

ANALYSIS 2

Wolfgang Soergel

16. August 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Ableitungen in mehreren Veränderlichen	4
1.1	Partielle Ableitungen und Gradient	4
1.2	Das Differential	8
1.3	Kettenregel in mehreren Veränderlichen	19
1.4	Weitere Ableitungsregeln	20
1.5	Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen	24
2	Mehrfache Integrale und Ableitungen	28
2.1	Integration über Quader	28
2.2	Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen	35
2.3	Rechnen mit Approximationen	38
2.4	Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen	41
3	Umkehrsatz und Anwendungen	46
3.1	Umkehrsatz für stetig differenzierbare Abbildungen	46
3.2	Implizite Funktionen	54
3.3	Untermannigfaltigkeiten reeller Räume	64
3.4	Karten und Koordinatensysteme	68
3.5	Extrema auf Mannigfaltigkeiten	73
4	Oberfläche und Volumen	77
4.1	Die Transformationsformel	77
4.2	Integration über Mannigfaltigkeiten	89
4.3	Integration über Fastfaltigkeiten	94
4.4	Explizite Berechnung einiger Integrale	100
4.5	Markov-Ketten*	103
5	Wegintegrale und Potentiale	106
5.1	Vektorfelder und Kovektorfelder	106
5.2	Gradienten in krummlinigen Koordinaten*	121
5.3	Wegintegrale	128
5.4	Felder mit Potential	137
5.5	Wegzusammenhang	140
5.6	Homotopie von Wegen	144
5.7	Wegintegrale über geschlossene Felder	148
6	Der Satz von Stokes	161
6.1	Multilineare Algebra und Dachprodukt	161
6.2	Differentialformen höheren Grades	166
6.3	Orientierung von Mannigfaltigkeiten	174

6.4	Integration von Differentialformen	178
6.5	Höhere Ableitungen ohne Koordinaten	186
6.6	Äußere Ableitung von Differentialformen	188
6.7	Randfaltungen	195
6.8	Integralsatz von Stokes	199
6.9	Der Hodge-Operator mit Anwendungen*	214
7	Gewöhnliche Differentialgleichungen	221
7.1	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften	221
7.2	Integration von vektorwertigen Funktionen	234
7.3	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	238
7.4	Lineare Differentialgleichungen	244
7.5	Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts	248
7.6	Ergänzung zu differentiellen Ungleichungen*	252
8	Erste Schritte in klassischer Mechanik	254
8.1	Die Newton'schen Bewegungsgleichungen	254
8.2	Die Mathematik der Bewegungsgleichungen	258
8.3	Planetenbewegung	261
8.4	Systeme mit Zwangsbedingungen	265
8.5	Der Hamilton'sche Formalismus	269
9	Danksagung	274
10	Die Vorlesung Analysis 3 im WS 15/16	275
	Literaturverzeichnis	279
	Index	280

1 Ableitungen in mehreren Veränderlichen

1.1 Partielle Ableitungen und Gradient

Definition 1.1.1. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $p = (p_1, \dots, p_n) \in A$ ein Punkt. Sei $\{h \in \mathbb{R} \mid p + he_i \in A\}$ halboffen in \mathbb{R} . Wir nennen dann f **partiell differenzierbar bei p nach der i -ten Variablen**, wenn die Funktion $x \mapsto f(p_1, \dots, p_{i-1}, x, p_{i+1}, \dots, p_n)$ differenzierbar ist bei $x = p_i$. Die Ableitung dieser Funktion heißt dann die **i -te partielle Ableitung** von f und wird notiert

$$(D_i f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + h, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{h}$$

1.1.2. Diese partiellen Ableitungen sind, soweit sie existieren, wieder reellwertige Funktionen. Um $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ zu berechnen muß man sich nur vorstellen, alle x_j mit $j \neq i$ seien Konstanten. Zum Beispiel berechnen wir die partiellen Ableitungen von $f(x, y) = x \sin(xy)$ und erhalten

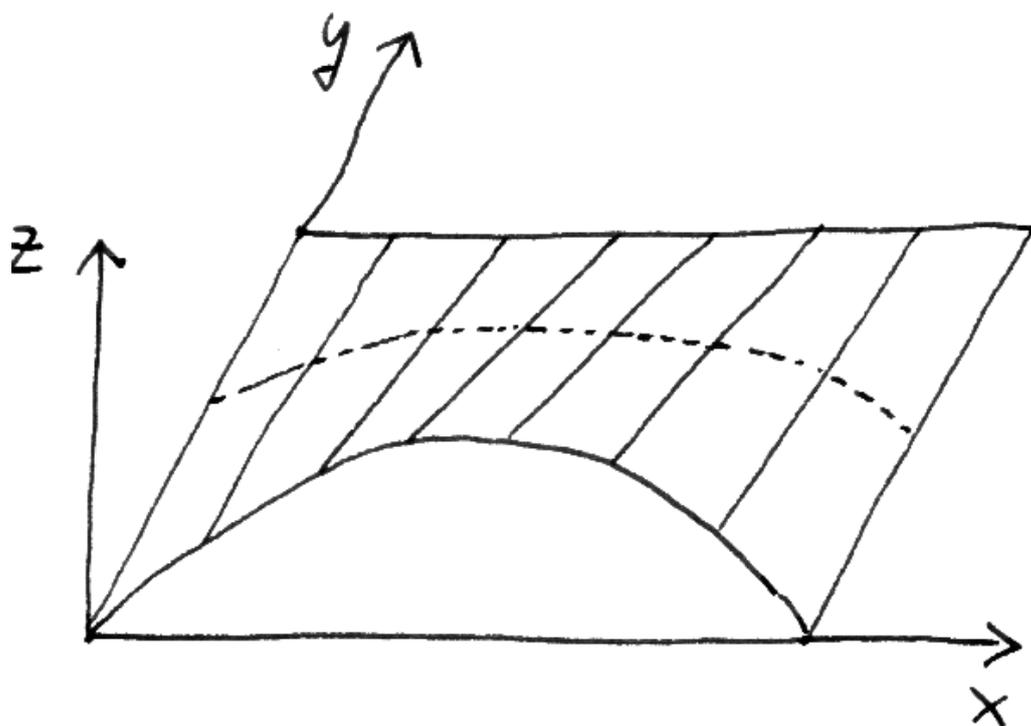
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sin(xy) + xy \cos(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \cos(xy) \end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt auch die Vorteile der Notation $\frac{\partial}{\partial x}$ gegenüber der etwas exakteren Notation D_i , bei der man stets eine Reihenfolge der Variablen festlegen muß und schneller in Indizes ertrinkt. Im Fall, daß weder die Variablen noch die Funktion selbst bereits Indizes tragen, benutzt man auch die sehr konzise Schreibweise

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

Ergänzung 1.1.3. Allgemeiner definiert man ebenso auch partielle Ableitungen für Abbildungen f von einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ in einen beliebigen normierten Vektorraum. Diese partiellen Ableitungen sind dann, soweit sie existieren, Abbildungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in denselben normierten Vektorraum.

1.1.4 (**Diskussion der Notation**). Ich will an einem Beispiel erläutern, aus welchem Grund es sinnvoll ist, im Fall mehrerer Veränderlichen unsere bisherige Notation $\frac{d}{dx}$ zu $\frac{\partial}{\partial x}$ abzuändern. Denken wir uns einen Wanderer auf einer Wanderung durch die Alpen, bei der schlechtes Wetter aufkommt. Der Luftdruck $D = D(t, h)$ hängt dann sowohl von der Zeit als auch von der Höhe ab. Macht unser Wanderer zum Zeitpunkt $t = t_0$ in der Höhe $h = h_0$ eine Pause, so ändert sich der Luftdruck, den sein Barometer mißt, mit der Rate $\frac{\partial D}{\partial t}(t_0, h_0)$. Geht er jedoch zum Zeitpunkt $t = t_0$ bergab oder bergauf und gibt die Funktion $h(t)$ seine Höhe zum



Veranschaulichen wir uns eine reellwertige Funktion von zwei reellen Veränderlichen durch ihren Graphen, eine „hügelige Landschaft“, im Bild etwa $f(x, y) = \frac{1}{2} \sin((1 - y)x)$, so mag man sich die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ an einer Stelle denken als die Steigung an besagter Stelle einer Straße, die besagte hügeliger Landschaft in Richtung der x -Achse durchquert. Zum Beispiel wäre diese partielle Ableitung an der Stelle $(0, 1/2)$ in unserem Fall die Steigung der gestrichelt eingezeichneten Straße an ihrem Beginn auf der y -Achse.

Zeitpunkt t an, so ändert sich der Luftdruck, den sein Barometer mißt, mit der Rate $\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0}(D(t, h(t)))$. Wir werden zeigen, daß sich diese Rate auch ausdrücken läßt in der Gestalt $\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0}(D(t, h(t))) = \frac{\partial D}{\partial t}(t_0, h(t_0)) + h'(t_0)\frac{\partial D}{\partial h}(t_0, h(t_0))$. In Kurzschreibweise gilt also

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{dh}{dt} \frac{\partial D}{\partial h}$$

Der Zweck der Variation unserer Notation liegt nun eben darin, daß mit ihr solche Verkürzungen verständlich bleiben. Um die behauptete Formel zu beweisen, führen wir den Begriff des Differential ein, studieren seinen Zusammenhang mit den partiellen Ableitungen und erhalten unsere Formel als Korollar 1.5.4 der Kettenregel für Differentiale.

