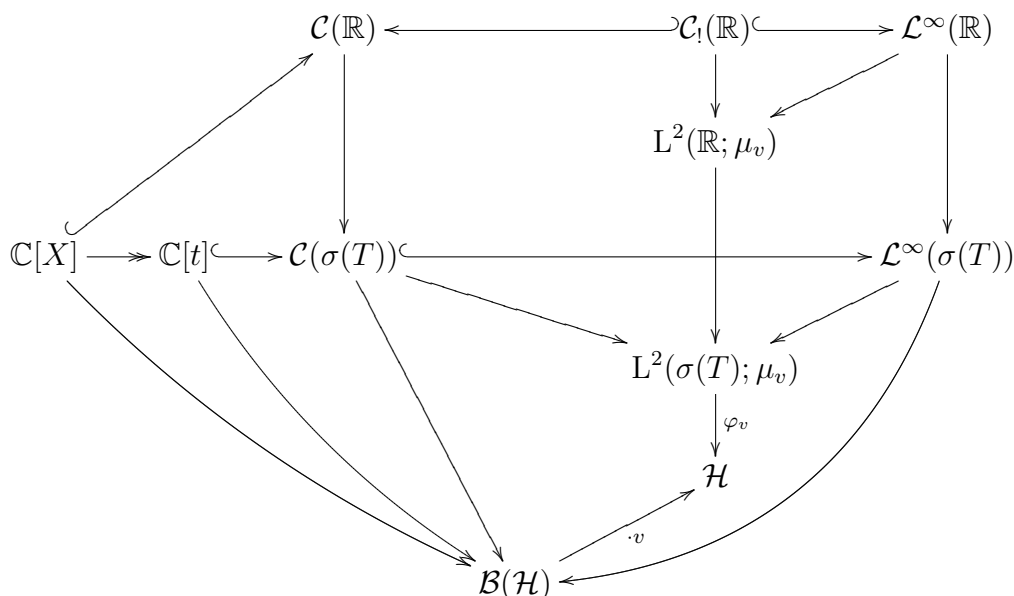
$$\left\| \left(\int f\Phi \right) v \right\| \geq (\inf_{x \in X} |f(x)|) \|v\|$$

Übung 4.7.25. Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $(e_i)_{i \in I}$ eine Hilbertbasis von \mathcal{H} aus Eigenvektoren von T , sagen wir mit $Te_i = \lambda_i e_i$, so hat für die im Sinne von 4.7.8 zugehörige Zerlegung $\Phi = \Phi_T$ der Identität und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ der zugehörige Projektor $\Phi(M)$ als Bild den Abschluß der Summe aller Eigenräume zu Eigenwerten aus M , in Formeln

$$\text{im}(\Phi(M)) = \overline{\langle e_i \mid \lambda_i \in M \rangle}$$

4.8 Beweis des Spektralsatzes

4.8.1. Das folgende Diagramm faßt den Aufbau des sogenannten „Funktionalkalküls“ in der hier gegebenen Darstellung zusammen:



Wir gehen aus von der Vertikale links außen, dem Einsetzen unseres selbstadjungierten Operators T in Polynome aus $\mathbb{C}[X]$. Nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz und der Gleichheit von Norm und Spektralradius faktorisiert sie über den Ring $\mathbb{C}[t]$ aller polynomialen Funktionen auf dem Spektrum, und zwar durch eine in Bezug auf die sup-Norm stetige Abbildung, die sich von dort mithilfe des Approximationssatzes von Weierstraß stetig auf den Ring $\mathcal{C}(\sigma(T))$ aller stetigen Funktionen auf dem Spektrum fortsetzen läßt. Gegeben ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ führt diese Fortsetzung zu einer nichtnegativen Linearform $f \mapsto \langle v, f(T)v \rangle$ auf $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ und mit dem Riesz'schen Darstellungssatz zum sogenannten Spektralmaß μ_v unseres Vektors und wieder durch stetige Fortsetzung zur kanonischen Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu_v) \hookrightarrow \mathcal{H}$, die im Diagramm durch die Verknüpfung des mit φ_v bezeichneten Pfeils mit dem darüberstehenden Pfeil dargestellt ist, der eh einen Isomorphismus darstellt. Diese kanonischen Einbettungen schließlich verwenden wir dann, um auch das Einsetzen unseres Operators in meßbare beschränkte Funktionen f zu erklären durch die Vorschrift $f(T)v := \varphi_v(f)$, wie wir im folgenden genauer ausführen werden.

Definition 4.8.2 (Anwenden meßbarer Funktionen auf Operatoren). Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} und eine beschränkte meßbare Funktion $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ auf seinem Spektrum erklären wir eine Abbil-

dung

$$f(T) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

durch die Vorschrift $f(T)v := \varphi_v(f)$ für $\varphi_v : L^2(\mathbb{R}; \mu_v) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung zu v im Sinne von 4.2.15. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da nach 4.5.19 das Spektralmaß μ_v jedes Vektors $v \in \mathcal{H}$ auf dem Komplement des Spektrums von T verschwindet. Schreiben wir $f(T)$ für eine meßbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, so setzen wir implizit voraus, daß $f|_{\sigma(T)}$ beschränkt sein soll, und meinen das Anwenden dieser Einschränkung auf T .

4.8.3. Sobald wir den Spektralsatz zur Verfügung haben, können wir $f(T)$ auch als $f(T) = \int f(x)\Phi_T\langle x \rangle$ schreiben, wie in 4.8.7 ausgeführt wird, und dann die Aussagen des anschließenden Lemmas 4.8.4 aus 4.7.21, 4.7.14 und 4.7.16 folgern. Das anschließende Lemma ist also nur für den Beweis des Spektralsatzes von Bedeutung. Das Anwenden geeigneter Funktionen auf Operatoren ist auch als **Funktionalkalkül** bekannt.

Lemma 4.8.4 (Eigenschaften des Funktionalkalküls). *Sei T ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum \mathcal{H} und sei $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar und beschränkt. So gilt:*

1. *Ist f stetig, so stimmt unser eben in 4.8.2 definiertes $f(T)$ mit unserem in 4.5.6 durch polynomiale Approximation definierten $f(T)$ überein;*
2. *Die Abbildung $f(T)$ ist linear und stetig und für ihre Operatornorm gilt $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$;*
3. *Die adjungierte Abbildung zu $f(T)$ ist $f(T)^* = \bar{f}(T)$;*
4. *Ist $g : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere meßbare und beschränkte Abbildung, so haben wir $(f \cdot g)(T) = f(T) \circ g(T)$;*
5. *Konvergiert eine Folge f_n meßbarer und simultan beschränkter Funktionen punktweise gegen f , so gilt $f_n(T)v \rightarrow f(T)v$ für alle $v \in \mathcal{H}$.*

Beweis. 1. Das folgt sofort aus den Definitionen, wir hatten ja unsere kanonische Einbettung φ gerade konstruiert als die stetige Fortsetzung der Abbildung $C_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}$ mit $f \mapsto f(T)v$.

2. Die Abschätzung $\|f(T)v\| \leq \|f\|_\infty \|v\|$ folgt auch sofort aus den Definitionen, aber die Linearität unserer Abbildung $f(T)$ muß noch gezeigt werden. Klar ist immerhin, daß gegeben eine Folge f_n beschränkter meßbarer Funktionen auf $\sigma(T)$, die für das Spektralmaß μ eines Vektors v im Hilbertraum $L^2(\sigma(T); \mu)$ gegen eine weitere beschränkte meßbare Funktion auf $\sigma(T)$ konvergiert, notwendig gilt

$$f_n(T)v \rightarrow f(T)v$$

Um nun die Additivität $f(T)(v + w) = f(T)v + f(T)w$ zu zeigen, suchen wir eine Folge $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ stetiger Funktionen mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, und zwar fast überall bezüglich der Summe der Spektralmaße der Vektoren v, w und $v + w$. Die Behauptung folgt dann im Grenzwert aus der Linearität der $f_n(T)$ für die stetigen Funktionen f_n . In derselben Weise zeigen wir $f(T)(\lambda v) = \lambda f(T)(v)$ und damit die Linearität von $f(T)$.

3. Es gilt für je zwei Vektoren v, w zu zeigen $\langle f(T)v, w \rangle = \langle v, \bar{f}(T)w \rangle$. Für stetige f wissen wir das bereits aus 4.5.6. Um es im allgemeinen zu zeigen, suchen wir eine Folge $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ stetiger Funktionen mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, und zwar bezüglich der Summe der Spektralmaße von v und w . Es folgt $\langle f_n(T)v, w \rangle = \langle v, \bar{f}_n(T)w \rangle$ für alle n und $f_n(T)v \rightarrow f(T)v$ sowie $\bar{f}_n(T)w \rightarrow \bar{f}(T)w$ und damit die Behauptung.

4. Es reicht, für alle $v, w \in \mathcal{H}$ die Formel $\langle (f \cdot g)(T)v, w \rangle = \langle g(T)v, \bar{f}(T)w \rangle$ zu zeigen. Für stetige f, g folgt das aus 4.5.6. Um es im allgemeinen zu zeigen, suchen wir Folgen $f_n, g_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ von stetigen Funktionen mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und $\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, die fast überall punktweise gegen f beziehungsweise g konvergiert, und zwar bezüglich der Summe der Spektralmaße von v und w , und gehen zum Grenzwert über.

5. Das folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz aus den Definitionen. \square

Lemma 4.8.5 (Identitätsteilung zu einem selbstadjungierten Operator). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einem selbstadjungierten Operator T sind die Operatoren $[M](T)$ für Borelmengen $M \subset \mathbb{R}$ die Projektoren einer kompakt getragenen Teilung Φ_T der Identität von \mathcal{H} .

4.8.6. Hier meint $[M] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die charakteristische Funktion der Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ und $[M](T)$ den Operator auf \mathcal{H} , der daraus im Rahmen unseres Funktionalkalküls durch Anwenden auf T entsteht.

