ANALYSIS 1

Wolfgang Soergel

16. August 2018

Dies ist der erste Teil eines Skriptums zur Analysis. Ich habe mir große Mühe gegeben, an jeder Stelle nur soviel Begrifflichkeit einzuführen, wie gerade eben nötig ist, um einerseits einen glatten und transparenten Fluß der Argumentation zu ermöglichen und andererseits regelmäßig motivierende Anwendungen geben zu können. Sowohl die Anwendungen als auch der durchsichtige Aufbau der Theorie erfordern jedoch in meinen Augen eine nach Möglichkeit koordinatenfreie Darstellung und damit den Aufbau der zugehörigen Begrifflichkeit, so daß am Schluß im Vergleich zu anderen Texten doch eher mehr abstrakte Konzepte eingeführt werden. Wie Sie noch an verschiedenen Stellen merken werden, will ich Sie eben am liebsten davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist!

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen

Mit diesem Abschnitt trennen sich nun die Wege der linearen Algebra, in der man sich zunächst nur auf die in [GR] eingeführten algebraischen Konzepte stützt und bis auf weiteres mit beliebigen Körpern arbeiten kann, und der Analysis, für die das Wesen der reellen Zahlen grundlegend ist, das in diesem Abschnitt diskutiert werden soll.

1.1 Erinnerungen zur Algebra

Ich erinnere an die algebraische Struktur eines Körpers, wie sie in [GR] 3.4.2 schon sehr viel ausführlicher und sorgfältiger zusammen mit etwas naiver Mengenlehre besprochen wurde. Unter einem Körper versteht man danach und in wieder anderen Worten gesagt eine Menge mit zwei Verknüpfungen $(K, +, \cdot)$ derart, daß für alle $a, b, c \in K$ gilt:

1. Assoziativgesetze: $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

2. Kommutativgesetze: $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$;

3. Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$;

4. Neutrale Elemente: Es gibt genau ein Element $0 \in K$ mit $a+0 = a\ \forall a \in K$; Es gibt genau ein Element $1 \in K \backslash 0$ mit $1 \cdot a = a\ \forall a \in K$;

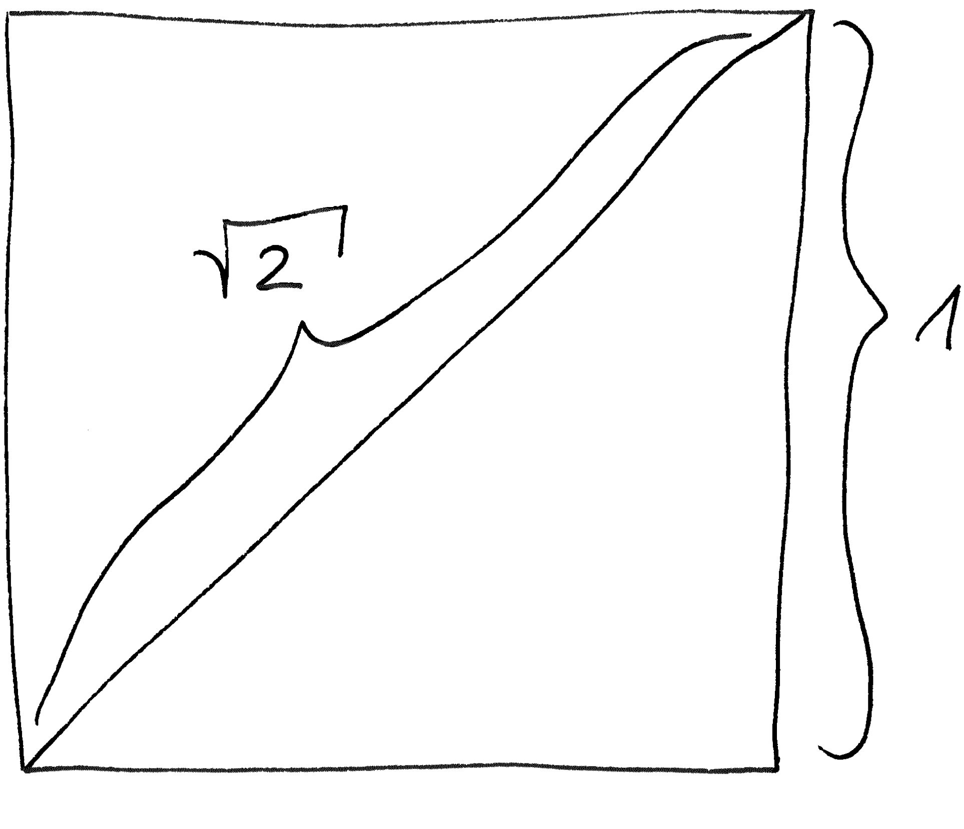
5. Negative und Inverse: Für alle $a \in K$ gibt es $b \in K$ mit $a + b = 0$ und für alle $a \in K \backslash 0$ gibt es $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.

Ein typisches Beispiel ist der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen alias Brüche mit der üblichen Addition und Multiplikation als Verknüpfung.

1.2 Rationale Wurzeln rationaler Zahlen

Satz 1.2.1. *Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

1.2.2. Dieser Satz erklärt, warum wir uns mit den rationalen Zahlen nicht zufrieden geben. In der Tat suchen wir nach einem Zahlbereich, in dem jeder „anschaulichen Länge“, wie zum Beispiel der Länge der Diagonale eines Quadrats der Kantenlänge Eins, auch tatsächlich eine Zahl entspricht. Wir zeigen in 2.3.26, daß im Zahlbereich der reellen Zahlen immerhin aus allen nichtnegativen Zahlen Quadratwurzeln gezogen werden können, und diskutieren in 2.4.1, wie sich sogar unsere anschauliche Vorstellung von der Länge des Einheitskreises zur Definition einer reellen Zahl präzisieren läßt.


√2
1

Erster Beweis. Setzen wir die in [LA1] 3.4.8 bewiesene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt voraus, so folgt unmittelbar, daß das Quadrat eines unkürzbaren Bruches mit Nenner $\neq \pm 1$ wieder ein unkürzbarer Bruch mit Nenner $\neq \pm 1$ ist. Für eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ folgt aus $x \notin \mathbb{Z}$ also $x^2 \notin \mathbb{Z}$. Gäbe es mithin eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$, so müßte x bereits selbst eine ganze Zahl sein. Offensichtlich gibt es jedoch keine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 = 2$. □

Zweiter Beweis. Ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt vorauszusetzen können wir in unserer speziellen Situation auch elementarer mit dem Primfaktor 2 durch Widerspruch argumentieren: Nehmen wir an, wir fänden ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ derart, daß $x = p/q$ ein unkürzbarer Bruch wäre mit $x^2 = 2$. Es folgte $p^2 = 2q^2$, also p^2 gerade, also p gerade, also p^2 durch 4 teilbar, also q^2 gerade, also q gerade. Dann wäre unser Bruch aber doch kürzbar gewesen, nämlich durch 2. □

1.3 Ordnungen auf Mengen

Definition 1.3.1. Eine **Relation** R auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$ des kartesischen Produkts von X mit sich selbst, also eine Menge von Paaren von Elementen von X. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir in diesem Zusammenhang meist xRy. Eine Relation R heißt eine **Ordnungsrelation** oder auch eine **partielle Ordnung** oder **Halbordnung** oder auch einfach nur eine **Ordnung**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. **Transitivität:** $(xRy$ und $yRz) \Rightarrow xRz$;
2. **Antisymmetrie:** $(xRy$ und $yRx) \Rightarrow x = y$;
3. **Reflexivität:** xRx für alle $x \in X$.

Auf Englisch benutzt man für eine partiell geordnete Menge alias „partially ordered set“ auch oft die Abkürzung **poset**. Eine Ordnungsrelation heißt eine **Anordnung** oder eine **totale Ordnung** oder auch eine **lineare Ordnung**, wenn wir zusätzlich haben

4. **Totalität:** Für alle $x, y \in X$ gilt xRy oder yRx.

Ergänzung 1.3.2. Noch allgemeiner versteht man unter einer **Relation** R **zwischen einer Menge** X **und einer Menge** Y eine Teilmenge $R \subset X \times Y$. In diesem Sinne sind dann auch unsere Abbildungen aus [GR] 2.3.2 spezielle Relationen. In Teilen der Literatur heißen derartige Relationen auch „Korrespondenzen“. Noch allgemeiner betrachtet man auch für $n \geq 0$ und Mengen $X_1, \ldots, X_n$ Teilmengen $R \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ und nennt sie n**-stellige Relationen**, aber das ist für uns vorerst noch nicht relevant.

1.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Es gilt, im folgenden sorgfältig zu unterscheiden zwischen einer Ordnung und einer Anordnung.

1.3.4. Bei einer Ordnungsrelation R schreibt man meist $x \leq y$ statt xRy, statt $x \leq y$ schreibt man dann oft auch $y \geq x$. Weiter kürzt man ($x \leq y$ und $x \neq y$) ab mit $x < y$ und ebenso ($x \geq y$ und $x \neq y$) mit $x > y$. Auf jeder angeordneten Menge definieren wir Verknüpfungen $\max$ und $\min$ in offensichtlicher Verallgemeinerung von [GR] 3.1.3.

Definition 1.3.5. Sei $(Y, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

1. Ein Element $g \in Y$ heißt ein **größtes Element von** Y, wenn gilt $g \geq y \quad \forall y \in Y$. Ein Element $g \in Y$ heißt ein **maximales Element von** Y, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y > g$.

2. Ein Element $k \in Y$ heißt ein **kleinstes Element von** Y, wenn gilt $k \leq y \quad \forall y \in Y$. Ein Element $k \in Y$ heißt ein **minimales Element von** Y, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y < k$.

1.3.6. Jede partiell geordnete Menge besitzt höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element. Wir dürfen deshalb den bestimmten Artikel verwenden und von **dem** größten beziehungsweise kleinsten Element reden. Besitzt eine partiell geordnete Menge ein größtes beziehungsweise ein kleinstes Element, so ist dies auch ihr einziges maximales beziehungsweise minimales Element. Sonst kann es jedoch maximale beziehungsweise minimale Elemente in großer Zahl geben, zumindest dann, wenn unsere Ordnungsrelation keine Anordnung ist.

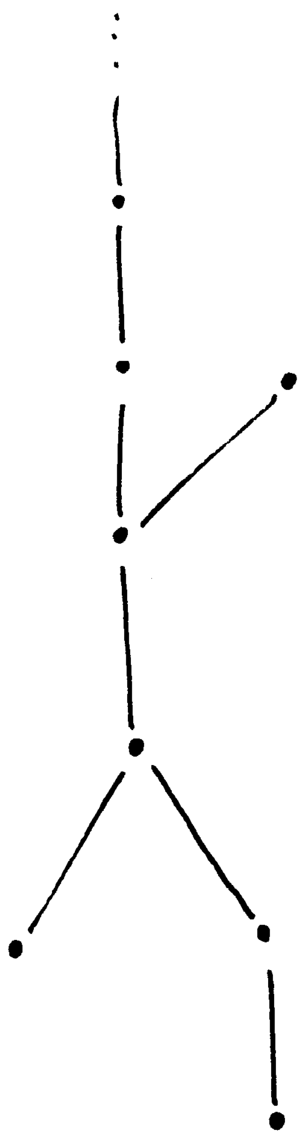
Definition 1.3.7. Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $Y \subset X$ eine Teilmenge.

1. Ein Element $o \in X$ heißt eine **obere Schranke von** Y **in** X, wenn gilt $o \geq y \quad \forall y \in Y$.

2. Ein Element $u \in X$ heißt eine **untere Schranke von** Y **in** X, wenn gilt $u \leq y \quad \forall y \in Y$.

Definition 1.3.8. Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $Y \subset X$ eine Teilmenge.

1. Ein Element $s \in X$ heißt die **kleinste obere Schranke** oder das **Supremum von** Y **in** X, wenn s das kleinste Element ist in der Menge $\{o \in X \mid o \text{ ist obere Schranke von } Y\}$. Wir schreiben dann $s = \sup Y$ oder genauer $s = \sup_X Y$.



Eine partiell geordnete Menge mit zwei minimalen und einem maximalen Element, die weder ein kleinstes noch ein größtes Element besitzt. Die Darstellung ist in der Weise zu verstehen, daß die fetten Punkte die Elemente unserer Menge bedeuten und daß ein Element größer ist als ein andererer genau dann, wenn es von diesem „durch einen aufsteigenden Weg erreicht werden kann“.

2. Ein Element $i \in X$ heißt die **größte untere Schranke** oder das **Infimum von** Y **in** X, wenn i das größte Element ist in der Menge $\{u \in X \mid u \text{ ist untere Schranke von } Y\}$. Wir schreiben dann $i = \inf Y$ oder genauer $i = \inf_X Y$.

Beispiel 1.3.9. Die Teilmenge $Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat kein größtes Element, besitzt jedoch in $\mathbb{Q}$ eine kleinste obere Schranke, nämlich $\sup Y = 1$. Die Teilmenge $Z = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat ein größtes Element, nämlich die 1, und das ist dann natürlich auch gleichzeitig ihre kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$, also haben wir auch $\sup Z = 1$. Die Teilmenge $Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat in $\mathbb{Q}$ keine untere Schranke und dann natürlich erst recht keine größte untere Schranke.

Ergänzendes Beispiel 1.3.10. Auf der Potenzmenge einer beliebigen Menge ist die Inklusionsrelation eine partielle Ordnung. Bezüglich dieser Ordnung ist die Vereinigungsmenge im Sinne von [LA1] 1.5.13 eines Mengensystems sein Supremum und die Schnittmenge sein Infimum.

Definition 1.3.11. Eine Teilmenge einer Menge mit Ordnungsrelation heißt ein **Intervall**, wenn mit zwei beliebigen Punkten aus besagter Teilmenge auch jeder Punkt zwischen den beiden zu unserer Teilmenge gehört. Ist in Formeln $(X, \leq)$ eine Menge mit Ordnungsrelation, so heißt demnach eine Teilmenge $I \subset X$ ein Intervall oder noch präziser ein Intervall in X, wenn für beliebige $x, y, z \in X$ mit $x < y < z$ aus $x, z \in I$ folgt $y \in I$.

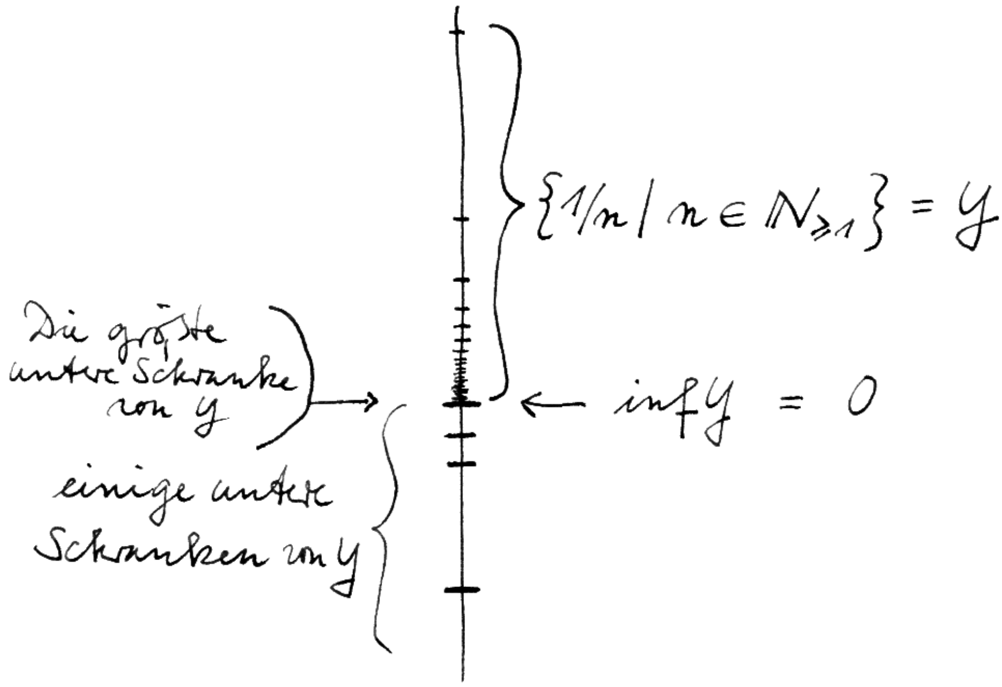
Übungen

Übung 1.3.12. In einer Menge mit Ordnungsrelation ist jeder Schnitt von Intervallen wieder ein Intervall.

Ergänzende Übung 1.3.13. Jede Teilmenge Y einer angeordneten Menge X ist die disjunkte Vereinigung aller maximalen in Y enthaltenen nichtleeren Intervalle von X. Hinweis: Hat ein System von Intervallen von X nichtleeren Schnitt, so ist auch seine Vereinigung wieder ein Intervall von X.

Übung 1.3.14. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ besitzt in $\mathbb{Q}$ keine größte untere Schranke.

Übung 1.3.15. Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein größtes Element $g \in Y$, so gilt $g = \sup Y$. Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein kleinstes Element $k \in Y$, so gilt $k = \inf Y$. Sind Teilmengen $Z \subset Y \subset X$ gegeben und besitzen Z und Y ein Supremum in X, so gilt $\sup Z \leq \sup Y$.



Die Menge $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ besitzt in $\mathbb{Q}$ eine größte untere Schranke, nämlich die Null, in Formeln $\inf Y = 0$. Sie besitzt in $\mathbb{Q}$ auch eine kleinste obere Schranke, nämlich die Eins, in Formeln $\sup Y = 1$.

1.4 Angeordnete Körper

Definition 1.4.1. Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper $(K, +, \cdot)$ mit einer Anordnung $\leq$, die mit der Körperstruktur verträglich ist in dem Sinne, daß für beliebige Elemente $x, y, z \in K$ gilt:

1. $x \leq y \;\Rightarrow\; x + z \leq y + z$;

2. $(x \geq 0$ und $y \geq 0) \;\Rightarrow\; xy \geq 0$.

Eine Anordnung auf einem Körper mit diesen Eigenschaften nennen wir eine **Körperanordnung**. Die Elemente $x \in K$ mit $x > 0$ beziehungsweise $x < 0$ nennt man **positiv** beziehungsweise **negativ**. Die Elemente mit $x \geq 0$ beziehungsweise $x \leq 0$ nennt man folgerichtig **nichtnegativ** beziehungsweise **nichtpositiv**.

Beispiel 1.4.2. Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist mit seiner üblichen Anordnung ein angeordneter Körper. Dasselbe wird auch für den Körper $\mathbb{R}$ der „reellen Zahlen“ gelten, den wir demnächst einführen werden.

Lemma 1.4.3. *In jedem angeordneten Körper gilt:*

1. $(x \leq y$ *und* $a \leq b) \Rightarrow (x + a \leq y + b)$

2. $(x \leq y$ *und* $a \geq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$

3. $(0 \leq x < y$ *und* $0 \leq a < b) \Rightarrow (0 \leq xa < yb)$

4. $(x \leq y) \Rightarrow (-y \leq -x)$

5. $(x \geq y$ *und* $a \leq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$

6. $(x \neq 0) \Rightarrow (x^2 > 0)$

7. $1 > 0$

8. $(x > 0) \Rightarrow (x^{-1} > 0)$

9. $(0 < x \leq y) \Rightarrow (0 < y^{-1} \leq x^{-1})$

Beweis.

1. In der Tat folgt $x + a \leq y + a \leq y + b$.

2. In der Tat folgt $0 \leq y - x$, also $0 \leq a(y - x) = ay - ax$ und damit dann $ax \leq ay$.

3. In der Tat erhalten wir $0 \leq xa \leq ya < yb$.

4. Das folgt durch Addition von $(-y - x)$ auf beiden Seiten.

5. In der Tat folgern wir $x \geq y \Rightarrow (-a)x \geq (-a)y \Rightarrow ax \leq ay$.

6. In der Tat ist $x^2 = (-x)^2$ und $x > 0 \Leftrightarrow (-x) < 0$.

7. Das folgt aus $1 = 1^2 \neq 0$.

8. Das folgt durch Multiplikation mit $(x^{-1})^2$.

9. Das folgt durch Multiplikation mit $y^{-1}x^{-1}$.

Damit ist das Lemma bewiesen. □

1.4.4. Schreiben wir zur besonderen Betonung wieder 0_K und 1_K, so gelten nach dem vorhergehenden in jedem angeordneten Körper K die Ungleichungen

$$\ldots < (-1_K) + (-1_K) < (-1_K) < 0_K < 1_K < 1_K + 1_K < \ldots$$

Insbesondere folgt aus $m1_K = n1_K$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ schon $m = n$. Die Abbildung $\mathbb{Z} \to K$, $m \mapsto m1_K$ ist mithin eine Injektion. Das Bild dieser Injektion müßte wohl eigentlich einen eigenen Namen kriegen, zum Beispiel $\mathbb{Z}_K$, aber wir kürzen unsere Notation ab, bezeichnen dieses Bild auch mit $\mathbb{Z}$ und schreiben kürzer m statt $m1_K$. Weiter erhalten wir auch eine Injektion $\mathbb{Q} \to K$, $m/n \mapsto m1_K/n1_K$, die wir zum Beispiel $q \mapsto q_K$ notieren könnten. Wir sind auch hier etwas nachlässig, bezeichnen das Bild unserer Injektion $\mathbb{Q} \to K$ meist kurzerhand mit demselben Buchstaben $\mathbb{Q}$ statt genauer $\mathbb{Q}_K$ zu schreiben, und hängen auch den Elementen von $\mathbb{Q}$ meist keinen Index an, wenn wir eigentlich ihr Bild in K meinen.

Definition 1.4.5. Für jeden angeordneten Körper K definieren wir eine Abbildung $K \to K$, $x \mapsto |x|$, genannt der **Absolutbetrag** oder kürzer **Betrag**, durch die Vorschrift

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0; \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

1.4.6 (**Eigenschaften des Absolutbetrags**). Wir listen einige Eigenschaften des Absolutbetrags auf. Der Beweis der ersten Vier sei dem Leser überlassen.

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $|-x| = |x|$

3. $|xy| = |x||y|$

4. $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ falls $x \neq 0$

5. Es gilt die sogenannte **Dreiecksungleichung**

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in K$$

   In Worten ist also der Betrag einer Summe stets kleinergleich der Summe der Beträge der Summanden. In der Tat gilt ja $x + y \leq |x| + |y|$ und ebenso auch $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Unsere Ungleichung heißt deshalb Dreiecksungleichung, weil sie in einem allgemeineren Kontext sagt, daß in einem Dreieck zwei Seiten zusammen stets länger sind als die Dritte.

6. $||a| - |b|| \leq |a + b| \quad \forall a, b \in K$.

   In der Tat folgt aus der Dreiecksungleichung $|a| = |(a + b) + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$, also $|a| - |b| \leq |a + b|$. Ebenso folgert man aber auch $|b| - |a| \leq |a + b|$.

Übungen

Übung 1.4.7. Man zeige, daß für jeden angeordneten Körper K die in 1.4.4 definierte Abbildung $\mathbb{Q} \to K$ ein Körperhomomorphismus ist.

Übung 1.4.8. In jedem angeordneten Körper gilt:

1. Aus $|x - a| \leq \eta$ und $|y - b| \leq \eta$ folgt $|(x + y) - (a + b)| \leq 2\eta$;
2. Aus $|x - a| \leq \eta \leq 1$ und $|y - b| \leq \eta \leq 1$ folgt $|xy - ab| \leq \eta(|b| + 1 + |a|)$;
3. Aus $|y - b| \leq \eta \leq |b|/2$ und $b \neq 0$ folgt $y \neq 0$ und $|1/y - 1/b| \leq 2\eta/|b|^2$.

Ergänzende Übung 1.4.9. In jedem angeordneten Körper gilt für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die sogenannte **Bernoulli-Ungleichung** $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Hinweis: Vollständige Induktion.

Übung 1.4.10. Seien k ein angeordneter Körper und $I \subset k$ ein Intervall. Wir nennen eine Funktion $\phi : I \to k$ **konvex**, wenn „ihr Graph unter jeder seiner Sekanten liegt“, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y} \leq \frac{\phi(y) - \phi(z)}{y - z}$$

Man zeige in dieser Situation für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in I$ und beliebige nichtnegative $\mu_1, \ldots, \mu_n \in k_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ die **Jensen’sche Ungleichung**

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i \phi(x_i)$$

In Worten ist also „der Funktionswert beim gewichteten Mittel der x_i beschränkt durch das gewichtete Mittel der Funktionswerte“.

1.5 Die reellen Zahlen

1.5.1 (**Geometrische und algorithmische Zahlbegriffe**). Der folgende Satz 1.5.3 enthält diejenige Charakterisierung eines gewissen angeordneten Körpers von „reellen Zahlen“, auf der die ganze Vorlesung aufbaut. Er bildet einen wesentlichen Teil des Begriffsgebäudes, das es uns ermöglicht, unsere geometrischen Vorstellungen in der heute gebräuchlichen aus den Symbolen der Mengenlehre aufgebauten Sprache der höheren Mathematik wiederzufinden. Bereits im vierten Jahrhundert vor Christus erklärte der griechische Mathematiker Eudoxos eine „Zahl“ als das „Verhältnis zweier Längen“ und gab damit eine geometrische Beschreibung dessen, was wir heute „positive reelle Zahlen“ nennen würden. Die logischen Feinheiten der Beziehung dieses „geometrischen“ Zahlbegriffs zum „algorithmischen“ Zahlbegriff, der vom Prozeß des Zählens herkommt, wurden erst nach und nach verstanden. Den folgenden Satz 1.5.3 und seinen Beweis mag man als den Schlußpunkt dieser Entwicklung ansehen. Der Zwischenwertsatz 2.2.15 und stärker der Satz über die Gruppenwege in der Kreisgruppe 3.4.5 und seine Beziehung zu Winkelmaßen [LA2] 1.4.14 illustrieren, wie gut die bei diesem Beweis im Reich der abstrakten Logik und Mengenlehre konstruierten reellen Zahlen unsere geometrische Anschauung modellieren.

1.5.2. Der Beweis der Existenz eines angordneten Körpers mit den im folgenden Satz 1.5.3 präzisierten Eigenschaften ist für das weitere Verständnis der Vorlesung belanglos. Ich gebe hier nur eine Beweisskizze, als da heißt einen Beweis für höhere Semester, um Sie zu überzeugen, daß wir nicht während des nächsten halben Jahres Folgerungen ziehen aus Grundannahmen, die überhaupt nie erfüllt sind. Ich rate dazu, bei der ersten Lektüre auf das genauere Studium des Existenzbeweises zu verzichten, der sich bis 1.5.15 hinzieht. Vom Beweis der Eindeutigkeit sind Teile durchaus auch für die Ziele dieser Vorlesung von Belang. Wir formulieren diese Teile als die eigenständigen Aussagen 1.5.8 und 1.5.9. Der Rest wird dem Leser als Übung 1.5.18 überlassen, die wieder für höhere Semester gedacht ist.

Satz 1.5.3 (Charakterisierung der reellen Zahlen). *1. Es gibt einen angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ derart, daß in der angeordneten Menge $\mathbb{R}$ jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke auch eine größte untere Schranke besitzt;*

2. Solch ein angeordneter Körper ist im wesentlichen eindeutig bestimmt. Ist genauer $(\mathbb{R}', +, \cdot, \leq)$ ein weiterer derartiger angeordneter Körper, so gibt es genau einen Körperisomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}'$, und für diesen Körperisomorphismus gilt zusätzlich $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$.

1.5.4. Die im Satz gegebene Charakterisierung trifft auf den angeordneten Körper der rationalen Zahlen nicht zu. Zum Beispiel wissen wir nach 1.3.14, daß die

Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ in $\mathbb{Q}$ keine größte untere Schranke besitzt. Sie ist jedoch nicht leer und besitzt in $\mathbb{Q}$ durchaus untere Schranken, nur eben keine Größte.

Beweis von 1.5.3.1. Wir konstruieren einen derartigen Körper $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ als eine Menge $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ von Teilmengen der Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen,

$$\mathbb{R} \ := \ \left\{ \alpha \subset \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \text{ ist nicht leer,} \\ \alpha \text{ hat eine untere Schranke,} \\ \alpha \text{ hat kein kleinstes Element,} \\ \alpha \text{ enthält mit } x \text{ auch jedes } y > x. \end{array} \right\}$$

Man nennt solch ein α einen **Dedekind'schen Schnitt** und bezeichnet die so konstruierte Menge $\mathbb{R}$ als das „Dedekind'sche Modell der reellen Zahlen“. Auf unserer Menge $\mathbb{R}$ von Teilmengen von $\mathbb{Q}$ ist die Inklusionsrelation eine Anordnung und wir schreiben $\alpha \leq \beta$ statt $\alpha \supset \beta$. Ist $Y \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge mit unterer Schranke, so liegt offensichtlich auch die Vereinigung

$$\bigcup_{\alpha \in Y} \alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid \text{Es gibt } \alpha \in Y \text{ mit } q \in \alpha\}$$

aller Teilmengen aus Y in $\mathbb{R}$ und ist das Infimum von Y. Damit haben wir bereits eine angeordnete Menge mit der geforderten Eigenschaft konstruiert. Wir müssen darauf nur noch eine Addition und eine Multiplikation erklären derart, daß unsere Struktur zu einem angeordneten Körper wird. Die Addition ist unproblematisch: Wir setzen

$$\alpha + \beta := \{x + y \mid x \in \alpha, \ y \in \beta\}$$

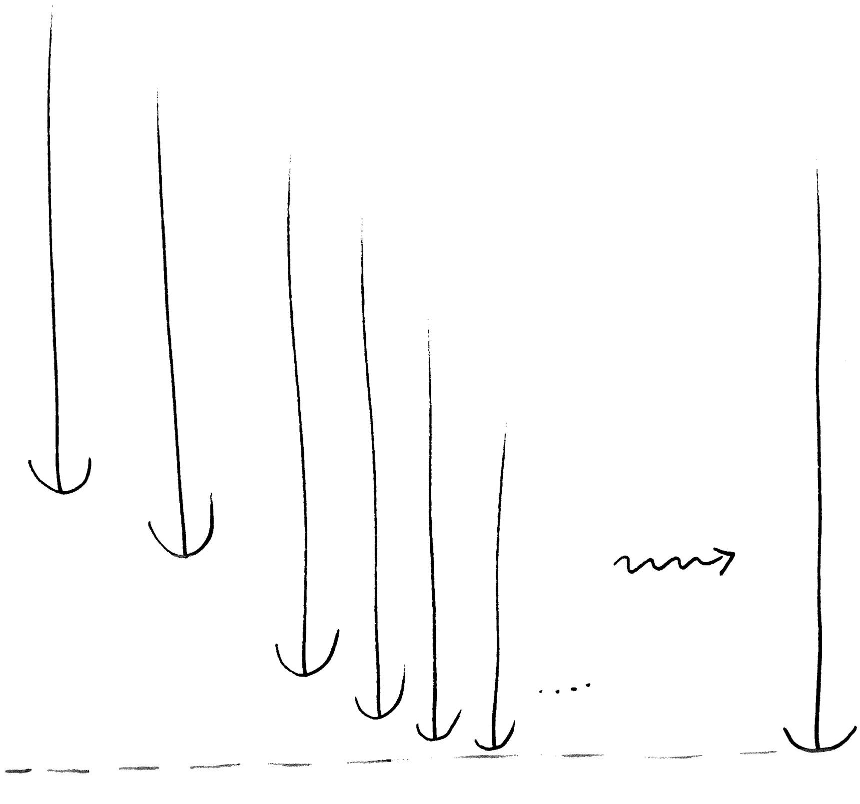
und prüfen mühelos, daß aus $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ schon folgt $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, daß $\mathbb{R}$ so zu einer kommutativen Gruppe wird mit neutralem Element $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, und daß gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Wir erlauben uns nun die Abkürzung $0_{\mathbb{R}} = 0$. Die Multiplikation positiver Elemente ist ebenfalls unproblematisch: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ setzen wir

$$\alpha\beta := \{xy \mid x \in \alpha, \ y \in \beta\}$$

und prüfen mühelos, daß aus $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ schon folgt $\alpha\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ und daß $\mathbb{R}_{>0}$ so zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$ wird. Das Distributivgesetz in $\mathbb{Q}$ impliziert mit diesen Definitionen auch sofort die Regel

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Um unsere Multiplikation so auf ganz $\mathbb{R}$ auszudehnen, daß $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper wird, verwenden wir das anschließende technische Lemma 1.5.5. Der Beweis der in Teil 2 behaupteten Eindeutigkeit ist dann Übung 1.5.18. $\square$



Zum Infimum in $\mathbb{R}$

Lemma 1.5.5. *Sei $(R, +)$ eine kommutative Gruppe mit einer Anordnung $\leq$ derart, daß gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$. Sei auf $R_{>0}$ eine Verknüpfung $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ gegeben, die $R_{>0}$ zu einer kommutativen Gruppe macht. Es gelte außerdem die Regel*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R_{>0}$$

So gibt es genau eine Fortsetzung unserer Verknüpfung $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ zu einer kommutativen und über $+$ distributiven Verknüpfung auf ganz R, und mit dieser Verknüpfung als Multiplikation wird $(R, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper.

Ergänzung 1.5.6. Dies Lemma oder eigentlich sein Beweis kann verstanden werden als die mathematische Begründung der wohlbekannten Regel „Minus mal Minus gibt Plus". Ist in den Voraussetzungen des Lemmas $R_{>0}$ nur ein kommutatives Monoid, so gibt es mit demselben Beweis immer noch genau eine Fortsetzung unserer Verknüpfung $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ zu einer kommutativen und über $+$ distributiven Verknüpfung auf ganz R. In dieser Allgemeinheit kann das Lemma auch bei der Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ gute Dienste leisten, vergleiche [GR] 3.5.1.

Beweis. Wenn die Fortsetzung unserer Multiplikation auf ganz R das Distributivgesetz erfüllen soll, müssen wir notwendig setzen

$$\alpha\beta = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \text{ oder } \beta = 0; \\ -((-\alpha)\beta) & \alpha < 0,\ \beta > 0; \\ -(\alpha(-\beta)) & \alpha > 0,\ \beta < 0; \\ (-\alpha)(-\beta) & \alpha < 0,\ \beta < 0. \end{cases}$$

Es gilt nur noch, für diese Multiplikation die Körperaxiome nachzuweisen. Unsere Multiplikation auf R ist offensichtlich kommutativ und assoziativ und macht $R \backslash \{0\}$ zu einer Gruppe. Wir müssen also nur noch das Distributivgesetz

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$$

nachweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hierbei $\alpha > 0$ und $\beta + \gamma > 0$ annehmen, und die einzigen nicht offensichtlichen Fälle sind dann $\beta > 0, \gamma < 0$ bzw. $\beta < 0, \gamma > 0$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\beta > 0, \gamma < 0$. Nach unseren Annahmen gilt ja die Regel

$$\alpha\beta = \alpha((\beta + \gamma) + (-\gamma)) = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha(-\gamma)$$

und daraus folgt sofort $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ auch in diesem letzten Fall. $\square$

Definition 1.5.7. Wir wählen für den weiteren Verlauf der Vorlesung einen festen angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, in dem jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke auch eine größte untere Schranke besitzt, erlauben uns wegen der in 1.5.3.2 formulierten „Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus" den bestimmten Artikel, und nennen ihn **den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**.

Satz 1.5.8. *Die natürlichen Zahlen besitzen keine obere Schranke in den reellen Zahlen, als da heißt, für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Beweis. Das ist evident für den angeordneten Körper $\mathbb{R}$, den wir im Beweis von 1.5.3 konstruiert haben. Da diese Konstruktion jedoch nicht ganz einfach war, zeigen wir auch, wie unser Satz direkt aus unserer Definition 1.5.7 abgeleitet werden kann. Dazu argumentieren wir durch Widerspruch: Hätte die Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ eine obere Schranke, so hätte sie nach 1.5.16 auch eine kleinste obere Schranke a. Dann wäre aber $a - 1 < a$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, also gäbe es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > (a - 1)$. Es folgte $(n + 1) > a$, und bereits a selbst wäre keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ gewesen. □

Korollar 1.5.9.

1. *Unter jeder reellen Zahl findet man noch ganze Zahlen, in Formeln: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es $m \in \mathbb{Z}$ mit $m < x$.*

2. *Für jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine positive natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

3. *Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets noch eine rationale Zahl, in Formeln: Gegeben $x < y$ in $\mathbb{R}$ gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus 1.5.8. Um die Zweite zu zeigen, suche man $n > 1/\varepsilon$. Um die dritte Aussage zu zeigen, suchen wir zunächst $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < y - x$, also $1 < ny - nx$, das heißt $1 + nx < ny$. Nun gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < ny < b$, also gibt es eine größte ganze Zahl m mit $m < ny$ und folglich $ny \leq m + 1$, woraus hinwiederum folgt $nx < m$ und dann $x < \frac{m}{n} < y$. □

1.5.10. Ein angeordneter Körper heißt **archimedisch angeordnet**, wenn es zu jedem Element x des Körpers eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n > x$. Das obige Korollar 1.5.9 gilt mit demselben Beweis für jeden archimedisch angeordneten Körper.

Definition 1.5.11. Mit einem endlichen Dezimalbruch wie $3{,}141$ bezeichnet man wie auf der Schule die rationale Zahl $3141/1000$. Die durch einen **unendlichen Dezimalbruch** wie $3{,}1415\ldots$ dargestellte reelle Zahl definieren wir als das Supremum der Menge aller ihrer endlichen Teilausdrücke bzw. das Infimum, wenn ein Minus davorsteht. Wir setzen also zum Beispiel

$$3{,}1415\ldots \quad = \quad \sup \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3{,}1 \\ 3{,}14 \\ 3{,}141 \\ 3{,}1415 \\ \ldots \end{array} \right\}$$

wo wir die Elemente der Menge aller endlichen Teilausdrücke der Übersichtlichkeit halber untereinander geschrieben haben statt sie durch Kommata zu trennen und rationale Zahlen stillschweigend identifiziert haben mit ihren Bildern in $\mathbb{R}$.

Proposition 1.5.12. *1. Jede reelle Zahl läßt sich durch einen unendlichen Dezimalbruch darstellen;*

2. Genau dann stellen zwei verschiedene unendliche Dezimalbrüche dieselbe reelle Zahl dar, wenn es eine Stelle vor oder nach dem Komma gibt und eine von Neun verschiedene Ziffer z derart, daß die beiden Dezimalbrüche bis zu dieser Stelle übereinstimmen, ab dieser Stelle jedoch der eine die Form $z99999\ldots$ hat und der andere die Form $(z+1)00000\ldots$

Beweis. Für den ersten Teil reicht es zu zeigen, daß sich jede nichtnegative reelle Zahl $y \geq 0$ als ein unendlicher Dezimalbruch darstellen läßt. Nehmen wir zu jedem $s \in \mathbb{N}$ die größte reelle Zahl $r_s \leq y$ unter y mit höchstens s Stellen nach dem Komma, so gilt

$$y = \sup\{r_0, r_1, r_2, \ldots\}$$

In der Tat ist y eine obere Schranke dieser Menge, aber jede reelle Zahl $x < y$ ist keine obere Schranke dieser Menge: Nach 1.5.9 oder, genauer, seinem Beweis gibt es nämlich für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ ein $s \in \mathbb{N}$ und ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $x < m \cdot 10^{-s} < y$, als da heißt, es gibt ein s mit $x < r_s$. Den zweiten Teil überlassen wir dem Leser zur Übung. □

Ergänzung 1.5.13. Ich will die Gleichheit $1 = 0{,}999\ldots$ auch noch im Dedekind'schen Modell der reellen Zahlen erläutern und beginne dazu mit der offensichtlichen Gleichheit

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q > -1\} = \bigcup_{n \geq 1} \{q \in \mathbb{Q} \mid q > -0{,}\underbrace{999\ldots9}_{n}\}$$

von Teilmengen von $\mathbb{Q}$. Sie bedeutet nach 1.5.15 und der Beschreibung des Infimums im Dedekind'schen Modell der reellen Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ genau die Gleichheit

$$-1_{\mathbb{R}} = \inf\{(-0{,}\underbrace{999\ldots9}_{n})_{\mathbb{R}} \mid n \geq 1\}$$

und mit unserer Konvention für die Interpretation unendlicher Dezimalbrüche 1.5.11 dann auch die Gleichheit von reellen Zahlen

$$-1 = -0{,}999\ldots$$

Jetzt gilt es nur noch, auf beiden Seiten das Negative zu nehmen. Ich bemerke weiter, daß es durchaus möglich ist, die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche ohne alle Identifizierungen zu betrachten und mit der Struktur einer angeordneten Menge zu versehen, in der dann sogar jede nichtleere Teilmenge mit unterer Schranke eine größte untere Schranke hat. Es ist jedoch nicht möglich, die gewohnte Addition und Multiplikation von den endlichen Dezimalbrüchen so auf diese angeordnete Menge fortzusetzen, daß wir einen angeordneten Körper erhalten. Der naive Ansatz scheitert hier bereits daran, daß nicht klar ist, wie man mit den eventuell unendlich vielen Überträgen bei der Addition und Multiplikation umgehen soll.

Übungen

Übung 1.5.14. Man zeige, daß es für je zwei nichtleere Teilmengen $M, N \subset \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$ stets ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq a \leq y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$. Man zeige weiter, daß diese Bedingung an eine angeordnete Menge sogar gleichbedeutend ist zur Forderung, jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke möge auch eine größte untere Schranke besitzen.

Übung 1.5.15. Bezeichne $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ das Dedekind'sche Modell der reellen Zahlen. Man zeige, daß die durch die Struktur eines angeordneten Körpers auf $\mathbb{R}$ nach 1.4.4 definierte Injektion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ auch beschrieben werden kann durch die Vorschrift $p \mapsto p_{\mathbb{R}} := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > p\}$.

Übung 1.5.16. Man zeige: Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit einer oberen Schranke hat auch eine kleinste obere Schranke.

Übung 1.5.17. Seien X und Y nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Bezeichnet $X + Y \subset \mathbb{R}$ die Menge $\{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$, so zeige man $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

Ergänzende Übung 1.5.18 (Für höhere Semester). Man zeige 1.5.3.2. Hinweis: Die gesuchte Bijektion φ kann zum Beispiel konstruiert werden durch die Vorschrift $\varphi(\alpha) = \inf\{q_{\mathbb{R}'} \mid q \in \mathbb{Q},\ q_{\mathbb{R}} > \alpha\}$. Man zeige allgemeiner auch, daß jeder Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität ist. Hinweis: Nach 2.3.26 sind die nichtnegativen reellen Zahlen genau die Quadrate, jeder Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhält also die Anordnung. Andererseits aber muß er auf $\mathbb{Q}$ die Identität sein.

Ergänzende Übung 1.5.19 (Für höhere Semester). Gegeben ein archimedisch angeordneter Körper k gibt es genau einen ordnungserhaltenden Körperhomomorphismus $k \to \mathbb{R}$. Hinweis: Ähnlich wie 1.5.18, das man umgekehrt aus diesem Resultat ableiten kann, sobald man weiß, daß es zu jeder positiven reellen Zahl eine Quadratwurzel gibt.

1.6 Vergleich der rationalen mit den reellen Zahlen

Definition 1.6.1. Eine Menge heißt **abzählbar**, wenn es eine Bijektion unserer Menge mit einer Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen gibt. Gleichbedeutend können wir auch fordern, daß unsere Menge entweder leer ist oder es eine Surjektion von $\mathbb{N}$ darauf gibt. Eine Menge heißt **abzählbar unendlich**, wenn sie abzählbar aber nicht endlich ist. Eine Menge heißt **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.

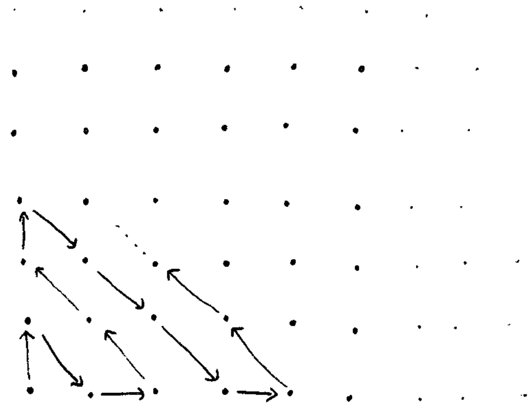
Satz 1.6.2. *1. Es gibt eine Bijektion $\mathbb{N} \overset{\sim}{\to} \mathbb{Q}$, in Worten: Die Menge der rationalen Zahlen ist* **abzählbar unendlich***;*

2. Es gibt keine Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, in Worten: Die Menge der reellen Zahlen ist **überabzählbar**.

Beweis. 1. Für jede natürliche Zahl N gibt es nur endlich viele Brüche $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ und $|p| \leq N$, $|q| \leq N$. Wir beginnen unser Abzählen von $\mathbb{Q}$ mit den Brüchen für $N = 1$, dann nehmen wir die Brüche hinzu mit $N = 2$, und indem wir so weitermachen zählen wir ganz $\mathbb{Q}$ ab.

2. Hierzu verwenden wir das **Cantor'sche Diagonalverfahren**. Man beachte zunächst, daß ein unendlicher Dezimalbruch, in dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen, nur dann dieselbe reelle Zahl darstellt wie ein beliebiger anderer unendlicher Dezimalbruch, wenn die beiden in jeder Stelle übereinstimmen. Wir betrachten nun eine beliebige Abbildung $\mathbb{N}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto r_i$, und zeigen, daß sie keine Surjektion sein kann. Wir schreiben dazu jedes r_i als unendlichen Dezimalbruch. Dann finden wir einen unendlichen Dezimalbruch r, bei dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen und so, daß r für an der i-ten Stelle nach dem Komma verschieden ist von r_i. Dies r ist dann verschieden von allen r_i und unsere Abbildung $i \mapsto r_i$ kann keine Surjektion gewesen sein. □

Bemerkung 1.6.3. Man kann sich fragen, ob jede Teilmenge der reellen Zahlen entweder abzählbar ist oder in Bijektion zu den reellen Zahlen selber. Die schon auf Cantor zurückgehende Vermutung, das könnte gelten, ist bekannt als die **Kontinuumshypothese**. Sie wurde 1963 von Paul Cohen in sehr merkwürdiger Weise geklärt: Er zeigte, daß unsere Frage in dem axiomatischen Rahmen, in dem man die Mengenlehre üblicherweise formalisiert, nicht entscheidbar ist. Cohen wurde für diese Leistung auf dem internationalen Mathematikerkongress 1966 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Die Kontinuumshypothese ist übrigends die erste Frage einer berühmten Liste von 23 Fragestellungen, den sogenannten **Hilbert'schen Problemen**, die David Hilbert in seiner Ansprache auf dem internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris vorstellte in seinem Bemühen, „aus



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar und damit natürlich auch allgemeiner das Produkt von je zwei und dann auch von endlich vielen abzählbaren Mengen.

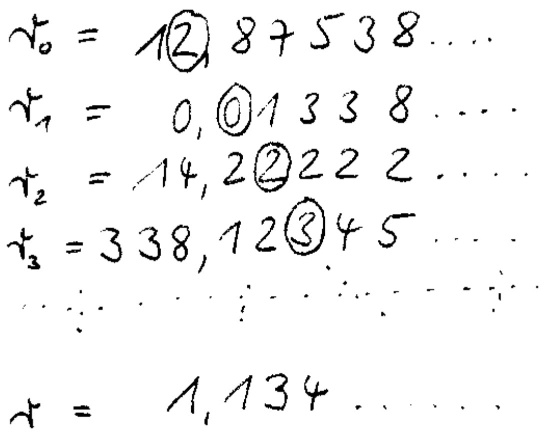


Illustration zum Cantor'schen Diagonalverfahren. Ähnlich zeigt man, daß die Menge $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, E)$ aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ in eine Menge E mit mindestens zwei Elementen nicht abzählbar ist.

verschiedenen mathematischen Disziplinen einzelne bestimmte Probleme zu nennen, von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft sich erwarten läßt".

2 Stetigkeit und Grenzwerte

2.1 Intervalle und Umgebungen

Definition 2.1.1. Wir erweitern die reellen Zahlen durch die zwei zusätzlichen Punkte $-\infty$ und ∞ zu der in hoffentlich offensichtlicher Weise angeordneten Menge der sogenannten **erweiterten reellen Zahlen**

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

2.1.2 (**Reelle Intervalle**). Jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt in $\overline{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum. Für ein Intervall $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit Supremum $a = \sup I$ und Infimum $b = \inf I$ gibt es die Alternativen $a \in I$ oder $a \notin I$ und $b \in I$ oder $b \notin I$. Es gibt damit vier Typen von Intervallen in $\overline{\mathbb{R}}$, für die die beiden folgenden Notationen gebräuchlich sind:

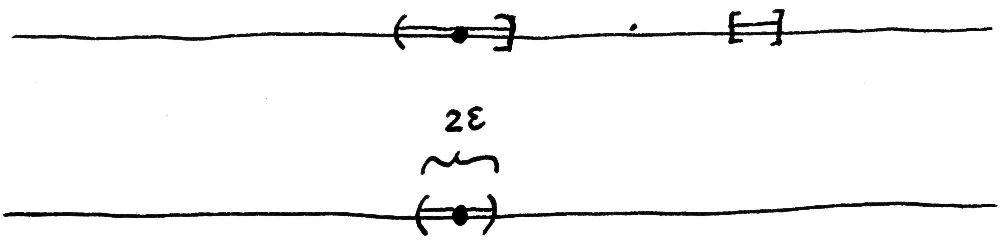
$$\begin{array}{lclcl} [a,b] & = & [a,b] & = & \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\} \\ ]a,b[& = & (a,b) & = & \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\} \\ [a,b[& = & [a,b) & = & \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\} \\ ]a,b] & = & (a,b] & = & \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\} \end{array}$$

Wählen wir hier $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig mit $a < b$, so erhalten wir genau alle Intervalle in $\overline{\mathbb{R}}$ mit mehr als einem Element, die **mehrpunktigen Intervalle**. Wir benutzen die eben erklärten Notationen jedoch auch im Fall $a \geq b$, sie bezeichnen dann manchmal eine einpunktige Menge und meist die leere Menge. Ein Intervall in $\mathbb{R}$ nennen wir ein **reelles Intervall**.

2.1.3 (**Diskussion der Notation**). Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann mit (a, b) ein Intervall gemeint ist und wann ein Paar aus $\mathbb{R}^2$. Sind a und b konkrete Zahlen, etwa $a = 1$ und $b = 27$, so wäre zu allem Überfluß auch noch eine dritte Lesart von $(1, 27)$ als die in Klammern notierte Dezimalzahl $1{,}27$ denkbar. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Wenn man genau hinguckt, sollte auch im letzteren Fall der Abstand nach dem Komma etwas kleiner sein.

2.1.4. Ein Intervall in $\overline{\mathbb{R}}$ heißt **kompakt**, wenn es eines unserer Intervalle $[a, b]$ ist. Der Begriff „kompakt" wird in 4.1.1 auf beliebige Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ verallgemeinert. Ein reelles Intervall heißt **offen**, wenn es eines unserer Intervalle (a, b) ist. Der Begriff „offen" wird in 4.5.1 auf beliebige Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ verallgemeinert.

Definition 2.1.5. Gegeben ein Punkt $x \in \overline{\mathbb{R}}$ verstehen wir unter einer **Intervallumgebung von** x ein Intervall $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit $x \in I$, das auch einen Punkt b mit $b > x$ enthält, falls es einen solchen Punkt in $\overline{\mathbb{R}}$ gibt, sowie einen Punkt a mit $a < x$, falls es einen solchen Punkt in $\overline{\mathbb{R}}$ gibt. Eine Teilmenge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine **Umgebung von** x, wenn sie eine Intervallumgebung von x umfaßt.



Versuch der graphischen Darstellung einer Umgebung sowie einer ε-Umgebung eines hier fett eingezeichneten Punktes der reellen Zahlengeraden. Die obere Umgebung besteht aus zwei Intervallen und einem einzelnen Punkt.

2.1.6 (**Explizite Beschreibung von Intervallumgebungen**). Gegeben $x \in \mathbb{R}$ ist eine Intervallumgebung von x ein Intervall $I \subset \overline{\mathbb{R}}$, das Punkte a, b enthält mit $a < x < b$. Eine Intervallumgebung von ∞ ist ein Intervall $I \subset \overline{\mathbb{R}}$, das außer ∞ auch noch einen Punkt $a < \infty$ enthält. Eine Intervallumgebung von $-\infty$ schließlich ist ein Intervall $I \subset \overline{\mathbb{R}}$, das außer $-\infty$ auch noch einen Punkt $b > -\infty$ enthält.

2.1.7. Gegeben $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ nennen wir das offene Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ die ε-**Umgebung von** x. Eine Intervallumgebung von $x \in \mathbb{R}$ können wir auch charakterisieren als ein Intervall $W \subset \overline{\mathbb{R}}$, das für mindestens ein reelles $\varepsilon > 0$ das Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ umfaßt, oder äquivalent als ein Intervall, das für mindestens ein reelles $\varepsilon > 0$ das Intervall $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ umfaßt.

Beispiele 2.1.8. Das kompakte Intervall $[0, 1]$ ist eine Intervallumgebung von jedem Punkt aus dem offenen Intervall $(0, 1)$, aber von keinem anderen Punkt der erweiterten reellen Zahlengeraden.

2.1.9. Offensichtlich besitzen je zwei verschiedene Punkte der erweiterten reellen Zahlengeraden zueinander disjunkte Umgebungen. Offensichtlich ist der Schnitt von je zwei Umgebungen ein- und desselben Punktes wieder eine Umgebung des besagten Punktes.

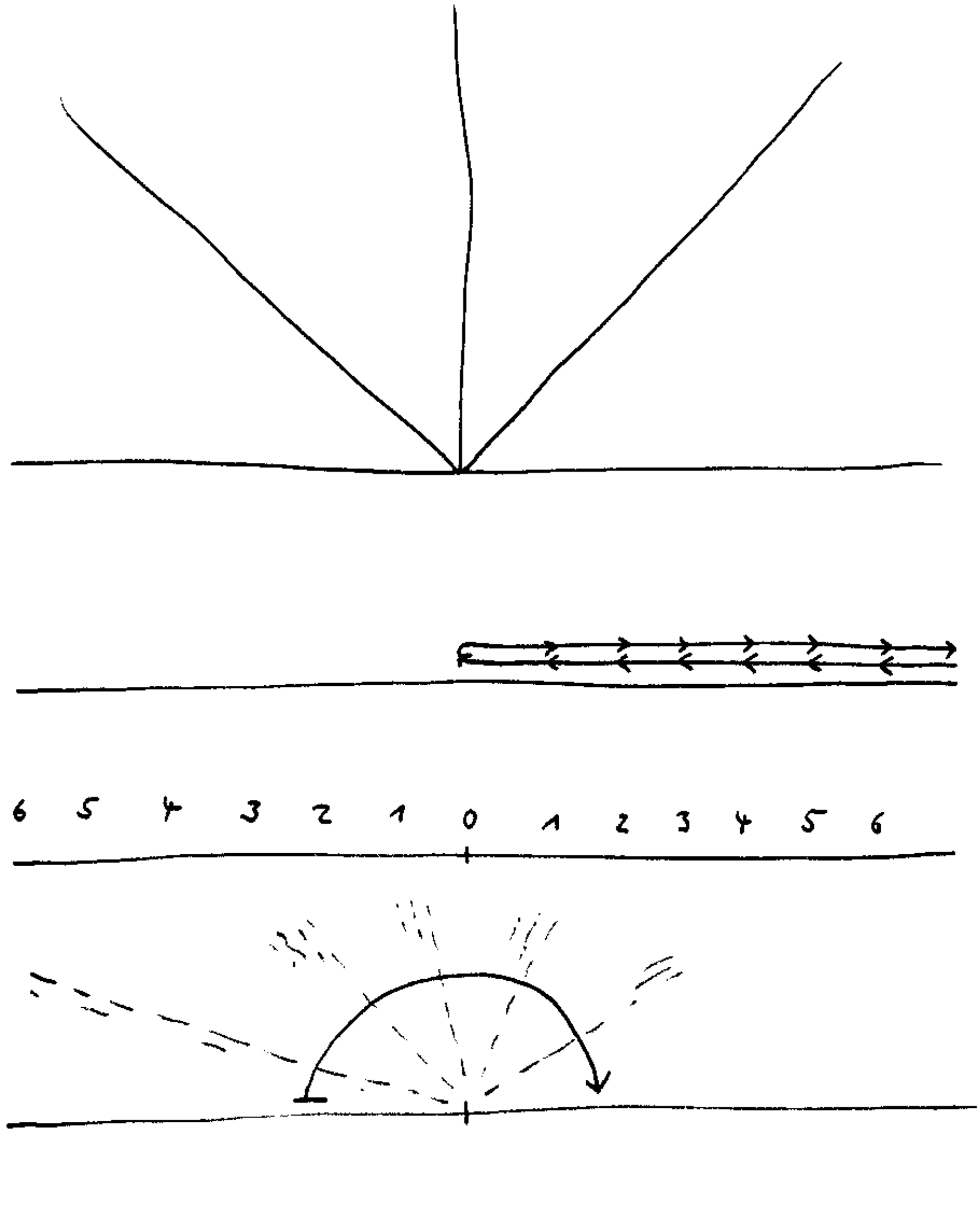
2.2 Stetigkeit und Zwischenwertsatz

2.2.1. Abbildungen mit Werten in irgendeiner Art von Zahlen nennen wir **Funktionen**. Wir erlauben hier auch Werte in $\overline{\mathbb{R}}$. Wollen wir besonders betonen, daß nur reelle Zahlen als Werte angenommen werden, so sprechen wir von **reellwertigen Funktionen**. Reellwertige Funktionen auf der reellen Zahlengeraden mag man sich auf mindestens vier verschiedene Arten vorstellen:

1. In der Schule ist es üblich, eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch ihren Graphen $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ zu veranschaulichen, also durch eine Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$.

2. In der Physik ist es üblich, sich eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to X, t \mapsto f(t)$ von $\mathbb{R}$ in irgendeine Menge X vorzustellen als ein Teilchen, das sich im Raum X bewegt und sich zur Zeit t für lateinisch „tempus“ am Punkt $f(t)$ befindet. In unserem Fall hätten wir uns also ein Teilchen vorzustellen, das sich auf der Zahlengerade $X = \mathbb{R}$ bewegt.

3. Eine reellwertige Funktion auf einer beliebigen Menge kann man sich als eine Temperaturverteilung auf besagter Menge vorstellen, im vorliegenden Fall also als eine Temperaturverteilung auf der reellen Zahlengeraden.



Vier verschiedene Anschauungen für eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen am Beispiel des Absolutbetrags $x \mapsto |x|$

4. In der Mathematik ist es auch nützlich, sich eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wirklich als Abbildung der Zahlengerade auf sich selber vorzustellen. Als Beispiel betrachten wir den Absolutbetrag, der als Abbildung aufgefaßt den negativen Teil der Zahlengerade auf den positiven Teil herüberklappt.

2.2.2. Beliebige Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können „wild aussehen". Man denke nur etwa an die Abbildung, die jeder rationalen Zahl den Betrag ihres Nenners nach vollständigem Kürzen zuordnet und jeder irrationalen Zahl ihre fünfte Nachkommastelle. Wir führen nun die „stetigen Funktionen" ein und zeigen insbesondere, daß für stetige auf einem Intervall definierte und injektive Funktionen auch ihr Bild ein Intervall ist und die Umkehrfunktion stetig. Das liefert uns dann viele neue Funktionen als Umkehrfunktionen bereits bekannter Funktionen. In der schmutzigen Anschauung ist eine reellwertige Funktion auf einem reellen Intervall stetig, wenn man „ihren Graphen zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen". Diese Anschauung werden wir im Folgenden präzisieren.

Definition 2.2.3. Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Gegeben ein Punkt $p \in D$ heißt unsere Funktion **stetig bei** p, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit

$$f(U' \cap D) \subset U$$

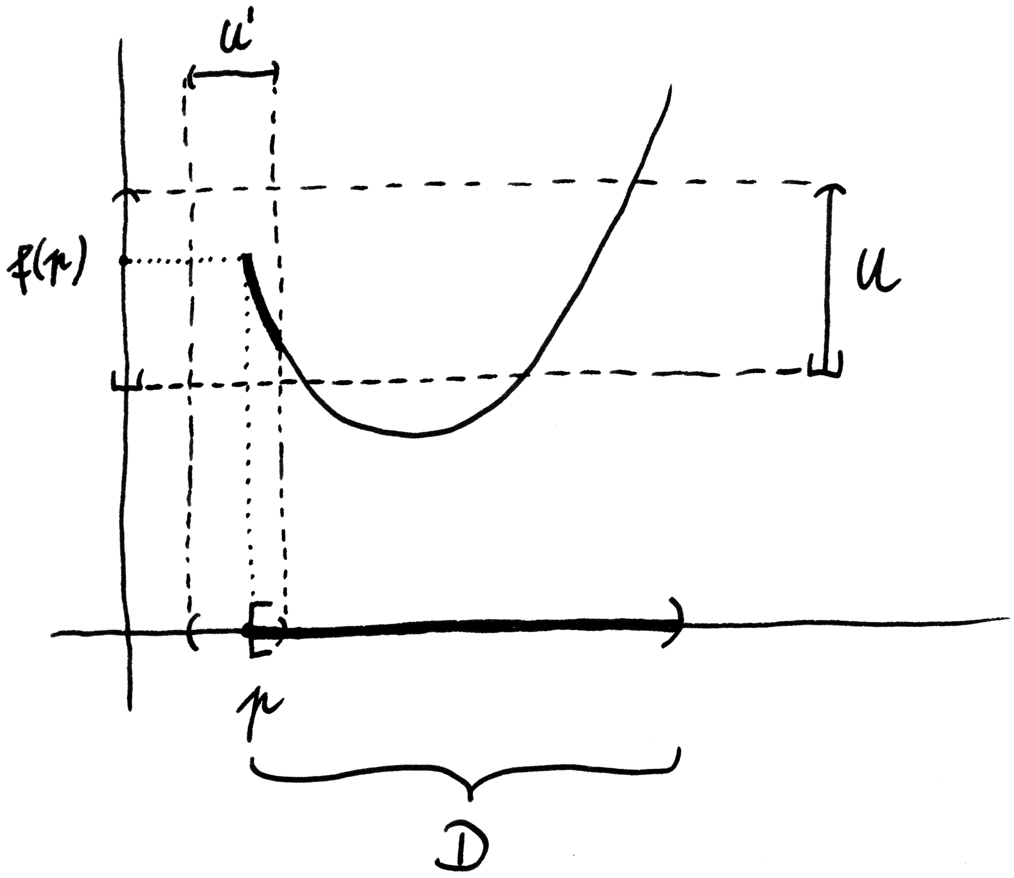
Unsere Funktion heißt **stetig**, wenn sie stetig ist bei jedem Punkt ihres Definitionsbereichs $p \in D$.

2.2.4. Auf Englisch sagt man für stetig **continuous**, auf Französisch **continue**. Man überzeugt sich leicht, daß sich inhaltlich rein gar nichts ändert, wenn man in der Definition der Stetigkeit statt „Umgebung" vielleicht anschaulicher „Intervallumgebung" sagt. Wir arbeiten im folgenden meist mit Umgebungen, weil das Schreibarbeit spart.

Vorschau 2.2.5. Der Begriff der Stetigkeit einer Funktion bei einem Punkt ist ein zentraler Begriff der Analysis. Im hier gewählten Aufbau nimmt er eine besonders zentrale Stellung ein, da wir den Begriff des Grenzwerts von Funktionen darauf aufbauend als „Wert der eindeutigen bei einem gegebenen Punkt stetigen Fortsetzung" erklären werden und den Begriff der Konvergenz von Folgen hinwiederum als einen Spezialfall des Grenzwertbegriffs für Funktionen.

Beispiel 2.2.6. Für alle $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist die Einbettung $i : D \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto x$ stetig: In diesem Fall können wir für jeden Punkt $p \in D$ und jede Umgebung U von $i(p) = p$ einfach $U' = U$ nehmen.

Beispiel 2.2.7. Der Absolutbetrag $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig: In diesem Fall können wir für jedes p und jede Umgebung U von $|p|$ einfach $U' = U \cup (-U)$ nehmen.



In diesem Bild habe ich für *eine* Umgebung U von $f(p)$ mal eine mögliche Umgebung U' von p eingezeichnet. Stetigkeit bei p bedeutet jedoch sehr viel stärker, daß wir für *jede* Umgebung U von $f(p)$ eine in der in 2.2.3 präzisierten Weise mögliche Umgebung U' von p finden können. Fett eingezeichnet ist auf der x-Achse der Definitionsbereich D unserer Funktion f, der Punkt p ist sein kleinstes Element. Auf dem Graphen von f habe ich den Teil über $U' \cap D$ fett eingezeichnet, damit man gut sehen kann, daß in der Tat gilt $f(U' \cap D) \subset U$. Unsere eigentlichen U und U' sind die Projektionen der so bezeichneten „freischwebenden Intervalle" auf die jeweiligen Koordinatenachsen, was ich versucht habe, durch die gestrichelten Linien anzudeuten.

Beispiel 2.2.8. Für jedes $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ist die konstante Funktion $c : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto c$ stetig: In diesem Fall können wir für jedes p und U einfach $U' = \overline{\mathbb{R}}$ nehmen.

Beispiel 2.2.9. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$ ist nicht stetig bei $p = 0$, denn für $U = (0, 2)$ liegen in jeder Umgebung U' von $p = 0$ auch Punkte, die nach Null abgebildet werden, so daß für keine Umgebung U' von $p = 0$ gilt $f(U') \subset U$. Die Einschränkung unserer Funktion auf $D := \mathbb{R}^\times$ ist jedoch stetig.

Beispiel 2.2.10. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ ist nur an der Stelle $p = 0$ stetig: Dort kann man einfach $U' = U$ wählen. Daß sie an allen anderen Stellen unstetig ist, mögen Sie zur Übung selber zeigen.

2.2.11 (**ε-δ-Kriterium**). Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und $p \in D$ ein Punkt. Genau dann ist f stetig bei p, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Das folgt sofort aus der Definition der Stetigkeit 2.2.3 und der Definition des Begriffs einer Umgebung 2.1.5.

2.2.12 (**Konventionen zu ε**). Wenn Sie in der Analysis die Formulierung „für alle $\varepsilon > 0$ gilt was auch immer“ antreffen, so dürfen Sie erwarten, daß dieses „was auch immer“, wenn es denn für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ gilt, für alle größeren $\varepsilon > 0$ eh gilt. Salopp gesprochen besteht also die unausgesprochene Übereinkunft, durch die Verwendung des Buchstabens ε das anzudeuten, was man umgangsprachlich vielleicht mit „für jedes auch noch so kleine $\varepsilon > 0$“ ausdrücken würde. Sie müssen nur einmal versuchen, beim Vorrechnen einer Übungsaufgabe statt ε den Buchstaben M zu verwenden: Auch wenn formal alles richtig sein sollte, wird Ihr Tutor deutlich länger darüber nachdenken müssen, ob Ihre Formulierung auch wirklich stimmt! „Sei $\varepsilon < 0$“ schließlich ist ein mathematischer Witz.

2.2.13. Ich will versuchen, an der Tafel einem Farbencode zu folgen, nach dem vorgegebene Umgebungen von Grenzwerten und dergleichen in gelber Farbe dargestellt werden, dazu zu findende N und dergleichen dahingegen in blauer Farbe. Rote Farbe ist an grünen Tafeln für nicht wenige Menschen kaum zu lesen.

2.2.14. Einschränkungen stetiger Funktionen sind stetig. Ist genauer $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig bei $p \in D$ und $E \subset D$ eine Teilmenge mit $p \in E$, so ist auch die Einschränkung $f|_E : E \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig bei p. Das folgt sofort aus der Definition.

Satz 2.2.15 (Zwischenwertsatz). *Für $a \leq b$ aus $\overline{\mathbb{R}}$ nimmt eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

2.2.16 (**Die schmutzige Anschauung**). Wenn man sich eine stetige reellwertige Funktion auf einem reellen Intervall vorstellt als eine Funktion, deren Graphen

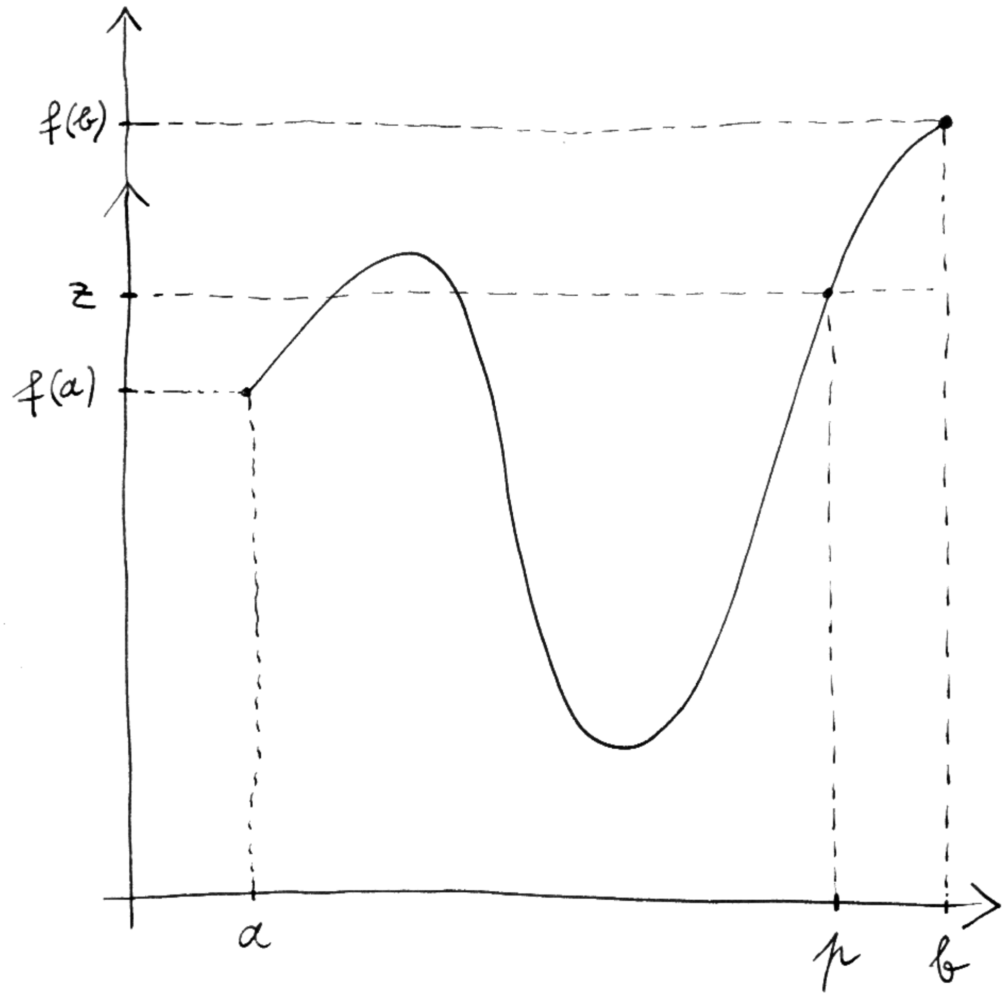


Illustration zum Zwischenwertsatz. Im vorliegenden Fall wir der gegebene Zwischenwert z sogar dreimal als Funktionswert angenommen. Unser erster Beweis führt stets zum hier eingezeichneten größten $p \in [a, b]$, an dem z als Funktionswert angenommen wird.

man zeichnen kann ohne den Bleistift abzusetzen, so ist auch der Zwischenwertsatz anschaulich klar: Wenn unser Graph unter einer horizontalen Linie anfängt und oberhalb aufhört oder umgekehrt, so muß er an irgendeiner Stelle unsere horizontale Linie kreuzen.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(a) \leq f(b)$ annehmen. Gegeben $z \in [f(a), f(b)]$ suchen wir $p \in [a, b]$ mit $f(p) = z$. Wir betrachten dazu

$$p := \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq z\}$$

und behaupten $f(p) = z$. Um das zu zeigen führen wir die Annahmen $f(p) < z$ und $z < f(p)$ beide zum Widerspruch: Aus $f(p) < z$ folgte zunächst $p < b$, und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein p' mit $p < p' < b$ und $f(p') \leq z$ und p wäre gar keine obere Schranke unserer Menge gewesen. Aus $z < f(p)$ dahingegen folgte zunächst $a < p$, und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein p' mit $a < p' < p$ und $z < f(x)$ für alle $x \in [p', p]$. Also wäre auch p' schon eine obere Schranke unserer Menge und p könnte nicht ihre kleinste obere Schranke gewesen sein. □

Korollar 2.2.17 (Abstrakter Zwischenwertsatz). *Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion ist ein Intervall. Ist also in Formeln $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall und $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig, so ist auch $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Das ist nur eine Umformulierung von 2.2.15. □

2.3 Beispiele für stetige Funktionen

2.3.1. Gegeben reellwertige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ erklären wir die Funktionen $f + g, fg : D \to \mathbb{R}$ durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $(fg)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

Satz 2.3.2 (Summe und Produkt stetiger Funktionen). *Ist $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ gegeben und $p \in D$ ein Punkt und sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig bei p, so sind auch $f + g$ und fg stetig bei p.*

Ergänzung 2.3.3. Nehmen f und g allgemeiner Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ an und sind an jeder Stelle $x \in D$ die Summe $f(x) + g(x)$ beziehungsweise das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ sinnvoll definiert im Sinne von 2.3.29, so gilt der Satz entsprechend mit fast demselben Beweis.

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

Lemma 2.3.4 (Stetigkeit von Addition und Multiplikation). *1. Gegeben $a, b \in \mathbb{R}$ und eine Umgebung W von $a + b$ gibt es Umgebungen U von a und V von b mit $U + V \subset W$;*

2. *Gegeben $a, b \in \mathbb{R}$ und eine Umgebung W von $a \cdot b$ gibt es Umgebungen U von a und V von b mit $U \cdot V \subset W$.*

2.3.5. In Erinnerung an [GR] 3.1.3 verstehen wir hier $U + V := \{x + y \mid x \in U,\ y \in V\}$ und $U \cdot V := \{x \cdot y \mid x \in U,\ y \in V\}$.

Vorschau 2.3.6. Im Rahmen unserer Diskussion in 6 folgende der Stetigkeit in mehreren Veränderlichen werden wir dieses Lemma verstehen lernen als die Aussage, daß Addition und Multiplikation stetige Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind. Das rechtfertigt dann auch recht eigentlich erst seine Bezeichnung.

Beweis des Lemmas. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß W sogar eine ε-Umgebung von $a + b$ ist. Nehmen wir dann für U beziehungsweise V die $\varepsilon/2$-Umgebung von a beziehungsweise b, so gilt in der Tat $U + V \subset W$. Für die zweite Formel beginnen wir mit der Abschätzung

$$\begin{array}{rcl} |xy - ab| & = & |(x-a)y + a(y-b)| \\ & \leq & |x-a||y| + |a||y-b| \end{array}$$

Aus den beiden Ungleichungen $|x - a| < \eta$ und $|y - b| < \eta$ folgt zunächst $|y| < |b| + \eta$ und dann

$$|xy - ab| \leq \eta(|b| + \eta + |a|)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nun wieder annehmen, daß W eine ε-Umgebung von $a \cdot b$ ist. Wählen wir dann ein $\eta \in (0, 1)$ mit $\varepsilon > \eta(|b| + 1 + |a|)$ und nehmen als U beziehungsweise V die η-Umgebungen von a beziehungsweise b, so gilt folglich in der Tat $U \cdot V \subset W$. □

Jetzt zeigen wir unseren Satz. Wir zeigen das nur für die Multiplikation, der Fall der Addition geht analog. Ist W eine Umgebung von $f(p)g(p)$, so gibt es nach 2.3.4 Umgebungen U von $f(p)$ und V von $g(p)$ mit $U \cdot V \subset W$. Da sowohl f als auch g stetig sind bei p, gibt es weiter Umgebungen U' und V' von p mit $f(U' \cap D) \subset U$ und $g(V' \cap D) \subset V$. Ihr Schnitt $U' \cap V'$ ist dann eine Umgebung W' von p mit $(fg)(W' \cap D) \subset W$. □

Definition 2.3.7. Wir nennen eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine **Polynomfunktion**, wenn es $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß unsere Funktion gegeben wird durch die Abbildungsvorschrift $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$.

Ergänzung 2.3.8. Jede Familie reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, in der höchstens endlich viele a_n von Null verschieden sind, liefert uns eine Polynomfunktion. Nach [LA1] 4.4.3 liefern verschiedene Folgen auch stets verschiedene Funktionen. Im Licht dieser Tatsache werden wir unsere Polynomfunktionen meist kürzer Polynome nennen, obwohl eigentlich der Begriff Polynom eher den formalen Ausdruck meint.

Diese Unterscheidung ist aber erst in der Algebra wirklich von Belang. Wenn man zum Beispiel mit endlichen Körpern arbeitet,so können verschiedene Folgen dieselbe Funktion liefern, vergleiche [LA1] 4.3.2.

Bemerkung 2.3.9. Das Wort „Polynom“ kommt von der griechischen Vorsilbe „poly“ für „viele“ und dem lateinischen Wort „nomen“ für „Namen“. Allgemeiner betrachtet man auch Polynome in mehreren Veränderlichen und meint damit Ausdrücke wie etwa $xyz + 7x^2y^4 - 12z + 1$. Dieses Polynom ist die Summe der vier **Monome** xyz, $7x^2y^4$, $-12z$ und 1, wobei das Wort „Monom“ diesmal mit der griechischen Vorsilbe „mono“ für „allein“ gebildet ist. Einen Ausdruck wie $xyz + 7x^2y^4$ würde man als **Binom** bezeichnen, diesmal mit der griechischen Vorsilbe „bi“ für „Zwei“. Ein anderes Binom wäre der Ausdruck $(x + y)$, dessen Potenzen die „binomische“ Formel [GR] 1.1.23 explizit angibt. Es sollte klar sein, wie man aus unserer binomischen Formel auch Formeln für die Potenzen eines beliebigen Binoms erhält.

Korollar 2.3.10. *Polynomfunktionen sind stetig.*

Beweis. Das folgt induktiv aus dem vorhergehenden Satz 2.3.2. □

Definition 2.3.11. Eine Abbildung f zwischen geordneten Mengen heißt

monoton wachsend,	wenn gilt	$x \leq y$	$\Rightarrow$	$f(x) \leq f(y)$
streng monoton wachsend,	wenn gilt	$x < y$	$\Rightarrow$	$f(x) < f(y)$
monoton fallend,	wenn gilt	$x \leq y$	$\Rightarrow$	$f(x) \geq f(y)$
streng monoton fallend,	wenn gilt	$x < y$	$\Rightarrow$	$f(x) > f(y)$

Eine Abbildung heißt **monoton**, wenn sie monoton wachsend oder fallend ist. Eine Abbildung heißt **streng monoton**, wenn sie streng monoton wachsend oder fallend ist.

Proposition 2.3.12 (Stetigkeit monotoner Surjektionen auf Intervalle). *Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine monotone Abbildung. Ist $g(D)$ ein Intervall, so ist g stetig.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit g monoton wachsend. Gegeben $s \in D$ müssen wir für jede Umgebung U von $g(s)$ eine Umgebung U' von t finden mit der Eigenschaft $g(U' \cap D) \subset U$. Wir unterscheiden vier Fälle.

1. Ist $g(s) \in g(D)$ weder das größte noch das kleinste Element, so umfaßt jede Umgebung U von $g(s)$ ein Intervall der Gestalt $[y, z]$ mit $y < g(s) < z$ und $y, z \in g(D)$, also $y = g(r)$ und $z = g(t)$ mit $r, t \in D$ und $r < s < t$, und wir können $U' = [r, t]$ nehmen;

2. Ist $g(s) \in g(D)$ das größte aber nicht das kleinste Element, so umfaßt jede Umgebung U von $g(s)$ ein Intervall der Gestalt $[y, g(s)]$ mit $y < g(s)$ und $y \in g(D)$, also $y = g(r)$ mit $r \in D$ und $r < s$, und wir können $U' = [r, \infty]$ nehmen;

3. Ist $g(s) \in g(D)$ das kleinste aber nicht das größte Element, so argumentieren wir analog;

4. Ist $g(s) \in g(D)$ das kleinste und das größte alias das einzige Element, so ist g konstant und wir können $U' = [-\infty, \infty]$ nehmen.

Die Proposition ist bewiesen. □

Beispiel 2.3.13 (**Stetigkeit des Invertierens**). Die Abbildung $[0, \infty] \to [0, \infty]$ gegeben durch $x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x \in (0, \infty)$ und $0 \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto 0$ ist stetig aufgrund unserer Proposition 2.3.12. In der Tat ist sie monoton und ihr Bild ist ein Intervall, genauer das Intervall $[0, \infty]$.

2.3.14 (**Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft**). Wird eine Funktion stetig bei einem Punkt nach Einschränkung auf eine Umgebung des besagten Punktes, so war sie dort schon selbst stetig. Ist genauer und in Formeln $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion und $p \in D$ ein Punkt und gibt es eine Umgebung V von p derart, daß die Einschränkung von f auf $D \cap V$ stetig ist bei p, so ist auch $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ bereits stetig bei p. Um das zum Ausdruck zu bringen, sagt man dann etwas vage, die „Stetigkeit sei eine lokale Eigenschaft".

Beispiel 2.3.15 (**Stetigkeit des Invertierens, Variante**). Die Funktion $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig. In der Tat reicht es nach 2.3.14 zu zeigen, daß ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}_{>0}$ und auf $\mathbb{R}_{<0}$ jeweils stetig ist. Diese Einschränkungen sind jedoch beide monoton und haben als Bildmenge jeweils ein Intervall. Sogar die Funktion $\overline{\mathbb{R}} \backslash 0 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig mit demselben Argument, wenn wir $1/\infty = 0 = 1/(-\infty)$ verstehen.