Definition 1.1.5. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf ganz A nach jeder der n Variablen partiell differenzierbare Funktion, so definieren wir den **Gradienten** von f als die Abbildung

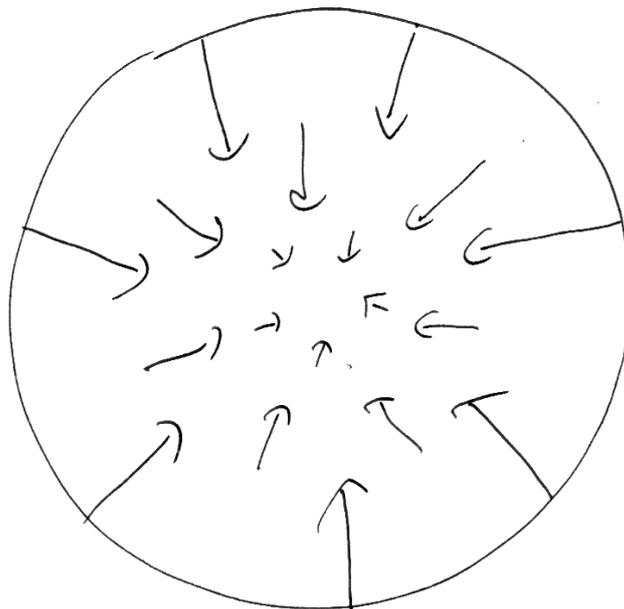
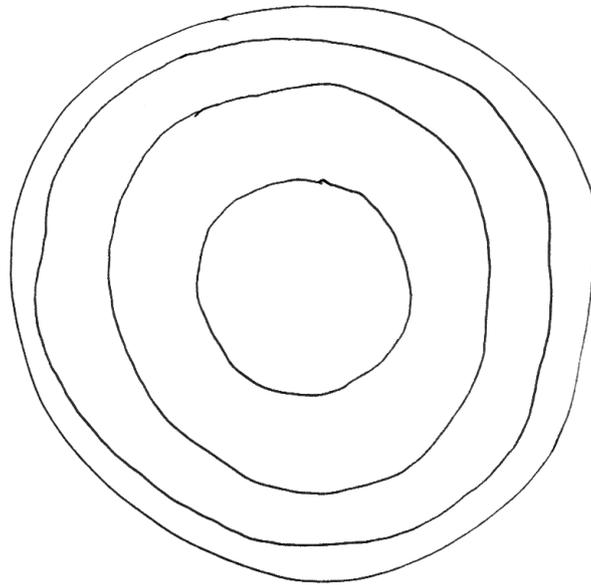
$$\begin{aligned} \text{grad } f : A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^\top \end{aligned}$$

1.1.6. Man beachte, daß in dieser Definition das Symbol x für ein Element des \mathbb{R}^n steht und nicht wie zuvor für eine reelle Zahl. Ich stelle mir $\text{grad } f$ meist vor als ein Vektorfeld, das also jedem Punkt aus A einen Vektor aus dem \mathbb{R}^n zuordnet. Das ist auch der Grund dafür, daß ich in obiger Definition den Zeilenvektor in einen Spaltenvektor transponiert habe. Denken wir uns im Fall $n = 2$ den Graphen von f als eine Hügellandschaft, so zeigt $\text{grad } f$ stets in die Richtung, in der es am steilsten den Berg hinaufgeht, und ist desto länger, je steiler es hinaufgeht. Diese Anschauung wird durch Bemerkung 1.5.6 formalisiert.

1.1.7. Der Begriff des Gradienten ist nur für reellwertige Funktionen auf dem \mathbb{R}^n sinnvoll. Bereits reellwertigen Funktionen auf abstrakten endlichdimensionalen reellen Vektorräumen kann nicht mehr sinnvoll ein Gradient in Gestalt eines Vektorfeldes zugeordnet werden. Ich vermeide deshalb im folgenden nach Möglichkeit den Begriff des Gradienten und arbeite stattdessen mit den sogenannten „Differentialen“, die in sehr viel größerer Allgemeinheit definiert sind. Die Beziehung zwischen Differentialen und Gradienten wird in 1.2.8 und 5.2.6 besprochen.

Übungen

Übung 1.1.8. Sei $R(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij}x^i y^j$ ein Polynom in zwei Variablen mit reellen Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Man zeige: Gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ derart, daß gilt $R(p) = 0 \forall p \in A$, so ist R das Nullpolynom, in Formeln $c_{ij} = 0 \forall i, j$.



Einige Niveaulinien und das Gradientenfeld eines Hügels, hier möglicherweise der Funktion $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2-y^2}$ auf der Kreisscheibe $x^2+y^2 < \frac{1}{2}$.

1.2 Das Differential

1.2.1 (Vom Nutzen allgemeiner normierter Räume). Wir werden es vorerst nur mit endlichdimensionalen normierten Vektorräumen zu tun haben. Ich arbeite dennoch hier und im folgenden mit beliebigen normierten Vektorräumen, weil das zum Ersten in keiner Weise schwieriger ist, weil es zum Zweiten einen größeren Abstand zum unübersichtlichen Gestrüpp der Koordinaten schafft, und weil es zum Dritten bei unserer Behandlung von Differentialgleichungen 7.5.3 in dieser Allgemeinheit gebraucht wird. Noch natürlicher wäre es, mit Abbildungen zwischen affinen Räumen X, Y im Sinne von [AN1] 7.3.2 zu arbeiten, deren Richtungsräume \vec{X}, \vec{Y} jeweils mit einer Norm versehen sind, und das Differential als eine lineare Abbildung zwischen diesen Richtungsräumen zu erklären. Ich werde diesen Gesichtspunkt im folgenden andeuten, indem ich schlicht von „normierten Räumen“ rede und Symbole ohne Pfeil schreibe, wenn man ebensogut affine Räume mit normiertem Richtungsraum betrachten könnte, Symbole dahingegen mit Pfeil schreibe, wenn der zugehörige Richtungsraum gemeint ist. Ich denke auch, daß die sorgfältige Trennung von Punkten und Richtungsvektoren in diesem Zusammenhang zur Klarheit beitragen kann.

Definition 1.2.2. Seien X, Y normierte reelle Räume, $A \subseteq X$ eine offene Teilmenge, $f : A \rightarrow Y$ eine Abbildung und $p \in A$ ein Punkt. Eine Abbildung f heißt **differenzierbar** oder genauer **Fréchet-differenzierbar bei p** , wenn es eine stetige lineare Abbildung $L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ gibt derart, daß gilt

$$\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \frac{(f(p + \vec{v}) - f(p)) - L\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = 0$$

mit einem über Richtungsvektoren $\vec{v} \in \vec{X}$ zu verstehenden Limes.

1.2.3. Gleichbedeutend und vielleicht anschaulicher ist die Forderung, daß es eine stetige lineare Abbildung $L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ sowie eine \vec{Y} -wertige Abbildung ε gibt mit $\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \varepsilon(\vec{v}) = 0$ und

$$f(p + \vec{v}) = f(p) + L\vec{v} + \|\vec{v}\|\varepsilon(\vec{v})$$

Hier ist implizit mit zu verstehen, daß die Abbildung ε definiert sein soll auf der Menge aller $\vec{v} \in \vec{X}$ mit $p + \vec{v} \in A$. Weil wir in der Definition fordern, daß L stetig sein soll, ist jede bei p differenzierbare Abbildung bei p auch stetig. Die Stetigkeit von L ist im übrigen später auch notwendig für die Gültigkeit der Kettenregel 1.3.1. Im folgenden lasse ich die Pfeile über den Richtungsvektoren meist weg. Die lineare Abbildung L ist eindeutig bestimmt, wenn sie existiert, da man für beliebiges $\vec{w} \in \vec{X}$ durch Einsetzen von $\vec{v} = t\vec{w}$ zur Formel

$$L\vec{w} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\vec{w}) - f(p)}{t}$$

gelangt. Diesen Grenzwert in \vec{Y} hinwiederum nennt man, wann immer er existiert, die **Richtungsableitung von f bei p in Richtung v** und kürzt ihn ab mit $(D_{\vec{v}}f)(p)$. Das D steht hier für englisch **directional derivative**. Anschaulich mißt diese Richtungsableitung im Fall $Y = \mathbb{R}$, wie schnell unsere Funktion wächst bzw. abnimmt, wenn wir von p aus in der Richtung \vec{v} gehen. Es gilt allerdings zu beachten, daß unsere Richtungsableitung keineswegs nur von der Richtung des Vektors \vec{v} abhängt, sondern durchaus auch von seiner Länge. Die lineare Abbildung L selbst heißt das **Differential von f bei p** oder auch die **an f bei p tangentielle Abbildung** und wir bezeichnen sie mit

$$L = d_p f$$

Es mag dem Verständnis helfen, statt \vec{v} das Symbol δp zu verwenden. Dann liest sich unsere Definition des Differentials

$$f(p + \delta p) = f(p) + (d_p f)(\delta p) + \|\delta p\| \varepsilon(\delta p)$$

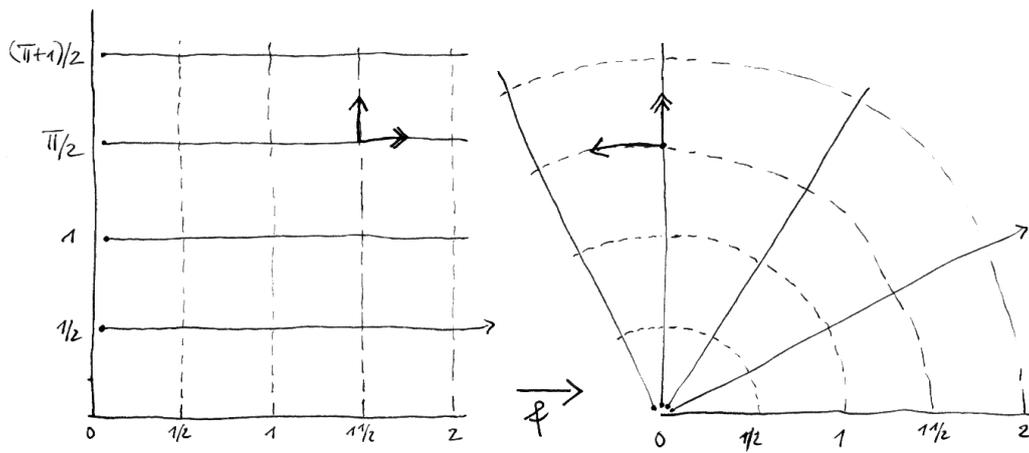
1.2.4 (Diskussion der Notation). Für das Differential, das wir hier mit $d_p f$ bezeichnen, findet man in der Literatur auch die alternativen Notationen $(Df)(p)$ und $f'(p)$. Das vorstehenden Beispiel 1.2.17 erklärt, warum ich die Notation $d_p f$ vorziehe. Einen zusätzlichen Grund findet man in 5.3.7: Dort wird erklärt, in welchem Sinne das Symbol dx , das wir bisher beim Integrieren nur benutzt haben, um die Integrationsvariable auszuzeichnen und die Substitutionsregel leichter zu erinnern, eigentlich das Differential der Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ bedeutet. Ich stelle mir aber schon die Frage, ob die Notation $T_p f$ nicht noch besser wäre, da sie einerseits gut zur später eingeführten Notation für den „Tangentenraum“ paßt, und man andererseits so den Buchstaben d der „Cartan’schen äußeren Ableitung“ zur alleinigen Verwendung überlassen könnte.