Beweis. Die charakteristische Funktion $[M]$ von M ist reellwertig und idempotent, in Formeln $[M]^2 = [M]$, folglich ist $[M](T)$ selbstadjungiert und idempotent. Aus $M \cap M' = \emptyset$ folgt weiter $[M] \cdot [M'] = 0$ und nach 4.8.4 damit $[M](T) \circ [M'](T) = 0$. Als nächstes bemerken wir, daß nach 4.8.4.5 für jede aufsteigende Folge $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ von meßbaren Mengen mit Vereinigung M und für alle $v \in \mathcal{H}$ die Folge der $[M_n](T)v$ gegen $[M](T)v$ konvergiert. Schließlich bemerken wir noch, daß die Definition 4.8.2 für die konstante Funktion 1 auf dem Spektrum die Gleichung $[\sigma(T)](T) = \text{id}$ liefert und sind fertig. \square

Lemma 4.8.7 (Rekonstruktion eines Operators aus seiner Identitätsteilung). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einem selbstadjungierten Operator T und zu-

gehöriger Teilung der Identität Φ_T im Sinne von 4.8.5 haben wir stets

$$T = \int x\Phi_T\langle x \rangle$$

4.8.8. Der Beweis zeigt sogar allgemeiner für jede meßbare beschränkte Funktion $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ die Identität

$$f(T) = \int f(x)\Phi_T\langle x \rangle$$

Sobald der Spektralsatz also einmal bewiesen ist, wird das Anwenden meßbarer Funktionen auf selbstadjungierte Operatoren sehr einfach.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten auf jedem Vektor $v \in \mathcal{H}$ denselben Wert annehmen. Ist $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung zu v , so folgt aus den Definitionen die Gleichung

$$\varphi(s) = \left(\int s(x)\Phi_T\langle x \rangle \right) (v)$$

erst für die charakteristische Funktion s jeder Borelmenge, dann für jede meßbare Stufenfunktion und dann wegen der Stetigkeit beider Seiten in Bezug auf die Supremumsnorm für jede beschränkte meßbare Funktion auf $\sigma(T)$, insbesondere auch für die Funktion $s(x) = x$. \square

Lemma 4.8.9. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einer kompakt getragenen auf \mathbb{R} definierten Teilung Φ der Identität und zugehörigem selbstadjungierten Operator $T = \int x\Phi\langle x \rangle$ haben wir stets

$$\Phi = \Phi_T$$

Beweis. Es gilt zu zeigen $[M](T)v = \Phi(M)v$ für jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$. Da hier beide Seiten orthogonale Projektionen sind, reicht es zu zeigen

$$\langle v, [M](T)v \rangle = \langle v, \Phi(M)v \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$. Hier sind nun aber beide Seiten kompakt getragene Borelmaße, weshalb wir nach 4.6.2 und 4.6.5 und [AN1] ?? nur zeigen müssen, daß sie für jede Polynomfunktion P dasselbe Integral liefern. Die linke Seite ist per definitionem das Spektralmaß μ des Vektors v für den Operator T , für μ das Maß auf der linken Seite haben wir also

$$\int P(t)\mu\langle t \rangle = \langle v, P(T)v \rangle$$

Das Maß ν auf der rechten Seite hinwiederum hat die Eigenschaft

$$\int P(t)\nu\langle t \rangle = \left\langle v, \left(\int P\Phi \right) v \right\rangle$$

erst einmal für jede meßbare Stufenfunktion P aber dann wegen der Stetigkeit beider Seiten unter der Norm gleichmäßiger Konvergenz in P sogar für jede beschränkte meßbare Funktion P und damit auch für jede Polynomfunktion P . Damit folgt die Behauptung dann aus 4.7.23. \square

Übungen

Übung 4.8.10 (Funktorialität des Funktionalkalküls). Gegeben ein kommutatives Diagramm von Hilberträumen und stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \\ T \downarrow & & \downarrow T' \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \end{array}$$

mit T, T' selbstadjungiert kommutiert für jede beschränkte meßbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auch das entsprechende Diagramm mit $f(T), f(T')$ statt T, T' , in Formeln $AT = T'A \Rightarrow Af(T) = f(T')A$. Hinweis: Man erinnere sich an 4.5.17 und finde für $v \in \mathcal{H}$ eine Folge stetiger durch $\|f\|_\infty$ beschränkter Funktionen, die bezüglich der Summe der Spektralmaße von v und Av fast überall gegen f strebt.

Übung 4.8.11. (Vorbereitung für 4.11.7.) Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} mit zugehöriger Teilung der Identität Φ_T kann für jede abgeschlossene Teilmenge $C \Subset \mathbb{R}$ das Bild des zugehörigen Projektors beschrieben werden als

$$\begin{aligned} \text{im } \Phi_T(C) &= \{v \in \mathcal{H} \mid \inf_{\lambda \in C} \|(T - \lambda)v\| = 0\} \\ &= \{v \in \mathcal{H} \mid \mu_v(\mathbb{R} \setminus C) = 0 \text{ für } \mu_v \text{ das Spektralmaß von } v\} \end{aligned}$$

4.9 Spektralzerlegung unitärer Darstellungen

Satz 4.9.1 (Spektralzerlegung unitärer Darstellungen). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\ \Phi & \mapsto & (\rho : t \mapsto \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle) \end{array}$$

4.9.2. Gegeben eine unitäre Darstellung (\mathcal{H}, ρ) von \mathbb{R} gibt es also genau eine Teilung $\Phi = \Phi_\rho$ der Identität von \mathcal{H} auf \mathbb{R} mit

$$\rho(t) = \int_{x \in \mathbb{R}} e^{itx} \Phi\langle x \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Diese Teilung der Identität nennen wir das **zu unserer Darstellung gehörige projektorwertige Maß** und die zugehörigen $\Phi(M)$ nennen wir **Spektralprojektoren**. In der Hoffnung, dadurch die zugrundeliegende Struktur deutlicher zu machen, formuliere ich auch noch eine koordinatenfreie Variante des Satzes, deren Beweis dem Leser überlassen sei: Gegeben eine Geradengruppe G mit Charaktergruppe \hat{G} und ein Hilbertraum \mathcal{H} haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \hat{G} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } G \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \quad \mapsto \quad (\rho : g \mapsto \int \chi(g) \Phi\langle \chi \rangle)$$

Diese Aussage gilt auch für die additive Gruppe eines beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraums, ja sogar für die Gruppen S^1 , \mathbb{Z} und in voller Allgemeinheit für jede „abzählbar basierte lokal kompakte Hausdorff’sche kommutative topologische Gruppe“, aber in dieser Allgemeinheit werden wir sie nicht beweisen.

Beweis. Wir beginnen mit dem Nachweis der Surjektivität. Sind alle Vektoren unserer Darstellung differenzierbar, so existiert nach 4.1.18 ein selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\rho(t) = \exp(tiT)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist $\Phi = \Phi_T$ die nach 4.7.8 zu T gehörige Teilung der Identität, in Formeln $T = \int x \Phi\langle x \rangle$, so folgt mit 4.7.21 angewandt auf $f(x) = \exp(itx)$ sofort

$$\rho(t) = \exp(tiT) = \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle$$

und wir haben bereits ein mögliches Φ gefunden. Im allgemeinen finden wir mit 4.10.2 und dem Bilden sukzessiver orthogonaler Komplemente in unserer Darstellung eine Familie $(\mathcal{H}_\iota, \rho_\iota)_{\iota \in I}$ von paarweise orthogonalen Unterdarstellungen, deren Summe dicht liegt und in denen jeweils jeder Vektor differenzierbar ist. Für jedes $\iota \in I$ finden wir dann nach dem bereits Bewiesenen eine auf \mathbb{R} definierte Teilung Φ_ι der Identität von \mathcal{H}_ι mit

$$\rho_\iota(t) = \int e^{itx} \Phi_\iota\langle x \rangle$$

Die Summe dieser teilraumwertigen Maße im Sinne von 4.9.3 ist dann eine Teilung Φ der Identität von \mathcal{H} mit

$$\rho(t)v = \left(\int e^{itx} \Phi\langle x \rangle \right) v$$

erst für alle v aus einem der \mathcal{H}_i , aber dann wegen der Linearität und Stetigkeit beider Seiten sogar für alle $v \in \mathcal{H}$. Das zeigt die Surjektivität. Um die Eindeutigkeit von Φ zu zeigen, beachten wir zunächst, daß die in 4.7.20 erklärten Maße $\langle \Phi v, v \rangle$ für $v \in \mathcal{H}$ unser Φ bereits eindeutig festlegen. Nach 4.7.17 entspricht aber die Fouriertransformierte des Maßes $\langle \Phi v, v \rangle$ unter der Identifikation $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{R}}$, $t \mapsto (x \mapsto e^{itx})$ gerade der Funktion $t \mapsto \langle \rho(t)v, w \rangle$, und nach 3.3.15 wird ein reelles Maß durch seine Fouriertransformierte bereits eindeutig festgelegt. \square

Lemma 4.9.3. *Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} , eine Familie $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ von paarweise orthogonalen Teilräumen mit dichter Summe und Teilungen Φ_i der Identität auf jedem \mathcal{H}_i erhalten wir eine Teilung der Identität auf \mathcal{H} durch die Vorschrift*

$$\text{im } \Phi(M) = \overline{\sum_{i \in I} \text{im } \Phi_i(M)}$$

Beweis. Dem Leser überlassen. Man nutze 4.7.19. \square

Definition 4.9.4. Ein Homomorphismus zwischen Darstellungen (\mathcal{H}, ρ) und (\mathcal{H}', ρ') , auch genannt ein **Verflechtungsoperator**, ist eine stetige lineare Abbildung $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ mit $A\rho(t) = \rho'(t)A$ für alle Elemente t der dargestellten Gruppe.

Satz 4.9.5 (Funktorialität der Spektralzerlegung). *Gegeben unitäre Darstellungen von \mathbb{R} in Hilberträumen \mathcal{H} beziehungsweise \mathcal{H}' sind die Verflechtungsoperatoren $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ genau die stetigen linearen Abbildungen mit der Eigenschaft, daß für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

Beweis. Daß alle stetigen linearen Abbildungen mit dieser Eigenschaft Verflechtungsoperatoren sind, scheint mir offensichtlich. Sei nun umgekehrt A ein Verflechtungsoperator und $M \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Natürlich reicht es, $A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$ auf einem dichten Teilraum von \mathcal{H} zu zeigen. Mithilfe von 4.10.2 können wir uns also auf den Fall beschränken, daß unsere beiden Darstellungen jeweils ganz aus differenzierbaren Vektoren bestehen. Dann gilt jedoch für die infinitesimalen Erzeuger S, S' offensichtlich $A \circ S = S' \circ A$ und die Behauptung folgt aus der Funktorialität des Spektralmaßes im Fall selbstadjungierter Operatoren 4.7.8.3. \square

Beweis von Satz 4.1.4 zur lokalen Struktur unitärer Darstellungen. Gegeben eine unitäre Darstellung (ρ, \mathcal{H}) von \mathbb{R} betrachten wir die zugehörige Teilung Φ der Identität und zu jedem Vektor $v \in \mathcal{H}$ das Maß $\mu = \langle \Phi v, v \rangle$ nach 4.7.20 und die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{H} \\ f &\mapsto (\int f \Phi) v \end{aligned}$$

Nach 4.7.17 gilt hier $\|\varphi(f)\|^2 = \int |f|^2 \mu$. Folglich faktorisiert φ über das Bild von $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ und läßt sich nach 2.4.17 von diesem Bild stetig zu einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ ausdehnen. Die Formel $\varphi(e^{itx} \cdot f) = \rho(t)(\varphi(f))$ folgt für alle Funktionen f mit beschränktem meßbaren Repräsentanten aus 4.7.14.2 und dann auf ganz $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ durch stetige Fortsetzung. Damit haben wir die Existenz eines Paares (μ, φ) mit den in 4.1.4 behaupteten Eigenschaften nachgewiesen. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, gehen wir von einem möglichen Paar (μ, φ) aus. Aus 4.9.5 und 4.9.6 folgt

$$\Phi(M) \circ \varphi = \varphi \circ ([M] \cdot)$$

und durch Anwenden beider Seiten auf die konstante Funktion 1 und Bilden des Skalarprodukts mit v weiter $\langle v, \Phi(M)v \rangle = \mu(M)$, womit die Eindeutigkeit von μ bereits gezeigt wäre. Andererseits zeigt die vorige Gleichung auch $\varphi([M]) = \Phi(M)v$, und das legt φ wegen der Linearität auf meßbaren Stufenfunktionen und dann wegen der Stetigkeit auf allen quadratintegrierbaren Funktionen fest. \square

Übungen

Übung 4.9.6. Gegeben ein Borelmaß μ auf \mathbb{R} und die unitäre Darstellung von \mathbb{R} durch Automorphismen von $L^2(\mathbb{R}; \mu)$, bei der $t \in \mathbb{R}$ durch Multiplikation mit e^{itx} operiert, ist für das zugehörige projektorwertige Maß Φ der einer Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ zugeordnete Projektor $\Phi(M)$ gerade die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion $[M]$ von M .