Satz 2.3.16 (**Die Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig**). *Seien genauer $D, E \subset \overline{\mathbb{R}}$ Teilmengen, $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen, und es gelte $f(D) \subset E$. Ist f stetig bei einem Punkt $p \in D$ und g stetig bei seinem Bildpunkt $f(p)$, so ist auch $g \circ f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto g(f(x))$ stetig bei p.*

2.3.17. Genau genommen ist die Notation $g \circ f$ in der Formulierung von Satz 2.3.16 im Sinne von [GR] 2.3.23 nicht ganz korrekt: Wir müßten eigentlich erst eine Abbildung $\tilde{f} : D \to E$ definieren durch $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ und dann die Abbildung $g \circ \tilde{f}$ betrachten. Das ist nun jedoch meiner Ansicht nach ein Fall, in dem größere Präzision nicht zur besseren Verständlichkeit beiträgt.

Beweis. Da g stetig ist bei $f(p)$, finden wir für jede Umgebung U von $g(f(p))$ eine Umgebung U' von $f(p)$ mit $g(U' \cap E) \subset U$. Da f stetig ist bei p, finden wir für diese Umgebung U' von $f(p)$ eine Umgebung U'' von p mit $f(U'' \cap D) \subset U'$. Damit finden wir in der Tat für jede Umgebung U von $(g \circ f)(p)$ eine Umgebung U'' von p mit $(g \circ f)(U'' \cap D) \subset U$. □

2.3.18. Wir erhalten so ein alternatives Argument dafür, daß Einschränkungen stetiger Funktionen stetig sind: Wir können sie nämlich als Verknüpfung einer stetigen Funktion mit einer nach 2.2.6 stetigen Einbettung schreiben.

Korollar 2.3.19 (Quotienten stetiger Funktionen sind stetig). *Ist genauer $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig und hat g keine Nullstelle in D, so ist auch die Funktion $f/g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)/g(x)$ stetig.*

Beweis. Bezeichne $i : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto 1/x$. Sie ist stetig nach 2.3.15. Also ist auch $i \circ g : D \to \mathbb{R}, \ x \mapsto 1/g(x)$ stetig, und dann auch das Produkt dieser Funktion mit der stetigen Funktion f. □

Ergänzung 2.3.20. Hier dürfen wir sogar $g : D \to \overline{\mathbb{R}} \backslash 0$ erlauben, wenn wir jeden Quotient einer reellen Zahl durch $\pm\infty$ als 0 verstehen. Der Beweis bleibt derselbe.

Beispiel 2.3.21. Die Funktion

$$x \mapsto \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

ist stetig auf $D := \mathbb{R} \backslash 1$. Sie kann sogar zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden, die gegeben wird durch die Abbildungsvorschrift

$$x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

2.3.22. Eine Funktion, die sich als der Quotient eines Polynoms durch ein von Null verschiedenes Polynom darstellen läßt, heißt eine **rationale Funktion**. So eine Funktion ist a priori natürlich nur da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, und ist nach dem vorhergehenden Korollar auf dem Komplement der Nullstellenmenge ihres Nenners stetig. Betrachten wir unsere rationale Funktion jedoch nicht als Abbildung, sondern als formalen Ausdruck, so verstehen wir unter ihrem Definitionsbereich die etwas größere Menge, auf der „nach maximalem Kürzen“ der Nenner keine Nullstellen hat, vergleiche [LA1] 4.6.7. Man beachte, daß die hier gegebene etwas unscharfe Formulierung „nach maximalem Kürzen“ eigentlich erst in [AL] 2.4.24 gerechtfertigt wird, wo wir die Eindeutigkeit der „Primfaktorzerlegung“ in Polynomringen diskutieren. Bleibt auch nach maximalem Kürzen noch ein nichtkonstantes Polynom im Nenner stehen, so spricht man von einer **gebrochen rationalen Funktion**.

Satz 2.3.23 (über die Umkehrfunktion). *Ist $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall und $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ streng monoton und stetig, so ist auch $f(I) \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \overline{\mathbb{R}}$ ist streng monoton und stetig.*

2.3.24. Hier ist unsere Notation wieder nicht ganz korrekt: Wir müßten genau genommen eigentlich die Bijektion $\tilde{f} : I \xrightarrow{\sim} f(I)$, $x \mapsto f(x)$ betrachten, dazu die inverse Abbildung $\tilde{f}^{-1} : f(I) \xrightarrow{\sim} I$ nehmen, und unser $f^{-1} : f(I) \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren als die Verknüpfung von $\tilde{f}^{-1}$ mit der Einbettung $I \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

2.3.25. Die Umkehrfunktion f^{-1} darf nicht verwechselt werden mit der Funktion $x \mapsto 1/f(x)$: Ist zum Beispiel $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$, so haben wir $1/f(x) = x^{-2}$, aber die Umkehrabbildung ist gegeben durch die Funktion $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, die Sie aus der Schule kennen und die wir im Anschluß auf ganz $[0, \infty)$ einführen. Die Notation ist hier leider nicht ganz eindeutig. Oft muß man aus dem Kontext erschließen, ob mit f^{-1} die Umkehrfunktion von f oder vielmehr die „Kehrwertfunktion“ $x \mapsto 1/f(x)$ gemeint ist.

Beweis. Die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ ist offensichtlich monoton und ihr Bild ist ein Intervall, also ist sie nach 2.3.12 stetig. Daß $f(I)$ ein Intervall ist, war gerade die Aussage des abstrakten Zwischenwertsatzes 2.2.17. $\square$

2.3.26. Gegeben $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die q-te Potenzfunktion $x \mapsto x^q$ auf $[0, \infty)$ offensichtlich stetig und streng monoton wachsend. Ihr Bild ist also ein Intervall, und da für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^q \geq n$ und $0^q = 0$ muß dies Intervall wieder $[0, \infty)$ sein. Wir definieren die **q-te Wurzel**

$$\sqrt[q]{} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

als die Umkehrfunktion zur q-ten Potenzfunktion $x \mapsto x^q$. Nach 2.3.23 ist $x \mapsto \sqrt[q]{x}$ stetig. Man verwendet die Abkürzung $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.

Beispiel 2.3.27. Die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \sqrt{x^4 + 5}$ liefert eine stetige Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vorschau 2.3.28. Es gibt stetige nichtkonstante Gruppenhomomorphismen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen, und sind $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ stetige nichtkonstante Gruppenhomomorphismen, so gibt es $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ mit $\psi(x) = \phi(\lambda x)$ für alle x. Der Beweis dieser Aussagen wird uns bis 3.3.7 beschäftigen und auf eine außerordentlich wichtige Funktion führen, die „Exponentialfunktion“.

2.3.29. Die Addition und die Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lassen sich nicht so zu Abbildungen von ganz $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ nach $\overline{\mathbb{R}}$ fortsetzen, daß 2.3.4 entsprechend gilt. Alle derartigen Fortsetzungen auf Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ stimmen jedoch auf dem Schnitt der jeweiligen Definitionsbereiche überein, so daß es sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation jeweils eine größtmögliche „sinnvolle Fortsetzung“ gibt, die wir im Rahmen der Topologie [TM] 1.8.1 als die größtmögliche

„stetige Fortsetzung“ werden verstehen können. Wir beschreiben diese Fortsetzungen von Addition und Multiplikation durch Abbildungen $+, \cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}} \cup \{*\}$ mit einem eigenen Symbol $*$ für „nicht sinnvoll in $\overline{\mathbb{R}}$ zu definieren“. Unsere Fortsetzungen werden mit dieser Konvention gegeben durch die Formeln

$$\begin{array}{rclcll} a+\infty &=& \infty+a &=& \infty & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ a+(-\infty) &=& -\infty+a &=& -\infty & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \infty+(-\infty) &=& -\infty+\infty &=& * & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rclcll} a\infty &=& \infty a &=& \infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a > 0 \\ a\infty &=& \infty a &=& -\infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a < 0 \\ a(-\infty) &=& (-\infty)a &=& -\infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a > 0 \\ a(-\infty) &=& (-\infty)a &=& \infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a < 0 \\ 0\infty &=& \infty 0 &=& * & \\ 0(-\infty) &=& (-\infty)0 &=& * & \end{array}$$

Übungen

Übung 2.3.30. Seien $I, J \subset \overline{\mathbb{R}}$ Intervalle mit nichtleerem Schnitt und sei $f : (I \cup J) \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Man zeige: Sind die Einschränkungen $f|_I$ und $f|_J$ stetig, so ist auch f selbst stetig. Im übrigen wird sich der „schwierige“ Fall dieser Übung als Spezialfall von 6.7.8 erweisen.

Übung 2.3.31. Man zeige, daß auf einem offenen reellen Intervall I jede konvexe reelle Funktion stetig ist. Hinweis: Die graphische Darstellung zum Beweis von 4.5.13 mag helfen. Eine Funktion heißt **konvex**, wenn für alle $x, z \in I$ gilt

$$f(tx + (1-t)z) \leq tf(x) + (1-t)f(z) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Anschaulich bedeutet das, daß unsere Funktion „unter jeder ihrer Sekanten liegt“.

Übung 2.3.32. Man zeige: Die Regel zum Vertauschen von Grenzwertbildung mit Addition und Multiplikation gelten auch noch, wenn wir $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ zulassen und $a + b$ beziehungsweise $a \cdot b$ sinnvoll definiert sind im Sinne der vorhergehenden Bemerkung 2.3.29.

2.4 Die Kreiszahl

2.4.1. Bekanntlich bezeichnet π, ein kleines griechisches P für „Perimeter“, das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises. Um diese Anschauung zu formalisieren zur Definition einer reellen Zahl im Sinne von 1.5.7 gehen wir aus von der anschaulichen Bedeutung von π als Länge des Halbkreises H mit Radius Eins

$$H := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1,\ b \geq 0\}$$

Seien $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die beiden Abbildungen, die jedem Punkt der Ebene seine erste beziehungsweise zweite Koordinate zuordnen, also $v = (x(v), y(v)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$. Die Distanz $d(v, w) \in \mathbb{R}$ zwischen zwei Punkten $v, w \in \mathbb{R}^2$ der Ebene erklären wir in Erinnerung an den Satz des Pythagoras durch die Formel

$$d(v, w) := \sqrt{(x(v) - x(w))^2 + (y(v) - y(w))^2}$$

Die **Kreiszahl** $\pi \in \mathbb{R}$ definieren wir dann als das Supremum über die „Längen aller in unseren Halbkreis H einbeschriebenen Polygonzüge“, in Formeln

$$\pi := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(v_{i-1}, v_i) \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N},\ v_0, v_1, \ldots, v_n \in H, \\ x(v_0) < x(v_1) < \ldots < x(v_n) \end{array} \right\}$$

Mithilfe der Abschätzung $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ erkennt man, daß die Zahl 4 eine obere Schranke ist für unsere Menge von Längen von Polygonzügen, mithin haben wir hier in der Tat eine reelle Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ definiert. Wir werden in 4.8.20 sehen, wie man diese Zahl im Prinzip bis zu einer beliebig vorgegebenen Stelle nach dem Komma berechnen kann. Die Definition selbst ist recht elementar. Ich habe sie nur deshalb nicht gleich im Zusammenhang mit der Definition der reellen Zahlen gegeben, weil sie die Existenz von Quadratwurzeln benötigt, die erst in 2.3.26 gezeigt wurde.

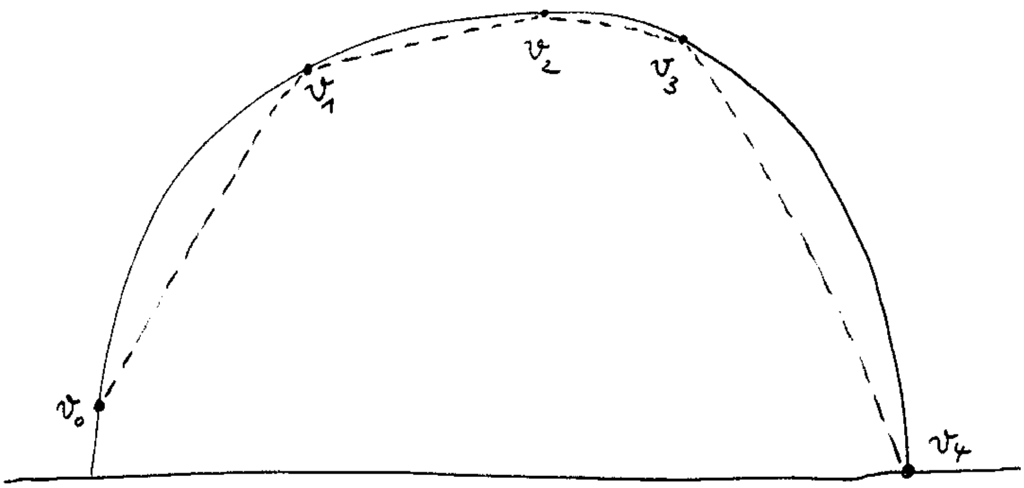
Ergänzung 2.4.2. Die Zahl π ist nicht rational, in Formeln $\pi \notin \mathbb{Q}$, wie Lambert bereits 1766 zeigen konnte. Anders ausgedrückt läßt sich π nicht durch einen periodischen Dezimalbruch darstellen. Wir beweisen diese Tatsache in 4.8.12. Unsere Kreiszahl π ist noch nicht einmal **algebraisch**, als da heißt Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms mit rationalen Koeffizienten, d.h. es gilt keine Gleichung der Gestalt

$$\pi^n + q_{n-1}\pi^{n-1} + \ldots + q_1\pi + q_0 = 0 \quad \text{mit } q_{n-1}, \ldots, q_0 \in \mathbb{Q} \text{ und } n \geq 1.$$

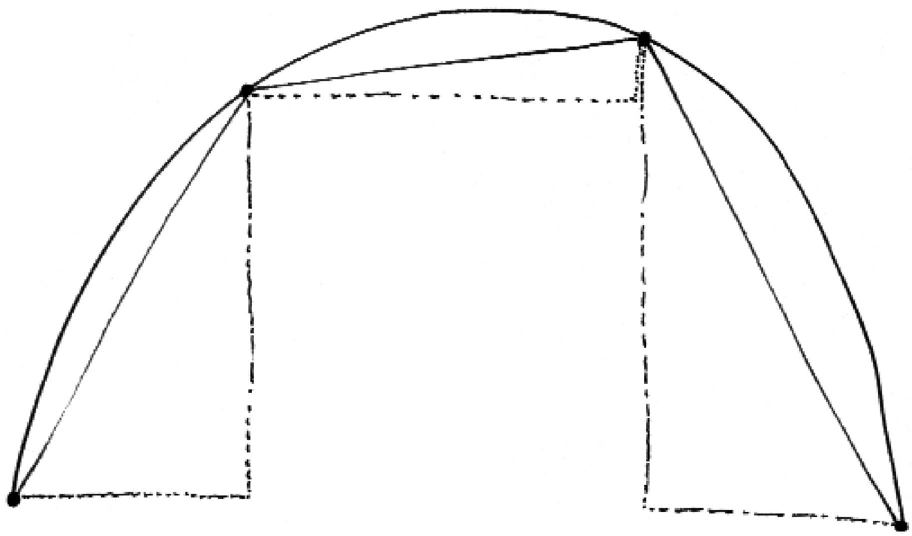
Reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen **transzendent**, lateinisch für „überschreitend“, da ihre Behandlung „die Grenzen der Algebra überschreitet“. Die Transzendenz von π wurde 1882 von Lindemann in Freiburg bewiesen. Seine Büste steht im vierten Stock des Mathematischen Instituts. Er war übrigends Hilbert’s Doktorvater.

2.5 Grenzwerte

Definition 2.5.1. Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge.



Ein einbeschriebener Polygonzug



Diese Abbildung soll veranschaulichen, warum 4 eine obere Schranke für die Längen einbeschriebener Polygonzüge ist: Die horizontalen Stücke und die vertikalen Stücke haben jeweils zusammengenommen eine Gesamtlänge ≤ 2.

1. Ein Punkt $p \in D$ heiße ein **Häufungspunkt von** D, wenn jede Umgebung von p mindestens einen von p verschiedenen Punkt mit D gemeinsam hat;

2. Ein Punkt $p \in \overline{\mathbb{R}}$ heiße ein **Häufungspunkt zu** D, wenn er ein Häufungspunkt von $D \cup \{p\}$ ist;

3. Ein Punkt von D, der kein Häufungspunkt von D ist, heiße ein **isolierter Punkt von** D.

2.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). Die hier eingeführte Terminologie der „Häufungspunkte von und zu" ist ein Versuch, den sprachlichen Schwierigkeiten zu entkommen, die in der üblichen Terminologie dadurch entstehen, daß darin ein Häufungspunkt einer Menge kein Punkt von besagter Menge zu sein braucht.

Beispiele 2.5.3. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen besteht aus isolierten Punkten. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen besteht aus Häufungspunkten. Die Menge $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ hat als einzigen Häufungspunkt ∞.

2.5.4. Wir vereinbaren für die Differenz einer Menge X und einer einpunktigen Menge $\{p\}$ die abkürzende Schreibweise $X \backslash p := X \backslash \{p\}$.

Satz 2.5.5 (**Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten**). *Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, $p \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f : D\backslash p \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. So gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Funktion $\tilde{f} : D \to \overline{\mathbb{R}}$, die stetig ist bei p.*

Beweis. Wäre sonst $\hat{f}$ eine weitere stetige Fortsetzung mit $\hat{f}(p) \neq \tilde{f}(p)$, so fänden wir disjunkte Umgebungen $\hat{U}$ und $\tilde{U}$ der beiden Punkte $\hat{f}(p)$ und $\tilde{f}(p)$, und dann Umgebungen $\hat{U}'$ und $\tilde{U}'$ von p mit $\hat{f}(\hat{U}' \cap D) \subset \hat{U}$ und $\tilde{f}(\tilde{U}' \cap D) \subset \tilde{U}$. Daraus folgte aber

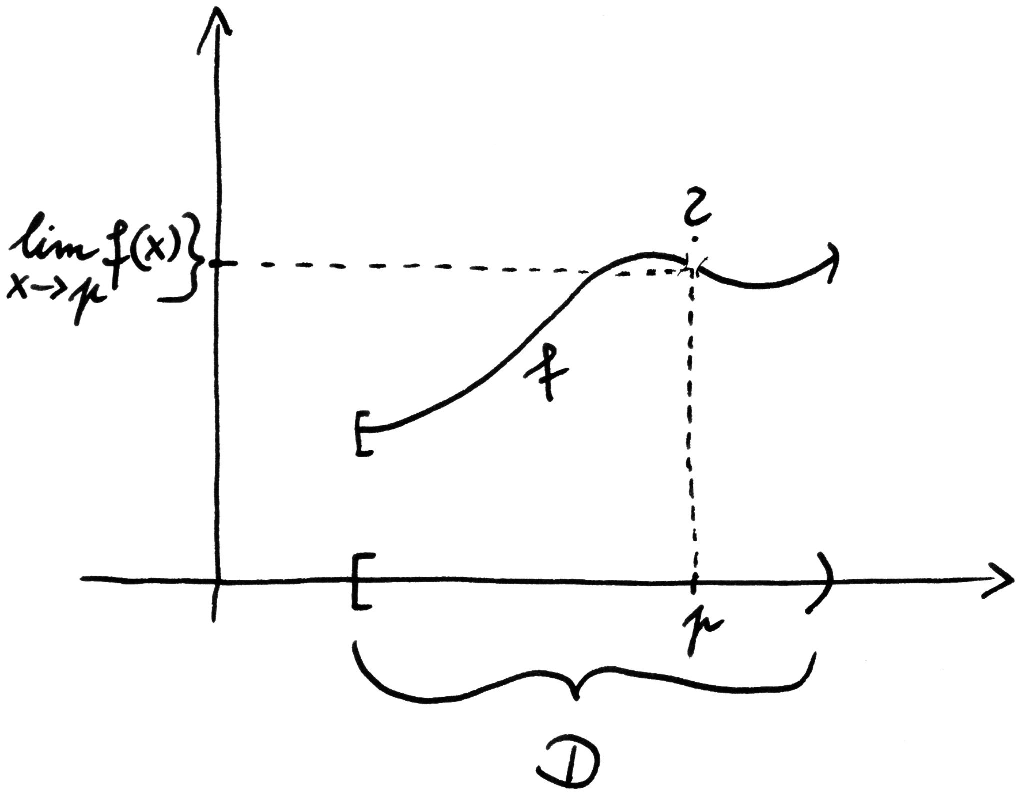
$$f(\hat{U}' \cap \tilde{U}' \cap D\backslash p) \ \subset \ \hat{U} \cap \tilde{U} = \emptyset$$

im Widerspruch dazu, daß $\hat{U}' \cap \tilde{U}' \cap D$ nicht nur aus unserem Häufungspunkt p bestehen darf, weil ja auch $\hat{U}' \cap \tilde{U}'$ eine Umgebung von p ist. □

Definition 2.5.6. Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, $p \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f : D\backslash p \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Sei b ein weiterer Punkt aus $\overline{\mathbb{R}}$. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen** b **für** $x \to p$ und schreiben

$$\lim_{x \to p} f(x) = b$$

als Abkürzung für die Aussage, daß die Fortsetzung von f zu $\tilde{f} : D \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $\tilde{f}(p) := b$ stetig ist bei p. In diesem Fall nennen wir b den **Grenzwert** oder lateinisierend **Limes** der Funktion f für $x \to p$.



Der Grenzwert oder Limes einer Funktion mit einer „Fehlstelle“ in ihrem Definitionsbereich ist, wenn er existiert, der Wert an der fraglichen Fehlstelle der einzig möglichen dort stetigen Fortsetzung.

2.5.7 (**Eindeutigkeit des Grenzwerts**). Nach der Eindeutigkeit 2.5.5 der stetigen Fortsetzung in einen Häufungspunkt hinein folgt aus $\lim_{x \to p} f(x) = a$ und $\lim_{x \to p} f(x) = b$ bereits $a = b$.

2.5.8. Salopp gesprochen verhält es sich demnach so, daß eine Funktion mit einer einpunktigen Definitionslücke an einem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs auf höchstens eine Weise stetig in diese Definitionslücke hinein fortgesetzt werden kann. Der Wert dieser an besagter Stelle stetigen Fortsetzung heißt dann der Grenzwert unserer Funktion an besagter Stelle.

Definition 2.5.9. Eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$ von den natürlichen Zahlen in eine Menge X nennen wir eine **Folge in** X. Wir schreiben eine Folge meist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $x_0, x_1, x_2, \ldots$ oder auch einfach nur x_n. Die x_i heißen die **Folgenglieder**. Manchmal nennen wir allerdings auch Abbildungen Folgen, die erst ab $n = 1$ definiert sind.

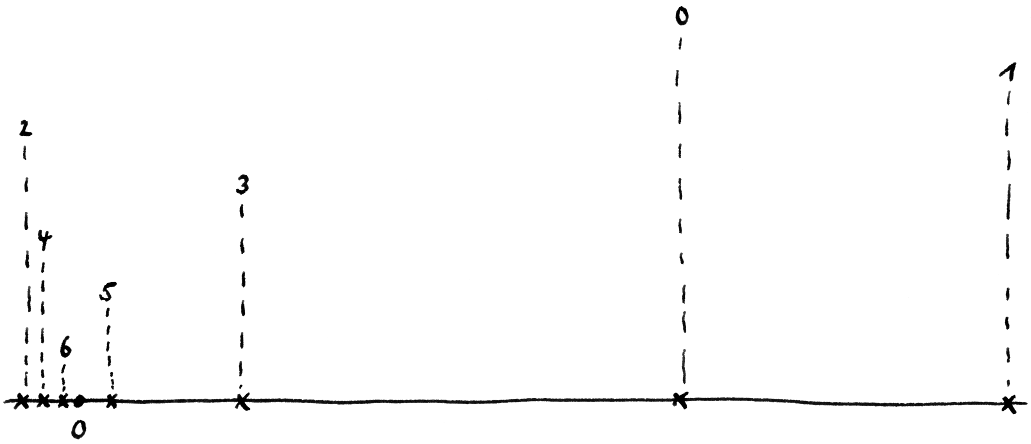
2.5.10. Ich erinnere daran, daß der Punkt ∞ ein Häufungspunkt zu $\mathbb{N}$ ist. Seien nun $x_0, x_1, \ldots$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und $x \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Punkt. Wir sagen, **die Folge** x_n **konvergiere gegen** x, wenn gilt

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

In diesem Fall nennen wir x den **Grenzwert** oder lateinisierend **Limes** der Folge.

2.5.11. Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Elemente** einer Menge, so soll das bedeuten, daß sie gilt für alle Elemente bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen. Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Glieder** einer Folge, so soll das bedeuten, daß für fast alle Indizes n unsere Aussage für das n-te Folgenglied gilt. Aufgeschlüsselt ist $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ gleichbedeutend dazu, daß jede Umgebung von x fast alle Glieder unserer Folge enthält.

2.5.12 (**Diskussion der Terminologie**). Mit unserer Konvention für die „Konvergenz gegen $\pm\infty$“ bewegen wir uns zwar im Rahmen des allgemeinen Begriffs der „Konvergenz in topologischen Räumen“ 6.8.8, aber außerhalb der in der einführenden Literatur zur Analysis üblichen Konventionen. Üblicherweise wird stattdessen die Terminologie **bestimmte Divergenz gegen** $\pm\infty$ verwendet. Üblicherweise bleibt in anderen Worten der Begriff der konvergenten Folge reserviert für Folgen, die gegen eine reelle Zahl konvergieren. Wir nennen solche Folgen **reell konvergent**. Falls eine Folge nicht konvergiert, auch nicht gegen ∞ oder $-\infty$, so nennt man sie **unbestimmt divergent**. Wir verlieren mit unserer Terminologie zwar etwas an terminologischer Kohärenz, da wir im weiteren „Reihen“ aus wieder anderen Gründen nur dann konvergent nennen werden, wenn die Folge ihrer Partialsummeen *reell* konvergent ist. Das schien mir jedoch ein kleineres Übel, als es eine unnötig einschränkende oder in Fälle aufspaltende Formulierung von Aussagen wie 2.6.5 wäre.



Graphische Darstellung der Folge $x_n = 3^{3-n} - (-2)^{4-n}$, die gegen Null konvergiert, wie Sie bald werden zeigen können. Die Folgenglieder sind die kleinen Kreuzchen auf der reellen Achse, ihre Indizes tragen sie an unterschiedlich langen gestrichelt eingezeichneten Stangen.

2.5.13 (ε-N-**Kriterium für Konvergenz**). Die Konvergenz einer Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist gleichbedeutend dazu, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die ε-Umgebung von x fast alle Glieder der Folge enthält. Im Fall einer reellen Folge (x_n) ist das weiter gleichbedeutend dazu, daß es

$$\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ ein } N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ gibt mit } n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Dahingegen ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ gleichbedeutend dazu, daß für jedes $K \in \mathbb{N}$ fast alle Folgenglieder oberhalb von K liegen.

2.5.14 (**Lokalität des Grenzwerts**). Der Grenzwert einer Funktion für $x \to p$ hängt nur von ihrem Verhalten in einer Umgebung von p ab. Ist genauer $p \in D$ Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $f : D\backslash p \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion und V eine Umgebung von p, so existiert $\lim_{x\to p} f(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x\to p}(f|_{V\cap D\backslash p})(x)$ existiert, und unter diesen Umständen stimmen die beiden Grenzwerte überein.

Beispiel 2.5.15. Wir haben $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$, denn die Funktion $[0,\infty] \to [0,\infty]$ mit $x \mapsto 1/x$ für $0 < x < \infty$ und $0 \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto 0$ ist stetig nach 2.3.13.

2.5.16. Eine **Nullfolge** ist eine Folge, die gegen Null konvergiert. Zum Beispiel folgt aus dem Vorhergehenden sofort, daß die für $n \geq 1$ definierte Folge $n \mapsto 1/n$ eine Nullfolge ist, daß also in Formeln gilt $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

2.5.17 (**Auswerten stetiger Funktionen auf Grenzwerten**). Das Anwenden einer stetigen Funktion vertauscht mit der Grenzwertbildung. Ist genauer $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ und ist $q \in E$ ein Häufungspunkt von E und $g : E\backslash q \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit Bild in $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und existiert $\lim_{x\to q} g(x) = p$ und liegt auch in D und ist $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig bei p, so gilt

$$\lim_{x\to q} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to q} g(x)\right)$$

Wir erhalten diese Aussage mithilfe von 2.5.6 als direkte Konsequenz aus der Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Funktionen 2.3.16. Speziell folgt für jede Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, die stetig ist bei einer Stelle $p \in D$, und jede Folge a_n in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ bereits $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(p)$.

Beispiel 2.5.18. Wenden wir unsere Erkenntnisse aus die Funktion $f(x) = \frac{5+x^2}{3+x}$ und die Folge $a_n = 1/n$ an, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + n}{3n^3 + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + (1/n)^2}{3 + (1/n)} = \frac{5}{3}$$

2.5.19 (**Grenzwert von Summe, Produkt und Quotient**). Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $p \in D$ ein Häufungspunkt und seien $f, g : D\backslash p \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen mit reellen Grenzwerten $\lim_{x\to p} f(x) = b$ und $\lim_{x\to p} g(x) = c$.

So folgt aus der Stetigkeit von Summe und Produkt stetiger Funktionen 2.3.2 unmittelbar $\lim_{x\to p}(f+g)(x) = b+c$ und $\lim_{x\to p}(fg)(x) = bc$. Ebenso folgt aus der Stetigkeit des Quotienten 2.3.19 unter der zusätzlichen Annahme, daß g keine Nullstelle hat und der Grenzwert c nicht Null ist, auch $\lim_{x\to p} f(x)/g(x) = b/c$.

2.5.20. Es gibt noch weitere Möglichkeiten, aus dem Zusammenhang zwischen Grenzwert und Stetigkeit 2.5.6 sowie der Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Funktionen 2.3.16 ähnliche Aussagen abzuleiten. Zusammen mit der bereits als 2.5.17 ausführlicher besprochenen Aussage erhält man so insbesondere die drei Implikationen

$$\begin{array}{lcl}
(\lim_{x\to q} g(x) = p \text{ und } f \text{ stetig bei } p) & \Rightarrow & \lim_{x\to q} f(g(x)) = f(p) \\
\big(g \text{ stetig bei } q \text{ und } \lim_{y\to g(q)} f(y) = b\big) & \Rightarrow & \lim_{x\to q} f(g(x)) = b \\
(\lim_{x\to q} g(x) = p \text{ und } \lim_{y\to p} f(y) = b) & \Rightarrow & \lim_{x\to q} f(g(x)) = b
\end{array}$$

2.5.21 (**Quetschlemma**). Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $p \in D$ ein Häufungspunkt und $f, g, h : D\backslash p \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen mit

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \text{für alle } x \in D\backslash p.$$

So folgt aus $\lim_{x\to p} f(x) = b = \lim_{x\to p} h(x)$ schon $\lim_{x\to p} g(x) = b$. In der Tat gibt es dann für jede Intervallumgebung I von b Umgebungen U, W von p mit $f(U \cap D\backslash p) \subset I$ und $h(W \cap D\backslash p) \subset I$. Dann aber ist $V := U \cap W$ offensichtlich eine Umgebung von p mit $g(V \cap D\backslash p) \subset I$.

Lemma 2.5.22 (Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert). *Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $p \in D$ ein Häufungspunkt und $f, g : D\backslash p \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen mit $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in D\backslash p$. Existieren die Grenzwerte von f und g für $x \to p$, so gilt*

$$\lim_{x\to p} f(x) \le \lim_{x\to p} g(x)$$

Beweis. Durch Widerspruch. Sei a der Grenzwert von f und b der Grenzwert von g. Hätten wir $a > b$ alias $b < a$, so fänden wir k mit $b < k < a$. Dann wäre $[-\infty, k)$ eine Umgebung von b und $(k, \infty]$ eine Umgebung von a. Es gäbe also Umgebungen U und V von p mit $f(U \cap D\backslash p) \subset (k, \infty]$ und $g(V \cap D\backslash p) \subset [-\infty, k)$. Da p Häufungspunkt von D ist, wäre $U \cap V \cap D\backslash p$ nicht leer. Für jeden Punkt x aus dieser Menge gälte aber $f(x) > g(x)$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Proposition 2.5.23. *Die folgende Tabelle beschreibt das Konvergenzverhalten der Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Potenzen von x in Abhängigkeit von x:*

$$\begin{array}{rl}
x > 1 & \lim_{n\to\infty} x^n = \infty; \\
x = 1 & \lim_{n\to\infty} x^n = 1; \\
|x| < 1 & \lim_{n\to\infty} x^n = 0; \\
x \le -1 & \textit{Die Folge } x^n \textit{ divergiert unbestimmt.}
\end{array}$$

Beweis. Im Fall $x > 1$ schreiben wir $x = 1 + y$ mit $y > 0$ und erhalten mit der binomischen Formel

$$x^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny$$

Die Folge $n \mapsto 1 + ny$ strebt aber gegen ∞ und nach dem Quetschlemma angewandt auf diese Folge und die konstante Folge $n \mapsto \infty$ strebt dann die Folge x^n auch gegen ∞. Im Fall $x = 1$ ist die Folge konstant 1 und es ist nichts zu zeigen. Falls $0 < x < 1$ gilt nach dem Vorhergehenden $\lim_{n\to\infty} 1/x^n = \infty$ und daraus folgt $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ durch Anwenden der stetig von $(0, \infty)$ auf $[0, \infty]$ fortgesetzten Funktion $t \mapsto 1/t$ aus 2.3.13. Für $-1 < x \leq 0$ folgt die Behauptung dann wegen $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$ aus dem Quetschlemma. Im Fall $x \leq -1$ gilt $|x^n - x^{n+1}| \geq 2$ für alle n. Also kann die Folge nicht gegen eine reelle Zahl a konvergieren, denn dann müßte gelten $|a - x^n| < 1$ für fast alle n und dann nach der Dreiecksungleichung $|x^n - x^{n+1}| < 2$ für fast alle n. Die Folge kann in diesem Fall aber auch nicht gegen $\pm\infty$ konvergieren, da die Folgenglieder immer abwechselnd positiv und negativ sind. □

Satz 2.5.24 (**Gruppenwege in** $\mathbb{R}$)**.** *Die stetigen Gruppenhomomorphismen* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in sich selber sind genau die Abbildungen* $x \mapsto \lambda x$ *für beliebiges aber festes* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Beweis. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, als da heißt eine stetige Abbildung mit $F(x + y) = F(x) + F(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Es reicht zu zeigen, daß F die Gleichung $F(x) = xF(1)$ erfüllt. Auch ohne die Stetigkeit von F zu benutzen, folgern wir $F(q) = qF(1)$ zunächst für alle $q \in \mathbb{N}$, dann für alle $q \in \mathbb{Z}$, dann für alle $q \in \mathbb{Q}$. Um unsere Gleichung $F(x) = xF(1)$ sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ zu zeigen, nutzen wir die Erkenntnis, daß nach 1.5.9 jede reelle Zahl x ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q} \cup \{x\}$ ist. Für $f := F|_{\mathbb{Q}}$ die Einschränkung von F auf die Menge der rationalen Zahlen gilt also

$$F(x) = \lim_{q\to x} f(q) = \lim_{q\to x} qF(1) = xF(1)$$

und so folgt wie gewünscht $F(x) = \lambda x$ für $\lambda = F(1)$. □

Definition 2.5.25. Gegeben eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$, die ein nichtleeres offenes Intervall (a, b) umfaßt, und eine Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ verwenden wir eine spezielle Notation, wenn wir den Grenzwert für $x \to a$ oder $x \to b$ ihrer Restriktion auf (a, b) untersuchen wollen. Wir sprechen dann vom **linksseitigen** beziehungsweise vom **rechtsseitigen Grenzwert** und notieren diese Grenzwerte

$$\lim_{x\to b} f|_{(a,b)} := \lim_{x\nearrow b} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a} f|_{(a,b)} := \lim_{x\searrow a} f(x)$$

Beispiel 2.5.26. Es gilt $\lim_{x\searrow 0} 1/x = \infty$ und $\lim_{x\nearrow 0} 1/x = -\infty$.

2.5.27. Gegeben ein ein nichtleeres offenes Intervall (c,d) und ein Punkt $p \in (c,d)$ und eine Funktion $f : (c,d)\backslash p \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert der Grenzwert bei p genau dann, wenn dort der linkseitige Grenzwert und der rechtseitige Grenzwert existieren und übereinstimmen.

Satz* 2.5.28 (Stetigkeit als Folgenstetigkeit). *Seien $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt. So sind gleichbedeutend:*

1. *f ist stetig bei a;*
2. *Für jede Folge $a_0, a_1, \ldots$ von Punkten aus D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.*

2.5.29 (**Bezug zur Literatur**). Die in diesem Satz gegebene Charakterisierung der Stetigkeit wird vielfach sogar als Definition derselben gewählt. Das ist auch der Grund, aus dem ich den Satz bereits hier beweise, obwohl er im weiteren Verlauf der Vorlesung erst sehr viel später eine Rolle spielen wird.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ haben wir schon in 2.5.17 erledigt, wir konzentrieren uns deshalb auf $2 \Rightarrow 1$. Das zeigen wir durch Widerspruch. Für unser $a \in \overline{\mathbb{R}}$ finden wir nach 2.5.30 eine absteigende Folge von Umgebungen $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ derart, daß jede Umgebung V von a fast alle V_n umfaßt. Ist f nicht stetig bei a, so gibt es eine Umgebung U von $f(a)$ derart, daß für kein n gilt $f(V_n \cap D) \subset U$. Für jedes n finden wir also $a_n \in V_n \cap D$ mit $f(a_n) \notin U$. Die a_n bilden dann eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, für die nicht gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. □

Übungen

Übung 2.5.30. Für jedes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ gibt es eine absteigende Folge von Umgebungen $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ derart, daß jede Umgebung von x fast alle der U_n umfaßt.

Übung 2.5.31. Ist $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine nichtleere Teilmenge, so ist $\sup A$ das größte Element in der Menge G aller Punkte aus den erweiterten reellen Zahlen, die Grenzwerte von Folgen aus A sind.

Übung 2.5.32. Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge. Genau dann ist $p \in \overline{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt zu D, wenn es eine Folge reeller Zahlen x_n in $D\backslash p$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Übung 2.5.33. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Umgekehrt folgt aus $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ bereits $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Übung 2.5.34. Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, die gegen eine reelle Zahl konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Übung 2.5.35. Gilt für eine durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ gegebene Funktion $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ und ein $p \in \mathbb{R}$ die Formel $\lim_{x\to p} f(x)/(x-p)^n = 0$, so folgt $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Hinweis: Durch Verschieben kann man sich auf den Fall $p = 0$ zurückziehen.

2.6 Vollständigkeit der reellen Zahlen

Definition 2.6.1. Eine Menge von reellen Zahlen heißt **beschränkt**, wenn sie in $\mathbb{R}$ eine obere und eine untere Schranke besitzt. Eine Folge von reellen Zahlen heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

Lemma 2.6.2. *Jede reell konvergente Folge von reellen Zahlen ist beschränkt.*

Beweis. Ist $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert unserer Folge, so liegen fast alle Folgenglieder in $[x-1, x+1]$. Die endlich vielen Ausnahmen können wir durch eine hinreichend große obere und untere Schranke auch noch einfangen. □

Lemma 2.6.3. *Jede monoton wachsende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen das Supremum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monoton fallende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen das Infimum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monotone beschränkte Folge von reellen Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die Zweite zeigt man analog und die Dritte ist eine offensichtliche Konsequenz. Sei s das Supremum alias die kleinste obere Schranke der Menge aller Folgenglieder. Kein p mit $p < s$ ist dann eine obere Schranke der Menge aller Folgenglieder, folglich liegen für jedes $p < s$ ein und damit wegen der Monotonie fast alle x_n in $(p, s]$. Damit liegen in jeder Umgebung von s fast alle Folgenglieder. □

Definition 2.6.4. Sei $x_0, x_1, x_2, \ldots$ eine Folge. Ist $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so nennen wir die Folge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Gliedern

$$x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$$

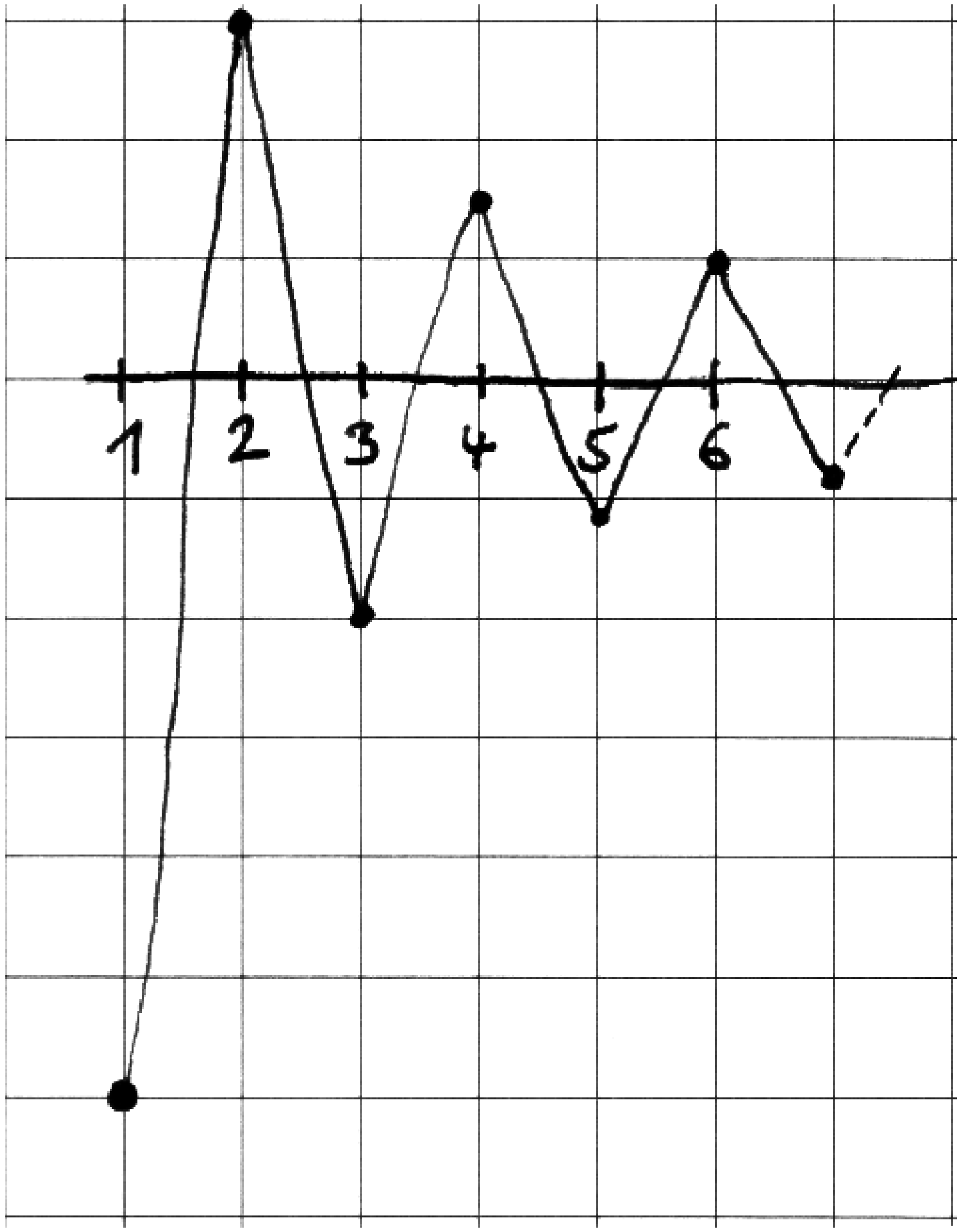
eine **Teilfolge** der Folge x_n. Schreiben wir eine Folge als eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to X$, $x \mapsto x(n) = x_n$, so ist eine Teilfolge von x demnach eine Abbildung der Gestalt $x \circ f$ für eine streng monoton wachsende Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Lemma 2.6.5. *Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert, und zwar gegen denselben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge.*

Beweis. Das ist klar nach den Definitionen. □

Lemma 2.6.6. *Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt eine monotone Teilfolge.*

2.6.7. Hier mögen Sie sich an unsere Sprachregelung [GR] 2.4.3 erinnern. Gemeint ist demnach: Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt *mindestens* eine monotone Teilfolge.



Bei der Folge $(-1)^n 6/n$ ist jedes zweite Folgenglied ein Ausichtspunkt im Sinne des Beweises von Lemma 2.6.6.

Beweis. Wir nennen ein Folgenglied x_n oder präziser seinen Index n einen „Aussichtspunkt“ der Folge, wenn alle späteren Folgenglieder kleiner sind, in Formeln $x_n > x_m$ für alle $m > n$. Besitzt unsere Folge unendlich viele Aussichtspunkte, so bilden diese eine streng monoton fallende Teilfolge. Sonst gibt es einen letzten Aussichtspunkt x_n. Dann finden wir aber eine monoton wachsende Teilfolge, die mit x_{n+1} beginnt, denn ab dem Index $n+1$ kommt dann nach jedem Folgenglied noch ein anderes, das mindestens ebenso groß ist. □

Satz 2.6.8 (Bolzano-Weierstraß). *Jede Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt eine in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergente Teilfolge. Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine reell konvergente Teilfolge.*

Beweis. Jede Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt nach 2.6.6 eine monotone Teilfolge, und diese ist nach 2.6.3 konvergent in $\overline{\mathbb{R}}$. Ist unsere Folge beschränkt, so ist auch jede solche Teilfolge beschränkt und konvergiert folglich gegen eine reelle Zahl. □

Definition 2.6.9. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$ falls $n, m \geq N$. Analog erklärt man Cauchy-Folgen in beliebigen angeordneten Körpern.

Satz 2.6.10. *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Daß jede reell konvergente Folge Cauchy sein muß, ist leicht zu sehen: Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt, daß es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|x_n - x| < \varepsilon/2$ für $n \geq N$. Daraus folgt dann $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq N$. Wir zeigen nun umgekehrt, daß auch jede Cauchy-Folge gegen eine reelle Zahl konvergiert. Eine Cauchy-Folge x_n ist sicher beschränkt, denn wählen wir für $\varepsilon = 1$ ein $N = N_\varepsilon$, so liegen fast alle Folgenglieder im Intervall $(x_N - 1, x_N + 1)$, und die endlich vielen Ausnahmen können wir durch eine hinreichend große Schranke auch noch einfangen. Unsere Cauchy-Folge besitzt daher nach 2.6.8 eine reell konvergente Teilfolge x_{n_k}, sagen wir $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Wir behaupten, daß dann auch die Folge x_n selbst gegen x konvergiert. In der Tat gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit $n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$. Aus $n \geq N_\varepsilon$ folgt damit insbesondere $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$ für fast alle k und dann im Grenzwert $|x_n - x| \leq \varepsilon$, da ja die Ungleichungen $-\varepsilon \leq x_n - x_{n_k} \leq \varepsilon$ bestehen bleiben beim Grenzübergang $k \to \infty$. □

2.6.11. Ein angeordneter Körper, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt **vollständig**. Dieser Begriff ist Teil einer alternativen Charakterisierung der reellen Zahlen, die wir im folgenden als Übung formulieren.

Übungen

Übung 2.6.12. Gegeben ein angeordneter Körper sind gleichbedeutend: (1) Jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke besitzt eine größte untere Schranke; (2) Der Körper ist archimedisch angeordnet und vollständig.

Übung 2.6.13 (**Intervallschachtelungsprinzip**). Gegeben eine absteigende Folge von nichtleeren kompakten Intervallen $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots$ ist auch ihr Schnitt $\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} I_\nu$ nicht leer.

Übung 2.6.14. Konvergiert eine Teilfolge einer Cauchyfolge, so konvergiert bereits die ganze Cauchyfolge, und zwar gegen denselben Grenzwert.

Übung 2.6.15. Ich erinnere an die Fibonacci-Folge und den goldenen Schnitt aus [GR] 1.2.2. Man zeige, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den goldenen Schnitt strebt, daß also in Formeln gilt

$$\lim_{i \to \infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

für unsere Fibonacci-Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ aus [GR] 1.2.2.

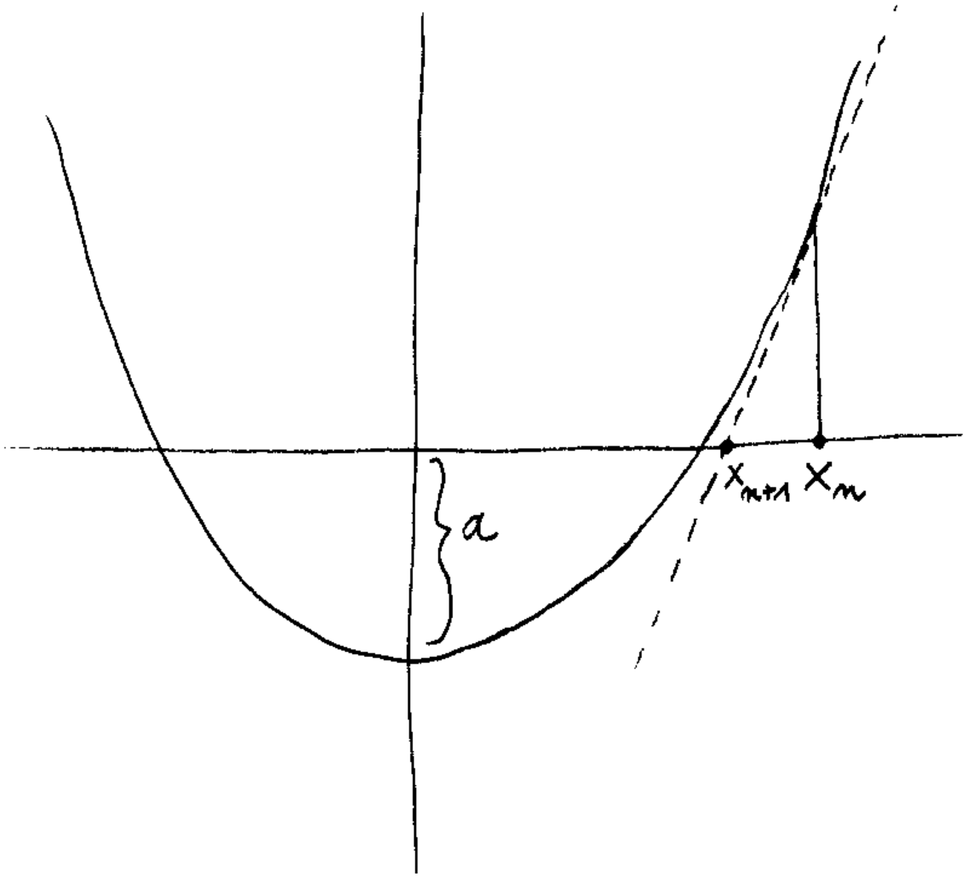
Übung 2.6.16. Gegeben zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man ihr **arithmetisches Mittel** als die Zahl $(a+b)/2$. Gegeben zwei nichtnegative reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert man ihr **geometrisches Mittel** als die Zahl $\sqrt{ab}$. Anschaulich ist das die Kantenlänge eines Quadrats, das dieselbe Fläche hat wie das Rechteck mit den Seitenlängen a und b, und daher kommt vermutlich auch die Terminologie. Man zeige für je zwei positive reelle Zahlen die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ zwischen geometrischem und arithmetischen Mittel und zeige, daß Gleichheit nur gilt im Fall $a = b = 0$.

Übung 2.6.17. Gilt für eine durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ gegebene Funktion $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ und ein $p \in \mathbb{R}$ die Formel $\lim_{x \to p} f(x)/(x-p)^n = 0$, so folgt $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Hinweis: Durch Verschieben kann man sich auf den Fall $p = 0$ zurückziehen.

2.7 Algorithmisches Wurzelziehen*

2.7.1. Gegeben eine reelle Zahl $a \geq 0$ geben wir ein Verfahren zur Berechnung der nichtnegativen Quadratwurzel von a an. Wir konstruieren dazu eine Folge und beginnen mit $x_0 := \max(1, a)$. Dann gilt sicherlich schon einmal $x_0^2 \geq a$. Gegeben $x_n > 0$ mit $x_n^2 \geq a$ machen wir den Ansatz $(x_n - \varepsilon)^2 = a$ und erhalten $\varepsilon = (x_n^2 + \varepsilon^2 - a)/2x_n$. Nun vernachlässigen wir $\varepsilon^2/2x_n$, vergessen unseren Ansatz und setzen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$



Graphische Darstellung unserer induktiven Formel für die Glieder der Folge x_n mit Grenzwert $\sqrt{a}$ aus dem Beweis von 2.3.26

Man sieht sofort, daß aus $x_n^2 \geq a$ und $x_n > 0$ folgt $x_{n+1}^2 \geq a$ und $x_n \geq x_{n+1} > 0$. Da die Folge der x_n monoton fällt und durch Null nach unten beschränkt ist, besitzt sie einen Grenzwert $x \geq 0$. Aus der Gleichung

$$2x_n x_{n+1} = x_n^2 + a$$

folgt dann $x^2 = a$ durch Übergang zum Grenzwert für $n \to \infty$ auf beiden Seiten.

2.7.2. Die Ungleichungen $a/x_n \leq \sqrt{a} < x_n$ erlauben uns sogar abzuschätzen, wie gut unsere Approximation x_n mindestens sein muß. Machen wir für den Fehler den Ansatz $x_n = \sqrt{a}(1 + f_n)$, so ergibt sich mit etwas Rechnen

$$f_{n+1} = \frac{f_n^2}{2(1 + f_n)}$$

und indem wir im Nenner die 1 beziehungsweise f_n verkleinern zu Null erhalten wir die Abschätzung $f_{n+1} \leq \frac{1}{2}\min(f_n, f_n^2)$. Sobald also x_n so nah bei $\sqrt{a}$ ist, daß gilt $f_n < 1$, „verdoppelt sich die Anzahl der richtigen Stellen beim Übergang von x_n zu x_{n+1}". Man spricht unter diesen Umständen auch von **quadratischer Konvergenz**. Anschaulich erhält man x_{n+1}, indem man von x_n senkrecht hochgeht zum Graph der Funktion $y = x^2 - a$ und dann auf der Tangente an diesen Graphen wieder herunter auf die x-Achse. Es ist damit auch anschaulich klar, daß unser Verfahren sehr schnell konvergieren sollte. Dieses Verfahren kann auch zur Bestimmung der Nullstellen allgemeinerer Funktionen anwenden. Es heißt das **Newton-Verfahren**.

2.7.3 (**Intervallhalbierungsverfahren**). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Einfachkeit halber nehmen wir zusätzlich $f(a) \leq f(b)$ an. Gegeben $z \in [f(a), f(b)]$ suchen wir $p \in [a, b]$ mit $f(p) = z$. Dazu nehmen wir den Mittelpunkt m_0 unseres Intervalls her und werten unsere Funktion dort aus. Gilt $f(m_0) \geq z$, so setzen wir $a_1 = a$ und $b_1 = m_0$. Sonst setzen wir $a_1 = m_0$ und $b_1 = b$. In jedem Fall gilt $f(a_1) \leq z \leq f(b_1)$. Anschließend nehmen wir den Mittelpunkt m_1 des nur noch halb so großen Intervalls $[a_1, b_1]$ her und verfahren genauso. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton wachsende Folge $a = a_0, a_1, \ldots$ und eine monoton fallende Folge $b = b_0, b_1, \ldots$ mit $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$ und $f(a_n) \leq z \leq f(b_n)$ und für alle n. Unsere beiden Folgen müssen also konvergieren, und zwar gegen denselben Grenzwert $p \in [a, b]$. Aus der Stetigkeit von f und der Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert nach 2.5.17 folgt dann

$$f(p) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \quad \leq \quad z \quad \leq \quad \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(p)$$

und damit $z = f(p)$.

3 Die Exponentialfunktion

3.1 Reihen

Definition 3.1.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnet die Folge der **Partialsummen** $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und, falls die Folge dieser Partialsummen konvergiert, auch ihren Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Wir sagen dann, die **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiere gegen** s. Nennen wir eine Reihe **konvergent**, so meinen wir stets, daß unsere Reihe gegen eine reelle Zahl konvergiert und nicht etwa gegen $\pm\infty$. Die a_k heißen die **Reihenglieder**.

3.1.2 (**Ändern endlich vieler Reihenglieder**). Es spielt für das Konvergenzverhalten einer Reihe offensichtlich keine Rolle, wenn wir endlich viele ihrer Glieder abändern. Das beinflußt nur den Grenzwert und ändert ihn eben um die Summe unserer endlich vielen Änderungen.

3.1.3 (**Diskussion der Terminologie**). Es wäre terminologisch kohärenter gewesen, wie bei Folgen auch bei Reihen von „reell konvergenten Reihen“ zu sprechen. Das schien mir jedoch ungeschickt, da man den Begriff dann nicht als Verb verwenden kann: „Die Reihe reell-konvergiert“ klingt einfach zu holprig, und Sprechweisen wie „die Reihe konvergiert absolut“ sind oft praktisch.

Beispiel 3.1.4. Dies Beispiel illustriert den oft nützlichen **Teleskopsummentrick**:

$$\begin{array}{rcl}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} & = & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \\ & = & \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) \\ & = & 1\end{array}$$

Satz 3.1.5 (Geometrische Reihe). *Sei* $|x| < 1$. *So gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Beweis. Sicher gilt $(1-x)(1+x+\ldots+x^n) = 1 - x^{n+1}$, die Partialsummen unserer Reihe ergeben sich also zu

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

und streben für $n \to \infty$ wie gewünscht gegen $\frac{1}{1-x}$. $\square$

3.1.6 (**Herkunft der Terminologie**). Die Folgen der Gestalt ax^n heißen **geometrische Folgen**, da bei ihnen zumindest im Fall $a > 0, x > 0$ jedes Folgenglied nach dem ersten das geometrische Mittel im Sinne von 2.6.16 seines Vorgängers und seines Nachfolgers ist. Die geometrische Reihe hinwiederum erbt ihren Namen von der geometrischen Folge.

Beispiel 3.1.7. Es gilt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$ und

$$0{,}999\ldots = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k} = 1$$

Satz 3.1.8. *Sind $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergente Reihen, so konvergieren auch die Reihen $\sum (a_k + b_k)$ und $\sum \lambda a_k$ und es gilt:*

$$\begin{aligned}\sum (a_k + b_k) &= \sum a_k + \sum b_k \\ \sum \lambda a_k &= \lambda \sum a_k\end{aligned}$$

Beweis. Das folgt sofort, wenn man die Vertauschbarkeit 2.5.19 von Summen und Produkten mit Grenzwerten auf die Folgen der Partialsummen anwendet. □

3.1.9. Eine Reihe kann nur dann konvergieren, wenn die Folge der Reihenglieder gegen Null strebt. In der Tat folgt das sofort, wenn wir 2.5.34 auf die Folge der Partialsummen anwenden.

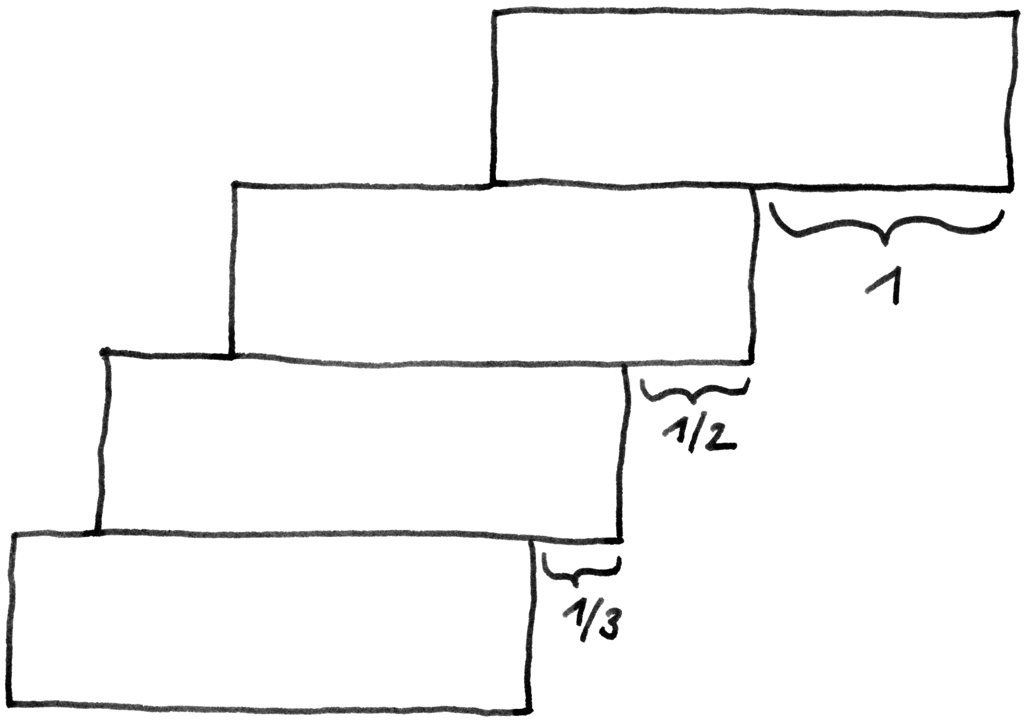
Lemma 3.1.10 (**Konvergenz beschränkter nichtnegativer Reihen**). *Eine Reihe, die aus nichtnegativen Gliedern besteht, konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. Ist kein Reihenglied negativ, so wächst die Folge der Partialsummen monoton. Ist diese Folge auch noch beschränkt, so muß sie nach 2.6.3 reell konvergent sein. Die Umkehrung ist eh klar. □

Beispiel 3.1.11. Die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ konvergiert nicht, da ja gilt

$$\begin{array}{rcl}\frac{1}{2} & \geq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4} & \geq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} & \geq & \frac{1}{2} \\ \text{und} & \text{so} & \text{weiter.}\end{array}$$

Jedoch konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ für $s = 2, 3, 4, \ldots$, da für jede dieser Reihen die Folge der Partialsummen beschränkt ist durch $1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)} = 2$.



Die Divergenz der harmonischen Reihe 3.1.11 zeigt, daß man mit hinreichend vielen identischen Bauklötzen einen beliebig weit neben seinem Grundklotz endenden Turm bauen kann. Obiges Bild zeigt etwa, wie weit man mit vier Klötzen so gerade eben mal kommen kann.

Vorschau 3.1.12. In der Funktionentheorie können Sie lernen, daß diese Reihen sogar eine außerordentlich interessante Funktion $\zeta(s)$ definieren, die sogenannte **Riemann'sche ζ-Funktion**. Wir werden in [FT1] 4.2.9 zeigen, daß zum Beispiel gilt $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ und nach [FT1] 4.2.7 haben wir sogar ganz allgemein $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$ für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 1$. Alle diese Formeln sind berühmte Resultate des 1707 in Basel geborenen Mathematikers **Leonhard Euler**. Als Übung 4.5.26 werden Sie im übrigen zeigen, daß auch die Reihe der Kehrwerte aller Primzahlen bereits divergiert. Für diejenigen unter Ihnen, die die komplexen Zahlen bereits kennen, sei erwähnt, daß es mit etwas größerem Aufwand sogar gelingt, $\zeta(s)$ zu definieren für jede komplexe Zahl $s \neq 1$, vergleiche etwa [FT1] 5.1.7. Die vielleicht berühmteste Vermutung der Mathematik, die sogenannte **Riemann'sche Vermutung** besagt, daß alle Nullstellen der Riemann'schen ζ-Funktion, die nicht auf der reellen Achse liegen, Realteil $1/2$ haben müssen. Ein Beweis dieser Vermutung hätte weitreichende Konsequenzen für unser Verständnis der Verteilung der Primzahlen, wie der Beweis des Primzahlsatzes [FT1] 5.1.1 illustriert. Die Riemann'sche Vermutung ist übrigends der Kern des **achten Hilbert'schen Problems**.

Definition 3.1.13. Wir sagen, eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiere absolut**, wenn die Reihe der Absolutbeträge ihrer Reihenglieder konvergiert, wenn also in Formeln gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Beispiel 3.1.14. Die sogenannte **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergiert, aber nicht absolut. Daß die Reihe nicht absolut konvergiert, hatten wir schon in 3.1.11 gesehen. Um zu zeigen, daß unsere Reihe dennoch konvergiert, beachten wir, daß für die Folge s_n der Partialsummen gilt

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots s_5 \leq s_3 \leq s_1$$

Folglich existiert $S = \sup\{s_2, s_4, \ldots\}$. Da aber gilt $s_{2k} \leq S \leq s_{2k+1}$ für alle k erhalten wir $|S - s_n| \leq \frac{1}{n}$ und folglich $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. Wir werden in 5.4.1 sehen, daß genauer gilt $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2$.

Satz 3.1.15. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ unsere absolut konvergente Reihe. Seien

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

die Partialsummen der Reihe selbst und der Reihe der Absolutbeträge. Nach Annahme konvergiert die Folge der S_n in $\mathbb{R}$ und ist also eine Cauchy-Folge. Da aber gilt $|s_n - s_m| = |\sum_{k=m+1}^n a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = S_n - S_m \quad \forall n > m$, ist dann auch s_n eine Cauchy-Folge und konvergiert in $\mathbb{R}$ nach 2.6.10. $\square$

Satz 3.1.16 (Umordnungssatz). *Ist $\sum_{k=0}^\infty a_k$ eine absolut konvergente Reihe und $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, so ist auch $\sum_{k=0}^\infty a_{u(k)}$ eine absolut konvergente Reihe und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Beweis. Da $\sum |a_k|$ konvergiert, finden wir sicher für jedes $\varepsilon > 0$ ein N mit $\sum_{k=N+1}^\infty |a_k| \leq \varepsilon$. Ist M so groß, daß gilt $u(\{1,\ldots,M\}) \supset \{1,\ldots,N\}$, so erhalten wir daraus für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^{M} a_{u(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung gilt nach der Erhaltung 2.5.22 von Ungleichungen im Grenzwert und der Vertauschbarkeit 2.5.17 von stetigen Funktionen mit Grenzwerten dann auch im Grenzwert $n \to \infty$ und zeigt, daß die Folge der Partialsummen der umgeordneten Reihe konvergiert und denselben Grenzwert hat wie die Folge der Partialsummen der ursprünglichen Reihe. Wenden wir diese Erkenntnis an auf die Reihe der Absolutbeträge, so folgt auch die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe. $\square$

Ergänzung 3.1.17. Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen, die nicht absolut konvergiert, so gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^\infty a_{u(k)} = x$. In der Tat divergieren in diesem Fall die Reihen ihrer positiven und ihrer negativen Terme jeweils für sich genommen. Die Strategie ist nun, erst nur positive Reihenglieder zu nehmen, bis man oberhalb von x ist, dann nur negative, bis man wieder drunterrutscht, und immer so weiter.

Proposition 3.1.18 (Majorantenkriterium). *Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Gibt es für unsere Reihe eine konvergente* **Majorante**, *als da heißt eine konvergente Reihe $\sum b_k$ mit $|a_k| \leq b_k$ für fast alle k, so konvergiert unsere Reihe $\sum a_k$ absolut.*

Beweis. Indem wir endlich viele Glieder abändern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $|a_k| \leq b_k$ sogar für alle k gilt. Die Reihe $\sum |a_k|$ besteht nun aus nichtnegativen Gliedern und die Folge ihrer Partialsummen ist beschränkt durch $\sum b_k$. Aus der Konvergenz beschränkter nichtnegativer Reihen 3.1.10 folgt damit die Konvergenz der Reihe $\sum |a_k|$. $\square$

Korollar 3.1.19 (Quotientenkriterium). *Sei $\sum a_k$ eine Reihe mit nichtverschwindenden Gliedern. Gibt es $\theta < 1$ mit $|a_{k+1}/a_k| \leq \theta$ für fast alle k, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.*

3.1.20. Bei diesem Kriterium ist wesentlich, daß θ nicht von k abhängt, die Ungleichungen $|a_{k+1}/a_k| < 1$ gelten ja auch für die divergente harmonische Reihe. Es gibt jedoch auch Reihen wie $\sum \frac{1}{k^2}$, die absolut konvergieren, obwohl sie unser Kriterium nicht dazu zwingt.

Beweis. Indem wir endlich viele Glieder abändern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $|a_{k+1}/a_k| \leq \theta$ sogar für alle k gilt. Daraus folgt induktiv $|a_k| \leq |a_0|\theta^k$ für alle k, mithin ist die nach 3.1.5 konvergente geometrische Reihe $\sum |a_0|\theta^k$ eine Majorante unserer Reihe und wir können das Majorantenkriterium 3.1.18 anwenden. □

Korollar 3.1.21. *Sei $\sum a_k$ eine Reihe mit nichtverschwindenden Gliedern. Gilt $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.*

Beweis. Klar nach dem Quotientenkriterium 3.1.19. □

Definition 3.1.22. Gegeben eine Familie von reellen Zahlen $(a_i)_{i\in I}$ und $s \in \overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir

$$\sum_{i\in I} a_i = s$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jedes endliche J mit $I_U \subset J \subset I$ gilt

$$\sum_{i\in J} a_i \in U$$

Es ist klar, daß hier s eindeutig bestimmt ist, wenn es existiert. Ist zusätzlich s reell, so nennen wir unsere Familie von reellen Zahlen **summierbar**.

3.1.23. Mir gefällt die letzte Definition besonders gut, da darin von einer Reihenfolge der Summanden erst gar nicht die Rede ist. In der folgenden Übung dürfen Sie zeigen, daß die in der vorhergehenden Definition erklärte Summierbarkeit im wesentlichen gleichbedeutend zu absoluter Konvergenz ist. Später, wenn wir auch in Vektorräumen summieren, sind jedoch Summierbarkeit und absolute Konvergenz nicht mehr gleichbedeutend, und dann erweist sich das Analogon 9.2.5 der Summierbarkeit 3.1.22 als der nützlichere Begriff.

Übungen

Übung 3.1.24. Genau dann läßt sich eine reelle Zahl durch einen periodischen Dezimalbruch darstellen, wenn sie rational ist.

Übung 3.1.25. Man zeige das **Leibniz'sche Konvergenzkriterium**: Ist a_k eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$.

Ergänzende Übung 3.1.26. Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen und $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ eine Umordnung mit der Eigenschaft, daß $|u(k) - k|$ beschränkt ist, so konvergiert auch die umgeordnete Reihe $\sum a_{u(k)}$ und zwar gegen denselben Grenzwert.

Übung 3.1.27. Man zeige, daß in einer summierbaren Familie von reellen Zahlen nur für höchstens abzählbar viele Indizes $i \in I$ das entsprechende a_i von Null verschieden sein kann. Hinweis: Sonst gäbe es ein $n \geq 1$ derart, daß für unendlich viele i gälte $|a_i| > 1/n$. Man zeige dann weiter, eine Familie von reellen Zahlen summierbar ist genau dann, wenn für eine und jede Abzählung ihrer von Null verschiedenen Glieder die so entstehende Reihe absolut konvergiert, und daß dann die Summe unserer Familie der Grenzwert der entsprechenden Reihe ist.

Ergänzende Übung 3.1.28. Gegeben eine summierbare Familie von reellen Zahlen $(a_i)_{i \in I}$ zeige man, daß auch für eine beliebige Teilmenge $J \subset I$ die Familie $(a_i)_{i \in J}$ summierbar ist, und daß für eine beliebige Zerlegung $I = \bigsqcup_{k \in K} I(k)$ von I in eine Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen $I(k)$ gilt $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K}(\sum_{i \in I(k)} a_i)$. Weiter zeige man für jede aufsteigende Familie von Teilmengen $I_0 \subset I_1 \subset \ldots$ mit Vereinigung I die Formel $\sum_{i \in I} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in I_n} a_i$. Diese Aussagen werden sich im übrigen als Spezialfälle des Satzes von Fubini [AN3] 1.7.16 und des Satzes über dominierte Konvergenz [AN3] 1.6.9 aus der Theorie des Lebesgue-Integrals erweisen.

3.2 Wachstum und Zerfall

Definition 3.2.1. Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

und erhalten so eine Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die **Exponentialfunktion**.

3.2.2. Die fragliche Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ nach dem Quotientenkriterium oder genauer seinem Korollar 3.1.21, und sie konvergiert sogar außerordentlich schnell. Von einem formalen Standpunkt aus betrachtet ist unsere Definition also völlig unproblematisch und von einem rechentechnischen Standpunkt aus betrachtet ist sie sogar ziemlich geschickt. Sie hat nur den Nachteil, daß aus der

Definition heraus weder klar wird, warum gerade diese Funktion den Namen Exponentialfunktion verdienen sollte, noch warum sie überhaupt von Bedeutung ist. Ich erläutere das in den gleich anschließenden Bemerkungen 3.2.6 und 3.2.5.

Proposition 3.2.3. *Es gilt* $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Beweis. Mit der binomischen Formel [GR] 1.1.23 ergibt sich

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \quad \dots \quad \cdot n}$$

Für beliebige $M, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt also

$$\begin{aligned} \left|\exp(x) - \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right| \leq & \left|\exp(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!}\right| \\ & + \left|\textstyle\sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \quad \dots \quad \cdot n}\right| \\ & + \left|\textstyle\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \quad \dots \quad \cdot n}\right| \end{aligned}$$

Da die Exponentialreihe für vorgegebenes x absolut konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M = M_\varepsilon$ derart, daß für jedes n der erste und der letzte Term rechts beschränkt sind durch ε. Für dies feste M geht der mittlere Term bei $n \to \infty$ gegen Null, es gibt also $N = N_\varepsilon$ derart, daß er für dies feste M kleiner wird als ε falls $n \geq N$. Damit gilt $\left|\exp(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq 3\varepsilon$ falls $n \geq N$. □

3.2.4. Aus unserer Proposition folgt unmittelbar für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Formel $\exp(kx) = (\exp x)^k$ vermittels der Rechnung

$$\exp(kx) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{kx}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{kx}{kn}\right)^{kn} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{nk} = (\exp x)^k$$

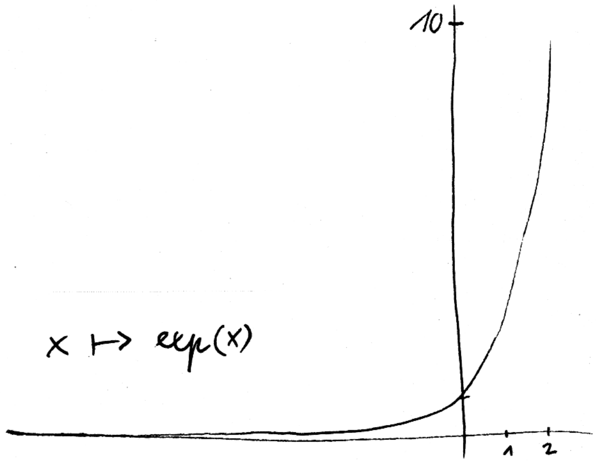
Mit der Notation $\mathrm{e} := \exp(1)$ erhalten wir insbesondere $\exp(k) = \mathrm{e}^k$ und dann auch $\mathrm{e} = \exp(k/k) = (\exp(1/k))^k$ alias $\exp(1/k) = \sqrt[k]{\mathrm{e}}$ und zusammen für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Formel $\exp(p/q) = (\sqrt[q]{\mathrm{e}})^p$.

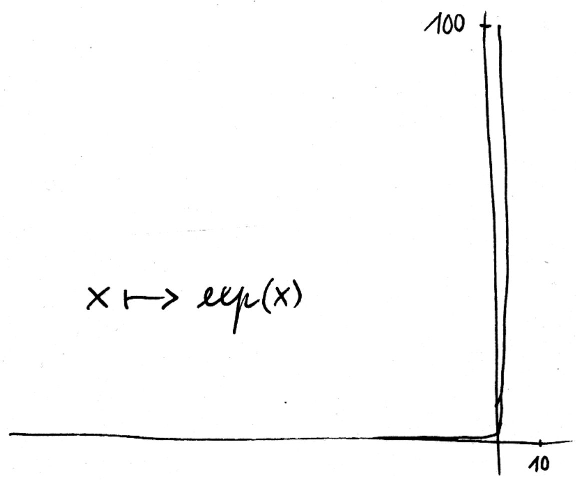
3.2.5 (**Exponentialfunktion und Wachstum**). Unsere Proposition 3.2.3 kann man dahingehend interpretieren, daß $\exp(x)$ das Kapital ist, das in x Jahren aus einem Euro entsteht bei einer „kontinuierlichen Verzinsung mit einem Zinssatz von 100%“. Legen wir das Geld zum Beispiel für ein Jahr an, so haben wir bei jährlicher Verzinsung am Ende des Jahres zwei Euro auf dem Konto. Bei monatlicher Verzinsung ergeben sich mit Zinseszinsen schon $(1+\frac{1}{12})^{12}$ Euro, und bei kontinuierlicher Verzinsung $\mathrm{e} := \exp(1) = 2{,}781\dots$ Euro. Man nennt e die **Euler'sche Zahl**. In der Schule haben Sie möglicherweise e^x statt $\exp(x)$ geschrieben, aber wir erlauben uns das erst ab 3.3.5, wo wir für beliebiges $a > 0$ die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a^n$ zu einer Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b \mapsto a^b$ fortsetzen und zwar nach 3.3.22 auf die einzig mögliche Weise, bei der die Funktion $b \mapsto a^b$ monoton ist und die „Funktionalgleichung" $a^{b+c} = a^b a^c$ erfüllt.

3.2.6. In einem Ausdruck der Gestalt a^b nennt man a die **Basis** und b den **Exponenten**, weil er eben exponiert oben an die Basis geschrieben wird. Daher rührt auch die Bezeichnung als „Exponentialfunktion". Ich würde unsere Funktion viel lieber ihrer Natur nach die „Funktion des natürlichen Wachstums" oder die „Wachstumsfunktion" nennen, aber die aus der Schreibweise abgeleitete Bezeichnung hat sich nun einmal durchgesetzt, mag sie auch aus historischen Zufällen entstanden sein: Hätte sich für die Bezeichnung des Quadrats einer Zahl a statt der Notation a^2 die Notation a_2 eingebürgert, so würde in Anbetracht dieses Schemas der Begriffsbildung unsere Exponentialfunktion heute vielleicht „Pedestalfunktion" heißen…

3.2.7 (**Didaktische Gedanken zur Einführung der Exponentialfunktion**). Eine infinitesimale Formulierung der in 3.2.5 erläuterten Bedeutung der Exponentialfunktion gibt Korollar 4.5.8, in dem die Exponentialfunktion charakterisiert wird als die eindeutig bestimmte differenzierbare Funktion von den reellen Zahlen in sich selber, die mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt und bei Null den Wert Eins annimmt. Gehen wir von dieser Charakterisierung aus, so führt uns der Formalismus der Taylorreihen 5.2.2 ganz natürlich zu der Reihe, die wir in 3.2.1 haben vom Himmel fallen lassen. Ein anderer Zugang zur Exponentialfunktion besteht darin, von der Funktion $x \mapsto \int_1^x (1/t)\mathrm{d}t$ auszugehen, von der man unschwer zeigt, daß sie einen stetigen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ liefert, und dann die Exponentialfunktion als deren Umkehrfunktion zu erhalten. Das bedeutet jedoch, daß man mit der Einführung der Exponentialfunktion die Konstruktion des Integrals abwarten muß. Eigentlich will ich es ja nach Möglichkeit vermeiden, Formeln vom Himmel fallen zu lassen. In diesem Fall schienen mir aber die didaktischen Vorteile der dadurch ermöglichten frühzeitigen Einführung dieser außerordentlich wichtigen Funktion zu überwiegen.

3.2.8. Die Exponentialfunktion wächst ungeheuer schnell. Eine gewisse Vorstellung davon mag die Erkenntnis 8.3.3 geben, nach der der Graph der Funktion $(\exp(x)+\exp(-x))/2$, in einem jeweils der speziellen Situation angepaßten Maßstab auf die Wand gemalt, genau die Gestalt einer zwischen zwei Nägeln durchhängenden Kette hat. Ist die Kette zwanzigmal so lang ist wie der Abstand der beiden Nägel, so stellt sie unsere Funktion in etwa auf dem Intervall von $-2{,}3$ bis $2{,}3$ dar. Ist die Kette zweihundertmal so lang wie der Abstand der beiden Nägel, so erhalten wir unsere Funktion in etwa auf dem Intervall von $-4{,}6$ bis $4{,}6$. Und eine Zwei-Meter-Kette hängt zwischen zwei im Abstand von einem knappen Zentimeter eingeschlagenen Nägeln schon recht steil!





Der Graph der Exponentialfunktion in zwei Maßstäben. Man erkennt unschwer, daß ein konstantes Wirtschaftswachstum über längere Zeiträume in einer Katastrophe enden muß. In derselben Weise entwickelt sich im Übrigen auch die Geschwindigkeit einer Vorlesung unter der Annahme, daß die Stoffmenge, die in einer Stunde vermittelt werden kann, proportional ist zur Menge des Stoffes, den die Zuhörer bereits kennen…

Satz 3.2.9 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion ist ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen. In Formeln ausgedrückt gilt für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *also* $\exp(x) \neq 0 \neq \exp(y)$ *und*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

3.2.10. Stellen wir uns $\exp(x)$ vor als das Vermögen, daß in x Jahren aus einem Euro entsteht bei kontinuierlicher Verzinsung mit 100%, so erhalten wir offensichtlich gleichviel, ob wir unser Vermögen $\exp(x)$ nach x Jahren gleich wieder für y Jahre anlegen, oder ob wir unseren Euro gleich von Anfang an $x + y$ Jahre arbeiten lassen. Das ist die Bedeutung der Funktionalgleichung. In 3.3.22 werden Sie zeigen, daß die Gruppenhomomorphismen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ mit der Eigenschaft $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$ genau die Abbildungen $\varphi(x) = \exp(ax)$ sind mit $a > 0$. In 3.3.1 werden wir zeigen, daß die Exponentialfunktion sogar einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen liefert.