1.2.5. Sind X, Y bereits selbst normierte Vektorräume, so benutzt man in diesem Zusammenhang meist die kanonischen Identifikationen $X \xrightarrow{\sim} \vec{X}$ und $Y \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$ aus [AN1] 7.3.5, um unser Differential an einer Stelle p als eine lineare Abbildung $d_p f : X \rightarrow Y$ aufzufassen.

Beispiel 1.2.6. Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oder allgemeiner $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar existieren insbesondere unsere partiellen Ableitungen und sind gerade die Richtungsableitungen in Richtung der Einheitsvektoren e_i , in Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = (D_{e_i} f)(p)$$

Dasselbe gilt auch, wenn f nur auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n definiert ist. Umgekehrt werden wir in 1.5.1 sehen, wie man aus der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen die Existenz des Differentials folgern kann.



Dies Bild soll die Bedeutung des Differential in der Anschauung einer Abbildung „als Abbildung“ verdeutlichen. Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung $f : \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$. Ihr Differential an der Stelle $p = (r, \vartheta) = (1\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ wird beschrieben durch die Jacobi-Matrix

$$[d_p f] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Pfeile im Bild sollen zeigen, daß das in der Tat diejenige lineare Abbildung L ist, für die für kleines h die Abbildung $p + h \mapsto f(p) + Lh$ unsere Abbildung $p + h \mapsto f(p + h)$ besonders gut approximiert.

1.2.7. Seien X, Y normierte reelle Räume, $A \subseteq X$ eine offene Teilmenge, $f : A \rightarrow Y$ eine Abbildung und $p \in A$ ein Punkt. Wenn das Differential $d_p f$ existiert, so existieren insbesondere auch alle Richtungsableitungen und es gilt

$$(D_v f)(p) = (d_p f)(v)$$

für alle $v \in \vec{X}$. Nennen wir eine Abbildung einfach nur **differenzierbar**, so ist die Differenzierbarkeit an jeder Stelle gemeint. Die Ableitung oder genauer das Differential einer differenzierbaren Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nun eine Abbildung $U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $p \mapsto d_p f$. Für jede fest vorgegebene Stelle $p \in U$ ist weiter die darstellende Matrix des Differentials $d_p f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nach [LA1] 2.4.1 die Matrix mit den Spaltenvektoren $(d_p f)(\vec{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. Hat unsere Abbildung also die Gestalt $f = (f_1, \dots, f_m)$ mit Funktionen $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, so hat die darstellende Matrix der linearen Abbildung $d_p f$ die Gestalt

$$[d_p f] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

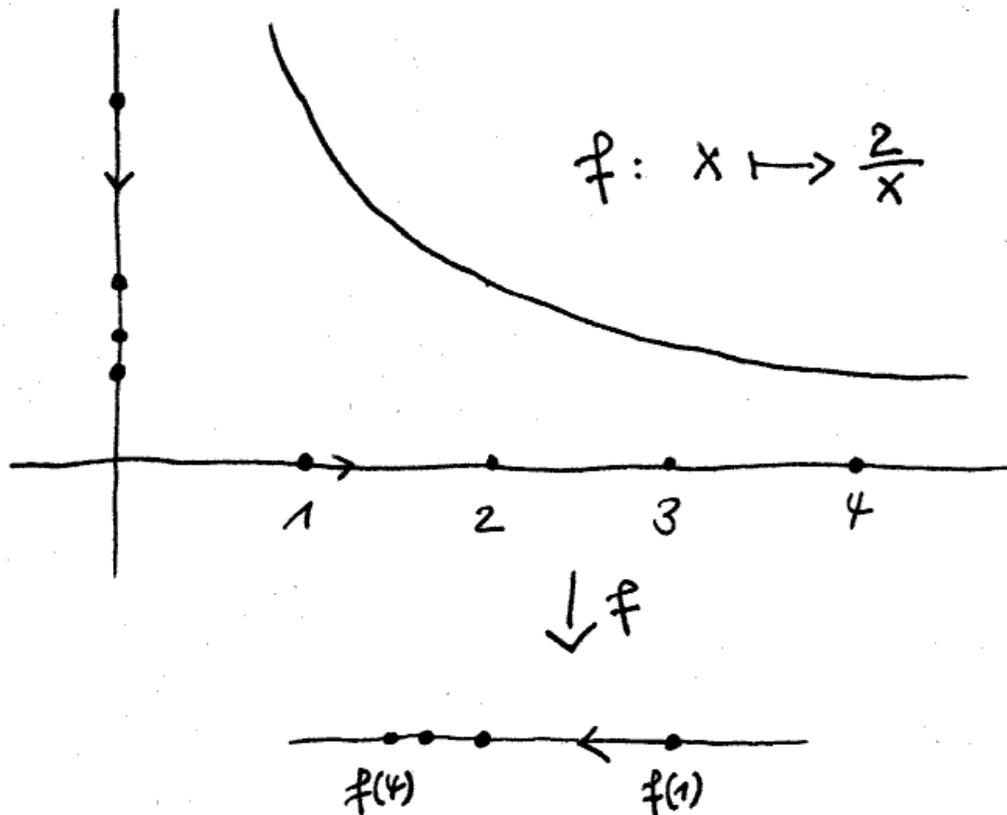
Diese Matrix heißt die **Jacobi-Matrix** unserer Abbildung. Wir denken uns in diesem Zusammenhang Vektoren stets als Spaltenvektoren und hätten etwas pedantisch wohl auch besser $f = (f_1, \dots, f_m)^\top$ schreiben sollen, um das noch einmal zu betonen. Für die Jacobi-Matrix findet man häufig auch die Notation

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

In der Literatur werden unsere differenzierbaren Abbildungen vielfach **total differenzierbar** genannt, um sie abzugrenzen von den **partiell differenzierbaren** Abbildungen, bei denen nur die Existenz aller partiellen Ableitungen gefordert wird. Unser Differential heißt in manchen Quellen genauer das **totale Differential**. Wenn Ihnen die Identifikation von Matrizen mit linearen Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ aus [LA1] 2.4.1 und [LA1] 2.4.7 einmal richtig in Fleisch und Blut übergegangen ist, werden Sie sich auch nicht mehr daran stören, wenn wir später einmal mit $d_p f$ sowohl das Differential als auch die Jacobi-Matrix bezeichnen.

1.2.8 (**Totales Differential und Gradient**). Im Spezialfall einer reellwertigen Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, die auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert ist, ist die Jacobi-Matrix die Zeilenmatrix

$$[d_p f] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$



Dieses Bild soll das Differential einer Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ veranschaulichen, genauer der Abbildung $f: \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto 2/x$ an der Stelle $x = 1$.

Nach der allgemeinen Theorie wird in diesem Fall das Differential gegeben durch die (1×1) -Matrix $[d_p f] = (f'(p))$ mit dem einzigen Eintrag $f'(p)$. In unserem Fall hätten wir etwa $[d_1 f] = (-2)$. Im Bild habe ich versucht, unsere Abbildung sowohl durch ihren Graphen als auch als echte Abbildung, in unserem Fall einem „Umdrehen und Verzerren der Zahlengeraden“, zu veranschaulichen.

Ein kleiner von 1 ausgehender Richtungsvektor wird dann in etwa und im Grenzübergang ganz genau auf das Doppelte seines Negativen abgebildet. Das will unser Bild anschaulich machen.

Sie kann auch als die „Transponierte des Gradienten“ verstanden werden, der ja als Vektor in unseren Konventionen a priori als eine Spaltenmatrix aufzufassen ist. Im Fall des \mathbb{R}^n kann eben der Dualraum in natürlicher Weise mit dem Raum selber identifiziert werden, so daß wir die Linearform $d_p f$ auch als einen Vektor auffassen können und die Zuordnung $p \mapsto d_p f$ auch als das Vektorfeld, das wir bereits in 1.1.6 das „Gradientenfeld“ genannt haben. Im Fall eines abstrakten endlichdimensionalen reellen Raums X und einer reellwertigen Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, die auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ definiert ist, geht das jedoch nicht mehr. Die Zuordnung $p \mapsto d_p f$ ist dann zwar, unter den entsprechenden Differenzierbarkeitsannahmen, immer noch eine sinnvoll definierte Abbildung $U \rightarrow \vec{X}^*$ von U in den Dualraum des Richtungsraums \vec{X} von X , eben das Differential unserer Abbildung f . Diese Abbildung kann aber nicht mehr in natürlicher Weise mit einem Vektorfeld alias einer Abbildung $U \rightarrow \vec{X}$ identifiziert werden. Abbildungen $U \rightarrow \vec{X}^*$ für $U \subseteq X$ heißen im übrigen „Kovektorfelder auf U “ und werden in 5.1.6 folgende noch ausführlich besprochen werden.

Ergänzung 1.2.9. Unser Differenzierbarkeitsbegriff ändert sich nicht, wenn wir die Normen auf \vec{X} und \vec{Y} durch äquivalente Normen ersetzen. Das kann man sich ohne große Mühe direkt überlegen, es wird aber auch formal aus der Kettenregel 1.3.1 folgen. Sind insbesondere X und Y endlichdimensional, so ist unser Differenzierbarkeitsbegriff nach [AN1] 7.4.12 unabhängig von der Wahl der Normen.