Übung 4.9.7. Betrachten wir auf \mathbb{R} das Lebesguemaß dt und die unitäre Darstellung von \mathbb{R} auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; dt)$ durch das Verschieben von Funktionen, $\rho(t)f = \tau_t f$, deren Stetigkeit in 2.6.10 gezeigt wurde, so hat für das zugehörige projektorwertige Maß Φ der einer Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ zugeordnete Projektor $\Phi(M)$ die Gestalt $\mathcal{F} \circ ([M] \cdot) \circ \mathcal{F}^{-1}$ für \mathcal{F} die wie in 3.1.2 normalisierte Fouriertransformation.

4.10 Operationen von Maßen auf Darstellungen

4.10.1. Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und Φ eine auf \mathbb{R} definierte Teilung der Identität von \mathcal{H} und $\rho : t \mapsto \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle$ die dazu wie in 4.9.1 gebildete unitäre Darstellung von \mathbb{R} in \mathcal{H} . Wenn wir einmal von unserem Satz 4.9.1 ausgehen, so kann man leicht sehen, daß für $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar das Bild des zugehörigen Projektors (im $\Phi(M)$) $\subset \mathcal{H}$ jeweils ganz aus differenzierbaren Funktionen besteht und daß der infinitesimale Erzeuger dort durch das Integral $\int it\Phi\langle t \rangle$ beschrieben werden kann. Wir werden nun für jede unitäre Darstellung der Gruppe \mathbb{R} oder

allgemeiner einer Geradengruppe G in einem Hilbertraum \mathcal{H} und jedes komplexe Maß $\mu \in M(\mathbb{R})$ beziehungsweise $\mu \in M(G)$ einen beschränkten Operator

$$\mu * : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

eingeführen, die „Operation durch Konvolution“, von der wir später die Formel $\mu * = \int \mu^\wedge(x) \Phi \langle x \rangle$ zeigen werden. Die Konvolution mit μ wird also mit dem Integral seiner Fouriertransformierten $\mu^\wedge \in C^b(\mathbb{R})$ nach dem zu unserer Darstellung gehörigen projektorwertigen Maß übereinstimmen. Obwohl das alles noch nicht bewiesen ist, zeigt es uns doch schon eine Möglichkeit, auch ohne die Existenz von Φ zu kennen, gewisse Teilräume „mit Frequenzbeschränkungen“ zu definieren. Beim Beweis des folgenden technischen Lemmas, das wir bei unserer Herleitung der Spektralzerlegung unitärer Darstellungen von \mathbb{R} gebraucht und bereits im Vorgriff verwendet haben, ist dann der wesentliche Punkte der Nachweis, daß diese Teilräume aus differenzierbaren Vektoren bestehen und daß ihre Vereinigung dicht liegt.

Lemma 4.10.2. *Es ist möglich, simultan in jeder unitären Darstellung \mathcal{H} von \mathbb{R} eine aufsteigende Folge von unitären Unterdarstellungen $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \subset \dots$ so zu wählen, daß (1) in jedem \mathcal{H}_i jeder Vektor differenzierbar ist, daß (2) deren Vereinigung dicht liegt, und daß (3) jeder Verflechtungsoperator $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ auch \mathcal{H}_i nach \mathcal{H}'_i abbildet.*

Beweis. In 4.10.8 werden wir zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}$ eine unitäre Unterdarstellung $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}$ erklären und zwar derart, daß aus $C \subset D$ folgt $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}_D$ und daß jeder Verflechtungsoperator $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ auch \mathcal{H}_C in \mathcal{H}'_C abbildet. In 4.10.11 zeigen wir, daß für C kompakt \mathcal{H}_C aus differenzierbaren Vektoren besteht. Aus 4.10.12 folgt schließlich, daß die Vereinigung der besagten Unterdarstellungen zu den kompakten Intervallen $[-n, n]$ dicht liegt in unserer ursprünglichen Darstellung. \square

Definition 4.10.3 (Operationen von Maßen auf Darstellungen). Gegeben eine unitäre Darstellung (\mathcal{H}, ρ) einer Geradengruppe G erklären wir für jedes komplexe Maß $\mu \in M(G)$ eine lineare Abbildung $\mu * : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $v \mapsto \mu * v$ durch die Vorschrift

$$\mu * v = \int \rho(t)v \mu \langle t \rangle$$

wobei das Integral im Sinne von 3.2.37 zu verstehen ist, also charakterisiert wird durch $\langle w, \mu * v \rangle = \int \langle w, \rho(t)v \rangle \mu \langle t \rangle$ für alle $w \in \mathcal{H}$.

Beispiele 4.10.4. Ist $\mu = \delta_t$ ein Diracmaß, so gilt $\mu * v = \rho(t)(v)$. Durch diese Gleichheit motiviert vereinfachen wir unsere Notation und schreiben kurz

$$\rho(t)(v) = t * v$$

Ist $\mu = a_1\delta_{t(1)} + \dots + a_n\delta_{t(n)}$ eine Linearkombination von Diracmaßen, so gilt mit dieser Notation $\mu * v = a_1t(1) * v + \dots + a_nt(n) * v$. In der Tat ist unsere Operation von Maßen sicher eine bilineare Abbildung $M(G) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Lemma 4.10.5 (Stetigkeit der Konvolution). *Gegeben eine unitäre Darstellung \mathcal{H} einer Geradengruppe G gilt für jedes komplexe Maß $\mu \in M(G)$ und jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ die Abschätzung*

$$\|\mu * v\| \leq \|\mu\| \cdot \|v\|$$

mit $\|\mu\|$ der Variationsnorm unseres Maßes aus 3.2.31.

Beweis. Für alle $w \in \mathcal{H}$ haben wir

$$|\langle w, \mu * v \rangle| = \left| \int \langle w, t * v \rangle \mu \langle t \rangle \right| \leq \int |\langle w, t * v \rangle| |\mu \langle t \rangle| \leq \|\mu\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$$

Setzen wir hier $w = \mu * v$, so ergibt sich die Behauptung sofort. \square

Lemma 4.10.6 (Assoziativität der Konvolution). *Gegeben eine unitäre Darstellung \mathcal{H} einer Geradengruppe G und Maße $\mu, \nu \in M(G)$ und ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ gilt stets*

$$\mu * (\nu * v) = (\mu * \nu) * v$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten mit jedem Vektor $w \in \mathcal{H}$ dasselbe Skalarprodukt haben. Wir finden nun nach den Definitionen

$$\begin{aligned} \langle w, \mu * (\nu * v) \rangle &= \int \langle w, t * (\nu * v) \rangle \mu \langle t \rangle \\ &= \int \langle (-t) * w, \nu * v \rangle \mu \langle t \rangle \\ &= \int \left(\int \langle (-t) * w, s * v \rangle \nu \langle s \rangle \right) \mu \langle t \rangle \\ \langle w, (\mu * \nu) * v \rangle &= \int \langle w, x * v \rangle (\mu * \nu) \langle x \rangle \\ &= \int \langle w, (s + t) * v \rangle (\mu \boxtimes \nu) \langle s, t \rangle \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt so aus dem Satz von Fubini. \square

Lemma 4.10.7. *Sei \mathcal{H} eine unitäre Darstellung einer Geradengruppe G und $\mu_n \in M(G)$ eine Folge von nichtnegativen Maßen mit $\mu_n(G) = 1$ und der Eigenschaft, daß für jede offene Umgebung U des neutralen Elements $0 \in G$ fast alle unserer Maße auf $G \setminus U$ verschwinden. So gilt für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ die Formel*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n * v = v$$

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Umgebung U des neutralen Elements mit $\|t * v - v\| \leq \varepsilon$ für alle $t \in U$. Falls n so groß ist, daß gilt $\mu_n(G \setminus U)$, so haben wir demnach

$$|\langle w, \mu_n * v - v \rangle| = \left| \int \langle w, t * v - v \rangle \mu_n \langle t \rangle \right| \leq \int |\langle w, t * v - v \rangle| \mu_n \langle t \rangle \leq \varepsilon \|w\|$$

□

Definition 4.10.8. Gegeben eine Geradengruppe G notieren wir die Inverse der abstrakten Fouriertransformation $\mathcal{M}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\hat{G})$ von den Schwartzmaßen in die Schwartzfunktionen aus 3.2.13 als $h \mapsto h^\vee$. Gegeben eine unitäre Darstellung \mathcal{H} von G und eine abgeschlossene Teilmenge $C \Subset \hat{G}$ setzen wir

$$\mathcal{H}_C = \{v \in \mathcal{H} \mid h^\vee * v = 0 \text{ für alle } h \in \mathcal{S}(\hat{G}) \text{ mit } h|_C = 0\}$$

Nach 4.10.5 ist das ein abgeschlossener Teilraum und wegen der Kommutativität der Konvolution ist er sogar eine Unterdarstellung. Offensichtlich folgt aus $C \subset D$ auch $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}_D$.

4.10.9. Im folgenden will ich versuchen klar zu machen, daß man sich diesen Raum denken kann als die Menge aller Vektoren, die „keine spektralen Anteile zu Charakteren außerhalb von C besitzen“.

Beispiel 4.10.10. Gegeben $f \in \mathcal{S}(\hat{G})$ mit Träger in C gilt $f^\vee * \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_C$. In der Tat haben wir ja $h^\vee * (f^\vee * v) = (h^\vee * f^\vee) * v = (h \cdot f)^\vee * v = 0$ für alle $h \in \mathcal{S}(\hat{G})$ mit $h \cdot f = 0$.