Ergänzung 3.2.11. Der gleich folgende Beweis der Funktionalgleichung gefällt mir nicht besonders. Ein anderer aber in seiner Weise auch etwas verwickelter Beweis wird in 3.2.19 vorgestellt. Ein mehr konzeptueller Zugang zur Exponentialfunktion und ihrer Funktionalgleichung wird in 4.8.11 und 4.8.21 skizziert. Er benötigt jedoch Hilfsmittel, die uns hier noch nicht zur Verfügung stehen, und er läßt auch nicht so einfach auf den Fall von komplexen Zahlen verallgemeinern, der für uns bei der Diskussion von Sinus und Cosinus eine wesentliche Rolle spielen wird. Wir schicken dem eigentlichen Beweis einige allgemeine Betrachtungen voraus.

Satz 3.2.12 (Produkt von Reihen). *Sind* $\sum_{i=0}^\infty a_i$ *und* $\sum_{j=0}^\infty b_j$ *absolut konvergente Reihen, so konvergiert auch die Summe der Produkte* $a_i b_j$ *für* $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *im Sinne von 3.1.22 und es gilt*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^\infty a_i\right)\left(\sum_{j=0}^\infty b_j\right)$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für irgendeine Bijektion $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $k \mapsto (u(k), v(k))$ die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_{u(k)} b_{v(k)}$ absolut konvergiert und daß gilt

$$\sum_{k=0}^\infty a_{u(k)} b_{v(k)} = \left(\sum_{i=0}^\infty a_i\right)\left(\sum_{j=0}^\infty b_j\right)$$

Natürlich haben wir

$$\sum_{k=0}^n |a_{u(k)} b_{v(k)}| \leq \left(\sum_{i=0}^N |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^M |b_j|\right)$$

falls gilt $N \geq \max(u(0), \ldots, u(n))$ und $M \geq \max(v(0), \ldots, v(n))$. Damit konvergiert unsere Reihe $\sum a_{u(k)} b_{v(k)}$ absolut. Nach dem Umordnungssatz 3.1.16 können wir also die Bijektion $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nehmen, die wir wollen, um den Grenzwert zu bestimmen. Jetzt wählen wir unsere Bijektion $w = (u, v)$ so, daß sie Bijektionen

$$\{0, \ldots, n^2 - 1\} \stackrel{\sim}{\to} \{0, \ldots, n-1\} \times \{0, \ldots, n-1\}$$

induziert, und erhalten Partialsummen

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} a_{u(k)} b_{v(k)} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j \right)$$

Der Übergang zum Grenzwert $n \to \infty$ zeigt dann die Behauptung. $\square$

Variante zum Beweis von 3.2.12. Das Ende des Beweises hätte sehr viel besser ausgesehen, wenn wir unsere Reihen mit dem Index $k = 1$ beginnen ließen, aber so sieht der Anfang des Beweises natürlicher aus. In Wirklichkeit zeigen wir eh für beliebige im Sinne von 3.1.22 summierbare Familien reeller Zahlen $(a_i)_{i \in I}$ und $(b_j)_{j \in J}$, daß auch die Familie aller Produkte $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ summierbar ist und daß gilt

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j$$

$\square$

Beweis der Funktionalgleichung 3.2.9. Wir rechnen

$$\begin{array}{rcl} \exp(x+y) & = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} x^i y^j \right) \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{x^j}{j!} \right) \end{array}$$

wo wir im zweiten Schritt die binomische Formel verwenden und der Index $i + j = k$ an einer Summe bedeutet, daß wir über alle Paare $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $i+j = k$ summieren. Andererseits erhalten wir mit unserem Satz über das Produkt von Reihen bei einer geeigneten Wahl der Bijektion $w : \mathbb{N} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und nach Übergang zu einer Teilfolge der Folge der Partialsummen auch

$$\begin{array}{rcl} \exp(x)\exp(y) & = & \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} \right) \end{array}$$

Da sicher gilt $\exp(0) = 1$, folgt $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x + (-x)) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und mithin $\exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Lemma 3.2.13. *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

Vorschau 3.2.14. Die Stetigkeit der Exponentialfunktion können wir später auch aus dem allgemeinen Satz 5.1.4 folgern: Potenzreihen stellen auf ihrem Konvergenzbereich immer stetige Funktionen dar.

Beweis. Wir wenden das ε-δ-Kriterium 2.2.11 an. Mit der Funktionalgleichung finden wir

$$|\exp(x) - \exp(p)| = |\exp(p)| \cdot |\exp(x-p) - \exp(0)|$$

Nun beachten wir, daß für $|y| \leq 1$ gilt

$$|\exp(y) - \exp(0)| = |y| \cdot \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{i-1}}{i!} \right| \leq |y| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y|^{i-1}}{(i-1)!} \leq |y| \exp(1)$$

wo wir im zweiten Schritt die Dreiecksungleichung sowie die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert verwenden und die Nenner verkleinern. Aus $|x-p| \leq 1$ folgt also $|\exp(x) - \exp(p)| \leq \exp(p)|x-p|\,\mathrm{e}$ und für gegebenes $\varepsilon > 0$ können wir mithin $\delta = \inf\{1, \varepsilon/(\exp(p)\,\mathrm{e})\}$ nehmen. □

Übungen

Übung 3.2.15. Man folgere aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion 3.2.9 die Formeln $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$, $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$, $\exp(nx) = (\exp x)^n \; \forall n \in \mathbb{Z}$ sowie $\exp(x/2) = \sqrt{\exp(x)}$.

Ergänzende Übung 3.2.16. Der Übersichtlichkeit halber kürzen wir hier im Vorgriff auf 3.3.5 schon $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ ab. Man zeige, daß für alle $i, N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i} = \frac{N^i\,\mathrm{e}^{-N}}{i!}$$

Dieses Resultat ist in der Stochastik wichtig, wie ich im folgenden ausführen will. Gegeben $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion $i \mapsto \lambda^i\,\mathrm{e}^{-\lambda}/i!$ ganz allgemein die **Poisson-Verteilung** mit Parameter λ. Sie hat die folgende Bedeutung: Knetet man in einen großen Teig genau nN Rosinen ein und teilt ihn dann in n Rosinenbrötchen, so ist $\left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß i vorgegebene Rosinen in einem fest gewählten Brötchen landen und die restlichen Rosinen in den anderen Brötchen. Mithin ist $\binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß in einem fest gewählten Brötchen genau i Rosinen landen. Ist unser Brötchen klein im Vergleich zum ganzen Teig, so liegt diese Wahrscheinlichkeit also nahe bei $N^i\,\mathrm{e}^{-N}/i!$ oder allgemeiner bei $\lambda^i\,\mathrm{e}^{-\lambda}/i!$ mit λ der durchschnittlichen Zahl von Rosinen in dem

Teigvolumen, das man für ein Brötchen braucht. Genau genommen stimmt das allerdings nur für punktförmige Rosinen, denn sonst liefert die Größe des Brötchens eine obere Schranke für die möglichen Anzahlen der darin verbackenen Rosinen.

Ergänzende Übung 3.2.17. Man berechne die Euler'sche Zahl e bis auf 5 sichere Stellen hinter dem Komma.

Ergänzende Übung 3.2.18. Die Euler'sche Zahl e ist nicht rational. Man zeige dies, indem man von ihrer Darstellung als Reihe ausgeht und durch geeignete Abschätzungen nachweist, daß $q!\mathrm{e}$ für $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ nie eine ganze Zahl sein kann.

Ergänzende Übung 3.2.19. In dieser Übung sollen Sie einen anderen Zugang zur Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ausarbeiten, den ich in einer Arbeit von Martin Kneser kennengelernt habe: Man zeige, indem man den Beweis von 3.2.3 verallgemeinert, daß für jede Folge reeller Zahlen $x_n \in \mathbb{R}$ aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x)$. Mithilfe der Identität

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(1 + \frac{x + y + (xy/n)}{n}\right)$$

folgere man dann die Funktionalgleichung.

3.3 Logarithmus und allgemeine Potenzen

Definition 3.3.1. Aus dem Zwischenwertsatz folgt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, denn wir haben offensichtlich $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty$ und damit $\lim_{n\to-\infty} \exp(n) = 0$ nach 2.3.13. Wir können also den **natürlichen Logarithmus** oder kurz **Logarithmus** einführen als die Umkehrfunktion

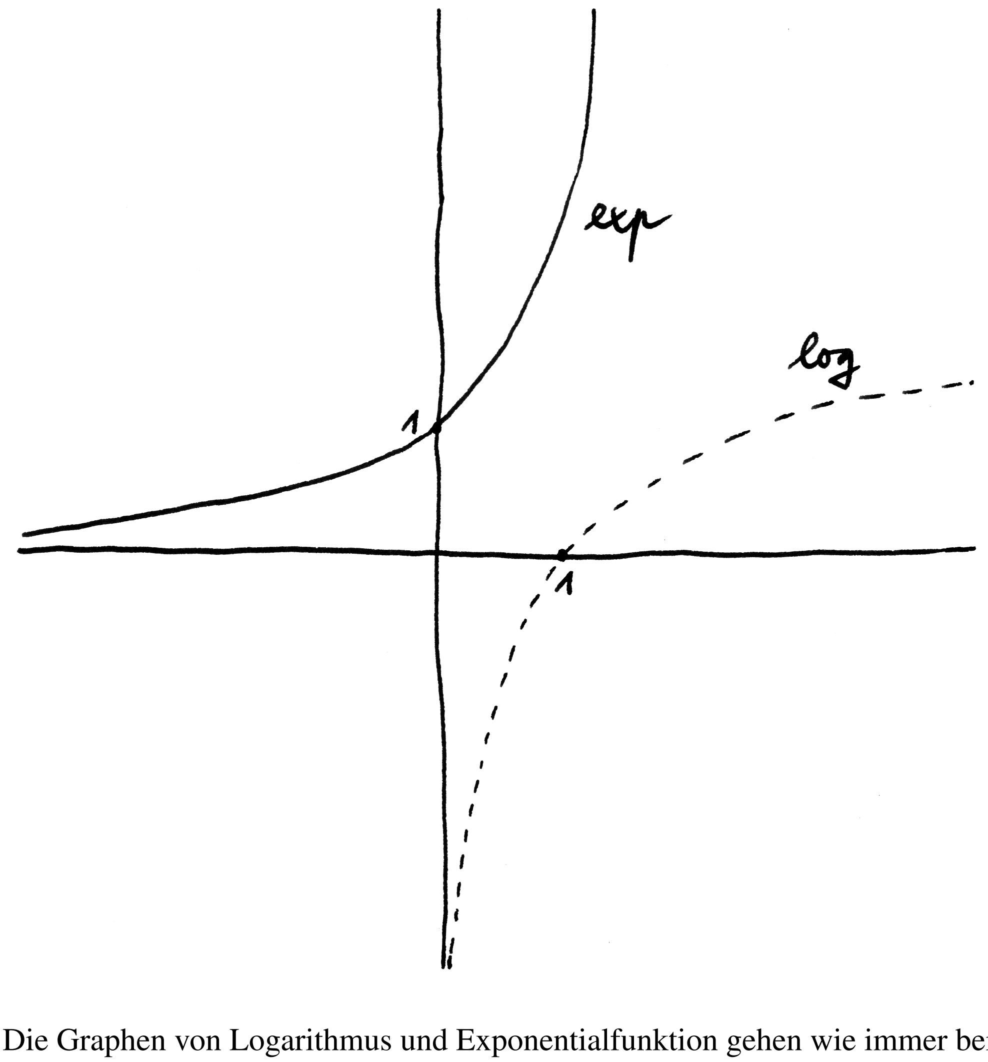
$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

der Exponentialfunktion, $\log(\exp(x)) = x$, und erhalten aus Satz 2.3.23 die Stetigkeit des Logarithmus. In der französischen Literatur bezeichnet man diese Funktion auch als **logarithme népérien** in Erinnerung an den schottischen Mathematiker John Napier, der die ersten Logarithmentafeln aufstellte.

3.3.2. Die Exponentialfunktion liefert nach 3.2.9 und 3.3.1 einen Isomomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe aller positiven reellen Zahlen. Daraus folgt sofort

$$\log(xy) = \log x + \log y \text{ und } \log(\mathrm{e}) = 1$$

Die erste Formel mag man die **Funktionalgleichung des Logarithmus** nennen.



Die Graphen von Logarithmus und Exponentialfunktion gehen wie immer bei Umkehrfunktionen durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen $x = y$ auseinander hervor.

3.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Die Notation „log“ ist leider nicht universell. Auf vielen Taschenrechnern und auch in älteren Büchern wird unsere Funktion „log“ notiert als „ln“ für „logarithmus naturalis“ oder „logarithme Néperien“ und das Kürzel „log“ steht für den „Logarithmus zur Basis 10“, den wir in 3.3.8 einführen und mit $\log_{10}$ bezeichnen werden. Der Logarithmus zur Basis 10 wird in manchen Quellen auch der „Brigg'sche Logarithmus“ genannt und mit „lg“ bezeichnet. Die Norm ISO 31-11 empfiehlt die Notationen „ln“ und „lg“. Wir verwenden jedoch $\log$ statt $\ln$, weil das in der reinen Mathematik so üblich ist und wir damit der Konvention folgen, spezielle Funktionen nach Möglichkeit mit Kürzeln aus drei Buchstaben zu notieren. „Logarithmus“ ist das griechische Wort für „Rechnung“, und für das Rechnen waren die Logarithmentafeln, in denen die Werte des Logarithmus zur Basis Zehn aufgelistet wurden, auch außerordentlich praktisch: Mit ihrer Hilfe konnte man nämlich Divisionen in Subtraktionen verwandeln und Wurzelziehen in Divisionen, wie wir gleich näher ausführen. Die Entdeckung der Logarithmen und die ersten Logarithmentafeln von Napier bedeuteten für die damalige Wissenschaft eine ungeheure Arbeitserleichterung und wurden begeistert begrüßt.

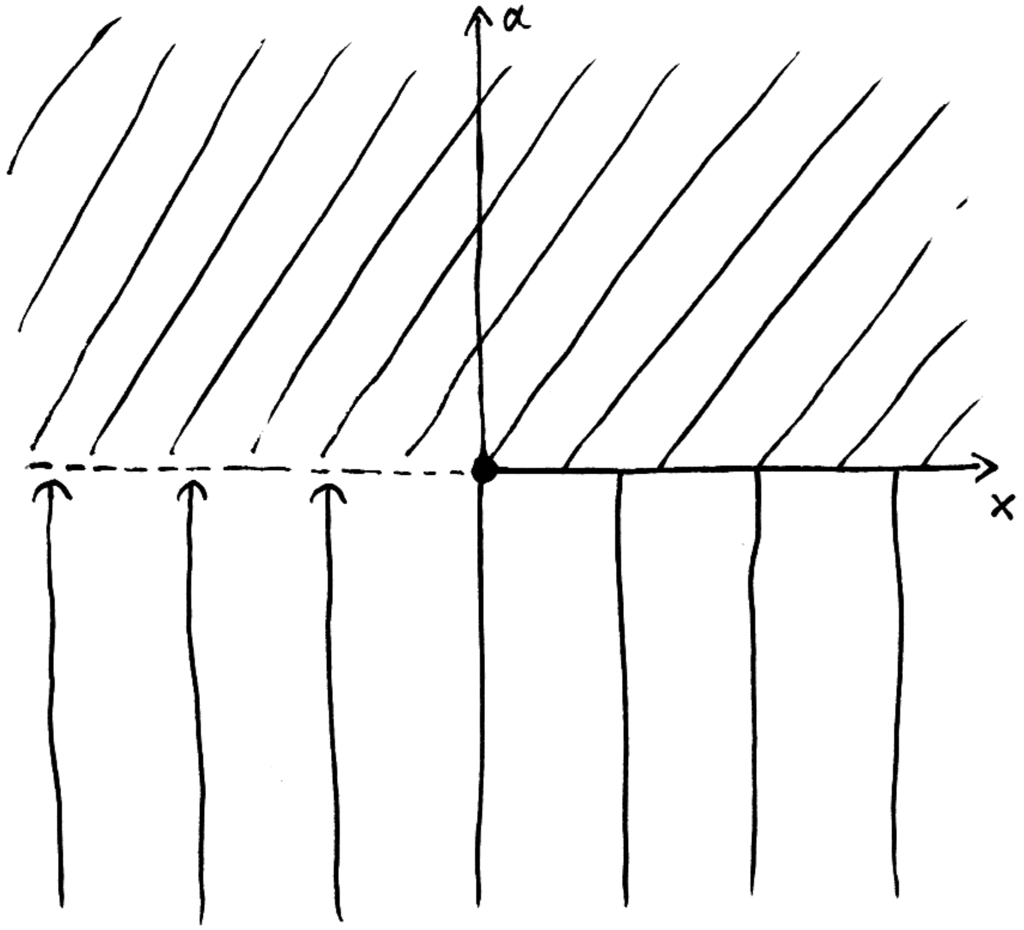
Beispiel 3.3.4. Aus dem Quetschlemma 2.5.21 und der Darstellung von e^x durch die Exponentialreihe folgt $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$. Aus 2.5.6 und 2.3.12 folgt dann $\lim_{y\to\infty} \log y = \infty$. Das Quetschlemma mit der Darstellung von e^x duch die Exponentialreihe liefert auch $\lim_{x\to\infty}(x/\,\mathrm{e}^x) = 0$ und durch Substitution $x = \log y$ und 2.5.6 und 2.3.16 folgt dann $\lim_{y\to\infty}(\log y/y) = 0$.

Definition 3.3.5 (Allgemeine Potenzen). Gegeben $a, x \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ setzen wir

$$a^x := \exp(x \log a)$$

Im Fall $x > 0$ vereinbart man zusätzlich $0^x = 0$. Das führt dazu, daß für $x > 0$ die Funktion $a \mapsto a^x$ sogar stetig ist auf $[0, \infty)$. Es führt allerdings auch dazu, daß die Funktion $x \mapsto 0^x$ mit unserer Konvention $0^0 = 1$ zwar auf $[0, \infty)$ definiert aber bei $x = 0$ *nicht* stetig ist. Damit müssen wir nun weiterleben.

3.3.6. Man prüft ohne Schwierigkeiten die Formeln $a^0 = 1$, $a^1 = a$ und $a^{x+y} = a^x a^y$ und folgert insbesondere, daß im Fall $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ oder $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ das hier definierte a^n übereinstimmt mit unserem a^n aus der Tabelle am Ende von Abschnitt [GR] 3.2.12. Für beliebige $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ prüft man leicht die Rechenregeln $a^{xy} = (a^x)^y$, $(ab)^x = a^x b^x$ und $\log(a^x) = x \log a$. Ist speziell $a = \mathrm{e}$ die Euler'sche Zahl, so gilt $\log \mathrm{e} = 1$ und folglich $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Für beliebige $a, b \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$ prüft man ebensoleicht die Rechenregeln $a^{xy} = (a^x)^y$, $(ab)^x = a^x b^x$ und $\sqrt[q]{a} = a^{1/q}$.



Dieses Bild stellt den unangenehm verzwickelten Bereich aller $(x, a) \in \mathbb{R}^2$ dar, für die a^x definiert ist: Bei $x \in \mathbb{N}$ sind das jeweils alle $a \in \mathbb{R}$, bei ganzzahligem $x \in \mathbb{Z}_{<0}$ nur alle $a \in \mathbb{R}^\times$, bei reellem nichtganzen $x > 0$ alle $a \geq 0$, bei reellem nichtganzen $x < 0$ alle $a > 0$. Unangenehm ist die Unstetigkeitsstelle am Ursprung, auf der senkrechten Koordinatenachse ist ja nun unsere Funktion konstant Eins und auf der positiven waagerechten Koordinatenachse konstant Null. Diese Unstetigkeitsstelle ist aber auch die Einzige.

Satz 3.3.7 (Gruppenwege in $\mathbb{R}^\times$). *Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen sind genau die Abbildungen $x \mapsto a^x$ für beliebiges aber festes $a \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Beweis. Ist $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, als da heißt eine stetige Abbildung mit $G(x + y) = G(x)G(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, so bildet G nach [GR] 3.4.16 notwendig das neutrale Element auf das neutrale Element ab, in Formeln $G(0) = 1$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt $G(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Damit können wir den Gruppenhomomorphismus $F = \log \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden und aus 2.5.24 folgt sofort $F(x) = xF(1)$, also $G(x) = \exp(F(x)) = \exp(xF(1)) = \exp(x \log G(1))$. □

Definition 3.3.8. Gegeben $a > 0$ nennt man die Umkehrabbildung der Abbildung $x \mapsto a^x$ auch den **Logarithmus zur Basis** a

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

3.3.9. Der natürliche Logarithmus ist also der Logarithmus mit der Euler'schen Zahl e als Basis, in Formeln $\log = \log_{\mathrm{e}}$. Der Logarithmus zur Basis a läßt sich durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken vermittels der Formel $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$. Man kommt deshalb meist mit dem natürlichen Logarithmus aus. Die Notation $\log_a$ ist konform mit der Norm ISO 31-11, in der zusätzlich auch noch die Abkürzung $\log_2 = \mathrm{lb}$ für den **binären Logarithmus** empfohlen wird.

Beispiel 3.3.10. Für alle $a > 0$ folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion und indem man für ein logisch vollständiges Argument die folgende Gleichungskette von hinten nach vorne liest

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\tfrac{1}{n}\log a\right) \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\log a\right) \\
&= \exp(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Beispiel 3.3.11. Aus dem Quetschlemma 2.5.21 und der Darstellung von e^x durch die Exponentialreihe folgt $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$. Aus 2.5.6 und **??** folgt dann $\lim_{y\to\infty} \log y = \infty$. Das Quetschlemma mit der Darstellung von e^x duch die Exponentialreihe liefert auch $\lim_{x\to\infty}(x/\mathrm{e}^x) = 0$ und durch Substitution $x = \log y$ und 2.5.6 und 2.3.16 folgt dann $\lim_{y\to\infty}(\log y/y) = 0$.

Übungen

Ergänzende Übung 3.3.12. Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Man zeige das **Wurzelkriterium**: Gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut. Hinweis:

Analog zum Beweis des Quotientenkriteriums. Meiner Erfahrung nach ist dies Kriterium in der Praxis selten von Nutzen, da es meist auf schwer zu bestimmende Grenzwerte führt.

Übung 3.3.13. Man folgere aus der Funktionalgleichung 3.3.2 des Logarithmus die Formeln $\log(1) = 0, \log(x^{-1}) = -\log(x), \log(x^n) = n\log(x)$ und $\log(\sqrt[q]{x}) = \frac{1}{q}\log(x)$.

Ergänzende Übung 3.3.14. Seien $a \leq b$ aus $\overline{\mathbb{R}}$ gegeben und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(b) = 0$. Man zeige, daß dann f eine kleinste Nullstelle in $[a, b]$ hat.

Übung 3.3.15. Jede Polynomfunktion $x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und n ungerade besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Ist $a_n > 0$ und $a_0 > 0$, so besitzt sie sogar mindestens eine negative Nullstelle.

Übung 3.3.16. Man zeige für $a > 0$ die Identität $\lim_{n\to\infty} n(1 - \sqrt[n]{a}) = \log a$.

Übung 3.3.17. Man zeige $\lim_{x\to\infty}(x^a/b^x) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $b > 1$. Man zeige $\lim_{x\to\infty}(\log x/x^c) = 0$ für alle $c > 0$. Man zeige $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Man zeige

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(5n)!}{(n!)^5}} = 5^5$$

Beispiel 3.3.18. Bei einem radiokativen Material wird nach einem Tag nur noch 90% der Strahlungsaktivität gemessen. Wie lange dauert es, bis die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist? Nun, halten wir einen Referenzzeitpunkt beliebig fest, so wird die Aktivität nach Vergehen einer Zeitspanne τ gemäß Überlegungen wie in 3.2.5 gegeben durch eine Formel der Gestalt $M\,\mathrm{e}^{c\tau}$ mit unbekannten M und c. Wir kürzen die Zeiteinheit „Stunde" ab mit dem Buchstaben h für lateinisch „hora". Formal ist h eine Basis des in [GR] 1.2.6 angedachten eindimensionalen reellen Vektorraums „aller Zeitspannen", und formal ist auch M ein Element eines gedachten eindimensionalen reellen Vektorraums „aller Strahlungsaktivitäten" und c liegt im Raum der Linearformen auf dem Raum aller Zeitspannen, in dem wir mit h^{-1} dasjenige Element bezeichnen werden, das auf h den Wert Eins annimmt. So formal will ich hier aber eigentlich gar nicht werden und schreibe das Auswerten solch einer Linearform auf einer Zeitspanne schlicht als Produkt. Für $\tau = 24\,\mathrm{h}$ wissen wir nun nach unserer Messung $M\,\mathrm{e}^{c\cdot 24\,\mathrm{h}} = \frac{90}{100}M$ und damit $c = ((\log 9/10)/24)\,\mathrm{h}^{-1}$. Bezeichnet t die Zeitspanne, nach der die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist, so haben wir also $M\,\mathrm{e}^{ct} = M/2$ alias $ct = -\log 2$ und damit

$$t = -\frac{\log 2}{c} = \frac{-\log(2)\cdot 24}{\log(9/10)}\,\mathrm{h}$$

Ergänzende Übung 3.3.19. Das eingestrichene A liegt bei 440 Herz. Bei wieviel Herz etwa liegt das eingestrichene F? Hinweis: Die Lösung dieser Aufgabe benötigt zusätzlich zu mathematischen Kenntnissen auch physikalische und musikalische Vorkenntnisse.

Ergänzung 3.3.20. Versteht man eine positive reelle Zahl als das Verhältnis zweier gleichartiger Größen, so sagt man für den Zehnerlogarithmus besagter Zahl auch, er „drücke das Verhältnis in **Bel** aus“. Diese Sprechweise ehrt Alexander Graham Bell, der das Telephon einführte. So könnte man etwa sagen, das Verhältnis von Gramm zu Kilo betrage 3 Bel, statt von einem Verhältnis von Eins zu Tausend alias 1 zu 10^3 zu reden. Das Verhältnis von Kilo zu Tonne beträgt natürlich auch 3 Bel, und das Verhältnis von Gramm zu Tonne folglich 6 Bel. Häufig redet man auch von **Dezibel** alias „zehntel Bel“. Das ist jedoch „multiplikativ“ zu verstehen, ein Verhältnis von 1 Dezibel meint also ein Verhältnis von Eins zu $\sqrt[10]{10} \approx 1{,}26$.

Ergänzung 3.3.21. Physikalisch beschreibt man eine Lautstärke durch die Leistung, die sie etwa an einer Membran verrichtet. Gibt man eine Lautstärke in Dezibel an, so ist allerdings das Verhältnis des Quadrats dieser Leistung zum Quadrat der Leistung einer Standardlautstärke gemeint. Diese Standardlautstärke ist so vereinbart, daß sie etwa bei der Hörschwelle eines menschliches Ohrs liegt. Eine Lautstärke von Null Dezibel bedeutet also, daß ein gesunder Mensch das Geräusch so gerade noch hören kann, und jede Erhöhung einer Lautstärke um zwanzig Dezibel bedeutet, daß das Ohr zehnmal soviel Leistung aufnehmen wird. Bei einer Erhöhung um zehn Dezibel wird das Ohr also $\sqrt{10} \approx 3$ mal soviel Leistung aufnehmen.

Ergänzende Übung 3.3.22. Die monotonen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen sind genau die stetigen Gruppenhomomorphismen, also genau die Abbildungen $x \mapsto a^x$ für festes $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ergänzende Übung 3.3.23. Man finde alle stetigen Funktionen $G : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ mit $G(xy) = G(x) + G(y) \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^\times$, also alle stetigen Gruppenhomomorphismen von der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen in die additive Gruppe aller reellen Zahlen.

Ergänzende Übung 3.3.24. Man zeige, daß die Aussage der vorhergehenden Sätze 2.5.24 und 3.3.7 sogar folgt, wenn wir von unseren Gruppenhomomorphismen nur die Stetigkeit bei Null fordern.

Ergänzende Übung 3.3.25. Sei $L \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen ohne Häufungspunkte. So gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $L = \mathbb{Z}\alpha$.

Übung 3.3.26 (**Folgenkriterium für Grenzwerte von Funktionen**). Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, $p \in D$ ein Häufungspunkt und $f : D \backslash p \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. So gilt $\lim_{x \to p} f(x) = b$ genau dann, wenn für jede Folge x_n in $D \backslash p$ mit $x_n \to p$ gilt $f(x_n) \to b$.

Übung 3.3.27 (**Cauchy-Kriterium für Grenzwerte von Funktionen**). Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, $p \in D$ ein Häufungspunkt und $f : D \backslash p \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Genau dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \to p} f(x)$ und ist eine reelle Zahl, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U = U_\varepsilon$ von p gibt mit $(a, b \in U \cap D \backslash p) \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$.

3.4 Trigonometrische Funktionen

3.4.1. Ich erinnere an den Körper $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ der komplexen Zahlen aus [LA1] 3.1.3 oder [GR] 3.4.15. Ich erinnere an die komplexe Konjugation, den durch $z = x + \mathrm{i}y \mapsto \bar{z} = x - \mathrm{i}y$ gegebenen Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$, und an die Norm $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ich erinnere an Realteil $\operatorname{Re}(x + \mathrm{i}y) = x$ und Imaginärteil $\operatorname{Im}(x + \mathrm{i}y) = y$. Ich erinnere schließlich an die Kreisgruppe $S^1 := \{x + \mathrm{i}y \mid x^2 + y^2 = 1\}$ aller komplexen Zahlen der Norm Eins aus [LA1] 3.1.13.

Definition 3.4.2. Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ erklären wir eine weitere komplexe Zahl $\exp z \in \mathbb{C}$ durch die Vorschrift

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

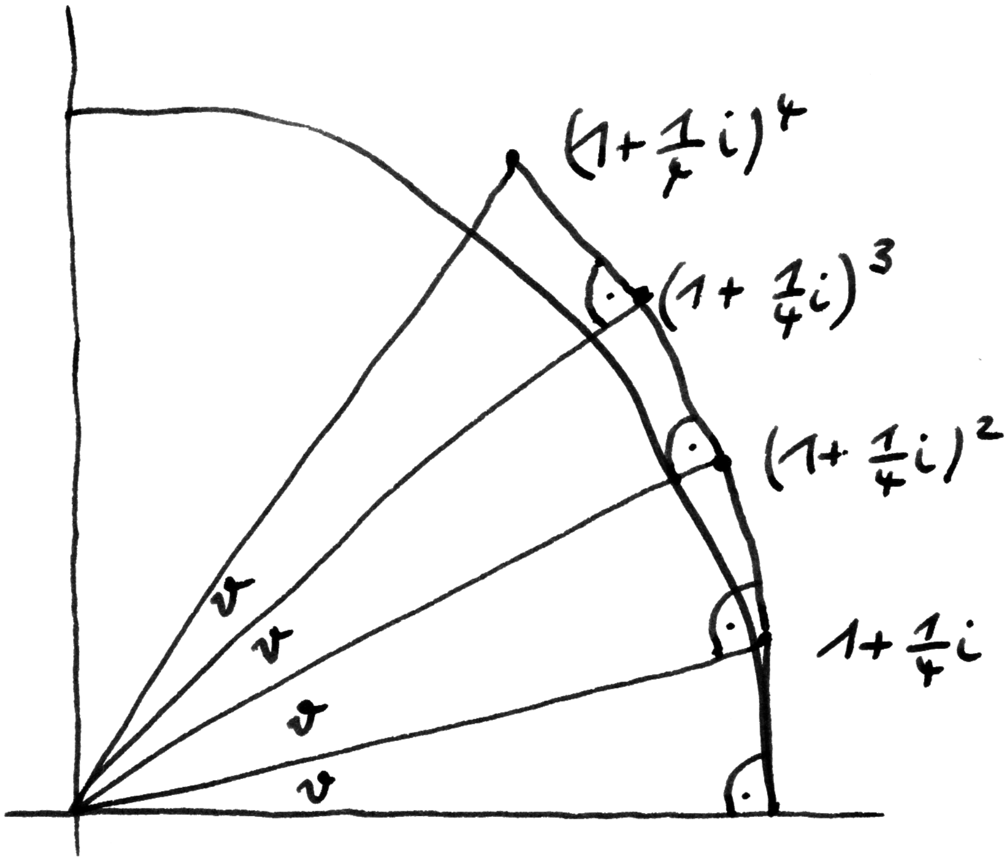
Diese Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut in Real- und Imaginärteil, etwa aufgrund der Abschätzungen $|\operatorname{Re} z^k|, |\operatorname{Im} z^k| \leq |z^k| = |z|^k$ zusammen mit dem Majorantenkriterium, wenn man die reelle Exponentialreihe als Majorante verwendet. Wir erhalten folglich eine Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die **komplexe Exponentialfunktion**.

3.4.3 (**Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion**). Man prüft genau wie in 3.2.9 im Reellen auch im Komplexen die Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w)$$

In der Sprache der Algebra ausgedrückt ist die Exponentialabbildung also ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der komplexen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen komplexen Zahlen und man erhält insbesondere $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. Aus der Vertauschbarkeit der komplexen Konjugation mit Summe und Produkt folgern wir auch noch

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$



Auch für komplexes z zeigt man wie in 3.2.3 die Formel

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

Das obige Bild stellt unter anderem den vierten Term dieser Folge im Fall $z = \mathrm{i}$ dar. Ich finde, man kann recht gut erkennen, wie diese Folge bei wachsendem n gegen den Punkt auf der Kreislinie konvergiert, für den das Segment der Kreislinie, das von ihm zur reellen Achse herunterläuft, die Länge Eins hat.

Für den Betrag von $\exp z$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} |\exp z|^2 &= \exp z\, \overline{\exp z} \\ &= \exp z\ \exp \overline{z} \\ &= \exp(z + \overline{z}) \\ &= \exp(2 \operatorname{Re} z) \end{aligned}$$

Folglich gilt $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$ und speziell $|\exp(\mathrm{i}\, t)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

3.4.4. Gegeben eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vereinbaren wir ad hoc, daß f **stetig** heißen soll, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig sind. Das wird sich im weiteren Verlauf dieser Vorlesung als ein Spezialfall der allgemeinen Definition 6.2.1 der „Stetigkeit von Abbildungen metrischer Räume“ erweisen.

Satz 3.4.5 (Gruppenwege in der Kreisgruppe). *Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to S^1$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die Kreisgruppe sind genau die Abbildungen der Gestalt $t \mapsto \exp(a\mathrm{i}t)$ mit $a \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Aus 3.4.3 folgt unmittelbar, daß $\gamma : t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ ein Gruppenhomomorphismus mit Bild in der Kreisgruppe S^1 ist. Aus der Abschätzung

$$|\exp(\mathrm{i}t) - \exp(\mathrm{i}s)| = |\exp(\mathrm{i}(t-s)) - 1| \leq \exp(|s-t|) - 1$$

folgt, daß γ stetigen Real- und Imaginärteil hat. Unser Gruppenhomomorphismus ist auch nicht konstant, aus der Reihenentwicklung folgt etwa die Abschätzung $\operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i})) < 1$. Aufgrund der Stetigkeit des Realteils gibt es folglich $c > 0$ mit $\operatorname{Re}\gamma(c) < 1$ und $|t| \leq c \Rightarrow \operatorname{Re}\gamma(t) > 0$. Ist $\beta : \mathbb{R} \to S^1$ ein weiterer Gruppenhomomorphismus mit stetigem Realteil, so gibt es auch $b > 0$ mit $|t| \leq b \Rightarrow \operatorname{Re}\beta(t) \geq \operatorname{Re}\gamma(c)$. Es folgt, daß wir $g \in [-c, c]$ finden mit $\operatorname{Re}\beta(b) = \operatorname{Re}\gamma(g)$. Indem wir notfalls g durch $-g$ ersetzen, dürfen wir zusätzlich $\operatorname{Im}\beta(b) = \operatorname{Im}\gamma(g)$ und damit

$$\beta(b) = \gamma(g)$$

annehmen. Daraus aber folgt $\varphi(b/2) = \gamma(g/2)$, denn beide Seiten sind die eindeutig bestimmte Quadratwurzel aus $\beta(b) = \gamma(g)$ mit positivem Realteil. Induktiv folgt erst $\beta(b/2^n) = \gamma(g/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann $\beta(mb/2^n) = \gamma(mg/2^n)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und dann aufgrund der Stetigkeit $\beta(tb) = \gamma(tg)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Satz 3.4.6 (Bezug der komplexen Exponentialfunktion zur Kreiszahl). *Die Abbildung $\gamma : t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ mit Kern $\ker\gamma = 2\pi\mathbb{Z}$ für unsere Kreiszahl π aus 2.4.1.*

Vorschau 3.4.7. Wir überlegen uns in 3.4.19, daß der Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch dieselbe Formel $z \mapsto \exp(\mathrm{i}z)$ denselben Kern hat, so daß sich der Kern der komplexen Exponentialfunktion zu $\ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ ergibt.

Beweis. Beim Beweis von 3.4.5 haben wir bereits gesehen, daß es $a < 1$ gibt derart, daß alle Elemente der Kreislinie mit Realteil $> a$ im Bild liegen müssen. Nach [LA1] 3.1.18 sind aber alle Elemente von S^1 Potenzen derartiger Elemente. Folglich ist γ eine Surjektion. Setzen wir nun $\tilde{\pi} := \inf\{t > 0 \mid \gamma(t) = -1\}$, so gilt offensichtlich $\gamma(\tilde{\pi}) = \gamma(-\tilde{\pi}) = -1$, aber γ nimmt auf dem offenen Intervall $(-\tilde{\pi}, \tilde{\pi})$ den Wert (-1) nicht an. So folgt $\ker \gamma \cap (0, 2\tilde{\pi}) = \emptyset$ und $2\tilde{\pi}\mathbb{Z} \subset \ker \gamma$. Hätten wir in $\ker \gamma$ noch Elemente außerhalb von $2\tilde{\pi}\mathbb{Z}$, so müßten wir darin auch Elemente aus $(0, 2\tilde{\pi})$ finden und erhielten einen Widerspruch. So folgt $\ker \gamma = 2\tilde{\pi}\mathbb{Z}$ und es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\tilde{\pi}$ mit unserer Kreiszahl π aus 2.4.1 übereinstimmt. Dieser Teil des Beweises wird sich als ein Spezialfall unserer Sätze über die sogenannte „Bogenlänge“ erweisen, aber hier argumentieren wir noch „zu Fuß“. Sicher gilt $\gamma(0) = 1$ und γ induziert eine Bijektion $\gamma : (-\tilde{\pi}, \tilde{\pi}] \xrightarrow{\sim} S^1$. Der Imaginärteil von γ hat auf diesem Intervall also nur die beiden Nullstellen 0 und $\tilde{\pi}$. Man überzeugt sich anhand der Reihenentwicklung, daß gilt $\operatorname{Im}(\gamma(t)) > 0$ für $0 < t < 1$. Also induziert γ eine Bijektion

$$\gamma : [0, \tilde{\pi}] \xrightarrow{\sim} \{z \in S^1 \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

und $\operatorname{Re} \gamma$ muß auf diesem Intervall streng monoton fallen. Diese Erkenntnis liefert für unsere Kreiszahl π aus 2.4.1 die alternative Beschreibung

$$\pi = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \;\middle|\; 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq \tilde{\pi} \right\}$$

Nun erhalten wir für $|t| \leq 1$ leicht die Abschätzung

$$|\gamma(t) - 1|^2 = 2 - 2 \operatorname{Re} \gamma(t) = t^2 - 2t^4/4! + 2t^6/6! - \ldots \quad \leq t^2$$

und so $|\gamma(t) - 1| \leq |t|$ und dann auch $|\gamma(t) - \gamma(s)| \leq |t - s|$ erst für $|t - s| \leq 1$, dann aber unter Verwendung der Dreiecksungleichung sogar für alle $t, s \in \mathbb{R}$. Das zeigt schon mal $\pi \leq \tilde{\pi}$. Andererseits zeigt die Reihenentwicklung auch die untere Abschätzung $|\gamma(t) - 1| \geq t - t^2$, erst für $t \in [0, 1]$ wegen $1 = \sum_{\nu=2}^{\infty} 1/2^{\nu-1} \geq \sum_{\nu=2}^{\infty} 1/\nu!$, dann aber aus offensichtlichen Gründen sogar für alle t. Verwenden wir für $n \geq \tilde{\pi}$ die äquidistante Unterteilung mit $0 = t_0$ und $t_n = \tilde{\pi}$, so gilt mithin

$$\pi \geq \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \geq \tilde{\pi} - n(\tilde{\pi}/n)^2$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ folgt die umgekehrte Abschätzung $\pi \geq \tilde{\pi}$. □

Vorschau 3.4.8. Die zweite Hälfte dieses Beweises wird sich als ein Spezialfall unserer Sätze über die sogenannte „Bogenlänge“ erweisen. Unsere Definition der

Kreiszahl π aus 2.4.1 können wir in dieser Terminologie auffassen als die Länge $\pi = \mathrm{L}(\gamma)$ des Weges $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$. Die Abbildung $\beta : [0, \tilde{\pi}] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \kappa(\exp(\mathrm{i}t))$ mit $\kappa : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ der kanonischen Identifikation erweist sich als eine monotone Umparametrisierung dieses Weges und hat nach 8.1.5 dieselbe Länge $\mathrm{L}(\beta) = \mathrm{L}(\gamma)$, die schließlich nach 8.3.2 wegen der konstanten absoluten Geschwindigkeit $\|\beta'(t)\| = 1$ des Weges β berechnet werden kann als

$$\mathrm{L}(\beta) = \int_0^{\tilde{\pi}} \|\beta'(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^{\tilde{\pi}} \mathrm{d}t = \tilde{\pi}$$

Definition 3.4.9. Wir nennen den Real- und Imaginärteil der Abbildung $t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ den **Cosinus** und den **Sinus** und notieren sie $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In Formeln sind die Funktionen Sinus und Cosinus also definiert durch die sogenannte **Euler'sche Gleichung**

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i} \sin t$$

3.4.10. Die Bezeichnung **Trigonometrie** bedeutet „Dreiecksmessung“. Die Wurzel „gon“ taucht auch im deutschen Wort „Knie“ auf und bedeutet im Griechischen sowohl „Knie“ als auch im übertragenen Sinne „Winkel“. Ich schlage vor, zu unterscheiden zwischen dem **geometrischen Cosinus**, den ich in [LA2] 1.4.12 einführe als eine Abbildung

$$\cos_{\mathrm{g}} : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$$

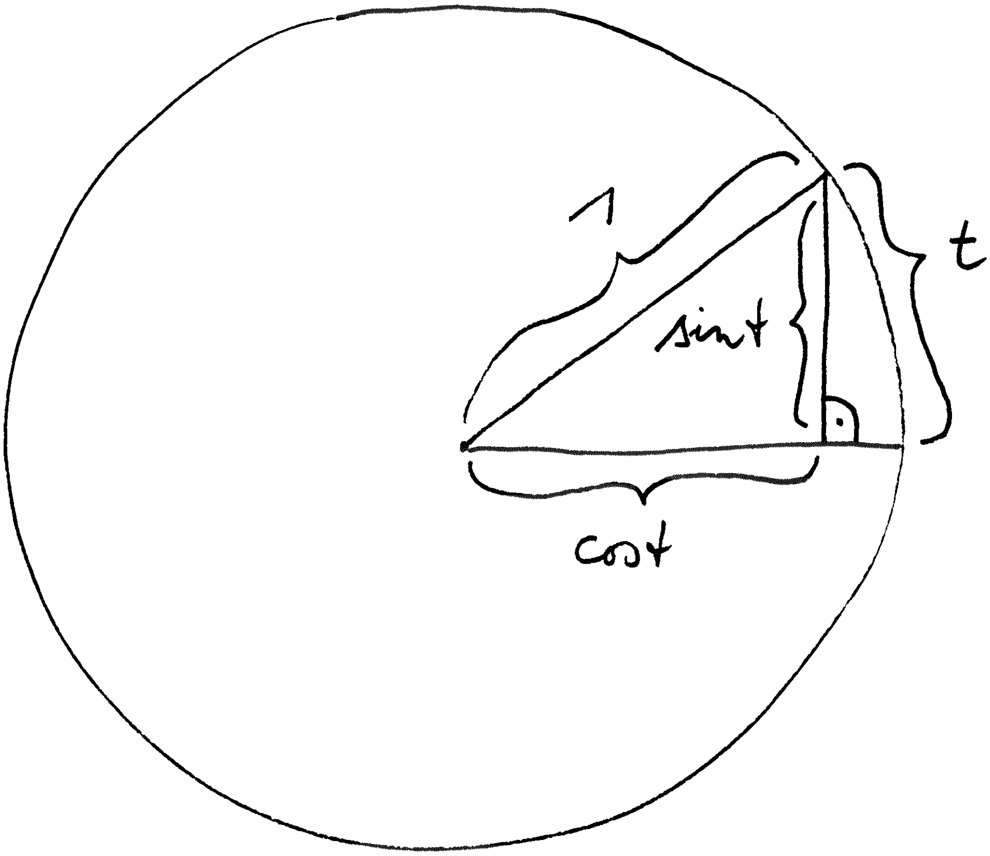
von einer abstrakt konstruierten „Winkelgruppe“ in die reellen Zahlen und der durch die Regel „Ankatethe durch Hypothenuse“ beschrieben wird, und dem hier erklärten **analytischen Cosinus** $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der sich daraus ergibt durch das Vorschalten der Verknüpfung $\mathbb{R} \to S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$ unseres Gruppenweges $t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ mit einem natürlichen Isomorphismus von der Kreisgruppe zur Winkelgruppe. Analog mag man für die anderen Winkelfunktionen vorgehen.

3.4.11 (**Bezug zum Bogenmaß**). Dieselbe Argumentation wie beim vorhergehenden Beweis zeigt für alle $t \geq 0$ die Formel

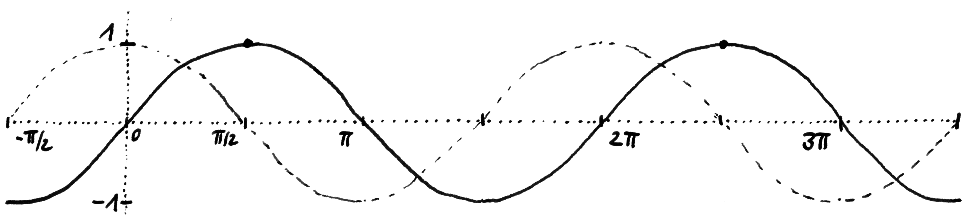
$$t = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \;\middle|\; 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t \right\}$$

Anschaulich bedeutet mithin t die Länge des Kreisbogens von 1 bis $\gamma(t)$. Auf Taschenrechnern muß man, um die hier definierten Funktionen $\sin$ und $\cos$ zu erhalten, meist noch spezifizieren, daß die Eingabe im Bogenmaß, auf englisch „Radians“ oder abgekürzt „rad“, zu verstehen sein soll. Auf lateinisch bedeutet Sinus übrigends „Bodenwelle“ und „Busen“, wortverwandt ist französisch „le sein“.

3.4.12 (**Eigenschaften von Sinus und Cosinus**). Aus der Definition von Sinus und Cosinus folgen unmittelbar eine ganze Reihe von Eigenschaften.



Sinus und Cosinus am Einheitskreis



Die Graphen vom Sinus als durchgezogene Linie und vom Cosinus als gestrichelte Linie.

1. Aus der Definition 3.4.9 kennen wir die Identität $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Diese Formel wird oft nach **Pythagoras** benannt. Hier haben wir $(\sin t)^2 = \sin^2 t$ und $(\cos t)^2 = \cos^2 t$ abgekürzt. Diese Abkürzungen sind auch üblich für alle anderen trigonometrischen beziehungsweise hyperbolischen trigonometrischen Funktionen, denn das spart Klammern und die alternativ möglichen Bedeutungen $\sin^2 t = \sin(\sin t)$ und dergleichen kommen nie vor.

2. Die **Symmetrie-Eigenschaften** $\sin(-t) = -\sin t$ und $\cos(-t) = \cos t$ folgen aus $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$.

3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ folgen die **Additionsformeln**

$$\begin{array}{rcrcl} \cos(a+b) & = & \cos a \cos b & - & \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \cos a \sin b & + & \sin a \cos b \end{array}$$

   aus der Funktionalgleichung $\exp(\mathrm{i}(a+b)) = \exp(\mathrm{i}a)\exp(\mathrm{i}b)$.

4. Die **Periodizitäten** $\sin(t) = \sin(t + 2\pi)$ und $\cos(t) = \cos(t + 2\pi)$ folgen unmittelbar aus der Beschreibung des Kerns der komplexen Exponentialfunktion 3.4.6.

5. Daß der Cosinus eine streng monoton fallende Bijektion $\cos : [0, \pi] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$ ist, wissen wir bereits aus dem Beweis von 3.4.6. Die Formel des Pythagoras zeigt dann, daß π die kleinste positive Nullstelle von $\sin$ ist. Zusammen mit $\sin(0) = 0$ und der Periodizität folgt, daß die **Nullstellen des Sinus** genau die ganzzahligen Vielfachen von π sind.

6. Mit den Additionsformeln folgt $\sin(t + \pi) = -\sin t$ und $\cos(t + \pi) = -\cos t$ und damit $\cos(\pi/2) = 0$ und $\cos t = \sin(t + \pi/2)$ und $\sin t = -\cos(t + \pi/2)$. Die **Nullstellen des Cosinus** sind folglich genau die Elemente von $2\pi\mathbb{Z} + \pi/2$.

7. Unsere Funktionen $\cos$ und $\sin$ werden per definitionem dargestellt durch die absolut konvergenten Reihen

$$\begin{array}{rclcl} \cos t & = & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} & = & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots \\ \sin t & = & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & = & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots \end{array}$$

3.4.13. Wir wissen bereits aus dem Beweis von 3.4.6, daß der Cosinus eine stetige streng monoton fallende Bijektion $\cos : [0, \pi] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$ ist. Deren Umkehrabbildung ist nach 2.3.23 auch stetig. Sie heißt der **Arcuscosinus** und wird notiert als

$$\arccos : [-1, 1] \xrightarrow{\sim} [0, \pi]$$

3.4.14. Der Sinus wächst wegen 3.4.13 und der zuvor gezeigten Identität $\sin t = -\cos(t + \pi/2)$ streng monoton auf $[-\pi/2, \pi/2]$ und definiert folglich eine Bijektion $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$. Deren Umkehrabbildung ist nach 2.3.23 auch stetig. Sie heißt der **Arcussinus** und wird notiert als

$$\arcsin : [-1, 1] \xrightarrow{\sim} [-\pi/2, \pi/2]$$

3.4.15. Die Bezeichnungen „arcussinus" und „arcuscosinus" kommen von lateinisch „arcus" für „Bogen". In der Tat bedeutet $\arcsin b$ für $b \in [0, 1]$ die Länge des Kreisbogens, der vom Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt $(\sqrt{1 - b^2}, b)$ der Höhe b auf dem Einheitskreis reicht, wie der Leser zur Übung nachrechnen mag.

Definition 3.4.16. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ definieren wir den **Tangens** von x durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

3.4.17. Anschaulich bedeutet $\tan(x)$ für $x \in (0, \pi/2)$ die Höhe, in der der Strahl durch den Nullpunkt und den Punkt des Einheitskreises, der mit dem Punkt $(1, 0)$ ein Kreissegment der Länge x begrenzt, die Tangente an unseren Einheitskreis im Punkt $(1, 0)$ trifft. Man benutzt auch den **Cotangens**

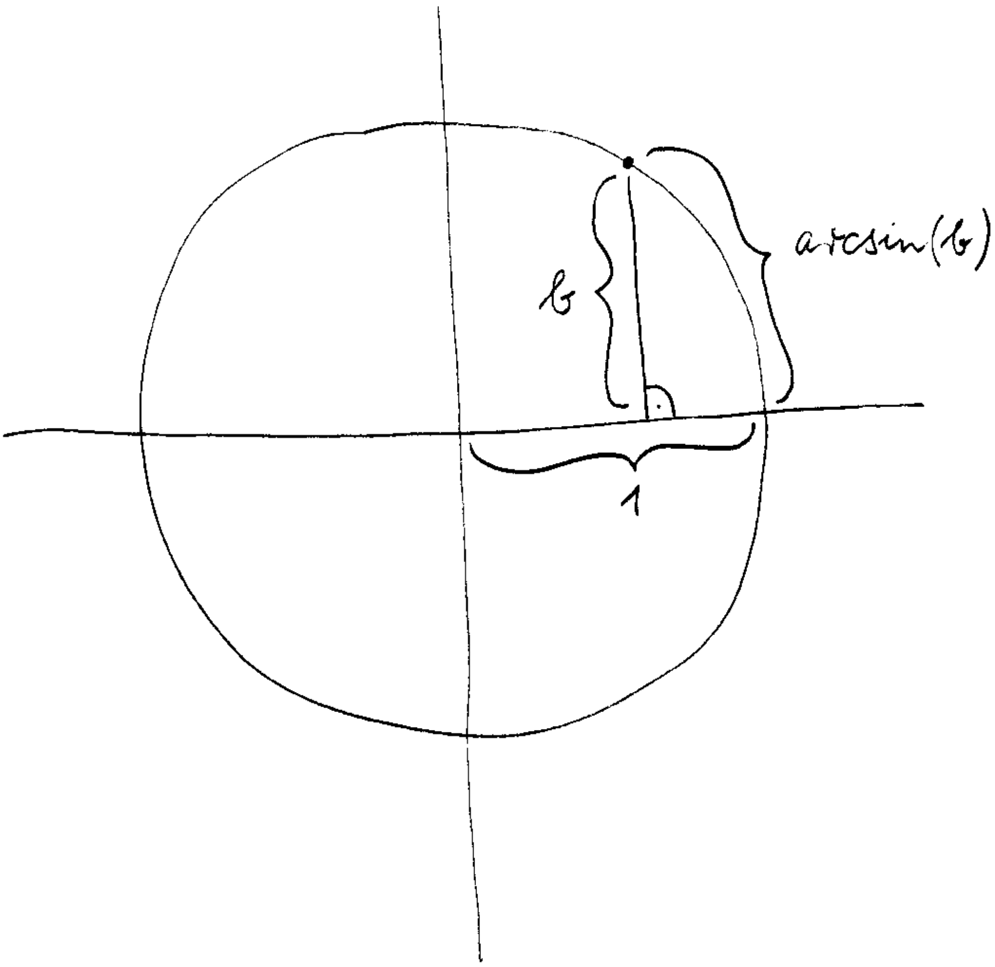
$$\cot(x) := \frac{\cos x}{\sin x}$$

und eher selten den **Secans** $\sec(x) := 1/\cos(x)$ und **Cosecans** $\operatorname{cosec}(x) := 1/\sin(x)$.

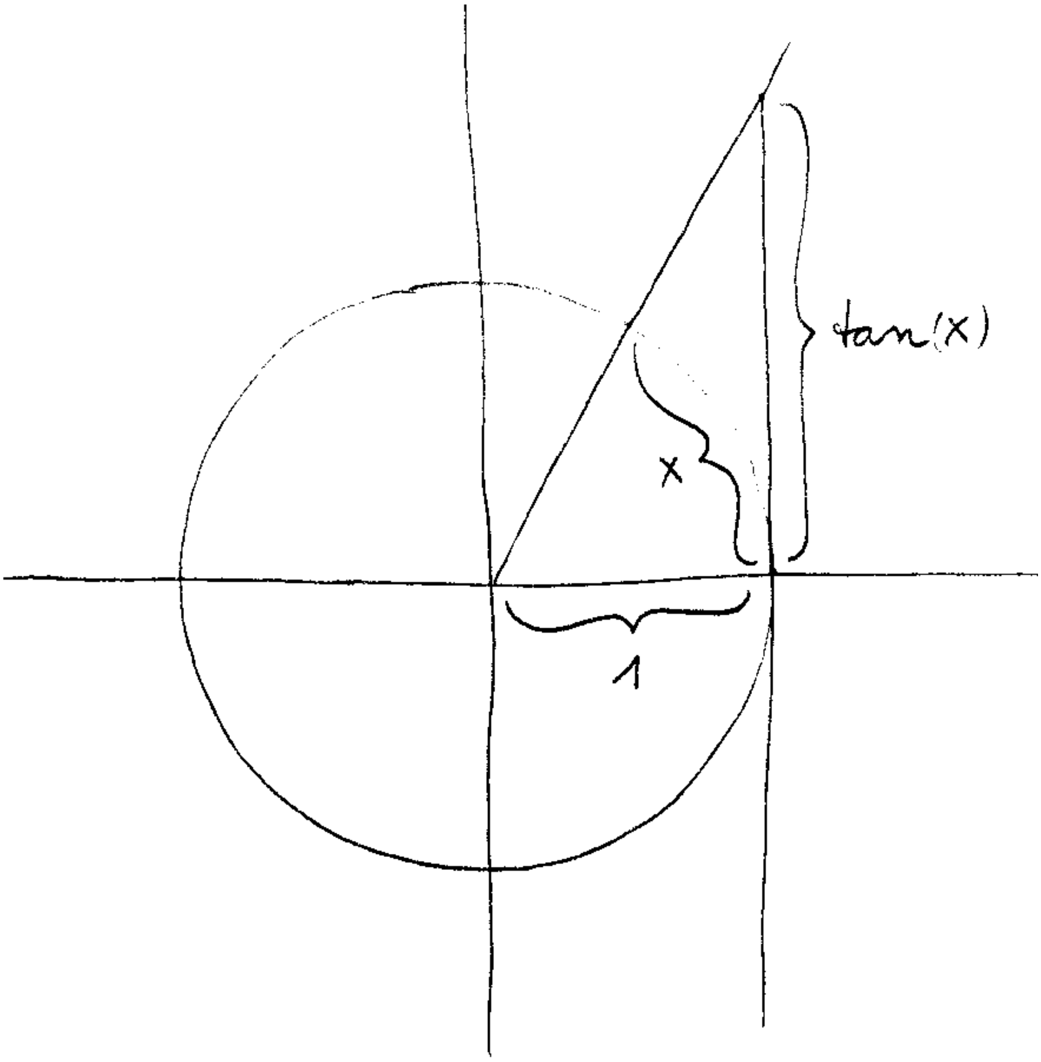
3.4.18. Der Tangens wächst streng monoton auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$. Wegen $\tan(-t) = -\tan(t)$ reicht es, das auf $[0, \pi/2)$ zu prüfen, und dort sind Sinus und Cosinus nichtnegativ und der Sinus wächst streng monoton, wohingegen der Cosinus streng monoton fällt. Da der Tangens an den Grenzen sogar gegen $\pm\infty$ strebt, liefert der Tangens eine Bijektion $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion heißt der **Arcustangens**

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

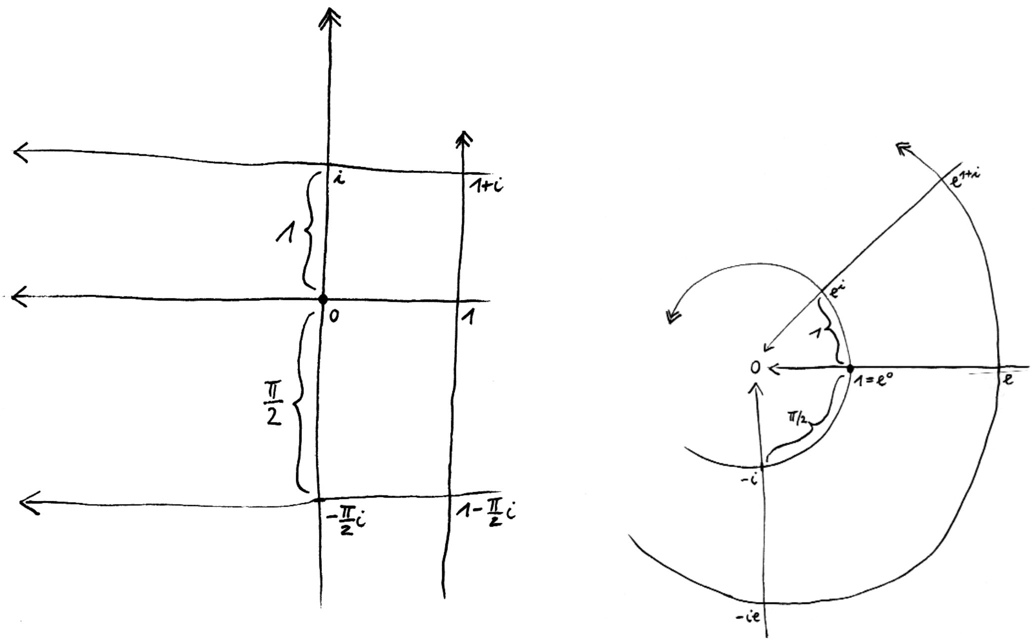
3.4.19 (**Kern und Bild der komplexen Exponentialfunktion**). Nach 3.4.6 induziert die Exponentialfunktion eine Surjektion der imaginären Geraden $\mathrm{i}\mathbb{R}$ auf den Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Daß die Exponentialfunktion eine Bijektion $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$ induziert, wissen wir bereits aus 3.3.1. Da nun jede von Null verschiedene komplexe Zahl w sich schreiben läßt als Produkt $w = (w/|w|)|w|$ mit $w/|w|$ auf dem Einheitskreis und $|w|$ positiv, ist die Exponentialfunktion nach der Funktionalgleichung sogar ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow$



Der Arcussinus



Der Tangens



Die Bilder ausgewählter Teile der komplexen Zahlenebene unter der komplexen Exponentialfunktion. Die Vertikalen werden zu Kreislinien aufgewickelt, die Horizontalen in vom Nullpunkt ausgehende Strahlen transformiert. Anschaulich mag man sich die komplexe Exponentialfunktion denken als Abbildung, bei der die komplexe Zahlenebene zunächst in horizontaler Richtung verzerrt und ganz auf die Halbebene mit positivem Realteil herübergeschoben wird mit $x + \mathrm{i}y \mapsto \exp(x) + \mathrm{i}y$, gefolgt von einer Aufwicklung dieser Halbebene zu einer Wendeltreppe $a + \mathrm{i}y \mapsto (a \cos y, a \sin y, y)$ in den Raum gefolgt von einer senkrechten Projektion dieser Wendeltreppe auf die Ebene alias dem Weglassen der letzten Koordinate.

$\mathbb{C}^\times$. Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus, als da heißt das Urbild des neutralen Elements $1 \in \mathbb{C}^\times$ besteht aufgrund unserer Gleichung $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$ genau aus allen ganzzahligen Vielfachen von $2\pi\mathrm{i}$, in Formeln

$$\ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$$

3.4.20. Wir bestimmen mit dieser Erkenntnis die **n-ten Einheitswurzeln**, als da heißt die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Nach 3.4.19 hat jede Lösung die Gestalt $z = \mathrm{e}^b$ für geeignetes $b \in \mathbb{C}$ und so ein z löst unsere Gleichung genau dann, wenn gilt $z^n = \mathrm{e}^{nb} = 1$ alias $nb \in 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$. Wir erhalten so die Lösungen $\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,\nu/n)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ und erkennen auch, daß sie paarweise verschieden sind und es keine anderen Lösungen geben kann. In der komplexen Zahlenebene kann man sich die n-ten Einheitswurzeln veranschaulichen als die Ecken desjenigen in den Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, das als eine Ecke die 1 hat.

Ergänzung 3.4.21. Der Satz von **Hermite-Lindemann** besagt, daß für eine von Null verschiedene im Sinne von 2.4.2 algebraische komplexe Zahl α der Wert der Exponentialfunktion $\exp(\alpha)$ stets transzendent ist. Daraus folgt sowohl, daß die Euler'sche Zahl $\mathrm{e} = \exp(1)$ transzendent ist, als auch, daß $2\pi\,\mathrm{i}$ und damit natürlich auch π transzendent sind, da nämlich $\exp(2\pi\,\mathrm{i}) = 1$ nicht transzendent ist. In etwas allgemeinerer Form sagt der Satz, daß gegeben komplexe algebraische Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, die linear unabhängig sind über $\mathbb{Q}$, die Werte der Exponentialfunktion $\exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_n)$ algebraisch unabhängig sind über $\mathbb{Q}$ im Sinne von [KAG] 4.5.2. Mehr dazu findet man etwa in [Lor96]. Schanuels Vermutung, wie das zu verallgemeinern sein sollte, findet man in [KAG] 4.5.17.

3.4.22. Für eine reelle Zahl $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir wieder

$$a^z := \exp(z \log a)$$

und schreiben insbesondere auch $\exp z = \mathrm{e}^z$ für $z \in \mathbb{C}$. Mit dieser Notation liest sich die Euler'sche Formel dann als

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$$

Insbesondere erfüllen unsere Hauptdarsteller die bemerkenswerte Identität

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

Aus $\exp(-\mathrm{i}t) = \overline{\exp(\mathrm{i}t)}$ folgern wir umgekehrt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$$

Diese Formeln verwenden wir, um den Sinus und Cosinus zu Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auszudehnen.

Übungen

Übung 3.4.23. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede komplexe Zahl $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $z^n = a$ genau n Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Übung 3.4.24. Man zeige: Jeder Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ mit stetigem Real- und Imaginärteil hat die Gestalt $t \mapsto \exp(at)$ für genau eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$. Hinweis: Man wiederhole den Beweis von 3.4.5 und beachte 3.4.19.

Ergänzende Übung 3.4.25 (**Nichtexistenz globaler komplexer Wurzeln**). Man zeige, daß es nicht möglich ist, in stetiger Weise zu jeder komplexen Zahl eine Wurzel zu wählen, daß es also keine stetige Abbildung $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $w(z)^2 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Hinweis: Man prüfe, daß die Funktion $w(\exp(z)) \exp(-z/2)$ einerseits konstant sein müßte, aber andererseits nicht denselben Wert bei 0 und $2\pi\mathrm{i}$ annehmen würde. Die anschauliche Bedeutung der Aussage mag aus der graphischen Darstellung der Abbildung $z \mapsto z^2$ in [LA1] 3.1.6 klar werden. Im Rahmen der Überlagerungstheorie wird das der Einzeiler [TF] **??**.

Ergänzende Übung 3.4.26 (**Der goldene Schnitt im regelmäßigen Fünfeck**). In einem regelmäßigen Fünfeck stehen die Längen der Diagonalen zu den Längen der Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts. Man prüfe diese elementargeometrisch leicht einzusehende Behauptung durch algebraische Rechnung. Hinweis: Der goldene Schnitt ist die positive Lösung der Gleichung $a/1 = (1+a)/a$ alias $a^2 - a - 1 = 0$, seine geometrische Bedeutung wurde in [GR] 1.2.2 erklärt. Es gilt zu zeigen, daß für $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/5}$ der Ausdruck $a = |1-\zeta^2|/|1-\zeta| = |1+\zeta|$ die fragliche Gleichung löst. Man verwende $\zeta^4 = \bar{\zeta}$.

Ergänzende Übung 3.4.27. In einem regelmäßigen Siebeneck sei a der Abstand von einer Ecke zur nächsten Ecke, b der Abstand zur übernächsten Ecke, und c der Abstand zur überübernächsten Ecke. Man zeige

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

In Formeln zeige man für $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/7}$ die Identität $|1-\zeta|^{-1} = |1-\zeta^2|^{-1} + |1-\zeta^3|^{-1}$.

Übung 3.4.28. *Verlegen!* Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ hat die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ die Ableitung $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Später kann das auch mit 6.9.11 und 6.9.17 sehr schnell erledigt werden.

Ergänzende Übung 3.4.29. *Verlegen!* Die Nullstellen des komplexen Sinus liegen alle auf der reellen Achse.

Ergänzende Übung 3.4.30. Man leite einige Formeln der nachstehenden Tabelle her.

Die Überlagerung zweier Sinuswellen mit nahe beieinanderliegender Periode. Rechnerisch finden wir etwa die Identität

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_1 t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_2 t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 - \omega_2)t/2}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 + \omega_2)t/2} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}(\omega_1 + \omega_2)t/2}\big)$$

und durch Betrachtung der Imaginärteile beider Seiten

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2\sin((\omega_1 - \omega_2)t/2)\cos((\omega_1 + \omega_2)t/2)$$

Liegen hier ω_1 und ω_2 nah beieinander, so ergibt sich für diesen Ausdruck als Funktion von t das obige Bild, in dem sich anschaulich gesprochen immer abwechselnd beide Sinuswellen einmal gegenseitig auslöschen und dann wieder addieren. Man kann das auch mit eigenen Ohren erfahren, wenn man sich von zwei Kommilitonen zwei nahe beieinanderliegende Töne vorsingen läßt: Es ist dann so eine Art Wummern zu hören, das eben mit der Frequenz $\omega_1 - \omega_2$ geschieht.

	sin	cos
π	0	-1
$\pi/2$	1	0
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/5$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}/2\sqrt{2}$	$(\sqrt{5}+1)/4$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/7$	?	?
$\pi/8$	$\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}$
$\pi/9$	?	?
$\pi/10$	$(\sqrt{5}-1)/4$	$\sqrt{5+\sqrt{5}}/2\sqrt{2}$
$\pi/11$	?	?

Man bemerkt, daß sich für $\cos(\pi/5)$ gerade die Hälfte unseres „goldenen Schnitts“ aus 3.4.26 ergibt. Bei der Bestimmung der Werte für $\pi/5$ und $\pi/10$ mag man von nebenstehendem Bild ausgehen, das insbesondere bei der Bestimmung von $\sin(\pi/10)$ helfen sollte. Wir zeigen in [AL] 4.8.9, warum es unmöglich ist, Formeln derselben Bauart auch für $\sin(\pi/7)$ oder $\sin(\pi/9)$ oder $\sin(\pi/11)$ anzugeben.

Ergänzende Übung 3.4.31. Man zeige mit der Euler'schen Gleichung 3.4.9 die Identität $\sin^3\vartheta = \frac{3}{4}\sin\vartheta - \frac{1}{4}\sin(3\vartheta)$.

Ergänzende Übung 3.4.32. Man zeige, daß der Sinus keine Polynomfunktion ist.

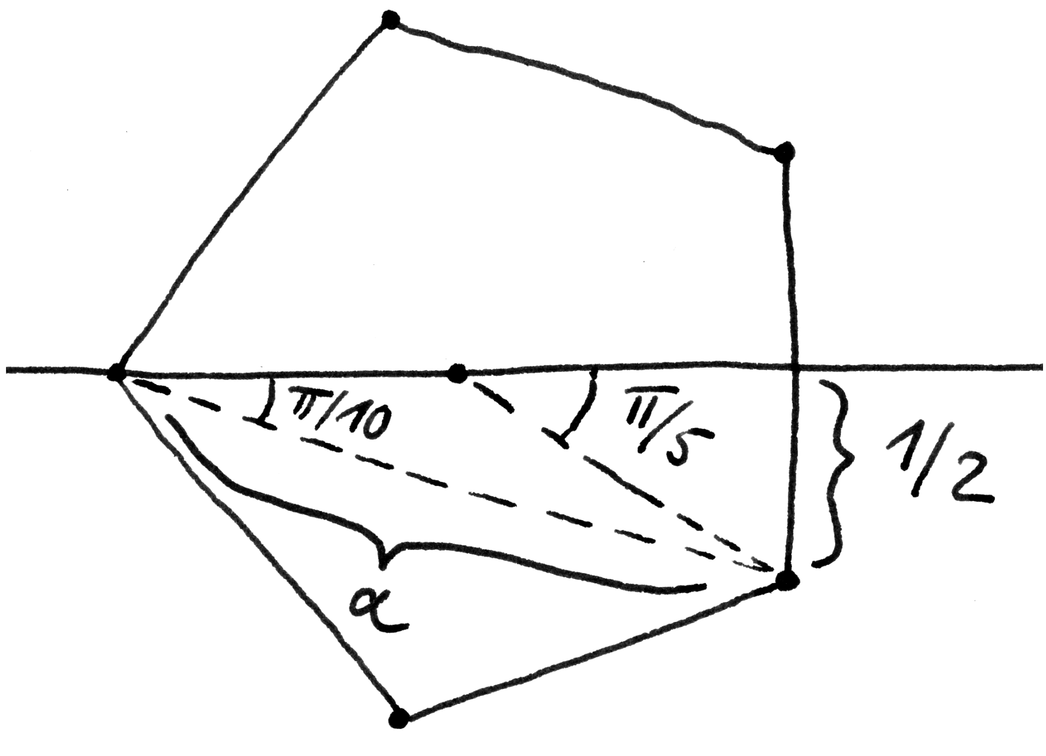


Illustration zur Berechnung von $\sin(\pi/10)$

4 Integration und Ableitung

4.1 Stetige Funktionen auf Kompakta

Definition 4.1.1. Man nennt eine Teilmenge $K \subset \overline{\mathbb{R}}$ **kompakt** oder ein **Kompaktum**, wenn jede Folge in K eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus K konvergiert. Eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ heißt ein **reelles Kompaktum**.

4.1.2. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß 2.6.8 sieht man leicht, daß die kompakten Intervalle in $\overline{\mathbb{R}}$ genau die Intervalle der Gestalt $[a, b]$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ sind.

Vorschau 4.1.3. Der Begriff der „Kompaktheit“ ist für weite Teile der Mathematik grundlegend. Sie werden später sehen, wie er im Fall allgemeiner „topologischer Räume“ in die beiden Begriffe „folgenkompakt“ und „überdeckungskompakt“ aufspaltet. Sie werden auch sehen, daß es letzterer Begriff ist, der weiter trägt und zu „kompakt“ abgekürzt wird, obwohl ersterer Begriff die natürlichere Verallgemeinerung unserer obigen Definition scheint. Aber alles zu seiner Zeit!

Satz 4.1.4 (Extremwerte auf Kompakta). *Jede stetige Funktion auf einem nichtleeren Kompaktum nimmt das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte als Funktionswert an.*

4.1.5. Ist in Formeln $K \neq \emptyset$ kompakt und $f : K \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig, so gibt es demnach $p, q \in K$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in K$. Ist die Funktion f reellwertig, so ist insbesondere ihr Bild beschränkt. Salopp gesprochen kann also eine stetige reellwertige Funktion auf einem Kompaktum nicht nach Unendlich streben. Man beachte, eine wie wichtige Rolle im Falle eines kompakten Itervalls die Endpunkte eines Intervalls hierbei spielen: Eine stetige reellwertige Funktion auf einem offenen Intervall kann ja durchaus nach Unendlich streben, wie etwa die Funktion $x \mapsto (1/x)$ auf dem Intervall $(0, 1)$.

Beweis. Da K nicht leer ist, finden wir eine Folge x_n in K mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K)$. Diese Folge besitzt nun nach Annahme eine Teilfolge, die gegen einen Punkt q aus K konvergiert. Indem wir zu dieser Teilfolge übergehen dürfen wir sogar annehmen, unsere Folge sei selbst schon konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = q$. Mit 2.5.28 folgt dann

$$f(q) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K)$$

Die Existenz von $p \in K$ mit $f(p) = \inf f(K)$ zeigt man analog. $\square$

Definition 4.1.6. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge von reellen Zahlen. Eine reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn folgende Aussage richtig ist: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ derart, daß für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

4.1.7. Bei der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit kommt es wesentlich auf den Definitionsbereich D an. Da wir Funktionen vielfach angeben, ohne ihren Definitionsbereich explizit festzulegen, ist es in diesem Zusammenhang oft sinnvoll, den jeweils gemeinten Definitionsbereich zu präzisieren. Dazu benutzen wir die Sprechweise f **ist gleichmäßig stetig auf** D.

4.1.8 (**Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit**). Ich will nun den Unterschied zur Stetigkeit diskutieren. Eine reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ ist ja nach dem ε-δ-Kriterium 2.2.11 stetig bei $p \in D$ genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ gibt derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta(\varepsilon, p)$ gilt $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Des weiteren heißt sie stetig, wenn sie an jeder Stelle $p \in D$ stetig ist. Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet nun, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ gewählt werden kann, das es als $\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, p)$ für alle $p \in D$ gleichzeitig tut.

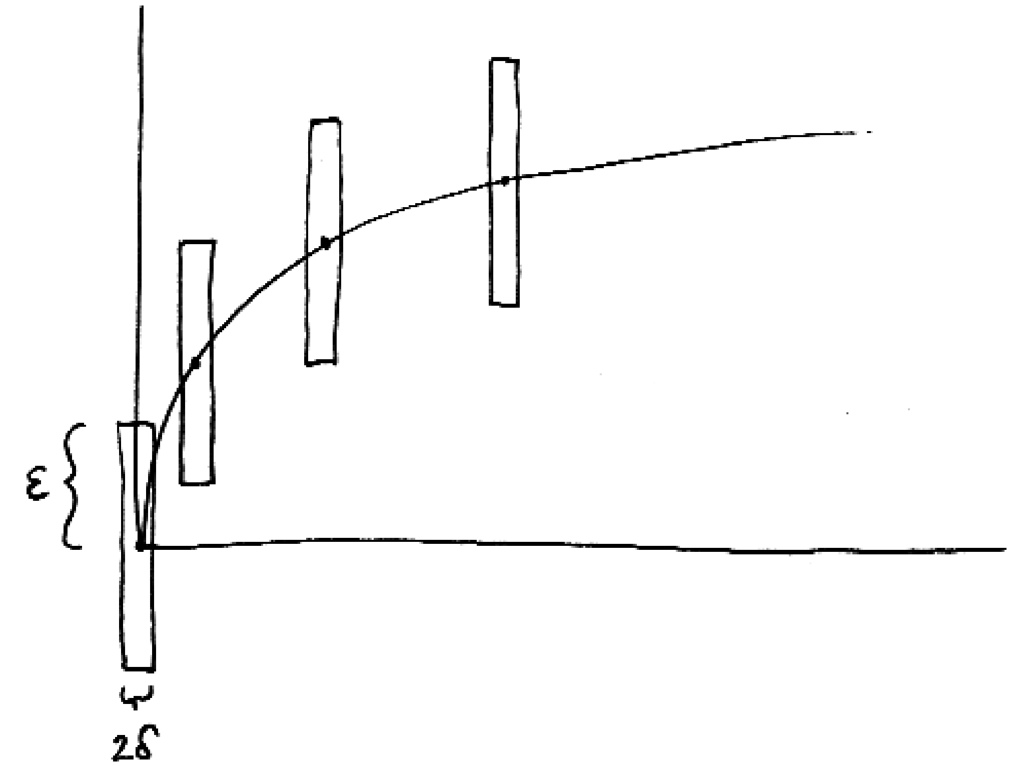
Beispiel 4.1.9. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist *nicht* gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, denn $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$ kann auch für sehr kleines $|x - y|$ noch groß sein, wenn nur $|x + y|$ hinreichend groß ist. Die Einschränkung dieser Funktion auf ein beliebiges reelles Kompaktum ist aber daselbst gleichmäßig stetig nach dem anschließenden Satz.

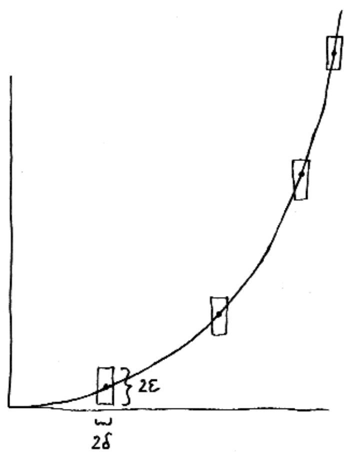
Satz 4.1.10 (**Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta**). *Jede reellwertige stetige Funktion auf einem reellen Kompaktum ist auf besagtem Kompaktum gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch und zeigen, daß eine Funktion auf einem reellen Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann. Sei dazu $K \subset \mathbb{R}$ unser Kompaktum und $f : K \to \mathbb{R}$ unsere Funktion. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, für das wir kein $\delta > 0$ finden könnten: Wir probieren alle $\delta = \frac{1}{n}$ aus und finden immer wieder Punkte $x_n, y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, für die dennoch gilt $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Gehen wir zu einer Teilfolge über, so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge der x_n gegen einen Punkt von K konvergiert, in Formeln $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ mit $x \in K$. Damit folgt natürlich auch $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Wäre nun f stetig bei x, so folgte

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

und damit lägen notwendig fast alle $f(x_n)$ und fast alle $f(y_n)$ im offenen Intervall $(f(x) - \varepsilon/2, f(x) + \varepsilon/2)$. Das steht jedoch im Widerspruch dazu, daß ja nach Konstruktion gilt $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ für alle n. Wir haben also gezeigt, daß eine Funktion auf einem reellen Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann. □





Gleichmäßige Stetigkeit für stetige Funktionen auf Intervallen kann man sich anschaulich wie folgt denken: Für eine beliebig für ein Rechteck vorgegebene Höhe $2\varepsilon > 0$ findet man bei gleichmäßiger Stetigkeit immer eine Breite $2\delta > 0$ derart, daß an welchen Punkt des Graphen meiner Funktion ich das Zentrum meines Rechtecks auch verschiebe, der Graph das Rechteck nie durch die Ober- oder Unterkante verläßt. So ist etwa die Wurzelfunktion gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die Quadratfunktion jedoch nicht.

Übungen

Übung 4.1.11. Jede endliche Vereinigung von Kompakta ist kompakt.

Übung 4.1.12. Das Bild eines Kompaktums unter einer stetigen Abbildung ist stets auch wieder kompakt.

Übung 4.1.13. Man zeige, daß jede beschränkte monotone stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig ist.