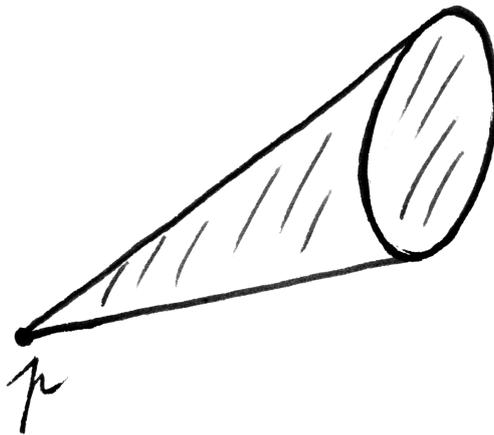
Definition 1.2.10. Eine Teilmenge A eines normierten reellen Raums X heißt **halboffen**, wenn es für jeden Punkt $p \in A$ eine nichtleere offene Teilmenge $C \subseteq \vec{X}$ gibt mit $p + [0, 1]C \subset A$, wenn es also anschaulich gesprochen ein kleines Kegelchen mit Spitze in p gibt, das ganz in A liegt.

1.2.11 (**Differential für Abbildungen mit halboffenem Definitionsbereich**). Gegeben eine halboffene Teilmenge A eines normierten reellen Raums X und eine Abbildung $f : A \rightarrow Y$ in einen weiteren reellen Raum ist das Differential

$$d_p f : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$$

offensichtlich immer noch wohldefiniert. Formal folgt das zum Beispiel aus Übung [AN1] 7.4.20, nach der ein normierter reeller Vektorraum von jeder nichtleeren offenen Teilmenge erzeugt wird.

1.2.12 (**Diskussion der Terminologie**). Der Begriff „halboffen“ kommt in der Literatur sonst nicht vor. Er scheint mir jedoch nützlich, da er hilft, Verkrampfungen bei der Definition der Differenzierbarkeit auf abgeschlossenen Halbräumen und dergleichen zu vermeiden. Eine Definition in dieser Allgemeinheit hinwiederum benötigen wir bei der Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf höhere Dimensionen in 6.8.2.



Ein Kegelchen der Gestalt $p + [0, 1]C$ in der Papierebene, für C die Menge aller Richtungsvektoren, die von p ins Innere der ellipsenförmigen Menge zeigen.

Ergänzung 1.2.13 (Virtuelle partielle Ableitungen). Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine halboffene Teilmenge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so setzen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = (d_p f)(e_i)$$

auch dann, wenn gewisse partielle Ableitungen bei p recht eigentlich gar nicht gebildet werden können, etwa weil die entsprechenden Geraden durch p die Menge A nur in p treffen.

Beispiel 1.2.14. Das Differential einer stetigen affinen Abbildung ist an jeder Stelle ihr linearer Anteil. Ist also in Formeln $\varphi : X \rightarrow Y$ stetig und affin, so gilt $d_p \varphi = \vec{\varphi}$ für alle $p \in X$. Insbesondere verschwindet das Differential einer konstanten Abbildung an jedem Punkt und das Differential einer stetigen linearen Abbildung ist an jedem Punkt die lineare Abbildung selbst.

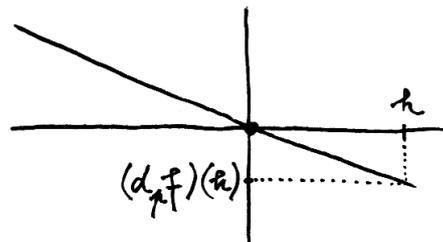
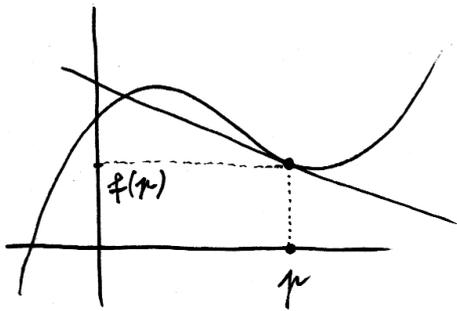
1.2.15 (Anschauung für das Differential). Im allgemeinen kann man sich $d_p f$ vorstellen als „den linearen Anteil der affinen Abbildung, die unsere Funktion in der Nähe der vorgegebenen Stelle bestmöglich approximiert“ oder in anderen Worten als „diejenige lineare Abbildung L , für die $x \mapsto f(p) + L(x - p)$ unsere Funktion $x \mapsto f(x)$ in der Nähe von p am besten approximiert“. Veranschaulichen wir uns zum Beispiel eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch ihren Graphen, eine hügelige Landschaft, so ist die „Tangentialebene“ an unsere hügelige Landschaft im Punkt $(p, f(p))$ im verschobenen Koordinatensystem mit Ursprung $(p, f(p))$ gerade der Graph des Differentials $d_p f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 1.2.16. Für $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow Y$ eine Abbildung von \mathbb{R} in einen normierten Raum Y wird unser $d_p \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \vec{Y}$ gegeben durch Multiplikation mit dem Vektor $\gamma'(p)$ aus [ANI] 8.2.1, wir haben also in Formeln

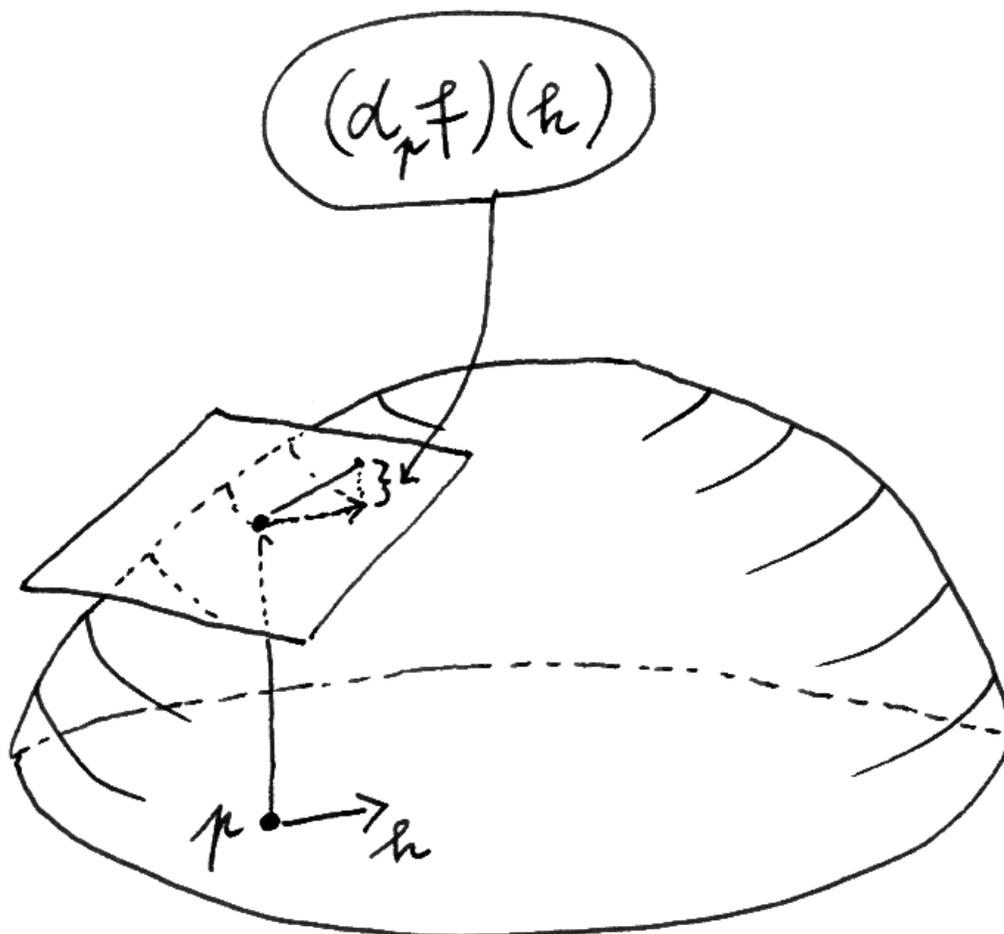
$$\gamma'(p) = (d_p \gamma)(1)$$

Später werden wir derlei Feinheiten meist ignorieren, die durch das Auswerten bei 1 gegebene kanonische Identifikation $\text{Hom}(\mathbb{R}, \vec{Y}) \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$ nicht mehr explizit machen und schlicht $\gamma'(p) = d_p \gamma$ schreiben. Bereits bei reellwertigen Funktionen f einer reellen Veränderlichen hätten wir die Differenzierbarkeit bei p mit Ableitung b auch dadurch charakterisieren können, daß gilt $f(p + h) = f(p) + bh + |h|\varepsilon(h)$ für eine Funktion ε , die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Dort konnten wir die Betragstriche um h noch ohne Schaden weglassen. Ist jedoch h ein Vektor wie in unserer allgemeinen Situation, so sind die Betragstriche als da heißt das Bilden der Norm unumgänglich, schon allein, da wir ja im allgemeinen gar kein Produkt von Vektoren zur Verfügung haben.

Beispiel 1.2.17. Ist X ein eindimensionaler reeller Raum, $x : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ ein Isomorphismus affiner Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung in einen



Anschauliche Bedeutung des Differentials einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen in der Veranschaulichung der Funktion durch ihren Graphen nach 1.2.15. Der Graph des Differentials ist bis auf eine Verschiebung gerade die Tangente.



Anschauliche Bedeutung des Differential einer reellwertigen Funktion von zwei reellen Variablen in der Veranschaulichung der Funktion durch ihren Graphen nach 1.2.15. Der Graph des Differential ist bis auf eine Verschiebung gerade die Tangentialebene. Der Wert des Differential auf dem Vektor h ist etwa der im Bild durch eine geschweifte Klammer angedeutete Abstand oder noch genauer die zugehörige positive reelle Zahl.

normierten Raum Y und $p \in X$ ein Punkt, so erklären wir den **Differentialquotient bei p** durch die Vorschrift

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=p} = d_p f \circ (d_p x)^{-1}$$

Hier meint $(d_p x)^{-1} : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \vec{X}$ die Umkehrabbildung zu $d_p x : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ und unser Differentialquotient ist mithin eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \vec{Y}$, die wir meist mittels der durch das Auswerten bei Eins gegebenen Identifikation schlicht als einen Vektor aus \vec{Y} auffassen. Ist x die Identität auf $X = \mathbb{R}$, so ist unser Differentialquotient nur eine andere Schreibweise für die Ableitung zum Zeitpunkt p . Die allgemeinere Definition zeigt jedoch, wie gut unsere neue Notation df für das Differential verträglich ist mit unserer alten Notation $\frac{df}{dx}$ für die Ableitung.