Lemma 4.10.11. Für jede unitäre Darstellung \mathcal{H} einer Geradengruppe G und jedes Kompaktum $C \subset \hat{G}$ besteht \mathcal{H}_C aus differenzierbaren Vektoren.

Beweis. Wir behaupten zunächst für alle $v \in \mathcal{H}_C$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\hat{G})$ mit $\varphi|_C = 1$ die Formel

$$\varphi^\vee * v = v$$

Aus den Definitionen folgt schon mal, daß für jede weitere derartige Funktion ϕ gilt $\phi^\vee * v = \varphi^\vee * v$. Es reicht demnach, unsere Formel für ein derartiges φ zu zeigen, das wir konstant Eins auf einem C und den Ursprung umfassenden Intervall annehmen dürfen, so daß insbesondere für $r \geq 1$ auch $\varphi_r = \varphi \circ (r^{-1} \cdot)$ auf C konstant Eins ist. Damit hängt also $\varphi_r^\vee * v$ gar nicht von $r \geq 1$ ab. Unsere Formel ist mithin gezeigt, sobald wir nachweisen, daß $\langle \varphi_r^\vee * v, w \rangle$ für alle w bei $r \rightarrow \infty$ gegen $\langle v, w \rangle$ strebt. Ist nun λ ein Haarmaß auf G und $\varphi^\vee = \psi \lambda$, so haben wir $\varphi_r^\vee = r(\psi \circ (r \cdot)) \lambda$ und

$$\langle w, \varphi_r^\vee * v \rangle = \int \langle w, t * v \rangle r \psi(rt) \lambda \langle t \rangle = \int \langle w, (u/r) * v \rangle \psi(u) \lambda \langle u \rangle$$

und das strebt nach dem Satz über dominierte Konvergenz bei $r \rightarrow \infty$ gegen $\langle v, w \rangle$. Damit ist die oben behauptete Formel bewiesen. Um nun zu zeigen, daß $v \in \mathcal{H}$ differenzierbar ist, beschränken wir uns auf den Fall $G = \mathbb{R}$. Für jede Funktion ψ aus dem Schwartzraum strebt dann $(\tau_t \psi - \psi)/t$ für $t \rightarrow 0$ in der L^1 -Norm gegen ψ' und damit ist $\psi \lambda * v$ differenzierbar nach 4.10.5 mit Ableitung $\psi' \lambda * v$. \square

Lemma 4.10.12. *Gegeben eine unitäre Darstellung \mathcal{H} einer Geradengruppe G liegt die Vereinigung der \mathcal{H}_C über alle Kompakta $C \subset \hat{G}$ dicht in \mathcal{H} .*

Beweis. Nach 4.10.7 liegt $\mathcal{M}(G) * \mathcal{H}$ dicht in \mathcal{H} . Nach 4.10.13 liegt $\mathcal{C}_1^\infty(\hat{G})^\vee$ dicht in $\mathcal{M}(G)$ für die Variationsnorm. Nach 4.10.5 liegt dann auch $\mathcal{C}_1^\infty(\hat{G})^\vee * \mathcal{H}$ dicht in \mathcal{H} . \square

Lemma 4.10.13. *Die Fouriertransformierten glatter Funktionen mit kompaktem Träger auf der reellen Zahlengeraden bilden einen dichten Teilraum im Raum aller integrierbaren Funktionen auf der reellen Zahlengeraden.*

Beweis. Zunächst einmal liegt der Schwartzraum dicht im Raum aller integrierbaren Funktionen, es reicht also für jede Funktion des Schwartzraums $f \in \mathcal{S}$ eine Folge $g_n \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R})$ anzugeben mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n^\wedge - f\|_1 = 0$. Dazu schreiben wir $f = g^\wedge$ mit $g \in \mathcal{S}$ und wählen $h \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R})$ mit $h|_{[-1,1]} = 1$ und betrachten die Funktionen h_n mit $h_n(x) = h(x/n)$ und setzen $g_n = h_n g$. Jetzt behaupte ich

$$(g_n)^{(i)} \rightarrow g^{(i)}$$

in der L^2 -Norm für $i = 0, 1, 2$, also für die Funktionen selbst und für ihre erste und zweite Ableitung. Sobald das gezeigt ist, folgern wir $y^i g_n^\wedge \rightarrow y^i g^\wedge$ in der L^2 -Norm für $i = 0, 1, 2$ und damit $(1 + y^2)g_n^\wedge \rightarrow (1 + y^2)g^\wedge$ in der L^2 -Norm. Da aber $(1 + y^2)^{-1}$ selbst quadratintegrierbar ist, folgt mit 4.10.14 sofort $g_n^\wedge \rightarrow g^\wedge$ in der L^1 -Norm. Warum aber gilt $(h_n g)^{(i)} \rightarrow g^{(i)}$ in der L^2 -Norm? Nun, wir finden eine Schranke C für $|h - 1|$ und eine Schranke M mit $|g(x)| \leq Mx^{-2}$ für $x \geq 1$ und folgern $|h_n g - g| = |h_n - 1| \cdot |g| \leq MCx^{-2}$ für $x \geq 1$. Für $|x| \leq n$ verschwindet andererseits diese Differenz identisch, und so folgt

$$\|h_n g - g\|_2 \leq 2MC \int_n^\infty x^{-2} dx$$

und das strebt für $n \rightarrow \infty$ gegen Null. Die Behauptung für die höheren Ableitungen zeigt man ähnlich. \square

Übungen

Übung 4.10.14. Gegeben ein Maßraum X definiert für jede quadratintegrierbare Funktion $g \in L^2(X)$ das Multiplizieren mit g eine stetige lineare Abbildung $(g \cdot) : L^2(X) \rightarrow L^1(X)$ mit der Operatornorm $\|g\|_2$.

Übung 4.10.15. Gegeben unitäre Darstellungen (\mathcal{H}, ρ) und (\mathcal{H}', ρ') einer Geradengruppe G und ein Verflechtungsoperator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ zeige man für jedes komplexe Maß $\mu \in M(G)$ und alle $v \in \mathcal{H}$ die Formel $\mu * (Av) = A(\mu * v)$.

4.11 Variationen zum Spektralsatz

Satz 4.11.1 (Simultane Spektralzerlegung). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kompakt getragene auf} \\ \mathbb{R}^n \text{ definierte Teilungen} \\ \Phi \text{ der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} n\text{-Tupel } (T_1, \dots, T_n) \text{ von} \\ \text{paarweise kommutierenden} \\ \text{selbstadjungierten Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \quad \mapsto \quad (\int x_1 \Phi, \dots, \int x_n \Phi)$$

Gegeben eine stetige lineare Abbildung $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ von Hilberträumen und paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sowie $T'_1, \dots, T'_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit $AT_\nu = T'_\nu A$ für $1 \leq \nu \leq n$ haben wir für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ weiter die Identität

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

4.11.2. Der Beweis variiert den Beweis des Spektralsatzes 4.7.8 und wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. Wir beginnen mit einer sehr groben Abschätzung für die Operatornorm eines polynomialen Ausdrucks in paarweise kommutierenden selbstadjungierten Operatoren.

Lemma 4.11.3. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} , darauf paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren T_1, \dots, T_n und ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $\sigma(T_\nu) \subset (a, b)$ für $1 \leq \nu \leq n$ gilt für jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ die Abschätzung

$$\|P(T_1, \dots, T_n)\| \leq \sup\{P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_\nu \in [a, b] \forall \nu\}$$

Beweis. Bezeichne Φ_ν die nach dem Spektralsatz 4.7.8 durch T_ν definierte Teilung der Identität von \mathcal{H} . Wir bilden für jedes r die äquidistante Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$ und betrachten die Intervalle $I_i = (a_{i-1}, a_i]$ und die Operatoren

$$S_\nu^r = \sum_{i=1}^r a_i \Phi_\nu(I_i)$$

Nach dem Spektralsatz gilt in der Operatornorm $S_\nu^r \rightarrow T_\nu$ für $r \rightarrow \infty$ und daraus ergibt sich sofort ebenfalls in der Operatornorm

$$P(S_1^r, \dots, S_n^r) \rightarrow P(T_1, \dots, T_n) \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

Der Operator $P(S_1^r, \dots, S_n^r)$ kann hinwiederum wie folgt beschrieben werden: Man betrachte für jedes n -Tupel $(i(1), i(2), \dots, i(n))$ von Indizes aus $\{1, \dots, r\}$ den Projektor $\Phi_1(I_{i(1)}) \circ \dots \circ \Phi_n(I_{i(n)})$. Die Bilder dieser r^n Projektoren bilden eine Zerlegung unseres Hilbertraums \mathcal{H} in r^n paarweise orthogonale abgeschlossene Teilräume und unser Operator $P(S_1^r, \dots, S_n^r)$ operiert auf dem entsprechenden Teilraum als der Skalar $P(a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(n)})$. Im Fall $n = 2$ etwa ist das genau der Wert, den unser Polynom an der oberen linken Ecke des Rechtecks $I_{i(1)} \times I_{i(2)}$ annimmt. Damit ist klar, daß die Norm von $P(S_1^r, \dots, S_n^r)$ in der behaupteten Weise abgeschätzt werden kann, und dasselbe ergibt sich im Grenzwert auch für die Norm von $P(T_1, \dots, T_n)$. \square

Beweis von 4.11.1. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung. Seien T_1, \dots, T_n paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} . Lemma 4.11.3 zeigt, daß es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt derart, daß für jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ gilt

$$\|P(T_1, \dots, T_n)\| \leq \|P|_K\|_\infty$$

Daraus folgern wir die Existenz und Eindeutigkeit der durch gestrichelte Pfeile angedeuteten stetigen Ringhomomorphismen im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}(K) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{B}(\mathcal{H}) & & \end{array}$$

und haben so bereits das Anwenden einer stetigen Funktion auf einen selbstadjungierten Operator verallgemeinert zum Anwenden einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ auf ein n -Tupel von paarweise kommutierenden selbstadjungierten Operatoren. Wie beim Beweis von 4.2.14 im Anschluß an 4.5.8 folgern wir, daß es für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ genau ein Paar (μ, φ) gibt bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß μ auf \mathbb{R}^n und einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}^n; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi(1) = v$ und $\varphi \circ (x_i \cdot) = T_i \circ \varphi$ für $1 \leq i \leq n$. Wie in 4.8.2 folgende zeigen wir dann, daß es für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar und beschränkt genau einen Operator $f(T_1, \dots, T_n)$ gibt mit $f(T_1, \dots, T_n)v = \varphi(f)$ für φ die kanonische Einbettung zu v wie eben, und daß wir so eine Teilung der Identität mit den gewünschten Eigenschaften erhalten. Der Rest des Beweises ist vollständig analog zum Beweis des Spektralsatzes aus 4.8 und mag dem Leser überlassen bleiben. \square

Korollar 4.11.4 (Spektralsatz für unitäre Operatoren). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf der Kreislinie } S^1 \text{ definierte} \\ \text{Teilungen } \Phi \text{ der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Automorphismen} \\ \text{des Hilbertraums } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \quad \mapsto \quad \int_{S^1} z \Phi \langle z \rangle$$

Beweis. Nach 4.7.14 liefert für jede Teilung der Identität auf der Kreislinie besagtes Integral einen unitären Automorphismus unseres Hilbertraums. Daß diese Konstruktion eine Bijektion liefert, folgt mit mit 4.3.21 aus dem etwas allgemeineren Fall 4.11.6 sogenannter „normaler“ Operatoren. \square

Definition 4.11.5. Ein Operator auf einem Hilbertraum heißt **normal**, wenn er mit seinem Adjungierten vertauscht. In Formeln ist also ein Operator $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, wenn gilt $NN^* = N^*N$. Insbesondere ist jeder selbstadjungierte und jeder unitäre Operator normal. Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Hilbertraums ist normal genau dann, wenn er diagonalisierbar ist mit paarweise aufeinander senkrecht stehenden Eigenräumen, und für jedes projektorwertige Maß Φ auf einem Meßraum und jede beschränkte meßbare komplexwertige Funktion f auf besagtem Raum ist $\int f\Phi$ normal.