4.2 Integration stetiger Funktionen

Definition 4.2.1. Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes reelles Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion. Wir definieren die Menge $I(f) \subset \mathbb{R}$ aller „naiven Integrale zu Treppen, die unter f liegen“ durch

$$I(f) := \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Alle möglichen Wahlen von } n \in \mathbb{N} \\ \text{und von Stellen } a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b \\ \text{und von Werten } c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ derart,} \\ \text{daß gilt } \ f(x) \geq c_i \text{ für alle } x \in [a_i, a_{i+1}] \end{array} \right\}$$

Da f stetig ist, hat es nach 4.1.4 einen beschränkten Wertebereich, als da heißt, es gibt $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Daraus folgt, daß $m(b - a)$ zu $I(f)$ gehört und daß $M(b - a)$ eine obere Schranke von $I(f)$ ist. Als nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat $I(f)$ nach 1.5.16 ein Supremum in $\mathbb{R}$. Wir nennen dies Supremum das **Integral der Funktion f über das Intervall** $[a, b]$ und schreiben

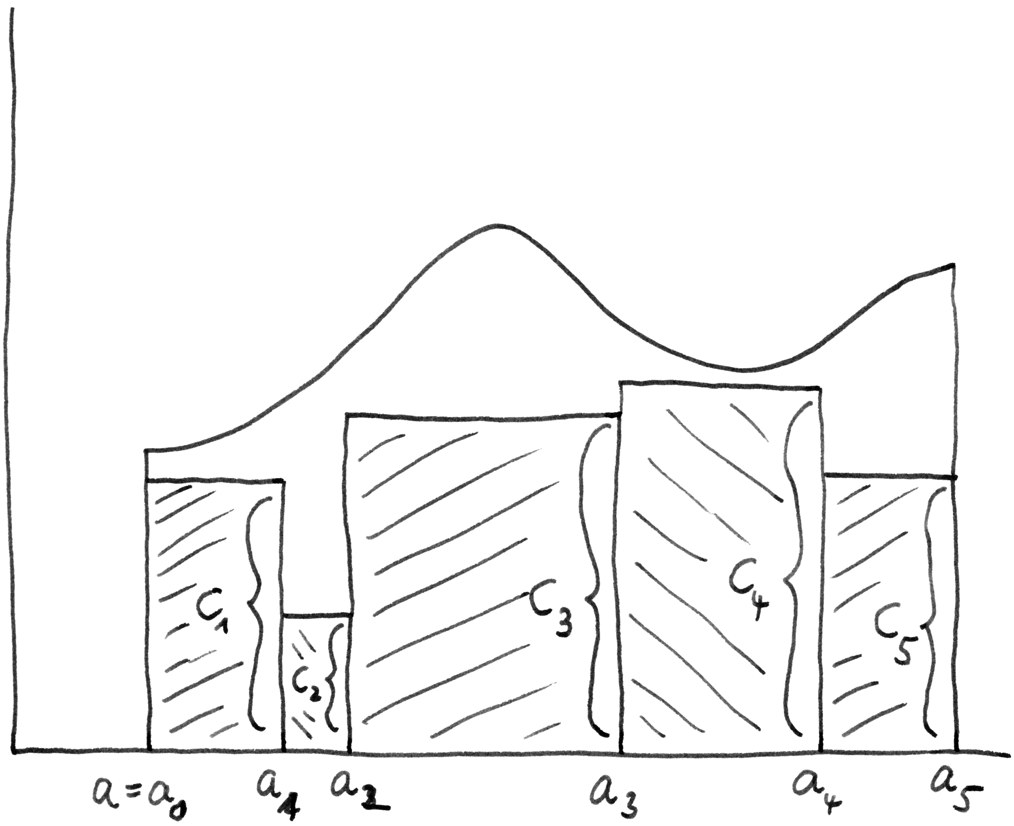
$$\sup I(f) =: \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f = \int_{[a,b]} f$$

Auf die Bedeutung dieser Notationen gehen wir in 4.2.6 noch näher ein.

4.2.2. Anschaulich mißt das Integral von f die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, wobei Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ zu rechnen sind. Das Wort ist aus dem Lateinischen abgeleitet und bedeutet so etwas wie „Zusammenfassung“. Der folgende Satz listet einige Eigenschaften unseres Integrals auf. Man kann leicht zeigen, daß unser Integral sogar durch diese Eigenschaften charakterisiert wird.

Satz 4.2.3 (Integrationsregeln). *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Intervall.*

1. *Für die konstante Funktion mit dem Wert 1 gilt $\int_a^b 1 = b - a$;*



Die schraffierte Fläche stellt ein Element von $I(f)$ dar für die durch den geschwungenen Graphen dargestellte Funktion f.

2. *Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $z \in [a,b]$ gilt $\int_a^b f = \int_a^z f + \int_z^b f$;*

3. *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, in Kurzschreibweise $f \leq g$, so folgt $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;*

4. *Für $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;*

5. *Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.*

4.2.4. Die beiden letzten Punkte bedeuten in der Sprache der linearen Algebra, daß das Integral eine Linearform auf dem reellen Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf unserem kompakten Intervall ist, als da heißt, eine lineare Abbildung in den Körper der reellen Zahlen.

Beweis. 1. Wir wissen ja schon, daß aus $m = 1 \leq f(x) \leq 1 = M$ folgt $b - a \leq \int_a^b f \leq b - a$.

2. Für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ definiert man eine neue Teilmenge $A + B \subset \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$. Offensichtlich gilt

$$I(f) = I(f|_{[a,z]}) + I(f|_{[z,b]})$$

Für beliebige nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ haben wir aber $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ nach Übung 1.5.17.

3. Aus $f \leq g$ folgt offensichtlich $I(f) \subset I(g)$.

4 & 5. Um die letzten beiden Aussagen zu zeigen, müssen wir etwas weiter ausholen. Für unsere stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und beliebiges $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ unterteilen wir unser Intervall **äquidistant**, lateinisierend für „mit gleichen Abständen“, durch

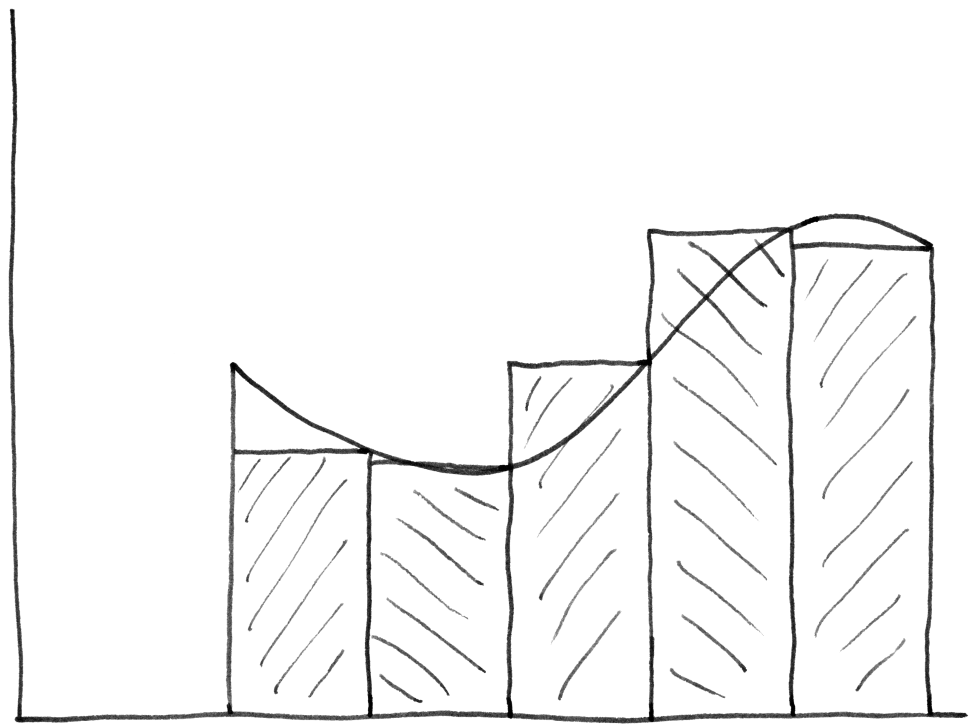
$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_r = b$$

Es gilt also $t_i = a + i(b-a)/r$. Wir definieren nun die r**-te Riemann-Summe** $S^r(f) \in \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$S^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)(\tfrac{b-a}{r})$$

In der anschließenden Proposition 4.2.5 werden wir

$$\int_a^b f = \lim_{r\to\infty} S^r(f)$$



Die schraffierte Fläche stellt die fünfte Riemannsumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar.

zeigen. Damit erhalten wir dann sofort

$$\begin{array}{rcl}\int_a^b (f+g) & = & \lim\limits_{r\to\infty} S^r(f+g) \\ & = & \lim\limits_{r\to\infty} (S^r(f)+S^r(g)) \\ & = & \lim\limits_{r\to\infty} S^r f + \lim\limits_{r\to\infty} S^r g \\ & = & \int_a^b f + \int_a^b g \end{array}$$

und ähnlich folgt $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. □

Proposition 4.2.5. *Für $a \le b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt $\int_a^b f = \lim\limits_{r\to\infty} S^r(f)$.*

Ergänzung 4.2.6. In der Notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, die auf den Philosophen und Mathematiker Leibniz zurückgeht, bedeutet das Integralzeichen $\int$ ein *S* wie „Summe“ und $\mathrm{d}x$ meint die „Differenz im x-Wert“. Manchmal verwendet man auch allgemeiner für eine weitere Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit guten Eigenschaften, etwa für g die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen, die Notation $\int f\mathrm{d}g$, und meint damit den Grenzwert der Summen $\sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)(g(t_{i+1}) - g(t_i))$, dessen Existenz in [AN2] 5.3.2 folgende in großer Allgemeinheit diskutiert wird.

4.2.7. Man mag versucht sein, die in Proposition 4.2.5 enthaltene Beschreibung gleich als Definition des Integrals zu nehmen. Ich rate davon jedoch ab, da die Existenz des fraglichen Grenzwerts nicht so leicht zu zeigen ist, und da auch die Zweite unserer Integrationsregeln 4.2.3 aus dieser Definition sehr viel mühsamer herzuleiten ist. Nun kommt das natürlich eigentlich nicht darauf an, wenn unsere Definitionen äquivalent sind. Aber man legt eben auch in Deutschland ein zentrales Auslieferungslager besser nach Frankfurt als nach Freiburg!

Beweis. Wir definieren zusätzlich zur r-ten Riemann-Summe die **r-ten Untersummen** und **Obersummen** durch

$$\underline{S}^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (\inf f[t_i, t_{i+1}])(\tfrac{b-a}{r}) \quad \text{und} \quad \overline{S}^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (\sup f[t_i, t_{i+1}])(\tfrac{b-a}{r})$$

und behaupten die Ungleichungen

$$\begin{array}{ccccc}\underline{S}^r(f) & \le & S^r(f) & \le & \overline{S}^r(f) \\ \underline{S}^r(f) & \le & \int_a^b f & \le & \overline{S}^r(f)\end{array}$$

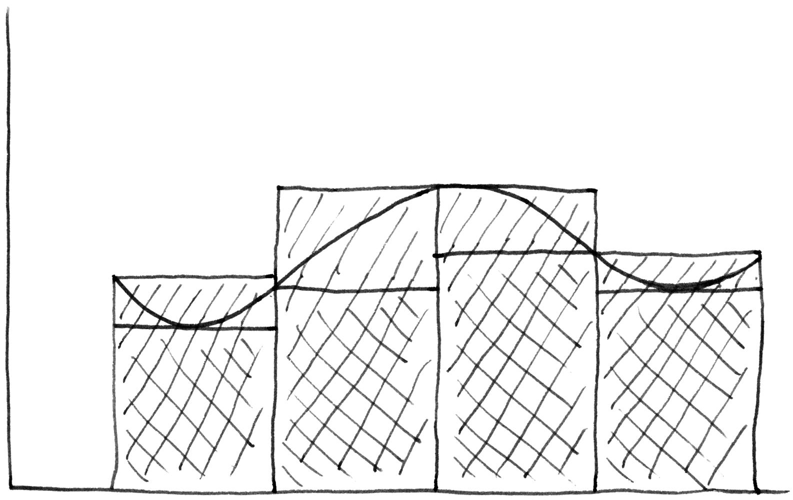
Die erste Zeile ist offensichtlich. Die zweite Zeile erhalten wir zum Beispiel, indem wir aus den bereits bewiesenen Teilen 1 und 3 des Satzes die Ungleichungen

$$(\inf f[t_i, t_{i+1}])(\tfrac{b-a}{r}) \le \int_{t_i}^{t_{i+1}} f \le (\sup f[t_i, t_{i+1}])(\tfrac{b-a}{r})$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\,(a_i - a_{i-1})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

In der Notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, die auf den Philosophen und Mathematiker Leibniz zurückgeht, bedeutet das Integralzeichen $\int$ ein *S* wie „Summe“ und $\mathrm{d}x$ meint die „Differenz im x-Wert“.



Die schraffierte Fläche stellt die vierte Obersumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar, der kreuzweise schraffierte Teil ihre Untersumme.

folgern, diese Ungleichungen aufsummieren, und die Mitte mit dem auch bereits bewiesenen Teil 2 des Satzes zu $\int_a^b f$ zusammenfassen. Damit sind beide Zeilen von Ungleichungen bewiesen. Nun ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig, für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert also $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Wählen wir N mit $(\frac{b-a}{N}) < \delta$ und nehmen dann $r \geq N$, so schwankt unsere Funktion f auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ höchstens um ε, mithin gilt $0 \leq \overline{S}^r(f) - \underline{S}^r(f) \leq \varepsilon(b - a)$ und damit $|S^r(f) - \int_a^b f| \leq \varepsilon(b - a)$. Die Proposition ist gezeigt. □

Beispiel 4.2.8.
$$\begin{aligned} \int_0^b x \, \mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty} \left(\tfrac{0}{r} + \tfrac{b}{r} + \tfrac{2b}{r} + \cdots \tfrac{(r-1)b}{r}\right) \tfrac{b}{r} \\ &= \lim_{r\to\infty} \tfrac{r(r-1)}{2} \cdot \tfrac{b^2}{r^2} \qquad \text{nach [GR] 1.1.1} \\ &= \tfrac{b^2}{2} \end{aligned}$$

Lemma 4.2.9 (Standardabschätzung für Integrale). *Gegeben $a \leq b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt die Abschätzung*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Beweis. Aus $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$. □

4.2.10 (**Integrale mit vertauschten Grenzen**). Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sind $a, b \in I$ gegeben mit $a > b$, so definieren wir $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ durch die Vorschrift

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

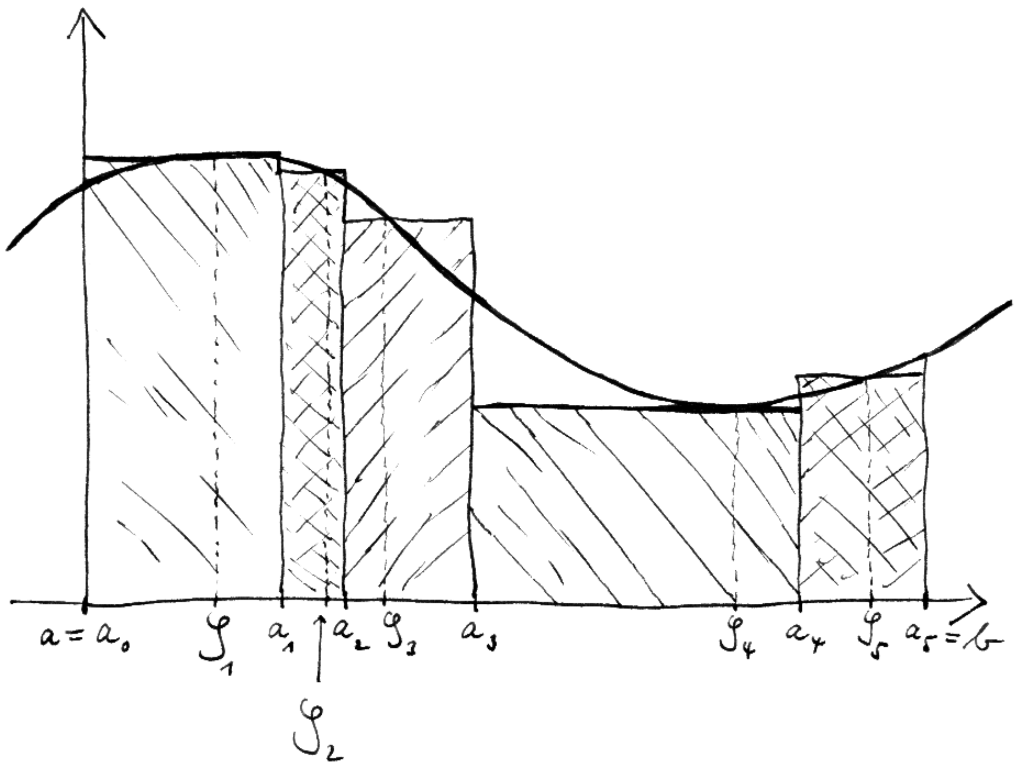
Mit dieser Konvention gilt dann für beliebige a, b, c in einem reellen Intervall I und jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ die Formel

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Übungen

Ergänzende Übung 4.2.11. Sei $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n = b$ eine **Unterteilung** des kompakten reellen Intervalls $[a, b]$. Gegeben eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bezeichnet man die Summen

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)(a_{i+1} - a_i)$$



Darstellung einer Riemannsumme im Sinne von 4.2.11.

mit beliebigen $\zeta_i \in [a_i, a_{i+1}]$ als die **Riemann-Summen** von f zur vorgegebenen Unterteilung. Die maximale Länge $\sup\{a_i - a_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ eines Teilintervalls heißt die **Feinheit** der Unterteilung. Man zeige: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß alle Riemann-Summen von f zu Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta$ vom Integral $\int f$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ haben.

Ergänzung 4.2.12. Allgemeiner heißt eine nicht notwendig stetige Funktion auf einem kompakten reellen Intervall $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **Riemann-integrierbar mit Integral** $\int f$, wenn die Bedingung vom Ende der vorhergehenden Übung erfüllt ist, daß es nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß alle Riemann-Summen von f zu Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta$ von $\int f$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ haben. Wir werden in diesem Text den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit vermeiden: Später wird eh das sehr viel stärkere Lebesgue-Integral eingeführt, und bis dahin reicht unser Integrationsbegriff für stetige Funktionen aus. Für ein vertieftes Studium der Analysis ist jedoch auch der Begriff der Riemann-Integrierbarkeit relevant.

Ergänzende Übung 4.2.13. Man zeige den **Mittelwertsatz der Integralrechnung**: Gegeben ein nichtleeres kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $\int f = (b - a)f(\xi)$. Gegeben eine weitere stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es sogar $\xi \in [a, b]$ mit $\int fg = f(\xi) \int g$.

Ergänzende Übung 4.2.14. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x, und **ungerade**, wenn gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle x. Man zeige für jede ungerade stetige Funktion und alle reellen r die Formel $\int_{-r}^{r} f = 0$.

4.3 Ableitung

Definition 4.3.1. Wir nennen eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ **halboffen**, wenn sie mit jedem Punkt auch ein ganzes Intervall umfaßt, das besagten Punkt enthält und nicht nur aus diesem einen Punkt besteht.

4.3.2 (**Terminologisches zu Intervallen**). Ein reelles Intervall ist halboffen im Sinne unserer Definition 4.3.1 genau dann, wenn es nicht aus einem einzigen Punkt besteht. In der Literatur wird der Begriff „halboffen“ meist abweichend verwendet für Intervalle, die weder offen noch kompakt sind, also für reelle Intervalle der Gestalt $(a, b]$ oder $[a, b)$. Bei uns heißen jedoch auch Intervalle der Gestalt $[a, b]$ mit $a < b$ halboffen, da sie eben halboffen sind als Teilmengen von $\mathbb{R}$ im Sinne der obigen Definition. Da aber der Begriff eines „halboffenen Intervalls“ schon so fest besetzt ist und da auch der Terminus „unendliches Intervall“ vermutlich eher als „Intervall unendlicher Länge“ verstanden wird, will ich stattdessen lieber von „nicht einpunktigen Intervallen“ oder im Fall, daß sie auch nicht leer sind, von **mehrpunktigen Intervallen** reden. So richtig gefällt mir das auch nicht, es hört sich so diskret an. Mir ist aber nichts Besseres eingefallen, und das Konzept wird uns so oft begegnen, daß es eine griffige Bezeichnung braucht.

Definition 4.3.3. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und $p \in D$ ein Punkt. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar bei p mit Ableitung** $b \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch $f'(p) = b$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(p) = b$ oder, wenn die Funktion $x \mapsto f(x)$ durch einen größeren Ausdruck in x gegeben ist, durch

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=p} f(x) = b$$

4.3.4. Jede nicht vertikale alias nicht zur y-Achse parallele Gerade in der Ebene ist die Lösungsmenge genau einer Gleichung der Gestalt $y = a + bx$. Die reelle Zahl b heißt in diesem Fall die **Steigung** unserer Gerade. Anschaulich bedeutet der **Differenzenquotient**

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

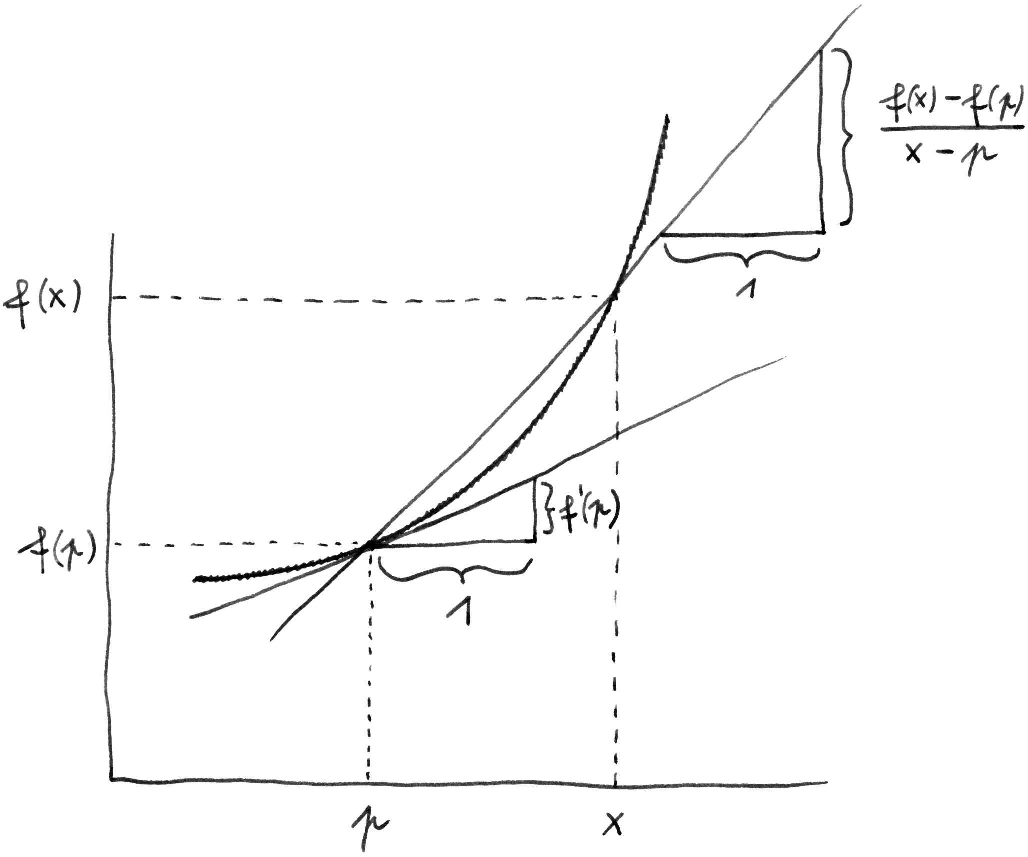
die Steigung der Gerade durch die Punkte $(p, f(p))$ und $(x, f(x))$. Diese Gerade heißt auch eine **Sekante**, lateinisch für „Schneidende“, da sie eben den Graphen unserer Funktion in den beiden besagten Punkten schneidet. Der Grenzwert $f'(p)$ der Sekantensteigungen bedeutet anschaulich die Steigung der **Tangente**, lateinisch für „Berührende“, an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$. Die Umkehrung dieser Anschauung liefert auch eine präzise Definition besagter Tangente als der Gerade durch den Punkt $(p, f(p))$ mit der Steigung $f'(p)$.

4.3.5 (**Differenzierbarkeit, Umformulierungen der Definition**). Wir geben noch zwei Umformulierungen der Definition der Differenzierbarkeit. Ist $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und $p \in D$, so ist nach 2.5.6 eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung $f'(p) = b$ genau dann, wenn es eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt, die stetig ist bei p mit Funktionswert $\varphi(p) = b$ derart, daß für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(p) + (x - p)\varphi(x)$$

Anschaulich bedeutet diese Forderung, daß die sogenannte „Sekantensteigungsfunktion“ $\varphi(x) = (f(x) - f(p))/(x - p)$ durch die Vorschrift $\varphi(p) = b$ stetig an die Stelle p fortgesetzt werden kann. In nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung b genau dann, wenn gilt

$$f(p + h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$



Eine Sekantensteigung und die Tangentensteigung der durch den gezahnten Graphen dargestellten Funktion für eine Funktion ε, die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Hierbei ist zu verstehen, daß die Funktion ε definiert sein soll auf der Menge aller h mit $h + p \in D$. Diese Formulierung des Ableitungsbegriffs hat den Vorteil, besonders gut zum Ausdruck zu bringen, daß für festes p und kleines h der Ausdruck $f(p) + bh$ eine gute Approximation von $f(p + h)$ ist.

Beispiele 4.3.6. Eine konstante Funktion auf einer halboffenen Menge von reellen Zahlen ist bei jedem Punkt besagter Menge differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ hat bei jedem Punkt p die Ableitung $\mathrm{id}'(p) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}(p) = 1$.

Lemma 4.3.7. *Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist differenzierbar bei jedem Punkt von $\mathbb{R}^\times$ und ihre Ableitung bei einer Stelle $p \in \mathbb{R}^\times$ ist $-\frac{1}{p^2}$.*

Beweis. Wir rechnen $\lim_{x \to p} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{-1}{xp} = -\frac{1}{p^2}$ nach 2.5.8. □

Lemma 4.3.8. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ halboffen. Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $p \in D$, so ist f stetig bei p.*

Beweis. Das folgt sofort aus der vorhergehenden Proposition 4.3.5. □

Definition 4.3.9. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definiert auf einem offenen Intervall um einen Punkt $p \in (a, b)$ und existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \searrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

im Sinne von 2.5.25, so nennen wir sie die **linksseitige** bzw. die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle p.

Übungen

Ergänzende Übung 4.3.10. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definiert auf einem offenen Intervall um einen Punkt $p \in (a, b)$. Genau dann ist f differenzierbar bei p, wenn dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung existieren und übereinstimmen.

Beispiel 4.3.11. Man erkennt so zum Beispiel, daß der Absolutbetrag $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ nicht differenzierbar ist bei $p = 0$, da dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung zwar existieren, aber nicht übereinstimmen.

4.4 Ableitungsregeln

Proposition 4.4.1. *Seien $D \subset \mathbb{R}$ halboffen und $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei einem Punkt $p \in D$. So sind auch die Funktionen $f + g$ und fg differenzierbar bei p und es gilt*

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \textit{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

Beweis. Wir schreiben wie in 4.3.5

$$\begin{array}{rcccccc} f(p+h) & = & f(p) & + & f'(p)h & + & \varepsilon(h)h \\ g(p+h) & = & g(p) & + & g'(p)h & + & \hat{\varepsilon}(h)h \end{array}$$

für Funktionen $\varepsilon, \hat{\varepsilon}$, die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Lassen wir der Übersichtlichkeit halber alle (p) weg, so liest sich das

$$\begin{array}{rcccccc} f(p+h) & = & f & + & f'h & + & \varepsilon(h)h \\ g(p+h) & = & g & + & g'h & + & \hat{\varepsilon}(h)h \end{array}$$

Durch Addieren beziehungsweise Multiplizieren dieser Gleichungen erhalten wir dann

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(p+h) & = & (f+g)(p) + [f'+g']\,h \;\; + [\varepsilon(h)+\hat{\varepsilon}(h)]\,h \\ (fg)(p+h) & = & (fg)(p) + [f'g + fg']\,h \\ & & + [\varepsilon(h)g + f\hat{\varepsilon}(h) + (f'+\varepsilon(h))(g'+\hat{\varepsilon}(h))h]\,h \end{array}$$

Nach unseren Kenntnissen über stetige Funktionen steht aber in der letzten eckigen Klammer auf der rechten Seite jeder dieser Gleichungen eine Funktion, die stetig ist bei $h = 0$ und die dort den Wert Null annimmt. □

Definition 4.4.2. Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert auf einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ und differenzierbar an jedem Punkt von D, so nennen wir f **differenzierbar auf** D und nennen die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$, $p \mapsto f'(p)$ ihre **Ableitung**.

Beispiel 4.4.3. Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^\times$ mit Ableitung $-1/x^2$. Sind f und g differenzierbar, so auch $f+g$ und fg und für ihre Ableitungen gelten die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Korollar 4.4.4 (Ableiten ganzzahliger Potenzen). *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und unter der Voraussetzung $x \neq 0$ im Fall $n \leq 0$ ist die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^n$ die Funktion $x \mapsto nx^{n-1}$.*

4.4.5. Im Fall $n = 0$ ist die Ableitung der konstanten Funktion $x^0 = 1$ natürlich überall definiert und Null, kann aber nur für $x \neq 0$ in der Form $0x^{-1}$ geschrieben werden.

Beweis. Man zeigt das durch vollständige Induktion über n separat für $n \geq 0$ und $n \leq -1$. □

Satz 4.4.6 (Kettenregel). *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ halboffene Teilmengen und $f : D \to \mathbb{R}$ sowie $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen und es gelte $f(D) \subset E$. Sei f differenzierbar bei p und g differenzierbar bei $f(p)$. So ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

Beweis. Der besseren Übersichtlichkeit halber benutzen wir hier Großbuchstaben für die Ableitungen und setzen $f'(p) = L$ und $g'(f(p)) = M$. Wir haben

$$\begin{array}{rcl} f(p+h) & = & f(p) + Lh + \varepsilon(h)h \\ g(f(p)+k) & = & g(f(p)) + Mk + \hat{\varepsilon}(k)k \end{array}$$

für Funktionen ε und $\hat{\varepsilon}$, die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Wir erhalten durch Einsetzen von $Lh + \varepsilon(h)h$ für k sofort

$$\begin{array}{rcl} g(f(p+h)) & = & g(f(p) + Lh + \varepsilon(h)h) \\ & = & g(f(p)) + MLh + M\varepsilon(h)h + \hat{\varepsilon}(Lh + \varepsilon(h)h)(L + \varepsilon(h))h \end{array}$$

Es ist nun aber offensichtlich, daß sich hier die Summe der Terme ab dem dritten Summanden einschließlich in der Gestalt $\eta(h)h$ schreiben läßt für eine Funktion η, die stetig ist bei Null und die dort verschwindet, und wir erhalten

$$(g \circ f)(p+h) = (g \circ f)(p) + MLh + \eta(h)h$$ □

Proposition 4.4.7 (Quotientenregel). *Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion ohne Nullstelle und $p \in D$ ein Punkt.*

1. *Ist f differenzierbar bei p, so ist auch $1/f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/f(x)$ differenzierbar bei p und hat dort die Ableitung $-f'(p)/f(p)^2$;*

2. *Ist zusätzlich $g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p, so ist auch g/f differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

Beweis. Teil 1 folgt sofort aus 4.3.7 mit der Kettenregel. Teil 2 folgt aus Teil 1 mit der Produktregel. □

4.4.8. Ist $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und sind $g, f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und hat f keine Nullstelle auf D, so ist mithin auch g/f differenzierbar auf D mit Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

Lemma 4.4.9 (Ableitung der Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion ist ihre eigene Ableitung, in Formeln* $\exp'(p) = \exp(p)\ \forall p \in \mathbb{R}$.

Beweis. In 5.1.15 werden wir lernen, daß man „Potenzreihen gliedweise differenzieren darf“. Da wir das aber bis jetzt noch nicht wissen, müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir bestimmen zunächst die Ableitung der Exponentialfunktion an der Stelle $p = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \exp'(0) &= \lim_{x\to 0} \tfrac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{x^{i-1}}{i!} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(1 + x \sum_{i=2}^{\infty} \tfrac{x^{i-2}}{i!}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

nach 2.5.21 und 2.5.19, da ja $\left|\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!}\right|$ für $|x| \le 1$ beschränkt ist durch die Euler'sche Zahl e. Um $\exp'(p)$ für beliebiges p zu bestimmen, rechnen wir

$$\begin{aligned} \exp'(p) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(p+h)-\exp(p)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} \exp(p) \\ &= \exp(p) \end{aligned}$$

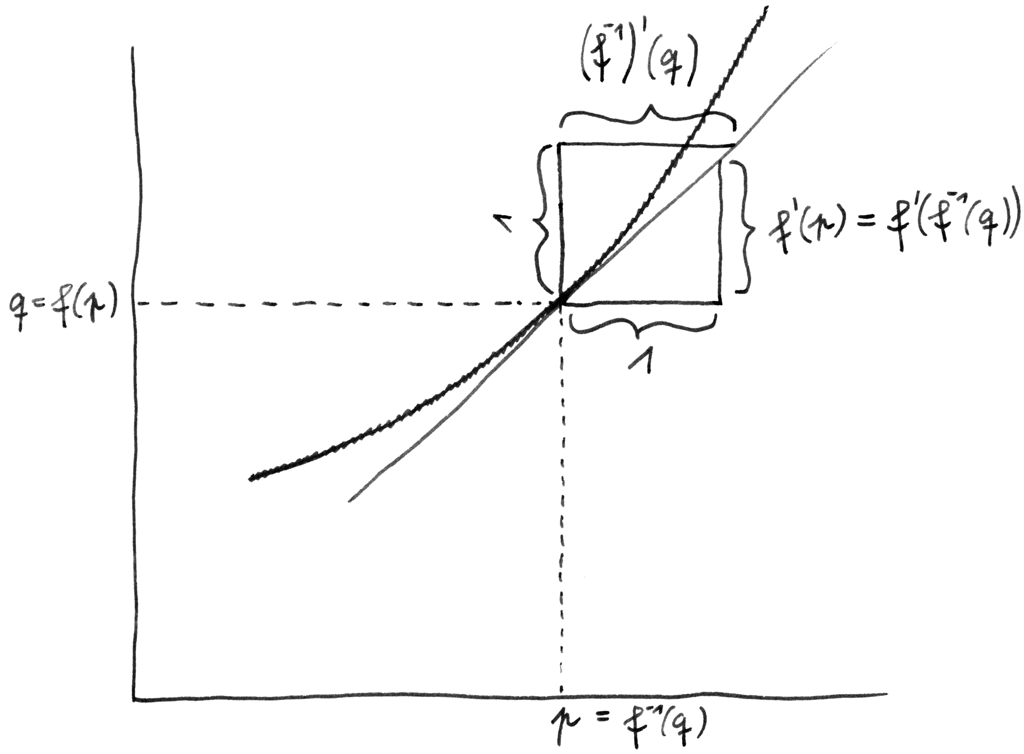
wo wir im letzten Schritt den schon behandelten Fall $p = 0$ verwenden und formal im ersten Schritt 2.5.20 benutzen, um den Grenzwert $x \to p$ in einen Grenzwert $h \to 0$ umzuformen. □

4.4.10 (**Ableitung der trigonometrischen Funktionen**). Ganz genau wie im vorhergehenden Beweis zeigt man, daß Sinus und Cosinus bei Null differenzierbar sind mit der Ableitung $\sin'(0) = 1$ und $\cos'(0) = 0$. Mit der Additionsformel $\sin(t + h) = \sin(t)\cos(h) + \cos(t)\sin(h)$ folgt $\sin' = \cos$ und mit der anderen Additionsformel $\cos' = -\sin$.

Satz 4.4.11 (Ableitung von Umkehrfunktionen). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton, stetig auf I und differenzierbar bei $p \in I$ mit Ableitung $f'(p) \neq 0$. So ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $q = f(p)$ mit Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

Beweis. Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) - f(p) = (x - p)\varphi(x)$ und $\varphi(p) = f'(p)$. Setzen wir hier $x = f^{-1}(y)$, so ist $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(I) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $(y - q)\psi(y) = f^{-1}(y) - f^{-1}(q)$ und $\psi(q) = 1/f'(p)$. □



Veranschaulichung der Formel 4.4.11 für die Ableitung von Umkehrfunktionen

Beispiel 4.4.12. Die **Ableitung des Logarithmus** ist mithin

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$

Damit ergibt sich für alle $a \in \mathbb{R}$ die **Ableitung der allgemeinen Potenzen**, also der Funktionen $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$, zu $x \mapsto ax^{a-1}$. In der Tat, nach Definition gilt ja $x^a = \exp(a \log x)$, die Ableitung wird also $a\frac{1}{x} \exp(a \log x) = ax^{a-1}$.

Beispiel 4.4.13. Der Arcussinus ist nach 4.4.11 differenzierbar auf $(-1, 1)$ und seine Ableitung ergibt sich mit unserer Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion zu

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= 1/(\cos(\arcsin x)) \\ &= 1/\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \\ &= 1/\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Beispiel 4.4.14. Die Ableitung des Tangens ist $\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$. Die Ableitung von $\arctan$ ergibt sich mit 4.4.11 zu

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

Lemma 4.4.15. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar.

Beweis. Wir betrachten allgemeiner für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-n} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

und zeigen, daß sie differenzierbar ist mit Ableitung $f_n' = -nf_{n+1} + f_{n+2}$. Damit sind wir dann natürlich fertig. Das einzige Problem ist die Ableitung an der Stelle $p = 0$, wo wir nachweisen müssen, daß die Sekantensteigungen „von rechts" auch gegen Null streben, daß also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^{-n-1} e^{-1/x} = 0$$

Nun wissen wir aber nach der Definition von $\exp$, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt $\exp(x) > x^m/m!$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt also $\exp(1/x) > x^{-n-2}/(n+2)!$ und wir folgern $0 < x^{-n-1} e^{-1/x} < (n+2)!\, x$ für $x > 0$. $\square$

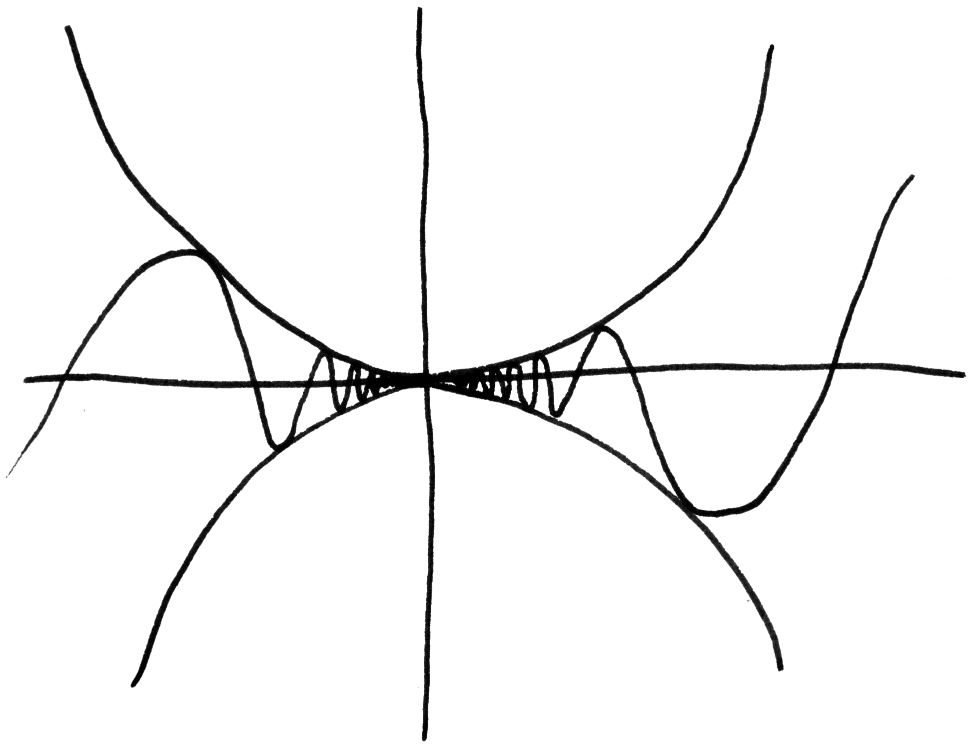


Illustration zu 4.4.16. Der Graph der Funktion ist zwischen zwei parabolischen Backen eingezwängt und hat deshalb am Ursprung Null Grenzwert der Sekantensteigungen, wird aber nah vom Ursprung beliebig steil.

Übungen

Ergänzende Übung 4.4.16. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber ihre Ableitung ist nicht stetig beim Nullpunkt.

Übung 4.4.17. Gegeben $D \subset \mathbb{R}$ halboffen nennen wir eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar, wenn ihr Real- und Imaginärteil differenzierbar sind, und setzen dann $f' := (\operatorname{Re} f)' + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)'$. Man zeige für differenzierbare komplexwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen die Summenregel $(f+g)' = f' + g'$, die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ und die Regel für die Ableitung des Kehrwerts $(1/f)' = -f'/f^2$.

Übung 4.4.18. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R} \backslash \lambda \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (t-\lambda)^m$ differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto m(t-\lambda)^{m-1}$.

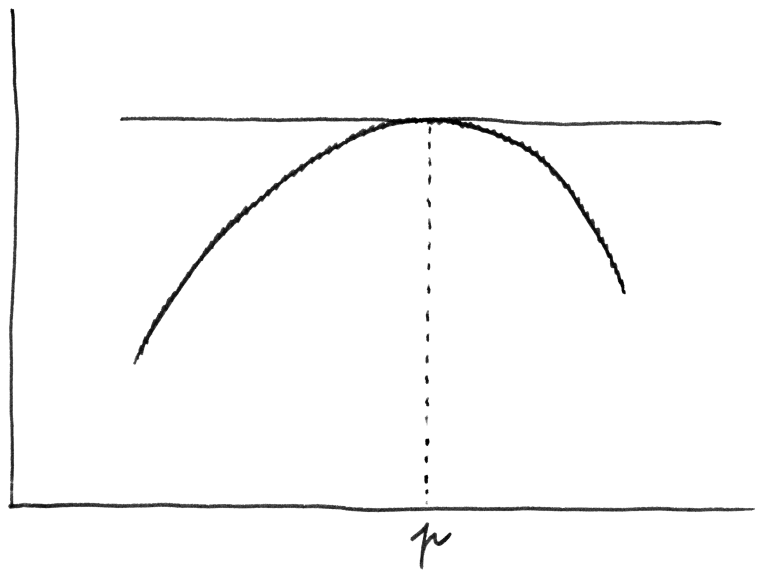
4.5 Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung

Definition 4.5.1. Eine Teilmenge der reellen Zahlen oder auch der erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$ heißt **offen**, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist. In Formeln ist demnach eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ offen genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subset U$.

Satz 4.5.2 (**Notwendige Bedingung für ein Extremum**). *Nimmt eine reellwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge der reellen Zahlen definiert ist, an einem Punkt dieser offenen Teilmenge ihr Maximum oder ihr Minimum an, und ist sie dort auch differenzierbar, so verschwindet an diesem Punkt ihre Ableitung.*

4.5.3. Die Bedingung, unsere Teilmenge sei offen, ist an dieser Stelle wesentlich: Gegeben reelle Zahlen $a < b$ nimmt etwa die Funktion $x \mapsto x$ auf dem Intervall $[a, b]$ ihr Minimum bei a und ihr Maximum bei b an, aber die Ableitung unserer Funktion verschwindet weder bei a noch bei b. Für Minima oder Maxima einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kommen ganz allgemein nach unserem Satz nur in Frage: Einerseits Endpunkte des Intervalls, und andererseits die Punkte im Innern des Intervalls, an denen die Ableitung verschwindet. Mit etwas Glück können wir unter diesen Punkten dann durch Ausprobieren herauskriegen, wo das Minimum und das Maximum wirklich angenommen werden.

Beweis. Bezeichne $U \subset \mathbb{R}$ unsere offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ unsere Funktion. Nimmt f ein Maximum an bei $p \in U$, so gilt für die Sekantensteigungsfunktion $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ offensichtlich $\varphi(x) \geq 0$ für $x < p$ und $\varphi(x) \leq 0$ für $x > p$. Wenn der Grenzwert der Sekantensteigungen existiert, so folgt mit **??** notwendig $0 \leq \lim_{x \nearrow p} \varphi(x) = \lim_{x \to p} \varphi(x) = \lim_{x \searrow p} \varphi(x) \leq 0$ und damit ist



Veranschaulichung der notwendigen Bedingung für ein Maximum 4.5.2

dann dieser Grenzwert Null. Nimmt f ein Minimum an bei p, so argumentiert man analog. $\square$

Beispiel 4.5.4. Das **Brechungsgesetz** behauptet, daß das Verhältnis vom Sinus des Eintrittswinkels zum Sinus des Austrittswinkels eines Lichtstrahls beim Übergang zwischen zwei Medien, sagen wir Luft und Wasser, konstant ist. Wir leiten es nun ab aus dem sogenannten **Fresnel'schen Prinzip**, nach dem ein Lichtstrahl „stets den schnellsten Weg nimmt". Ist sagen wir die Lichtgeschwindigkeit in Wasser das γ-fache der Lichtgeschwindigkeit in Luft, so sollte nach diesem Prinzip der Lichtstrahl mit den Bezeichnungen aus nebenstehendem Bild bei dem x in das Wasser eintauchen, für das der Ausdruck

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \gamma\sqrt{b^2 + (L - x)^2}$$

minimal wird. Ableiten liefert dafür die notwendige Bedingung

$$\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \gamma\frac{-2(L - x)}{2\sqrt{b^2 + (L - x)^2}} = 0$$

und damit steht das Brechnungsgesetz $\sin\varphi = \gamma\sin\varphi'$ auch schon da.

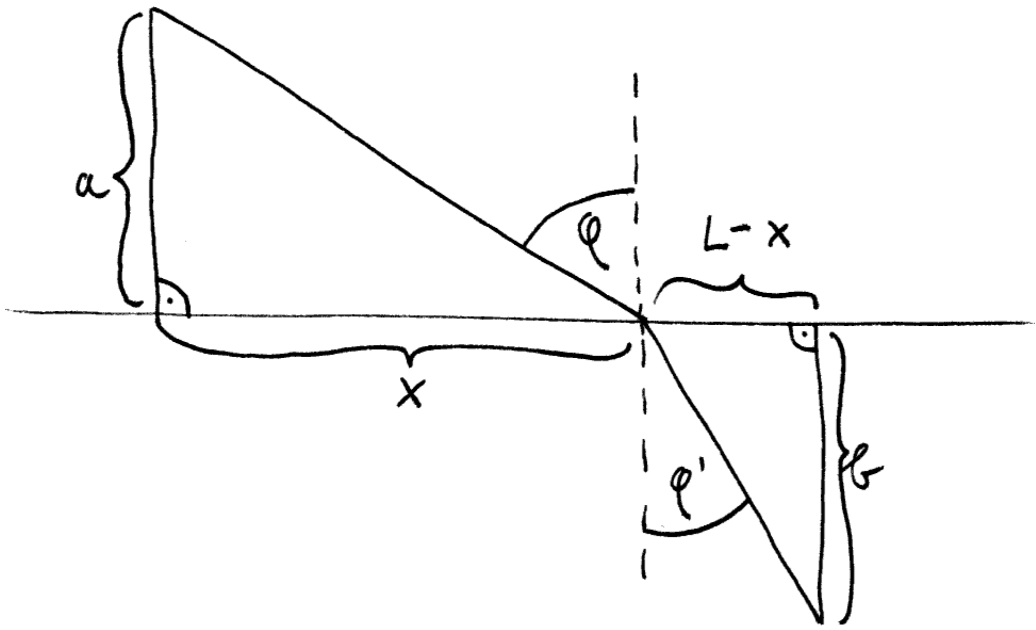
Satz 4.5.5 (von Rolle). *Seien $a < b$ aus $\overline{\mathbb{R}}$ gegeben und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). Gilt dann $f(a) = f(b)$, so gibt es $p \in (a, b)$ mit $f'(p) = 0$.*

Beweis. Nach 4.1.4 gibt es Punkte $p, q \in [a, b]$, an denen f sein Maximum und sein Minimum annimmt. Liegt einer dieser Punkte im Innern (a, b) unseres Intervalls, so verschwindet dort die Ableitung nach dem vorhergehenden Satz und wir sind fertig. Nimmt f sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand des Intervalls an, so ist die Funktion f wegen unserer Annahme $f(a) = f(b)$ konstant und wir sind auch fertig. $\square$

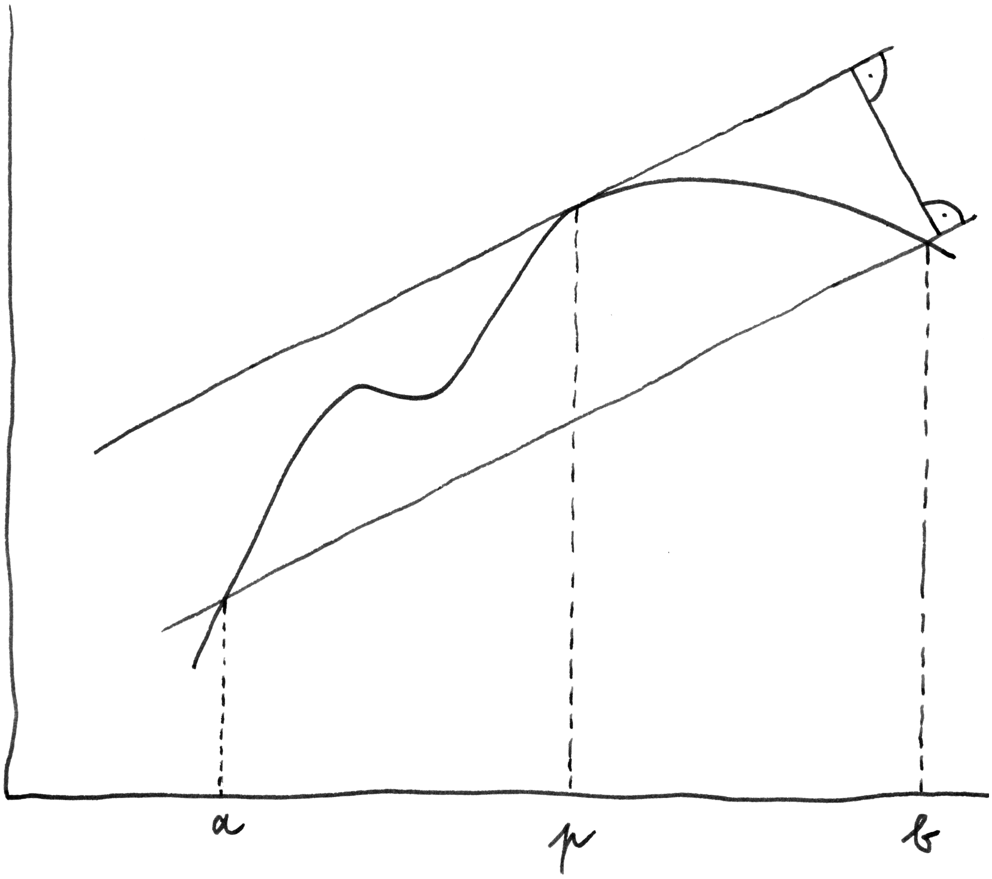
Korollar 4.5.6 (Mittelwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem ganzen kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). So gibt es $p \in (a, b)$ mit*

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis. Man wende den vorhergehenden Satz von Rolle 4.5.5 an auf die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, die aus f entsteht durch „Subtraktion der globalen Sekanten". $\square$



Zum Brechungsgesetz



Veranschaulichung des Mittelwertsatzes 4.5.6

Satz 4.5.7 (Erste Ableitung und Monotonie). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. So gilt*

$$\begin{array}{rcl} f' > 0 & \Rightarrow & f \textit{ wächst streng monoton} \\ f' \geq 0 & \Leftrightarrow & f \textit{ wächst monoton} \\ f' < 0 & \Rightarrow & f \textit{ fällt streng monoton} \\ f' \leq 0 & \Leftrightarrow & f \textit{ fällt monoton} \\ f' = 0 & \Leftrightarrow & f \textit{ ist konstant} \end{array}$$

Beweis. Es reicht, die beiden ersten Aussagen zu zeigen. Wächst f nicht streng monoton, so gibt es $a < b$ mit $f(a) \geq f(b)$ und nach dem Mittelwertsatz finden wir $p \in (a, b)$ mit

$$f'(p) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq 0$$

Wächst f nicht monoton, so finden wir in derselben Weise $p \in I$ mit $f'(p) < 0$. Das zeigt schon mal $\Rightarrow$. Umgekehrt folgt aus f monoton wachsend, daß alle Sekantensteigungen nichtnegativ sind, und damit auch alle Grenzwerte von Sekantensteigungen. □

Korollar 4.5.8 (Funktionen, die ihre eigene Ableitung sind). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall. Genau dann stimmt eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ überein mit ihrer eigenen Ableitung, wenn sie ein Vielfaches der Exponentialfunktion ist, in Formeln*

$$f' = f \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} \textit{ mit } f(x) = c \exp(x)$$

4.5.9. Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^{\times} \to \mathbb{R}$ mit $f' = f$ muß keineswegs ein Vielfaches der Exponentialfunktion sein. Zum Beispiel wäre die Funktion f mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 5 \exp(x)$ für $x > 0$ auch eine Möglichkeit. Aber gut, $\mathbb{R}^{\times}$ ist ja auch kein Intervall.

Beweis. Bezeichne $I \subset \mathbb{R}$ unser mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ unsere differenzierbare Funktion mit $f = f'$. Die Ableitung der Funktion $f(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ ergibt sich mit der Produktregel zu $f'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - f(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, mithin ist die Funktion $f(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ konstant, sagen wir mit einzigem Funktionswert c, und wir folgern $f(x) = c\,\mathrm{e}^{x} \ \forall x \in I$. □

Satz 4.5.10 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum). *Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in D$ ein Punkt mit $f'(p) = 0$. Sei die Ableitung f' von f differenzierbar bei p.*

1. *Gilt $f''(p) > 0$, so besitzt f ein* **isoliertes lokales Minimum** *bei p, als da heißt, es gibt $r > 0$ derart, daß gilt $f(q) > f(p)$ für alle $q \in D$ mit $0 < |q - p| < r$;*

2. *Gilt* $f''(p) < 0$, *so besitzt* f *ein* **isoliertes lokales Maximum** *bei* p.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $D = I$ ein Intervall. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(p) + (x-p)\varphi(x) \\ &= (x-p)\varphi(x) \end{aligned}$$

mit φ stetig in p und $\varphi(p) = f''(p) > 0$. So gibt also $r > 0$ mit $\varphi(q) > 0$ für $q \in I \cap (p-r, p+r)$, und wir folgern $f'(q) < 0$ für $q \in I \cap (p-r, p)$ und $f'(q) > 0$ für $q \in I \cap (p, p+r)$. Unseren Funktion f fällt also streng monoton auf $I \cap (p-r, p)$ und wächst streng monoton auf $I \cap (p, p+r)$. Der andere Fall $f''(p) < 0$ wird analog behandelt. □

Definition 4.5.11. Wir nennen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I **konvex** beziehungsweise **konkav**, wenn ihr Graph unter beziehungsweise über jeder seiner Sekanten liegt, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

beziehungsweise $\geq$ für konkave Funktionen.

4.5.12. Man zeigt leicht, daß die Bedingung der Konvexität gleichbedeutend ist zu

$$f(tx + (1-t)z) \leq tf(x) + (1-t)f(z) \quad \forall t \in [0,1]$$

Satz 4.5.13 (Zweite Ableitung und Konvexität). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein mehrpunktiges Intervall und sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine zweimal differenzierbare Funktion. So gilt*

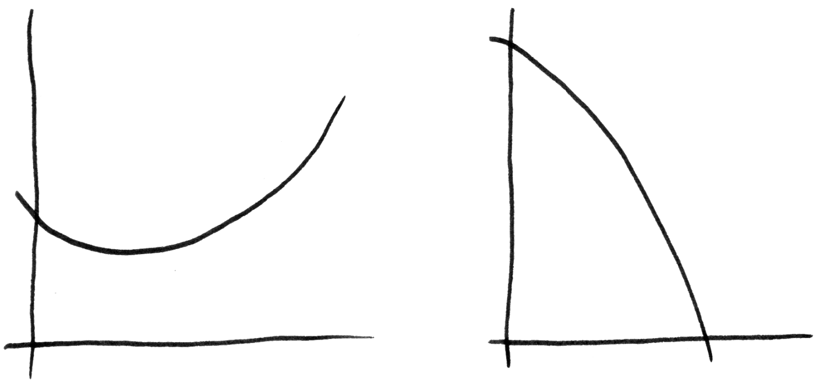
$$\begin{aligned} f \text{ ist konvex} &\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ f \text{ ist konkav} &\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage. Ist f nicht konvex, so gibt es x, y, z mit $x < y < z$ aber

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Nach dem Mittelwertsatz finden wir dann aber $\xi < \zeta$ mit $f'(\xi) > f'(\zeta)$ und bei nochmaligem Anwenden η mit $f''(\eta) < 0$. Ist umgekehrt f konvex, so reicht es nach 4.5.7 zu zeigen, daß f' monoton wächst. Kürzen wir die Steigung der Sekante durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ ab mit $s_{xy} := \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, so impliziert die Konvexität die Ungleichungskette

$$s_{xy} \leq s_{xz} \leq s_{yz}$$



Links der Graph einer konvexen, rechts der einer konkaven Funktion

Hier ist $s_{xy} \leq s_{yz}$ eine direkte Konsequenz der Konvexität, und da sicher gilt $(x-y)s_{xy} + (y-z)s_{yz} = (x-z)s_{xz}$, liegt s_{xz} als ein „gewichtetes Mittel" zwischen s_{xy} und s_{yz}. Unsere Ungleichungskette schreiben wir aus zu

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

Die Sekantensteigungsfunktionen $y \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ und $y \mapsto \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ wachsen insbesondere monoton auf $(x, z]$ beziehungsweise $[x, z)$ und im Grenzwert folgt

$$f'(x) \leq \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq f'(z)$$ □

Definition 4.5.14. Wir nennen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I **streng konvex** beziehungsweise **streng konkav**, wenn ihr Graph echt unter beziehungsweise echt über jeder Sekante liegt, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

beziehungsweise $>$ für streng konkave Funktionen.

Satz 4.5.15. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. So gilt*

$$\begin{array}{lcl} f \text{ ist streng konvex} & \Leftarrow & f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \\ f \text{ ist streng konkav} & \Leftarrow & f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \end{array}$$

Beweis. Übung. □

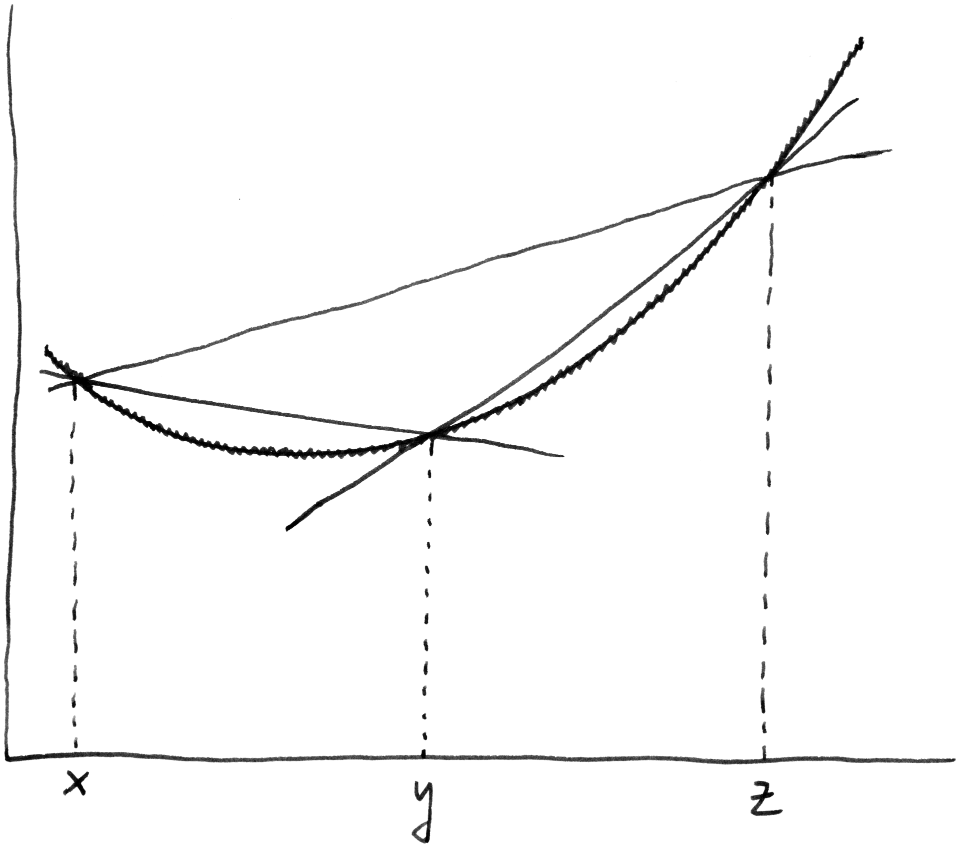
Übungen

Übung 4.5.16. An welchen Stellen nimmt die Funktion $[-1, 2] \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto |2 - x^2|$ ihr Minimum und Maximum an?

Ergänzende Übung 4.5.17. Bei welchem Verhältnis zwischen Durchmesser und Höhe umfaßt eine Konservendose mit fest vorgegebener Oberfläche das größtmögliche Volumen?

Übung 4.5.18. Eine differenzierbare Funktion auf einem mehrpunktigen Intervall, deren Ableitung beschränkt ist, ist gleichmäßig stetig.

Übung 4.5.19. Gegeben eine differenzierbare Funktion auf einem mehrpunktigen Intervall ist das Bild des fraglichen Intervalls unter der Ableitung unserer Funktion wieder ein Intervall. Hinweis: Mittelwertsatz. Man beachte, daß die Stetigkeit der Ableitung nicht vorausgesetzt wird.



Veranschaulichung unserer Ungleichungskette für die Sekantensteigungen bei konvexen Funktionen aus dem Beweis von 4.5.13

Übung 4.5.20. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und löst die Differentialgleichung $f' = \alpha f$, so gilt $f(x) = f(0)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Übung 4.5.21 (**Funktionen, die mindestens ihre eigene Ableitung sind**). Man zeige: Ist $f : [0, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [0, b)$, so folgt $f(t) \leq f(0)\mathrm{e}^t$ für alle $t \in [0, b)$. Ist allgemeiner $f : [0, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, daß gilt $f'(t) \leq \alpha f(t)$ für alle $t \in [0, b)$, so folgt $f(t) \leq f(0)\mathrm{e}^{\alpha t}$ für alle $t \in [0, b)$.

Übung 4.5.22. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Man zeige, daß dann f in I höchstens eine Nullstelle haben kann, und daß f links von dieser Nullstelle positiv und rechts davon negativ sein muß.

Ergänzende Übung 4.5.23. Man zeige, daß ein Punkt $(x, y) \in (0, 1)^2$ genau dann auf einem Geradensegment der Länge Eins mit einem Ende auf der x-Achse und dem anderen Ende auf der y-Achse liegt, wenn gilt $y^{2/3} + x^{2/3} \leq 1$. Hinweis: Man halte x fest und berechne für alle $a \in [x, 1]$ die Höhe $h_x(a)$ an der Stelle x eines Brettes der Länge 1, das bei a auf der x-Achse steht und an die y-Achse angelehnt ist. Dann bestimme man das Maximum dieser Höhen bei festem x und variablem α.

Übung 4.5.24. Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zeige man die **Young'sche Ungleichung** $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$. Hinweis: Man gehe von der Konvexität der Exponentialfunktion aus.

Übung 4.5.25. Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p \geq 1$ zeige man die Ungleichung $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$. Hinweis: Man gehe von der Konvexität der Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$ aus.

Ergänzende Übung 4.5.26. Für $P \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen gilt

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p} = \infty$$

In der Tat folgt aus $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und der Entwicklung $(1 - 1/p)^{-1} = (1 + p^{-1} + p^{-2} \dots)$ in eine geometrische Reihe, daß die Menge der partiellen Produkte des unendlichen Produkts $\prod_{p \in P}(1 - 1/p)^{-1}$ nicht beschränkt sein kann. Nun wende man den Logarithmus an und schätze ab.

4.6 Regeln von de l'Hospital

Satz 4.6.1 (Regeln von de l'Hospital). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und p ein Häufungspunkt zu I in $\overline{\mathbb{R}}$. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare*

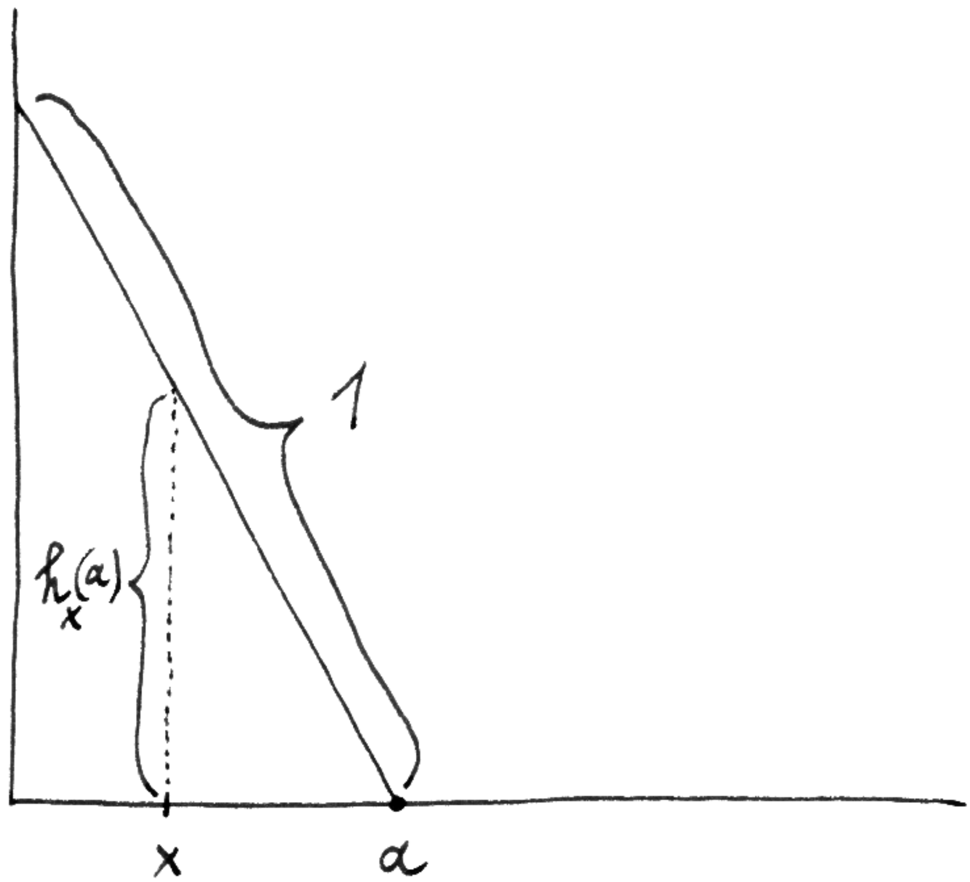


Illustration zu Übung 4.5.23.

Funktionen derart, daß gilt

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad \lim_{x\to p} |g(x)| = \infty.$$

Haben g und g' keine Nullstelle auf $I \backslash p$ und existiert der Grenzwert des Quotienten der Ableitungen $\lim_{x\to p}(f'(x)/g'(x))$ in $\overline{\mathbb{R}}$, so existiert auch der Grenzwert des Quotienten der Funktionen $\lim_{x\to p}(f(x)/g(x))$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und diese beiden Grenzwerte stimmen überein, in Formeln

$$\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to p}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit folgendem

Lemma 4.6.2 (Allgemeiner Mittelwertsatz). *Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ gegeben und seien f, g stetige reellwertige Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a, b]$, die differenzierbar sind auf dem offenen Intervall (a, b). So gibt es $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi)(g(a) - g(b)) = g'(\xi)(f(a) - f(b))$$

4.6.3. Ich kann für diesen Satz leider keine Anschauung anbieten. Verschwindet g' nirgends auf (a, b), so gilt $g(a) \neq g(b)$ nach dem Satz von Rolle 4.5.5 und wir können unsere Gleichung schreiben in der Form

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

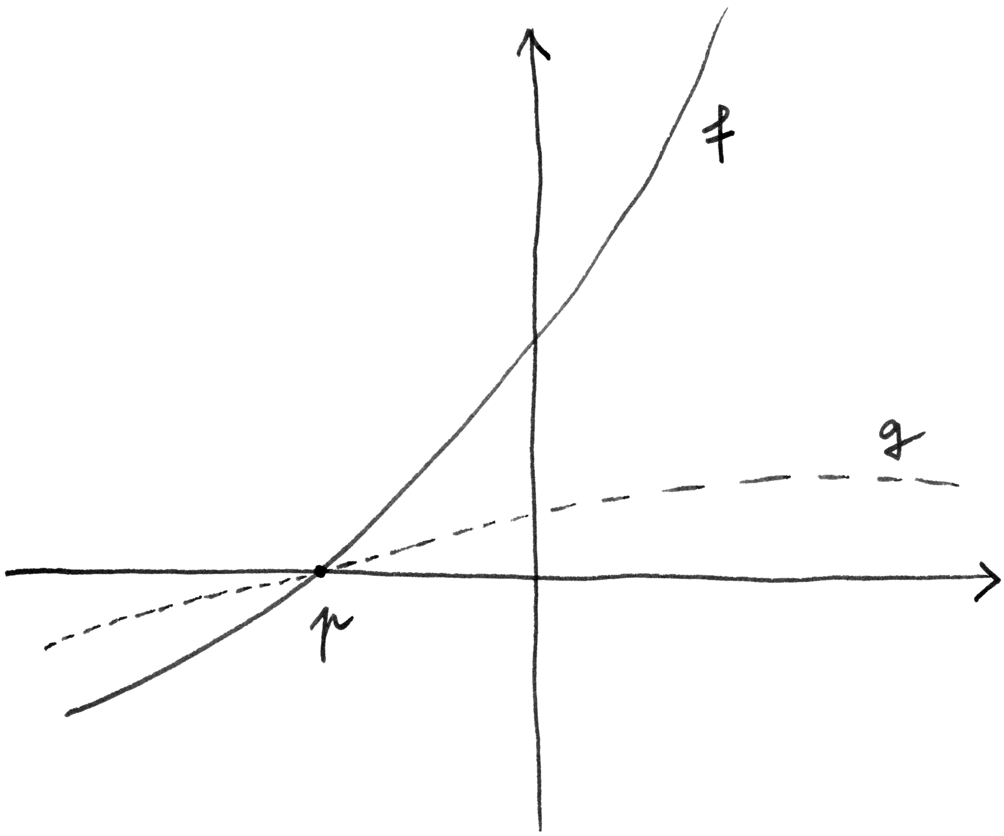
Ist also $g(x) = x$, so erhalten wir unseren Mittelwertsatz 4.5.6 als Spezialfall. Der allgemeine Mittelwertsatz wird in diesen Vorlesungen nur beim Beweis der Regeln von de l'Hospital eine Rolle spielen, weshalb ich ihm auch nur den Status eines Lemmas eingeräumt habe.

Beweis. Man wende den Satz von Rolle 4.5.5 an auf die Funktion

$$F(x) := f(x)\,(g(a)) - g(b)) \; - g(x)\,(f(a) - f(b)) \qquad \square$$

Jetzt zeigen wir die Regeln von de l'Hospital. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p \notin I$ annehmen, indem wir sonst I an der Stelle p in zwei Teile zerschneiden und den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert bei p getrennt betrachten. Für jede Umgebung W des Grenzwerts

$$q = \lim_{x\to p} f'(x)/g'(x)$$



Veranschaulichung der Regel von de l'Hospital 4.6.1 im Fall $p \in \mathbb{R}$ unter der Annahme, daß beide Funktionen bei p nach Null streben. Es scheint mir anschaulich klar, daß der Grenzwert des Quotienten sich nicht ändert, wenn wir beide Funktionen durch ihre beste lineare Approximation bei p ersetzen, und das ist auch genau die anschauliche Bedeutung der Regel von de l'Hospital.

finden wir per definitionem eine Intervallumgebung V von p mit der Eigenschaft $\xi \in I \cap V \Rightarrow f'(\xi)/g'(\xi) \in W$. Für beliebige $a, b \in I \cap V$ mit $a \neq b$ gilt weiter $g(a) \neq g(b)$, da nach Annahme die Ableitung von g keine Nullstelle auf $I \backslash p$ hat, und aus dem allgemeinen Mittelwertsatz folgt

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} \in W \quad \text{für alle } a, b \in I \cap V \text{mit } a \neq b.$$

Von nun an müssen wir die beiden Fälle im Satz getrennt weiterbehandeln. Zunächst nehmen wir an, es gelte $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0$. Ist W ein kompaktes Intervall, so folgt $f(a)/g(a) \in W$ sofort, indem wir a festhalten, b gegen p streben lassen und uns an die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert erinnern. Die Behauptung im ersten Fall folgt dann, da für jeden Punkt seine kompakten Intervallumgebungen ein Fundamentalsystem von Umgebungen bilden. Jetzt behandeln wir noch den Fall $\lim_{x \to p} |g(x)| = \infty$. Dafür schreiben wir unseren Quotienten um zu

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f(b)/g(b) - f(a)/g(b)}{1 - g(a)/g(b)}$$

und folgern unmittelbar

$$\frac{f(b)}{g(b)} \in (1 - g(a)/g(b))W + f(a)/g(b) \quad \text{für alle } a, b \in I \cap V \text{mit } a \neq b.$$

Ist nun $a \in I \cap V$ fest gewählt, so finden wir für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ eine Umgebung U_ε von p derart, daß gilt $b \in U_\varepsilon \cap I \Rightarrow |g(a)/g(b)| < \varepsilon, \ |f(a)/g(b)| < \varepsilon$. Damit sehen wir, daß gilt

$$b \in U_\varepsilon \cap I \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b)}{g(b)} \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)W + (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Die Behauptung folgt im zweiten Fall, da es für jede Umgebung W' von q eine Umgebung W von q und $\varepsilon \in (0, 1)$ gibt mit $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)W + (-\varepsilon, \varepsilon) \subset W'$. $\square$

Beispiel 4.6.4. Für $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} (\log x)/x^\lambda &= \lim_{x \to \infty} (1/x)/\lambda x^{\lambda - 1} \\ &= \lim_{x \to \infty} 1/\lambda x^\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

4.7 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung

Satz 4.7.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$ ein Punkt, so ist die Funktion*

$$\begin{array}{rrcl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \end{array}$$

die einzige differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ und $F(a) = 0$.

4.7.2. Im Fall $x < a$ ist dies Integral unter Verwendung unserer Konvention 4.2.10 als $\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t = -\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ zu interpretieren.

Beweis. Für $p \in I$ rechnen wir

$$\lim_{x \to p} \frac{F(x) - F(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{1}{x - p} \int_p^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

Da nun f stetig ist, finden wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß aus $|t - p| \le \delta$ folgt $f(p) - \varepsilon \le f(t) \le f(p) + \varepsilon$. Aus $0 < |x - p| \le \delta$ folgen also durch Bilden des Integrals und Teilen durch $(x - p)$ die Ungleichungen

$$f(p) - \varepsilon \;\le\; \frac{1}{x - p} \int_p^x f(t)\, \mathrm{d}t \;\le\; f(p) + \varepsilon$$

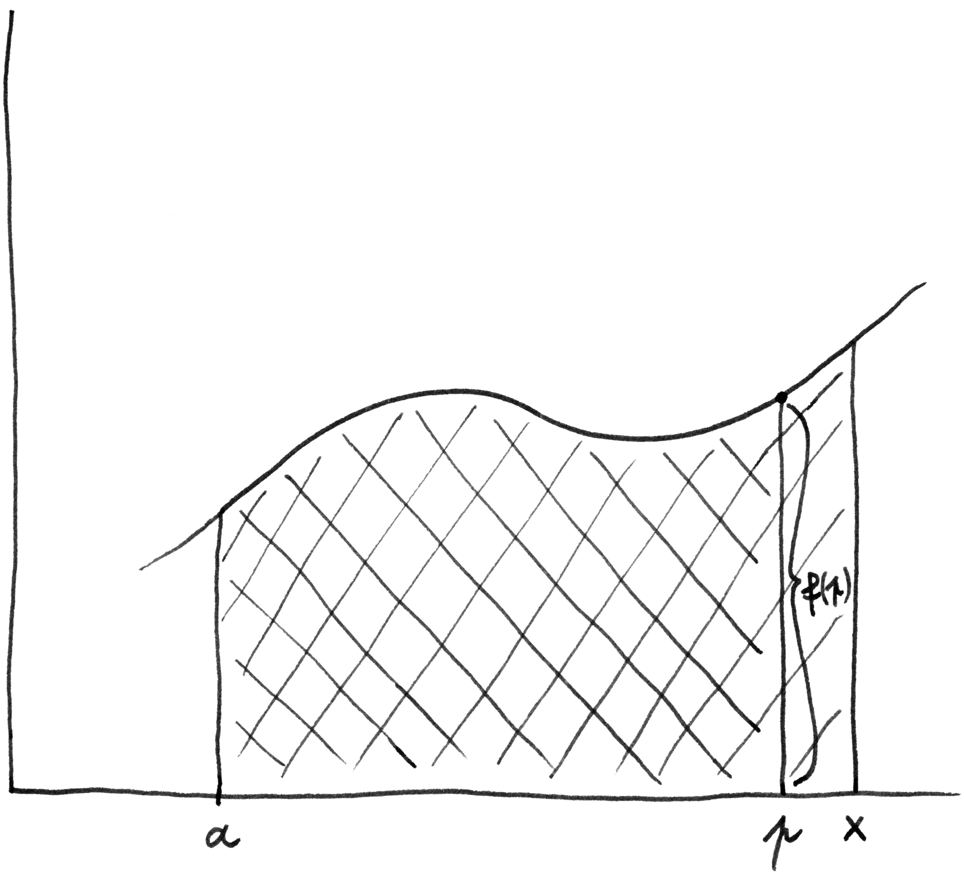
Damit ist gezeigt, daß der Ausdruck in der Mitte für $x \to p$ gegen $f(p)$ konvergiert. Es folgt $F'(p) = f(p)$ für alle $p \in I$. Ist $G : I \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar mit $G' = f$, so verschwindet die Ableitung der Differenz $G - F$. Nach 4.5.7 ist diese Differenz also konstant, und haben wir dann auch noch $G(a) = 0$, so ist sie konstant Null und wir folgern $F = G$. □

Korollar 4.7.3 (Integrieren mit Stammfunktionen). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist $G : I \to \mathbb{R}$ eine* **Stammfunktion von** *f, als da heißt eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $G' = f$, so gilt für alle $a, b \in I$ die Formel*

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = G(b) - G(a)$$

Beweis. Wir betrachten $F : I \to \mathbb{R}$ wie im Hauptsatz 4.7.1 und folgern aus der Eindeutigkeitsaussage von dort $F(x) = G(x) - G(a)$ für alle $x \in [a, b]$. □

4.7.4. Ist G ein komplizierterer Ausdruck, so ist es bequem und üblich, die Differenz $G(b) - G(a)$ mit $G(x)|_a^b$ abzukürzen. Man spricht einen solchen Ausdruck



Veranschaulichung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung 4.7.1. Die kreuzweise schraffierte Fläche stellt $F(p)$ dar, die irgendwie schraffierte $F(x)$, die einfach schraffierte $F(x) - F(p)$. Ich hoffe, man sieht, daß die Fläche unter der Kurve beim Verschieben der oberen Grenze um so stärker wächst, je größer dort der Wert unserer Funktion ist. Das ist qualitativ ausgedrückt die anschauliche Bedeutung des Hauptsatzes.

„G, ausgewertet zwischen den Grenzen a und b". Für a, b positiv ergibt sich zum Beispiel

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log x|_a^b = \log b - \log a$$

Die Ableitung von $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log|x|$ ist im Übrigen $x \mapsto 1/x$, als da heißt, für a, b negativ würden wir $\log|b| - \log|a|$ erhalten. Über den Nullpunkt hinweg dürfen wir die Funktion $1/x$ aber natürlich trotzdem nicht in dieser Weise integrieren, und unser Korollar erlaubt das auch nicht, es trifft vielmehr nur Aussagen über die Integration von auf einem Intervall definierten stetigen Funktionen.

Übungen

Übung 4.7.5. Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ zeige man, daß $\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^\alpha \mathrm{d}x$ existiert in $\overline{\mathbb{R}}$ und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt $\alpha < -1$. Des weiteren zeige man, daß $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \mathrm{d}x$ existiert in $\overline{\mathbb{R}}$ und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt $\alpha > -1$. Anschaulich gesprochen ist also die Hyperbel $x \mapsto (1/x)$ gerade der Grenzfall, in dem sowohl die Fläche zwischen Kurve und x-Achse ab jedem x-Wert als auch symmetrisch die Fläche zwischen Kurve und y-Achse ab jedem y-Wert unendlich groß sind.

Ergänzende Übung 4.7.6. Der **Integral-Logarithmus** $\mathrm{Li} : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ wird erklärt durch die Vorschrift

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

Man zeige $\lim_{x\to\infty}(x\,\mathrm{Li}(x)/\log(x)) = 1$.

Übung 4.7.7. Eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Eigenschaften $|f(x)| \leq 1$ und $|f''(x)| \leq 1$ für alle x. Man zeige $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$ für alle x.

4.8 Integrationsregeln

Satz 4.8.1 (Integration durch Substitution). *Gegeben zwei reelle Zahlen $a < b$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : g([a, b]) \to \mathbb{R}$ stetig gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$$

Im Fall $g(b) < g(a)$ ist das Integral rechts dabei der Konvention 4.2.10 gemäß als das Negative des Integrals über das Intervall $[g(b), g(a)]$ zu verstehen.