Ergänzung 1.2.18. Ist \mathbb{T} unsere Zeitachse aus [LA1] 6.1.11 und \mathbb{E} unser Anschauungsraum aus [LA1] 6.1.9 und $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ die mathematische Beschreibung der Flugbahn einer unsterblichen Fliege, eine differenzierbare Abbildung zwischen besagten reellen affinen Räumen, so ist das Differential dieser Abbildung zu einem festen Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ eine lineare Abbildung $d_t \gamma : \vec{\mathbb{T}} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}$, die man als ein Element von $\text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$ auffassen kann oder mit [LA2] 6.1.18 auch als ein Element von $\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$, das man dann die **vektorielle Geschwindigkeit** nennt. An dieser Stelle möchte ich Sie am liebsten wieder einmal davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist.

Übungen

Ergänzende Übung 1.2.19. Das Differential bei der Nullmatrix der Exponentialabbildung $\exp : \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ ist die Identität, in Formeln gilt also $d_0 \exp = \text{id} : \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{C})$. Man zeige das und zeige es allgemeiner auch für die Exponentialabbildung auf dem Raum der stetigen Endomorphismen eines beliebigen Banachraums aus [AN1] 9.2.12.

Ergänzende Übung 1.2.20. Eine Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar bei $p \in \mathbb{C}$ im Sinne von [AN1] 6.9.1 mit Ableitung $f'(p) \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn so f bei p differenzierbar ist im Sinne von 1.2.2 und sein Differential $d_p f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexlineare Abbildung. In diesem Fall ist das Differential von f gerade die Multiplikation mit seiner komplexen Ableitung $f'(p)$ aus [AN1] 6.9.1, in Formeln $d_p f = (f'(p) \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Analoges gilt, wenn f nur auf einer halboffenen Teilmenge von \mathbb{C} definiert ist.

Ergänzende Übung 1.2.21. Man erinnere die Polarzerlegung [LA2] 1.9.23 einer invertierbaren Matrix $A = UP$ mit $U = U(A)$ orthogonal und $P = P(A)$ symmetrisch positiv definit. Man zeige für das Differential bei der Einheitsmatrix der

Abbildungen, die jeder invertierbaren Matrix ihre ihren orthogonalen beziehungsweise positiv definiten symmetrischen Anteil zuordnen, die Formeln $d_I U : D \mapsto (D - D^\top)/2$ und $d_I P : D \mapsto (D + D^\top)/2$. Im allgemeineren Fall der Polarzerlegung von Automorphismen eines Skalarproduktraums zeige man dieselbe Formel, wo D^\top den zu D adjungierten Endomorphismus meint.

1.3 Kettenregel in mehreren Veränderlichen

Satz 1.3.1 (Kettenregel). *Seien A, B, C halboffene Teilmengen normierter reeller Räume X, Y, Z . Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen und $p \in A$ ein Punkt derart, daß f differenzierbar ist bei p und g differenzierbar bei $f(p)$. So ist auch $g \circ f$ differenzierbar bei p und es gilt*

$$d_p(g \circ f) = (d_{f(p)}g) \circ (d_p f)$$

1.3.2. Es ist anschaulich klar, daß die bestmögliche affine Approximation an die Verknüpfung $g \circ f$ zweier Abbildungen f und g bei einer vorgegebenen Stelle p gerade die Verknüpfung der bestmöglichen affinen Approximation an f bei p mit der bestmöglichen affinen Approximation an g bei $f(p)$ sein muß. Die Kettenregel formalisiert diese Anschauung für die linearen Anteile unserer bestmöglichen affinen Approximationen.

1.3.3. Sind unsere drei normierten Räume $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$, so bedeutet die Kettenregel die Identität der Jacobi-Matrizen

$$[d_p(g \circ f)] = [d_{f(p)}g] \circ [d_p f]$$

oder ausgeschrieben die Identität

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(g \circ f)_l}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial(g \circ f)_l}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(p)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(p)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_1}(f(p)) & \dots & \frac{\partial g_l}{\partial y_m}(f(p)) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beweis. Zur Vereinfachung setzen wir $q = f(p)$, $L = d_p f$ und $M = d_q g$ und haben

$$\begin{aligned} f(p+h) &= f(p) + Lh + \|h\|\varepsilon(h) \\ g(q+j) &= g(q) + Mj + \|j\|\eta(j) \end{aligned}$$

für Abbildungen ε und η , die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Wir schreiben

$$f(p+h) = q + j(h)$$

mit $j(h) = Lh + \|h\|\varepsilon(h)$ und erhalten durch Einsetzen

$$\begin{aligned} (g \circ f)(p+h) &= g(q + j(h)) \\ &= g(q) + Mj(h) + \|j(h)\|\eta(j(h)) \\ &= (g \circ f)(p) + MLh + M\|h\|\varepsilon(h) + \|j(h)\|\eta(j(h)) \end{aligned}$$

Wir sind fertig, sobald wir zeigen

$$\lim_{h \rightarrow 0} M\varepsilon(h) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|j(h)\|}{\|h\|} \eta(j(h)) = 0$$

Der erste Grenzwert ergibt sich mühelos, $h \mapsto M\varepsilon(h)$ ist eben auch stetig bei $h = 0$ und nimmt dort den Wert Null an. Um den zweiten Grenzwert zu berechnen, schätzen wir erst ab $\|j(h)\| \leq \|h\|(\|L\| + \|\varepsilon(h)\|)$ und dann

$$\frac{\|j(h)\|}{\|h\|} \|\eta(j(h))\| \leq (\|L\| + \|\varepsilon(h)\|) \|\eta(j(h))\|$$

Die rechte Seite ist wieder stetig bei $h = 0$ und nimmt dort den Wert Null an, gleichbedeutend strebt sie also für $h \rightarrow 0$ gegen Null, und nach dem Quetschlemma [AN1] 6.8.14 strebt dann die linke Seite erst recht gegen Null. \square

1.3.4. Speziell liefert die Kettenregel für stetiges lineares $M = g$ die Formel $d_p(M \circ f) = M \circ (d_p f)$, noch spezieller folgt $d_p(\lambda f) = \lambda(d_p f)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Übungen

Übung 1.3.5. Seien X, Y normierte reelle Räume. Sei $A \subset X$ halboffen und $f : A \rightarrow Y$ differenzierbar. Liegt für zwei Punkte $p, q \in A$ das ganze verbindende Geradensegment $[p, q]$ in A und ist die Operatornorm des Differentials von f auf $[p, q]$ beschränkt durch eine Konstante K , in Formeln $\|d_x f\| \leq K \forall x \in A$, so gilt $\|f(p) - f(q)\| \leq K\|p - q\|$. Hinweis: [AN1] 8.2.9.

1.4 Weitere Ableitungsregeln

Proposition 1.4.1 (Komponentenregel). Seien X, Y_1, Y_2 normierte Räume und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge und $f = (f_1, f_2) : A \rightarrow Y_1 \times Y_2$ eine Abbildung. Genau dann ist f differenzierbar bei $p \in A$, wenn f_1 und f_2 es sind, und dann gilt für die Differentiale die Formel

$$d_p f = (d_p f_1, d_p f_2) : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}_1 \times \vec{Y}_2$$

1.4.2. Man beachte, daß $(d_p f_1, d_p f_2)$ in Matrixschreibweise unter unseren Konventionen [LA1] 2.4.12, anders als die Schreibweise suggerieren mag, als Spaltenmatrix von Homomorphismen aufzufassen wäre.

Beweis. Die Projektionen $\text{pr}_i : X \rightarrow Y_i$ sind stetig und linear. Ist f differenzierbar bei p , so sind damit nach der Kettenregel auch die $f_i = \text{pr}_i \circ f$ differenzierbar bei p und die Kettenregel liefert zusätzlich $d_p f_i = d_{f(p)} \text{pr}_i \circ d_p f = \text{pr}_i \circ d_p f$, also $d_p f = (d_p f_1, d_p f_2)$. Sind umgekehrt f_1 und f_2 differenzierbar bei p mit Differentialen L_1 und L_2 , so können wir nach Definition schreiben

$$f_i(p+h) = f_i(p) + L_i h + \|h\| \varepsilon_i(h)$$

für geeignete Abbildungen ε_i , die stetig sind bei Null und die dort den Wert $\varepsilon_i(0) = 0$ annehmen. Setzen wir $L = (L_1, L_2)$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, so ist L linear und ε stetig bei 0 mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$ und es gilt

$$f(p+h) = f(p) + Lh + \|h\| \varepsilon(h)$$

Das bedeutet aber genau, daß f differenzierbar ist bei p mit Differential $d_p f = L$. □

1.4.3. Mit Induktion folgt die analoge Aussage für eine Abbildung $f : A \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_m$ in ein längeres kartesisches Produkt normierter Räume. Insbesondere ist eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar bei $p \in A$ genau dann, wenn alle f_j es sind, und in diesem Fall gilt für die Differentiale die Formel

$$d_p f = (d_p f_1, \dots, d_p f_m) : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Wieder ist hier $(d_p f_1, \dots, d_p f_m)$ gemäß unseren Konventionen, anders als die Schreibweise suggerieren mag, als Spaltenmatrix von Homomorphismen aufzufassen.