Korollar 4.11.6 (Spektralsatz für normale Operatoren).

1. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} erhalten wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \mathbb{C} \text{ definierte kompakt getragene} \\ \text{Teilungen der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Normale} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \qquad \qquad \mapsto \qquad \int z\Phi\langle z \rangle$$

2. Für die einem normalen Operator N entsprechende Teilung der Identität Φ_N ist das Spektrum $\sigma(N)$ von N das kleinste Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ mit $\Phi_N(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$ und der adjungierte Operator wird gegeben durch das Integral

$$N^* = \int \bar{z}\Phi_N\langle z \rangle$$

3. Gegeben eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ und normale Operatoren $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $N' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit $AN = N'A$ gilt für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Borelmenge

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

Beweis. Jeder normale Operator N läßt sich in eindeutiger Weise darstellen als

$$N = R + iI$$

mit kommutierenden selbstadjungierten Operatoren R und I , nämlich mit $R = (N + N^*)/2$ und $I = (N - N^*)/2i$. Betrachten wir zu R und I die simultane

Spektralzerlegung, d.h. die auf \mathbb{R}^2 definierte kompakt getragene Teilung Φ der Identität von \mathcal{H} mit

$$R = \int x\Phi\langle x, y \rangle \quad \text{und} \quad I = \int y\Phi\langle x, y \rangle$$

Wir erhalten unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + iy$ eine Teilung Φ der Identität auf \mathbb{C} mit

$$N = \int z\Phi\langle z \rangle$$

Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen bleiben, für Teil 3 benutze man das anschließende Lemma 4.11.7. \square

Lemma 4.11.7. Gegeben $N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ und $N' : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ normale Operatoren auf Hilberträumen und $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ eine stetige lineare Abbildung mit $AN = N'A$ gilt auch für ihre Adjungierten $AN^* = N'^*A$.

Beweis. Seien $\Phi_N, \Phi_{N'}$ die zugehörigen Teilungen der Identität auf \mathbb{C} . Zunächst einmal gilt es, 4.8.11 auf den Fall normaler Operatoren zu verallgemeinern. Das zeigt dann $A\Phi_N(C) = \Phi_{N'}(C)A$ erst für $C \not\subseteq \mathbb{C}$ und dann durch die Betrachtung geeigneter Differenzmengen auch allgemeiner für halboffene Rechtecke der Gestalt $C = (a, b] \times i(c, d]$. Jetzt schreiben wir N^* und N'^* als Grenzwert von Riemannsummen wie im Beweis von 4.11.3 und das Lemma folgt. \square

Übungen

Übung 4.11.8. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einer Teilung Φ der Identität und f beschränkt und meßbar und $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom haben wir nach 4.7.23 die Identität

$$P\left(\int f\Phi\right) = \int (P \circ f)\Phi$$

Man zeige diese Identität nun für beliebige beschränkte meßbare Funktionen $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

4.12 Unbeschränkte Operatoren

4.12.1. In der Literatur trifft man unitäre Darstellungen von \mathbb{R} meist in einer mehr traditionellen Tracht als sogenannte „unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren“ an. Ich stelle hier dieses Konzept vor und erkläre in Satz 4.12.9 seine Beziehung zu unitären Darstellungen, beweise von diesem Satz jedoch nur noch einen Teil.

Definition 4.12.2. Unter einer **partiell definierten linearen Abbildung** von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W verstehen wir ein Paar (\mathcal{D}, T) bestehend aus einem Untervektorraum $\mathcal{D} \subset V$ und einer linearen Abbildung $T : \mathcal{D} \rightarrow W$. Wir notieren solch eine partiell definierte lineare Abbildung auch $T : V \dashrightarrow W$ und schreiben $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ und nennen diesen Untervektorraum den **Definitionsbereich von T** . Ist V ein normierter Vektorraum und $\mathcal{D} \subset V$ dicht, so sprechen wir von einer **dicht definierten** linearen Abbildung $V \dashrightarrow W$.

Beispiel 4.12.3. Ein typisches Beispiel für eine dicht definierte lineare Abbildung wäre $V = W = L^2(\mathbb{R}; dx)$ mit dem Teilraum $\mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R}; dx) \cap C^1(\mathbb{R}) \mid f' \in L^2(\mathbb{R}; dx)\}$ als Definitionsbereich und dem Ableiten $Tf = f'$ als linearer Abbildung.

Definition 4.12.4. Gegeben $T : \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{H}'$ eine dicht definierte lineare Abbildung von Hilberträumen erklären wir eine weitere partiell definierte lineare Abbildung $T^* : \mathcal{H}' \dashrightarrow \mathcal{H}$, ihre **adjungierte Abbildung**, indem wir den Teilraum $\mathcal{D}(T^*) = \{v' \in \mathcal{H}' \mid v \mapsto \langle v', Tv \rangle \text{ ist stetig auf } \mathcal{D}(T)\}$ als ihren Definitionsbereich wählen und dann $T^* : \mathcal{D}(T^*) \rightarrow \mathcal{H}$ unter Verwendung des Satzes von Riesz 2.8.3 erklären durch die Vorschrift

$$\langle T^*v', v \rangle = \langle v', Tv \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(T), v' \in \mathcal{D}(T^*)$$

Definition 4.12.5. Ein **unbeschränkter selbstadjungierter Operator** auf einem Hilbertraum ist eine dicht definierte lineare Abbildung von unserem Hilbertraum in sich selber, die mit ihrer Adjungierten zusammenfällt, in Formeln $T : \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{H}$ mit $T^* = T$. Mit gefordert wird hier implizit insbesondere auch die Gleichheit der Definitionsbereiche $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$.

4.12.6. Mich befriedigt diese Terminologie nicht vollständig, da natürlich auch alle beschränkten selbstadjungierten Operatoren Beispiele für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren sind. Stattdessen stets von „nicht notwendig beschränkten“ selbstadjungierten Operatoren zu reden, wäre aber auch wieder umständlich.

Lemma 4.12.7. Für jedes nichtnegative Borelmaß μ auf \mathbb{R} ist das Paar (\mathcal{D}, T) bestehend aus dem Teilraum $\mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R}; \mu) \mid xf \in L^2(\mathbb{R}; \mu)\}$ und der Abbildung $T : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$, $f \mapsto xf$ ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator auf $L^2(\mathbb{R}; \mu)$. Hierbei meint x die Identität auf \mathbb{R} .

Beweis. Per definitionem besteht $\mathcal{D}(T^*)$ aus allen $g \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ derart, daß sich die Abbildung $f \mapsto \int \bar{g}xf\mu$ stetig von \mathcal{D} auf ganz $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ fortsetzen läßt. Die Inklusion $\mathcal{D}(T^*) \supset \mathcal{D}$ scheint mir damit offensichtlich. Läßt sich andererseits für vorgegebenes $g \in L^2$ unsere Abbildung stetig von \mathcal{D} nach L^2 fortsetzen, so wird diese Fortsetzung nach 2.8.3 gegeben durch das Integrieren gegen eine Funktion

$h \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ als $f \mapsto \int \bar{h}f \mu$. Insbesondere gilt also für jede glatte Funktion f mit kompaktem Träger $\int \bar{g}xf \mu = \int \bar{h}f \mu$ und daraus folgt mit 3.3.12 dann $\bar{g}x = \bar{h}$ fast überall, also $xg \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ und damit $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}$. \square

Beispiel 4.12.8. Ich komme nocheinmal auf das Beispiel 4.12.3 zurück. Gegeben $f, g \in \mathcal{D}$ gilt ja sicher

$$\int_a^b \bar{g}f' = \bar{g}f \Big|_a^b - \int_a^b \bar{g}'f$$

und wegen $\bar{g}f \in L^1$ finden wir Folgen a_n, b_n mit $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow \infty$ und $(\bar{g}f)(a_n) \rightarrow 0, (\bar{g}f)(b_n) \rightarrow 0$. Daraus folgern wir

$$\langle g, Tf \rangle = -\langle Tg, f \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{D}$$

Mithin unterscheidet sich in diesem Fall der Operator $(iT)^*$ vom Operator iT höchstens dadurch, daß er eventuell einen größeren Definitionsbereich hat. Und den hat er in unserem Fall in der Tat, zum Beispiel gehört zu besagtem Definitionsbereich auch noch jede stetige Funktion, die auf $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ stetig differenzierbar ist und deren Ableitung dort jeweils quadratintegrierbar ist. Genauer erhalten wir eine Erweiterung unseres Operators zu einem selbstadjungierten Operator, wenn wir t statt x schreiben und den folgenden Satz 4.12.9 auf die unitäre Darstellung von \mathbb{R} auf $L^2(\mathbb{R}; dt)$ anwenden, bei der $t \in \mathbb{R}$ durch Verschiebung um t operiert, in Formeln $\rho(t) = \tau_t$.