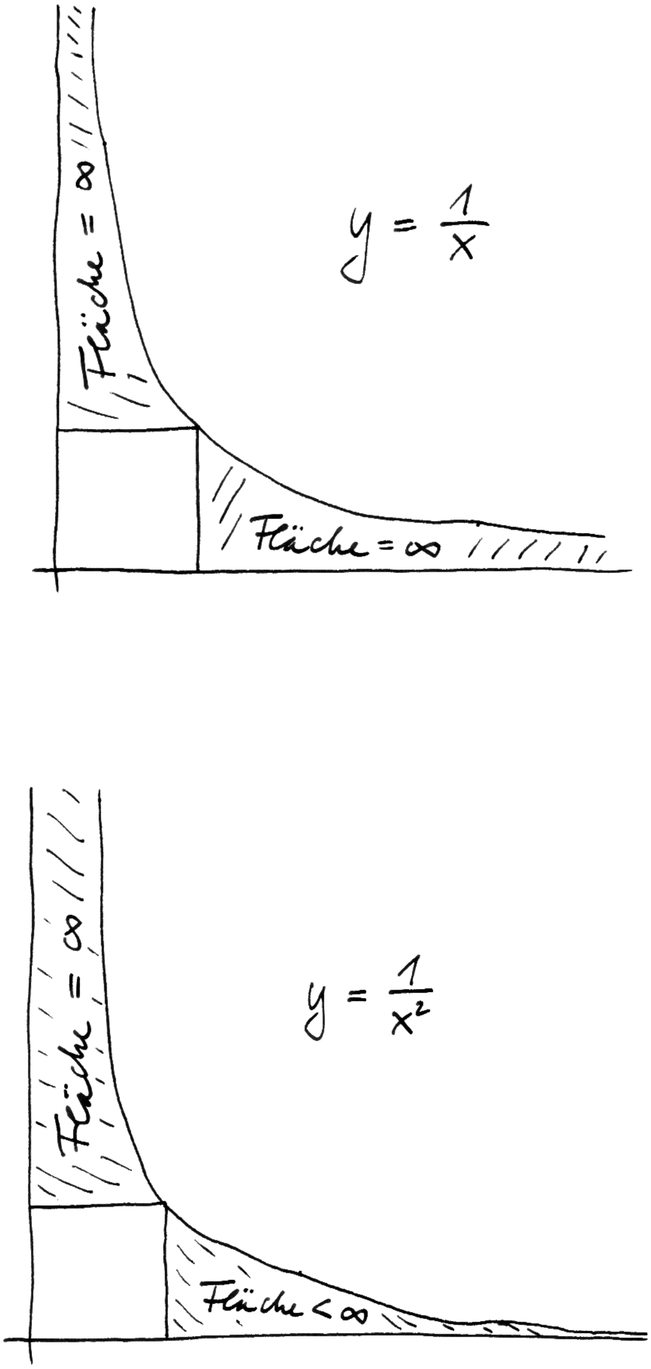


Illustration zu Übung 4.7.5.

4.8.2. Es gibt durchaus differenzierbare Abbildungen, deren Ableitung nicht stetig ist. Ein Beispiel findet man erst in 4.4.16, da wir vorher den Sinus noch nicht zur Verfügung haben, aber davon abgesehen kann es auch hier schon verstanden werden.

Beweis. Ist g konstant, so verschwinden beide Seiten und die Formel gilt. Ist sonst F eine Stammfunktion von f, so ist $F \circ g$ nach der Kettenregel 4.4.6 eine Stammfunktion von $t \mapsto f(g(t))g'(t)$, und berechnen wir beide Integrale mithilfe dieser Stammfunktionen, so ergibt sich auf beiden Seiten der Wert $F(g(b)) - F(g(a))$. $\square$

4.8.3 (**Anschauung für die Substitutionsregel**). Wächst g streng monoton, so kann man einen anschaulicheren Beweis geben, indem man $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$ äquidistant unterteilt und nach dem Mittelwertsatz $\xi_i \in (a_{i-1}, a_i)$ findet mit $g(a_i) - g(a_{i-1}) = g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$. Damit gilt ja die Gleichheit von Riemannsummen

$$\sum_{i=1}^{r} f(g(\xi_i))g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{r} f(g(\xi_i))(g(a_i) - g(a_{i-1}))$$

Mithilfe von 4.2.11 zeigt man dann, daß diese Gleichheit im Grenzübergang $r \to \infty$ gerade die Substitutionsregel liefert.

4.8.4. Als Gedächtnisstütze, die in [AN2] 5.3 auch echte Bedeutung erhält, kann man sich merken, daß beim Substituieren, lateinisch ebenso wie „Prostituieren“ für „Ersetzen“, von y durch $g(x)$ nicht nur $f(y)$ durch $f(g(x))$ ersetzt werden muß, sondern auch $\mathrm{d}y$ durch $g'(x)\mathrm{d}x$, wie es die Notation $g'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ suggeriert.

Beispiel 4.8.5. Indem wir uns das Integral erst etwas zurechtlegen, erhalten wir durch die Substitution $g(x) = x^2 = y$, $g'(x) = 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ leicht

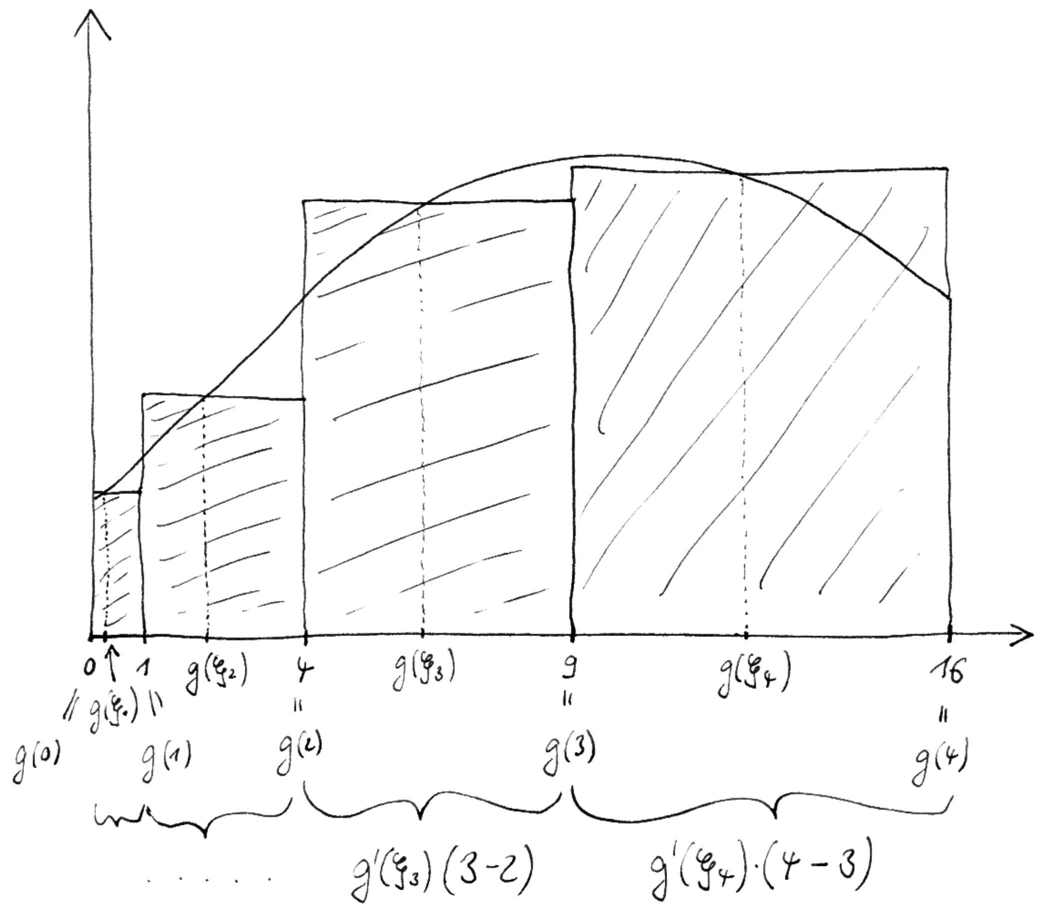
$$\int_a^b \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{2x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{1+y}\ |_{a^2}^{b^2} = \sqrt{1+x^2}\ |_a^b$$

und als eine Stammfunktion des ursprünglichen Integranden ergibt sich die Funktion $\sqrt{1+x^2}$.

4.8.6. In Anwendungen wird man oft mit einer umkehrbaren Abbildung g arbeiten und die Regel in der Form

$$\int_\alpha^\beta f(y)\mathrm{d}y = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$$

verwenden. Auch wenn g nicht umkehrbar ist, kann man in dieser Weise vorgehen, statt $g^{-1}(\alpha)$ und $g^{-1}(\beta)$ darf man dann eben irgendwelche a, b wählen derart,



Anschauliche Bedeutung der Substitutionsregel nach 4.8.3 im Fall $g(x) = x^2$. Die schraffierte Fläche stellt in diesem Spezialfall für $r = 4$ und das Intervall $[a, b] = [0, 4]$ die Summe

$$\sum_{i=0}^{r-1} f(g(\xi_i))g'(\xi_i)(a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=0}^{r-1} f(g(\xi_i))(g(a_{i+1}) - g(a_i))$$

dar. Die ξ_i sind mit dem Mittelwertsatz gerade so gewählt, daß gilt $g(a_{i+1}) - g(a_i) = g'(\xi_i)(a_{i+1} - a_i)$. Ich finde, man sieht sehr gut, daß diese Summen gegen $\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y = \int_0^{16} f(y)\mathrm{d}y$ konvergieren.

daß g auf ganz $[a,b]$ stetig differenzierbar ist und daß gilt $\alpha = g(a)$ und $\beta = g(b)$. Meist arbeiten wir sogar ohne explizite Erwähnung der Grenzen: Suchen wir nur eine Stammfunktion, so kommt es auf die untere Grenze eh nicht an und die obere Grenze wird mitgedacht und nach gelungener Integration wieder „zurücksubstituiert“, wie es unsere Formel fordert.

Beispiel 4.8.7. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $f(y) = y\sqrt{1-y}$ durch die Substitution $\sqrt{1-y} = x$, $y = 1 - x^2 = g(x)$, $\mathrm{d}y = -2x\mathrm{d}x$ zu

$$\begin{array}{rcl} \int y\sqrt{1-y}\,\mathrm{d}y &=& \int (1-x^2)x(-2x)\,\mathrm{d}x \\ &=& \int (2x^4 - 2x^2)\,\mathrm{d}x \\ &=& \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \\ &=& \frac{2}{5}(1-y)^2\sqrt{1-y} - \frac{2}{3}(1-y)\sqrt{1-y} \end{array}$$

Beispiel 4.8.8 (**Fläche des Einheitskreises**). Es gilt $\pi/2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$. In der schmutzigen Anschauung ist also π die Fläche des Einheitskreises. Um das zu prüfen, substituieren wir $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\ \mathrm{d}x$ und erhalten

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\ \mathrm{d}x$$

Mithilfe der Formel $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, die ihrerseits aus den Additionsformel folgt, ergibt sich unser Integral mühelos zu

$$\left.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Satz 4.8.9 (Partielle Integration). *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt*

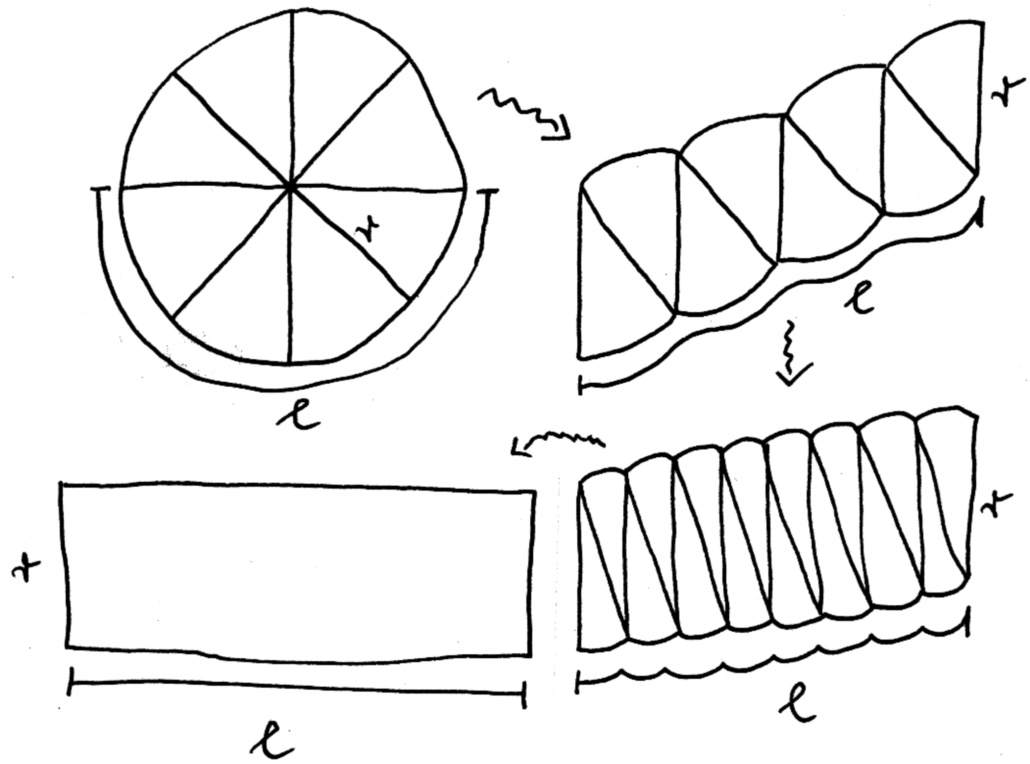
$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Beweis. Nach der Produktregel gilt $fg' = (fg)' - f'g$ auf $[a,b]$, folglich stimmen auch die Integrale dieser Funktionen überein. □

Beispiele 4.8.10.

$$\begin{array}{rcl} \int x^2\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x &=& x^2\ e^x - \int 2x\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\ &=& x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + \int 2\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\ &=& (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \int \log x\ \mathrm{d}x &=& x\log x - \int x\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\ &=& x\log x - x \end{array}$$



Eine anschauliche Begründung dafür, daß die Fläche einer Kreisscheibe das Produkt aus Radius und halbem Umfang sein sollte. Der erste geschlängelte Pfeil deutet dabei ein Zerschneiden und Neu-Zusammenfügen an, die anderen einen Grenzübergang.

4.8.11. Ich erkläre nun noch einen alternativen Zugang zur Exponentialfunktion, der unsere Definition über eine a priori unmotivierte Reihe vermeidet. Suchen wir eine stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $g' = g$ und $g(0) = 1$, so haben wir ja nach der Substitutionsregel

$$x = \int_0^x \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)} \mathrm{d}t = \int_1^{g(x)} \frac{1}{u} \mathrm{d}u$$

Man definiert also notgedrungen eine Funktion $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $\log(y) = \int_1^y \frac{1}{u} \mathrm{d}u$, und die gesuchte Funktion g muß deren Umkehrfunktion sein.

Satz* 4.8.12. *Die Kreiszahl π ist nicht rational, in Formeln $\pi \notin \mathbb{Q}$.*

4.8.13. Das wurde bereits 1766 von Johann Heinrich Lambert gezeigt. Der Beweis der Transzendenz von π ist schwieriger, mir gefällt die Darstellung in [Lor96]. Der hier gegebene Beweis der Irrationalität wirkt auf mich wie Zauberei. Ich folge der Darstellung von Stewart [Ste89].

Beweis. Man betrachte für reelles $\alpha \neq 0$ und natürliches $n \in \mathbb{N}$ das Integral

$$I_n = I_n(\alpha) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos(\alpha x) \mathrm{d}x$$

Partielles Integrieren liefert $\alpha^2 I_n(\alpha) = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}$ für $n \geq 2$. Vollständige Induktion zeigt dann

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!(P_n(\alpha) \sin \alpha + Q_n(\alpha) \cos \alpha)$$

für $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ Polynome vom Grad $\leq 2n$. Wäre nun $\pi = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und setzen wir oben $\alpha = \pi$ ein, so ergäbe sich, daß

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n(\pi)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ eine von Null verschiedene ganze Zahl sein muß. Das steht im Widerspruch dazu, daß dieser Ausdruck für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Dasselbe Argument zeigt: Gegeben $\alpha \in \mathbb{Q}^\times$ können nicht $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ beide rational sein. $\square$

Übungen

Übung 4.8.14. Man finde Stammfunktionen zu den Kehrwerten quadratischer Polynome, also zu Funktionen der Gestalt $x \mapsto (x^2 + ax + b)^{-1}$. Hinweis: Hat das fragliche quadratische Polynom zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda \neq \mu$, so kann man unsere Funktion in der Gestalt $\alpha/(x-\lambda)+\beta/(x-\mu)$ schreiben. Sonst bringe man sie in die Form $((x+a/2)^2+d)^{-1}$ mit $d \geq 0$ und erinnere sich an $\arctan'(t) = 1/(1+t^2)$.

Übung 4.8.15. Man finde eine Stammfunktion für den Arcustangens. Hinweis: Man wende auf das Produkt $1 \cdot \arctan$ partielle Integration an.

Ergänzende Übung 4.8.16. Man führe die partiellen Integrationen des Beweises von 4.8.12 aus und prüfe die Induktionsbasis, als da heißt die Fälle $n = 0, 1$.

Übung 4.8.17. Man zeige $\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$.

Übung 4.8.18. Sei $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ der Einheitskreis. Wir konstruieren eine Bijektion $\gamma : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus (-1,0)$, indem wir jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt der Gerade durch $(-1,0)$ und $(0,t)$ mit $S^1 \setminus (-1,0)$ zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

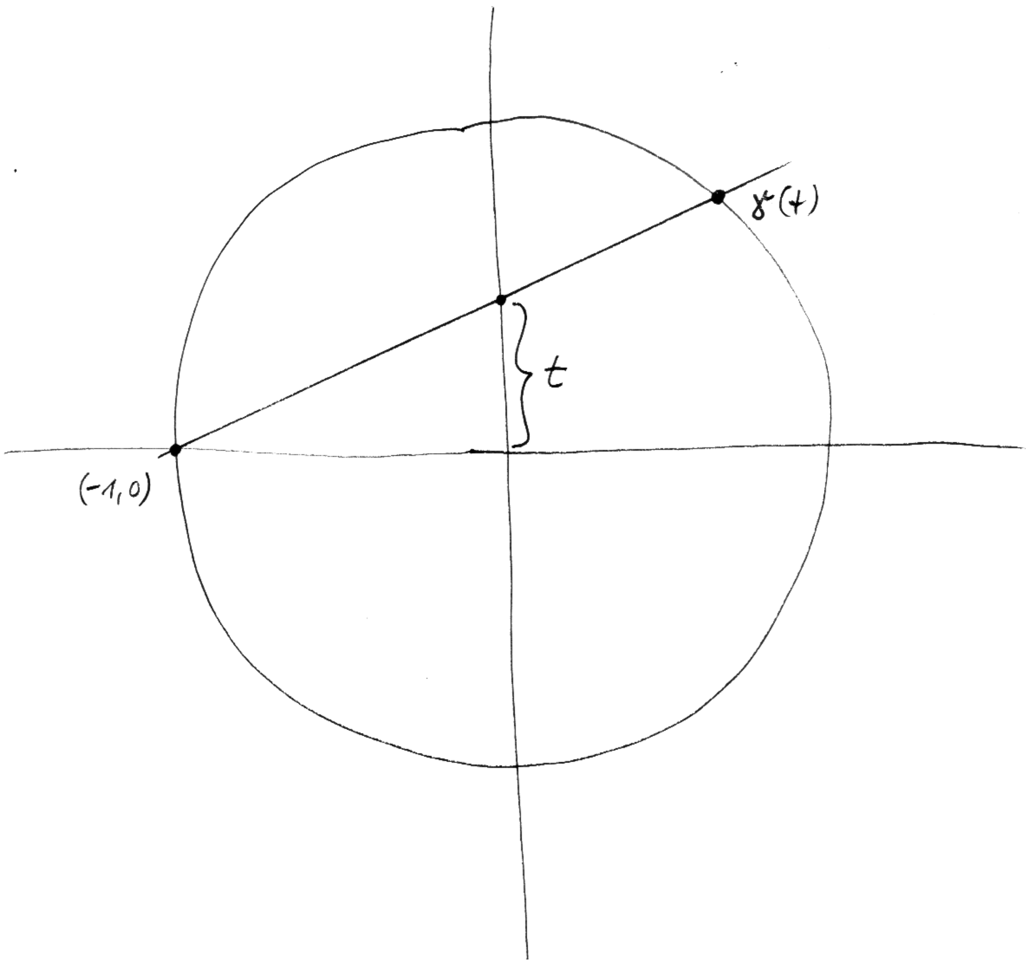
Man prüfe $\|\gamma'(t)\| = 2/(1+t^2)$ und interpretiere die vorstehende bemerkenswerte Formel aus 4.8.17. Der Punkt $(\cos\tau, \sin\tau)$ für $\tau \in (-\pi,\pi)$ wird hierbei übrigends parametrisiert durch $t = \tan(\tau/2)$, wie man durch Rechnung oder elementargeometrische Überlegungen prüft. Man beachte auch die Ähnlichkeit zur Parametrisierung der Hyperbel 4.9.6.

Ergänzung 4.8.19. Die Abbildung γ aus der vorstehenden Übung liefert im Übrigen auch eine Bijektion von $\mathbb{Q}$ auf die Punkte von $S^1\setminus(-1,0)$ mit rationalen Koordinaten. Diese Bijektion ist äußerst hilfreich bei der Bestimmung aller **pythagoreischen Zahlentripel**, d.h. aller Tripel a, b, c von natürlichen Zahlen mit $a^2+b^2 = c^2$. Die Abbildung γ aus der vorstehenden Übung liefert allgemeiner sogar für jeden Körper k einer von Zwei verschiedenen Charakteristik eine Bijektion von k auf das Komplement des Punktes $(-1,0)$ in der Lösungsmenge der Gleichung $x^2+y^2 = 1$ in der Ebene $k^2 = k \times k$. In der algebraischen Geometrie können Sie dann lernen, wie man das zu einer Bijektion von $\mathbb{P}^1 k$ mit der Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^2 k$ erweitert, die durch die homogenisierte Gleichung $x^2+y^2 = z^2$ definiert wird.

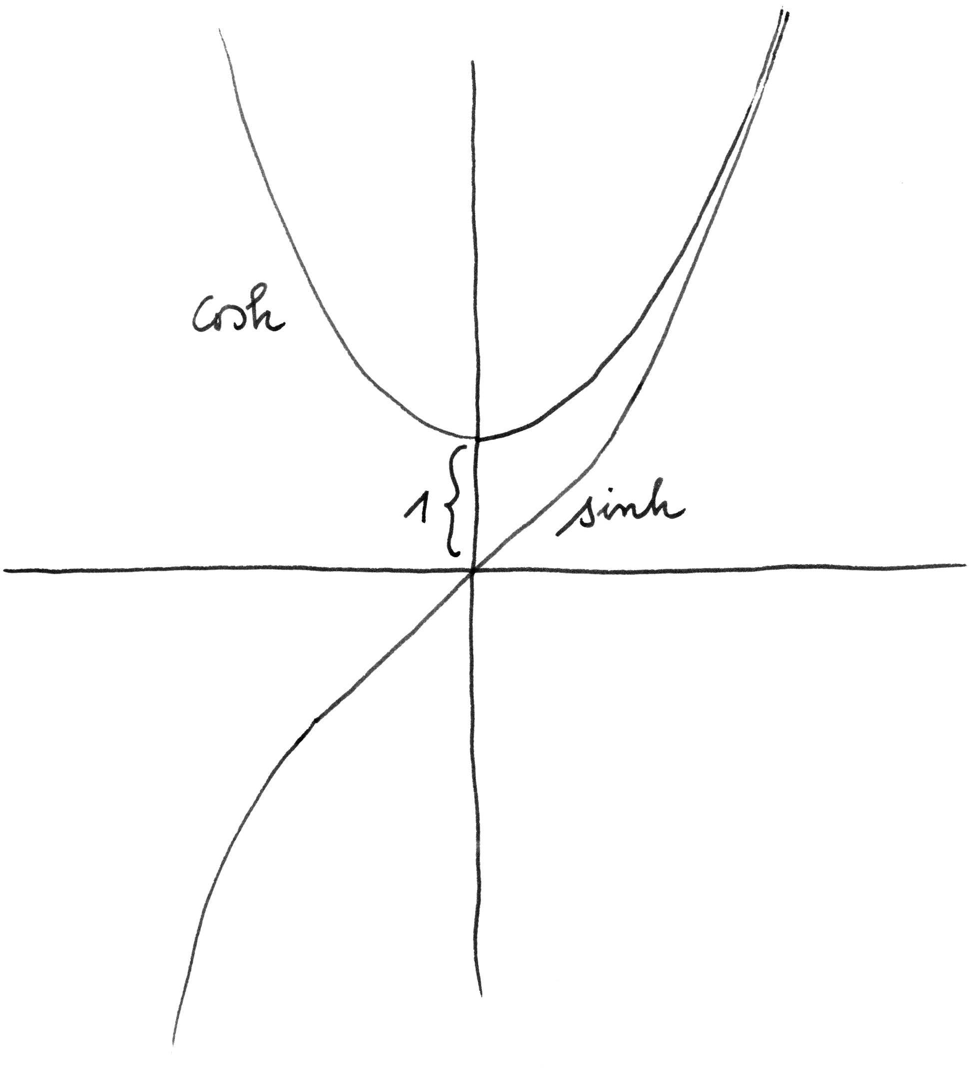
Ergänzende Übung 4.8.20. Mithilfe der Relation $\tan(\pi/6) = 1/2$ berechne man π auf drei sichere Stellen hinter dem Komma. Es gibt im übrigen wesentlich effizientere Verfahren zur Berechnung von π, vergleiche [Cou71].

Ergänzende Übung 4.8.21. Wie könnte ein Autor, der den Zugang 4.8.11 zur Exponentialfunktion gewählt hat, die Funktionalgleichung 3.2.9 beweisen?

Ergänzende Übung 4.8.22. Man zeige durch Vergleich mit dem Integral der Funktion $x^{-\alpha}$, daß für jedes $\alpha > 1$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ konvergiert.



Die Abbildung γ aus 4.8.18



Die Graphen von Sinus und Cosinus hyperbolicus

4.9 Hyperbolische trigonometrische Funktionen

Definition 4.9.1. Der **Sinus hyperbolicus** und **Cosinus hyperbolicus** sind die Abbildungen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben werden durch die Formeln

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

4.9.2. Den Graphen des Cosinus hyperbolicus nennt man auch die **Kettenlinie**, weil er dieselbe Gestalt hat wie eine hängende Kette. Wir zeigen das in 8.3.3 im Anschluß an die Diskussion der Bogenlänge.

4.9.3. Offensichtlich gilt $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$, $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, und $\cosh(-x) = \cosh(x)$, die Ableitungen unserer Funktionen sind

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

es gelten $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ und die Additionstheoreme

$$\begin{array}{rcl} \sinh(a+b) & = & \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b) \\ \cosh(a+b) & = & \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \end{array}$$

Die Funktion $\cosh$ nimmt bei $x = 0$ ihr Minimum an und $\sinh$ ist eine Bijektion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die inverse Abbildung nennt man **Area Sinus hyperbolicus** und bezeichnet sie mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sie läßt sich auch elementar ausdrücken als $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ und für die Ableitung von arsinh erhalten wir

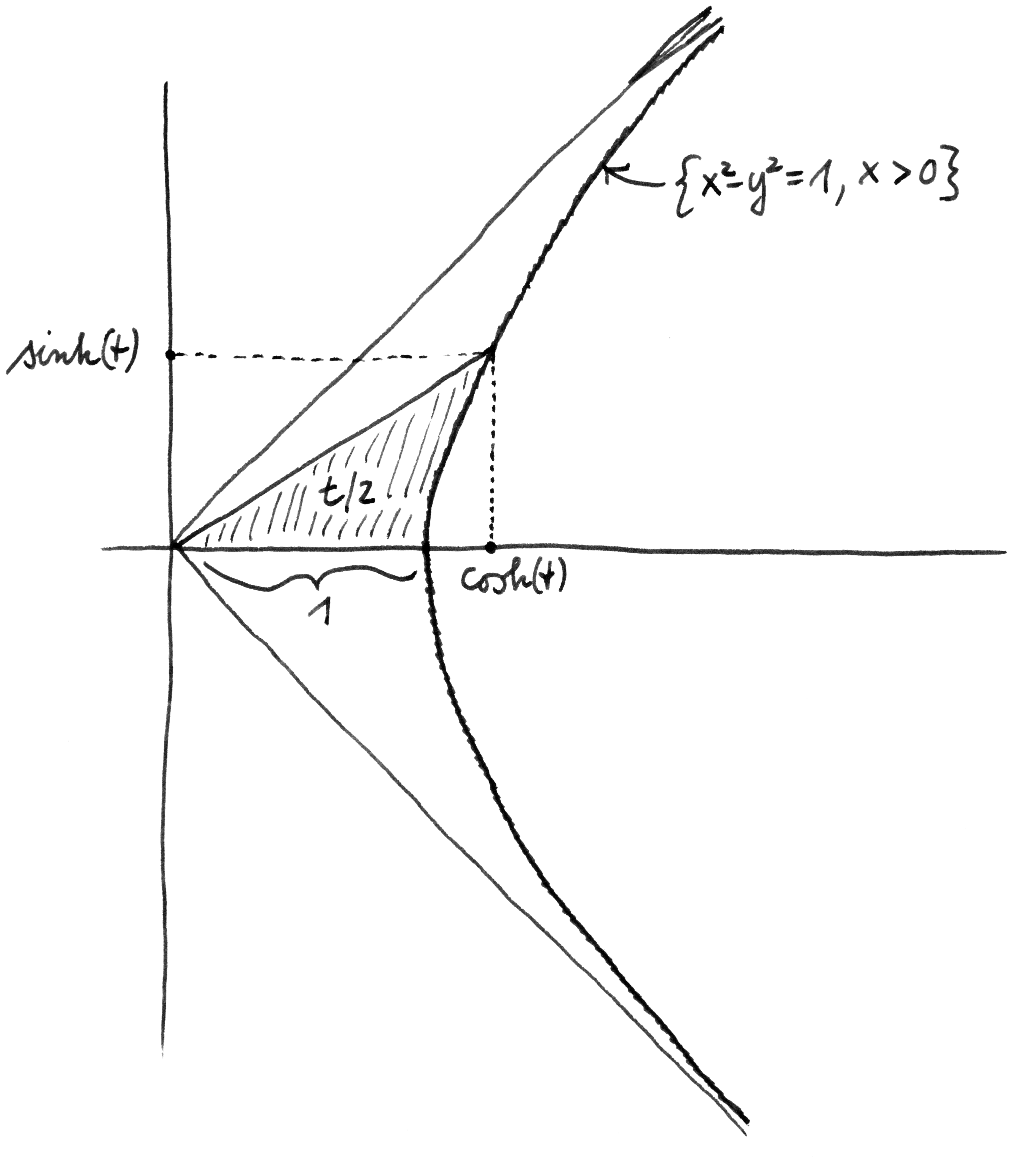
$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

In der Tat gilt $\sinh'(x) = \cosh(x) = \sqrt{1 - \sinh^2(x)}$, $\sinh'(\operatorname{arsinh} y) = \sqrt{1+y^2}$. Ähnlich liefert $\cosh$ eine Bijektion $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$, die inverse Abbildung **Area Cosinus hyperbolicus** $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ kann geschrieben werden als $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ und ist differenzierbar auf $(1, \infty)$ mit der Ableitung

$$\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

Sehr viel seltener benutzt man den **Secans hyperbolicus** $x \mapsto 1/\cosh(x)$, den **Cosecans hyperbolicus** $x \mapsto 1/\sinh(x)$ und den **Tangens hyperbolicus** $\tanh : x \mapsto \sinh(x)/\cosh(x)$ sowie seine Umkehrung $\operatorname{artanh} : (-1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

4.9.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Namen unserer Funktionen haben den folgenden Hintergrund: Für $t \in \mathbb{R}$ durchläuft der Punkt mit Koordinaten $(\cosh t, \sinh t)$ den Hyperbelast



Die geometrische Bedeutung von Sinus und Cosinus hyperbolicus

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)(x-y) = 1,\ x > 0\}$$

Hierbei ist $|t/2|$ gerade die Fläche oder lateinisch „area", die von x-Achse, Hyperbel und dem Geradensegment von $(0,0)$ nach $(\cosh t, \sinh t)$ eingeschlossen wird. Es ist eine ausgezeichnete Übung, diese Behauptung nachzurechnen. Man sieht so die Verwandschaft zu den üblichen trigonometrischen Funktionen, bei denen man nur die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ zu ersetzen hat durch den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$. Dehnen wir die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen in der offensichtlichen Weise zu Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aus, so können wir die formale Analogie mit den gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen präzisieren zu den Formeln $\cos z = \cosh \mathrm{i}\, z$ und $\sin z = -\mathrm{i} \sinh \mathrm{i}\, z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

4.9.5. Die Lösungsmengen in der Ebene $\mathbb{R}^2$ von Gleichungen der Gestalt $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ mit $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ heißen **ebene Quadriken** oder auch **Kegelschnitte**, da man sie erhalten kann als Schnitte räumlicher Ebenen mit dem **Kegel** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ bei geeigneter orthonormaler Identifikation unserer räumlichen Ebenen mit dem $\mathbb{R}^2$. Jeder Kegelschnitt ist bis auf Drehung und Verschiebung eine **Ellipse** $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ mit $\alpha, \beta > 0$, eine **Hyperbel** $xy = \gamma$ mit $\gamma > 0$, eine **Parabel** $x^2 = \delta y$ mit $\delta > 0$, ein Geradenkreuz, eine Gerade, ein Punkt oder die leere Menge. Die Bezeichnung „Parabel" kommt hier vom griechischen Wort für „Werfen". In der Tat beschreibt ein Wurfgeschoss unter Vernachlässigung des Luftwiderstands stets eine „parabolische" Bahn, vergleiche [?] **??**.

Übungen

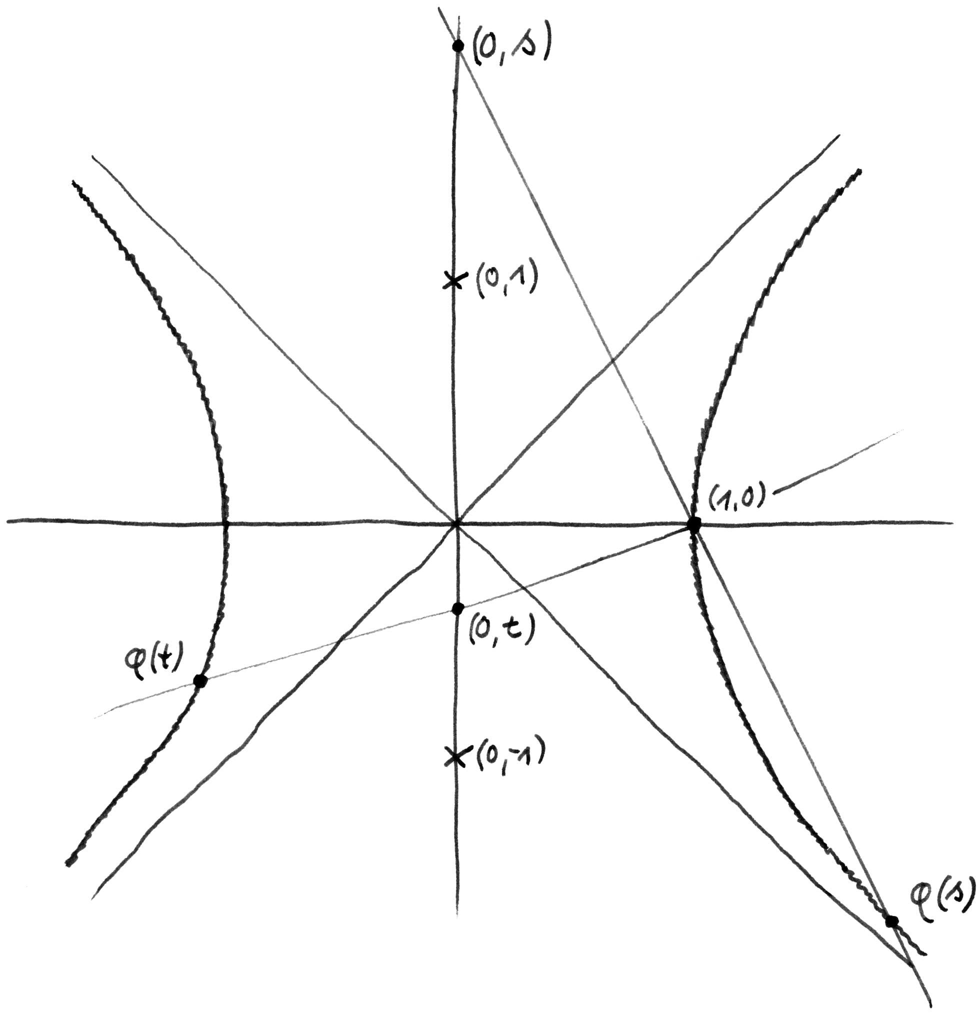
Ergänzende Übung 4.9.6. Sei $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ die Hyperbel. Wir konstruieren eine Bijektion $\varphi : \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} H\backslash(1,0)$, indem wir jedem Punkt $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ den Schnittpunkt der Geraden durch $(0,t)$ und $(1,0)$ mit $H\backslash(1,0)$ zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

$$\varphi(t) = \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}, \frac{2t}{t^2-1}\right)$$

Eine eng verwandte Parametrisierung des Einheitskreises wurde in 4.8.18 besprochen.

4.10 Integration rationaler Funktionen

4.10.1. Zur Integration rationaler Funktionen erinnern wir zunächst die Partialbruchzerlegung aus [LA1] 4.6.11. Wenn wir vergessen, daß wir uns dabei in die



Die geometrische Bedeutung der Abbildung φ aus 4.9.6

komplexe Zahlenebene vorgewagt haben, so wird das Integrieren rationaler Funktionen sehr einfach: Wir haben ja in der Partialbruchzerlegung unsere rationale Funktion geschrieben als eine Linearkombination von Funktionen der Gestalt $x \mapsto (x-\mu)^m$ mit $m \in \mathbb{Z}$, und Stammfunktionen für diese Funktionen sind natürlich

$$\frac{1}{m+1}(x-\mu)^{m+1} \text{ für } m \neq -1 \text{ und } \log(x-\mu) \text{ für } m=-1 \text{ und } x>\mu.$$

Und nun ist es eben so, daß diese Formeln für $\mu \in \mathbb{C}$ ganz genauso gelten, wenn wir sie nur richtig interpretieren. Im Fall $m \neq 1$ ist das der Inhalt der Übung 4.4.18. Im Fall $m=-1$ wird es im Folgenden ausgeführt.

4.10.2. Um zu $\mathbb{R}\backslash\mu \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x-\mu)^{-1}$ für beliebiges $\mu \in \mathbb{C}$ eine Stammfunktion anzugeben, überlegt man sich zunächst, daß die komplexe Exponentialfunktion eine Bijektion

$$\exp : \mathbb{R} + (-\pi, \pi]\,\mathrm{i} \overset{\sim}{\to} \mathbb{C}^\times$$

definiert. Die Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{C}^\times \overset{\sim}{\to} \mathbb{R} + (-\pi, \pi]\,\mathrm{i}$$

wird auf der positiven reellen Achse gegeben durch unseren üblichen Logarithmus $u \mapsto \log u$, auf der oberen bzw. unteren komplexen Halbebene durch die Vorschrift

$$\log(u+\mathrm{i}\,v) = \log\sqrt{u^2+v^2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\arctan\frac{u}{v} \quad \text{für } \pm v > 0$$

und auf der negativen reellen Achse durch $u \mapsto \log(-u)+\mathrm{i}\,\pi/2$. Man beachte, daß dieser **Hauptzweig des Logarithmus** nicht stetig ist längs der negativen reellen Achse, obwohl seine Einschränkung auf die negative reelle Achse durchaus stetig ist: Wir haben für $u<0$ genauer

$$\lim_{v \searrow 0} \log(u+\mathrm{i}\,v) = \log(u) = \lim_{v \nearrow 0} \log(u+\mathrm{i}\,v) + 2\pi\,\mathrm{i}$$

Unabhängig davon ist es mit unseren expliziten Formeln eine elementare Übung, für alle $\mu \in \mathbb{C}$ zu prüfen, daß die Funktion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\mu & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \log(x-\mu) \end{array}$$

die Ableitung $1/(x-\mu)$ hat. Weniger elementar aber dafür konzeptioneller folgt es auch aus der komplexen Kettenregel 6.9.11 mitsamt der Regel für die komplexe Ableitung von Zweigen des komplexen Logarithmus 6.9.18 aus dem anschließenden Abschnitt. In jedem Fall sehen wir, wie sich im Prinzip die Stammfunktion einer beliebigen rationalen Funktion wieder als eine rationale Funktion mitsamt einigen Ausdrücken im Arcustangens und im reellen Logarithmus schreiben läßt.

4.10.3 (**Die Problematik komplexer Potenzen**). Setzt man für $a \in \mathbb{C}^\times$ und $b \in \mathbb{C}$ ähnlich wie im Reellen $a^b := \exp(b \log a)$ mit $\log$ dem eben definierten Hauptzweig des komplexen Logarithmus, so ergibt sich $\mathrm{i}^\mathrm{i} = \exp(-\pi/2)$. Insbesondere ist in diesem Sinne also i^i reell. Allerdings ist dann $a \mapsto a^b$ für $b \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ unstetig längs der negativen reellen Achse und wir haben im allgemeinen $a^{bc} \neq (a^b)^c$.

Beispiel 4.10.4. Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $1/(1+x^2)$ mithilfe unserer Partialbruchzerlegung [LA1] 4.6.11. Die Nullstellen des Nenners sind $\pm\,\mathrm{i}$ und der Grad des Zählers ist echt kleiner als der Grad des Nenners. Wir dürfen den Ansatz

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x+\mathrm{i}} + \frac{b}{x-\mathrm{i}}$$

machen und finden sofort $(a+b)x - \mathrm{i}\,a + \mathrm{i}\,b = 1$, also $a+b=0$ und $a-b=\mathrm{i}$ und folglich $a = \mathrm{i}/2$ und $b = -\mathrm{i}/2$. Eine Stammfunktion ist mithin

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\log(x+\mathrm{i}) - \frac{\mathrm{i}}{2}\log(x-\mathrm{i})$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen beachten wir, daß unsere Stammfunktion bis auf eine Konstante eh eine reellwertige Funktion sein muß. Wir dürfen also bereits vor dem Addieren die Realteile nehmen und erhalten als Stammfunktion sofort

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan(-x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$$

in Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen aus 4.4.14.

Beispiel 4.10.5. Wir bestimmen zu $(x^4+2x^2)/(x^2+2x+1)$ eine Stammfunktion. Die Partialbruchzerlegung haben wir bereits in [LA1] 4.6.16 durchgeführt und erhielten

$$\frac{x^4+2x^2}{x^2+2x+1} = x^2 - 2x + 5 - \frac{8}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

Als Stammfunktion finden wir damit sofort

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 8\log|x+1| - \frac{3}{(x+1)}$$

Ergänzung 4.10.6. Gegeben eine rationale Funktion $R = P/Q$ betrachten wir die Funktion $D \to \mathbb{R}$, $t \mapsto R(\mathrm{e}^t)$ mit dem Definitionsbereich $D = \{t \in \mathbb{R} \mid Q(\mathrm{e}^t) \neq 0\}$. Das Integral eines solchen rationalen Ausdrucks in e^t kann man auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen durch die Substitution $x = \mathrm{e}^t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\mathrm{d}t$. Zum Beispiel berechnen wir

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + \frac{1}{\mathrm{e}^t}} = \int \frac{2\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\arctan x = 2\arctan(\mathrm{e}^t)$$

Das Integral eines rationalen Ausdrucks in $\sqrt[n]{t}$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ kann man ähnlich durch die Substitution $\sqrt[n]{t} = x$, $\mathrm{d}t = nx^{n-1}\mathrm{d}x$ auf das Integral einer rationalen Funktion in x zurückführen.

Ergänzung 4.10.7 (**Integrale rationaler Ausdrücke** $R(\sin, \cos)$). Das Integral eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar $(\sin, \cos)$ wie zum Beispiel

$$\frac{\sin^3(\tau) + \cos(\tau)}{\cos(\tau) + \cos^2(\tau)}$$

kann man auffassen als Kurvenintegral im Sinne von 8.3.6 einer rationalen Funktion in zwei Veränderlichen, in unserem Beispiel das Integral der Funktion

$$R(x, y) = \frac{y^3 + x}{x + x^2}$$

über ein Stück des Einheitskreises. Mit der Umparametrisierung 4.8.18, d.h. mithilfe der Substitution $t = \tan(\tau/2)$ und folglich $\sin(\tau) = 2t/(1 + t^2)$, $\cos(\tau) = (1 - t^2)/(1 + t^2)$, $\mathrm{d}\tau = (2/(1 + t^2))\mathrm{d}t$ läßt es sich dann umwandeln in ein Integral einer rationalen Funktion einer Veränderlichen. Integrale über rationale Ausdrücke im Funktionenpaar $(\sqrt{1 - x^2}, x)$ kann man in ähnlicher Weise als Kurvenintegral auffassen und lösen, im Gegensatz zu eben hat nur $x \mapsto (\sqrt{1 - x^2}, x)$ nicht konstante absolute Geschwindigkeit 1, sondern vielmehr die absolute Geschwindigkeit $1/\sqrt{1 - x^2}$. Formal mag man auch $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$ substituieren und sich so auf den bereits behandelten Fall eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar $(\sin, \cos)$ zurückziehen. Integrale von rationalen Ausdrücken in den Funktionenpaaren $(\sqrt{x^2 + 1}, x)$ bzw. $(\sqrt{x^2 - 1}, x)$ kann man auf die bereits in 4.10.6 behandelten Integrale rationaler Funktionen in e^t zurückführen durch die Substitution $x = \sinh t$, $\mathrm{d}x = \cosh t\mathrm{d}t$ bzw. $x = \cosh t$, $\mathrm{d}x = \sinh t\mathrm{d}t$. Ein noch direkterer geometrischer Zugang zu all diesen Integralen wird in [AN2] 5.3.17 diskutiert.

Übungen

Ergänzende Übung 4.10.8. Man finde eine Stammfunktion zu $1/(1 + x^4)$.

5 Potenzreihen und höhere Ableitungen

5.1 Funktionenfolgen und Potenzreihen

Satz 5.1.1. *Sei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Konvergiert für eine reelle Zahl z die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, so konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ absolut für alle reellen Zahlen x mit $|x| < |z|$.*

Vorschau 5.1.2. Dieser Satz gilt ganz genauso und mit demselben Beweis, wenn wir darin überall „reell“ durch „komplex“ ersetzen und Konvergenz verstehen als „Konvergenz von Real- und Imaginärteil“. Wir konzentrieren uns hier jedoch auf den Fall reeller Potenzreihen.

Beweis. Die Glieder einer konvergenten Reihe sind beschränkt, unter unseren Annahmen gibt es also eine endliche Schranke B mit $|a_\nu z^\nu| \leq B$ für alle ν. Aus $|x| < |z|$ folgt aus der Konvergenz der geometrischen Reihe 3.1.5 dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x^\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu z^\nu|\,|x/z|^\nu \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} B\,|x/z|^\nu < \infty \qquad \square$$

Definition 5.1.3. Ein Ausdruck der Gestalt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ heißt eine **Potenzreihe**. Eine Potenzreihe anzugeben bedeutet also nichts anderes, als die Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ihrer Koeffizienten anzugeben. Der **Konvergenzradius** $r \in [0,\infty]$ einer Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ ist per definitionem das Supremum

$$r := \sup\{\, |z| \;\mid \sum a_\nu z^\nu \text{ konvergiert}\}$$

Die Bezeichnung als Radius wird kommt vom Kontext komplexer Potenzreihen her. Nach 5.1.1 definiert jede Potenzreihe mit Konvergenzradius r vermittels der Abbildungsvorschrift $x \mapsto \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ eine reellwertige Funktion auf dem Intervall $(-r, r)$ alias im Komplexen eine komplexwertige Funktion auf der Kreisscheibe $|z| < r$.

Satz 5.1.4 (über Potenzreihen). *Die durch eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ mit Konvergenzradius $r > 0$ definierte Funktion $s : (-r, r) \to \mathbb{R}$ ist stetig, ja sogar differenzierbar, und ihre Ableitung wird an jeder Stelle $x \in (-r, r)$ gegeben durch die Potenzreihe $s'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$.*

Beispiel 5.1.5. Dieser Satz liefert unmittelbar einen zweiten Beweis für die bereits in 4.4.9 bewiesene Tatsache, daß die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung ist.

5.1.6. Der Beweis dieses Satzes wird den größten Teil dieses Abschnitts einnehmen. Wir zeigen in 5.1.12, daß jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion stetig ist, und zeigen die weitergehenden Aussagen in 5.1.15. Zunächst jedoch müssen wir einige technische Hilfsmittel bereitstellen.

Definition 5.1.7. Sei D eine Menge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

1. Wir sagen, die Folge f_n **konvergiert punktweise** gegen die Funktion f genau dann, wenn für alle $x \in D$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;

2. Wir sagen, die Folge f_n **konvergiert gleichmäßig** gegen die Funktion f und schreiben $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ genau dann, wenn es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

5.1.8. Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt sicher punktweise Konvergenz. Das Umgekehrte gilt nicht: Die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 1$ und $f(1) = 1$.

Satz 5.1.9 (Stetigkeit bleibt erhalten unter gleichmäßiger Konvergenz). *Konvergiert eine Folge von stetigen reellwertigen Funktionen gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, so ist auch diese Grenzfunktion stetig.*

Beweis. Sei $D \subset \mathbb{R}$ der gemeinsame Definitionsbereich und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ die Funktionen unserer gleichmäßig konvergenten Folge und $f : D \to \mathbb{R}$ ihre Grenzfunktion. Es reicht sicher, die Stetigkeit von f in jedem Punkt $p \in D$ zu zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Sicher finden wir ein n derart, daß für alle $x \in D$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da f_n stetig ist in p, finden wir weiter $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt

$$|f_n(x) - f_n(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

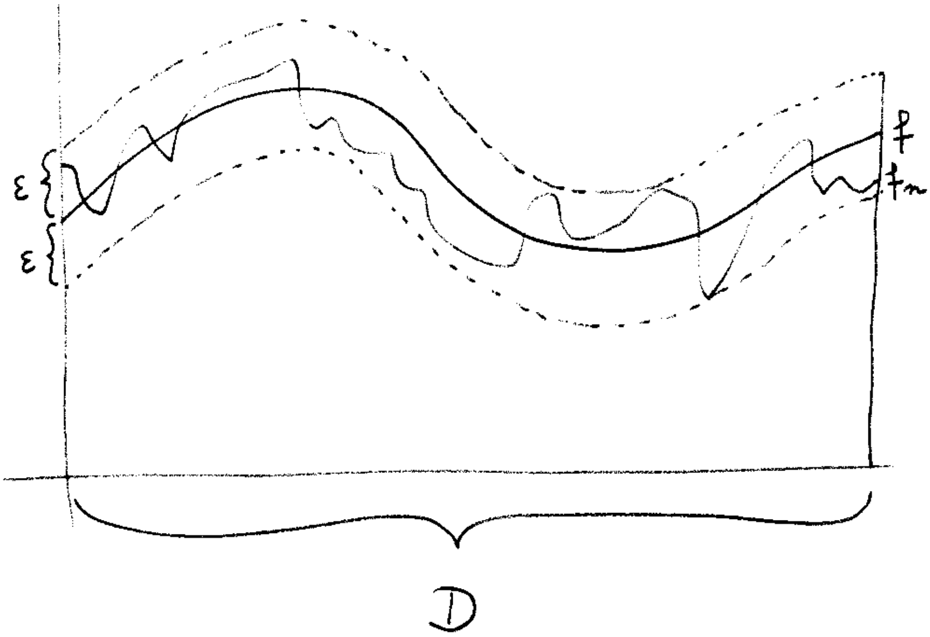
Es folgt für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ leicht

$$\begin{aligned} |f(x) - f(p)| \;\leq\; & |f(x) - f_n(x)| \\ & +|f_n(x) - f_n(p)| \\ & \quad +|f_n(p) - f(p)| \;<\; \varepsilon \end{aligned}$$

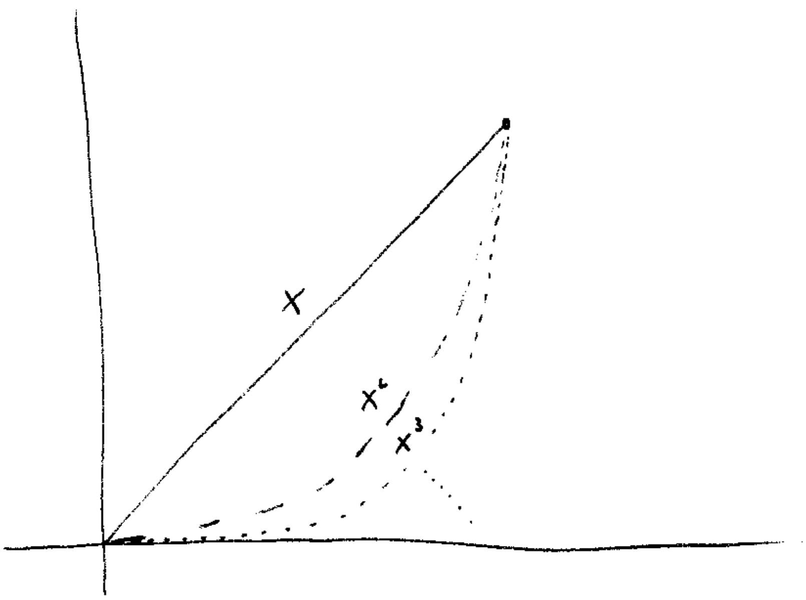
□

Proposition 5.1.10 (zur gleichmäßigen Konvergenz bei Potenzreihen). *Ist* $\sum a_\nu x^\nu$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r, *so konvergiert die Folge ihrer Partialsummen* $s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ *für alle* $\rho \in [0, r)$ *gleichmäßig auf dem Kompaktum* $D = [-\rho, \rho]$.

5.1.11. Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r konvergiert im allgemeinen keineswegs gleichmäßig auf dem ganzen Intervall $(-r, r)$. Ein Gegenbeispiel wäre etwa die Exponentialfunktion, ein anderes die geometrische Reihe.



Bei gleichmäßiger Konvergenz müssen für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle f_n auf dem ganzen Definitionsbereich D im „ε-Schlauch um f“ bleiben.



Die punktweise aber nicht gleichmäßig konvergente Funktionenfolge der Funktionen $x \mapsto x^n$ aus 5.1.8

Beweis. Für alle $x \in [-\rho, \rho]$ gilt $|a_\nu x^\nu| \leq |a_\nu \rho^\nu|$ und folglich

$$|s_n(x) - s(x)| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$$

Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$ konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu| < \varepsilon$$

Für $n \geq N$ und beliebiges $x \in [-\rho, \rho]$ gilt dann $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$. □

Korollar 5.1.12 (Stetigkeit von Potenzreihen). *Die durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ auf $(-r, r)$ definierte Funktion ist stetig.*

Beweis. Nach Proposition 5.1.10 und Satz 5.1.9 ist unsere Funktion für alle $\rho \in [0, r)$ stetig auf $[-\rho, \rho]$ als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen. Daraus folgt mühelos, daß sie stetig ist auf ganz $(-r, r)$. □

Satz 5.1.13 (Vertauschen von Integral und Grenzübergang). *Sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. So gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Vorschau 5.1.14. Sehr viel stärkere Sätze in dieser Richtung werden wir im Rahmen der Integrationstheorie von Lebesgue als Satz über monotone Konvergenz [AN3] 1.5.12 und Satz über dominierte Konvergenz [AN3] 1.6.9 kennenlernen.

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a, b]$. Es folgt

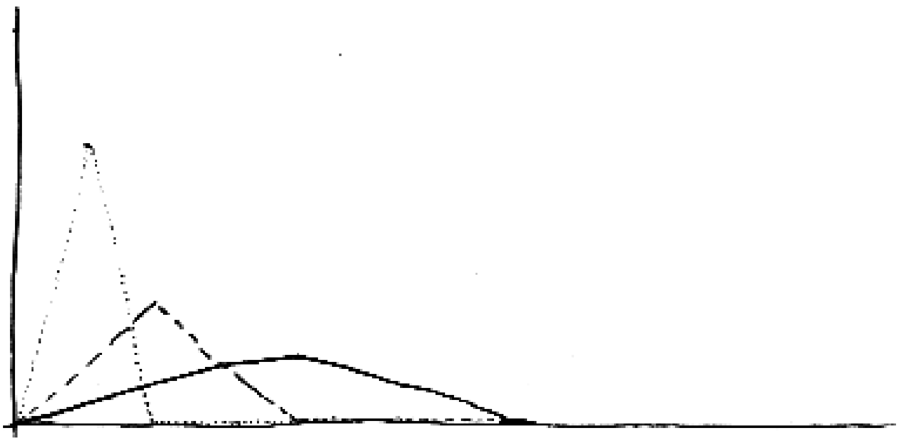
$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq (b - a)\varepsilon$$

für alle $n \geq N$. □

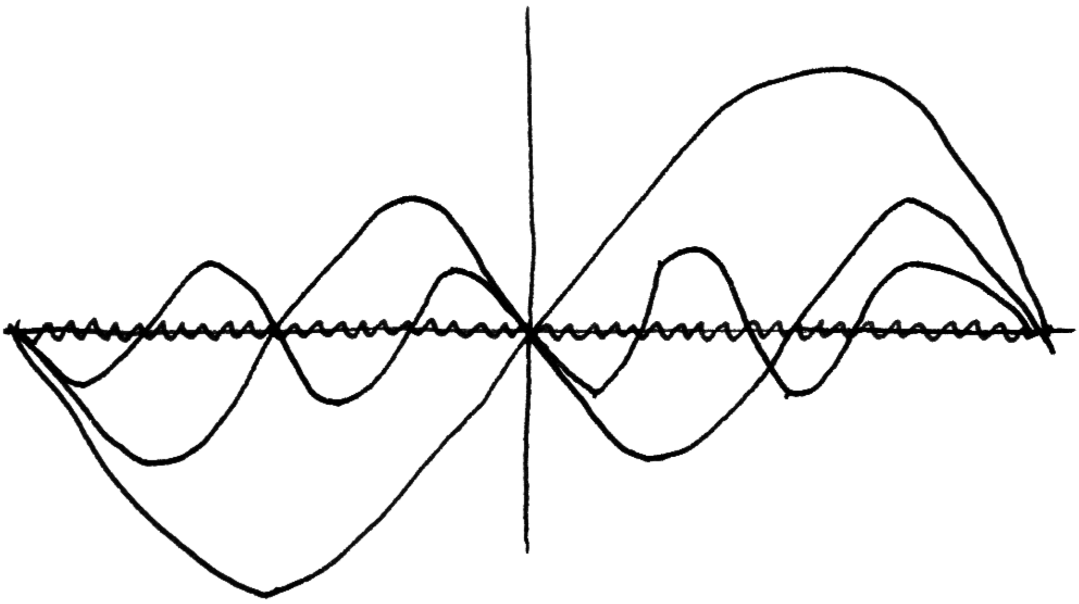
Satz 5.1.15 (Integration und Differentiation von Potenzreihen). *1. Ist eine Funktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so konvergiert auch die Potenzreihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \tfrac{1}{\nu+1} a_\nu x^{\nu+1}$$

auf $(-r, r)$, und zwar gegen eine Stammfunktion von f;



Einige Glieder einer Funktionenfolge, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Integrale jedoch nicht gegen das Integral der Nullfunktion konvergieren.



Einige Glieder einer Funktionenfolge vom Typ $f_n = \frac{1}{n}\sin(nx)$, die gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Ableitungen jedoch nicht gleichmäßig gegen die Ableitung der Nullfunktion konvergieren.

2. *Ist eine Funktion $g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$, so ist g differenzierbar und die Potenzreihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$$

konvergiert auf $(-r, r)$ gegen die Ableitung g' unserer Funktion g.

Beweis. 1. Man wende den vorhergehenden Satz 5.1.13 auf die Folge $f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ der Partialsummen an.

2. Wir zeigen zunächst, daß die Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$ auch auf $(-r, r)$ konvergiert. Nach dem Quotientenkriterium 3.1.19 konvergiert schon mal die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu z^{\nu-1}$ für $|z| < 1$. Für $|x| < r$ wählen wir nun ein ρ mit $|x| < \rho < r$ und dazu eine Schranke B mit $|b_\nu \rho^{\nu-1}| \leq B$ für alle ν. Dann können wir abschätzen

$$|\nu b_\nu x^{\nu-1}| = \left|\nu b_\nu \rho^{\nu-1}(x/\rho)^{\nu-1}\right| \leq \nu B z^{\nu-1}$$

für $z = |x/\rho| < 1$. Nach dem Majorantenkriterium 3.1.18 konvergiert also die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$. Dann wissen wir aber nach Teil 1, daß für die Funktion $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$ unser $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ eine Stammfunktion ist. □

Definition 5.1.16. Die n**-te Ableitung** einer Funktion f bezeichnen wir, falls sie existiert, mit $f^{(n)}$. Es ist also $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f$“ und allgemein $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

5.1.17. Ist eine Funktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die für $x \in (-r, r)$ konvergente Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so folgt aus 5.1.15 sofort

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

Wenn also in anderen Worten eine fest vorgegebene Funktion f in einer Umgebung des Nullpunkts durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, so muß unsere Funktion dort beliebig oft differenzierbar sein und die fragliche Potenzreihe ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$$

Diese Potenzreihe hinwiederum kann man ganz allgemein für jede in einer Umgebung des Nullpunkts beliebig oft differenzierbare Funktion erklären. Sie heißt dann die **Taylorreihe** besagter Funktion oder genauer ihre **Taylorreihe am Nullpunkt**, muß aber keineswegs positiven Konvergenzradius haben und muß, selbst wenn sie positiven Konvergenzradius hat, keineswegs gegen besagte Funktion konvergieren. Zum Beispiel hat nach 4.4.15 die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0; \end{cases}$$

im Nullpunkt die Ableitungen $f^{(\nu)}(0) = 0 \ \forall \nu \geq 0$, aber dennoch gilt $f(x) > 0$ für $x > 0$. Inwiefern die Taylorreihe dennoch unsere Funktion recht gut approximiert, erklären wir in 5.2.

Definition 5.1.18 (Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \text{ falls } k \geq 1 \text{ und } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Proposition 5.1.19 (Binomische Reihe). *Für $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Vorschau 5.1.20. Sobald wir komplexe Zahlen und in 4.10.3 komplexe Exponenten eingeführt haben, wird der Leser erkennen, daß die Proposition mit demselben Beweis auch für $x, \alpha \in \mathbb{C}$ gilt, vergleiche [FT1] 2.2.15. Aus unseren Überlegungen in 5.1.17 folgt auch unmittelbar, daß die Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung von $(1+x)^\alpha$, wenn es sie denn gibt, notwendig die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten sein müssen. Daß es aber eine derartige Entwicklung auch wirklich gibt, muß noch gezeigt werden. Also an die Arbeit!

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ kennen wir diese Formel schon: Im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{\alpha}{k} = 0$ falls $k > \alpha$ und wir erhalten einen Spezialfall der binomischen Formel [GR] 3.4.9. Im Fall $\alpha = -1$ gilt $\binom{\alpha}{k} = (-1)^k$ und wir erhalten die geometrische Reihe 3.1.5 für $-x$. Unter der Annahme $\alpha \notin \mathbb{N}$ sagt uns das Quotientenkriterium, daß die Potenzreihe rechts für $|x| < 1$ konvergiert, sagen wir gegen die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. Ich behaupte $(1 + x)f'(x) = \alpha f(x)$. Das prüft man durch gliedweises Differenzieren der binomischen Reihe mithilfe der Beziehung

$$\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} = \binom{\alpha}{k}$$

die durch eine kurze Rechnung gezeigt wird. Rechenfaule können das auch als eine Gleichheit von Polynomen in α verstehen, von der wir bereits wissen, daß sie nach Einsetzen von $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt, und die folglich als Gleichheit von Polynomen gelten muß, da ja Polynome nur endlich viele Nullstellen haben. Aus

$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ und $f(0) = 1$ folgt aber schon $f(x) = (1+x)^\alpha$, denn setzt man $\varphi(x) = f(x)/(1+x)^\alpha$, so gilt $\varphi(0) = 1$ und

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = 0 \qquad \square$$

Beispiel 5.1.21. Die Darstellung

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad \forall x \in (-1,1)$$

ergibt sich, indem wir die geometrische Reihe $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots$ gliedweise integrieren. Ähnlich ergibt sich die Entwicklung von $\operatorname{arsinh}(x)$ in eine Potenzreihe, indem wir die binomische Reihe zu $(1+x^2)^{-1/2}$ gliedweise integrieren.

Beispiel 5.1.22. Aus unserer Formel $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ nach 4.4.13 ergibt sich die Reihenentwicklung

$$\arcsin(x) = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots \quad \forall x \in (-1,1)$$

In der Tat gilt $\arcsin(x) = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}t$, und nach der binomischen Reihe 5.1.19 haben wir

$$(1-t^2)^{-(1/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-t^2)^k = 1 + \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,t^4 + \ldots$$

Beispiel 5.1.23. Mit unserer Formel $\arctan'(t) = 1/(1+t^2)$ für die Ableitung des Arcustangens aus 4.4.14 erhalten wir durch gliedweises Integrieren der geometrischen Reihe 3.1.5 für den Arcustangens für $|t| < 1$ die Reihenentwicklung

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \ldots$$

und mit dem Abel'schen Grenzwertsatz 5.4.2 ergibt sich

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$$

Es scheint, daß diese Formel bereits in dem 1530 erschienenen Analysis-Buch „Ganita Yuktibhasa“ des Autors Jyesthadeva zu finden ist, eines Mathematikers aus Kerala in Indien, und daß sie auf den indischen Mathematiker Madhava zurückgeht.

Beispiel 5.1.24. Um die fünfte Ableitung bei $x = 0$ von $(\mathrm{e}^{x^2} \sinh x)$ bestimmen, rechnen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x^2} &= 1 + x^2 + \tfrac{x^4}{2} + \tfrac{x^6}{3!} + \dots \\ \sinh x &= x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \dots \\ \mathrm{e}^{x^2} \sinh x &= x + x^3(\tfrac{1}{3!} + 1) + x^5\left(\tfrac{1}{5!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

Hier haben wir einmal unsere Erkenntnisse über das Produkt absolut konvergenter Reihen verwendet. Die gesuchte fünfte Ableitung bei $x = 0$ ergibt sich mit 5.1.17 zu

$$5!\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2}\right) = 1 + 20 + 60 = 81$$

5.1.25. Die Formel für die binomische Reihe kann umgeschrieben werden zur nun für alle $y \in (0, 2)$ gültigen Darstellung

$$y^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (y-1)^k$$

Gehört allgemeiner ein Punkt p zum Definitionsbereich einer Funktion f, so bezeichnen wir eine Darstellung von f der Gestalt

$$f(p+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu h^\nu \qquad \text{alias} \qquad f(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (y-p)^\nu$$

als eine **Entwicklung von f in eine Potenzreihe um den Punkt** p. Mit denselben Argumenten wie zuvor gilt dann $a_\nu = f^{(\nu)}(p)/\nu!$. Ist allgemeiner f beliebig oft differenzierbar bei p, so erklären wir die **Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt** p als die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} h^\nu$$

Auch wenn die Partialsummen dieser Reihe nicht gegen $f(p+h)$ konvergieren müssen, liefern sie doch die „bestmöglichen“ Approximationen von $f(p+h)$ durch Polynome in h von einem vorgegebenen maximalen Grad, wie wir im folgenden Abschnitt 5.2 ausführen werden.

Übungen

Übung 5.1.26. Ist $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge von von Null verschiedenen reellen Zahlen und existiert der Grenzwert $\lim_{\nu \to \infty} |a_\nu / a_{\nu+1}|$ in $[0, \infty]$, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$.

Ergänzende Übung 5.1.27. Eine Funktion, die für jeden Punkt ihres Definitionsbereichs in einer Umgebung besagten Punktes durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, heißt **analytisch**. Wir werden erst in [FT1] 2.2.7 im Rahmen der Funktionentheorie zeigen, daß Potenzreihen analytische Funktionen liefern: Dort geht es mit den Tricks der Funktionentheorie sehr elegant, wir könnten es aber etwas weniger elegant auch hier schon zeigen. Man zeige: Stimmen zwei auf demselbem reellen Intervall definierte analytische Funktionen auf der Umgebung eines Punktes aus unserem Intervall überein, so sind sie gleich. Hinweis: Man betrachte das Supremum der Menge aller Punkte, an denen unsere beiden Funktionen übereinstimmen.

Ergänzende Übung 5.1.28. Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{1+x}$? Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2+x}$? Gemeint ist jeweils die Entwicklung um $x = 0$.

Ergänzende Übung 5.1.29. Wir würfeln mit einem Würfel eine unendlich lange Zahlenreihe. Anschaulich ist klar, daß der durchschnittliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einsen gerade Sechs sein muß. Betrachtet man nun die Wahrscheinlichkeiten, daß die nächste Eins beim nächsten Wurf, beim übernächsten Wurf etc. kommt, multipliziert sie jeweils mit Eins, Zwei etc. und summiert diese Produkte auf, so sollte sich auch dieser dieser durchschnittliche Abstand ergeben. Die Aufgabe ist nun, zu beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

auch tatsächlich gegen 6 konvergiert.

5.2 Taylorentwicklung

5.2.1. Um im folgenden auch den Fall $n = 0$ zulassen zu dürfen, vereinbaren wir, daß „0-mal differenzierbar bei p“ zu verstehen sein soll als „stetig bei p“.

Satz 5.2.2 (Taylorentwicklung). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ auf ganz I existiert und deren n-te Ableitung $f^{(n)}(p)$ an einer Stelle $p \in I$ existiert. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Polynom Q vom Grad $\leq n$ mit der Eigenschaft*

$$f(x) = Q(x) + (x-p)^n \varepsilon(x-p)$$

für eine Funktion ε mit $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$;

2. *Dieses Polynom kann auch charakterisiert werden als das eindeutig bestimmte Polynom Q vom Grad $\leq n$, dessen Ableitungen bei p bis zur n-ten Ableitung einschließlich mit den entsprechenden Ableitungen bei p unserer Funktion f übereinstimmen, in Formeln $f^{(\nu)}(p) = Q^{(\nu)}(p)$ für $0 \leq \nu \leq n$.*

5.2.3. Wir nennen Q das **Approximationspolynom bis zur Ordnung** n **an** f **bei** p. Der Graph des Approximationspolynoms bis zur ersten Ordnung heißt die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$, der Graph des Approximationspolynoms bis zur zweiten Ordnung die **Schmiegeparabel**.

Beweis. Sicher gibt es genau ein Polynom Q, das die Bedingung aus Teil 2 erfüllt, nämlich das Polynom

$$Q(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}(x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

das aus den ersten $n+1$ Termen der Taylorreihe von f beim Entwicklungspunkt p besteht. Betrachten wir für dieses Polynom Q die Differenz $r = f - Q$, so verschwinden die ersten n Ableitungen von r bei $x = p$ und wir erhalten durch wiederholte Anwendung der Regeln von de l'Hospital 4.6.1 und die Definition von $r^{(n)}(p)$ in der Tat

$$\lim_{x \to p} \frac{r(x)}{(x-p)^n} = \ldots = \lim_{x \to p} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-p)} = \frac{r^{(n)}(p)}{n!} = 0$$

Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß kein anderes Polynom $\hat{Q}$ die Bedingung aus Teil 1 erfüllen kann. In der Tat folgt aber für zwei Polynome vom Grad $\leq n$ aus

$$\lim_{x \to p} \frac{\hat{Q}(x) - Q(x)}{(x-p)^n} = 0$$

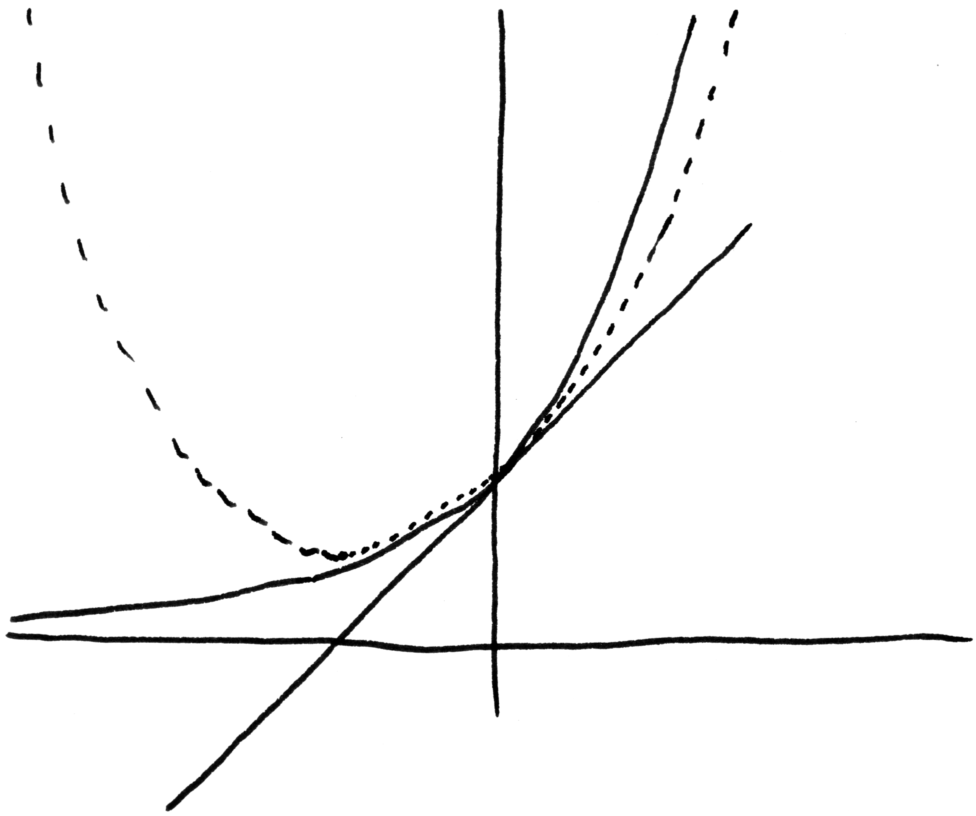
nach 2.6.17 bereits $\hat{Q}(x) = Q(x)$. □

5.2.4. Wir können die Aussage des Satzes dahingehend umformulieren, daß gilt

$$f(p+h) = f(p) + f'(p)h + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + h^n \varepsilon(h)$$

für eine Funktion ε mit $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Schärfere Abschätzungen für das Restglied unter stärkeren Annahmen an die zu approximierende Funktion liefert die gleich folgende Proposition.

Proposition 5.2.5 (Restglieddarstellungen zur Taylorentwicklung). *Gegeben $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall, $p \in I$ ein Punkt und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*



Eine unvollkommene Darstellung der Tangente $y = x + 1$ und Schmiegeparabel $y = x^2/2 + x + 1$ an den Graph der Exponentialfunktion im Punkt $(0, 1)$.

Lagrange'sche Form des Restglieds: *Ist f auf dem ganzen Intervall I sogar $(n+1)$-mal differenzierbar, so gibt es für alle $x \in I$ ein ξ zwischen p und x mit*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!}(x-p)^\nu + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$$

Integraldarstellung des Restglieds: *Ist $f^{(n+1)}$ zusätzlich auch noch stetig auf ganz I, so gilt für alle $x \in I$ die Formel*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!}(x-p)^\nu + \frac{1}{n!}\int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Beweis. Wir kürzen die Summe wie zuvor mit $\sum = Q(x)$ ab. Für den Rest $r(x) = f(x) - Q(x)$ verschwinden, wie wir bereits wissen, die ersten n Ableitungen bei $x = p$, und unter unseren zusätzlichen Voraussetzungen ist r sogar $(n+1)$-mal differenzierbar auf ganz I mit $r^{(n+1)} = f^{(n+1)}$. Um daraus die beiden Darstellungen des Restglieds zu erhalten, brauchen wir nur zwei einfache Rechnungen.

1. Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz und der Erkenntnis, daß Nenner und Zähler bei $x = p$ verschwinden, erhalten wir unter der Annahme $p \neq x$ sofort

$$\frac{r(x)}{(x-p)^{n+1}} = \frac{r'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-p)^n} = \frac{r''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-p)^{n-1}} = \ldots = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

2. Durch wiederholtes partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} r(x) = \int_p^x r'(t)\mathrm{d}t = \int_p^x (x-t)r''(t)\mathrm{d}t & = & \frac{1}{2}\int_p^x (x-t)^2 r'''(t)\mathrm{d}t \\ & = & \ldots \\ & = & \frac{1}{n!}\int_p^x (x-t)^n r^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \end{array}$$ □

5.2.6. Diese Abschätzungen liefern umgekehrt auch zwei alternative Beweise für den Satz über die Taylorentwicklung. Allerdings benötigen diese alternativen Beweise wesentlich stärkere Voraussetzungen als unser ursprünglicher Beweis.

Übungen

Ergänzende Übung 5.2.7. Ist eine Funktion auf einem offenen Intervall n-mal stetig differenzierbar für $n \geq 1$ und verschwinden an einer Stelle p alle ihre höheren Ableitungen unterhalb der n-ten, so hat sie bei p ein isoliertes lokales Maximum beziehungsweise Minimum, falls n gerade ist und die n-te Ableitung bei p negativ beziehungsweise positiv, und kein lokales Extremum, falls n ungerade ist. Wem diese Übung zu einfach ist, der mag dasselbe zeigen unter der schwächeren Annahme, daß $f^{(n-1)}$ zwar bei p, aber nicht notwendig auf dem ganzen Intervall differenzierbar ist.

Übung 5.2.8. Gegeben eine differenzierbare Funktion f auf einem offenen reellen Intervall $I \Subset \mathbb{R}$, deren Ableitung bei $p \in I$ differenzierbar ist, zeige man

$$f''(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

5.3 Rechnen mit Approximationen

Definition 5.3.1. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen. Sei $p \in D$ ein Punkt und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir sagen, f und g **stimmen bei** p **überein bis zur Ordnung** n und schreiben

$$f \sim_p^n g \qquad \text{oder genauer} \qquad f(x) \sim_{x=p}^n g(x),$$

wenn gilt $f(p+h) = g(p+h) + h^n \varepsilon(h)$ für eine Funktion ε, die stetig ist bei Null mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$, und die eben definiert ist auf der Menge aller h mit $p + h \in D$.

5.3.2. Die Notation $f \sim_p^n g$ scheint mir bequem und suggestiv, sie ist jedoch unüblich. Häufig nennt man eine Funktion, die bei $x = 0$ mit der Nullfunktion übereinstimmt bis zur Ordnung n, auch ein **kleines o von** x^n und bezeichnet so eine Funktion mit $\mathrm{o}(x^n)$. In dieser Notation würde man statt $f \sim_p^n g$ schreiben $f(x) = g(x) + \mathrm{o}((x-p)^n)$.

5.3.3. Natürlich folgt aus $f \sim_p^n g$ und $g \sim_p^n h$ schon $f \sim_p^n h$. Sind P und Q Polynome vom Grad $\leq n$ und ist p ein Häufungspunkt von D, so folgt aus $P \sim_p^n Q$ schon $P = Q$. Der Satz über die Taylorentwicklung 5.2.2 liefert uns für eine n-mal stetig differenzierbare Funktion f auf einem halboffenen Intervall D das eindeutig bestimmte Polynom Q vom Grad $\leq n$, das bei p mit f übereinstimmt bis zur Ordnung n. Genauer besagt dieser Satz, daß dieses Polynom Q charakterisiert wird durch die Bedingungen $Q^{(\nu)}(p) = f^{(\nu)}(p)$ für $0 \leq \nu \leq n$.

Satz 5.3.4 (Rechnen mit Approximationen). *1. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen. Sei $p \in D$ ein Punkt und seien P, Q Polynome mit $f \sim_p^n P$ und $g \sim_p^n Q$. So folgt*

$$f + g \sim_p^n P + Q \qquad \textit{und} \qquad fg \sim_p^n PQ$$

2. **(Höhere Kettenregel).** *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ auf Teilmengen $D, E \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen mit $f(D) \subset E$. Sei $p \in D$ ein Punkt und seien P, Q Polynome mit $f \sim_p^n P$ und $g \sim_{f(p)}^n Q$. So folgt*

$$g \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

5.3.5. Im Fall $n = 0$ spezialisiert dieser Satz zur Stetigkeit von Summen und Produkten 2.3.2 sowie Verknüpfungen 2.3.16. Im Fall $n = 1$ spezialisiert er zur Summenregel 4.4.1, Produktregel 4.4.1 und Kettenregel 4.4.6.

Beweis. 1. Das bleibt dem Leser überlassen. Im Fall der Summe gilt das sogar für beliebige Funktionen P und Q, im Fall des Produkts reicht anstelle der Polynomialität die zusätzliche Annahme, daß P und Q in einer Umgebung von p beschränkt sind.