Korollar 1.4.4 (Summenregel). *Seien X ein normierter Raum, \vec{Y} ein normierter Vektorraum und $A \subseteq X$ eine halboffene Teilmenge. Sind $f, g : A \rightarrow \vec{Y}$ differenzierbar bei $p \in A$, so ist auch $f + g : A \rightarrow \vec{Y}$ differenzierbar bei p und es gilt*

$$d_p(f+g) = d_p f + d_p g$$

Beweis. Die Addition $+: \vec{Y} \times \vec{Y} \rightarrow \vec{Y}$, $(w, w') \mapsto w + w'$ ist linear und stetig, und wir können $f + g$ schreiben als die Verknüpfung $f + g = + \circ (f, g)$. Das Differential von $f + g$ an der Stelle p ergibt sich also mit der Kettenregel zu $d_p(f+g) = + \circ (d_p f, d_p g) = d_p f + d_p g$. □

Proposition 1.4.5 (Differential bilinearer Abbildungen). Seien $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ normierte Vektorräume und sei $\varphi : \vec{X} \times \vec{Y} \rightarrow \vec{Z}$, $(v, w) \mapsto \varphi(v, w)$ eine stetige bilineare Abbildung. So ist φ differenzierbar und das Differential von φ im Punkt (p, q) ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} d_{(p,q)}\varphi : \vec{X} \times \vec{Y} &\rightarrow \vec{Z} \\ (h, k) &\mapsto \varphi(h, q) + \varphi(p, k) \end{aligned}$$

Beweis. Wir rechnen

$$\varphi(p + h, q + k) = \varphi(p, q) + \varphi(h, q) + \varphi(p, k) + \varphi(h, k)$$

und müssen nur noch $\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \varphi(h, k) / \|(h, k)\| = 0$ zeigen. Das folgt aber mit [AN1] 7.4.27 aus der Stetigkeit von φ . \square

Beispiel 1.4.6. Die Leibnizregel [AN1] 4.4.1 können wir aus der Kettenregel für Differentiale herleiten wie folgt: Gegeben $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir das Produkt fg als die Verknüpfung $fg = \text{mult} \circ (f, g)$ der Funktion $(f, g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Multiplikation $\text{mult} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sind f und g differenzierbar bei $t \in \mathbb{R}$, so nach der Komponentenregel auch ihre Zusammenfassung (f, g) , und deren Jacobi-Matrix ist die Spaltenmatrix $[d_t(f, g)] = (f'(t), g'(t))^T$. Andererseits ist die Multiplikation differenzierbar als stetige bilineare Abbildung oder auch nach 1.5.1 wegen der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen und ihr Differential bei (x, y) hat als Jacobi-Matrix die Zeilenmatrix $[d_{(x,y)} \text{mult}] = (y, x)$. Mit der Kettenregel in mehreren Veränderlichen folgt dann

$$\begin{aligned} (fg)'(t) &= [d_t(f \circ g)] \\ &= [d_{(f(t), g(t))} \text{mult}] \circ [d_t(f, g)] \\ &= (g(t), f(t)) \circ (f'(t), g'(t))^T \\ &= g(t)f'(t) + f(t)g'(t) \end{aligned}$$

Korollar 1.4.7. Seien $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ und $B : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(m \times k; \mathbb{R})$ differenzierbare matrixwertige Funktionen. So ist auch das Produkt $AB : t \mapsto A(t)B(t)$ differenzierbar und die Geschwindigkeit $(AB)'$ der Produktfunktion $AB : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ wird gegeben durch die Formel

$$(AB)' = A'B + AB'$$

1.4.8. Das sollten Sie zur Übung schon in Koordinaten nachgerechnet haben. Der hier gegebene Beweis ist komplizierter und dient in erster Linie nicht der Herleitung des Resultats, sondern vielmehr der Illustration unserer allgemeinen Regeln durch ein übersichtliches Beispiel. Man beachte jedoch auch, wie unübersichtlich dieses Beispiel wird, sobald wir versuchen, statt mit abstrakten Differentialen mit Jacobi-Matrizen zu arbeiten.

Beweis. Die Matrixmultiplikation ist eine stetige bilineare Abbildung

$$\text{Mult} : \text{Mat}(n \times m; \mathbb{R}) \times \text{Mat}(m \times k; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$$

und wir können AB schreiben als die Verknüpfung $AB = \text{Mult} \circ (A, B)$. Mit der Kettenregel und der Komponentenregel ergibt sich

$$d_t(AB) = (d_{(A(t), B(t))} \text{Mult}) \circ (d_t A, d_t B)$$

Wenden wir diese lineare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ an auf $1 \in \mathbb{R}$, so erhalten wir mit 1.4.5 wie gewünscht

$$\begin{aligned} (AB)'(t) &= d_t(AB)(1) \\ &= (d_{(A(t), B(t))} \text{Mult})(A'(t), B'(t)) \\ &= A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \end{aligned} \quad \square$$

Übungen

Ergänzende Übung 1.4.9. Man zeige, daß auch im Kontext normierter Vektorräume stetige multilineare Abbildungen stets differenzierbar sind, und gebe eine zur Produktregel 1.4.5 analoge Formel für deren Differential. Hinweis: [AN1] 7.4.24.

Übung 1.4.10. Sei $\text{inv} : \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ das Invertieren von Matrizen, $\text{inv}(X) = X^{-1}$. Man zeige für das Differential des Invertierens bei der Einheitsmatrix I die Formel $d_I \text{inv} : H \mapsto -H$. Man zeige allgemeiner, daß das Differential dieser Abbildung am Punkt P in Verallgemeinerung der Ableitungsregel für $x \mapsto 1/x$ gegeben wird durch

$$\begin{aligned} d_P \text{inv} : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) &\rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \\ H &\mapsto -P^{-1}HP^{-1} \end{aligned}$$

Hinweis: Man zeige erst, daß inv differenzierbar ist. Dann nehme man in der Gleichung $\text{inv}(X)X = I$ auf beiden Seiten das Differential an der Stelle P .

Übung 1.4.11. Gegeben ein Banachraum V bilden die invertierbaren Elemente von $\mathcal{B}(V)$ eine offene Teilmenge $\mathcal{B}(V)^\times \subseteq \mathcal{B}(V)$ und das Invertieren ist darauf differenzierbar mit Differential $d_P \text{inv} : H \mapsto -P^{-1}HP^{-1}$. Hinweis: Man beachte, daß für alle Endomorphismen von V der Norm < 1 gilt

$$(I - H)(I + H + H^2 + H^3 \dots) = I$$

wobei [AN1] 9.2.20 und [AN1] 9.2.5 die Konvergenz sicherstellen. Diese Übung verallgemeinert die vorhergehende Übung 1.4.10. Wir werden dies Resultat noch in 6.5.10 im Zusammenhang mit Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen brauchen.

Ergänzende Übung 1.4.12. Sei $B \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ fest. Das Differential der Abbildung $\psi : \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ gegeben durch $A \mapsto ABA^{-1}$ bei der Einheitsmatrix ist die lineare Abbildung $H \mapsto HB - BH$.

Ergänzende Übung 1.4.13. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V und $W \subset \text{End } V$ ein Untervektorraum seines Endomorphismenraums, der aus paarweise kommutierenden Abbildungen besteht, zeige man für das Differential von $\exp : W \rightarrow \text{End } V$ bei $A \in W$ die Formel $d_A \exp = (\cdot \exp A) : W \rightarrow \text{End } V$. Idem für V ein Banachraum und $\mathcal{B}(V)$ statt $\text{End } V$. Eine allgemeine Formel für das Differential von $\exp : \text{End } V \rightarrow \text{End } V$ wird in 2.1.18 diskutiert.

Ergänzende Übung 1.4.14. Sei V ein Banachraum und $A \in \mathcal{B}(V)$ ein stetiger Endomorphismus von V der Norm $\|A\| < 1$. Man zeige, daß das formale Einsetzen von A in die Taylorreihe von $\log(1 + x)$, als da heißt, die Reihe

$$A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \dots$$

gegen einen Endomorphismus $B \in \mathcal{B}(V)$ mit der Eigenschaft $\exp(B) = I + A$ konvergiert. Hinweis: Man berechne unter Verwendung von 1.4.13 die Ableitung der Abbildung $f : t \mapsto \exp(tA - \frac{t^2 A^2}{2} + \frac{t^3 A^3}{3} - \dots)$ und die Ableitung der Abbildung $t \mapsto f(t)(I + tA)^{-1}$ und zeige, daß letztere Funktion konstant ist. Ein besser verallgemeinerbares Argument findet man in [FT1] 2.2.17.

Ergänzende Übung 1.4.15 (Inversionen sind konforme Abbildungen). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die auf dem Komplement $\{v \in V \mid \langle v, v \rangle \neq 0\}$ des Lichtkegels erklärte Abbildung $f : v \mapsto v/\langle v, v \rangle$ heißt dann in Verallgemeinerung von [LA2] 5.7.23 eine **Inversion**. Man zeige für das Differential von f bei v die Formel

$$(d_v f)(h) = \frac{h}{\langle v, v \rangle} - \frac{2\langle h, v \rangle v}{\langle v, v \rangle^2}$$

und folgere $\langle (d_v f)(h), (d_v f)(k) \rangle = \langle h, k \rangle / \langle v, v \rangle^2$ für alle h, k . In Worten erhält $d_v f$ also für alle v unsere Bilinearform bis auf einen von Null verschiedenen skalaren Faktor. Abbildungen f mit dieser Eigenschaft heißen **konforme Abbildungen**, deshalb die Überschrift.

1.5 Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen

Proposition 1.5.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow Y$ eine Abbildung von U in einen normierten Raum Y . Existieren alle partiellen Ableitungen und sind stetig als Abbildungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \vec{Y}$, so ist die Abbildung f differenzierbar.

Ergänzung 1.5.2. Seien X, Y normierte reelle Räume, $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge und $f : A \rightarrow Y$ eine Abbildung. Genau dann heißt die Abbildung f **stetig differenzierbar**, wenn f differenzierbar ist und wenn zusätzlich die Abbildung $p \mapsto d_p f$ von A in den Raum der stetigen linearen Abbildungen $\mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Y})$ mit seiner Operatornorm aus [ANI] 7.4.28 stetig ist. Aus den Voraussetzungen der Proposition 1.5.1 folgt mit demselben Beweis unmittelbar, daß f sogar stetig differenzierbar ist.

Beispiel 1.5.3. Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, deren sämtliche Richtungsableitungen überall existieren, die jedoch im Ursprung nicht total differenzierbar ist, kann man wie folgt erhalten: Man wählt eine 2π -periodische stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $g(x + \pi) = -g(x)$, die nicht identisch Null ist, und setzt $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = rg(\theta)$ für $r > 0$ und $f(0, 0) = 0$. Dann hängen insbesondere die Richtungsableitungen am Ursprung gar nicht linear vom Richtungsvektor ab.