Satz 4.12.9. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} liefert das Bilden des infinitesimalen Erzeugers S_ρ zu einer unitären Darstellung ρ im Sinne von 4.1.15 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Unbeschränkte selbstadjungierte} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\rho \qquad \mapsto \qquad (\mathcal{H}^1, -iS_\rho)$$

Beweis. Wir zeigen hier nur, daß wir so eine Abbildung erhalten. Das einzige Problem dabei ist zu zeigen, daß der adjungierte Operator zu iS_ρ auch keinen größeren Definitionsbereich hat als \mathcal{H}^1 . Das folgt jedoch sofort aus der lokalen Darstellung 4.1.4 in Verbindung mit 4.12.7. Daß die so konstruierte Abbildung eine Bijektion ist, wird erst später gezeigt werden. \square

4.12.10. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} folgern wir aus dem vorhergehenden Satz 4.12.9 in Verbindung mit dem Satz über die Spektralzerlegung unitärer Darstellungen 4.9.1 sogar ein kommutatives Dreieck von Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\nearrow \sim \qquad \sim \searrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Unbeschränkte selbstadjun-} \\ \text{-gierte Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \mapsto \qquad \int x\Phi(x)$$

Hier ist der fragliche Operator nur auf den $v \in \mathcal{H}$ mit $\int |x|\langle v, \Phi v \rangle < \infty$ definiert, für $\langle v, \Phi v \rangle$ das in 4.7.20 erklärte Maß, und für diese v ist er definiert durch die Bedingung

$$\left\langle w, \left(\int x\Phi(x) \right) v \right\rangle = \int x\langle w, \Phi v \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Weiter meint \nearrow unsere Bijektion aus dem Satz über die Spektralzerlegung unitärer Darstellungen 4.9.1 und \searrow unsere Bijektion aus dem vorhergehenden Satz 4.12.9 und das a priori völlig unmotivierte Vorzeichen in 4.12.9 habe ich nur eingeführt, damit ein kommutatives Dreieck entsteht, ohne daß wir irgendwo anders ein noch unnatürlicheres Vorzeichen einführen müßten.

4.12.11. In der Quantenmechanik modelliert man die Menge aller möglichen Zustände eines vorgegebenen physikalischen Systems als die Menge $\mathbb{P}\mathcal{H}$ aller eindimensionalen Teilräume eines Hilbertraums \mathcal{H} . Messungen mit zwei möglichen Resultaten – Ja oder Nein – modelliert man als abgeschlossene Teilräume $T \subset \mathcal{H}$. Wenden wir auf einen Zustand $\mathbb{C}v \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ eine Messung T an, so gilt es, den Vektor v auf den vorgegebenen Teilraum $T \subset \mathcal{H}$ zu projizieren vermittels des zugehörigen orthogonalen Projektors pr_T , und das Verhältnis von $\|\text{pr}_T(v)\|^2$ zu $\|v\|^2$ wird dann interpretiert als die Wahrscheinlichkeit $P(v)$ für das Meßergebnis „Ja“, in Formeln

$$P(v) = \frac{\|\text{pr}_T(v)\|^2}{\|v\|^2}$$

Feinere Messungen, die als Meßergebnisse etwa beliebige reelle Zahlen liefern können, modelliert man als Teilungen Φ der Identität von \mathcal{H} , die etwa auf der reellen Zahlengeraden definiert sind, und interpretiert dann für jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ den Projektor $\Phi(M)$ in der Weise, daß $\|\Phi(M)v\|^2/\|v\|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß der Zustand $\mathbb{C}v$ bei unserer Messung ein Resultat aus M liefert.

4.12.12. Eine partiell definierte lineare Abbildung von Banachräumen heißt ein **abgeschlossener Operator**, wenn ihr Graph abgeschlossen ist im Produktraum. Das ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Abgeschlossenheit für Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß für eine konvergente Folge v_n im Definitionsbereich unseres Operators, für die auch die Folge der Bilder Tv_n konvergiert, der Grenzwert v auch im Definitionsbereich unseres Operators liegt und zusätzlich gilt $Tv_n \rightarrow Tv$. Man kann zeigen, daß jeder unbeschränkte selbstadjungierte Operator abgeschlossen ist.

Übungen

Übung 4.12.13. Ist Φ eine kompakte getragene auf \mathbb{R} definierte Teilung der Identität eines Hilbertraums \mathcal{H} und T der zugehörige selbstadjungierte Operator, so ist $\langle Tv, v \rangle / \|v\|^2$ der Erwartungswert für das Ergebnis, das man erhält, wenn man die durch Φ beschriebene Messung auf den Zustand $\mathbb{C}v$ anwendet. Das ist im übrigen genau die Zahl, für die wir im Beweis von [LA2] 1.12.15 die Bezeichnung als „Raleigh-Quotient“ eingeführt hatten.

5 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Kinan Halabi, Christina Pflanz, Vivien Vogelmann, ...

6 Planung und Tagebuch Analysis 3 WS 23/24

Es handelt sich um eine vierstündige Vorlesung zur Analysis 3, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen. Die folgende Planung wird nach und nach zu einem Vorlesungstagebuch umgeschrieben werden.

- 17.10 Alternierende Formen und Dachprodukt [AN2] 9.1. Differentialformen höheren Grades definiert und anodiert.
- 19.10 Differentialformen höheren Grades [AN2] 9.2. Orientierung [AN2] 9.3. Beginn Integration von Differentialformen [AN2] 9.4.3.
- 24.10 Integration von Differentialformen [AN2] 9.4.3. Anschauung, Beispielrechnung, Beweis Eindeutigkeit, Beweisskizze Existenz. Noch nicht Fälle kleiner Dimension oder Kodimension.
- 26.10 Höhere Ableitungen ohne Koordinaten. Äußere Ableitung von Differentialformen.
- 31.10 Randfaltungen. Bei den Beweisen zu Randkarten skizzenhaft geblieben. Integralsatz von Stokes [AN2] 9.7.2. Satz von Gauß anodiert.
- 2.11 Integration [AN2] 9.4.8 von Differentialformen über Fastfaltungen kleiner Dimension oder Kodimension, insbesondere Fluß als Integral einer Differentialform [AN2] 9.4.12. Nochmal Gauß [AN2] 9.7.11. Green'sche Formel. Ursprüngliche Fassung des Satzes von Stokes. Fassung für Eckfaltungen. Homotopieinvarianz des Wegintegrals geschlossener Kovektorfelder.
- 7.11 Von nun an arbeiten wir mit dem Skriptum für Analysis 3. Mengenalgebren, σ -Algebren, Borelmengen, Meßräume, Maße. Charakterisierung des Lebesgue-Maßes. Unmöglichkeit eines translationsinvarianten Maßes auf der Potenzmenge der reellen Zahlengeraden, das dem Einheitsintervall das Maß Eins zuordnet. Also Abschnitt 1.1 Maßräume und Maße. Noch nicht Erzeugung von Topologie.
- 9.11 Prämaße, Konstruktion des Prämaßes zum Lebesguemaß und zu Stieljes-Maßen auf der reellen Geraden. Maßfortsetzungssatz und Beschreibung der kanonischen Fortsetzung noch ohne Beweis. Also Beginn von Abschnitt 1.2. Gekommen bis Konstruktion äußerer Maße 1.2.20.
- 14.11 Weiter mit Ausdehnen von Prämaß zu äußerem Maß 1.2.22 bis zum Ende von Abschnitt 1.2.

- 16.11 Vervollständigung von Maßräumen. Beginn Meßbarkeit. Hole erzeugte Topologie nach! Summen und Produkte meßbarer Funktionen. Erste Aussage von 1.4.30 noch bewiesen.
- 21.11 Punktweise Grenzwerte meßbarer Funktionen ab 1.4.30. Definition des Integrals meßbarer nichtnegativer reeller Stufenfunktionen und des Integrals meßbarer Funktionen nach $[0, \infty]$. Satz über monotone Konvergenz. Additivität des Integrals mit Lemma 1.5.15 und dessen Beweis.
- 23.11 Restriktion von Maßen 1.1.41, Integrale über Restriktionen 1.5.16. Integrierbare Funktionen, dominierte Konvergenz. Produktmaß 1.7.1.
- 28.11 Integration auf Produkträumen: Positiver Fubini bis Integral als Fläche unter dem Graphen 1.7.13 einschließlich.
- 30.11 Integration auf Produkträumen: Fubini. Dann Regularität von Borelmaßen. Insbesondere auch Beschreibung des von einem Mengensystem erzeugten Mengenrings nachholen. Beim Beweis der Regularität von Borelmaßen bis zum Punkt gekommen, daß jede Menge aus \mathcal{Q} Schnitt eine absteigenden Folge offener Mengen mit kompaktem Abschluß ist.
- 5.12 Regularität von Borelmaßen beenden. Transformationsformel. Bildmaß, Integral über Bildmaß. Produkt von Maß mit meßbarer nichtnegativer Funktion. Regularität von Borelmaßen auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Fläche unter der Glockenkurve. Flächenmaß noch ohne Beweis und Rückwärtskompatibilität zur Integration kompakt getragener stetiger Funktionen mit Beweis.
- 7.12 Flächenmaß Beweis. Rückwärtskompatibilität zum Lebesgue-Maß. Zwiebelformel, aber ohne die entscheidende Rechnung.
- 12.12 Integrierbarkeit und Integral vektorwertiger, insbesondere komplexwertiger Funktionen. Räume integrierbarer Funktionen, fast überall definierte Funktionen. Fourierreihe als Isomorphismus von Hilberträumen noch ohne Beweis. Raum der L^p -Funktionen. Noch nicht $p = \infty$ behandelt. Young'sche Ungleichung und andere fundamentale Ungleichung bewiesen.
- 14.12 Die $\|\cdot\|_p$ -Norm ist eine Norm. Die L^p -Räume sind vollständig. Beginn von Stone-Weierstraß [AN2] 7.2.7.
- 19.12 Ich werde vertreten: Hilberträume, Hilbertbasen nach 2.4.1 folgende.

- 21.12 Approximationssatz von Stone-Weierstraß [AN2] 7.2.7 mit Beweis. Unterschiede zur Taylorentwicklung betonen, insbesondere Fragen der Eindeutigkeit und Beziehung zur Fourierreihe. Am Schluß Formulierung für Fouriergruppen als Skizze.
- 21.12 Ich meine, das war bewiesen: Die differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger auf einer offenen Teilmenge der \mathbb{R}^n liegen dicht in den L^p Funktionen für $p < \infty$. Konvergenz der Fourier-Reihe in $L^2([0, 2\pi])$.
- 9.1 Produkttopologie wiederholen. Fouriergruppen. Gruppenwege und Charaktere, insbesondere Charaktere der Kreisgruppe und der Zahlengerade. Definition, Existenz und Eindeutigkeit der Haarmaße auf Fouriergruppen bewiesen.
- 11.1 Die Charaktere bilden eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer kompakten Fouriergruppe für das normierte Haarmaß. Orthogonale Projektionen in Hilberträumen.
- 16.1 Ivan vertritt mich. Definition und erste Eigenschaften der Fouriertransformation nach 3.1.
- 18.1 Ivan vertritt mich. Poisson-Formel 3.3.2, Beziehung zur Fourierreihe ??, Inversionsformel 3.3.5, Fouriertransformation quadratintegrierbarer Funktionen 3.3.7, Verträglichkeit der Fouriertransformation auf L^1 und L^2 nach 3.3.9. Definition und Eigenschaften von L_S^{loc} fehlen noch.
- 23.1 Lokal integrierbare Funktionen 3.3.11 bis Berechnung der Fouriertransformierten einer quadratintegrierbaren Funktion 3.3.14. Dann Fouriertransformation ohne Koordinaten 3.2.2. Charakterpaarung und Fouriertransformation komplexer Maße.
- 25.1 Gewöhnliche Fouriertransformation ist injektiv auf Maßen 3.3.15. Abtastatz 3.4.8. Vielleicht Beginn der Diskussion der Topologie der Charaktergruppe.
- 30.1 Topologie der Charaktergruppe. Natürlichkeit der Fouriertransformation. Beispiele.
- 1.2 Faltung von Maßen und Funktionen. Assoziativität. Verhalten unter Fouriertransformation.
- 6.2 Beweis zentraler Grenzwertsatz beendet. Als Ausblick Wellengleichungen in den Dimensionen Eins und Drei diskutiert.