2. Wir zeigen zunächst $g \circ f \sim_p^n Q \circ f$ und dann $Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$. Zum Beweis der ersten Aussage schreiben wir $g(y) = Q(y) + (y - f(p))^n \varepsilon(y - f(p))$ für ε stetig bei Null mit Funktionswert Null. Durch Einsetzen von $y = f(x)$ und Erweitern des letzten Terms mit $(x - p)^n$ erhalten wir

$$(g \circ f)(x) = (Q \circ f)(x) + (x - p)^n \left[\left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right)^n \varepsilon(f(x) - f(p)) \right]$$

für alle $x \neq p$. Im Fall $n \geq 1$ stimmt f bei p bis mindestens zur Ordnung 1 überein mit dem Polynom P, folglich ist f differenzierbar bei p und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \to p$ gegen Null. Im Fall $n = 0$ stimmt f bei p bis zur Ordnung 0 überein mit dem Polynom P, also ist f zumindest stetig in p und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \to p$ wieder gegen Null. Wir müssen also nur noch für jedes Polynom Q zeigen

$$Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

Das hinwiederum folgt sofort aus Teil 1. □

Beispiel 5.3.6. Um die sechste Ableitung bei $x = 0$ von $1/\cosh(x)$ zu berechnen, erinnern wir uns an

$$\begin{aligned} \cosh x &= 1 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!} + \dots \\ (1+y)^{-1} &= 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^6 \dots \end{aligned}$$

wo wir Gleichheitszeichen und Pünktchen geschrieben haben statt $\sim^6$ mit entsprechenden Spezifikationen. Mit unserer „höheren Kettenregel“ 5.3.4 erhalten wir dann sofort

$$\begin{aligned} 1/\cosh(x) &= 1 - (\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!}) \\ &\quad +(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!})^2 \\ &\qquad -(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!})^3 + \ldots \end{aligned}$$

Als Koeffizient von x^6 ergibt sich

$$-\frac{1}{6!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6!}(-1 + 30 - 90) = -\frac{61}{6!}$$

und die fragliche sechste Ableitung bei $x = 0$ ist mithin -61. Eine andere Möglichkeit wäre, das Approximationspolynom sechsten Grades an $1/\cosh(x)$ in $x = 0$ als $a_0 + a_1 x + \ldots + a_6 x^6$ anzusetzen und aus der „höheren Produktregel“ die Gleichung

$$\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_6 x^6\right) = 1 + bx^8 + \ldots$$

zu folgern, die es uns hinwiederum erlaubt, induktiv die a_ν zu bestimmen. Diese Rechnung kann im vorliegenden Fall zusätzlich vereinfacht werden durch die Erkenntnis, daß eh gilt $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \ldots$, da unsere Funktion gerade ist.

Ergänzung 5.3.7 (**Geschlossene Formel für die Catalan-Zahlen**). Wir zeigen nun die in [GR] 3.1.10 versprochene Formel

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

für die ebendort eingeführten Catalan-Zahlen C_n, die die Zahl der möglichen Verklammerungen eines Wortes in $(n+1)$ Symbolen angeben. Diese Zahlen erfüllen offensichtlich die Rekursion

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

Die **erzeugende Funktion** der Folge der Catalan-Zahlen alias die formale Potenzreihe $P = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ erfüllt demnach im Ring der formalen Laurentreihen aus [LA1] 4.3.41 die Formel $xP^2 = P - 1$ alias $P^2 - \frac{1}{x}P + \frac{1}{x} = 0$. Damit folgt, immer im Ring der formalen Laurentreihen, eine Identität der Form

$$P = \frac{1}{2x} \pm \sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

falls die fragliche Wurzel im Ring der formalen Laurentreihen existieren sollte, wobei das Vorzeichen noch zu bestimmen ist. Nach 5.3.8 existiert diese Wurzel jedoch in der Tat und kann beschrieben werden durch die binomische Reihe

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

Deren konstanter Term ist Eins, so daß für unser Vorzeichen nur das Minus in Frage kommt. Damit muß notwendig gelten

$$P = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Die Koeffizienten unserer binomischen Reihe lassen sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n}(-1)^n 4^n &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-2n+3}{2}\right)(-1)^n 4^n \\ &= -\frac{1}{n!}(1\cdot 3\ldots(2n-3))2^n \\ &= \frac{-2(2(n-1))!}{(n-1)!(n-1)!} \end{aligned}$$

Die letzte Identität stimmt dabei nur für $n \geq 1$. Setzen wir nun alles zusammen, so ergibt sich wie gewünscht

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Übungen

Übung 5.3.8. Gegeben zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen auf einem Intervall ist die Taylorreihe ihrer Summe die Summe der Taylorreihen und die Taylorreihe des Produkts das Produkt der Taylorreihen. Hier verstehen wir Produkt und Summe von Potenzreihen im formalen Sinn, vergleiche [LA1] 4.3.40.

Ergänzende Übung 5.3.9. Man zeige, daß die Identitäten $\exp(\log(x+1)) = x+1$ und $\log((\mathrm{e}^x - 1) + 1) = x$ auch als formale Identitäten von Potenzreihen gelten, daß also etwa im ersten Fall für $k \geq 2$ gilt

$$\sum_{j(1)+\ldots+j(i)=k} \frac{1}{i!}\left(\frac{-(-1)^{j(1)}}{j(1)}\right)\cdots\left(\frac{-(-1)^{j(i)}}{j(i)}\right) = 0$$

wo die Summe über alle $i \geq 1$ und alle Abbildungen $j : \{1,\ldots,i\} \to \mathbb{N}_{\geq 1}$ läuft, bei denen k die Summe der Werte ist, wohingegen dieselbe Summe für

$k = 1$ gerade den Wert Eins ergibt. Allgemeiner führe man aus, inwiefern die Taylorreihe der Verknüpfung zweier unendlich oft differenzierbarer Funktionen gerade die Verknüpfung ihrer Taylorreihen ist.

Ergänzende Übung 5.3.10. Man zeige: Gegeben ein Kringhomomorphismus $\mathbb{Q} \hookrightarrow k$ liefert das formale Einsetzen in formale Potenzreihen eine Bijektion $\exp : tk[\![t]\!] \stackrel{\sim}{\to} 1 + tk[\![t]\!]$ mit der Inversen $\log$ gegeben durch die Potenzreihe von $\log(1+x)$. Diese Bijektion ist ein Gruppenisomorphismus zwischen der additiven Gruppe $tk[\![t]\!]$ und der multiplikativen Gruppe $1 + tk[\![t]\!]$.

5.4 Der Abel'sche Grenzwertsatz*

5.4.1. In diesem Abschnitt will ich mein Versprechen einlösen und die Formel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2$$

zeigen. Wenn wir $x = 1$ in die Reihenentwicklung von $\log(1 + x)$ einsetzen dürften, so folgte das sofort. Die Schwierigkeit liegt darin, daß wir bisher nur für $|x| < 1$ nachgewiesen haben, daß unsere Potenzreihe aus 5.1.21 gegen $\log(1 + x)$ konvergiert. Der folgende Satz hilft uns, diese Schwierigkeit zu überwinden, und wird auch in 4.4.14 bei der Herleitung der wunderbaren Formel $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$ benötigt. In beiden Formeln sehe aber eher schöne Blüten als zentrale Inhalte, und davon abgesehen spielt der abelsche Grenzwersatz im weiteren Verlauf der Vorlesung keine Rolle.

Satz 5.4.2 (Abel'scher Grenzwertsatz). *Konvergiert eine reelle Potenzreihe auch noch auf einem Randpunkt ihres Konvergenzbereichs, so stellt sie bis in diesen Randpunkt hinein eine stetige Funktion dar.*

Vorschau 5.4.3. Für diejenigen Leser, die bereits mit komplexen Potenzreihen vertraut sind, sei bemerkt, daß die entsprechende Aussage im Komplexen in dieser Form nicht mehr gilt. Mehr dazu finden Sie etwa in [FT1] 2.2.14.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $x = 1$ der besagte Randpunkt des Konvergenzbereichs ist. Sei also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Wir müssen zeigen, daß die Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x \in [0, 1]$ eine stetige Funktion darstellt. Dazu schreiben wir die Differenzen der Partialsummen in der Form

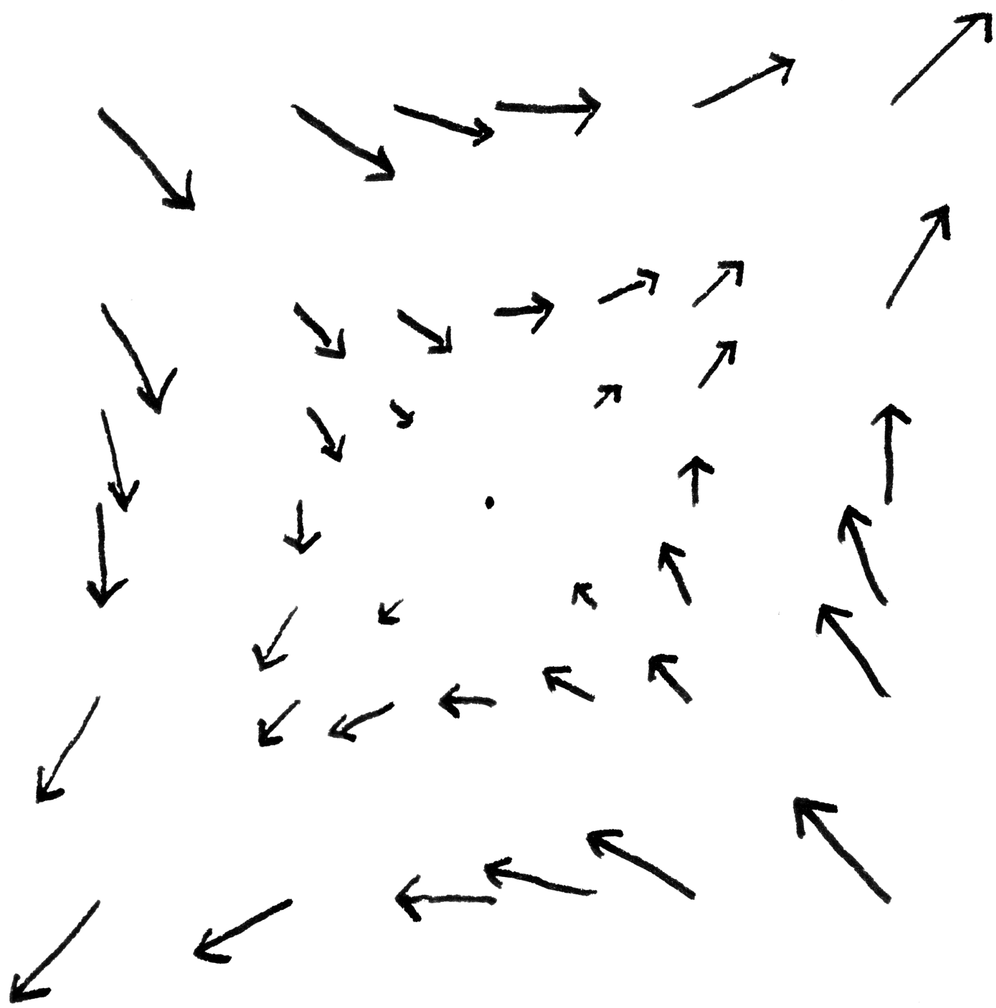
$$\begin{array}{rcrl}
\sum_{k=n}^{m} a_k x^k & = & (x^n - x^{n+1}) & (a_n) \\
 & + & (x^{n+1} - x^{n+2}) & (a_n + a_{n+1}) \\
 & + & (x^{n+2} - x^{n+3}) & (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\
 & & \ldots & \ldots \\
 & + & (x^{m-1} - x^m) & (a_n + \ldots\ldots\ldots + a_{m-1}) \\
 & + & x^m & (a_n + \ldots\ldots\ldots + a_{m-1} + a_m)
\end{array}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir nun wegen der Konvergenz unserer Reihe ein N derart, daß für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ gilt $|a_n + \ldots + a_m| \leq \varepsilon$. Für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ und alle $x \in [0, 1]$ folgt daraus die Abschätzung

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| \leq (x^n - x^m)\,\varepsilon + x^m \varepsilon \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Partialsummen auf $[0, 1]$ und damit die Stetigkeit der Grenzfunktion. □

Vorschau 5.4.4. Läßt sich die durch eine Potenzreihe im Inneren des Konvergenzintervalls definierte Funktion stetig auf einen Randpunkt fortsetzen, so muß die Potenzreihe an besagtem Randpunkt keineswegs konvergieren. Nehmen wir der Einfachkeit halber an, daß das Konvergenzintervall $(-1, 1)$ ist und der fragliche Randpunkt die 1, so folgt die Konvergenz von $\sum a_n$ jedoch aus der stetigen Fortsetzbarkeit der Funktion $\sum a_n x^n$ von $x \in [0, 1)$ auf $[0, 1]$ zusammen mit der **Tauber-Bedingung**, daß die Folge na_n betragsmäßig beschränkt sein möge. Unter der stärkeren Annahme $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ wurde das bereits von Tauber gezeigt.



Die Darstellung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y/4, x/4))$ als ebenes Vektorfeld. Als Abbildung der Ebene auf sich selber beschreibt sie eine Stauchung um den Faktor 4 gefolgt von einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen $y = x$.

6 Stetigkeit in mehreren Veränderlichen

6.1 Vorschläge zur Veranschaulichung

6.1.1. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ schreiben wir in der Form

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

oder abkürzend $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Man kann sich derartige Abbildungen auf die verschiedensten Arten vorstellen.

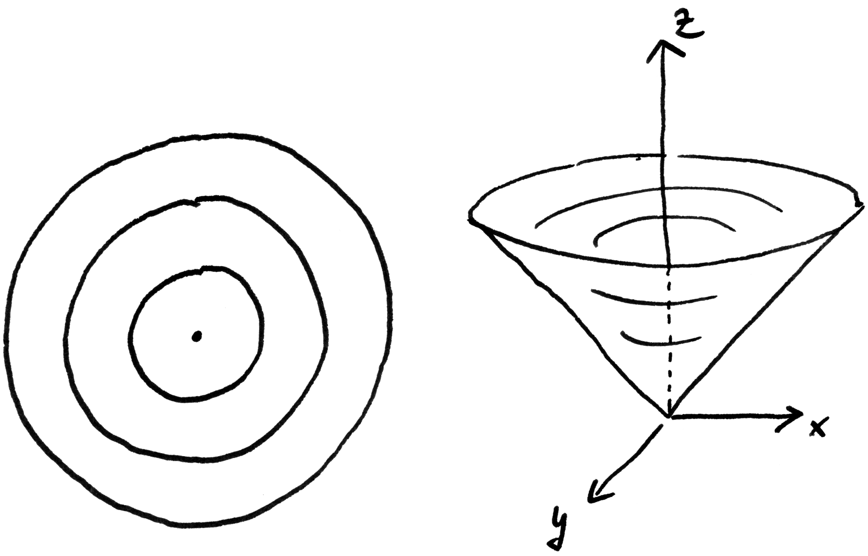
1. Den Fall $n = m = 1$ hatten wir schon in 2.2.1 ausführlich behandelt und sogar etwas allgemeiner mögliche Interpretationen einer Abbildung von $\mathbb{R}$ in einen beliebigen Raum bzw. von einem beliebigen Raum nach $\mathbb{R}$ besprochen: Erstere kann man sich etwa veranschaulichen als Beschreibung der Bewegung eines Teilchens in besagtem Raum, Letztere als eine Temperaturverteilung auf besagtem Raum.

2. Im Fall $n + m = 3$ kann man sich die Abbildung f ähnlich wie im Fall $n = m = 1$ durch ihren Graphen $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ bzw. $\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist anschaulich eine hügelige Landschaft. Der Graph einer Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sieht aus wie ein Draht im $\mathbb{R}^3$ mit genau einem Punkt für jede vorgegebene x-Koordinate. Zum Beispiel ist der Graph jeder konstanten Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Parallele zur x-Achse und der Graph jeder konstanten Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine „vollständig platte Landschaft“ alias eine zur (x, y)-Ebene parallele Ebene.

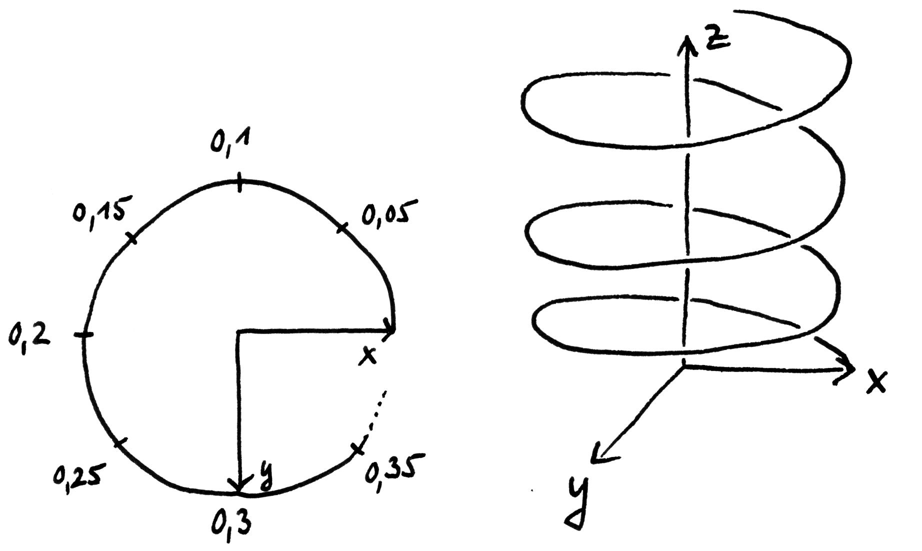
3. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann man auch graphisch darstellen, indem man auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ die **Niveaulinien** einzeichnet, die im Bild der Hügellandschaft die Höhenlinien in einer Landkarte für unsere Landschaft wären, in Formeln die Mengen $\{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$ für verschiedene, meist äquidistant gewählte $c \in \mathbb{R}$. Auch eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kann man sich noch mithilfe ihrer analog definierten **Niveauflächen** vorstellen, aber mit dem Zeichnen wird es dann schon schwierig.

4. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann man sich vorstellen als ein Vektorfeld, jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ wird ja in der Tat ein Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet.

5. Es ist auch oft nützlich, sich f wirklich als eine Abbildung vorzustellen. Die Abbildung $x \mapsto (x, x)$ ist in diesem Bild zum Beispiel die diagonale Einbettung der Zahlengerade in die Ebene, und $(x, y) \mapsto (y, x)$ ist die Spiegelung am Bild unserer diagonalen Einbettung.



Die Niveaulinien und der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$. Der Graph dieser Funktion hat die Gestalt einer Eistüte mit dem Öffnungswinkel $90°$, die mit ihrer Spitze senkrecht auf den Ursprung in der xy-Ebene steht.



Die Darstellung als bewegtes Teilchen und der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (\cos(2\pi z/(0,4)), \sin(2\pi z/(0,4)))$. Anders als im Text haben wir hier eine Funktion der z-Koordinate dargestellt.

6.1.2. Ich will den Begriff der Stetigkeit nun statt für Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gleich im allgemeineren Rahmen der sogenannten „metrischen Räume“ diskutieren, bei dem die bisherige stark von Koordinaten abhängige Darstellung von einer mehr abstrakt-geometrischen Sichtweise abgelöst wird. Dieser koordinatenfreie Zugang benötigt zwar einen größeren begrifflichen Aufwand, aber ich denke, dieser Aufwand lohnt, und zwar aus den folgenden Gründen: Erstens umfaßt unser Rahmen so auch unendlichdimensionale Räume wie zum Beispiel die für die Quantenmechanik wichtigen Hilberträume. Zweitens treten in meinen Augen auch schon im endlichdimensionalen Kontext die Zusammenhänge bei einer koordinatenfreien Behandlung klarer hervor. Man kennt das aus der Physik: Rechnet man wie üblich mit Einheiten, die ja mathematisch schlicht Basen eindimensionaler Vektorräume sind, so treten auch die Konsistenz und der Sinn physikalischer Formeln viel klarer zu Tage, als wenn man mit bloßen Zahlen arbeitet.

6.2 Stetigkeit bei metrischen Räumen

Definition 6.2.1. Unter einer **Metrik** d auf einer Menge X versteht man eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ derart, daß für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar $X = (X, d)$ bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X.

Beispiel 6.2.2. Der Buchstabe d steht in diesem Zusammenhang vermutlich für das Wort „Distanz“. Auf dem $\mathbb{R}^n$ liefert der übliche **euklidische Abstand** $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2}$ eine Metrik. Die Ungleichung aus der Definition einer Metrik wird in diesem Beispiel in [LA2] 1.2.20 formal bewisen und bedeutet anschaulich, daß in einem Dreieck mit Seitenlängen a, b, c stets gilt $a \leq b + c$. Sie heißt deshalb auch ganz allgemein die **Dreiecksungleichung**.

Beispiel 6.2.3. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist auch der **Betragsabstand**

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

eine Metrik. Wenn nichts anderes gesagt ist, fassen wir den $\mathbb{R}^n$ stets auf als einen metrischen Raum mit dem Betragsabstand als Metrik. Diese Metrik ist zwar weniger anschaulich als der euklidische Abstand, läßt sich aber einfacher handhaben.

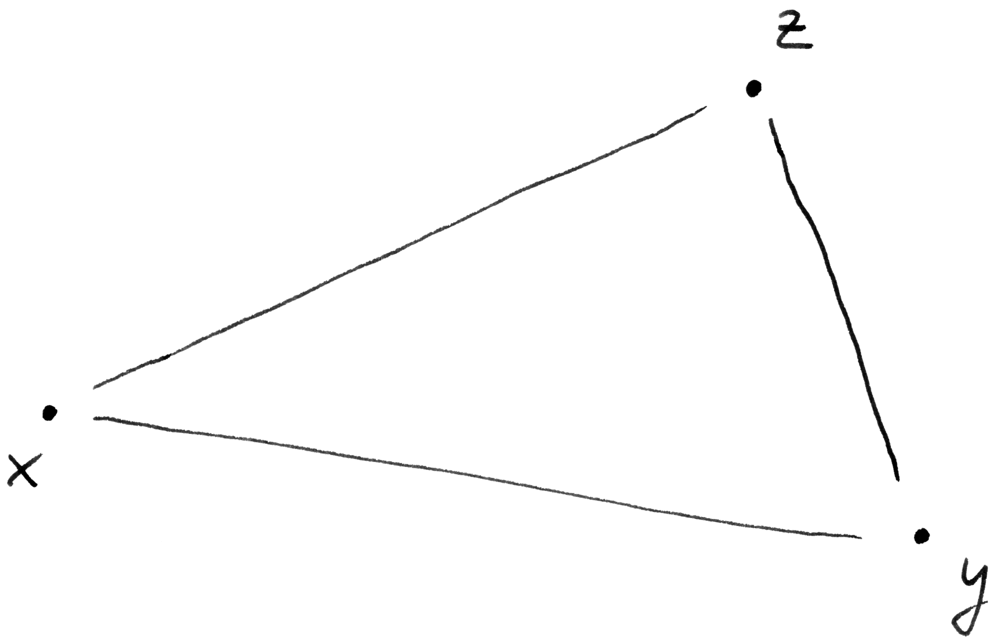


Illustration zur Dreiecksungleichung

Beispiel 6.2.4. Jede Teilmenge eines metrischen Raums ist mit der **induzierten Metrik** selbst ein metrischer Raum.

Definition 6.2.5. Sei X ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$\mathrm{B}(x;\varepsilon) := \{z \in X \mid d(x,z) < \varepsilon\}$$

Diese Menge heißt der ε-**Ball** um x oder auch die ε-**Kugel** um x oder auch die ε-**Umgebung** von x.

Beispiel 6.2.6. Für den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^3$ ist der Ball um x mit Radius ε anschaulich tatsächlich ein Ball. Für den Betragsabstand hat $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ dahingegen die Gestalt eines Würfels mit Mittelpunkt x und Seitenlänge 2ε.

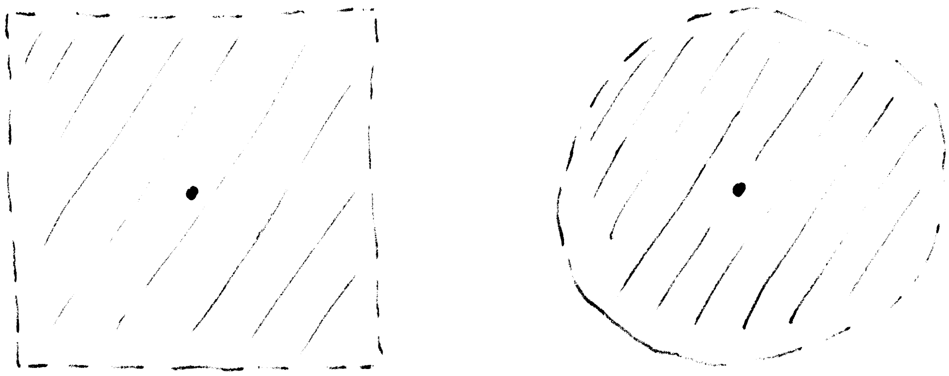
Definition 6.2.7. Unter einer **Umgebung** eines Punktes in einem metrischen Raum versteht man eine Teilmenge von besagtem Raum, die einen ganzen Ball um unseren Punkt umfaßt.

6.2.8 (**Vom Nutzen des Umgebungsbegriffs**). Die Umgebungen eines Punktes im $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik sind dieselben wie seine Umgebungen bezüglich der Betragsmetrik, was man unschwer explizit prüft und was formal auch aus 7.4.12 folgen wird. Das ist der Grund dafür, daß wir im Folgenden unsere Definitionen nach Möglichkeit mithilfe von Umgebungen formulieren: Für so definierte Begriffe ist a priori klar, daß im Fall des $\mathbb{R}^n$ ihre Bedeutung nicht davon abhängt, ob wir mit dem euklidischen Abstand oder mit dem Betragsabstand arbeiten.

6.2.9. Der Schnitt von endlich vielen Umgebungen eines Punktes in einem metrischen Raum ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Je zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raums besitzen disjunkte Umgebungen. Genauer sind für x, y mit $d(x,y) = r > 0$ die $(r/2)$-Bälle um x und y disjunkt. In der Tat folgte für z aus dem Schnitt ja mit Hilfe der Dreiecksungleichung $r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < r$, also kann es solch ein z nicht geben.

Definition 6.2.10. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt **stetig im Punkt** $p \in X$, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **stetig** genau dann, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.

Lemma 6.2.11 (ε-δ-**Kriterium**). *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist stetig im Punkt $p \in X$ genau dann, es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, daß gilt $f(\mathrm{B}(p;\delta)) \subset \mathrm{B}(f(p);\varepsilon)$.*



Bälle in der Ebene für den Betragsabstand und den euklidischen Abstand

Beweis. Ist f stetig bei p, so finden wir insbesondere für die Umgebung $U := \mathrm{B}(f(p);\varepsilon)$ von $f(p)$ eine Umgebung U' von p mit $f(U') \subset U$, und diese Umgebung U' muß dann ihrerseits einen Ball $\mathrm{B}(p;\delta)$ umfassen. Gilt umgekehrt das ε-δ-Kriterium und haben wir eine Umgebung U von $f(p)$ gegeben, so finden wir erst ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{B}(f(p);\varepsilon) \subset U$, können dann dazu ein δ finden mit $f(\mathrm{B}(p;\delta)) \subset \mathrm{B}(f(p);\varepsilon)$, und $U' := \mathrm{B}(p;\delta)$ schließlich ist die gesuchte Umgebung von p mit $f(U') \subset U$. □

Beispiel 6.2.12. Einfache Beispiele für stetige Abbildungen sind Einbettungen von einem Teilraum, konstante Abbildungen, oder auch die Projektion eines $\mathbb{R}^n$ auf eine Koordinate. In diesen Fällen können wir einfach $\delta = \varepsilon$ nehmen.

Beispiel 6.2.13. Als etwas kompliziertere Beispiele bemerken wir, daß **die Addition und die Multiplikation** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ beziehungsweise $(x, y) \mapsto xy$ **stetig sind.** Das ist im Wesentlichen die Aussage der ersten beiden Teile von Lemma 2.3.4.

6.2.14 (**Partiell stetig impliziert nicht stetig**). Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, daß sowohl $x \mapsto f(x, b)$ als auch $y \mapsto f(a, y)$ stetig sind für alle b bzw. alle a, daß aber dennoch die Funktion f selbst *nicht* stetig ist. Als Beispiel betrachte man die Funktion mit $(x, y) \mapsto xy/(x^2 + y^2)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $(0, 0) \mapsto 0$. Sie ist nicht stetig am Nullpunkt nach dem anschließenden Satz 6.2.15, da nämlich ihre Verknüpfung mit $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t)$ nicht stetig ist bei $t = 0$. Die Stetigkeit von $t \mapsto (t, t)$ hinwiederum mag man aus der Komponentenregel 6.2.18 folgern. Der Anschauung mag die Erkenntnis helfen, daß unsere merkwürdige Funktion, wenn man vom Ursprung selbst einmal absieht, auf allen Geraden durch den Ursprung konstant ist. Auf den beiden Koordinatenachsen ist unsere Funktion konstant Null, auf allen anderen Geraden durch den Ursprung jedoch nimmt sie nur am Ursprung den Wert Null an und sonst konstant einen von Null verschiedenen Wert.

Satz 6.2.15. *Jede Verknüpfung von stetigen Abbildungen ist stetig.*

Beweis. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen metrischen Räumen und $p \in X$ ein Punkt. Wir zeigen genauer: Ist f stetig bei p und g stetig bei $f(p)$, so ist $(g \circ f)$ stetig bei p. Ist in der Tat g stetig bei $f(p)$, so finden wir für jede Umgebung U von $g(f(p))$ eine Umgebung U' von $f(p)$ mit $g(U') \subset U$. Ist zusätzlich f stetig ist bei p, finden wir für diese Umgebung U' von $f(p)$ weiter eine Umgebung U'' von p mit $f(U'') \subset U'$. Damit haben wir aber auch eine Umgebung U'' von p gefunden mit $(g \circ f)(U'') \subset U$. □

Definition 6.2.16. Gegeben metrische Räume (X_i, d_i) für $1 \leq i \leq n$ machen wir das Produkt $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ zu einem metrischen Raum durch die **Produkt-**

metrik, indem wir für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vereinbaren

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

Beispiel 6.2.17. Der Betragsabstand auf $\mathbb{R}^{n+m}$ ist die Produktmetrik zu den Betragsabständen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Proposition 6.2.18 (Komponentenregel). *Seien Z und $X_1, \ldots, X_n$ metrische Räume und $f_i : Z \to X_i$ Abbildungen. Genau dann ist die Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : Z \to X_1 \times \ldots \times X_n$ stetig, wenn alle f_i stetig sind.*

6.2.19. Wenden wir diese Proposition an mit f der Identität auf einem Produkt, so impliziert die Stetigkeit der Identität, daß alle Projektionsabbildungen $\mathrm{pr}_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ stetig sein müssen.

Beweis. Da die Projektionen pr_i Abstände zwischen Punkten nie vergrößern, können wir ihre Stetigkeit direkt zeigen, indem „wir jeweils $\delta = \varepsilon$ nehmen“. Ist f stetig, so sind folglich auch die $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ stetig als Verknüpfungen stetiger Abbildungen. Sind umgekehrt alle f_i stetig in p, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ gewisse δ_i mit $d(p, z) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(p), f_i(z)) < \varepsilon$, wo d_i die Metrik auf X_i bezeichnet. Nehmen wir $\delta = \inf \delta_i$, so gilt

$$d(p, z) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(z)) < \varepsilon$$

und das ist gleichbedeutend zu $f(\mathrm{B}(p; \delta)) \subset \mathrm{B}(f(p); \varepsilon)$. □

Beispiel 6.2.20. Eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann stetig, wenn alle ihre Komponenten $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ stetig sind. Allgemeiner ist für einen metrischen Raum X eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ genau dann stetig, wenn alle ihre Komponenten $f_i : X \to \mathbb{R}$ stetig sind.

Korollar 6.2.21 (Summen und Produkte stetiger Abbildungen sind stetig). *Ist X ein metrischer Raum und sind f, g stetige Abbildungen $X \to \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$ und fg stetige Abbildungen $X \to \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir schreiben $f + g$ beziehungsweise fg als die Verknüpfung der nach 6.2.18 stetigen Abbildung $X \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ mit der nach 6.2.13 stetigen Addition beziehungsweise Multiplikation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. □

Beispiel 6.2.22. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Vorschrift

$$(x, y) \mapsto (x \sinh(y), x^2 y^3)$$

ist stetig. In der Tat reicht es nach der Komponentenregel zu zeigen, daß ihre beiden Komponenten f_1 und f_2 stetig sind. Wir zeigen das nur für die erste Komponente und überlassen die Behandlung der zweiten Komponente dem Leser. Warum also ist die Abbildung $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \sinh(y)$ stetig? Nun, $(x, y) \mapsto x$ ist stetig nach 6.2.19 als Projektion auf eine Koordinate, $(x, y) \mapsto y$ desgleichen, $(x, y) \mapsto \sinh(y)$ dann auch als Verknüpfung stetiger Funktionen, und schließlich auch $(x, y) \mapsto x \sinh(y)$ als Produkt stetiger Funktionen.

Übungen

Übung 6.2.23. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist für alle $z \in X$ die Abbildung $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, z)$ stetig. Hinweis: Dreiecksungleichung. Ist allgemeiner $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge, so ist auch die Abbildung $d_A : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ stetig. Alternativ verwenden wir auch die Notation $d(x, A) = d_A(x)$.

Übung 6.2.24. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist die Metrik stetig als Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

Übung 6.2.25. Wir versehen den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der Metrik $d(z, w) = |z - w|$. Man zeige, daß das in der Tat eine Metrik ist, und daß die Addition und die Multiplikation stetige Abbildungen $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind und das Bilden des Inversen eine stetige Abbildung $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Ergänzende Übung 6.2.26. Man zeige, daß das Invertieren von Matrizen eine stetige Abbildung $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ ist. Hinweis: Cramer'sche Regel [LA1] 5.4.6.

Übung 6.2.27. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen, die Abstände nicht verkleinert, in Formeln $d(f(x), f(z)) \geq d(x, z)\ \forall x, z \in X$. Man zeige, daß f injektiv ist und $f^{-1} : f(X) \to X$ stetig.

Übung 6.2.28. Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ist stetig. Jede multilineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{k(1)} \times \ldots \times \mathbb{R}^{k(r)} \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

6.3 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen

Definition 6.3.1. Sei $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$ eine Folge in einem metrischen Raum X und $x \in X$ ein Punkt. Wir sagen, die Folge x_n **strebt gegen** x oder **konvergiert gegen** x und nennen x den **Grenzwert der Folge**, wenn jede Umgebung von x fast alle Glieder unserer Folge enthält. Wir schreiben dann

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

Gleichbedeutend können wir ebensogut auch fordern, daß jeder Ball um x fast alle Glieder unserer Folge enthält.

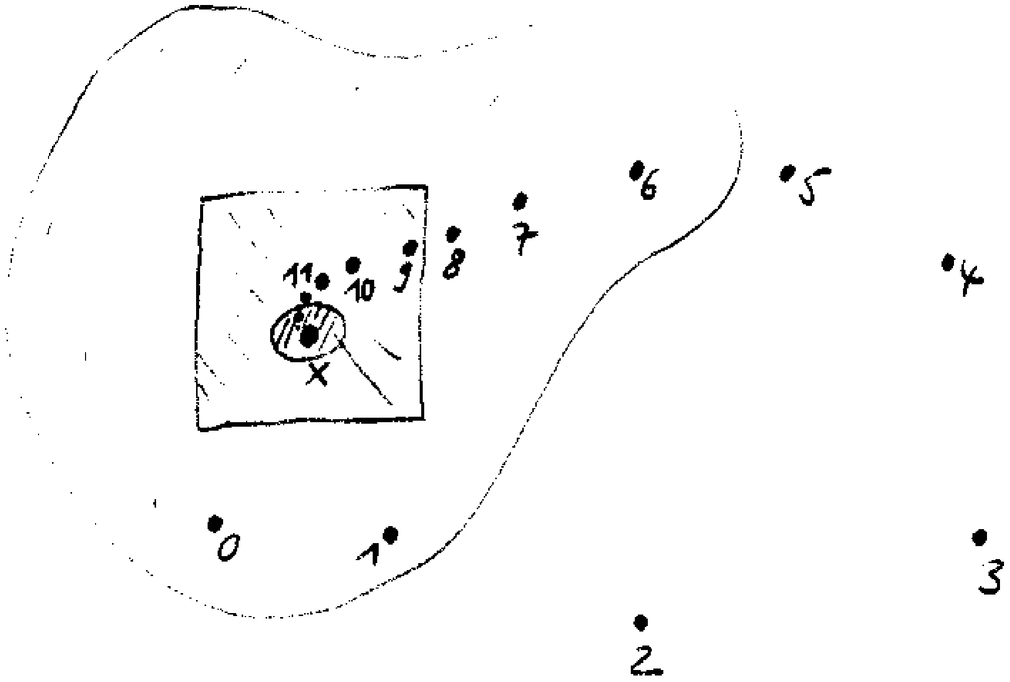


Illustration zur Konvergenz von Folgen. Eingezeichnet sind drei Umgebungen eines Punktes x, in jeder sollen fast alle Folgenglieder liegen.

6.3.2. Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig, wenn er existiert. Das folgt wie im Beweis von 2.5.5 daraus, daß nach 6.2.9 je zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raums disjunkte Umgebungen besitzen. Einen gemeinsame Verallgemeinerung für den im vorhergehenden eingeführten Begriff des Grenzwerts einer Folge in einem metrischen Raum und den in 2.5.6 eingeführten Grenzwertbegriff für Abbildungen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ geben wir in 6.8.6 im Kontext allgemeiner topologischer Räume.

Definition 6.3.3. Ein metrischer Raum heißt **beschränkt**, wenn es für die möglichen Abstände zwischen Punkten unseres Raums eine reelle obere Schranke gibt. Eine Abbildung in einen metrischen Raum heißt **beschränkt**, wenn ihr Bild beschränkt ist.

Beispiel 6.3.4. Sei D eine Menge und X ein metrischer Raum. Auf dem Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, X)$ aller beschränkten Abbildungen $f : D \to X$ kann man eine Metrik erklären durch die Vorschrift

$$d(f, g) = \sup\{d(f(p), g(p)) \mid p \in D\}$$

im Fall $D \neq \emptyset$ und in offensichtlicher Weise im Fall $D = \emptyset$. Diese Metrik heißt die **Metrik der gleichmäßigen Konvergenz**. In der Tat ist für f_n, f im Funktionenraum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, \mathbb{R})$ mit dieser Metrik die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

gleichbedeutend dazu, daß die Abbildungen f_n im Sinne unserer Definition 5.1.7 gleichmäßig gegen die Abbildung f konvergieren.

Definition 6.3.5 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz). Sei D eine Menge, X ein metrischer Raum, $f_n : D \to X$ eine Folge von Abbildungen und $f : D \to X$ eine weitere Abbildung.

1. Wir sagen, die Folge der f_n **konvergiere punktweise** gegen f, wenn gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(p) = f(p)$ für alle Punkte $p \in D$.

2. Wir sagen, die Folge der f_n **konvergiere gleichmäßig** gegen f, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon$ gibt mit

$$n \geq N \Rightarrow (d(f_n(p), f(p)) < \varepsilon \ \forall p \in D)$$

Übungen

Übung 6.3.6. Sei (x_n, y_n) eine Folge im Produkt $X \times Y$ der metrischen Räume X und Y. Genau dann konvergiert unsere Folge gegen (x, y), wenn x_n gegen x konvergiert und y_n gegen y. Man formuliere und beweise auch die offensichtliche Verallgemeinerung auf beliebige endliche Produkte metrischer Räume.

Übung 6.3.7. Für beschränkte Abbildungen von einer Menge D in einen metrischen Raum X ist auch in dieser Allgemeinheit gleichmäßige Konvergenz gleichbedeutend zur Konvergenz im Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, X)$ mit seiner eben erklärten „Metrik der gleichmäßigen Konvergenz“.

Übung 6.3.8. Für jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist die Menge der Folgenglieder beschränkt.

Übung 6.3.9 (**Stetigkeit als Folgenstetigkeit**). Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen. Genau dann ist f stetig in p, wenn für jede Folge x_n mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Hinweis: 2.5.28.

Übung 6.3.10 (**Stetigkeit komplexer Potenzreihen**). Man zeige, daß jede komplexe Potenzreihe eine stetige komplexwertige Funktion auf ihrer Konvergenzkreisscheibe $\{z \mid |z| < r\}$ liefert, für r der Konvergenzradius. Hinweis: Man kopiere den Beweis im Reellen. Inssbesondere sehen wir so ein zweites Mal, daß die komplexe Exponentialfunktion stetig ist.

6.4 Abgeschlossene und offene Teilmengen

Definition 6.4.1. Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt ein **Berührungspunkt von** A, wenn es eine Folge in A gibt, die gegen x konvergiert. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in** X, wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält, wenn sie also „abgeschlossen ist unter der Bildung von Grenzwerten“. Statt „A ist eine abgeschlossene Teilmenge von X“ schreiben wir kurz aber unüblich

$$A \overset{\vartriangle}{\subset} X$$

6.4.2. Wenn wir eine Menge einfach nur „abgeschlossen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „abgeschlossen“ gemeint ist. Ist X ein metrischer Raum und sind $U \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $U \overset{\vartriangle}{\subset} Y$, daß U abgeschlossen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Metrik.

Definition 6.4.3. Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt **offen** oder genauer **offen in unserem metrischen Raum** genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist, d.h. wenn sie mit jedem Punkt auch einen ganzen Ball um besagten Punkt enthält. Statt „U ist eine offene Teilmenge von X“ schreiben wir kurz aber unüblich

$$U \overset{\circ}{\subset} X$$

6.4.4. Wenn wir eine Menge einfach nur „offen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen“ gemeint ist. Ist X ein metrischer Raum und sind $U \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $U \circledcirc Y$, daß U offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Metrik.

Beispiele 6.4.5. In einem metrischen Raum ist ein Ball $\mathrm{B}(x; r)$ stets offen, denn für $z \in \mathrm{B}(x; r)$ gilt $d(x, z) < r$, also gibt es $\varepsilon > 0$ mit $d(x, z) < r - \varepsilon$, und dann haben wir aber $\mathrm{B}(z; \varepsilon) \subset \mathrm{B}(x; r)$ nach der Dreiecksungleichung. Insbesondere umfaßt jede Umgebung eines Punktes eine offene Umgebung desselben Punktes.

Satz 6.4.6 (Komplemente offener und abgeschlossener Teilmengen). *Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen genau dann, wenn ihr Komplement offen ist.*

Beweis. Sei X unser metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Ist M nicht abgeschlossen, so gibt es einen Punkt $p \in X \backslash M$, der Berührungspunkt von M ist, also $p = \lim_{n\to\infty} x_n$ mit $x_n \in M$. Dann kann es aber kein $\varepsilon > 0$ geben mit $\mathrm{B}(p; \varepsilon) \subset X \backslash M$, also ist $X \backslash M$ nicht offen. Ist $X \backslash M$ nicht offen, so gibt es einen Punkt $p \in X \backslash M$ derart, daß gilt

$$\mathrm{B}(p; 1/n) \cap M \neq \emptyset \quad \forall n \geq 1$$

Wählen wir jeweils einen Punkt $x_n \in \mathrm{B}(p; 1/n) \cap M$, so gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ und M ist nicht abgeschlossen. □

Übungen

Übung 6.4.7. Der Schnitt eines beliebigen Systems von abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die leere Menge und der ganze Raum sind abgeschlossen. Jede einpunktige und damit auch jede endliche Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Jedes kompakte reelle Intervall ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Ergänzende Übung 6.4.8. Ein Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn ihr Graph abgeschlossen ist im kartesischen Produkt unserer beiden Räume. Hinweis: 6.3.9

Ergänzende Übung 6.4.9. Jede abgeschlossene echte Untergruppe der reellen Zahlengeraden ist zyklisch, als da heißt von der Gestalt $\mathbb{Z}\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Hinweis: Ist $G \subset \mathbb{R}$ unsere Untergruppe, so betrachte man $\inf(G \cap \mathbb{R}_{>0})$.

Übung 6.4.10. Der Schnitt von endlich vielen offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die Vereinigung eines beliebigen Systems von offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die leere Menge und der ganze

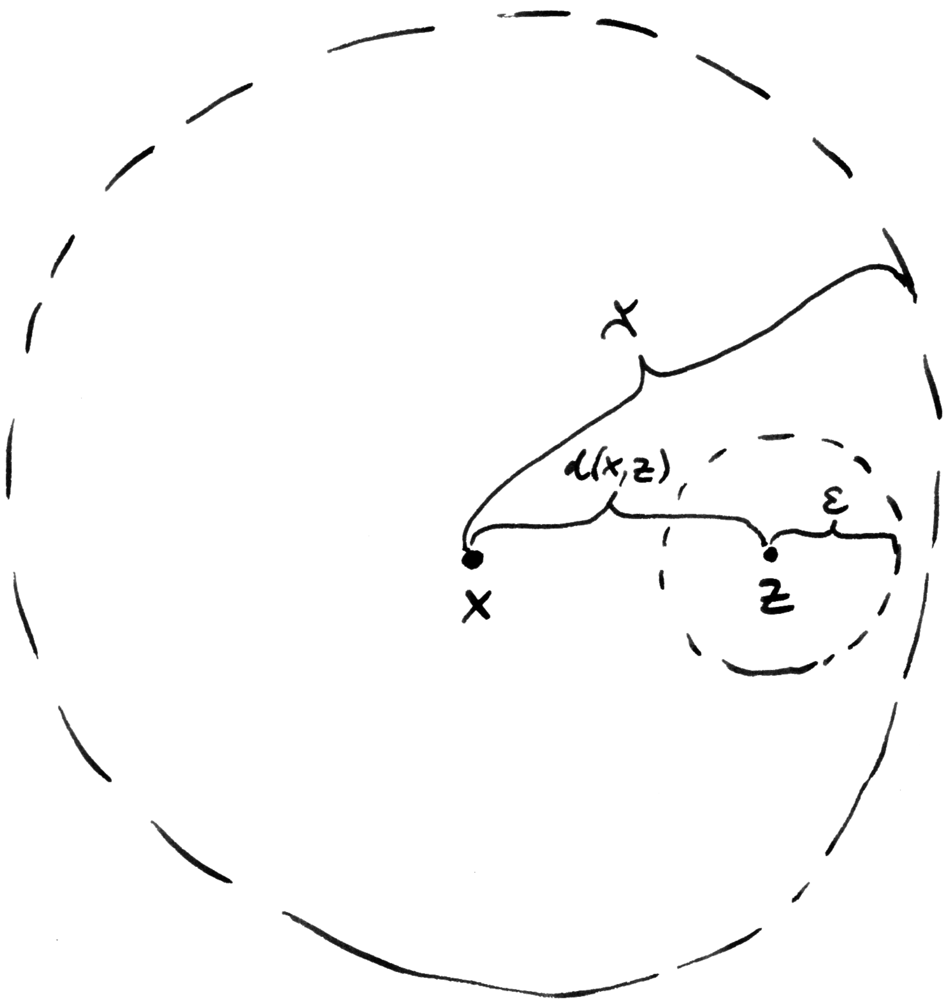


Illustration zu Beispiel 6.4.5: Ein Ball in einem metrischen Raum ist stets offen.

Raum sind offen. In einem endlichen metrischen Raum ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen. Die im Sinne unserer hier gegebenen Definition „offenen“ Intervalle von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle (a, b) für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, d.h. unsere „offenen reellen Intervalle“ aus 2.1.4.

Übung 6.4.11. Nimmt man zu einer Teilmenge M eines metrischen Raums X alle ihre Berührungspunkte hinzu, so erhält man eine abgeschlossene Menge, genauer: Die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfaßt. Diese Menge heißt auch der **Abschluß** von M in X und wird mit $\mathrm{Cl}_X(M) = \mathrm{Cl}(M) = \overline{M}$ bezeichnet.

6.4.12 (**Diskussion der Notation**). Diese Notation beißt sich mit unserer Notation $\overline{\mathbb{R}}$ für die erweiterten reellen Zahlen, obwohl natürlich $\overline{\mathbb{R}}$ schon auch der Abschluß von $\mathbb{R}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ ist. Ich hoffe, daß der Leser stets aus dem Kontext erschließen kann, was im Einzelfall jeweils gemeint ist. Soweit ich es abschätzen kann, werde ich $\overline{\mathbb{R}}$ nie als Bezeichnung für den Abschluß von $\mathbb{R}$ in einem anderen Raum als eben in $\overline{\mathbb{R}}$ selbst verwenden.

Ergänzende Übung 6.4.13. Sei X ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$ disjunkte, abgeschlossene Teilmengen. So gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Hinweis: Man betrachte d_A wie in Übung 6.2.23 mache den Ansatz $f(z) = g(d_A(z), d_B(z))$ für geeignetes $g : \mathbb{R}^2 \backslash 0 \to [0, 1]$.

Übung 6.4.14. Sei X ein metrischer Raum, $z \in X$ ein Punkt, $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. So ist die Menge $\{x \in X \mid d(x, z) \leq r\}$ abgeschlossen.

Übung 6.4.15. Ist X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so kann ihr Abschluß $\bar{A}$ in der Notation von 6.2.23 beschrieben werden als die Menge $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

Ergänzende Übung 6.4.16. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung metrischer Räume, so ist ihr Graph eine abgeschlossene Teilmenge $\Gamma(f) \subset_{\mathrm{A}} X \times Y$.

6.5 Topologische Räume

6.5.1 (**Motivation für die Einführung topologischer Räume**). Der Begriffsapparat der topologischen Räume wird erst später unumgänglich werden, in der für diese Vorlesungen vorgesehenen Entwicklung der Theorie erst bei der Diskussion von abstrakten Mannigfaltigkeiten in [ML] 3.1 folgende. Daß ich dennoch bereits hier mit einer ersten Einführung beginnen will, hat mehrere Gründe. Zum Ersten erlaubt dieser Begriffsapparat eine große Vereinheitlichung: Zum Beispiel können in diesem Rahmen alle bisher betrachteten Grenzwertbegriffe unter einen Hut gebracht werden, wie in 6.8.8 ausgeführt wird. Zum Zweiten erlaubt er es, den Begriff der Stetigkeit im Kontext endlichdimensionaler reeller Vektorräume sehr direkt zu fassen, indem man eben jeden derartigen Raum mit seiner „natürlichen Topologie“ aus 7.4.14 versieht. Sobald das einmal getan ist, kann man auch in diesem Kontext mit Stetigkeit arbeiten, ohne Koordinaten zu benötigen. Und zum Dritten scheint es mir auch unabhängig davon wichtig, daß Sie beizeiten mit diesem Begriffsapparat vertraut werden, der die ganze Mathematik durchdringt: Um ihn an einfachen Beispielen einzuüben, will ich deshalb alles, was in dieser Vorlesung ohne große Umwege in der Allgemeinheit topologischer Räume formuliert und bewiesen werden kann, auch in diesem Rahmen formulieren und beweisen. Vielfach werden die Aussagen und Beweise dadurch sogar einfacher, und ich denke, dieser Vorteil wiegt zum Teil bereits die zusätzlichen Schwierigkeiten auf, die durch das Erlernen dieses neuen Begriffsapparats und seiner Beziehungen zu den primären Zielen der Vorlesung entstehen. Ich beginne mit Vorübungen zur Mengenlehre.

6.5.2. Gegeben eine Menge X können wir die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X bilden, die sogenannte Potenzmenge von X. Weil es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, nenne ich wie in [LA1] 1.5.13 Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ lieber **Systeme von Teilmengen von** X und spreche im folgenden von **Teilsystemen**, wenn ich Teilmengen solcher Mengensysteme meine.

Definition 6.5.3. Gegeben eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Teilmengen einer Menge X im Sinne von [LA1] 1.6.8 erklärt man ihren **Schnitt** und ihre **Vereinigung** durch die Vorschriften

$$\begin{array}{rcl} \bigcap_{i \in I} X_i & := & \{x \in X \mid \text{Für alle } i \in I \text{ gilt } x \in X_i\} \\ \bigcup_{i \in I} X_i & := & \{x \in X \mid \text{Es existiert ein } i \in I \text{ mit } x \in X_i\} \end{array}$$

Insbesondere ist der Schnitt über die leere Familie von Teilmengen von X ganz X und die Vereinigung über die leere Familie von Teilmengen von X ist die leere Menge.

Ergänzung 6.5.4. In [LA2] 8.7 diskutieren wir allgemeiner Produkte und zusätzlich „disjunkte Vereinigungen" beliebiger nicht notwendig endlicher Familien von Mengen.

Definition 6.5.5. Eine **Topologie** $\mathcal{T}$ **auf einer Menge** X ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. In Formeln ausgedrückt fordern wir von einer Topologie $\mathcal{T}$ also:

1. $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$ für $n \geq 0$ und insbesondere auch $X \in \mathcal{T}$ als der Spezialfall $n = 0$. Gleichbedeutend dazu sind die beiden Forderungen $X \in \mathcal{T}$ sowie $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$;

2. $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$ und damit insbesondere auch $\emptyset \in \mathcal{T}$, da ja das leere Mengensystem $\mathcal{U} = \emptyset$ in jedem Mengensystem enthalten ist.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge mitsamt einer Topologie. Statt $U \in \mathcal{T}$ schreiben wir meist

$$U \circledast X$$

und nennen U eine **offene Teilmenge von** X. Die Notation $\circledast$ ist in der Literatur jedoch unüblich.

Definition 6.5.6. Seien X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine **Umgebung von** A, wenn es eine offene Menge $V \circledast X$ gibt mit $A \subset V \subset U$. Im Fall einer einelementigen Teilmenge $A = \{p\}$ sprechen wir auch von einer **Umgebung von** p.

Definition 6.5.7. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig im Punkt** $p \in X$, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **stetig** genau dann, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.

Beispiel 6.5.8. Für jeden metrischen Raum bildet das System seiner im Sinne von 6.4.3 offenen Teilmengen eine Topologie, die **metrische Topologie**. Wir fordern von einer Topologie *nicht*, daß ein beliebiger Schnitt offener Mengen stets wieder offen sein muß: Sonst müßten ja in unserem Beispiel der metrischen Räume alle einpunktigen Mengen offen sein, als Schnitte immer kleinerer Bälle. Da nach 6.4.5 Bälle in metrischen Räumen stets offen sind, ist in metrischen Räumen eine Umgebung eines Punktes im topologischen Sinne 6.5.6 dasselbe wie eine Umgebung im metrischen Sinne 6.2.7. Insbesondere ist eine Abbildung zwischen metrischen Räumen „topologisch stetig“ im Sinne der obigen Definition 6.5.7 genau dann, wenn sie „metrisch stetig“ ist im Sinne unserer Definition 6.2.10.

Beispiel 6.5.9 (**Topologie auf den erweiterten reellen Zahlen**). Auf unserer erweiterten reellen Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}}$ erklären wir eine Topologie durch die Vorschrift, daß eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen sein möge genau dann, wenn sie für jedes ihrer Elemente eine Umgebung im Sinne von 2.1.5 ist, wenn sie also mit jedem Punkt p auch ein ganzes Intervall $[a, b]$ um p umfaßt mit $a < p$ falls $p \neq -\infty$ und $p < b$ falls $p \neq \infty$. Unsere Umgebungen im Sinne von 2.1.5 sind dann auch genau die Umgebungen für diese Topologie im Sinne von 6.5.6, und eine Abbildung $\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist offensichtlich topologisch stetig im Sinne der obigen Definition 6.5.7 genau dann, wenn sie stetig ist im Sinne unserer Definition 2.2.3.

Beispiele 6.5.10. Es gibt auch Topologien, die unserer bis hierher entwickelten Anschauung eher ungewohnt sein mögen: Auf jeder Menge können wir etwa die **Klumpentopologie** betrachten, die nur aus der ganzen Menge und der leeren Menge besteht, oder die **diskrete Topologie**, bei der wir schlicht alle Teilmengen als offen ansehen. Einen topologischen Raum mit der diskreten Topologie nennen wir auch kurz einen **diskreten Raum**.

Beispiele 6.5.11. Jede konstante Abbildung ist stetig. Die Identität auf einem topologischen Raum ist immer stetig. Jede Abbildung in einen Raum mit der Klumpentopologie ist stetig. Jede Abbildung aus einem Raum mit der diskreten Topologie ist stetig.

Übungen

Ergänzende Übung 6.5.12 (**De Morgan'sche Regeln**). Man verallgemeinere die Formeln aus [GR] 2.2.13. Genauer schreibe man in Formeln und zeige, daß der Schnitt einer derartigen Vereinigung mit einer weiteren Menge die Vereinigung der Schnitte ist, die Vereinigung eines derartigen Schnitts mit einer weiteren Menge der Schnitt der Vereinigungen, das Komplement eines Schnitts die Vereinigung der Komplemente und das Komplement einer Vereinigung der Schnitt der Komplemente. Etwas allgemeiner zeige man für zwei Familien $(A_i)_{i\in I}$ und $(B_j)_{j\in J}$ von Teilmengen einer Menge X die Formeln $(\bigcup_{i\in I} A_i)\cap(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cap B_j)$ und $(\bigcap_{i\in I} A_i)\cup(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cup B_j)$. Besonders Mutige zeigen für eine durch eine Menge A indizierte Familie $(X_a)_{a\in A}$ von Teilmengen einer vorgegebenen Menge X die Formel und eine beliebige Abbildung $g : A \to J$ in eine weitere Menge J die Formel

$$\bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{g(a)=j} X_a\right) = \bigcup_{\substack{s:J\to A\\ g\circ s=\mathrm{id}}}\left(\bigcap_{j\in J} X_{s(j)}\right)$$

Hier läuft die Vereinigung rechts also über alle Schnitte $s : J \to A$ von g. Durch Übergang zu den Komplementen folgert man die Gültigkeit einer analogen Formel, in der $\cup$ und $\cap$ vertauscht sind.

Übung 6.5.13. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Ist f stetig in $p \in X$ und g stetig in $f(p) \in Y$, so ist $g \circ f$ stetig in p. Hinweis: 6.2.15.

6.6 Induzierte Topologie

6.6.1. Um die Beziehung zu unserem Stetigkeitsbegriff 2.2.3 für Abbildungen von einer Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ nach $\overline{\mathbb{R}}$ zu klären, erklären wir zunächst ein allgemeines Verfahren, das Teilmengen topologischer Räume mit einer Topologie versieht.

Definition 6.6.2. Gegeben ein $X \supset Y$ ein topologischer Raum mit einer Teilmenge erklärt man die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** auf Y durch die Vorschrift

$$U \Subset Y \quad\Leftrightarrow\quad \exists V \Subset X \text{ mit } U = V \cap Y$$

In Worten ist also eine Teilmenge von Y offen für die induzierte Topologie genau dann, wenn sie der Schnitt von Y mit einer offenen Teilmenge von X ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge Y eines topologischen Raums X auf als topologischen Raum mit der induzierten Topologie.

6.6.3. Es ist klar, daß das in 6.6.2 beschriebene Mengensystem auf einer Teilmenge eines topologischen Raums in der Tat eine Topologie auf besagter Teilmenge liefert und daß die Einbettungsabbildung stetig ist.

6.6.4. Wenn wir eine Menge einfach nur „offen" nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen" gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \overset{\circ}{\subset} Y$, daß M offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Topologie.

Beispiel 6.6.5. Gegeben eine Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und eine Abbildung $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ ist f stetig an einer Stelle $p \in D$ im Sinne von 2.2.3 genau dann, wenn sie stetig ist bei p im topologischen Sinne für die auf D induzierte Topologie. Desgleichen ist unsere Abbildung stetig im Sinne von 2.2.3 genau dann, wenn sie stetig ist im topologischen Sinne.

Satz 6.6.6 (Stetigkeit und Urbilder offener Mengen). *Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn darunter das Urbild jeder offenen Menge offen ist.*

6.6.7. Insbesondere gilt diese Aussage auch für Abbildungen zwischen metrischen Räumen.

Beweis. Sei $f : X \to Y$ stetig an jeder Stelle $p \in X$. Gegeben $U \overset{\circ}{\subset} Y$ offen ist ja U Umgebung eines jeden seiner Punkte. Folglich gibt es für jede Stelle $p \in f^{-1}(U)$ eine Umgebung U'_p mit $f(U'_p) \subset U$. Diese U'_p können sogar offen gewählt werden, und damit ist $f^{-1}(U)$ offen als die Vereinigung aller U'_p mit $p \in f^{-1}(U)$. Ist umgekehrt $p \in X$ gegeben, so gibt es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine offene, in U enthaltene Umgebung V von $f(p)$, und ist das Urbild jeder offenen Menge offen und $U' = f^{-1}(V)$ ist eine Umgebung von p mit $f(U') \subset U$. Ist also das Urbild jeder offenen Menge offen, so ist unsere Abbildung auch stetig an jeder Stelle p. □

Ergänzung 6.6.8. Entwickelt man die Theorie der topologischen Räume ab initio, so wird man in der Regel die im vorhergehenden Satz enthaltene Charakterisierung wegen ihrer großen Eleganz gleich als Definition der Stetigkeit nehmen. Daß die Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig ist, kann man von dieser Definition ausgehend sehr leicht und direkt einsehen, indem man beachtet, daß aus $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig folgt $V \overset{\circ}{\subset} Z \Rightarrow g^{-1}(V) \overset{\circ}{\subset} Y \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \overset{\circ}{\subset} X$. Da nun gilt $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$, ist damit auch $(g \circ f)$ stetig.

Übungen

Übung 6.6.9. Man zeige, daß auf einer Teilmenge eines metrischen Raums die Spurtopologie zur metrischen Topologie mit der Topologie zur induzierten Metrik übereinstimmt.

Übung 6.6.10. Man zeige für jeden topologischen Raum: Der Schnitt von zwei Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Jede Umgebung eines Punktes kann verkleinert werden zu einer offenen Umgebung desselben Punktes.

Übung 6.6.11. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist offen genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist.

Übung 6.6.12. Sei X ein topologischer Raum und $U \overset{\circ}{\subset} X$ eine offene Teilmenge. So ist eine Teilmenge $M \subset U$ offen in U genau dann, wenn sie offen ist in X. In Formeln gilt unter der Voraussetzung $U \overset{\circ}{\subset} X$ für Teilmengen $M \subset U$ also $(M \overset{\circ}{\subset} U \Leftrightarrow M \overset{\circ}{\subset} X)$.

Übung 6.6.13 (**Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie**). Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $Z \subset Y$ eine Teilmenge mit $f(X) \subset Z$. So ist f stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung $f : X \to Z$ stetig ist für die auf Z induzierte Topologie. Analoges gilt für Stetigkeit in einem Punkt.

6.7 Abgeschlossene Teilmengen topologischer Räume

Definition 6.7.1. Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in** X und wir schreiben in Formeln $M \overset{\triangle}{\subset} X$ genau dann, wenn ihr Komplement $X \backslash M$ offen ist.

6.7.2. Wenn wir eine Menge einfach nur „abgeschlossen" nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „abgeschlossen" gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \overset{\triangle}{\subset} Y$, daß M abgeschlossen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Topologie 6.6.2. Die Terminologie kommt vom Fall metrischer Räume her, in dem die Komplemente offener Mengen nach 6.4.6 gerade diejenigen Teilmengen waren, die „abgeschlossen sind unter dem Bilden von Grenzwerten von Folgen".

Lemma 6.7.3. *Jede endliche Vereinigung und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Beweis. Das folgt mit der Definition einer Topologie sofort aus der Formel

$$X \backslash \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} (X \backslash M)$$

Diese Formel gilt ganz allgemein für jedes System $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X. □

Definition 6.7.4. Gegeben ein topologischer Raum X und eine Teilmenge $M \subset X$ gibt es stets eine kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die M umfaßt, nämlich den Schnitt über alle abgeschlossenen Teilmengen von X, die M umfassen. Wir notieren diesen Schnitt $\mathrm{Cl}_X(M) = \mathrm{Cl}(M) = \bar{M}$ und nennen sie den **Abschluß von** M oder genauer den **Abschluß von** M **in** X.

6.7.5 (**Diskussion der Notation**). Diese Notation beißt sich mit unserer Notation $\overline{\mathbb{R}}$ für die erweiterten reellen Zahlen. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Immerhin ist $\overline{\mathbb{R}}$ auch der Abschluß von $\mathbb{R}$ in den erweiterten reellen Zahlen mit ihrer Topologie aus 6.5.9.

6.7.6. Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn darunter das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist: Das folgt unmittelbar aus dem entsprechenden Satz 6.6.6 für offene Mengen, da das Urbild des Komplements einer Menge stets das Komplement ihres Urbilds ist.

Beispiel 6.7.7. Wir geben einen neuen Beweis für die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert **??**, der zwar nur für reelle Folgen mit reellen Grenzwerten funktioniert, aber dafür viele Möglichkeiten der Verallgemeinerung aufzeigt. Zunächst ist die Menge $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ nach 6.7.6 als Urbild der abgeschlossenen Menge $[0, \infty) \subset\!\!\!\!\!\!\mathord{\subset}\, \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto y - x$. Ist (x_n, y_n) eine konvergente Folge in H, so liegt mithin auch ihr Grenzwert in H, und das bedeutet gerade die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert.

Proposition 6.7.8. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung topologischer Räume.*

1. *Sei $\mathcal{U}$ eine* **offene Überdeckung** *von X, d.h. ein System offener Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. So ist f stetig genau dann, wenn $f|_U$ stetig ist für alle $U \in \mathcal{U}$. Etwas vage gesprochen ist demnach* **Stetigkeit eine lokale Eigenschaft**.

2. *Sei X überdeckt von* endlich vielen *abgeschlossenen Teilmengen von X, in Formeln $A_1, \ldots, A_n \subset\!\!\!\!\!\!\mathord{\subset}\, X$ und $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. So ist f stetig genau dann, wenn $f|_{A_i}$ stetig ist für alle $i = 1, \ldots n$.*

Beweis. Ist f stetig, so sind alle $f|_U$ stetig als Verknüpfung von f mit der stetigen Inklusion $U \hookrightarrow X$. Sind andererseits alle $f|_U$ stetig, so ist für alle $W \circledcirc Y$ und alle $U \in \mathcal{U}$ das Urbild $f^{-1}(W) \cap U$ offen in U, nach 6.6.12 ist also $f^{-1}(W) \cap U$ sogar offen in X, und damit ist dann natürlich auch $f^{-1}(W) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(W) \cap U$ offen in X als Vereinigung offener Mengen. Mithin ist f stetig. Teil 2 zeigt man ähnlich: Nach 6.7.6 muß nur gezeigt werden, daß für jede abgeschlossene Teilmenge $B \sqsubset Y$ von Y ihr Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist in X. Da aber gilt $f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup \ldots \cup f_n^{-1}(B)$ und $f_i^{-1}(B) \sqsubset A_i$ nach Annahme folgt die Proposition aus 6.7.10 und den Definitionen. □

Übungen

Übung 6.7.9. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge Y zeige man: $A \sqsubset Y \Leftrightarrow \exists B \sqsubset X$ mit $A = B \cap Y$.

Übung 6.7.10. Sei X ein topologischer Raum und $A \sqsubset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. So ist eine Teilmenge $B \subset A$ abgeschlossen in A unter der Spurtopologie genau dann, wenn B abgeschlossen ist in X. In Formeln gilt unter der Voraussetzung $A \sqsubset X$ für Teilmengen $B \subset A$ also $(B \sqsubset A \Leftrightarrow B \sqsubset X)$.

Übung 6.7.11. Seien X ein topologischer Raum und Y, Z metrische Räume. Man zeige, daß eine Abbildung $(f, g) : X \to Y \times Z$ stetig ist genau dann, wenn f und g stetig sind. Man zeige, daß Produkt und Summe von stetigen reellwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum wieder stetig sind.

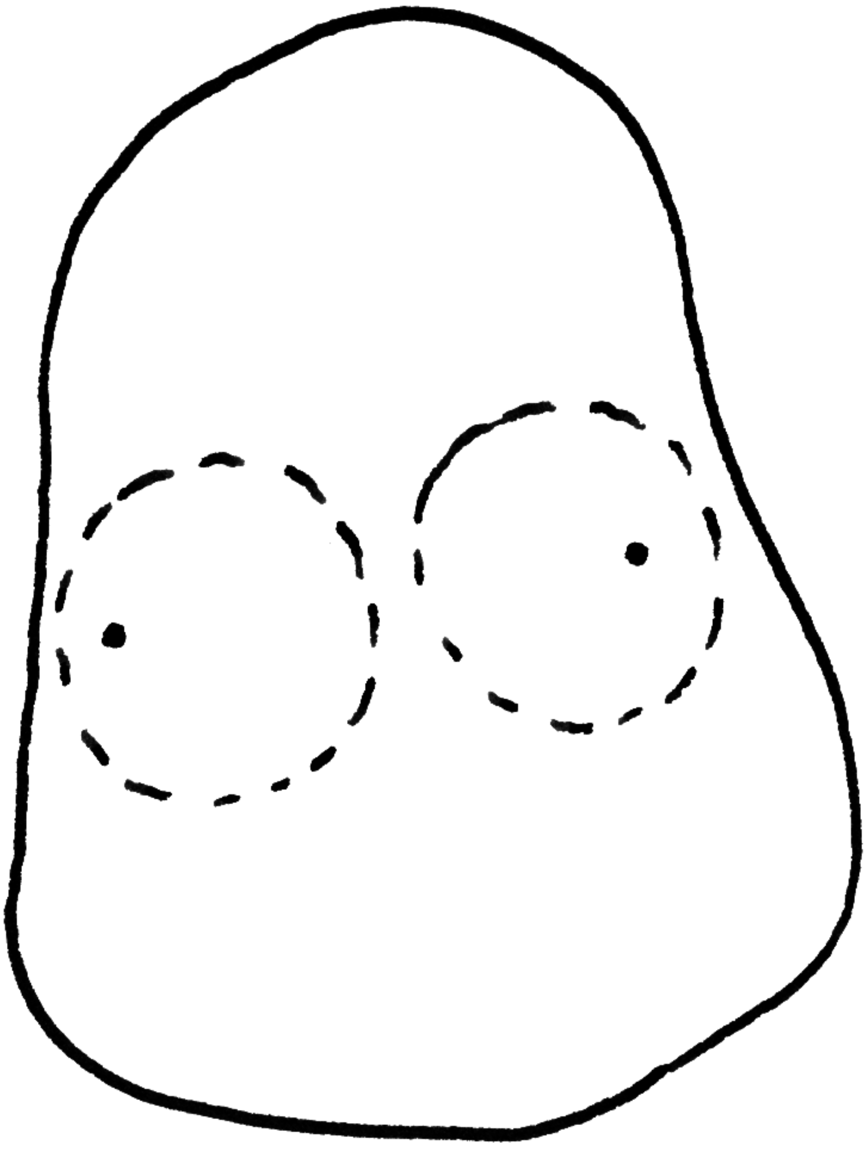
Vorschau 6.7.12. In [AN3] **??** werden wir erklären, wie man ganz allgemein das Produkt topologischer Räume so mit einer Topologie versehen kann, daß das Analogon der vorhergehenden Übung auch für beliebige topologische Räume Y, Z gilt.

6.8 Grenzwerte in topologischen Räumen

Definition 6.8.1. Ein Punkt eines topologischen Raums X heißt ein **Häufungspunkt von** X, wenn jede seiner Umgebungen auch noch andere Punkte unseres Raums enthält.

6.8.2. Ein Punkt eines topologischen Raums ist also genau dann ein Häufungspunkt, wenn die nur aus diesem einen Punkt bestehende Teilmenge nicht offen ist. Man kann also gleichbedeutend auch von einem **nichtoffenen Punkt** reden, aber das vergrößert dann wieder den terminologischen Abstand zu unserer Darstellung der Theorie stetiger Funktionen auf $\overline{\mathbb{R}}$.

Ergänzung 6.8.3 (**Weitere Terminologie**). Gegeben ein topologischer Raum T mit einer Teilmenge $X \subset T$ nennen wir ein Element $t \in T$ einen **Häufungspunkt zu** X oder ausführlicher einen **Häufungspunkt zu** X **in** T, wenn er im Sinne unserer Definition 6.8.1 ein Häufungspunkt des Raums $X \cup \{t\}$ mit seiner induzierten Topologie ist. Manche Autoren erklären zusätzlich die „Häufungspunkte einer Folge in einem topologischen Raum Z“ als die Punkte von Z mit der Eigenschaft, daß in jeder ihrer Umgebungen unendlich viele Folgenglieder liegen.



In einem Hausdorffraum haben je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen.

6.8.4. Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff** oder ein **Hausdorff-Raum**, wenn in ihm je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. Zum Beispiel ist jeder metrische Raum mit seiner metrischen Topologie offensichtlich ein Hausdorffraum.

Satz 6.8.5 (Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten). *Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \backslash p \to Y$ eine Abbildung. Ist Y Hausdorff, so gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Abbildung $\tilde{f} : X \to Y$, die stetig ist bei p.*

Beweis. Wäre sonst $\hat{f}$ eine weitere bei p stetige Fortsetzung mit $\hat{f}(p) \neq \tilde{f}(p)$, so fänden wir disjunkte Umgebungen $\hat{V}$ und $\tilde{V}$ dieser beiden Bildpunkte und dazu Umgebungen $\hat{U}$ und $\tilde{U}$ von p mit $\hat{f}(\hat{U}) \subset \hat{V}$ und $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$. Daraus folgte aber

$$f(\hat{U} \cap \tilde{U} \backslash p) \ \subset \ \hat{V} \cap \tilde{V} = \emptyset$$

im Widerspruch dazu, daß die Umgebung $\hat{U} \cap \tilde{U}$ von p nicht nur aus unserem Häufungspunkt p selbst bestehen darf. □

Definition 6.8.6. Seien X, Y topologische Räume mit Y Hausdorff. Seien weiter $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \backslash p \to Y$ eine Abbildung. Sei schließlich $b \in Y$ ein Punkt. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen** b **für** $x \to p$ und schreiben

$$\lim_{x \to p} f(x) = b$$

als Abkürzung für die Aussage, daß die Fortsetzung von f zu $\tilde{f} : X \to Y$ durch $\tilde{f}(p) := b$ stetig ist bei p. In diesem Fall nennen wir b den **Grenzwert** oder lateinisierend **Limes** der Funktion f für $x \to p$. Nach der Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen 6.8.5 ist dieser Grenzwert eindeutig bestimmt, wenn er existiert.

6.8.7. Salopp gesprochen verhält es sich demnach so, daß eine Abbildung in einen Hausdorffraum mit einer einpunktigen Definitionslücke an einem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs auf höchstens eine Weise stetig in diese Definitionslücke hinein fortgesetzt werden kann. Der Wert dieser an besagter Stelle stetigen Fortsetzung heißt dann der Grenzwert unserer Abbildung an besagter Stelle.

6.8.8. Insbesondere gilt für eine Folge $\mathbb{N} \to Y$, $n \mapsto y_n$ in einem Hausdorffraum Y und einen Punkt $b \in Y$ in unserer neuen Notation

$$\lim_{n \to \infty} y_n = b$$

genau dann, wenn jede Umgebung von b fast alle Glieder unserer Folge enthält. Wir sagen dann auch, die Folge y_n **strebt gegen** b oder **konvergiert gegen** b und nennen b einen **Grenzwert der Folge**. Gleichbedeutend können wir ebensogut fordern, daß jede offene Menge, die b enthält, auch fast alle Glieder unserer Folge enthält. In dieser Weise umfaßt unser Begriff des Grenzwerts für topologische Räume alle bis hierher betrachteten Grenzwertbegriffe.

Vorschau 6.8.9. Für allgemeine Hausdorffräume ist es nicht mehr richtig, daß jede unter der Bildung von Grenzwerten von Folgen abgeschlossene Teilmenge abgeschlossen ist. Ein Gegenbeispiel gebe ich in [ML] **??**, eine Zusatzbedingung, unter der das doch wieder gilt, in [ML] **??**.

Vorschau 6.8.10. Um durchgehend mit topologischen Räumen arbeiten zu können, müßten wir nun erklären, wie das Produkt zweier topologischer Räume mit einer Topologie zu versehen ist, und allerhand Eigenschaften wie etwa das Analogon der Komponentenregel prüfen. Das vermeide ich vorerst und diskutiere es erst in [AN3] 1.4.16 und ausführlicher in [ML] **??**, weil ich nicht imstande bin, von dem bisher erreichten Wissensstand aus den Sinn dieser Abstraktionen schlüssig zu begründen.

Übungen

Übung 6.8.11. Konvergiert eine Folge von stetigen Funktionen von einem topologischen Raum in einen metrischen Raum gleichmäßig, so ist auch die Grenzfunktion stetig. Hinweis: Man kopiere den Beweis von 5.1.9.

Übung 6.8.12. Genau dann ist p Häufungspunkt des metrischen Raums X, wenn es eine Folge x_n in $X \backslash p$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Übung 6.8.13. Seien X ein topologischer Raum, $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f_i : X \backslash p \to Y_i$ Abbildungen in metrische Räume für $1 \le i \le n$. Sei $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ das Produkt und $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to Y$. So ist $\lim_{x\to p} f(x) = b$ für $b = (b_1, \ldots, b_n)$ gleichbedeutend zu $\lim_{x\to p} f_i(x) = b_i\ \forall i$.

Übung 6.8.14 (**Quetschlemma**). Seien X ein topologischer Raum, $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f, g, h : X \backslash p \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen mit der Eigenschaft $f(x) \le g(x) \le h(x)\ \forall x \in X \backslash p$. So folgt aus $\lim_{x\to p} f(x) = b = \lim_{x\to p} h(x)$ bereits $\lim_{x\to p} g(x) = b$.

Übung 6.8.15. Im Fall einer Abbildung in einen metrischen Raum mit Metrik d ist $\lim_{x\to p} f(x) = y$ gleichbedeutend zu $\lim_{x\to p} d(f(x), y) = 0$.

6.9 Komplexe Differenzierbarkeit*

Definition 6.9.1. Seien $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $p \in U$ ein Punkt. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heiße **komplex differenzierbar bei** p **mit Ableitung** $b \in \mathbb{C}$, wenn p ein Häufungspunkt von U ist und es gilt

$$\lim_{z\to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch $f'(p) = b$.

6.9.2. Der Grenzwert ist hier im Sinne von 6.8.6 zu verstehen. Diese Definition ist fast identisch zu unserer alten Definition 4.3.3 bis auf das Detail, daß wir überall statt reeller Zahlen komplexe Zahlen betrachten und, wie im Komplexen üblich, die Variable mit z bezeichnen. Den Definitionsbereich unserer Funktion haben wir statt mit I hier mit U bezeichnet, weil der meistgebrauchte Fall nicht mehr der eines halboffenen Intervalls, sondern vielmehr der einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene ist. Der Fall eines Intervalls $U \subset \mathbb{R}$ wird jedoch auch oft vorkommen. In diesem Fall stimmt die hier definierte Ableitung überein mit der Ableitung im Sinne von 8.2.1. Der Rest dieses Abschnitts besteht darin, unsere Resultate zur reellen Differenzierbarkeit mitsamt ihren Beweisen im Komplexen zu wiederholen.

6.9.3. Ich gebe noch einige alternative Formulierungen an. Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und p ein Häufungspunkt von U, so ist nach **??** eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p mit Ableitung $b \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn es eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ gibt, die stetig ist bei p mit Funktionswert $\varphi(p) = b$ derart, daß für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = f(p) + (z - p)\varphi(z)$$

In anderen nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p mit Ableitung b genau dann, wenn gilt

$$f(p + h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$

für eine Funktion ε, die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Hier ist zu verstehen, daß die Funktion ε definiert sein soll auf der Menge aller h mit $h + p \in U$. Diese Formulierung hat den Vorteil, daß besonders gut zum Ausdruck kommt, inwiefern für festes p und kleines h der Ausdruck $f(p) + f'(p)h$ eine gute Approximation von $f(p+h)$ ist. Anschaulich wirkt f lokal um einen gegebenen Punkt p in erster Approximation wie eine Drehstreckung mit Zentrum in besagtem Punkt, deren Winkel und Streckfaktor durch $f'(p)$ beschrieben werden, gefolgt von einer Verschiebung um $f(p)$.

Beispiele 6.9.4. Eine konstante Funktion auf einer Menge von komplexen Zahlen ist bei jedem Häufungspunkt besagter Menge komplex differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ hat bei jedem Punkt p die Ableitung $\mathrm{id}'(p) = 1$.

Lemma 6.9.5. *Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist komplex differenzierbar bei jedem Punkt von $\mathbb{C}^\times$ und ihre Ableitung bei einer Stelle $p \in \mathbb{C}^\times$ ist $-\frac{1}{p^2}$.*

Beweis. Wir rechnen $\lim_{z \to p} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{p}}{z - p} = \lim_{z \to p} \frac{-1}{zp} = -\frac{1}{p^2}$. □

Lemma 6.9.6. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Ist eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $p \in U$, so ist f stetig bei p.*

Beweis. Das folgt sofort aus 6.9.3. □

Proposition 6.9.7. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei einem Punkt $p \in U$. So sind auch die Funktionen $f + g$ und fg komplex differenzierbar bei p und es gilt*

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \textit{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

Beweis. Identisch zum Beweis im Reellen nach 4.4.1. □

Definition 6.9.8. Ist eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ definiert auf einer Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ und differenzierbar bei jedem Punkt von U, so nennen wir f **komplex differenzierbar auf** U und nennen die Funktion $f' : U \to \mathbb{C}$, $p \mapsto f'(p)$ ihre **Ableitung**. Aus unseren Definitionen folgt natürlich insbesondere, daß dann die Menge U keine isolierten Punkte haben darf.