Beweis. Es gilt, an jeder Stelle $p \in U$ die totale Differenzierbarkeit zu zeigen. Indem wir zu f eine geeignete Konstante sowie eine geeignete lineare Abbildung addieren, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $f(p) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i$. Unter diesen zusätzlichen Annahmen müssen wir nun zeigen, daß f total differenzierbar ist bei p mit Differential Null. Indem wir vor f eine geeignete Verschiebung davorschalten, dürfen wir zusätzlich auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ annehmen. Gegeben eine offene konvexe Umgebung $C \subseteq \vec{Y}$ des Nullvektors von \vec{Y} finden wir nun sicher $\delta > 0$ derart, daß alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ auf dem Ball $B(0; \delta)$ nur Werte in C annehmen und daß dieser Ball ganz in U enthalten ist. Aus dem Schrankensatz [ANI] 8.2.9 folgt für $|h| < \delta$ schon $f(h_1, \dots, h_{i-1}, h_i, 0, \dots, 0) - f(h_1, \dots, h_{i-1}, 0, 0, \dots, 0) \in h_i C$ und insgesamt

$$f(h) = f(h) - f(0) \in (h_1 + \dots + h_n)C$$

und für $h \neq 0$ also $f(h)/|h| \in nC$. Damit ergibt sich $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/|h| = 0$ wie gewünscht. \square

Korollar 1.5.4. Seien $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Abbildungen und sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. So ist die durch die Vorschrift $t \mapsto F(x_1(t), \dots, x_n(t))$ gegebene Abbildung differenzierbar und ihre Ableitung an der Stelle $t = a$ wird unter Verwendung der Abkürzung $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ gegeben durch die Formel

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=a} F(x(t)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)) \frac{dx_1}{dt}(a) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a)) \frac{dx_n}{dt}(a)$$

1.5.5. Natürlich gilt die Aussage auch dann noch, wenn unsere Funktionen x_i auf einem echten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind und F auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n , solange nur $x(t)$ stets im Definitionsbereich von F liegt. Man schreibt diese Formel meist etwas salopp in der Form

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

Beweis. Wir betrachten x als eine Abbildung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nach Definition ist $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} F(x_1(t), \dots, x_n(t)) = (d_a(F \circ x))(1)$ der einzige Eintrag in der Matrix der linearen Abbildung $d_a(F \circ x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Mit der Kettenregel finden wir nun

$$\begin{aligned} d_a(F \circ x) &= d_{x(a)}F \circ d_ax \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a)) \right) \left(\frac{dx_1}{dt}(a), \dots, \frac{dx_n}{dt}(a) \right)^\top \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)) \frac{dx_1}{dt}(a) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a)) \frac{dx_n}{dt}(a) \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile das Produkt einer Zeilenmatrix mit einer Spaltenmatrix zu verstehen ist, wie der obere Index \top andeutet. \square

1.5.6. Für die Richtungsableitung $(D_v f)(p)$ einer differenzierbaren reellwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ am Punkt p in Richtung v erhalten wir speziell

$$(D_v f)(p) = (d_p f)(v) = \langle (\text{grad } f)(p), v \rangle$$

Insbesondere wird die Richtungsableitung bei p in Richtung eines Vektors v der Länge Eins maximal genau dann, wenn der Gradient von f ein nichtnegatives Vielfaches von v ist.

Ergänzung 1.5.7 (Partielle Ableitungen mit Einheiten). Oft werden auch partielle Ableitungen in größerer Allgemeinheit verwendet als in unserer Definition 1.1.1. Sind genauer X_1, \dots, X_n eindimensionale reelle Räume und ist E ein normierter reeller Raum und $U \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow E$ eine Abbildung, so bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

auch das „Differential der Restriktion auf X_i bei festen anderen Variablen“, eine Abbildung $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \text{Hom}(\vec{X}_i, \vec{E})$. Unter der Identifikation des Richtungsraums unseres Produkts $X_1 \times \dots \times X_n$ mit dem Produkt der Richtungsräume und des Raums Homomorphismen von dort nach \vec{E} mit dem Produkt der Homomorphismenräume haben wir dann

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \mid \dots \mid \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Im Fall $E = \mathbb{R}^m$ erhalten wir speziell wieder unsere Jacobi-Matrix als eine Zeilenmatrix von Spaltenvektoren.

Übungen

Ergänzende Übung 1.5.8. Man zeige, daß die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar ist mit Differential

$$d_z \exp = (\exp z) \cdot : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Ergänzende Übung 1.5.9. Man zeige, daß $\det : \text{Mat}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und daß das Differential der Abbildung \det an der Einheitsmatrix I die Spur tr ist, in Formeln

$$d_I \det = \text{tr} : \text{Mat}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Für das Differential von \det an einer beliebigen Stelle P zeige man die Formel $(d_P \det)(H) = \text{tr}((\det P)P^{-1}H)$. Hier meint $(\det P)P^{-1}$ den Wert bei P der stetigen Fortsetzung der Abbildung $P \mapsto (\det P)P^{-1}$ vom Raum der invertierbaren Matrizen auf den Raum aller Matrizen alias die „adjungierte Matrix“ P^\sharp aus [LA1] 5.4.6. Hinweis: Man mag mit 1.4.9 arbeiten, oder auch mit partiellen Ableitungen. Erinnerung: Die Spur einer Matrix ist die Summe der Einträge auf der Diagonalen.

Ergänzende Übung 1.5.10. Jede stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der Hyperebene $0 \times \mathbb{R}^n$ oder einer offenen Teilmenge des Halbraums $\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}^n$ läßt sich zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^{n+1} fortsetzen.

Ergänzende Übung 1.5.11 (Differential über partielle Ableitungen, Zugabe). Seien X, Y, Z normierte Räume, $U \subseteq X$ sowie $V \subseteq Y$ offene Teilmengen und $f : U \times V \rightarrow Z$ eine Abbildung. Wir betrachten für alle $x \in U$ die „vertikale“ Einbettung $j_x : V \rightarrow U \times V, y \mapsto (x, y)$ und für alle $y \in V$ die „horizontale“ Einbettung $i_y : U \rightarrow U \times V, x \mapsto (x, y)$. Existieren für alle $(x, y) \in U \times V$ die Differentiale $d_x(f i_y) : \vec{X} \rightarrow \vec{Z}$ und $d_y(f j_x) : \vec{Y} \rightarrow \vec{Z}$ und sind stetig als Funktionen $U \times V \rightarrow \mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Z})$ bzw. $U \times V \rightarrow \mathcal{B}(\vec{Y}, \vec{Z})$, so ist die Abbildung f differenzierbar mit Differential

$$d_{(x,y)} f : (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto d_x(f i_y)(\vec{v}) + d_y(f j_x)(\vec{w})$$

Die offensichtliche Identifikation von $\vec{X} \times \vec{Y}$ mit dem Richtungsraum des Produkts $X \times Y$ haben wir hier der Übersichtlichkeit halber nicht explizit notiert. Hinweis: Man kopiere mutatis mutandis den Beweis von 1.5.1. Mutige mögen umgekehrt 1.5.1 aus dem Ergebnis dieser Übung ableiten durch Induktion über n .

2 Mehrfache Integrale und Ableitungen

Da es mir leichter fällt, die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge anschaulich zu begründen als die Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen, bespreche ich nun einige Grundtatsachen zur Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

2.1 Integration über Quader

2.1.1. Ein Produkt von n Intervallen in \mathbb{R}^n nennen wir einen **Quader**. Ein kompakter Quader in \mathbb{R}^2 ist eine Rechtecksfläche der Gestalt $[a, b] \times [c, d]$. Beispiele für nichtkompakte Quader $H \subset \mathbb{R}^n$ sind etwa ganz \mathbb{R}^n oder im Fall $n > 0$ der Halbraum $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Definition 2.1.2. Ist $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so definieren wir das **Integral** von f über Q , eine reelle Zahl $\int_Q f \in \mathbb{R}$, im Fall durch die Formel

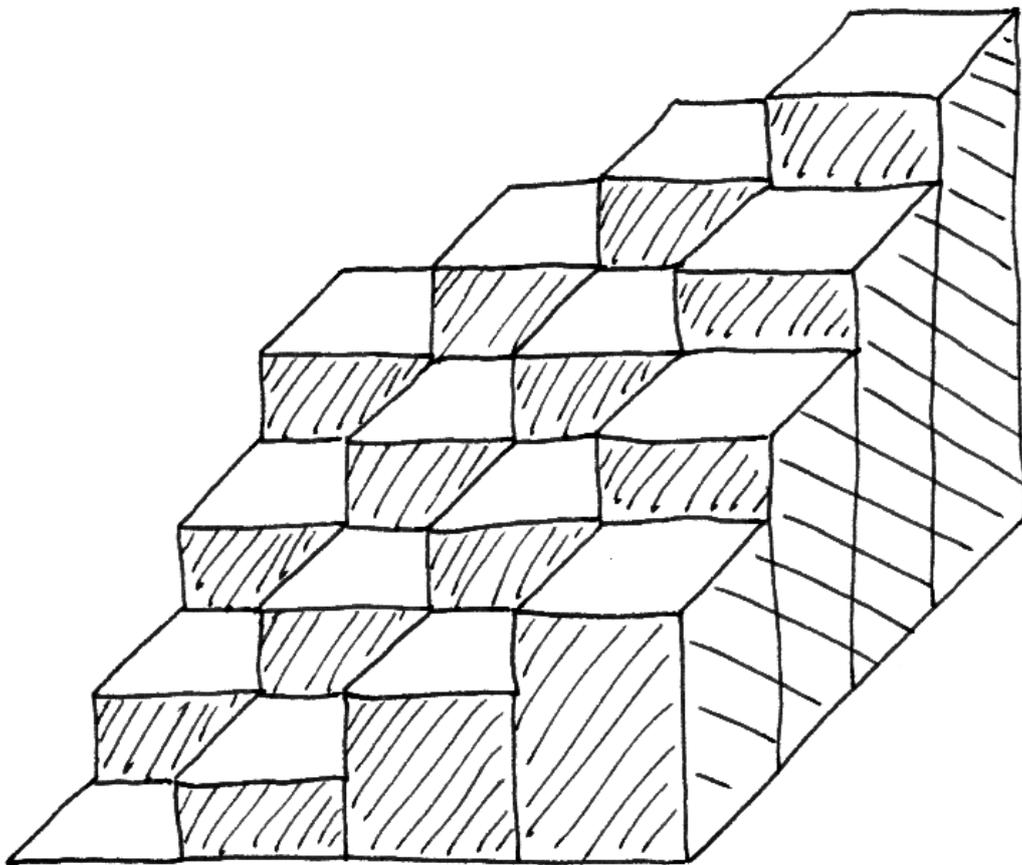
$$\int f = \int_Q f := \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n$$

im Fall $Q \neq \emptyset$ und im Fall $Q = \emptyset$ durch $\int_Q f = 0$. Für $n = 0$ interpretieren wir unsere Definition dahingehend, daß das Integral im Fall $Q \neq \emptyset$ der Funktionswert am einzigen Punkt unseres nichtleeren Quaders sein soll und im Fall $Q = \emptyset$ eben Null.