8.2 Ausblick: Unitäre Darstellungen von $(\mathbb{R}, +)$, selbstadjungierte Operatoren und Fouriertransformation.

7 Die Vorlesung Analysis 3 im WS 15/16

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 20.10 Integrale stetiger Funktionen über kompakte Quader, auch mit Riemannsummen. Stetige Funktionen mit kompaktem Träger, deren Fortsetzung durch Null, deren Integral. Formulierung der Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Erste Beispiele.
- 22.10 Beweis der Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Motivation. Zerlegung der Eins.
- 27.10 Äquivalenz von je zwei Normen auf endlichdimensionalem reellen Vektorraum. Differential für Abbildungen einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen affinen Raum. Untermannigfaltigkeiten über Plättungen als Definition. Karten und Koordinatensysteme. Untermannigfaltigkeiten als Bilder noch ohne Beweis.
- 29.10 Untermannigfaltigkeiten als Bilder mit Beweis. Differenzierbarkeit der Kartenwechsel. Integration von Funktionen mit kompaktem Träger über in \mathbb{R}^n eingebettete Mannigfaltigkeiten. Approximation des Integrals durch Riemannsummen.
- 3.11 Fastfaltigkeiten, Integrationskarten, Integration über Fastfaltigkeiten, Oberfläche der Kugel.
- 5.11 Vektorfelder und Kovektorfelder, Schreibweise, Verwandtschaft, Zurückholen. Das Differential einer Funktion als Kovektorfeld. Zurückholen vertauscht mit dem Differential. Zurückholen in Koordinaten.
- 10.11 Wegintegral über Kovektorfeld und seine Eigenschaften. Beziehung zu Wegintegralen über Vektorfelder und Fluß durch eine Kurve. Am Schluß noch alternierende Multilinearformen. Satz über das Dachprodukt formuliert, aber noch nicht bewiesen. Satz über Basisformen noch nicht formuliert.
- 12.11 Dachprodukt, Formeln in der äußeren Algebra. Determinante und Rückzug, Satz über Basisformen. Felder von p -Formen, Rückzug von p -Formen, anschauliche Bedeutung.
- 17.11 Rückzug von Volumenformen und Determinante. Orientierung von Mannigfaltigkeiten und Fastfaltigkeiten. Integration von Formen über orientierte Fastfaltigkeiten. Beispiel der Hemisphäre. Noch nicht: Beschreibung durch

- Riemann-Summen, alternative Interpretation für Fastfaltigkeiten kleiner Dimension und kleiner Kodimension.
- 19.11 Beschreibung des Formen-Integrals durch Riemann-Summen, alternative Interpretation für Fastfaltigkeiten kleiner Dimension und kleiner Kodimension, insbesondere Fluß durch Hyperfläche. Äußere Ableitung und Formelsammlung dazu noch ohne Beweis. Interpretation von Divergenz und Rotation als äußere Ableitung.
- 24.11 Anschauliche Bedeutung der äußeren Ableitung. Beweis der Formeln der Formelsammlung. Randfaltigkeiten und Beweis des Stokes'schen Integralsatzes.
- 26.11 Stokes'scher Integralsatz für Eckfaltigkeiten. Beispiele. Green'sche Formel. Ableitung der klassischen Sätze von Gauß und Stokes und Wegintegral über ein Feld mit Potential. Abschluß des ersten Teils der Vorlesung.
- 1.12 Mengenalgebren, σ -Algebren, Borelmengen, Meßräume, Maße. Charakterisierung des Lebesgue-Maßes. Unmöglichkeit eines translationsinvarianten Maßes auf der Potenzmenge der reellen Zahlengeraden, das dem Einheitsintervall das Maß Eins zuordnet. Noch nicht dessen Regularität.
- 3.12 Regularität für die Anschauung, Beweis kommt viel später. Prämaße, Konstruktion des Prämaßes zum Lebesguemaß und zu Stieltjes-Maßen auf der reellen Geraden. Maßfortsetzungssatz und Beschreibung der kanonischen Fortsetzung noch ohne Beweis. Nächstes Mal mit der Definition eines äußeren Maßes beginnen.
- 8.12 Äußere Maße, Zerlegerlemma, Beweis des Maßfortsetzungssatzes von Caratheodory. Vervollständigung von Maßräumen. Stieltjes-Maße nicht behandelt.
- 10.12 Stieltjes-Maße. Meßbarkeit. Summen, Produkte und Grenzwerte meßbarer Funktionen. Definition des Integrals meßbarer nichtnegativer reeller Stufenfunktionen. Noch nicht dessen Linearität.
- 15.12 Integral meßbarer nichtnegativer Funktionen und Satz über monotone Konvergenz. Integrierbare Funktionen, deren Integral, Linearität des Integrals, Satz über dominierte Konvergenz.
- 17.12 Produktmaß, Sätze von Tonelli und Fubini. Noch nichts außer der reinen Theorie. Noch nicht Cavalieri, Beziehung zum Riemann-Integral.

- 22.12 Cavalieri, Beziehung zum Riemann-Integral, partielle Integration. Regularität von Borelmaßen auf dem \mathbb{R}^n , jedoch nicht auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen.
- 7.1 Transformationsformel. Bildmaß, Integral über Bildmaß. Produkt von Maß mit meßbarer nichtnegativer Funktion. Regularität von Borelmaßen auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n , jedoch nicht auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen. Nützliche Nullmengen. Fläche unter der Glockenkurve. Nicht Flächenmaß von Fastfaltigkeiten, nur kurz mündlich was dazu gesagt.
- 12.1 Integrierbarkeit und Integral komplexwertiger Funktionen. Räume quadratintegrierbarer Funktionen und Fouriertransformation. Räume integrierbarer Funktionen, fast überall definierte Funktionen, Raum der L^p -Funktionen. Noch nicht $\| \cdot \|_p$ -Norm.
- 14.1 Die $\| \cdot \|_p$ -Norm ist eine Norm. Die L^p -Räume sind vollständig. Hilberträume, Hilbertbasen. Noch nicht der Satz über Hilbertbasen.
- 19.1 Satz über Hilbertbasen. Die differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger auf einer offenen Teilmenge der \mathbb{R}^n liegen dicht in den L^p Funktionen für $p < \infty$. Konvergenz der Fourier-Reihe in $L^2([0, 2\pi])$.
- 21.1 Einparameteruntergruppen der multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen. Charaktere der Kreisgruppe. Produkttopologie. Noch nicht topologische Gruppen.
- 26.1 Topologische Gruppen und ihre Charaktere. Charaktere von $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und von der Kreisgruppe. Fouriergruppen erklärt als topologische Gruppen, die isomorph sind zu endlichen Produkten der eben aufgezählten Beispiele. Definition, Existenz und Eindeutigkeit ihrer Haar-Maße bewiesen. Die Charaktere bilden eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer kompakten Fouriergruppe für das normierte Haarmaß.
- 28.1 Standardisierte Fouriertransformation. Formelsammlung. Die Fouriertransformation erhält den Schwarzraum. Fouriertransformierte integrierbarer Funktionen verschwinden im Unendlichen. Abstrakte Fouriertransformation eines Maßes und seine Beziehung zur standardisierten Fouriertransformation. Natürlichkeit, aber noch nicht Produktverträglichkeit.
- 2.2 Paarung, duale Paarung, exakte Paarung von Fouriergruppen. Zugehörige abstrakte Fouriertransformationen, Fourierreihe und Fouriertransformation

als Beispiele. Abstrakte Inversionsformel, konkrete Variante für \mathbb{R} , abstrakte und konkrete Poissonformel, Herleitung der Inversionsformel aus der Poissonformel (bis auf letzten Schliff).

- 4.2 Herleitung der Inversionsformel aus der Poissonformel. Interpretation der Poissonformel als Natürlichkeit. Fourierisomorphismus für quadratintegrierbare Funktionen. Gleichheit der verschiedenen Varianten der Fouriertransformation im Dualraum des Schwartzraums.
- 9.2 Falten von Maßen. Assoziativität. Verhalten unter Fouriertransformation. Beweis des zentralen Grenzwertsatzes begonnen. Gekommen bis zur punktweisen Konvergenz der charakteristischen Funktionen.
- 11.2 Beweis zentraler Grenzwertsatz beendet. Translationsinvariante abgeschlossene Teilräume des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf der reellen Geraden.

Literatur

- [AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.
- [AN1] Skriptum Analysis 1. Wolfgang Soergel.
- [AN2] Skriptum Analysis 2. Wolfgang Soergel.
- [FT1] Skriptum Funktionentheorie 1. Wolfgang Soergel.
- [GR] Skriptum Grundlagen. Wolfgang Soergel.
- [LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.
- [LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.
- [ML] Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen. Wolfgang Soergel.
- [NAS] Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie. Wolfgang Soergel.
- [TM] Skriptum Topologie und kompakte Gruppen. Wolfgang Soergel.
- [TSK] Skriptum Kategorielle Produktstrukturen. Wolfgang Soergel.
- [Wer05] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 5 edition, 2005.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das \cup dem Buchstaben u oder das \subset dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