6.9.9. Für die Ableitungen komplex differenzierbarer Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich gelten mithin die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Korollar 6.9.10 (Ableiten ganzzahliger Potenzen). *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und unter der Voraussetzung $z \neq 0$ im Fall $n \leq 0$ ist die Ableitung der Funktion $z \mapsto z^n$ die Funktion $z \mapsto nz^{n-1}$.*

Beweis. Man zeigt das durch vollständige Induktion über n separat für $n \geq 0$ und $n \leq -1$. □

Satz 6.9.11 (Kettenregel). *Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ Teilmengen und $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$ Funktionen und es gelte $f(U) \subset V$. Sei f komplex differenzierbar bei p und g komplex differenzierbar bei $f(p)$. So ist $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

Beweis. Identisch zum Beweis im Reellen nach 4.4.6. Man beachte, daß nun rechts ein Produkt komplexer Zahlen steht. □

Beispiel 6.9.12. Wir berechnen für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $m \geq 1$ eine natürliche Zahl die Ableitung der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f : t \mapsto (t^2 + \lambda t + \mu)^m$ und erhalten mit der Kettenregel $f'(t) = (2t + \lambda)m(t^2 + \lambda t + \mu)^{m-1}$. Schalten wir noch eine differenzierbare Abbildung $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau \mapsto t(\tau)$ davor, so ergibt sich die Ableitung der zusammengesetzten Funktion wieder mit der Kettenregel zu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = (2t(\tau) + \lambda)m(t(\tau)^2 + \lambda t(\tau) + \mu)^{m-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

Proposition 6.9.13 (Quotientenregel). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion ohne Nullstelle und $p \in U$ ein Punkt.*

1. *Ist f komplex differenzierbar bei p, so ist auch $z \mapsto 1/f(z)$ komplex differenzierbar bei p und hat dort die Ableitung $-f'(p)/f(p)^2$.*

2. *Ist zusätzlich $g : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p, so ist auch g/f komplex differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

Beweis. Teil 1 folgt sofort aus 6.9.5 mit der Kettenregel 6.9.11. Teil 2 folgt aus Teil 1 mit der Produktregel 6.9.7. □

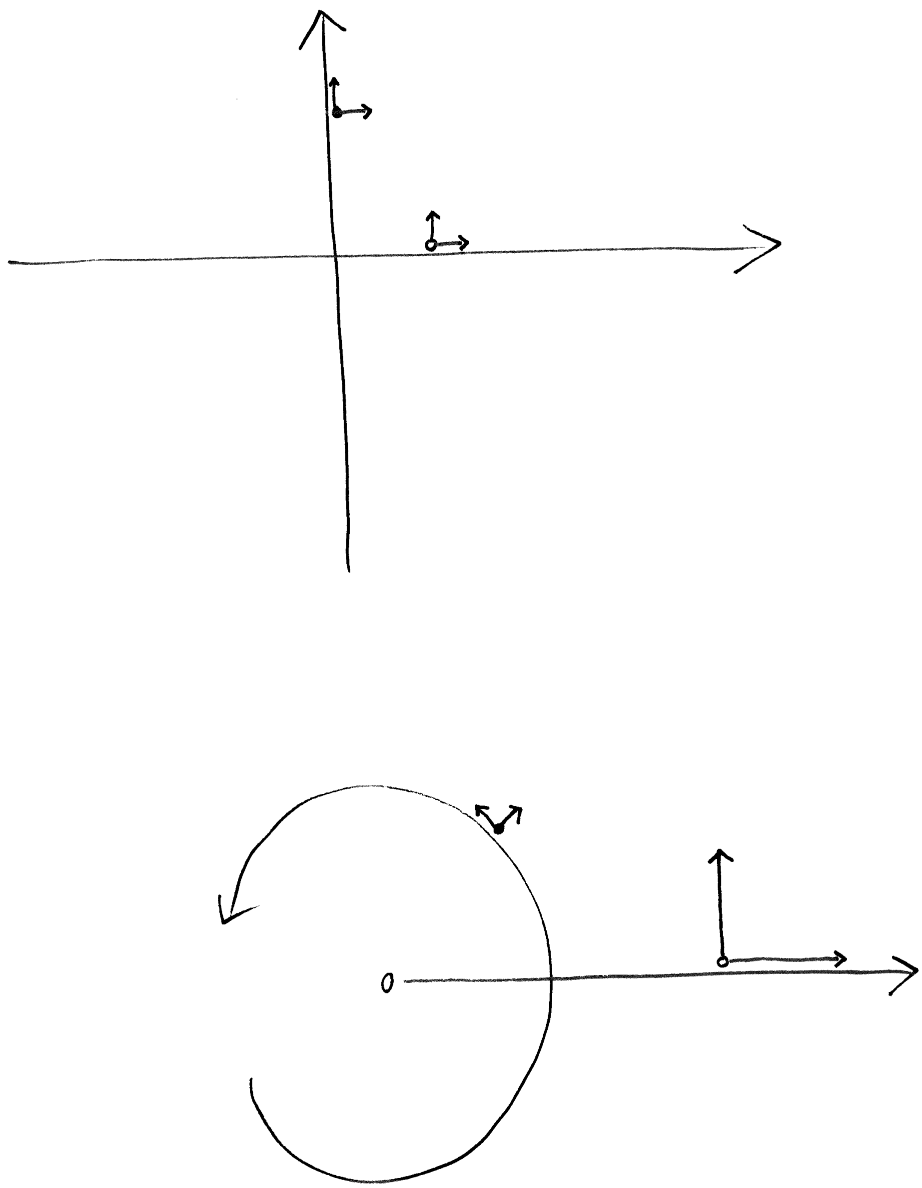
Satz 6.9.14 (Ableitung von Umkehrfunktionen). *Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Injektion mit offenem Bild und stetiger Umkehrung $f^{-1} : f(U) \to U$. Ist dann f komplex differenzierbar beim Punkt $p \in U$ mit Ableitung $f'(p) \neq 0$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $q = f(p)$ mit Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

6.9.15. In [FT1] 2.4.1 werden wir zeigen, daß eine injektive komplex differenzierbare Funktion mit offenem Definitionsbereich stets offenes Bild und eine stetige Umkehrung hat. Ein Teil der Bedingungen an unsere Funktion sind also eigentlich überflüssig und dienen nur dazu, den Beweis zu vereinfachen.

Beweis. Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) - f(p) = (z - p)\varphi(z)$ und $\varphi(p) = f'(p)$. Setzen wir hier $z = f^{-1}(w)$, so ist $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(U) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $(w - q)\psi(w) = f^{-1}(w) - f^{-1}(q)$ und $\psi(q) = 1/f'(p)$. □

Beispiel 6.9.16. Das Quadrieren liefert eine Bijektion zwischen der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil und der „geschlitzten Zahlenebene“ $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$. Die Umkehrfunktion zu dieser Bijektion ist also eine komplex differenzierbare Funktion auf der geschlitzten Zahlenebene, die wir $\sqrt{z}$ notieren und die nach 6.9.14 differenzierbar ist mit Ableitung $1/(2\sqrt{z})$.



Anschauliche Bedeutung der Ableitung der komplexen Exponentialfunktion

Lemma 6.9.17. *Die komplexe Exponentialfunktion ist komplex differenzierbar und stimmt auf der ganzen komplexen Zahlenebene mit ihrer eigenen Ableitung überein.*

Beweis. Der Beweis des reellen Analogons 4.4.9 kann wortwörtlich übernommen werden. □

Beispiel 6.9.18. Ist $U \circeq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge derart, daß die Exponentialfunktion eine Injektion mit offenem Bild und stetiger Umkehrfunktion $\log : \exp(U) \to \mathbb{C}$ liefert, so nennt man $\log$ einen **Zweig des Logarithmus**. Nach 6.9.14 ist jeder solche Zweig des Logarithmus komplex differenzierbar mit Ableitung

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$

Im Spezialfall $U = \mathbb{R} + (-\pi, \pi)\,\mathrm{i}$ spricht man auch vom **Hauptzweig des Logarithmus**, den wir bereits in 4.10.2 eingeführt und sogar noch auf die negative reelle Achse fortgesetzt hatten, allerdings in nur noch partiell stetiger Weise.

6.9.19. Eine komplex differenzierbare komplexwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene definiert ist, heißt eine **holomorphe Funktion**. Die Theorie der holomorphen Funktionen, die sogenannte **Funktionentheorie**, ist grundlegend verschieden von der Theorie der differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf einer offenen Teilmenge der reellen Zahlengerade, die wir in dieser Vorlesung ausführlich studiert haben. Zum Beispiel ist jede holomorphe Funktion, d.h. jede auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene definierte einmal komplex differenzierbare Funktion, bereits beliebig oft komplex differenzierbar. Mehr dazu findet man etwa in [FT1] 2.1.5.

Übungen

Übung 6.9.20. Ein komplexes Polynom hat bei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn auch seine Ableitung bei λ verschwindet.

Übung 6.9.21. Man zeige, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ der Hauptzweig des Logarithmus von $1 + z$ auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Hinweis: Es reicht zu zeigen, daß für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| = 1$ das Einsetzen von $z = ut$ auf beiden Seiten dieselbe Funktion in $t \in (-1, 1)$ liefert. Beide Seiten nehmen aber bei $z = 0$ den Wert Null an, so daß es reicht, die Gleichheit ihrer Ableitungen zu zeigen. Im Rahmen der Funktionentheorie dürfen Sie diese Übung in [FT1] 2.2.10 mit mehr Theorie und weniger Rechnen ein weiteres Mal lösen.

7 Kompaktheit in mehreren Veränderlichen

7.1 Kompakte metrische Räume

Definition 7.1.1. Ein metrischer Raum heißt **kompakt** oder ausführlicher **folgenkompakt**, wenn jede Folge in unserem Raum eine konvergente Teilfolge besitzt.

Vorschau 7.1.2. Wir werden bald sehen, wie sich der Begriff der Kompaktheit im Fall allgemeiner topologischer Räume in die beiden Begriffe „folgenkompakt“ und „überdeckungskompakt“ aufspaltet. Im Fall metrischer Räume fallen zwar beide Begriffe noch zusammen, aber bis zum Beweis dieser Tatsache in 7.5.3 muß man sie noch etwas auseinanderhalten.

7.1.3. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums nennen wir kompakt oder auch ein **Kompaktum**, wenn sie kompakt ist als metrischer Raum mit der induzierten Metrik, wenn also jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die *gegen einen Punkt aus A* konvergiert.

7.1.4 (**Kompaktheit als absolute Eigenschaft**). Man erliegt beim ersten Lernen leicht der Versuchung, die Begriffe „offen“, „abgeschlossen“ und „kompakt“ auf eine Stufe zu stellen. Ich will deshalb darauf insistieren, daß „offen“ und „abgeschlossen“ Eigenschaften sind, die ein Paar $(X \supset Y)$ bestehend aus einem metrischen Raum X mit einer Teilmenge Y hat oder nicht hat, wohingegen „kompakt“ eine Eigenschaft ist, die ein metrischer Raum selbst hat oder nicht hat. Natürlich kann man Kompaktheit auch für Teilmengen metrischer Räume mit ihrer induzierten Metrik diskutieren. Die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ dahingegen sind für einen metrischen Raum allein nicht definiert.

7.1.5. Jeder kompakte metrische Raum ist beschränkt. Ist in der Tat ein Raum nicht beschränkt, so finden wir darin eine Folge x_n mit $d(x_0, x_n) \geq n$, und diese Folge kann nach 6.3.8 keine konvergente Teilfolge haben.

Proposition 7.1.6. *Jedes endliche Produkt von kompakten metrischen Räumen ist kompakt.*

Beweis. Sei $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ mit kompakten X_i. Sei eine Folge in X gegeben. Da X_1 kompakt ist, finden wir eine Teilfolge unserer Folge, die in der ersten Koordinate konvergiert. Da auch X_2 kompakt ist, finden wir von dieser Teilfolge hinwiederum eine Teilfolge, die auch in der zweiten Koordinate konvergiert. Indem wir so weitermachen, finden wir schließlich eine Teilfolge, die in jeder Koordinate konvergiert. Diese Teilfolge konvergiert dann nach 6.3.6 auch in X. □

Lemma 7.1.7. *Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Sei X unser Raum und $A \subset X$ unsere Teilmenge. Ist A nicht abgeschlossen, so gibt es eine Folge in A, die gegen einen Punkt aus $X \backslash A$ konvergiert. Solch eine Folge kann aber unmöglich eine Teilfolge haben, die gegen einen Punkt aus A konvergiert. □

Lemma 7.1.8. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten metrischen Raums ist stets kompakt.*

Beweis. Sei X unser Raum und $A \subset X$ unsere Teilmenge. Jede Folge in A besitzt nach unseren Annahmen eine Teilfolge, die gegen einen Punkt aus X konvergiert. Da A abgeschlossen ist, muß dieser Punkt dann bereits in A liegen. □

Satz 7.1.9 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Nach 7.1.5 und 7.1.7 ist eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums stets beschränkt und abgeschlossen. In der anderen Richtung wissen wir schon aus 2.6.8, daß für jedes $k \geq 0$ das Intervall $[-k, k]$ kompakt ist. Falls eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, finden wir ein k mit $A \subset [-k, k]^n$. Nach 7.1.6 ist nun $[-k, k]^n$ kompakt, und als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist nach 7.1.8 dann auch A selbst kompakt. □

Beispiel 7.1.10. Die Menge $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ und beschränkt, ist aber nicht kompakt für die induzierte Metrik.

Proposition 7.1.11. *Unter einer stetigen Abbildung metrischer Räume werden Kompakta stets auf Kompakta abgebildet.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ unsere stetige Abbildung und $A \subset X$ ein Kompaktum. Ist y_n eine Folge in $f(A)$, so finden wir eine Folge x_n in A mit $f(x_n) = y_n$. Falls A kompakt ist, besitzt die Folge x_n eine Teilfolge x_{n_k}, die gegen einen Punkt $x \in A$ konvergiert. Dann ist y_{n_k} nach 6.3.9 eine Teilfolge der Folge y_n, die gegen einen Punkt von $f(A)$ konvergiert, nämlich gegen $f(x)$. □

Korollar 7.1.12. *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum ist beschränkt und nimmt, wenn unser Raum nicht leer ist, das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte an.*

7.1.13. Ist also in Formeln X ein nichtleerer kompakter Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $p, q \in X$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in X$.

Beweis. Nach 7.1.11 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen. Aus $X \neq \emptyset$ folgt weiter $f(X) \neq \emptyset$. Damit besitzt $f(X)$ ein Supremum und Infimum in $\mathbb{R}$. Da $f(X)$ kompakt, also abgeschlossen ist, folgt $\sup f(X) \in f(X)$ und $\inf f(X) \in f(X)$. Es gibt in anderen Worten $p, q \in X$ mit $\sup f(X) = f(p)$ und $\inf f(X) = f(q)$. □

Definition 7.1.14. Eine stetige Abbildung von metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig** genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß für beliebige Punkte x, y im Definitionsbereich gilt

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Satz 7.1.15 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta). *Jede stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum in einen weiteren metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Mutatis mutandis zeigt das der Beweis von Satz 4.1.10. □

Übungen

Übung 7.1.16. Endliche Vereinigungen kompakter Teilmengen eines metrischen Raums sind stets wieder kompakt.

Ergänzende Übung 7.1.17. Ist in einem metrischen Raum eine abzählbare Familie kompakter Teilmengen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit leerem Schnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$, so gibt es schon ein N mit $K_0 \cap \ldots \cap K_N = \emptyset$. Das wird verallgemeinert auf den Fall beliebiger Familien in 7.5.11.

Ergänzende Übung 7.1.18. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$. So gibt es $\delta > 0$ mit $d(x, y) \geq \delta$ für alle $x \in A$, $y \in K$. Hinweis: 6.2.23 und 6.4.15.

Ergänzende Übung 7.1.19. Man zeige, daß man auf dem Raum $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\})$ aller Folgen in der zweielementigen Menge $\{W, Z\}$ eine Metrik erklären kann durch die Vorschrift $d(\omega, \eta) = 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $\omega(n) \neq \eta(n)$, bzw. $d(\omega, \eta) = 0$ falls $\omega = \eta$. Man zeige weiter, daß der so gebildete metrische Raum kompakt ist. Nebenbei bemerkt denke ich bei W an „Wappen“ und bei Z an „Zahl“ und bei der Übung an Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

7.2 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 7.2.1 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

7.2.2. Der im folgenden wiedergegebene Beweis von Jean-Robert Argand hat den Vorteil, mit besonders wenigen technischen Hilfsmitteln auszukommen. Einen Überblick über die gängigsten alternativen Beweise mit ihren Stärken und Schwächen gebe ich in [LA1] 4.3.25.

Beweis. Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ unser Polynom. Wir zeigen zunächst, daß es eine Stelle $p \in \mathbb{C}$ gibt, an der die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |P(z)|$ ihr Minimum annimmt, in Formeln $|P(z)| \geq |P(p)|\ \forall z \in \mathbb{C}$. In der Tat, nehmen wir irgendein $u \in \mathbb{C}$ her, so gibt es offensichtlich $R \in \mathbb{R}$ derart, daß aus $|z| \geq R$ folgt $|P(z)| \geq |P(u)|$. Als stetige Funktion nimmt aber die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ auf der kompakten Kreisscheibe $\{z \mid |z| \leq R\}$ ein Minimum an, sagen wir an der Stelle p, und das muß dann auch das Minimum von $|P(z)|$ auf ganz $\mathbb{C}$ sein. Wir zeigen nun $P(p) = 0$ durch Widerspruch und müssen dazu nachweisen: Ist $p \in \mathbb{C}$ gegeben mit $P(p) \neq 0$, so nimmt die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ bei p nicht ihr Minimum an. Sei dazu erst einmal $p \in \mathbb{C}$ beliebig. Entwickeln wir $P(p+w)$ nach Potenzen von w, so erhalten wir

$$P(p+w) = P(p) + bw^m + w^{m+1}Q(w)$$

mit $b \neq 0$, $m \geq 1$ (da P nicht konstant ist) und einem geeigneten Polynom Q. Nach 3.4.23 finden wir $q \in \mathbb{C}$ mit $P(p) + bq^m = 0$ und sind fertig, sobald wir zeigen können, daß unter der Annahme $P(p) \neq 0$ für hinreichend kleine $t > 0$ gilt

$$|P(p+tq)| < |P(p)|$$

Das ist klar im Fall $Q = 0$ und wir müssen nur noch erklären, warum die Terme der Ordung $> m$ diese Ungleichung für kleines t nicht zerstören können. Wir betrachten dazu die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto P(p+tq)$ und erhalten

$$P(p+tq) = P(p) - t^m P(p) + t^{m+1}\tilde{Q}(t)$$

für ein geeignetes Polynom $\tilde{Q}$, also

$$|P(p+tq)| \leq (1-t^m)|P(p)| + t^m|t\tilde{Q}(t)| \quad \text{für } t \in [0,1]$$

Gilt nun $P(p) \neq 0$ und wählen wir $t \in (0,1)$ hinreichend klein für die Ungleichung $|t\tilde{Q}(t)| < |P(p)|$, so folgt $|P(p+tq)| < |P(p)|$ und wir sind fertig. □

7.3 Affine Räume*

7.3.1. Dieser Abschnitt ist ein Auszug aus Abschnitt [LA1] 6.1.1 der linearen Algebra. Ich habe ihn hier nur eingefügt, um Unklarheiten zu vermeiden, was die im weiteren verwendeten Notationen und Begriffsbildungen angeht.

Definition 7.3.2. Ein **affiner Raum** oder kurz **Raum** über einem Körper k ist ein Tripel

$$E = (E, \vec{E}, a)$$

bestehend aus einer nichtleeren Menge E, einer abelschen Gruppe $\vec{E} \subset \mathrm{Ens}^\times E$ von Permutationen von E, von der man fordert, daß für alle $p \in E$ das Anwenden auf p eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$ besagter Gruppe mit unserem Raum liefert, sowie einer Abbildung $a : k \times \vec{E} \to \vec{E}$, die die abelsche Gruppe $\vec{E}$ zu einem k-Vektorraum macht. Die Elemente von $\vec{E}$ heißen die **Translationen** oder **Richtungsvektoren** unseres affinen Raums und den Vektorraum $\vec{E}$ selbst nennen wir den **Richtungsraum** unseres affinen Raums E. Die Operation von k auf $\vec{E}$ mag man die **Reskalierung von Translationen** nennen. Unter der **Dimension** unseres affinen Raums verstehen wir die Dimension seines Richtungsraums. Das Resultat der Operation von $\vec{v} \in \vec{E}$ auf $p \in E$ notieren wir $\vec{v} + p := \vec{v}(p)$ oder manchmal auch $p + \vec{v}$.

7.3.3 (**Diskussion der Notation**). Die eben eingeführte Notation für den Richtungsraum eines affinen Raums steht in Konflikt mit der Notation aus [AN2] 6.3.7, nach der mit Pfeilen versehene Mannigfaltigkeiten orientierte Mannigfaltigkeiten andeuten sollen. Was jeweils gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

7.3.4. Ist E ein affiner Raum, so liefert nach Annahme für jedes $p \in E$ die Operation eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$, $\vec{u} \mapsto \vec{u} + p$ und es gilt $\vec{0} + p = p$ sowie $\vec{u} + (\vec{v} + p) = (\vec{u} + \vec{v}) + p$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ und $p \in E$. Flapsig gesprochen ist also ein affiner Raum ein „Vektorraum, bei dem man den Ursprung vergessen hat“. Gegeben $p, q \in E$ definieren wir $p - q$ als den Richtungsvektor $\vec{u} \in \vec{E}$ mit $p = \vec{u} + q$.

7.3.5 (**Vektorräume als affine Räume**). Jeder Vektorraum V kann als ein affiner Raum aufgefaßt werden, indem wir als Translationen die durch die Addition von festen Vektoren gegebenen Abbildungen nehmen, so daß unsere Gruppe von Translationen das Bild des injektiven Gruppenhomomorphismus $V \to \mathrm{Ens}^\times(V)$, $v \mapsto (v+)$ wird, und die Reskalierung von Translationen dadurch erklären, daß dieser Gruppenhomomorphismus einen Vektorraumisomorphismus auf sein Bild liefern soll. Insbesondere erhalten wir damit eine kanonische Identifikation

$$\mathrm{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$$

zwischen unserem Vektorraum und dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums. Diese Identifikation scheint mir derart kanonisch, daß ich sie von nun an in Sprache und Notation oft so behandeln werde, als seien diese beiden Vektorräume schlicht gleich.

Beispiel 7.3.6. Es scheint mir besonders sinnfällig, den uns umgebenden Raum mathematisch als dreidimensionalen reellen affinen Raum zu modellieren: Hierbei denkt man sich $\vec{E}$ als die Gruppe aller „Parallelverschiebungen“. Ähnlich mag man die Zeit modellieren als einen eindimensionalen reellen affinen Raum. Die leere Menge kann in meinen Konventionen nie ein affiner Raum sein, es gibt hierzu jedoch auch andere Konventionen.

Ergänzung 7.3.7. Meist findet man in der Literatur die begriffliche Variante eines **affinen Raums über einem vorgegebenen Vektorraum**: Darunter versteht man dann eine Menge E mit einer freien transitiven Operation des vorgegebenen Vektorraums. Ich ziehe die oben gegebene Variante vor, da sie jeden Bezug auf einen vorgegebenen Vektorraum vermeidet und den Anschauungsraum meines Erachtens besser modelliert.

Definition 7.3.8. Eine Abbildung $\varphi : E \to E'$ zwischen affinen Räumen heißt eine **affine Abbildung** genau dann, wenn es eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Richtungsräumen $\vec{\varphi} : \vec{E} \to \vec{E}'$ gibt mit

$$\varphi(p) - \varphi(q) = \vec{\varphi}(p - q) \ \ \forall p, q \in E$$

Diese lineare Abbildung $\vec{\varphi}$ ist dann durch φ eindeutig bestimmt und heißt der **lineare Anteil** unserer affinen Abbildung.

7.4 Normierte Räume

7.4.1. Unter einem **reellen Vektorraum** beziehungsweise einem **reellen Raum** verstehen wir einen Vektorraum beziehungsweise einen affinen Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Wollen wir einen reellen Vektorraum beziehungsweise affinen Raum mit einer Metrik versehen, so reicht es, wenn wir jedem seiner Vektoren beziehungsweise Richtungsvektoren in geeigneter Weise eine „Länge“ zuordnen. Einen solchen abstrakten Längenbegriff für die Vektoren eines Vektorraums nennt man eine „Norm“. Die Details folgen.

Definition 7.4.2. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $v \mapsto \|v\|$ derart, daß gilt:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$;
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$.

Unter einem **normierten Vektorraum** versteht man ein Paar $(V, \| \ \|)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einer Norm $\| \ \|$ auf V. Fordert man nur die erste und dritte Bedingung, so spricht man von einer **Halbnorm**.

Ergänzung 7.4.3. Für Leser, die schon mit komplexen Zahlen vertraut sind, sei noch erwähnt, daß man von einer Norm auf einem komplexen Vektorraum stärker fordert, daß die erste Bedingung sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten soll, wobei $|\lambda|$ als die „Norm der komplexen Zahl λ“ im Sinne von [LA1] 3.1.9 zu verstehen ist.

7.4.4. Jeder normierte Vektorraum wird ein metrischer Raum vermittels der **durch die Norm induzierten Metrik**

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Zum Beispiel gehört unser Betragsabstand auf dem $\mathbb{R}^n$ zur Maximumsnorm. Wir dürfen damit in normierten Vektorräumen über Stetigkeit und Konvergenz von Folgen reden. Allgemeiner verstehen wir unter einem **normierten affinen Raum** einen reellen oder komplexen affinen Raum im Sinne von 7.3.2, dessen Richtungsraum mit einer Norm versehen ist. Auch jeder normierte affine Raum trägt eine natürliche Metrik, die durch dieselbe Formel beschrieben wird. Reden wir ohne nähere Spezifikation von einem **normierten Raum**, so meinen wir einen normierten affinen Raum. Leser, die mit dem Begriff eines affinen Raums noch nicht vertraut sind, mögen sich aber auch einen normierten Vektorraum denken.

Beispiel 7.4.5. Mit $v \mapsto \|v\|$ ist auch $v \mapsto \alpha\|v\|$ eine Norm, für jedes $\alpha > 0$. Auf dem Nullraum gibt es nur eine Norm, die eben den Nullvektor auf Null wirft.

Beispiel 7.4.6. Auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert man die **euklidische Norm** eines Vektors $v = (v_1, \ldots, v_n)$ durch $\|v\| = \|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$. Wie man formal zeigt, daß das tatsächlich eine Norm ist, diskutieren wir in [LA2] 1.2.20.

Beispiel 7.4.7. Auf dem $\mathbb{R}^n$ für $n > 0$ definiert man die **Maximumsnorm** von $v = (v_1, \ldots, v_n)$ durch $|v| = \|v\|_\infty = \max(|v_1|, \ldots, |v_n|)$. Auf dem Raum $V = \mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, \mathbb{R})$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer Menge D haben wir die **Supremumsnorm**, gegeben für $D \neq \emptyset$ durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

und im Fall $D = \emptyset$ als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Für eine endliche Menge D mit n Punkten erhalten wir unsere Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^n$ als Spezialfall der Supremumsnorm. Noch allgemeiner definieren wir für jeden normierten Vektorraum $(W, |\ |)$ auf dem Raum $V = \mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, W)$ aller beschränkten Abbildungen von D nach W die Supremumsnorm durch $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$ im Fall $D \neq \emptyset$ und im Fall $D = \emptyset$ als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Die zu unserer Supremumsnorm gehörige Metrik ist in allen diesen Fällen die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.

Beispiel 7.4.8. Sind $V_1, \ldots, V_n$ normierte Vektorräume, so erklären wir auf ihrem Produkt $V_1 \times \ldots \times V_n$ die **Produktnorm** durch die Vorschrift $\|(v_1, \ldots, v_n)\| = \sup \|v_i\|$ im Fall $n > 0$ und als die einzige Norm auf dem Nullraum im Fall $n = 0$. Offensichtlich induziert die Produktnorm die Produktmetrik.

Satz 7.4.9 (Stetigkeit linearer Abbildungen). *Eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen $f : V \to W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt mit*

$$\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$$

7.4.10. Wir werden in 7.4.13 sehen, daß lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen immer stetig sind. Sie werden in 7.4.26 sogar folgern, daß lineare Abbildungen von einem endlichdimensionalen normierten reellen Vektorraum in einen beliebigen weiteren normierten reellen Vektorraum immer stetig sind.

Beweis. Ist f stetig, so gibt es $\delta > 0$ mit $\|v - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(0)\| \leq 1$. Setzen wir $C = 1/\delta$, so folgt $\|f(v)\| \leq C\|v\|$ zunächst für alle Vektoren v der Norm $\|v\| = \delta$ und dann durch Multiplikation mit Skalaren für alle $v \in V$. Gibt es umgekehrt ein $C > 0$ mit $\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$, so finden wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \varepsilon/C > 0$ so daß gilt

$$\|v - w\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| \leq C\delta = \varepsilon \qquad \square$$

Definition 7.4.11. Zwei Normen $\| \ \|, | \ |$ auf einem reellen Vektorraum V heißen **äquivalent**, wenn es positive Konstanten $c, C > 0$ gibt mit

$$\|v\| \leq C|v| \text{ und } |v| \leq c\|v\| \quad \forall v \in V$$

Satz 7.4.12 (Äquivalenz von Normen). *Auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.*

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß V der $\mathbb{R}^n$ ist mit $n \geq 1$ und daß eine unserer Normen die Maximumsnorm $|v|$ ist. Sei $\| \ \|$ eine zweite Norm. Bezeichnet $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und ist $v = v_1\mathrm{e}_1 + \ldots + v_n\mathrm{e}_n$, so haben wir

$$\begin{array}{rcl} \|v\| & = & \|v_1\mathrm{e}_1 + \ldots + v_n\mathrm{e}_n\| \\ & \leq & |v_1| \cdot \|\mathrm{e}_1\| + \ldots + |v_n| \cdot \|\mathrm{e}_n\| \\ & \leq & |v| \cdot C \end{array}$$

mit $C = \|\mathrm{e}_1\| + \ldots + \|\mathrm{e}_n\|$. Insbesondere folgern wir, daß $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $| \ |$-stetige Abbildung ist, also stetig für die durch die Maximumsnorm $| \ |$ gegebene Metrik auf $\mathbb{R}^n$, denn aus $d(x, y) = |x - y| < \varepsilon/C$ folgt $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \varepsilon$. Nun ist aber die Oberfläche

$$F := \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}$$

des Hyperkubus $| \ |$-kompakt nach 7.1.9 und nicht leer falls gilt $n \geq 1$. Nach 7.1.12 nimmt folglich die Funktion $\| \ \|$ auf F ein Minimum a an, und da F nicht den Nullvektor enthält, ist dies Minimum notwendig positiv, $a > 0$. Wir folgern zunächst einmal $a|v| \leq \|v\|$ für alle $v \in F$. Dann gilt aber natürlich auch $a|\lambda v| \leq \|\lambda v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in F$, also $a|w| \leq \|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$. Mit $c = 1/a$ gilt also $|w| \leq c\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$. $\square$

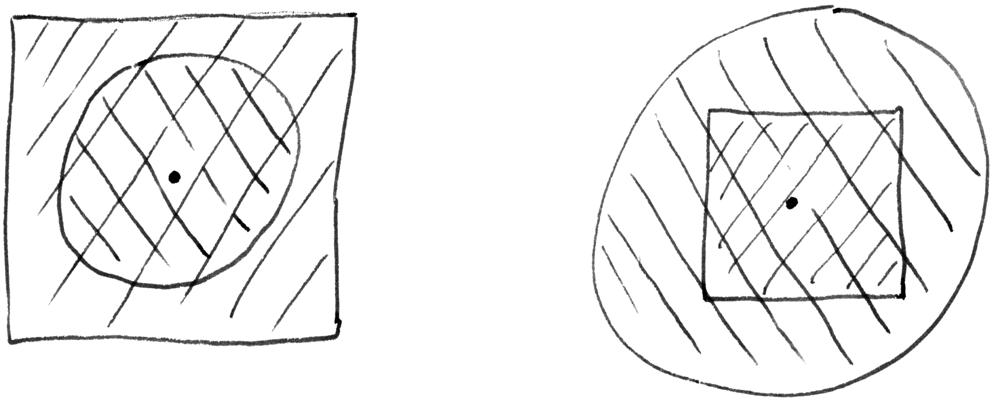


Illustration zur Äquivalenz von Normen am Beispiel der Betragsnorm und der euklidischen Norm auf dem $\mathbb{R}^2$.

Variante zum Schluß des vorhergehenden Beweises. Statt mit Kompaktheit zu argumentieren, kann man hier alternativ auch mit Induktion über n und „Vollständigkeit" argumentieren. Die Argumentation verläuft dann wie folgt: Wir betrachten die affinen Hyperebenen $H_i = \{x \mid x_i = 1\}$. Aus der Induktionsannahme können wir durch Widerspruch folgern, daß es positive Konstanten $a_i > 0$ gibt mit

$$a_i \leq \|w\| \quad \forall w \in H_i$$

In der Tat gäbe es sonst in H_i eine Folge w_ν mit $\|w_\nu\| \to 0$ für $\nu \to \infty$. Diese Folge wäre im Sinne von 9.2.1 eine Cauchy-Folge für die von $\| \ \|$ auf H_i induzierte Metrik. Dann wäre sie aber wegen der Äquivalenz der Normen nach der Induktionsannahme auch eine Cauchy-Folge für die von der Maximumsnorm $| \ |$ auf H_i induzierte Metrik und müßte nach 9.2.2 konvergieren gegen einen Punkt $w \in H_i$ mit $\|w\| = 0$. Widerspruch! Nun gibt es für $v \in \mathbb{R}^n \backslash 0$ stets $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| = |v|$ derart, daß $\lambda^{-1}v$ in einer der affinen Hyperebenen H_i liegt. Mit $a = \inf(a_i)$ folgt $a \leq \|\lambda^{-1}v\|$ und $|v| \leq c\|v\|$ für $c = 1/a$. □

Korollar 7.4.13. *Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen ist stetig.*

Beweis. Jeder Vektorraumisomorphismus zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen ist stetig nach dem Satz über die Äquivalenz von Normen 7.4.12 und dem Kriterium für die Stetigkeit linearer Abbildungen 7.4.9. So können wir uns beim Beweis des Korollars auf den Fall 6.2.28 linearer Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zurückziehen. □

7.4.14. Wir nennen eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums **offen**, wenn sie offen ist für die von irgendeiner Norm auf seinem Richtungsraum induzierte Metrik. Nach unserem Satz 7.4.12 über die Äquivalenz von Normen ist sie dann notwendig offen für jede von einer Norm induzierte Metrik. Die so erklärten offenen Teilmengen bilden die sogenannte **natürliche Topologie** auf unserem endlichdimensionalen reellen Raum.

Definition 7.4.15. Ist $f : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung normierter Vektorräume, so heißt die kleinstmögliche Konstante $C \geq 0$ wie in 7.4.9 auch die **Operatornorm** $\|f\|$ von f, in Formeln

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$$

7.4.16. Die stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W nennt man auch **beschränkte Operatoren**, da sie nach 7.4.9 genau die linearen Abbildungen sind, die den Einheitsball auf eine beschränkte Menge abbilden. Ich notiere die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\mathcal{B}(V, W)$ oder auch $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(V, W)$, wenn ich besonders betonen will, daß reell-lineare Abbildungen gemeint sind und nicht etwa „komplex-lineare“ Abbildungen, wie wir sie später für gewöhnlich betrachten werden. Ich werde die Notation $\mathcal{B}$ benutzen, die Terminologie jedoch vermeiden und nach Möglichkeit von **stetigen Operatoren** reden, da diese ja keineswegs beschränkte Abbildungen im Sinne von 6.3.3 zu sein brauchen.

Übungen

Übung 7.4.17. Für je zwei Vektoren v, w eines normierten Vektorraums gilt $\|v + w\| \geq |\|v\| - \|w\||$.

Übung 7.4.18. Gegeben ein normierter Vektorraum $(V, \| \ \|)$ sind die folgenden Abbildungen stetig: Die Norm $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$, die Addition $V \times V \to V$, und die Multiplikation mit Skalaren $\mathbb{R} \times V \to V$. Ist unsere Norm die euklidische Norm zu einem Skalarprodukt $V \times V \to \mathbb{R}$, so ist auch dies Skalarprodukt stetig. Leser, die bereits mit komplexen Zahlen vertraut sind, zeigen Analoges auch für komplexe Vektorräume.

Übung 7.4.19 (**Gruppenwege in normierten Vektorräumen**). Die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additive Gruppe der reellen Zahlen in einen normierten Vektorraum sind genau die linearen Abbildungen. Hinweis: 2.5.24.

Ergänzende Übung 7.4.20. In einem normierten reellen Vektorraum ist jede nichtleere offene Teilmenge bereits ein Erzeugendensystem.

Übung 7.4.21. Man zeige: Jede stetige lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen ist gleichmäßig stetig.

Übung 7.4.22. Die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem Raum X notiere ich $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Das $\mathcal{C}$ steht hier für englisch „continous“ und französisch „continu“. Man zeige: Versehen wir die Menge $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten reellen Intervall $[a, b]$ mit der Supremumsnorm, so wird das Integral $f \mapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ eine stetige Abbildung $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Übung 7.4.23. Bezeichnet $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ den Teilraum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen, so ist das Ableiten $f \mapsto f'$ *keine* stetige Abbildung $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Übung 7.4.24. Seien U, V, W normierte Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $F : U \times V \to W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|F(u, v)\| \leq C\|u\|\|v\|$. Man formuliere und beweise die analoge Aussage auch für multilineare Abbildungen.

Übung 7.4.25. Gegeben eine Menge D und ein normierter Vektorraum V erkläre man auf dem Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, V)$ der beschränkten Abbildungen $D \to V$ eine

Norm derart, daß die zugehörige Metrik die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz aus 6.3.4 wird.

Übung 7.4.26. Jede lineare Abbildung von einem endlichdimensionalen Vektorraum in einen normierten Vektorraum W ist stetig. Sind allgemeiner endlichdimensionale Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ gegeben, so ist jede multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ stetig. Hinweis: Das Bild liegt immer in einem endlichdimensionalen Teilraum. Man erinnere 7.4.13 und 6.2.28.

Übung 7.4.27. Sind $f : V \to W$ und $g : W \to X$ stetige Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen, so gilt $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$.

Übung 7.4.28. Man zeige: Der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ aller stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W ist ein Untervektorraum im Raum $\mathrm{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W, und die in 7.4.15 eingeführte Abbildung $f \mapsto \|f\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(V, W)$.

Ergänzende Übung 7.4.29. Sind normierte Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ und W gegeben und ist $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ eine stetige multilineare Abbildung, so heißt die kleinstmögliche Konstante $C \geq 0$ wie in 7.4.24 die **Norm** von f und wird notiert

$$\|f\| := \sup\{\|f(v_1, \ldots, v_n)\| \mid \|v_i\| \leq 1\}$$

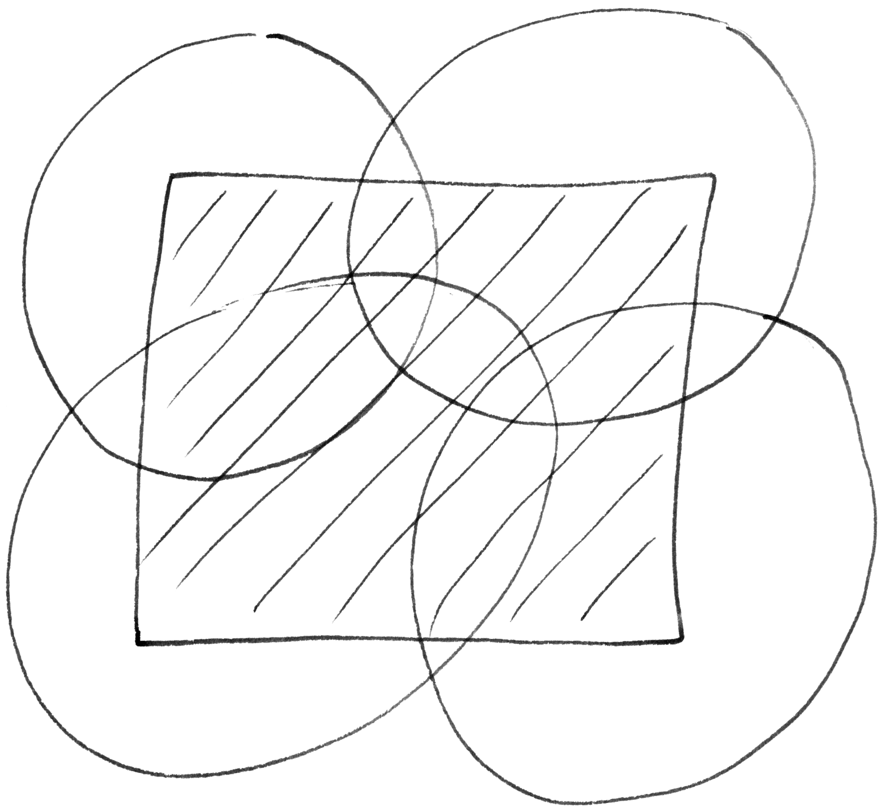
Man zeige, daß wir so eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{B}(V_1, \ldots, V_n; W)$ aller stetigen multilinearen Abbildungen erhalten. Weiter zeige man: Die offensichtliche Abbildung liefert einen Isomorphismus von normierten Räumen

$$\mathcal{B}(V_1, \mathcal{B}(V_2, \ldots, V_n; W)) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{B}(V_1, \ldots, V_n; W)$$

Übung 7.4.30. Seien V ein komplexer Vektorraum und $\| \ \|$ eine Norm als reeller Vektorraum, also $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß die Multiplikation mit komplexen Skalaren $\mathbb{C} \times V \to V$ stetig ist. Man zeige, daß wir dann mit dem Supremum über komplexen Zahlen α auf dem Einheitskreis $\|v\|_c := \sup_{|\alpha|=1} \|\alpha v\|$ eine Norm $\| \ \|_c$ auf V als komplexer Vektorraum erhalten, und daß diese Norm äquivalent ist zu unserer ursprünglichen Norm.

7.5 Überdeckungen kompakter metrischer Räume

Definition 7.5.1. Sei X eine Menge. Unter einer **Überdeckung** von X versteht man ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X mit Vereinigung X, in Formeln ausgedrückt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Unter einer **Teilüberdeckung** einer Überdeckung $\mathcal{U}$ versteht man ein Teilsystem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, das auch selbst schon eine Überdeckung ist.



Eine Überdeckung eines Quadrats durch vier Kreisscheiben

Definition 7.5.2. Unter einer **offenen Überdeckung** eines metrischen Raums oder allgemeiner eines topologischen Raums versteht man eine Überdeckung, die aus offenen Teilmengen besteht.

Satz 7.5.3 (Kompaktheit und offene Mengen). *Ein metrischer Raum ist folgenkompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

7.5.4. Ich hoffe, daß Sie im weiteren Verlauf dieser Vorlesung noch sehen werden, wie wichtig diese Charakterisierung der Kompaktheit ist. Im Kontext topologischer Räume wird Satz 7.5.3 sogar die Definition der Kompaktheit. Sie ist so wichtig, daß ich sie nicht im Fließtext verstecken will. Eine ausführlichere Diskussion des Begriffs geben wir in [AN3] 1.8 und sehr ähnlich auch in [ML] **??**.

Definition 7.5.5. Ein topologischer Raum heißt **kompakt** und manchmal auch ausführlicher **überdeckungskompakt**, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

7.5.6. In dieser Terminologie besagt unser Satz 7.5.3, daß ein metrischer Raum genau dann folgenkompakt ist, wenn er überdeckungskompakt ist.

7.5.7 (**Diskussion der Terminologie**). Nennen wir einen topologischen Raum kompakt, so meinen wir a priori überdeckungskompakt. Topologische Räume mit der Eigenschaft, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, heißen dahingegen **folgenkompakt**. In der französischen Literatur ist eine abweichende Terminologie üblich: Unsere überdeckungskompakten oder kurz kompakten topologischen Räume heißen dort **quasikompakt**, und „kompakt" meint dort „überdeckungskompakt und Hausdorff".

Ergänzung 7.5.8. Ein Beispiel für einen überdeckungskompakten aber nicht folgenkompakten topologischen Raum finden Sie in [**?**] **??**, ein Beispiel für einen folgenkompakten aber nicht überdeckungskompakten topologischen Raum in [ML] **??** oder [AL] 5.4.7. Besitzt ein überdeckungskompakter topologischer Raum die zusätzliche Eigenschaft, daß man für jeden seiner Punkte eine Folge von Umgebungen derart finden kann, daß jede seiner Umgebungen mindestens eine Umgebung dieser Folge umfaßt, so ist er auch folgenkompakt mit demselben Argument, wie wir es im Beweis des Satzes verwenden.

Beweis von Satz 7.5.3. Sei X ein metrischer Raum. Ist X nicht folgenkompakt, so finden wir in X eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Dann besitzt jeder Punkt von X eine offene Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, und alle diese offenen Umgebungen bilden eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung. Das zeigt die eine Richtung. Den Beweis der anderen Richtung beginnen wir mit einem Lemma, das auch für sich genommen oft hilfreich ist.

Lemma 7.5.9 (Überdeckungssatz von Lebesgue). *Ist X ein folgenkompakter metrischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle Punkte $x \in X$ der ε-Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ um x ganz in einer der überdeckenden offenen Mengen $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.*

Erster Beweis. Gäbe es kein solches $\varepsilon > 0$, so könnten wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ einen Punkt $x_n \in X$ finden derart, daß $\mathrm{B}(x_n; 1/n)$ in keinem $U \in \mathcal{U}$ enthalten wäre. Durch Übergang zu einer Teilfolge könnten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß die Folge der x_n konvergiert, etwa gegen $x \in X$. Nun finden wir jedoch ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und dazu $\rho > 0$ mit $\mathrm{B}(x;\rho) \subset U$ und dazu N mit $d(x_N, x) < \rho/2$ und $1/N < \rho/2$, und dann gälte $\mathrm{B}(x_N; 1/N) \subset \mathrm{B}(x_N; \rho/2) \subset \mathrm{B}(x;\rho) \subset U$ im Widerspruch zur Wahl der x_n. □

Zweiter Beweis. Man betrachte die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) = \sup\{r \leq 1 \mid \text{Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } \mathrm{B}(x;r) \subset U\}$$

Die Dreiecksungleichung liefert $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$, insbesondere ist f stetig. Sicher dürfen wir $X \neq \emptyset$ annehmen. Dann nimmt f nach 7.1.12 sein Minimum an, und dies Minimum ist ein mögliches $\varepsilon > 0$. □

Um die andere Implikation im Satz zu zeigen sei nun X folgenkompakt und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Es gilt zu zeigen, daß sie eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wählen wir zu unserer Überdeckung $\mathcal{U}$ ein ε wie im Überdeckungssatz 7.5.9, so reicht es auch zu zeigen, daß es eine endliche Teilmenge $E \subset X$ gibt mit

$$X = \bigcup_{x \in E} \mathrm{B}(x;\varepsilon)$$

In der Tat liegt ja der ε-Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ um ein beliebiges $x \in X$ nach Wahl von ε schon in einem der $U \in \mathcal{U}$. Gäbe es aber für ein $\varepsilon > 0$ keine endliche Überdeckung von X durch ε-Bälle, so könnten wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren mit $x_n \notin \bigcup_{0 \leq \nu < n} \mathrm{B}(x_\nu; \varepsilon)$ für alle n, also $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für $n \neq m$, und diese Folge könnte keine konvergente Teilfolge haben, im Widerspruch zur Annahme. □

7.5.10. Sei X eine Menge. Unter einer **Überdeckung einer Teilmenge** $Y \subset X$ durch Teilmengen von X versteht man ein Mengensystem $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $Y \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Nach unseren Definitionen ist eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X kompakt für die induzierte Topologie genau dann, wenn jede Überdeckung von Y durch offene Teilmengen von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Übungen

Übung 7.5.11 (**Nichtleere Schnitte in Kompakta**). Ist in einem kompakten topologischen Raum X ein System abgeschlossener Teilmengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ mit leerem Schnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \emptyset$ gegeben, so gibt es bereits ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ mit leerem Schnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{E}} K = \emptyset$.

Ergänzende Übung 7.5.12 (**Satz von Dini**). Eine monoton wachsende Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf einem kompakten Raum, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert sogar gleichmäßig. Hinweis: 7.5.11.

Ergänzende Übung 7.5.13. Man zeige, daß das Bild eines kompakten topologischen Raums unter einer stetigen Abbildung kompakt ist für die Spurtopologie. Insbesondere ist jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum beschränkt.

Ergänzende Übung 7.5.14. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ zeige man: Eine Teilmenge Y unseres Raums ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit jeder Teilmenge unserer Überdeckung abgeschlossenen Schnitt hat, in Formeln

$$Y \overset{\scriptscriptstyle A}{\subset} X \quad \Leftrightarrow \quad (Y \cap U) \overset{\scriptscriptstyle A}{\subset} U \;\forall U \in \mathcal{U}$$

Die fraglichen Schnitte sollen hierbei abgeschlossen sein in U, nicht in X.

7.6 Integrale mit Parametern

Satz 7.6.1 (über Integrale mit Parametern). *Gegeben ein metrischer Raum X und eine stetige Funktion $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x, t)\mathrm{d}t$ stetig.*

7.6.2. Ich zeige diesen Satz in großer Allgemeinheit als Anwendung unserer neuen Charakterisierung der Kompaktheit und als Illustration für die Kraft der allgemeinen Theorie metrischer Räume. Ist X offen oder abgeschlossen in einem $\mathbb{R}^n$, so kann man auch elementarer mit der gleichmäßigen Stetigkeit argumentieren. Diesen Beweis gebe ich als Alternative auch noch an.

Beweis. Versehen wir den Raum $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$ mit der Supremumsnorm, so ist nach dem gleich folgenden Satz 7.6.4 die von f induzierte Abbildung $\tilde{f} : X \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $x \mapsto f(x, \ )$ stetig. Nach Übung 7.4.22 ist weiter das Integrieren $\int : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig. Damit ist unsere Abbildung $\int \circ \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ stetig als eine Verknüpfung stetiger Abbildungen. □

Alternativer Beweis. Ist X offen oder abgeschlossen in einem $\mathbb{R}^n$, so kann man auch elementarer argumentieren. Zunächst reicht es ja, die Stetigkeit an jeder Stelle $x \in X$ nachzuweisen. Mit dieser Überlegung können wir uns leicht auf den Fall zurückziehen, daß X kompakt ist. Dann ist aber auch $X \times [a, b]$ kompakt und nach 7.1.15 ist f dort gleichmäßig stetig. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es insbesondere $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x,t) - f(y,t)| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Aus $|x - y| < \delta$ folgt mithin

$$\left| \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(y,t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(y,t)|\mathrm{d}t \leq (b-a)\varepsilon$$

und das zeigt die Behauptung. □

7.6.3. Den Raum aller stetigen Abbildungen von einem kompakten Raum X in einen metrischen Raum Y, versehen mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, wird $\mathcal{C}(X, Y)$ notiert. Das $\mathcal{C}$ steht hier für englisch „continous“ und französisch „continu“.

Satz 7.6.4 (Stetige Abbildungen in Abbildungsräume). *Seien X, Y und K metrische Räume. Ist K kompakt, so ist eine Abbildung $f : X \times K \to Y$ stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung $\tilde{f} : X \to \mathcal{C}(K, Y)$ stetig ist für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{C}(K, Y)$.*

Beweis. Daß aus der Stetigkeit von $\tilde{f}$ die Stetigkeit von f folgt, sieht man ohne weitere Schwierigkeiten. Wir zeigen nun die andere Richtung und müssen die Stetigkeit von $\tilde{f}$ an jeder Stelle $p \in X$ nachweisen. Sei diese Stelle p ab jetzt fest gewählt und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es für jedes $s \in K$ ein $\delta_s > 0$ mit

$$f\,\mathrm{B}((p,s);\delta_s) \subset \mathrm{B}(f(p,s);\varepsilon)$$

Nun gilt für unsere Metrik auf $X \times K$ ja $\mathrm{B}((p,s);\delta) = \mathrm{B}(p;\delta) \times \mathrm{B}(s;\delta)$ und nach 7.5.3 gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{s \in E} \mathrm{B}(s;\delta_s)$. Für $\eta = \min_{s \in E} \delta_s$ behaupten wir dann

$$x \in \mathrm{B}(p;\eta) \;\Rightarrow\; d(f(x,t), f(p,t)) < 2\varepsilon \;\; \forall t \in K$$

In der Tat finden wir für jedes $t \in K$ ein $s \in E$ mit $t \in \mathrm{B}(s;\delta_s)$ und für dies s liegen (p,t) und (x,t) beide in $\mathrm{B}((p,s);\delta_s)$. Damit ist die Stetigkeit von $\tilde{f}$ bei p gezeigt. □

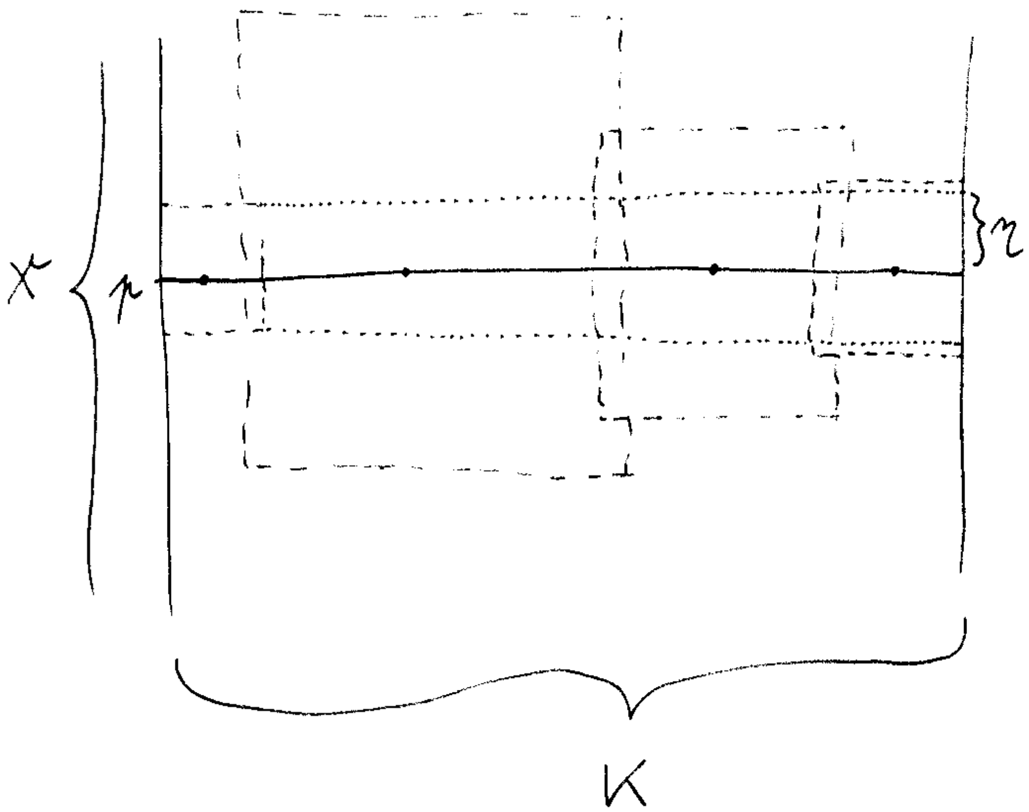


Illustration zum Beweis von Satz 7.6.4. Die mit gestrichelten Rändern eingezeichneten Quadrate sind so gewählt, daß unsere Abbildung f auf jedem Quadrat höchstens um den Abstand ε von ihrem Wert im Zentrum des jeweiligen Quadrats abweicht. Die gepunktelten Linien begrenzen einen Streifen der Breite 2η, in dem unsere Funktion auf jeder Vertikalen höchstens um 2ε von ihrem Wert am Schnittpunkt der besagten Vertikalen mit der fett eingezeichneten Horizontalen abweicht.

8 Raumwertige Funktionen

8.1 Bogenlänge in metrischen Räumen

Definition 8.1.1. Gegeben ein nichtleeres Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein metrischer Raum (X, d) und eine Abbildung $\gamma : I \to X$ definieren wir die **Länge** $\mathrm{L}(\gamma) \in \overline{\mathbb{R}}$ von γ als das Supremum über „die Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge“, in Formeln

$$\mathrm{L}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \,\middle|\, t_0, \ldots, t_r \in I,\ t_0 \leq \ldots \leq t_r \right\}$$

Man spricht in diesem Zusammenhang meist von **Bogenlänge**.

Ergänzung 8.1.2. Diese Definition liefert uns sogar einen Längenbegriff für eine Abbildung von einer beliebigen nichtleeren angeordneten Menge in einen metrischen Raum.

8.1.3. Eine stetige Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall in einen metrischen oder allgemeiner topologischen Raum heißt ein **Weg** in unserem Raum. Ist das Definitionsintervall kompakt, sprechen wir von einem **kompakten Weg**. Ist das Definitionsintervall das Einheitsintervall $[0, 1]$, sprechen wir von einem **normierten Weg**. Oft lassen wir diese Zusätze aber auch weg und hoffen, daß sie aus dem Kontext hervorgehen. Wir interessieren uns besonders für die Länge von kompakten Wegen im $\mathbb{R}^k$ und verstehen in diesem Zusammenhang die Länge für gewöhnlich in Bezug auf die euklidische Metrik.

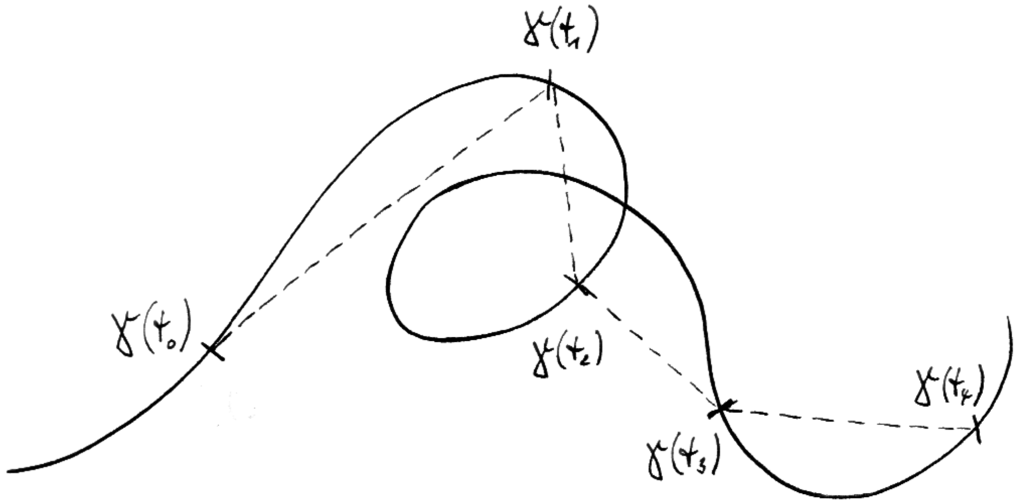
8.1.4. Ein Weg in einem metrischen Raum heißt **rektifizierbar**, wenn er endliche Länge hat. Eine Abbildung von einem reellen Intervall in einem metrischen Raum heißt **rektifizierbar**, wenn sie stetig ist und ihre Einschränkung auf jedes mehrpunktige kompakte Teilintervall endliche Länge hat.

8.1.5. Offensichtlich ist unsere Bogenlänge „invariant unter Reparametrisierung“, genauer haben wir für jede monotone Surjektion $\psi : J \to I$ notwendig $\mathrm{L}(\gamma \circ \psi) = \mathrm{L}(\gamma)$. Unsere Definition der Kreiszahl π aus 2.4.1 können wir schreiben als $\pi = \mathrm{L}(\gamma)$ für $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2})$.

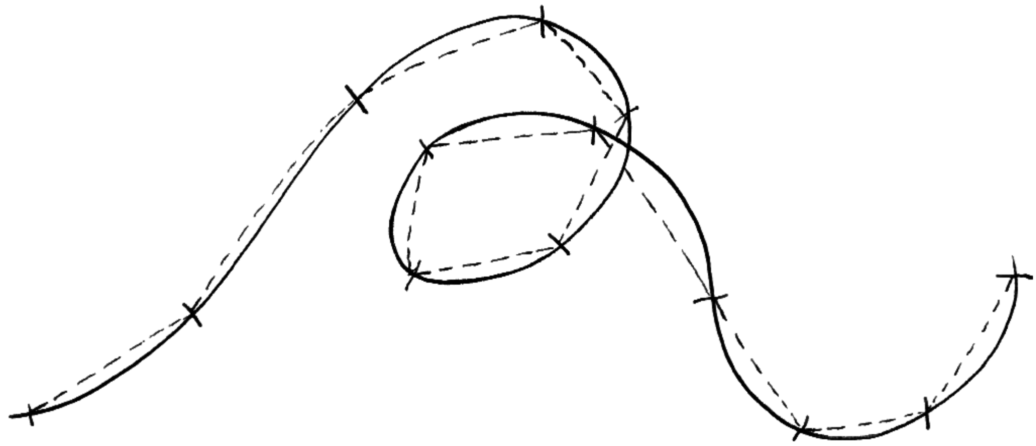
8.1.6. Um Bogenlängen zu berechnen benutzt man meist die Darstellung als Integral 8.3.2. Sie verwendet den Begriff der Ableitung 8.2.1 von Funktionen einer reellen Veränderlichen mit Werten in affinen Räumen, mit dem wir uns nun beschäftigen werden.

Übungen

Übung 8.1.7. Gegeben $s \in \mathbb{R}$ bezeichne $(s\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Multiplikation mit s. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung von einem Intervall nach $\mathbb{R}^n$. Man zeige



Eine Approximation eines Weges durch einen Polygonzug



Eine bessere Approximation desselben Weges durch einen Polygonzug

$\mathrm{L}((s\cdot)\circ\gamma) = |s|\mathrm{L}(\gamma)$ für $s \neq 0$. Allgemeiner zeige man $\mathrm{L}(A\circ\gamma) = \mathrm{L}(\gamma)$ für jede Abbildung $A : X \to Y$ metrischer Räume mit $d(Ax, Ax') = \alpha d(x, x')$ für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Übung 8.1.8. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so gilt $\mathrm{L}(\gamma) \geq \|\gamma(a) - \gamma(b)\|$ und Gleichheit haben wir genau dann, wenn γ aus dem Weg $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $t \to t\gamma(a)+(1-t)\gamma(b)$ „entsteht durch monotone Umparametrisierung“, genauer: Wenn es $\psi : [a, b] \to [0, 1]$ monoton gibt mit $0, 1 \in \psi([a, b])$ und $\gamma = \phi \circ \psi$.

Übung 8.1.9. Eine Abbildung von einem reellen Intervall I in einen metrischen Raum X heiße **nach der Bogenlänge parametrisierend**, wenn ihre Einschränkung auf jedes nichtleere kompakte Teilintervall dieselbe Länge hat wie das Teilintervall selber. Man zeige, daß sich eine rektifizierbare Abbildung von einem reellen Intervall in einen metrischen Raum, die auf keinem mehrpunktigen Teilintervall konstant ist, stets „nach der Bogenlänge parametrisieren“ läßt, daß es also genauer für solch eine Abbildung $\gamma : I \to X$ stets eine stetige Bijektion $\psi : J \xrightarrow{\sim} I$ von einem weiteren reellen Intervall J nach I gibt derart, daß $\gamma \circ \psi$ nach der Bogenlänge parametrisierend ist.

8.2 Ableiten von raumwertigen Funktionen

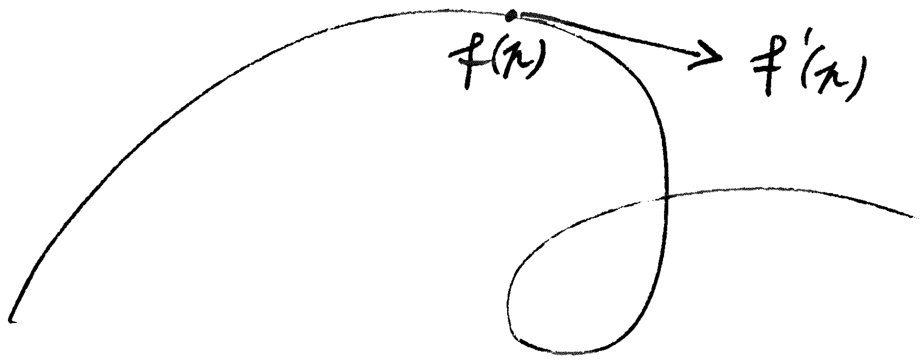
Definition 8.2.1. Seien $\gamma : D \to X$ eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ in einen normierten Raum X und $p \in D$ ein Punkt von D. Wir nennen die Abbildung γ **differenzierbar bei** p genau dann, wenn der Grenzwert $\lim_{t\to 0}(\gamma(p+t)-\gamma(p))/t$ in $\vec{X}$ existiert im Sinne von 6.8.6. In diesem Fall nennen wir besagten Grenzwert die **Ableitung von** γ **bei** p und notieren diesen Vektor

$$\gamma'(p) := \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(p+t) - \gamma(p)}{t} = \lim_{q\to p} \frac{\gamma(q) - \gamma(p)}{q - p}$$

Ist γ differenzierbar an allen Stellen $p \in D$, so nennen wir γ **differenzierbar** oder genauer **differenzierbar auf** D.

8.2.2. Ist X bereits selbst ein Vektorraum, so fassen wir die Ableitung meist als einen Vektor von X auf vermittels der kanonischen Identifikation $X \xrightarrow{\sim} \vec{X}$. In diesem Sinne stimmt dann unsere hier erklärte Ableitung für Abbildungen $D \to \mathbb{R}$ überein mit der Ableitung reellwertiger Funktionen aus 4.3.3.

8.2.3. Ich denke mir eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ in einen normierten Raum X gerne als Beschreibung eines Teilchens, das sich in X bewegt, und denke mir also D als ein Zeitintervall. Dann nenne ich $\gamma'(p)$ auch die **Geschwindigkeit** oder genauer den **Geschwindigkeitsvektor** von γ zum Zeitpunkt p und schreibe sogar manchmal $\dot{\gamma}$ statt γ'. In physikalischen Zusammenhängen verwende ich diese Begriffe jedoch präziser nur für Funktionen auf einer



Der Geschwindigkeitsvektor ist stets tangential an die Bahnkurve. Seine Länge hängt jedoch von der Anzeige des Tachometers ab, wenn wir uns hier mal ein Auto denken, das auf einem Fußballfeld herumkurvt. Dieser Aspekt ist in einem Bild leider schwer darzustellen.

halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{T}$ unseres mathematischen Modells der Zeit aus [LA1] 6.1.11, vergleiche [AN2] 8.1.3, eine physikalische Geschwindigkeit darf ja nicht die Einheit einer Länge haben. Wie man für Abbildungen von beliebigen eindimensionalen reellen Räumen in normierte reelle Räume die Ableitung definiert, besprechen wir in [AN2] 1.2.2 und [AN2] 1.2.18.

8.2.4. Formal folgt die in der Definition implizit behauptete Gleichheit der beiden Grenzwerte aus dem Analogon der zweiten Aussage von 2.5.20, die sich wie in **??** kurz erwähnt mitsamt ihrem Beweis ohne weitere Schwierigkeiten auf den Fall von Grenzwerten bei metrischen oder sogar topologischen Räumen verallgemeinern läßt.

8.2.5. Ich lege hier die Begrifflichkeit normierter affiner Räume im Sinne von 7.3.2 zugrunde. Der Leser mag sich stattdessen auch normierte Vektorräume oder sogar den $\mathbb{R}^n$ denken. Die gewählte Allgemeinheit modelliert jedoch meines Erachtens besser unsere Anschauung bewegter Teilchen, etwa im uns umgebenden Raum oder auch auf der Tafelebene. Darüber hinaus hoffe ich, daß die begriffliche Trennung von Punkten einerseits und Richtungsvektoren andererseits auch das Verständnis fördert.

8.2.6. Im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ sind unsere Definitionen, wie bereits bemerkt, im Wesentlichen identisch zu unseren bisherigen Definitionen für reellwertige Funktionen. Was im Fall $X = \mathbb{R}^m$ passiert, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 8.2.7 (Komponentenregel). *Sei $X = X_1 \times \ldots \times X_m$ ein Produkt normierter Räume, $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) : D \to X$ eine Abbildung und $p \in D$ ein Punkt. Genau dann ist γ differenzierbar bei p, wenn alle γ_j differenzierbar sind bei p, und dann gilt*

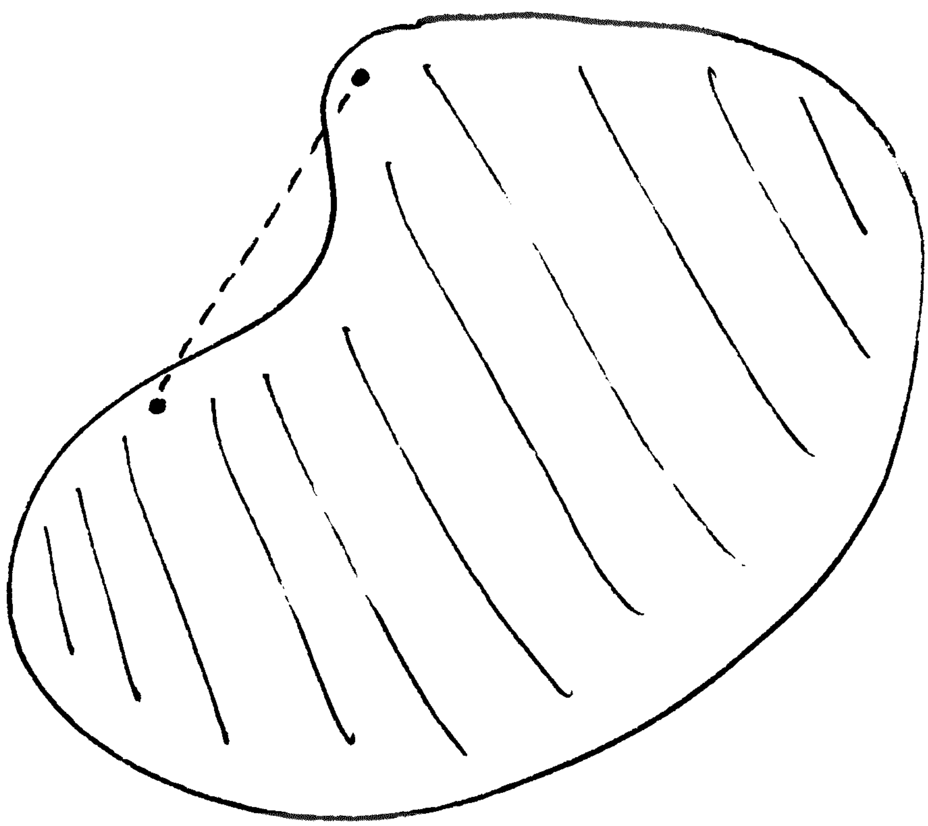
$$\gamma'(p) = (\gamma_1'(p), \ldots, \gamma_m'(p))$$

Beweis. Das folgt aus 6.8.13 und sei dem Leser überlassen. Man beachte, daß wir bereits bei der Formulierung die kanonische Identifikation zwischen dem Richtungsraum eines Produkts und dem Produkt der Richtungsräume der Faktoren [LA1] 6.1.22 verwendet haben. □

8.2.8. Wie in [LA1] 6.4.4 heißt eine Teilmenge eines reellen Raums **konvex** genau dann, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze die beiden Punkte verbindende Geradensegment enthält.

Satz 8.2.9 (Schrankensatz). *Seien X ein normierter Raum, $a < b$ reelle Zahlen und $\gamma : [a, b] \to X$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $C \subset \vec{X}$ eine offene oder abgeschlossene konvexe Teilmenge und gilt $\gamma'(t) \in C$ für alle $t \in [a, b]$, so folgt*

$$\gamma(b) - \gamma(a) \in (b - a)C$$



Eine nicht konvexe Teilmenge der Ebene

8.2.10. Man folgert leicht eine Variante, die auch $a \geq b$ erlaubt: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall, $\gamma : I \to X$ eine differenzierbare Abbildung und gilt $\gamma'(t) \in C$ für alle $t \in I$, so folgt $\gamma(b) - \gamma(a) \in (b - a)C \quad \forall a, b \in I$.

Beispiel 8.2.11 (**Anschauung für den Schrankensatz**). Anschaulich können wir den Inhalt des Satzes interpretieren wie folgt: Sei C eine Kreisscheibe im Richtungsraum der Anschauungsebene mit Radius $20\,\mathrm{km/h}$. Fahren wir mit einem Geländewagen um $14{:}00$ Uhr an einem Parkplatz los und kurven durch die Gegend und der Tacho zeigt nie mehr als $20\,\mathrm{km/h}$ an, so sind wir um $17{:}00$ Uhr höchstens $60\,\mathrm{km}$ von unserem ursprünglichen Parkplatz entfernt. Besteht C dahingegen aus einem einzigen Punkt, der sagen wir die Geschwindigkeit von $20\,\mathrm{km/h}$ in einer festen Richtung bedeutet, so besagt unser Satz: Fahren wir konstant mit $20\,\mathrm{km/h}$ in diese Richtung, so haben wir um $17{:}00$ Uhr genau $60\,\mathrm{km}$ in besagte Richtung zurückgelegt. Für dieses Beispiel wählen wir implizit einen Isomorphismus der Zeitachse $\mathbb{T}$ mit der reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$ derart, daß jeder Stunde ein Intervall der Länge Eins entspricht. Das bedeutet insbesondere, daß wir implizit auch vektorielle Geschwindigkeiten mit Richtungsvektoren identifizieren. Im übrigen wird in [AN2] 1.2.18 erklärt, wie man auch mit „echten“ Geschwindigkeiten formal korrekt arbeiten kann.

8.2.12 (**Beziehung zwischen Schrankensatz und Mittelwertsatz**). Der Satz folgt im Fall $X = \mathbb{R}$ leicht aus unserem bisherigen Mittelwertsatz 4.5.6 und er spielt auch im allgemeinen eine ähnliche Rolle, indem er es erlaubt, „den von einem Teilchen in einem Zeitintervall $[a, b]$ gewonnenen Abstand von seinem Ausgangspunkt aus der Kenntnis seiner lokalen Geschwindigkeiten abzuschätzen“. Jedoch kann man für höherdimensionales X im allgemeinen keinen Zeitpunkt mehr finden, zu dem das Teilchen „mittlere Geschwindigkeit“ hätte, d.h. es gibt für höherdimensionales X im allgemeinen keinen Punkt $\xi \in [a, b]$ mit $\gamma(b) - \gamma(a) = (b-a)\gamma'(\xi)$. Man stelle ich etwa vor, daß unser Geländewagen ein Rundtour fährt, bei der er zu keiner Zeit die Geschwindigkeit Null hat. Mich befriedigt deshalb die in der älteren Literatur übliche Bezeichnung als „Mittelwertsatz in mehreren Veränderlichen“ nicht vollständig. Oft wird auch nur der Fall betrachtet, daß C ein offener Ball oder auch ein abgeschlossener Ball mit Zentrum im Ursprung ist: Aus $\|\gamma'(t)\| \leq K \; \forall t \in [a, b]$ folgt so etwa $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (b - a)K$.

8.2.13. Offensichtlich ist eine Teilmenge C eines reellen Vektorraums genau dann konvex, wenn für beliebige reelle $s, t \geq 0$ gilt $sC + tC = (s + t)C$. Das zeigt, daß in unserem Satz die Aussage für das ganze Intervall folgt, wenn wir sie für alle Stücke einer Zerlegung in Teilintervalle zeigen können.

Erster Beweis. Ist C abgeschlossen, so schreiben wir C als den Schnitt der offenen konvexen Mengen $C + \mathrm{B}(0; \eta)$. Wir dürfen also ohne Beschränkung der

Allgemeinheit C offen annehmen. Wir betrachten nun

$$s = \sup\{q \in [a, b] \mid \gamma(x) - \gamma(a) \in (x - a)C \ \forall x \in [a, q]\}$$

und zeigen zunächst $s = b$. Für alle $p \in [a, b]$ finden wir ja eine offene Umgebung $U_p \Subset [a, b]$ mit

$$\frac{\gamma(q) - \gamma(p)}{q - p} \in C \text{ für alle } q \in U_p \backslash p$$

Insbesondere folgern wir $s > a$ und müssen nur noch die Annahme $s < b$ zum Widerspruch führen. Aber wäre $s < b$, so fänden wir $\varepsilon > 0$ mit $[s - \varepsilon, s + \varepsilon] \subset U_s$ und die Aussage des Satzes gälte für die Einschränkung von γ auf die Intervalle $[a, s - \varepsilon]$, $[s - \varepsilon, s]$ und $[s, s + \varepsilon]$. Daraus folgte jedoch mit unserer Vorbemerkung 8.2.13 die Aussage des Satzes für das Intervall $[a, s + \varepsilon]$ im Widerspruch zur Wahl von s. Mithin haben wir $s = b$. Da es aber mit denselben Argumenten auch ein $\eta > 0$ gibt derart, daß die Aussage des Satzes für die Einschränkung von γ auf $[b - \eta, b]$ gilt, folgt die Aussage des Satzes für das ganze Intervall $[a, b]$. □

Zweiter Beweis. Wir beginnen wie beim ersten Beweis und finden Umgebungen U_p wie dort, die wir sogar als Schnitte mit $[a, b]$ von offenen Bällen $\mathrm{B}(p; \varepsilon_p)$ annehmen dürfen. Da $[a, b]$ kompakt ist, wird es nach 7.5.3 überdeckt durch endlich viele solcher Umgebungen U_p. Seien nun $a = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_r = b$ die Elemente einer kleinstmöglichen Menge von Punkten, die a und b enthält und für die die zugehörigen Umgebungen $[a, b]$ überdecken. Es ist dann leicht zu sehen, daß wir Zwischenpunkte $q_i \in (p_{i-1}, p_i)$ finden können derart, daß auf jedem Teilintervall der so entstehenden Unterteilung von $[a, b]$ in $2r$ Teilintervalle die Folgerung unseres Mittelwertsatzes gilt. Mithin gilt sie auch für das ganze Intervall $[a, b]$. □

Übungen

Übung 8.2.14. Auch für Abbildungen halboffener Teilmengen von $\mathbb{R}$ in normierte Räume folgt aus der Differenzierbarkeit bereits die Stetigkeit.

Übung 8.2.15. Sei $\gamma : D \to X$ eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ in einen normierten Raum X und sei $L : X \to Y$ eine stetige affine Abbildung in einen weiteren normierten Raum Y. Ist γ differenzierbar an einer Stelle $p \in D$, so ist auch $L \circ \gamma$ differenzierbar bei p und es gilt

$$(L \circ \gamma)'(p) = \vec{L}(\gamma'(p))$$

Das zeigt insbesondere, daß unsere Ableitung sich nicht ändert, wenn wir zu einer anderen aber äquivalenten Norm auf X übergehen. Später wird sich diese Aussage als Spezialfall der Kettenregel in mehreren Veränderlichen [AN2] 1.3.1 erweisen.

Übung 8.2.16. In einem normierten Raum ist jeder Ball konvex.

Übung 8.2.17. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und seien $A : D \to \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ und $B : D \to \mathrm{Mat}(m \times k; \mathbb{R})$ zwei differenzierbare matrixwertige Funktionen. So ist auch das Produkt $AB : t \mapsto A(t)B(t)$ differenzierbar und die Geschwindigkeit $(AB)'$ der Produktfunktion $AB : D \to \mathrm{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ wird gegeben durch die Formel

$$(AB)' = A'B + AB'$$

Ergänzende Übung 8.2.18. Hinweis: Schrankensatz 8.2.9. Man zeige für jede stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : D \to X$ von einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ in einen normierten reellen Raum X die Stetigkeit der „Tangenten-Sekanten-Abbildung“

$$\begin{array}{rccc} \phi : & D^2 & \to & V \\ & (s,t) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{s-t} & s \neq t; \\ \gamma'(s)=\gamma'(t) & s = t. \end{array} \right. \end{array}$$

8.3 Die Bogenlänge in normierten Räumen

Definition 8.3.1. Gegeben ein differenzierbarer Weg in einem normierten Raum erklären wir seine **absolute Geschwindigkeit** zu einem gegebenen Zeitpunkt als die Norm des Geschwindigkeitsvektors.