- 1_A Indikatorfunktion von A , 34
- \dashrightarrow partiell definierte lineare Abbildung, 215
- \dashrightarrow fast überall definierte Abbildung, 73
- \rightsquigarrow verwandt
 - Maße, 33
- $[A]$ charakteristische Funktion, 34
- $\hat{\otimes}$ vervollständigtes Tensorprodukt, 90
- A^* adjungierter Operator, 104
- A^\dagger adjungierter Operator, 104
- * Faltung
 - von Maßen, 132
- \otimes Produkt- σ -Algebra, 46
- P^X Verteilung von X , 33
- \boxtimes äußeres Produkt
 - von σ -Algebren, 27
 - von Funktionen, 135
 - von Maßen, 46
- $\mu|_A$ Restriktion eines Maßes, 12
- Abbildung
 - überall definierte, 73
- abgeschlossen
 - Operator, unbeschränkter, 217
- Abtastsatz, 131
- abzählbar basiert, 28
- Abzählbarkeitsaxiom, zweites, 29
- additiv
 - σ -additiv
 - auf Mengenring, 13
- adjungiert
 - bei Charakterpaarung, 128
 - Operator, 104
 - partiell definierte Abbildung, 215
- äußeres Maß, 16
- äußeres Produkt
 - von σ -Algebren, 27
 - von Funktionen, 135
- Algebra
 - σ -Algebra, 5
- analytisch
 - banachwertige Funktion, 183
- Baire'scher Kategoriensatz, 172
- Banach-Algebra, 177
- Banach-Ringalgebra, 177
- Banach-Steinhaus, 174
- Banach-Tarski-Paradoxon, 11
- Basis einer Topologie, 28
- Benford's Gesetz, 23
- Beppo Levi, 45
- beschränkt
 - gleichmäßig, 174
 - uniform, 174
- biadditiv, 114
- Bild
 - von σ -Algebra, 26
- Bildmaß, 31, 120
- Bimorphismus, 114
- Bochner, Satz von, 129
- Borel(X) Borelmengen von X , 8
- Borelmaß, 8
- Borelmenge, 8
- borelsche σ -Algebra, 8
- $\mathcal{C}(X, Y)$ Raum stetiger Abbildungen, 157
- Cantor-Menge, 23
- Cavalieri, 51
- Charakter
 - unitärer, 94
 - von topologischer Gruppe, 94
- Charaktergruppe, 94
- charakteristische Funktion
 - einer Menge, 34

eines Maßes, 126
 Charakterpaarung
 duale, 114
 von Fouriergruppen, 114
 Charakterraum, 118
 χ_A charakteristische Funktion, 34
 Cosinustransformation, 112
 Darstellung
 unitäre
 von \mathbb{R} , 164
 dicht
 definiert, 215
 differenzierbar
 Vektor, 169
 Dirac-Maß, 7
 Distribution
 temperierte, 126, 149
 dominierte Konvergenz, 43
 $E(X)$ Erwartungswert der Zufallsvariable X , 41
 Einbettung
 kanonische unitäre, 167
 Einparameteruntergruppe, 94
 Einskomponente, 163
 Element
 zufälliges, 26
 Elementar-Ereignis, 7
 endlich
 Maß, 113
 Ereignis, 7
 Erwartungswert
 einer Zufallsvariable, 41
 Erzeuger
 infinitesimaler, 169
 erzeugt
 σ -Algebra, 7
 Mengenalgebra, 22
 Mengenring, 22
 essentiell
 Supremum, 79
 Exponentialgesetz
 topologisch, 157
 Faltung, 156
 von Maßen, 132
 fast überall
 auf Maßraum, 73
 final
 stetige Abbildung, 34
 Finaltopologie, 27
 Flächenmaß, 63
 Fouriergruppe, 96
 Fouriertransformation
 kanonische, 127
 mathematisch standardisierte, 107
 physikalisch standardisierte, 106
 stochastisch standardisierte, 107
 zu Charakterpaarung, 115
 Frequenzmaß, 167
 Fubini, 52
 Funktionalkalkül, 200
 Gauß
 Glockenkurve, 60
 Gauß'sche Glockenkurve, 60
 Geradengruppe, 166
 Gitterpunktsatz, 62
 gleichmäßig beschränkt, 174
 gleichmäßige Beschränktheit, Prinzip
 der, 174
 Glockenkurve, 60
 größte Fortsetzung
 von Prämaß, 16
 Gruppe
 topologische, 93
 Gruppenweg, 94
 Haar-Maß
 auf Fouriergruppe, 96
 Haarmaß
 duales, 146

Halbdichte, 150
 Halbmetrik, 140
 Halbnorm, 140
 Harmonische Analysis, 116
 Hausdorffgruppe, 93
 Hellinger-Toeplitz, 171
 Hilbertbasis, 83
 Hilbertsumme, 90
 Hölder-Ungleichung, 78
 holomorph
 banachwertige Funktion, 182

 Imaginärkoordinate, 144
 Indikatorfunktion, 34
 induziert
 Maßraum, 12
 infinitesimaler Erzeuger, 169
 Initialtopologie, 27
 innerer Punkt einer Teilmenge
 eines metrischen Raums, 172
 Integral
 nichtnegative meßbare Funktion
 über Maßraum, 35
 von vektorwertiger Funktion
 über Maßraum, 71
 Integration
 partielle, 54
 integrierbar, 40
 vektorwertige Funktion, 71

 Jensen'sche Ungleichung
 kontinuierliche, 46

 kanonische Einbettung, 176
 kanonische Norm
 auf Banachringalgebra, 178
 kompakt getragen
 Maß, 131
 projektorwertiges Maß, 194
 kompakt-offene Topologie, 157
 komplex
 Maß, 113

 konjugiert
 Exponenten, 78
 konjugierte Exponenten, 79
 Konvolution
 von Maßen, 132
 Kreisgruppe, 94

 λ, λ^n Lebesguemaß auf \mathbb{R}^n , 9
 $l^2(I)$, 83
 $\mathcal{L}^1(X; \mu)$, 71
 $\mathcal{L}_V^1(X; \mu)$, 71
 $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X; \mu)$, 40
 $L^2(I)$ quadratintegrierbare Funktionen,
 83
 Laplace-Transformierte, 111
 Lebesgue-Mengen, 25
 Lebesgue-meßbar, 31
 Lebesgue-meßbaren, 25
 $\lim_{g(x) \rightarrow z}$, 110
 lim sup limes superior
 einer Mengenfolge, 12
 limes superior
 einer Mengenfolge, 12
 linksseitig stetig, 15
 lokal integrierbar, 124
 lokal kompakt
 topologischer Raum, 68
 lokale Beschränktheit, Prinzip der, 172

 $\mathcal{M}(G)$ Schwartzmaße, 146
 $M(X)$ komplexe Maße auf X , 113
 $M(X; [0, \infty))$ endliche Maße, 113
 $M(X; [0, \infty])$ Maße, 113
 $M(X; \mathbb{R})$ reelle Maße, 113
 majorisierte Konvergenz, 43
 Mantelfläche, 66
 Markov-Ungleichung, 46
 Maß, 6
 äußeres, 16
 endliches, 113
 komplexes, 113

- nichtnegatives, 6
- projektorwertiges, 193
- reelles, 113
- teilraumwertiges, 193
- topologisches, 8
- Maßraum, 7
- Mellin-Transformation, 112
- Mengenalgebra, 4
 - erzeugt von Mengensystem, 22
- Mengening, 12
 - erzeugt von Mengensystem, 22
- Mengensystem, 4
- meßbar
 - α -meßbar, Menge, 18
 - μ -meßbar, Funktion, 31
 - Abbildung, 26
 - fast überall definierte Funktion, 74
 - Menge, 5
- Meßmonoid, 132
- Meßraum, 5
- Minkowski
 - Gitterpunktsatz, 62
- Monoid
 - topologische, 93
- monotone Konvergenz, 36
- nichtnegativ, 190
- normal
 - Operator, 213
- Normalverteilung, 136
- Normierung, 9
- Nullmenge, 24
- offen
 - Abbildung, 176
- offenes Bild, Satz von, 176
- Operator
 - unbeschränkter, 215
- Operatortopologie
 - starke, 164
- Orthonormalsystem, 83
 - vollständiges, 83
- partiell
 - definiert, lineare Abbildung, 215
 - Integration, 54
- Plancherel-Maß, 146
- Polarzerlegung
 - in Hilbertraum, 189
- positiv semidefinit
 - Operator, 188
- Potenzmenge, 4
- Prähilbertraum, 82
- Prämaß, 13
- Prinzip von Cavalieri, 51
- Produkt- σ -Algebra, 27
- Produkttopologie, 28
- Pseudometrik, 89
- pseudometrischer Raum, 89
- Punkt
 - innerer, 172
- quadratintegrierbar
 - Funktion, 72
- Quotientennorm, 184
- reell
 - Maß, 113
- reellen Banachringalgebra, 177
- regulär
 - Borelmaß, 68
- Riemannsumme
 - für Integral nach Maß, 45
- Riesz'scher Darstellungssatz
 - bei Hilbertraum, 103
 - Maßtheorie
 - auf affinem Raum, 190
- Rotationskörper, 66
- σ -Algebra
 - erzeugt von Mengensystem, 7
 - σ -endlich, 22
 - $\sigma(\mathcal{E})$ von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra, 7

$\mathcal{S}(G)$ Schwartzraum, 145
 σ -Subadditivität, 16
 σ -additiv
 auf Mengenring, 13
 σ -Algebra, 5
Sampling Theorem, 131
Sard
 Satz von, 60
schiefadjungiert, 170
schnittstabil
 für zweischnittstabil, 22
Schwartzma, 146
Schwartzraum, 109, 145
selbstadjungiert, 169
 σ -endlich, 15
separabel
 metrischer Raum, 29
separabel, topologischer Raum, 29
Sinustransformation, 112
Spektralmaß
 eines Vektors, 176
Spektralprojektor
 einer unitären Darstellung, 204
Spektralradius, 181
Spektrum
 bei Banachalgebren, 178
starke Operortopologie, 164
stetig
 linksseitig, 15
Stieltjes-Maß, 20
Stufenfunktion, 34
summierbar
 Familie in normiertem Vektorraum,
 73
System von Teilmengen, 4
Teilung der Identität, 193
temperiert
 Distribution, 126, 149
Tensorprodukt
 vervollständigtes, 90
Tonelli, Satz von, 48
 $\text{Top}(X, Y)$ stetige Abbildungen, 157
Topologie
 erzeugt von Mengensystem, 8
topologisch
 Maß, 8
 meßbar, 8
 Monoid, 93
topologische Gruppe, 93
Transformationsformel
 für das Lebesgueintegral, 58
translationsinvariant, 9
tribu, 5
 überall definiert
 Abbildung, 73
unbeschränkt
 Operator, 215
uniform
 beschränkt, 174
unitär, 85
 Darstellung
 von \mathbb{R} , 164
Unterdarstellung
 unitäre, 167
Unterintegral, 36
Urbild
 von σ -Algebra, 26
Variation
 eines Maßes, 119
Variationsnorm, 119
Verfeinerung
 von Wahrscheinlichkeitsraum, 33
Verflechtungsoperator, 205
Verschmelzungsidentitäten, 57
Verteilung
 einer Zufallsvariable, 33
 geometrische, 33
Verteilungsfunktion
 eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, 21

- von Zufallsvariable, 33
- Vervollständigung
 - von Maßraum, 25
 - von metrischem Raum, 88
 - von metrischem Raum, eine, 87
 - von normiertem Vektorraum, 89
 - von pseudometrischem Raum, 89
- verwandt
 - Maße, 33
- vollständig
 - Maßraum, 24
- Wahrscheinlichkeitsraum, 7
- Young'sche Ungleichung, 77
- Zählmaß, 7
- zentraler Grenzwertsatz, 136
- Zerleger, in der Maßtheorie, 18
- zufälliges Element, 26
- Zufallsvariable, 26
- zweischrittstabil, 22
- zyklisch
 - Vektor
 - in unitärer Darstellung, 167