Satz 8.3.2 (Bogenlänge als Integral). *Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to X$ in einem normierten reellen Raum X stimmt überein mit dem Integral über seine absolute Geschwindigkeit, in Formeln*

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da γ' nach 7.1.15 gleichmäßig stetig ist auf $[a, b]$, finden wir ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| < \varepsilon$ falls $|x - y| \leq \delta$. Gegeben eine Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = b$ einer Feinheit $\leq \delta$ folgern wir aus dem Schrankensatz 8.2.9 dann

$$\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) \in (a_{i+1} - a_i)(\gamma'(a_i) + \mathrm{B}(0; \varepsilon))$$

und insbesondere $\|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| \in (a_{i+1} - a_i)\|\gamma'(a_i)\| + (a_{i+1} - a_i)[-\varepsilon, \varepsilon]$. Durch Aufsummieren folgt

$$\left| \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| \quad - \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| \leq (b - a)\varepsilon$$

für jede Unterteilung der Feinheit $\leq \delta$. Das zeigt schon $\mathrm{L}(\gamma) < \infty$. Nach 4.2.11 können wir weiter δ sogar so klein wählen, daß in unserer Differenz die rechte Summe zusätzlich einen Abstand $\leq \varepsilon$ hat vom Integral $\int \|\gamma'\|$ für jede Unterteilung der Feinheit $\leq \delta$. Da aber die Länge approximierender Polygonzüge beim Hinzufügen von Zwischenpunkten nur größer werden kann, finden wir eine Unterteilung von dieser Feinheit, für die die linke Summe von $\mathrm{L}(\gamma)$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ hat. Zusammen erhalten wir

$$\left|\mathrm{L}(\gamma) - \int \|\gamma'\|\right| \leq (b - a + 2)\varepsilon$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\mathrm{L}(\gamma) = \int \|\gamma'\|$ wie gewünscht. □

Ergänzung 8.3.3 (**Gestalt einer hängenden Kette**). Wir gehen davon aus, daß die Gestalt einer hängenden Kette durch den Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben wird, und zeigen, daß diese Funktion im Wesentlichen der Cosinus hyperbolicus sein muß. Auf das Kettensegment über einem kompakten Intervall $[a, b]$ wirken die Zugkraft in der Kette von beiden Seiten sowie die Schwerkraft. Bezeichnet L_a^b die Länge des besagten Kettensegments und $v_x = (1, f'(x))$ den Tangentenvektor an unsere Kurve bei $(x, f(x))$ mit 1 als erster Komponente, so bedeutet das Kräftegleichgewicht die vektorielle Gleichung

$$0 = -c_a v_a + c_b v_b - D(0, L_a^b)$$

für geeignete positive Zahlen c_a, c_b und eine positive Konstante D, die von den physikalischen Konstanten unseres Problems abhängen. Die Positivität von c_a, c_b und D wird dabei auch nur anschaulich motiviert und nicht mathematisch hergeleitet. Durch Betrachtung der ersten Komponenten liefert unsere vektorielle Gleichung für das Kräftegleichgewicht erst einmal $c_a = c_b = c$ und durch Betrachtung der zweiten Komponenten dann

$$cf'(a) - cf'(b) = -DL_a^b = -D \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Folglich erfüllt unsere Funktion eine Differentialgleichung der Gestalt

$$f'(a) - f'(b) = -k \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

für positives $k = D/c$, mithin gilt $f''(x) = k\sqrt{1 + f'(x)^2}$. Daraus folgern wir

$$\int_a^b \frac{f''(x)\,\mathrm{d}x}{k\sqrt{1 + f'(x)^2}} = b - a$$

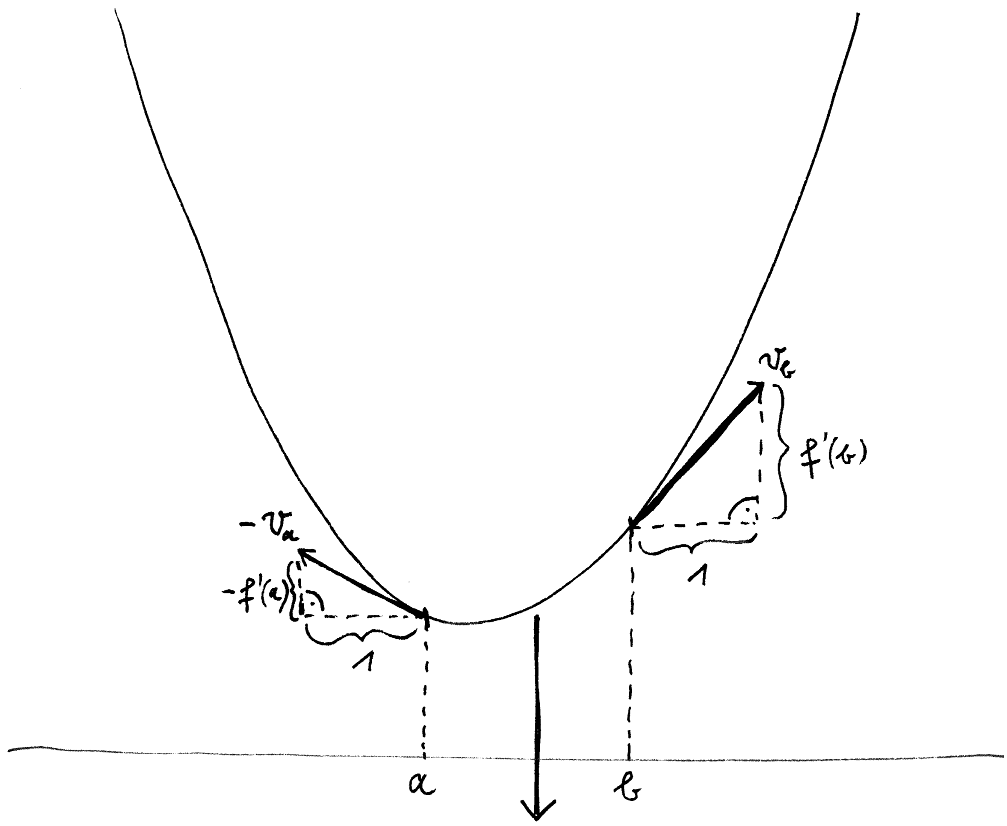


Illustration zur hängenden Kette

und mit der Substitution $f'(x) = y$, $f''(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ weiter

$$\int_{f'(a)}^{f'(b)} \frac{\mathrm{d}y}{k\sqrt{1+y^2}} = b - a$$

Dies Integral lösen wir durch die Substitution $y = \sinh t$, $\mathrm{d}y = \cosh t \mathrm{d}t$ und erhalten als Stammfunktion für den Integranden $\frac{1}{k} \operatorname{arsinh} y$. Damit ergibt sich $\frac{1}{k} \operatorname{arsinh} f'(b) = b + m$ für eine weitere Konstante m und so $f'(b) = \sinh\left(\frac{b+m}{k}\right)$ und schließlich

$$f(b) = k \cosh\left(\frac{b+m}{k}\right) + h$$

für geeignete Konstanten k, m und h. Hier beschreibt k, wie „steil“ die Kette hängt, m ist das Negative der x-Koordinate der Stelle kleinster Höhe, und h beschreibt, wie hoch unsere Kette hängt. In Worten bedeutet das, daß es für eine vorgegebene hängende Kette stets ein orthogonales Koordinatensystem und insbesondere eine Längeneinheit gibt, für die sie genau entlang des Graphen des Cosinus hyperbolicus hängt.

Vorschau 8.3.4. In [TM] 2.10.10 skizziere ich einen Beweis dafür, daß eine „rektifizierbare Kurve gegebener Länge kleinster potentieller Energie“ existiert und eindeutig bestimmt ist und in der Tat unsere Kettenlinie sein muß.

Übungen

Übung 8.3.5. Man zeige, daß eine stetig differenzierbare Abbildung von einem halboffenen reellen Intervall in einen normierten Raum genau dann nach der Bogenlänge parametrisierend ist, wenn die zugehörige absolute Geschwindigkeit konstant Eins ist.

Übung 8.3.6. Gegeben ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \to X$ in einem normierten Raum X und eine stetige Funktion $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{R}$ definiert man das **Kurvenintegral von f längs γ** als die reelle Zahl

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Man zeige, daß dies Kurvenintegral unabhängig ist von der Parametrisierung und daß es mit denselben Notationen wie oben geschrieben werden kann als der Grenzwert der Riemannsummen

$$S_\gamma^r(f) = \sum_{i=0}^{r-1} f(\gamma(a_i)) \, \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|$$

Als Kür definiere man allgemeiner das Kurvenintegral längs eines beliebigen rektifizierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to X$ in einem metrischen Raum X.

8.3.7 (**Anschauung zum Kurvenintegral**). Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges ist in dieser Terminologie das Kurvenintegral der konstanten Funktion Eins längs unseres Weges. Der „Schwerpunkt“ eines durch eine Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ beschriebenen homogenen gebogenen Drahtes müßte mathematisch dadurch definiert werden, daß seine Koordinaten die Kurvenintegrale der Koordinatenfunktionen x, y, z längs γ dividiert durch die Länge unseres Weges sind. Stellen wir uns allgemeiner eine Erdwärmeanlage vor, bei der kaltes Wasser in einem Rohr durch heißes Gestein gepumpt wird, um am Ende immer noch vergleichsweise kalt aber doch etwas wärmer herauszukommen, und beschreibt γ unser Rohr und f die Wärme der Erde an den jeweiligen Stellen, so würde unser Kurvenintegral nach Einfügen der entsprechenden physikalischen Konstanten die Temperaturdifferenz zwischen eintretendem und austretendem Wasser beschreiben.

8.3.8. Das hier definierte Kurvenintegral wird oft auch als „Wegintegral“ bezeichnet. Ich will den Begriff des Wegintegrals jedoch für eine andere Konstruktion reservieren, die in [AN2] 5.3 besprochen werden wird.

Übung 8.3.9. Gegeben eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wird die Länge ihres Graphen, als da heißt die Länge des Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$, gegeben durch das Integral $\mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, \mathrm{d}t$.

9 Lösung einiger Schwingungsgleichungen

9.1 Einfache lineare Differentialgleichungen

9.1.1. Wir bestimmen nun für eine gegebene quadratische Matrix $M \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ alle differenzierbaren Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\gamma'(t) = M\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Bei dieser Schreibweise fassen wir implizit die Elemente des $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren auf, also $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$, wo der obere Index $\top$ unsere Zeilenmatrix in eine Spaltenmatrix transponiert. Man nennt so eine Gleichung auch ein **homogenes System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**. Die Spezifikation „mit konstanten Koeffizienten“ grenzt unsere Gleichung ab von dem noch allgemeineren Fall, bei dem auch die Matrix M noch von t abhängt. Die Spezifikation „homogen“ grenzt es ab vom allgemeineren Fall einer Gleichung der Gestalt $\gamma'(t) = M\gamma(t) + f(t)$ für eine zusätzlich gegebene vektorwertige Funktion f, den wir in 9.6.1 diskutieren. Anschaulich gesprochen geben wir uns auf dem $\mathbb{R}^n$ das sehr spezielle Vektorfeld $x \mapsto Mx$ vor und interessieren uns für die Bahnen solcher Teilchen, die bei $x \in \mathbb{R}^n$ jeweils die Geschwindigkeit Mx haben.

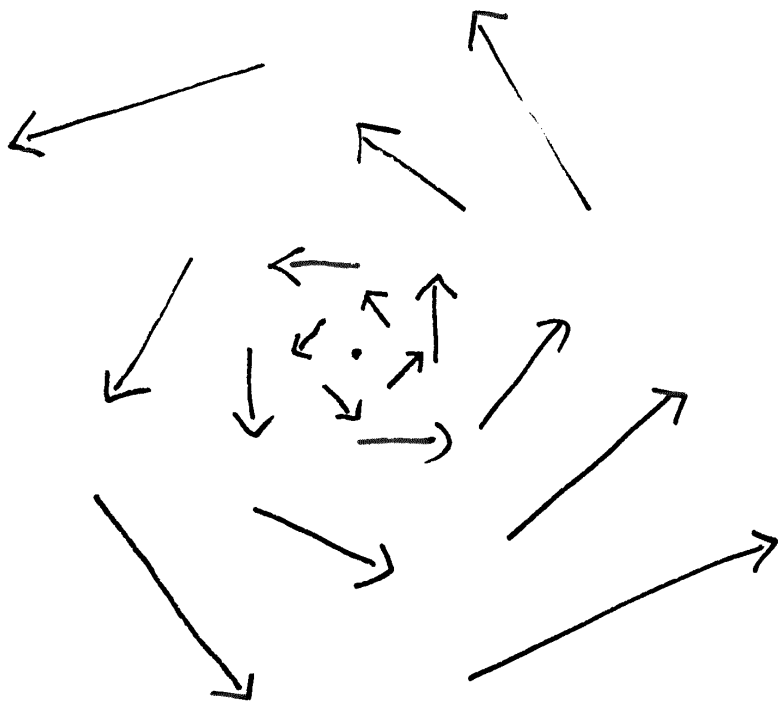
9.1.2. Im Fall $n = 1$ hat M genau einen Eintrag $a \in \mathbb{R}$, und wir hatten schon in 4.5.20 gesehen, daß alle Lösungen der Differentialgleichung $\gamma' = a\gamma$ die Form $\gamma(t) = c\exp(at)$ haben. Im Allgemeinen definieren wir die **Exponentialfunktion auf Matrizen** durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{6}M^3 + \ldots \end{array}$$

Hier bedeutet $M^0 = I$ nach unserer Konvention [GR] 3.1.17 die Einheitsmatrix und unsere unendliche Reihe ist zu verstehen als der Grenzwert der Folge ihrer Partialsummen. Es ist nur noch zu zeigen, daß diese Grenzwerte existieren. Bezeichnen wir dazu für eine quadratische Matrix $M \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ mit $|M|$ das Maximum der Absolutbeträge ihrer Einträge, so gilt offensichtlich $|MB| \leq n|M||B|$, also $|M^k| \leq (n|M|)^k$, und dann zeigt die Konvergenz der Exponentialreihe zu $(n|M|)$ schon die absolute Konvergenz aller Reihen von Matrixeinträgen in der Exponentialreihe zu M.

9.1.3. Die Stetigkeit von $\exp : \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ dürfen Sie in größerer Allgemeinheit als Übung 9.2.28 selbst beweisen.

Satz 9.1.4 (Lineare Differentialgleichungen). *Ist $M \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare*



Das ebene Vektorfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit Anfangswert $\gamma(0) = c$ derart, daß gilt $\gamma'(t) = M\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift

$$\gamma(t) = \exp(tM)c$$

9.1.5. Es ist durchaus möglich, mithilfe dieses Satzes auch ganz konkrete Differentialgleichungen ganz konkret zu lösen. Wir gehen darauf in den weiteren Abschnitten näher ein.

Beweis. Wir behaupten zunächst, daß die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R})$, $t \mapsto \exp(tM)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $g'(t) = M \exp(tM)$. In der Tat wissen wir nach 5.1.15, daß man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf, und unsere Formel ergibt sich, wenn wir diese Erkenntnis anwenden auf alle Einträge unserer Matrix. Nach Lemma 8.2.15 ist nun auch die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \exp(tM)c$ differenzierbar mit Ableitung $\gamma'(t) = M \exp(tM)c = M\gamma(t)$, und die Bedingung $\gamma(0) = c$ ist offensichtlich. Unsere Funktion ist damit eine Lösung der Differentialgleichung mit dem vorgegebenen Anfangswert. Ist umgekehrt $\gamma(t)$ eine beliebige Lösung unserer Differentialgleichung $\gamma' = M\gamma$, so berechnen wir die Ableitung der Funktion $t \mapsto h(t) = \exp(-tM)\gamma(t)$ mithilfe der matrixwertigen Produktregel 8.2.17 und erhalten

$$h'(t) = -M \exp(-tM)\gamma(t) + \exp(-tM)\gamma'(t) = 0$$

Die Funktion $h(t) = \exp(-tM)\gamma(t)$ ist also konstant mit Wert $\gamma(0)$ und mit dem anschließenden Lemma 9.1.6 folgt $\gamma(t) = \exp(tM)\gamma(0)$. □

Lemma 9.1.6. *Die Exponentialabbildung wirft die Null auf die Identität, und sind A, B zwei kommutierende quadratische Matrizen $AB = BA$, so gilt*

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$$

9.1.7. Insbesondere folgt $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$. Die Exponentialabbildung ist mithin eine Abbildung von der Menge aller quadratischen Matrizen in die Menge aller invertierbaren quadratischen Matrizen

$$\exp : \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$$

Für den Beweis des Lemmas geben wir zunächst nur eine Skizze, die dann im anschließenden Abschnitt ausgemalt wird.

Beweisskizze. Genau wie bei der Diskussion des Produkts absolut konvergenter Reihen in 3.2.12 zeigt man

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{A^i B^j}{i! j!}$$

Dann faßt man mithilfe von 9.2.27 die Terme mit $i + j = k$ zusammen und landet wegen $AB = BA$ wie beim Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion bei der Reihe für $\exp(A + B)$. Um das alles formal zu rechtfertigen, kann man mit den einzelnen Matrixeinträgen argumentieren und sich so auf unsere Resultate über Reihen reeller Zahlen zurückziehen. Ich will aber stattdessen diese Schwierigkeit als Motivation nutzen und gleich im nächsten Abschnitt 9.2 eine allgemeine Begrifflichkeit entwickeln, in der dieser Beweis einfach und natürlich wird und die auch darüber hinaus von Nutzen ist. □

Übungen

Übung 9.1.8. Ist $M \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall, so bildet die Menge aller differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma'(t) = M\gamma(t)$ für alle $t \in I$ einen Untervektorraum L im Vektorraum $\mathrm{Ens}(I, \mathbb{R}^n)$ aller Abbildungen $I \to \mathbb{R}^n$, den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung, und das Auswerten an einer beliebigen Stelle $t_0 \in I$ definiert einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$, den **Anfangswertisomorphismus**.

Übung 9.1.9. Gegeben eine Diagonalmatrix $M = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ haben wir $\exp(M) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{a_1}, \ldots, \mathrm{e}^{a_n})$. Analoges gilt allgemeiner auch für blockdiagonale Matrizen.

9.2 Vollständigkeit und Exponential von Matrizen

Definition 9.2.1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon$ gibt derart, daß gilt

$$n, m > N \;\Rightarrow\; d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Ein metrischer Raum X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Beispiele 9.2.2. Die Zahlengerade $\mathbb{R}$ ist vollständig nach 2.6.10. Weiter ist offensichtlich jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums vollständig. Darüber hinaus ist auch jedes endliche Produkt vollständiger metrischer Räume vollständig. Insbesondere ist der $\mathbb{R}^n$ vollständig für den Betragsabstand im Sinne von 6.2.3. Dahingegen ist $X = \mathbb{Q}$ mit dem Betragsabstand kein vollständiger metrischer Raum, und auch wenn wir aus der Zahlengerade einen Punkt entfernen, erhalten wir bereits einen metrischen Raum, der nicht vollständig ist.

Definition 9.2.3. Unter einem **Banach-Raum** oder genauer einem **reellen Banach-Raum** versteht man einen vollständigen normierten reellen Vektorraum. Sobald wir die komplexen Zahlen kennengelernt haben, werden wir auch und sogar überwiegend mit komplexen Banachräumen arbeiten.

Lemma 9.2.4. *Jeder endlichdimensionale normierte reelle Vektorraum ist vollständig alias ein Banachraum.*

Beweis. Wir wählen irgendeinen Vektorraumisomorphismus mit dem $\mathbb{R}^n$. Die so induzierte Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ ist nach 7.4.12 äquivalent zur Maximumsnorm und liefert also dieselben Cauchyfolgen und dieselben Grenzwerte von Folgen. Die Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^n$ hinwiederum führt zum Betragsabstand, und für diese Metrik wissen wir aus 9.2.2, daß sie den $\mathbb{R}^n$ zu einem vollständigen metrischen Raum macht. □

Definition 9.2.5. Gegeben ein normierter Vektorraum V nennt man eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren **summierbar mit Summe** $s \in V$ und schreibt $\sum_{i\in I} v_i = s$, wenn es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt

$$\sum_{i\in J} v_i \in U$$

9.2.6. Man sieht leicht, daß die Summe einer summierbaren Familie stets eindeutig bestimmt ist. Dieselbe Definition verwenden wir später allgemeiner für beliebige „abelsche Hausdorffgruppen".

Definition 9.2.7. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren in einem normierten Vektorraum heißt **absolut summierbar**, wenn die Familie ihrer Normen $(\|v_i\|)_{i\in I}$ summierbar ist.

Lemma 9.2.8. *In einem Banachraum ist jede absolut summierbare Familie summierbar und die Norm der Summe kann nach oben abgeschätzt werden durch die Summe der Normen.*

Beweis. Nach 3.1.27 sind bei einer absolut summierbaren Familie höchstens abzählbar viele Vektoren von Null verschieden, so daß wir uns auf Familien beschränken dürfen, die durch $\mathbb{N}$ indiziert sind. Sei also $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unsere Familie. Die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$ bilden eine Cauchy-Folge, da für $m \geq n$ ja gilt

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} v_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|v_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|v_k\|$$

Die rechte Seite wird nun offensichtlich für hinreichend großes n beliebig klein. Sind wir in einem Banachraum, so konvergiert mithin die Folge der Partialsummen gegen einen Grenzwert s. Den Nachweis, daß dieser Grenzwert auch die Summe im Sinne der Definition 9.2.5 sein muß, überlasse ich dem Leser. □

Ergänzung 9.2.9. In 3.1.27 hatten wir gesehen, daß jede summierbare Familie reeller Zahlen absolut summierbar ist. Dasselbe gilt für summierbare Familien in endlichdimensionalen normierten Räumen. In beliebigen normierten Räumen gilt es jedoch nicht mehr, ein typisches Gegenbeispiel ist etwa die „Konvergenz im quadratischen Mittel“ in [AN3] 2.4.18.

Definition 9.2.10. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V und eine lineare Abbildung $A : V \to V$ definieren wir eine weitere lineare Abbildung $\exp(A) : V \to V$ als den Grenzwert der sogenannten **Exponentialreihe**

$$\exp(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$$

9.2.11. Wählen wir eine Norm auf V und versehen den Raum $\operatorname{End} V$ aller Endomorphismen von V mit der Operatornorm, so gilt offensichtlich $\|A^k\| \le \|A\|^k$ und unsere Familie ist summierbar nach 9.2.8, da sie nämlich absolut summierbar ist bezüglich dieser und dann bezüglich jeder Norm. Für eine Operatornorm wie eben erhält man zusätzlich die Abschätzung $\|\exp A\| \le \exp\|A\|$.

Ergänzung 9.2.12. Ist allgemeiner V ein Banachraum und $A : V \to V$ eine stetige lineare Abbildung, so kann man in derselben Weise eine stetige lineare Abbildung $\exp(A) : V \to V$ erklären. Der Grenzwert ist in diesem Fall im Banachraum $\mathcal{B}(V) := \mathcal{B}(V, V)$ aller stetigen linearen Abbildungen von V in sich selbst aus 9.2.20 zu bilden. Die im Folgenden bewiesenen Aussagen verallgemeinern sich ohne Schwierigkeiten auf diesen Fall. Er ist für die Quantenmechanik fundamental, denn die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Systems mit Hamiltonoperator H wird dadurch beschrieben, daß ein Zustand ψ in der Zeitspanne t in den Zustand $\exp(\mathrm{i}tH)\psi$ übergeht.

Lemma 9.2.13. *Die Exponentialabbildung wirft die Null auf die Identität, und sind A, B zwei kommutierende Endomorphismen, gilt also in Formeln $AB = BA$, so folgt*

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$$

9.2.14. Insbesondere folgt $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$, die Exponentialabbildung ist mithin eine Abbildung von der Menge der Endomorphismen in die Menge der Automorphismen $\exp : \operatorname{End} V \to \operatorname{Aut} V$. Die Aussage des Lemmas gilt ganz allgemein für beliebige stetige Endomorphismen von Banachräumen.

Beweis. Genau wie bei der Diskussion des Produkts absolut konvergenter Reihen in 3.2.12 zeigt man zunächst

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{A^i B^j}{i!j!}$$

Dann faßt man, im unendlichdimensionalen Fall unter Verwendung von 9.2.27, die Terme mit $i + j = k$ zusammen und landet wegen $AB = BA$ wie beim Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion 3.2.9 bei der Reihe für $\exp(A + B)$. □

Ergänzung 9.2.15. Es gilt auch eine koordinatenfreie Variante von 9.1.4. Ist genauer V ein Banachraum und $A : V \to V$ eine stetige lineare Abbildung und $c \in V$ ein Vektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to V$ mit $\gamma(0) = c$ und $\gamma'(t) = A\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Formel

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von 9.1.4. Problematisch ist nur, daß die Produktregel in der benötigten Allgemeinheit erst in [AN2] 1.4.5 zur Verfügung gestellt wird.

Übungen

Übung 9.2.16. Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig. Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen.

Übung 9.2.17. Das Produkt zweier vollständiger metrischer Räume ist stets wieder vollständig.

Übung 9.2.18. Jede gleichmäßig stetige Abbildung $f : A \to Y$ von einer Teilmenge A eines metrischen Raums X in einen vollständigen metrischen Raum Y kann auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung $\bar{A} \to Y$ auf den Abschluß von A in X fortgesetzt werden. Vergleiche auch [AN3] 2.4.12.

Übung 9.2.19. Konvergiert eine Teilfolge einer Cauchyfolge, so konvergiert bereits die ganze Cauchyfolge, und zwar gegen denselben Grenzwert.

Übung 9.2.20. Seien V, W normierte Vektorräume. Ist W vollständig, so ist auch der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ der stetigen linearen Abbildungen von V nach W aus 7.4.28 vollständig.

Übung 9.2.21. Ist V ein Banachraum und D eine Menge, so ist auch der Vektorraum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, V)$ aus 7.4.7 aller beschränkten Abbildungen von D nach V mit seiner Supremumsnorm vollständig.

Übung 9.2.22. Eine abzählbare Familie ist summierbar genau dann, wenn für jede Abzählung die Folge der Partialsummen konvergiert und für je zwei Abzählungen die entsprechenden Grenzwerte übereinstimmen.

Übung 9.2.23. Gegeben ein normierter Vektorraum V und eine summierbare Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren von V und eine stetige lineare Abbildung L von V in einen weiteren normierten Vektorraum ist auch die Bildfamilie summierbar und es gilt

$$\sum_{i \in I} L(v_i) = L\left(\sum_{i \in I} v_i\right)$$

Analoges gilt auch allgemeiner für beliebige „abelsche Hausdorffgruppen“.

Ergänzende Übung 9.2.24. Gegeben normierte Vektorräume V, W, X und eine stetige bilineare Abbildung $b : V \times W \to X$ und summierbare Familien $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren von V und $(w_i)_{j \in J}$ von Vektoren von W ist auch die durch $I \times J$ indizierte Familie der $b(v_i, w_j)$ summierbar und es gilt

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} b(v_i, w_j) = b\left(\sum_{i \in I} v_i, \sum_{j \in J} w_j\right)$$

Analoges gilt auch allgemeiner für beliebige „abelsche Hausdorffgruppen“.

Übung 9.2.25. Man zeige, daß eine summierbare Familie in einem Banachraum höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Summanden haben kann.

Ergänzung 9.2.26. In allgemeinen „Hausdorff'schen topologischen Vektorräumen“ kann es auch summierbare Familien mit überzählbar vielen von Null verschiedenen Summanden geben. Ist zum Beispiel X eine überzählbare Menge mit ihrer diskreten Topologie und $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ der Raum der reellwertigen Funktionen auf X mit seiner kompakt-offenen Topologie, so ist die Familie der charakteristischen Funktionen aller Punkte von X summierbar mit der konstanten Funktion Eins als Summe.

Ergänzende Übung 9.2.27. Gegeben eine summierbare Familie $(v_i)_{i \in I}$ in einem Banachraum zeige man, daß auch jede Teilfamilie summierbar ist und daß für eine beliebig vorgegebene Zerlegung $I = \bigsqcup_{k \in K} I(k)$ von I in eine Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen $I(k)$ gilt

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I(k)} v_i\right)$$

Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß K endlich ist. Die Aussage gilt allgemeiner für jede „vollständige abelsche Hausdorffgruppe“.

Ergänzende Übung 9.2.28. Für jeden Banachraum V ist $\exp : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(V)$ stetig. Hinweis: 6.8.11.

Übung 9.2.29. Sind A, B stetige Endomorphismen von Banachräumen V, W und ist $P : W \to V$ stetig linear mit $AP = PB$, so gilt $(\exp A)P = P(\exp B)$. Ist insbesondere P invertierbar, so gilt $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$.

Übung 9.2.30. Gegeben eine Menge D und ein vollständiger metrischer Raum Y ist auch der Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, Y)$ aller beschränkten Abbildungen von D nach Y vollständig für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz 6.3.4.

Übung 9.2.31. Gegeben ein topologischer Raum D und ein vollständiger metrischer Raum Y ist auch der Raum $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(D, Y)$ aller stetigen beschränkten Abbildungen von D nach Y vollständig für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz 6.3.4. Hinweis: Man verwende 6.8.11.

Übung 9.2.32. Gegeben ein mehrpunktiges kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V ist auch der Raum $\mathcal{C}^1(I, V)$ aller einmal stetig differenzierbaren Abbildungen von I nach V vollständig für die Norm $\|\gamma\|_\infty + \|\gamma'\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz der Funktion und ihrer ersten Ableitung. Hinweis: Man verallgemeinere 6.8.11 und verwende 5.1.13.

Ergänzende Übung 9.2.33. Es gibt eine **stetige Surjektion vom Einheitsintervall** $[0, 1]$ **auf das Einheitsquadrat** $[0, 1]^2$. Um diese auf den ersten Blick verblüffende Tatsache einzusehen, unterteile man das Einheitsintervall in neun gleiche Abschnitte und das Einheitsquadrat in vier gleiche Quadrate und wähle irgendeinen Weg $[0, 1] \to [0, 1]^2$, der den $2i$-ten Abschnitt in das i-te Quadrat abbildet, für irgendeine Nummerierung der vier Quadrate. Dann unterteile man die $2i$-ten Abschnitte von eben jeweils in neun gleiche Unterabschnitte und die vier Quadrate von eben jeweils in vier gleiche Unterquadrate und ändere den Weg von eben auf den $2i$-ten Abschnitten von eben so ab, daß sie immer noch im i-ten Quadrat landen und zusätzlich die $2j$-ten Unterabschnitte des $2i$-ten Abschnitts im j-ten Unterquadrat des i-ten Quadrats landen, für irgendeine Nummerierung dieser Unterquadrate. Indem man immer so weitermacht, erhält man eine gleichmäßig konvergente Folge von Abbildungen. Der Grenzwert dieser Folge ist die gesuchte Surjektion. Man zeige auch, daß sie im Sinne von 8.1.1 unendliche Länge hat.

Übung 9.2.34. Man zeige die Identität

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \vartheta \\ -\vartheta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es mag das Eleganteste sein, unsere Einbettung $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathrm{Mat}(2; \mathbb{R})$ heranzuziehen.

9.3 Gedämpfte Schwingungen

9.3.1. Wir interessieren uns für die Bewegung eines Massepunktes, der an einer Feder aufgehängt ist und dessen Bewegung durch eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibung gedämpft wird. Mißt die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ seine

Auslenkung von der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt t, so muß unsere Funktion aus physikalischen Gründen eine Differentialgleichung zweiten Grades der Gestalt

$$\ddot{x} = -a\dot{x} - bx$$

erfüllen, wobei die Konstanten a und b die Stärke der Feder und der Dämpfung ausdrücken und in physikalisch relevanten Fällen nichtnegativ sind. Wir lösen diese Differentialgleichung hier erst einmal ad hoc und erheben danach in 9.4.2 diesen Zugang zur Methode.

Proposition 9.3.2 (Lösung der Schwingungsgleichung). *Seien reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben.*

1. *Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ bildet einen Untervektorraum des Raums $\operatorname{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, den* **Lösungsraum** *$L$ unserer Differentialgleichung;*

2. *Die Abbildung $x \mapsto (x(0), \dot{x}(0))$ liefert einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ dieses Lösungsraums mit dem $\mathbb{R}^2$, den sogenannten* **Anfangswertisomorphismus***;*

3. *Hat das Polynom $X^2 + aX + b$ zwei verschiedene reelle Nullstellen λ und μ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ eine Basis des Lösungsraums. Hat es dahingegen eine doppelte reelle Nullstelle λ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Basis des Lösungsraums.*

Vorschau 9.3.3. Um den Fall, daß unser Polynom gar keine reelle Nullstelle hat, werden wir uns gleich noch gesondert kümmern.

Beweis. Teil 1 scheint mir offensichtlich. Um Teil 2 zu zeigen beachten wir, daß die Vorschrift $x \mapsto (x, \dot{x})$ offensichtlich einen Isomorphismus zwischen unserem Lösungsraum L und dem Lösungsraum des Systems $\dot{\gamma}_1 = \gamma_2$, $\dot{\gamma}_2 = -b\gamma_1 - a\gamma_2$ induziert, das in Matrixschreibweise die Gestalt $\dot{\gamma} = A\gamma$ annimmt mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Teil 2 folgt damit aus 9.1.8. Für Teil 3 müssen wir folglich nur prüfen, daß die beiden angegebenen Funktionen in der Tat linear unabhängige Lösungen sind. Das kann dem Leser überlassen bleiben. □

9.3.4. Statt in Teil 3 mögliche Lösungen einfach zu erraten, hätten wir uns auch daran erinnern können, daß ja nach 9.1.4 jede Lösung von der Form

$$x(t) = \gamma_1(t) = \operatorname{pr}_1(\exp(tA)c)$$

sein muß für $c = (x(0), \dot{x}(0))$. Das charakteristische Polynom unserer Matrix A ist aber nun gerade $X^2 + aX + b$. Hat es zwei verschiedene reelle Nullstellen λ, μ und bilden wir eine Matrix P mit Eigenvektoren zu λ und μ als Spalten, so gilt $A = P \operatorname{diag}(\lambda, \mu) P^{-1}$ und $\exp(tA) = P \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda t}, \mathrm{e}^{\mu t}) P^{-1}$ und wir erkennen auf Anhieb, daß jede Lösung eine Linearkombination der Gestalt $x(t) = \alpha \, \mathrm{e}^{\lambda t} + \beta \, \mathrm{e}^{\mu t}$ sein muß. Im Fall einer doppelten reellen Nullstelle finden wir ähnlich ein P mit

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

und 9.2.13 liefert

$$\exp \begin{pmatrix} u & t \\ 0 & u \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^u & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^u & t \, \mathrm{e}^u \\ 0 & \mathrm{e}^u \end{pmatrix}$$

womit sich die allgemeine Lösung ergibt als eine Linearkombination der Gestalt $\alpha \, \mathrm{e}^{\lambda t} + \beta t \, \mathrm{e}^{\lambda t}$.

9.3.5. Im Fall der gedämpften Schwingung hat unser Polynom $X^2 + aX + b$ die beiden Nullstellen

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Bei hinreichend großer Dämpfung $a^2/4 \geq b$ erhalten wir reelle nichtpositive Lösungen und unser Massepunkt kehrt mit höchstens einmaligem Überschwingen zum Ruhezustand zurück. Im Fall kleiner Dämpfung $a^2/4 < b$ hat unser Polynom dahingegen keine reellen Nullstellen mehr und stattdessen die beiden komplexen Nullstellen $\pm \mathrm{i} \omega - a/2$ mit $\omega = \sqrt{b - a^2/4} > 0$. Um hier weiterzukommen verallgemeinern wir zunächst einmal alles bisher Gesagte ins Komplexe.

Proposition 9.3.6 (Lösung der Schwingungsgleichung). *Seien komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gegeben.*

1. *Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ bildet einen komplexen Untervektorraum des Raums $\operatorname{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, den* **Lösungsraum** *$L$ unserer Differentialgleichung;*

2. *Die Abbildung $x \mapsto (x(0), \dot{x}(0))$ liefert einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2$, den* **Anfangswertisomorphismus***;*

3. *Hat das Polynom $X^2 + aX + b$ zwei verschiedene Nullstellen λ und μ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ eine Basis des Lösungsraums L. Hat es eine doppelte Nullstelle λ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = t \, \mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Basis des Lösungsraums.*

Beweis. Der Beweis ist identisch zum Beweis im Reellen 9.3.6, sobald man die dabei benötigten Hilfsmittel ins Komplexe verallgemeinert hat. Das werden wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts und insbesondere in 9.3.10 tun. □

9.3.7 (**Beziehung zwischen reellen und komplexen Lösungen**). Sind in der Situation aus 9.3.6 die Koeffizienten a, b beide reell, so bilden die reellwertigen Lösungen unseres Systems nach 9.3.2 einen zweidimensionalen reellen Untervektorraum $L_{\mathbb{R}} \subset \operatorname{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Seine komplexwertigen Lösungen bilden dahingegen nach 9.3.6 einen zweidimensionalen komplexen Untervektorraum $L_{\mathbb{C}} \subset \operatorname{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, der stabil ist unter dem Übergang zum komplex Konjugierten, in Formeln $f \in L_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{f} \in L_{\mathbb{C}}$. Per definitionem gilt weiter $L_{\mathbb{R}} = L_{\mathbb{C}} \cap \operatorname{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Haben wir nun Erzeuger $f_1, \ldots, f_r$ für den $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexwertigen Lösungen gefunden, so erzeugen deren Realteile zusammen mit ihren Imaginärteilen den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Lösungen: In der Tat schreibt sich ja jede reellwertige Lösung f als $f = c_1 f_1 + \ldots + c_r f_r$ mit $c_\nu \in \mathbb{C}$, und bilden wir hier auf beiden Seiten den Realteil, so ergibt sich für f die Darstellung

$$f = \operatorname{Re}(c_1) \operatorname{Re}(f_1) - \operatorname{Im}(c_1) \operatorname{Im}(f_1) + \ldots + \operatorname{Re}(c_r) \operatorname{Re}(f_r) - \operatorname{Im}(c_r) \operatorname{Im}(f_r)$$

9.3.8. Im Fall der gedämpften Schwingungen 9.3.1 mit kleiner Dämpfung und folglich komplexen Nullstellen $\pm \mathrm{i}\, \omega - a/2$ erhalten wir die komplexen Lösungen $x_\pm(t) = \mathrm{e}^{-at/2} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} \omega t}$ und die Euler-Formel liefert, daß die Funktionen

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-at/2} \cos \omega t \quad \text{und} \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{-at/2} \sin \omega t$$

den Raum der reellwertigen Lösungen aufspannen. Die Größe ω wird in diesem Zusammenhang auch als **Winkelgeschwindigkeit** bezeichnet. Die Additionstheoreme zeigen, daß sich jede reelle Linearkombination $\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$ der Funktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ als Sinuswelle mit **Amplitude** k und **Phase** ϕ in der Form

$$\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) = k \sin(\omega t + \phi)$$

schreiben läßt, für $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und ϕ einer Lösung des Gleichungssystems $k \cos \phi = \alpha$ und $k \sin \phi = \beta$. Im Fall kleiner Dämpfung kann die allgemeine Lösung also geschrieben werden als $x(t) = k\, \mathrm{e}^{-at/2} \sin(\omega t + \phi)$ und beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude bei positiver Dämpfung $a > 0$ exponentiell abfällt.

9.3.9. Man kann ohne Schwierigkeiten die Exponentialabbildung auf quadratischen Matrizen ins Komplexe erweitern zu

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \operatorname{Mat}(n; \mathbb{C}) & \to & \operatorname{Mat}(n; \mathbb{C}) \\ & A & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \end{array}$$

Satz 9.3.10 (Lineare Differentialgleichungen). *Ist $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{C})$ eine quadratische Matrix und $c \in \mathbb{C}^n$ ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit Anfangswert $\gamma(0) = c$ derart, daß gilt $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift*

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

Beweis. Mutatis mutandis, als da heißt nach Verändern des zu Verändernden identisch zum Beweis von [AN1] 9.1.4. □

Korollar 9.3.11 (Anfangswertisomorphismus). *Ist $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{C})$ eine quadratische Matrix, so bilden die differenzierbaren Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ einen komplexen Untervektorraum $L \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ und an jeder Stelle liefert das Auswerten einen Isomorphismus $L \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{C}^n$.*

Beweis. Dem Leser überlassen. Im Reellen war das Übung [AN1] 9.1.8. □

Ergänzung 9.3.12. Die Regel $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$ aus [AN1] 9.2.29 gilt genauso für komplexe Matrizen. Die Berechnung des Exponentials einer beliebigen quadratischen Matrix wird Ihnen auf dieser Grundlage leicht gelingen, sobald sie in der linearen Algebra die Theorie der „Jordan'schen Normalform“ [LA2] 3.4.5 kennengelernt haben.

Übungen

Übung 9.3.13. Ist $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R})$ eine reelle Matrix und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine komplexe Lösung der Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$, so sind ihr koordinatenweise gebildeter Real- und Imaginärteil $\mathrm{Re}\,\gamma$ und $\mathrm{Im}\,\gamma$ reelle Lösungen. Erzeugt eine Menge $\mathbb{C}^n$-wertiger Funktionen den $\mathbb{C}$-Vektorraum der $\mathbb{C}^n$-wertigen Lösungen unserer Differentialgleichung, so erzeugen ihre Real- und Imaginärteile zusammen den $\mathbb{R}$-Vektorraum der $\mathbb{R}^n$-wertigen Lösungen.

9.4 Der Fall höherer Ordnung

9.4.1. Die Erfahrungen, die wir bei der Behandlung gedämpfter Schwingungen gemacht haben, fassen wir nun noch etwas allgemeiner.

Satz 9.4.2. *Seien komplexe Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ gegeben.*

1. *Die komplexwertigen n-mal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \ldots + a_0 f = 0$ bilden einen Untervektorraum im Raum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, den* **Lösungsraum** *unserer Differentialgleichung;*

2. *Die Abbildung $f \mapsto (f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0))$ ist ein Isomorphismus dieses Lösungsraums mit dem $\mathbb{C}^n$, der* **Anfangswertisomorphismus***;*

3. *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ der Vielfachheit r, so sind die Funktionen $\mathrm{e}^{\lambda t}, t\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$ Lösungen unserer Differentialgleichung, und durchläuft λ alle Nullstellen unseres Polynoms, so bilden diese Lösungen eine Basis des Lösungsraums.*

Ergänzung 9.4.3. Der Satz bleibt gültig, wenn wir darin überall $\mathbb{R}$ durch ein beliebiges mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ersetzen.

Beweis. Teil 1 ist offensichtlich. Um die in Teil 2 behauptete Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen beachten wir zunächst, daß unsere Überlegungen aus [AN1] 9.1.4 ohne Änderungen auch im Komplexen gültig sind. Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{C})$ mit komplexen Einträgen haben also die differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, die die Differentialgleichung $g' = Ag$ lösen, die Form $g(t) = (\exp tA)g(0)$ wo wir den Anfangswert $g(0) \in \mathbb{C}^n$ frei wählen dürfen. Insbesondere definiert die Abbildung $g \mapsto g(0)$ einen Isomorphismus vom Lösungsraum der Differentialgleichung $g' = Ag$ mit dem $\mathbb{C}^n$. Jetzt beachten wir, daß die Vorschrift $f \mapsto g = (f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)})^\top$ eine Bijektion induziert zwischen der Menge aller n-mal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die die Differentialgleichung aus dem Satz erfüllen, und der Menge aller differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, die das System von Differentialgleichungen

$$\begin{array}{rcl} g_0' & = & g_1 \\ g_1' & = & g_2 \\ & \vdots & \\ g_{n-1}' & = & a_{n-1}g_{n-1} + \ldots a_1 g_1 + a_0 g_0 \end{array}$$

lösen, wo wir etwas ungewöhnlich $g = (g_0, \ldots, g_{n-1})$ indiziert haben der besseren Übersichtlichkeit halber. Damit folgt Teil 2 aus [AN1] 9.1.4.

3. Motiviert durch unsere Erkenntnisse bei der Lösung von 9.3.6 beginnen wir mit dem Ansatz $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Mögliche λ sind dann offensichtlich genau die Nullstellen des Polynoms $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$. Ist λ eine Nullstelle der Vielfachheit r, so sind sogar, wieder in Verallgemeinerung unserer Erkenntnisse bei der Lösung von 9.3.6, auch $t\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$ noch Lösungen unserer Gleichung. Um das einzusehen, betrachten wir den Vektorraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und fassen das Ableiten auf als eine lineare Abbildung

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

Zerfällt unser Polynom in Linearfaktoren

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = (X - \lambda_1)^{n_1} \ldots (X - \lambda_r)^{n_r}$$

so können wir den Operator $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ auch schreiben als Verknüpfung der Operatoren $(D - \lambda_i)^{n_i}$, und es reicht folglich $(D - \lambda)^r t^{r-1} \mathrm{e}^{\lambda t} = 0$ nachzuweisen. Nun gilt aber offensichtlich

$$(D - \lambda) t^m \mathrm{e}^{\lambda t} = m t^{m-1} \mathrm{e}^{\lambda t}$$

und die Behauptung folgt per Induktion. Um zu zeigen, daß die $t^j \mathrm{e}^{t\lambda_i}$ für $0 \leq j < n_i$ eine Basis des Lösungsraums bilden, reicht es deren lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra, so erkennt man leicht, daß die $t^m \mathrm{e}^{\lambda t}$ jeweils zum Hauptraum $\mathrm{Hau}(D; \lambda)$ gehören und muß wegen [LA2] 3.2.7 nur noch die lineare Unabhängigkeit der $t^m \mathrm{e}^{\lambda t}$ für festes λ und variables m zeigen, die hinwiederum sofort aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen t^m folgt. Man vergleiche hierzu auch [LA2] 3.2.9.

Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra noch nicht, so muß man mehr arbeiten. Man setzt dann etwa eine Linearkombination $\sum c_{ji} t^j \mathrm{e}^{\lambda_i t} = 0$ an und muß zeigen, daß alle c_{ji} verschwinden. Sonst könnten wir aber nach eventueller Umnummerierung der Nullstellen ein k finden mit $c_{k1} \neq 0$ aber $c_{j1} = 0$ für $j > k$. Wenden wir dann auf unsere Summe den Differentialoperator $(D - \lambda_1)^k (D - \lambda_2)^N \ldots (D - \lambda_r)^N$ an für hinreichend grosses N, so ergibt sich $c_{k1} \mathrm{e}^{t\lambda_1} = 0$ im Widerspruch zu unserer Annahme $c_{k1} \neq 0$. □

Übungen

Ergänzende Übung 9.4.4. Man bestimme eine Basis des komplexen sowie des reellen Lösungsraums der Differentialgleichung $f''' = f$.

9.5 Gekoppelte Schwingungen

Beispiel 9.5.1. An gegenüberliegenden Wänden eines Zimmers ist jeweils ein Wägelchen mit einer Feder befestigt und die beiden Wägelchen sind auch untereinander durch eine Feder verbunden. Bezeichnen $x(t)$ bzw. $y(t)$ die Position des ersten bzw. zweiten Wägelchens auf einer Skala, auf der $x = y = 0$ den Gleichgewichtszustand bedeuten und größere x bzw. y einen größeren Abstand eines Wägelchens von „seiner" Wand, so genügt unser System einer Differentialgleichung

$$\begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & -ax - b(x + y) \\ \ddot{y} & = & -cy - d(y + x) \end{array}$$

für Konstanten $a, b, c, d > 0$, in die die Stärke der Federn und die Massen der Wägelchen eingehen. Erklären wir $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto v(t) = (x(t), y(t))$ und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -(a+b) & -b \\ -d & -(c+d) \end{pmatrix}$$

so können wir unser System schreiben als

$$\ddot{v}(t) = Av(t)$$

Der Leser mag als Übung zeigen, daß der Lösungsraum vierdimensional sein muß. Unsere Matrix A hat, wie man dem charakteristischen Polynom ansieht, negative reelle Eigenwerte λ_1, λ_2. Also hat bereits der $\mathbb{R}^2$ eine Basis v_1, v_2 aus Eigenvektoren von A. Dann sind die vier Funktionen

$$t \mapsto \exp((\pm\sqrt{\lambda_i})t)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2$$

offensichtlich Lösungen, und ähnliche Argumente wie im vorhergehenden Beispiel zeigen, daß sie sogar eine Basis Lösungsraums bilden. Setzen wir $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$, so erhalten wir eine alternative Basis des Lösungsraums durch die vier Funktionen

$$\cos(t\omega_i)v_i \quad \text{und} \quad \sin(t\omega_i)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2.$$

Ist noch spezieller unsere Situation symmetrisch unter der Vertauschung der beiden Wägelchen, haben sie also dieselbe Masse und sind durch dieselben Federn mit den Wänden verbunden, so folgt $b = d$ und $a = c$ und wir erhalten $v_1 = (1, 1)$ mit $\lambda_1 = -a - 2b$ sowie $v_2 = (1, -1)$ mit $\lambda_2 = -a$. Diese Eigenvektoren entsprechen den zwei **Eigenschwingungen** des Systems, bei denen beide Wägelchen zu allen Zeiten in derselben bzw. in entgegengesetzten Richtungen fahren. Die Bewegung der einzelnen Wägelchen $x(t) = x_+(t)$ und $y(t) = x_-(t)$ wird dann beschrieben durch

$$\operatorname{Re}\left(c_1 e^{\mathrm{i}\,\omega_1 t} \pm c_2 e^{\mathrm{i}\,\omega_2 t}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{\mathrm{i}(\omega_1 - \omega_2)t/2}\left(c_1 e^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t/2} \pm c_2 e^{-\,\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t/2}\right)\right)$$

mit komplexen c_i. Nimmt man hier zum Beispiel $c_1 = c_2 = 1$, so ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos((\omega_1 - \omega_2)t/2)\cos((\omega_1 + \omega_2)t/2) \\ y(t) &= 2\sin((\omega_1 - \omega_2)t/2)\sin((\omega_1 + \omega_2)t/2) \end{aligned}$$

Ist die verbindende Feder schwach im Verhältnis zu den Federn gegen die Wände, in Formeln $a \gg b$, so liegen die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 und damit auch die Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 verhältnismäßig nah beieinander. Im Versuch kann man in diesem Fall schön sehen, wie die beiden Wägelchen mit der Winkelgeschwindigkeit $(\omega_1 - \omega_2)/2$ ihre Energie untereinander austauschen.

9.5.2. Im Übrigen ist es auch a priori klar, daß in der symmetrischen Situation die zweielementige Symmetriegruppe unserer Gleichung, die der Vertauschung der beiden Wägelchen entspricht, auf dem Lösungsraum operieren muß, daß wir also uns schon von Anfang an hätten darauf beschränken dürfen, nur die symmetrischen und die antisymmetrischen Lösungen zu bestimmen und die allgemeine Lösung als Linearkombination solcher speziellen Lösungen zu erhalten.

9.6 Angeregte Schwingungen

9.6.1. Ist wieder A eine komplexe $(n \times n)$-Matrix und ist zusätzlich eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ vorgegeben und man sucht alle differenzierbaren $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, die das „inhomogene" System von Differentialgleichungen

$$\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t) + f(t)$$

lösen, so rät einem die Methode der **Variation der Konstanten** zum Ansatz

$$\gamma(t) = \exp(tA)g(t)$$

Man erkennt leicht, daß dieser Ansatz eine Lösung liefert, wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ differenzierbar ist und die Gleichung $f(t) = \exp(tA)\dot{g}(t)$ erfüllt, als da heißt für

$$g(t) = \int^t \exp(-\tau A)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

wobei $g(t)$ als unbestimmes Integral natürlich nur bis auf eine additive Konstante aus dem $\mathbb{C}^n$ wohldefiniert ist. Daß wir mit diesem Verfahren tatsächlich auch alle Lösungen $\gamma(t)$ unseres inhomogenen Systems von Differentialgleichungen erhalten ergibt sich daraus, daß ja ganz offensichtlich die Differenz von je zwei Lösungen unserer inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung $\dot{\gamma} = A\gamma(t)$ sein muß. In der Sprache der linearen Algebra bilden die Lösungen der inhomogenen Gleichung also einen affinen Teilraum des Raums aller Funktionen, dessen Raum von Richtungsvektoren der Lösungsraum der homogenen Gleichung ist.

Beispiel 9.6.2 (**Angeregte Schwingungen**). Eine Lampe ist mit einer Feder an einer vibrierenden Decke aufgehängt. Sei $h(t)$ die Auslenkung der Decke zur Zeit t und $x(t)$ die Höhe der Lampe zur Zeit t, beide gemessen auf einer gegen den Boden festen Skala, auf der $h = x = 0$ einen Zustand beschreibt, in dem sich die Federkraft, die die Lampe zur Decke zieht, und die Schwerkraft der Lampe die Waage halten. So genügt $x(t)$ einer Differentialgleichung der Gestalt

$$\ddot{x}(t) = -a(x(t) - h(t))$$

wobei a positiv ist und von der Masse der Lampe und der Federkonstante abhängt. Wie im Beweis von 9.4.2 schreiben wir das um zu einem System erster Ordnung

$$\begin{array}{rcl} \dot{\gamma}_0 & = & \gamma_1 \\ \dot{\gamma}_1 & = & -a\gamma_0 + ah \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} 0 \\ ah \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom unserer Matrix A ist $X^2 + a$, die Eigenwerte ergeben sich zu $\pm \mathrm{i}\,\eta$ für $\eta = \sqrt{a}$ und als zugehörige Eigenvektoren finden wir $(1, \pm \mathrm{i}\,\eta)^\top$. Nehmen wir diese Eigenvektoren als Spalten einer Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i}\,\eta & \mathrm{i}\,\eta \end{pmatrix}$$

so haben wir offensichtlich $AP = PB$ mit $B = \operatorname{diag}(-\mathrm{i}\,\eta, \mathrm{i}\,\eta)$ einer Diagonalmatrix und $\varphi = P^{-1}\gamma$ erfüllt die Differentialgleichung $\dot{\varphi}(t) = B\varphi(t) + f(t)$ mit

$$f(t) = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ ah(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\eta}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\,\eta & -1 \\ \mathrm{i}\,\eta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ ah(t) \end{pmatrix} = \frac{ah(t)}{2\,\mathrm{i}\,\eta}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ich betrachte von nun an diese Differentialgleichung, da es mit übersichtlicher scheint, mit $\exp tB$ anstelle von $\exp tA = P(\exp tB)P^{-1}$ zu hantieren. Nach unseren Überlegungen 9.6.1 lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$\varphi(t) = \exp(tB)g(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \int^t \exp(-\tau B)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Nehmen wir zum Beispiel an, unsere Decke vibriere mit $h(t) = k\sin(\omega t)$ für $\omega > 0$, so ergibt sich die erste Komponente $g_1(t)$ von $g(t)$ zu

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -\tfrac{ka}{2\,\mathrm{i}\,\eta}\int^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau\eta}\left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\omega}}{2\,\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \tfrac{ka}{4\eta}\int^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau(\eta+\omega)}\mathrm{d}\tau - \tfrac{ka}{4\eta}\int^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau(\eta-\omega)}\mathrm{d}\tau \\ &= \text{konst} + \tfrac{ka}{4\,\mathrm{i}\,\eta(\eta+\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t(\eta+\omega)} - \begin{cases} \tfrac{ka}{4\,\mathrm{i}\,\eta(\eta-\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t(\eta-\omega)} & \text{falls} \quad \eta \neq \omega; \\ \tfrac{ka}{4\eta}t & \text{falls} \quad \eta = \omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Ähnlich berechnen wir $g_2(t)$ und erkennen, daß in dem Fall, daß die Eigenfrequenz der Lampe nahe an der Frequenz der Decke ist, d.h. für $|\eta - \omega|$ klein, die Schwingung sehr groß werden kann und im Fall $\eta = \omega$ die Auslenkung eventuell sogar gegen Unendlich strebt. In der Physik spricht man in diesen Fällen von **Resonanz** bzw. von einer **Resonanzkatastrophe**. Seien nun die Eigenschwingung unseres Systems $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\eta}$ und die Anregung $t \mapsto h(t)$ oder gleichbedeutend $t \mapsto f(t)$ periodisch mit derselben Periode p im Sinne der gleich folgenden Definition 10.1.1. Nehmen wir der Einfachkeit halber $p = 2\pi$ an, so finden wir $\eta \in \mathbb{Z}$, und entwickeln wir f in eine „Fourierreihe“ im Sinne von 10.1.3, so zeigt unsere obige Formel $g(t) = \int^t \exp(-\tau B)f(\tau)\mathrm{d}\tau$, daß nur die Summanden $c_{\pm\eta}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,t\eta}$ für die Resonanz verantwortlich sind in dem Sinne, daß alle anderen Summanden der Fourierreihe nur periodische Beiträge zu $g(t)$ liefern. Später in [AN3] 3.1.2

folgende werden Sie lernen, daß $g_1(t)$ im allgmeinen bis auf eine Konstante auch interpretiert werden kann als der „Wert bei $-\eta$ der Fouriertransformierten des Produkts von f_1 mit der charakteristischen Funktion des Intervalls $[0, t]$“.

10 Grundlegendes zu Fourierreihen

10.1 Eindeutigkeit der Fourierreihe

Definition 10.1.1. Sei M eine Menge und $p > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir sagen, eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to M$ habe die **Periode** p, wenn gilt für alle reellen x gilt $f(x + p) = f(x)$.

Satz 10.1.2 (Fourier-Reihe, reelle Form). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Periode 2π. So gibt es eindeutig bestimmte $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{R}$ derart, daß gilt*

$$f(x) = c + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin(\nu x) + b_\nu \cos(\nu x)$$

in dem Sinne, daß die Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen unsere Funktion f konvergiert.

Satz 10.1.3 (Fourier-Reihe, komplexe Form). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Periode 2π. So gibt es eindeutig bestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ derart, daß im Sinne gleichmäßiger Konvergenz gilt*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$$

10.1.4 (**Übergang zwischen reeller und komplexer Fourierreihe**). Natürlich können wir in der ersten Formulierung 10.1.2 unseres Satzes auch komplexwertige Funktionen erlauben, wenn wir $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{C}$ zulassen. Die beiden Sätze sind dann äquivalent, da ja nach der Euler'schen Formel gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} & = & \cos \nu x + \mathrm{i} \sin \nu x \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x} & = & \cos \nu x - \mathrm{i} \sin \nu x \end{array}$$

Gegeben eine Darstellung wie in Satz 10.1.3 erhalten wir also eine Darstellung wie in Satz 10.1.2 mit $c = c_0$, $b_\nu = c_\nu + c_{-\nu}$, $a_\nu = \mathrm{i}\, c_\nu - \mathrm{i}\, c_{-\nu}$, und diese Gleichungen sind erfüllt genau dann, wenn gilt

$$c_0 = c,\ c_\nu = \frac{1}{2}(b_\nu - \mathrm{i}\, a_\nu),\ \text{und}\ c_{-\nu} = \frac{1}{2}(b_\nu + \mathrm{i}\, a_\nu).$$

Beweis. Wir zeigen vorerst nur die Eindeutigkeit, der Beweis der Existenz wird in 10.3.6 nachgeholt. Aus 6.9.17 oder auch aus der Euler'schen Formel folgt, daß die Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} = \cos \nu x + \mathrm{i} \sin \nu x$ gegeben wird durch $f'(x) = \mathrm{i}\,\nu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} = -\nu \sin \nu x + \mathrm{i}\,\nu \cos \nu x$. Mit der komplexwertigen Variante des

Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}\,\nu}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}\,|_0^{2\pi} = 0$ für $\nu \in \mathbb{Z}\backslash 0$ und für $\nu = 0$ ergibt sich $\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}x = 2\pi$. Wir folgern

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mu x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Indem wir die gleichmäßige Konvergenz mit dem Integral vertauschen und uns überlegen, daß das auch für komplexwertige Funktionen erlaubt ist, erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = 2\pi c_\nu$$

Das zeigt die Eindeutigkeit der c_ν. Der Beweis der Existenz wird in 10.3.6 nachgeholt. □

10.1.5. Ich erinnere an den Begriff der Summierbarkeit von Familien 9.2.5. Gegeben ein normierter Vektorraum V nennt man eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V **summierbar mit Summe** $s \in V$ und schreibt

$$\sum_{i\in I} v_i = s$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt

$$\sum_{i\in J} v_i \in U$$

Satz 10.1.6 (Summierbarkeit der Fourier-Reihe). *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Periode 2π, so gibt es eindeutig bestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ derart, daß bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ im Sinne der Summierbarkeit 10.1.5 in normierten Vektorräumen gilt*

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} = f(x)$$

10.1.7. Natürlich müssen hier die c_ν dieselben sein wie in der schwächeren aber einfacher zu formulierenden Version 10.1.3, so daß die Eindeutigkeit aus dem Vorhergehenden folgt. Der Beweis dieser stärkeren Konvergenzaussage wird in 10.3.6 gegeben. Ich habe etwas gezögert, auf der rechten Seite $f(x)$ zu schreiben, wo doch schlicht die Funktion f gemeint ist, aber auf der linken Seite steht ja auch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$ für die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$.

Vorschau 10.1.8. Die obigen Sätze über die Fourierentwicklung sind Vertreter eines großen Theoriegebäudes: Insbesondere ergibt sich offensichtlich die Frage, welche Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ denn nun den verschiedenen Klassen von periodischen Funktionen entsprechen. Diese Frage erweist sich als recht delikat. In [AN3] 2.2.3 führen wir den Raum der „quadratintegrierbaren Funktionen" ein und zeigen, daß diese genau den Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ entsprechen, bei denen die Summe der Betragsquadrate endlich ist.

10.2 Der Satz von Stone-Weierstraß

10.2.1. Unter einem kompakten Raum darf man in diesem Abschnitt je nach Wissensstand einen kompakten metrischen Raum 7.1.1 oder allgemeiner einen kompakten topologischen Raum 7.5.5 verstehen.

10.2.2. Im folgenden verwende ich eine Begrifflichkeit, wie sie in [LA2] 8.8.1 ausführlicher eingeführt wird, und bespreche an dieser Stelle nur das Nötigste. Gegeben ein Körper k bezeichnet man einen k-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$ ganz allgemein als eine **k-Algebra**. Ist die Verknüpfung assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Gibt es für unsere Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation im Sinne von [LA1] 4.1.1 ein Ring ist. Ich schlage deshalb vor, derartige Algebren **Ringalgebren** zu nennen.

10.2.3. Gegeben ein Körper k und eine beliebige Menge X ist der k-Vektorraum $\mathrm{Ens}(X, k)$ aller k-wertigen Funkionen auf X mit der punktweisen Multiplikation als Verknüpfung eine Ringalgebra mit der konstanten Funktion Eins als Eins-Element. Wir sagen, eine Teilmenge $A \subset \mathrm{Ens}(X, k)$ **trenne die Punkte von** X genau dann, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $a \in A$ gibt mit $a(x) \neq a(y)$.

10.2.4. Gegeben ein Körper k und eine k-Algebra A versteht man unter einer **Unteralgebra** $B \subset A$ einen unter der Verknüpfung unserer Algebra stabilen Untervektorraum. Gegeben ein Körper k und eine k-Ringalgebra A verstehen wir unter einer **Unterringalgebra** $B \subset A$ einen unter der Verknüpfung unserer Ringalgebra stabilen Untervektorraum, der darüber hinaus das Einselement der Ringalgebra A enthält. In anderen Worten ist eine Unterringalgebra also eine Unteralgebra, die gleichzeitig im Sinne von [AL] 2.2.1 ein Teilring ist.

10.2.5. Man beachte, daß wir bereits nach 6.7.11 wissen, daß die stetigen reellen Funktionen auf einem topologischen Raum X in der $\mathbb{R}$-Ringalgebra aller reellen Funktionen eine $\mathbb{R}$-Unterringalgebra

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Ens}(X, \mathbb{R})$$

bilden. Des weiteren wissen wir nach 6.8.11, daß diese Unterringalgebra stabil ist unter dem Bilden gleichmäßiger Grenzwerte. Gegeben ein kompakter Raum X bezeichne im folgenden $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ den reellen Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit seiner Supremumsnorm.

Definition 10.2.6. Eine Teilmenge eines metrischen oder auch eines topologischen Raums heißt **dicht** genau dann, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist.

Satz 10.2.7 (Stone-Weierstraß). *In der Ringalgebra aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum liegt jede Unterringalgebra, die die Punkte unseres Raums trennt, bereits dicht in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Ergänzung 10.2.8. Ich erwähne noch eine Variante dieses Satzes, die man oft in der Literatur findet, die jedoch im weiteren Verlauf dieser Vorlesung nicht von Belang ist. Statt einer Unterringalgebra könnten wir mit einer Unteralgebra arbeiten und voraussetzen, daß es für jedes $x \in X$ ein $a \in A$ gibt mit $a(x) \neq 0$. Man sagt dann, A habe „keine simultane Nullstelle". Unser Beweis funktioniert im wesentlichen auch unter diesen Voraussetzungen, man muß dazu nur Lemma 10.2.11 verfeinern zur Aussage, daß p_ε sogar ohne konstanten Term gefunden werden kann, und muß in Schritt 3 etwas feiner argumentieren.

Korollar 10.2.9 (Approximationssatz von Weierstraß). *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Polynomfunktion $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit*

$$|p(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstraß 10.2.7. □

Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß. Sei X unser kompakter Raum und $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ unsere Unterringalgebra. Wir ziehen uns zunächst auf den Fall zurück, daß A in $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ abgeschlossen ist, und zeigen dazu:

Lemma 10.2.10. *Ist X kompakt und $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ eine Unteralgebra, so ist auch der Abschluß $\bar{A}$ von A eine Unteralgebra.*

Beweis. Nach 6.4.11 ist $\bar{A}$ genau die Menge aller stetigen Funktionen $a : X \to \mathbb{R}$ derart, daß es eine Folge a_n aus A gibt, die gleichmäßig gegen a konvergiert. Sei b ein weiteres Element von $\bar{A}$ und b_n eine Folge aus A, die gleichmäßig gegen b konvergiert. Wir behaupten, daß dann auch $a_n + b_n$ gleichmäßig gegen $a + b$ konvergiert und $a_n b_n$ gleichmäßig gegen ab. Den Beweis der ersten Aussage überlassen wir dem Leser. Für die Zweite benutze man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|ab - a_n b_n\| &\leq \|a - a_n\| \cdot \|b_n\| + \|a\| \cdot \|b - b_n\| \\ &\leq \varepsilon(\|b\| + 1 + \|a\|) \end{aligned}$$

falls gilt $\|a - a_n\| < \varepsilon$, $\|b - b_n\| < \varepsilon$ und $\varepsilon < 1$. □

Erfüllt also eine Unterringalgebra $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ die Bedingungen im Satz von Stone-Weierstraß, so ist auch ihr Abschluß $\bar{A}$ eine Unterringalgebra und trennt a forteriori die Punkte von X. Um den Satz von Stone-Weierstraß zu beweisen reicht es demnach aus, wenn wir unter der zusätzlichen Annahme A abgeschlossen die Gleichheit $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ zeigen. Um weiterzukommen, zeigen wir zunächst einmal einen Spezialfall des Approximationssatzes von Weierstraß durch ein direktes Argument.

Lemma 10.2.11. *Für ein beliebiges positives $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom $p = p_\varepsilon$ mit $|\sqrt{x} - p(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$.*

Erster Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist auf $[0, 2]$, finden wir $\eta \in (0, 1)$ mit

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x + \eta}| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Da die Taylorreihe von $\sqrt{x}$ um den Entwicklungspunkt 1 nach 5.1.19 auf dem Intervall $[\eta, 1+\eta]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ konvergiert, finden wir weiter ein Polynom p mit

$$|\sqrt{x + \eta} - p(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0, 1]$$ □

Zweiter Beweis. Bei der folgenden Alternative muß man etwas mehr denken, aber nichts wissen über die Konvergenz von Taylorreihen. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Polynomen durch $p_0(x) = 0$, $p_{n+1}(x) = p_n(x) + (1/2)(x - p_n(x)^2)$ und behaupten, daß diese Folge auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ konvergiert. In der Tat gilt ja

$$p_{n+1} = p_n + (\sqrt{x} - p_n)(\sqrt{x} + p_n)/2$$

und dieser Gleichung sehen wir an, daß für $x \in [0, 1]$ gilt

$$p_0 \leq p_1 \leq \ldots \leq \sqrt{x}$$

denn es folgt induktiv $(\sqrt{x} - p_n) \geq 0$ und $(\sqrt{x} + p_n)/2 \leq 1$. Andererseits folgt aus unserer Gleichung auch

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt{x} - p_{n+1}) & = & (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x} - p_n)/2 \\ & \leq & (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x})/2 \end{array}$$

und somit konvergiert unsere Folge p_n auf jedem Intervall $[a, 1]$ mit $0 < a < 1$ gleichmässig gegen $\sqrt{x}$. Dann muß mit etwas Nachdenken unsere Folge aber auf ganz $[0, 1]$ gleichmässig gegen $\sqrt{x}$ konvergieren. □

Nun zeigen wir den Satz von Stone-Weierstraß 10.2.7 für eine abgeschlossene Unterringalgebra A, auf diesen Fall hatten wir uns ja bereits zurückgezogen, in fünf Schritten. Gegeben $a \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ bezeichne $|a| \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ die Funktion $x \mapsto |a(x)|$ und $\|a\| \in \mathbb{R}$ die Supremumsnorm von a.

1. Wir zeigen $a \in A \Rightarrow |a| \in A$. Dazu schreiben wir $a = \lambda b$ mit $\lambda \in (0, \infty)$ und $\|b\| \leq 1$ und erhalten $|a| = \lambda\sqrt{b^2}$. Nach Lemma 10.2.11 gibt es eine Folge p_n von Polynomen, die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ strebt, und dann strebt $\lambda p_n(b^2)$ auf X gleichmäßig gegen $|a|$. Da A eine Unteralgebra ist, liegen alle $\lambda p_n(b^2)$ auch in A, und da A abgeschlossen ist unter gleichmäßiger Konvergenz, folgt $|a| \in A$.

2. Wir zeigen $a, b \in A \Rightarrow \sup(a, b) \in A$, $\inf(a, b) \in A$. In der Tat gilt

$$\begin{array}{rcl} \sup(a,b) & = & 1/2(a+b+|a-b|) \\ \inf(a,b) & = & 1/2(a+b-|a-b|) \end{array}$$

3. Für $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte aus X und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es $a \in A$ mit $a(x) = \alpha$, $a(y) = \beta$. In der Tat betrachte man die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R}^2 \\ a & \mapsto & (a(x), a(y)) \end{array}$$

Da A Punkte trennt, gibt es $a \in A$ mit $a(x) \neq a(y)$. Da die Konstanten zu A gehören, liegt jedoch auch $(1, 1)$ im Bild unserer linearen Abbildung. Damit enthält das Bild unserer linearen Abbildung zwei linear unabhängige Vektoren und ist folglich ganz $\mathbb{R}^2$.

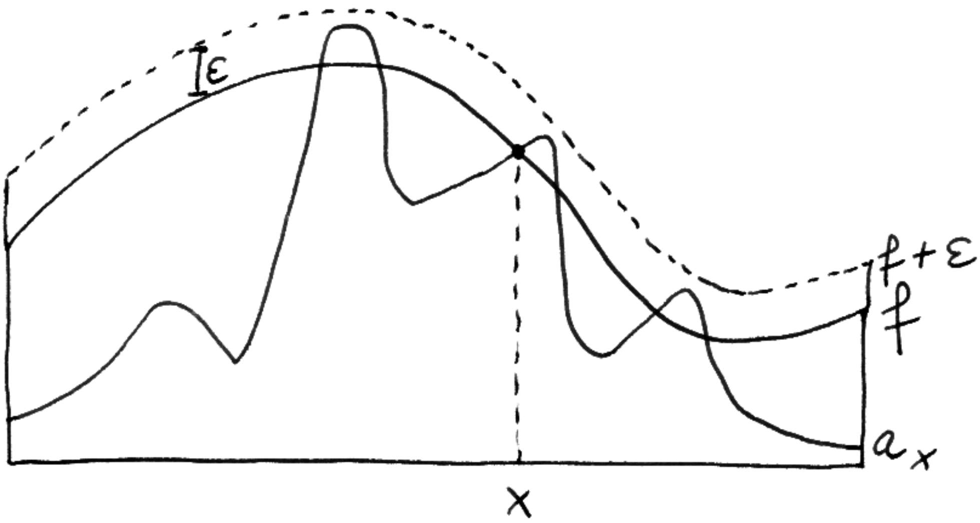
4. Für beliebige $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $a_x \in A$ mit $a_x(x) = f(x)$ und

$$a_x(y) < f(y) + \varepsilon \quad \forall y \in X$$

In der Tat, für alle $y \in X$ finden wir $a_{x,y} \in A$ mit $a_{x,y}(x) = f(x)$ und $a_{x,y}(y) = f(y)$. Auf einer geeigneten offenen Umgebung U_y von y gilt dann $a_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in U_y$. Da X kompakt ist, gibt es nun $E \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{y \in E} U_y$. Dann nehmen wir $a_x = \inf_{y \in E} a_{x,y}$ und haben unser a_x gefunden.

5. Für beliebiges $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $a \in A$ mit $\|a - f\| < \varepsilon$. Sei in der Tat für jedes $x \in X$ ein a_x wie eben gewählt. Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung V_x mit $f(z) - \varepsilon < a_x(z) < f(z) + \varepsilon \;\; \forall z \in V_x$ wobei die zweite Ungleichung sogar gilt für alle $z \in X$. Da X kompakt ist, gibt es wieder $F \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{x \in F} V_x$. Ist X nicht leer, so nehmen wir nun $a = \sup_{x \in F} a_x$ und haben unser a gefunden. Der Fall $X = \emptyset$ ist eh unproblematisch. □

10.2.12. Gegeben ein Kompaktum X bezeichne $\mathcal{C}(X)$ die $\mathbb{C}$-Ringalgebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm.



Zum Beweis von 10.2.7, Schritt 4

Korollar 10.2.13 (Stone-Weierstraß im Komplexen). *In der Ringalgebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum liegt jede komplexe Unterringalgebra, die die Punkte unseres Raums trennt und die stabil ist unter der komplexen Konjugation, bereits dicht in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Beweis. Sei X unser kompakter Raum und $B \subset \mathcal{C}(X)$ unsere komplexe Unterringalgebra, die die Punkte von X trennt und stabil ist unter der komplexen Konjugation, in Formeln $b \in B \Rightarrow \bar{b} \in B$. Wir wenden den Satz von Stone-Weierstraß 10.2.7 an auf $A := B \cap \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Aus $b \in B$ folgt $\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b \in A$, denn es gilt $\operatorname{Re} b = (b + \bar{b})/2$ und $\operatorname{Im} b = (b - \bar{b})/2\,\mathrm{i}$. Also trennt auch unser A die Punkte von X. Für $f \in \mathcal{C}(X)$ finden wir $u, v \in A$ mit $|\operatorname{Re} f(x) - u(x)| < \varepsilon/2$ und $|\operatorname{Im} f(x) - v(x)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in X$, setzen $b = u + \mathrm{i}\,v$ und folgern $\|f - b\| < \varepsilon$. □

Korollar 10.2.14. *Das $\mathbb{C}$-Erzeugnis der $(z^\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ liegt dicht im Raum $\mathcal{C}(S^1)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf der Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Beweis. Wegen $\bar{z} = z^{-1}$ für alle $z \in S^1$ folgt das aus dem Satz von Stone-Weierstraß für komplexwertige Funktionen 10.2.13. □

Definition 10.2.15. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Gestalt $t \mapsto \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} d_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu t}$ mit $d_\nu \in \mathbb{C}$ heiße ein **trigonometrisches Polynom**.

Satz 10.2.16 (Dichtheit trigonometrischer Polynome). *Gegeben eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ gibt es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom $g = g_\varepsilon$ mit*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

Beweis. Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Wir betrachten die Abbildung $E : [0, 2\pi] \to S^1$, $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$, die anschaulich gesprochen „unser Intervall zu einer Kreislinie zusammenbiegt“. Das Vorschalten von E liefert eine Bijektion

$$(\circ\, E) : \mathcal{C}(S^1) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$$

Das kann man unschwer direkt einsehen und auch formal aus dem anschließenden Lemma 10.2.17 folgern. Unter unserer Bijektion entsprechen nun die trigonometrischen Polynome auf $[0, 2\pi]$ genau den Funktionen der Form $\sum_{\nu=-n}^{n} d_\nu z^\nu$ auf der Kreislinie S^1. Der Satz folgt aus Korollar 10.2.14. □

Lemma 10.2.17. *Ist $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine stetige Surjektion von kompakten metrischen Räumen, so ist eine Abbildung $g : Y \to Z$ in einen weiteren metrischen Raum Z stetig genau dann, wenn $g \circ f$ stetig ist.*

Vorschau 10.2.18. Das gilt auch allgemeiner und mit fast demselben Beweis, wenn wir statt metrischen Räumen topologische Räume betrachten und zusätzlich Y Hausdorff annehmen, vergleiche etwa [AN3] 1.8.12.

Beweis. Das Problem ist nur, die Stetigkeit von g aus der Stetigkeit von $g \circ f$ zu folgern. Da f surjektiv ist, gilt für jede Teilmenge $A \subset Z$ offensichtlich

$$g^{-1}(A) = f((g \circ f)^{-1}(A))$$

Ist A abgeschlossen in Z, so ist $(g \circ f)^{-1}(A)$ abgeschlossen in X wegen der Stetigkeit von $g \circ f$, also kompakt nach 7.1.8. Dann ist $f((g \circ f)^{-1}(A))$ kompakt nach 7.1.11 als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, mithin abgeschlossen nach 7.1.8. Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß das Urbild $g^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset Z$ abgeschlossen ist in Y. Daraus folgt mit 6.7.6 die Stetigkeit von g. □

10.3 Konvergenz der Fourierreihe

10.3.1. Wir verwenden im folgenden die Begrifflichkeit der Skalarprodukte, wie sie etwa in [LA2] 1.2 eingeführt wird.

Definition 10.3.2. Wir versehen den komplexen Vektorraum $V = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ aller stetigen Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f} g$$

Die zugehörige Norm notiert man in diesem Fall mit $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

10.3.3. Unsere Formeln aus dem Beweis von 10.1.3 besagen genau, daß die $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ in diesem Raum ein Orthonormalsystem im Sinne von [LA2] 1.2.12 bilden, in Formeln

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x} \rangle = \begin{cases} 1 & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourier-Koeffizienten schreiben sich nun kürzer $c_\nu = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f \rangle$. Indem wir jeder stetigen Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Familie ihrer „Fourierkoeffizienten“ zuordnen, in Formeln $f^\wedge(\nu) := \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f \rangle$, erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0, 2\pi]) & \to & \mathrm{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & f^\wedge \end{array}$$

Satz 10.3.4 (Quadratische Summierbarkeit der Fouriereihe). *Gegeben eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit Fourierkoeffizienten $c_\nu := \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f \rangle$ gilt*

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$$

im Sinne der Summierbarkeit nach 10.1.5 im komplexen Vektorraum $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ mit seiner Skalarproduktnorm $\| \ \|_2$.

Beweis. Für alle endlichen Teilmengen $I \subset \mathbb{Z}$ können wir f nach [LA2] 1.2.18 zerlegen in seine Projektion auf den von allen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$ mit $\nu \in I$ aufgespannten Teilraum von $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ und einen auf diesem Teilraum senkrechten Anteil,

$$f = \sum_{\nu \in I} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} + \left(f - \sum_{\nu \in I} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} \right)$$

Wir nehmen nun zunächst zusätzlich $f(0) = f(2\pi)$ an. Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir dann nach 10.2.16 eine endliche Teilmenge $I_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ und ein trigonometrisches Polynom $g = \sum_{\nu \in I_\varepsilon} d_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$ mit

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

Es folgt sofort $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Da in einem Skalarproduktraum nach [LA2] 1.2.18 die orthogonale Projektion eines Vektors auf einen endlichdimensionalen Teilraum stets die bestmögliche Approximation durch Vektoren dieses Teilraums ist, folgt für alle endlichen $J \supset I_\varepsilon$ erst recht

$$\left\| f - \sum_{\nu \in J} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} \right\|_2 < \varepsilon$$

Das zeigt die Behauptung im Fall $f(0) = f(2\pi)$. Im Fall $f(0) \neq f(2\pi)$ müssen wir noch eine zusätzliche Verrenkung machen und zunächst eine stetige Funktion $\tilde{f}$ finden mit $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$ sowie $\|\tilde{f} - f\|_2 < \varepsilon$. Dann gibt es wieder ein trigonometrisches Polynom g mit $\|\tilde{f} - g\|_2 < \varepsilon$, also $\|f - g\|_2 < 2\varepsilon$, und der Beweis kann wie zuvor zu Ende geführt werden. □

Korollar 10.3.5. *Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ stetig und seien $c_\nu = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f \rangle$ seine Fourierkoeffizienten. So gilt $\|f\|_2^2 = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_\nu|^2$.*

Beweis. Die Differenz $\|f\|_2^2 - \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} |c_\nu|^2$ ist das Quadrat eines Ausdrucks, von dem wir gerade gezeigt haben, daß er gegen Null strebt. □

Satz 10.3.6 (Ein Fall von gleichmäßiger Konvergenz der Fourierreihe). *Gegeben eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit der Periode 2π konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.*

10.3.7. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch noch, wenn unsere Funktion nur „stückweise stetig differenzierbar“ ist, wenn es also Punkte $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = 2\pi$ gibt derart, daß die Einschränkung von f auf jedes der Intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ stetig differenzierbar ist. Die Details mag der Leser zur Übung selbst ausarbeiten.

Beweis. Die Fourier-Koeffizienten $c_\nu = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f\rangle$ von f ergeben sich für $\nu \neq 0$ aus den Fourier-Koeffizienten $c'_\nu = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}, f'\rangle$ von f' durch partielles Integrieren zu

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}}{-\mathrm{i}\nu}\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{i}c'_\nu}{\nu}$$

Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt jedoch $2|\alpha\beta| \leq (|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ und es folgt

$$\sum_\nu |c_\nu| \leq |c_0| + \sum_{\nu\neq 0}\left(\frac{1}{\nu^2} + |c'_\nu|^2\right) < \infty$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion g. Natürlich konvergiert unsere Funktionenfolge erst recht auf jedem kompakten Intervall in Bezug auf die Norm $\|\ \|$ gegen diese Funktion g. Aus 10.3.4 folgt dann $g = f$ und wir sind fertig. □

Vorschau 10.3.8. Fassen wir eine stetig differenzierbare 2π-periodische Funktion f als eine Funktion auf dem Einheitskreis auf und nehmen sie reellwertig an, so gilt für ihre Fourier-Koeffizienten offensichtlich $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$. Sie können zum Beispiel in [FT1] 4.1 lernen, warum die Formel

$$P(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu + c_{-\nu}\bar{z}^\nu$$

dann die eindeutig bestimmte „stabile Wärmeverteilung mit Randverteilung f auf der Einheitskreisscheibe“ beschreibt. In diesem Zusammenhang hat Fourier, von dem erzählt wird, daß er häufig fröstelte, ursprünglich die heute nach ihm benannten Reihenentwicklungen gefunden und in seinem Werk „Théorie analytique de la chaleur“ veröffentlicht.

10.3.1 Übungen

Übung 10.3.9. Wir definieren den **Schwarzraum** $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ als den Raum aller Abbildungen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^k a_n| < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß die Entwicklung in eine Fourierreihe $(a_n) \mapsto f$ mit $f(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ einen Isomorphismus induziert zwischen dem Schwarzraum $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ und dem Raum der beliebig oft differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Hinweis: Man gehe den Beweis von 10.3.6 nochmal durch.

11 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Christina Pflanz, . . .

Literatur

[AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie;*.

[AN1] *Skriptum Analysis 1;*.

[AN2] *Skriptum Analysis 2;*.

[AN3] *Skriptum Analysis 3;*.

[Cou71] Richard Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Springer, 1971.

[FT1] *Skriptum Funktionentheorie 1;*.

[GR] *Skriptum Grundlagen;*.

[KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie;*.

[LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1;*.

[LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2;*.

[Lor96] Falko Lorenz, *Einführung in die Algebra I*, Spektrum, 1996.

[ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen;*.

[Ste89] Ian Steward, *Galois theory*, second ed., Chapman and Hall, 1989.

[TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie;*.

[TM] *Skriptum Topologie und kompakte Gruppen;*.

Index