2.1.3. Proposition [AN1] 7.6.1 zeigt, daß in dieser Definition alle Integranden stetig vom Integrationsparameter abhängen, so daß alle unsere Integrale definiert sind. Aus den Eigenschaften des Integrals von Funktionen einer reellen Veränderlichen folgt sofort $\int(f + g) = \int f + \int g$, $\int(\lambda f) = \lambda \int f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$, insbesondere auch $|\int f| \leq \int |f|$. Für das Integral der konstanten Funktion 1 über einen nichtleeren kompakten Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ erhalten wir $\int_Q 1 = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$. Wir nennen diese Zahl das **Volumen** des Quaders Q und notieren sie $\text{vol } Q$.

2.1.4. Für $n = 2$ bedeutet $\int f$ anschaulich den Rauminhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der xy -Ebene, wobei Rauminhalte unterhalb der xy -Ebene negativ zu zählen sind. Diese Anschauung wird im folgenden formal gerechtfertigt.

Ergänzung 2.1.5. In derselben Weise erklären wir von [AN1] ?? und [AN1] ?? ausgehend auch das Integral einer stetigen Abbildung von einem kompakten Quader in einen Banachraum. Es ist dann ein Vektor aus besagtem Banachraum, und



Die vierte Riemannsumme der Funktion $f(x, y) = (x + y)/2$ auf dem Einheitsquadrat mag man sich als das Volumen des hier gezeichneten räumlichen Gebildes denken.

die im Rest dieses Abschnitts erklärten Regeln gelten in diesem Fall entsprechend. Der gleich folgende Beweis der Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge 2.1.8 muß allerdings umgeschrieben werden, das mag eine gute Übung abgeben.

Definition 2.1.6. Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein nichtleerer kompakter zweidimensionaler Quader alias ein **Rechteck** und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bezeichne $\text{vol } Q = (b - a)(d - c)$ die Fläche von Q . Für $r \geq 1$ definieren wir die r -te **Riemannsumme** $S^r(f)$ von f wie folgt: Wir betrachten die äquidistanten Unterteilungen

$$\begin{aligned} a &= a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b \\ c &= c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_r = d \end{aligned}$$

der Kanten unseres Rechtecks, erhalten eine Unterteilung unseres Rechtecks in r^2 kleine Rechtecke $Q_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ mit Flächeninhalt $(\text{vol } Q)/r^2$, und setzen

$$S^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(a_i, c_j) \frac{\text{vol } Q}{r^2}$$

Proposition 2.1.7. Ist $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist das Integral von f über Q der Grenzwert unserer Riemannsummen, in Formeln

$$\int_Q f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$$

Beweis. Wir definieren Unter- und Obersummen durch

$$\underline{S}^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \inf f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2} \quad \text{und} \quad \bar{S}^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \sup f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2}$$

Bei den Untersummen lassen wir etwa auf unseren kleinen Quadern $Q_{i,j}$ Türmchen hochwachsen, bis sie am Graphen unserer Funktion anstoßen, und bilden die Summe der Volumina aller dieser Türmchen, und bei der Obersumme nehmen wir entsprechend die kleinstmöglichen Türmchen, aus denen unsere Funktion nicht mehr oben herausguckt. Nun behaupten wir die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \underline{S}^r(f) &\leq S^r(f) \leq \bar{S}^r(f) \\ \underline{S}^r(f) &\leq \int_Q f \leq \bar{S}^r(f) \end{aligned}$$

Die Ungleichungen der ersten Zeile sind offensichtlich. Um die Ungleichungen der zweiten Zeile einzusehen, benutzen wir zunächst die Regeln für Integrale einer Veränderlichen und erkennen

$$\inf f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2} \leq \int_{Q_{i,j}} f \leq \sup f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2}$$

Aus unseren Regeln für Integrale einer Veränderlichen folgt zusätzlich auch noch $\int_Q f = \sum_{i,j} \int_{Q_{i,j}} f$. Summieren wir dann für $0 \leq i, j \leq r-1$ alle unsere Ungleichungen auf, so ergibt sich die zweite Zeile oben. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nun wegen der gleichmäßigen Stetigkeit unserer Funktion auf unserem kompakten Rechteck ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit

$$|(x_1, y_1) - (x, y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1, y_1) - f(x, y)| < \varepsilon$$

Ist $R = R_\varepsilon$ so groß, daß alle Kantenlängen unserer kleinen Rechtecke $Q_{i,j}$ bei äquidistanter Unterteilung in R Stücke unter δ sinken, so folgt aus $r \geq R$ damit $|\bar{S}^r(f) - \underline{S}^r(f)| < (\text{vol } Q)\varepsilon$ und mit unseren beiden Zeilen von Ungleichungen ergibt sich $|\int_Q f - S^r(f)| < (\text{vol } Q)\varepsilon$. Das zeigt $\int_Q f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$ wie behauptet. \square

Korollar 2.1.8 (Vertauschen partieller Integrationen). Gegeben ein Rechteck $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Beweis. Beide Seiten sind der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$ derselben Folge von Riemannsummen. \square

2.1.9. Den gemeinsamen Wert dieses Integrals notieren wir dann kürzer auch $\int_Q f(x, y) d(x, y)$ und benutzen analoge Notationen im Fall von noch mehr Veränderlichen. Steht dahingegen x für eine Veränderliche des \mathbb{R}^k , so benutzen wir die Notation $\int f(x) d^k x$.

2.1.10. Da das Differenzieren so in etwa der inverse Prozess zum Integrieren ist, müssen mit den partiellen Integralen auch die partiellen Ableitungen sowie partielle Ableitung und partielles Integral vertauschen. Diese Idee wird im Folgenden ausgeführt.

Korollar 2.1.11 (Vertauschen partieller Ableitungen). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert die gemischte partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ auf U und ist dort stetig und existiert darüber hinaus auch die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ auf U , so existiert sogar die umgekehrte gemischte partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ auf U und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Vorschau 2.1.12. Eine anschauliche Interpretation dieses Korollars wird der Satz über die Taylorentwicklung 2.2.1 geben: Geeignet differenzierbare reelle Funktionen von zwei Variablen besitzen lokal an jeder Stelle eine „beste“ Approximation durch ein Polynom vom Grad höchstens zwei, in Formeln ausgedrückt $f(p+x, q+y) \sim f(p, q) + \alpha x + \beta y + \gamma x^2 + \delta xy + \theta y^2$, und die gemischte partielle Ableitung unserer Funktion an besagter Stelle ist dann genau der Koeffizient δ des „gemischten Terms“.

Beispiel 2.1.13. Die Funktion $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ kann durch $f(0, 0) = 0$ stetig auf ganz \mathbb{R}^2 fortgesetzt werden und ist überall zweimal partiell differenzierbar, aber ihre beiden gemischten partiellen Ableitungen stimmen im Ursprung nicht überein. Das zeigt, daß unsere Forderung der Stetigkeit an eine gemischte partielle Ableitung im vorhergehenden Korollar 2.1.11 auch notwendig ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei U ein offenes Rechteck. Wir verwenden für die partiellen Ableitungen nach der ersten bzw. zweiten Variablen die Abkürzungen f_1 und f_2 und schreiben $f_{12} = (f_1)_2$ für die gemischte partielle Ableitung „erst nach x , dann nach y “. Gegeben $(a, c) \in U$ beliebig aber fest finden wir

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_c^y f_{12}(s, t) dt ds &= \int_a^x f_1(s, y) - f_1(s, c) ds \\ &= f(x, y) - f(x, c) - f(a, y) + f(a, c) \end{aligned}$$

Jetzt vertauschen wir vorne die Integrationsreihenfolge, bringen hinten die drei letzten Summanden auf die andere Seite und erhalten

$$\left(\int_c^y \int_a^x f_{12}(s, t) ds dt \right) + f(x, c) + f(a, y) - f(a, c) = f(x, y)$$

Die linke Seite ist hier ganz offensichtlich partiell differenzierbar erst nach y und dann nach x und ihre gemischte partielle Ableitung ergibt sich zu f_{12} wie gewünscht. \square

Korollar 2.1.14 (Differenzieren unter dem Integral). Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $I \subset \mathbb{R}$ halboffen und $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig mit stetiger partieller Ableitung nach der zweiten Variablen. So ist die Funktion $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$ differenzierbar und man darf die Integration über die erste Variable mit der partiellen Ableitung nach der zweiten Variablen vertauschen, in Formeln

$$\frac{d}{dy} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

Vorschau 2.1.15. Einen allgemeineren Satz zum Differenzieren unter dem Integral werden Sie in Übung [AN3] 1.6.15 im Rahmen der Lebesgue’schen Integrations-theorie herleiten.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei I ein mehrpunktiges Intervall. Wir kürzen wieder die partielle Ableitung von f nach der zweiten Variablen mit f_2 ab. Dann wählen wir $c \in I$ beliebig und finden

$$\int_a^b \int_c^y f_2(x, t) dt dx = \int_a^b f(x, y) - f(x, c) dx$$

Vertauschen wir vorne die Integrationsreihenfolge und bringen den letzten Summanden auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\int_c^y \int_a^b f_2(x, t) dx dt - \int_a^b f(x, c) dx = \int_a^b f(x, y) dx$$

Die linke Seite ist aber offensichtlich partiell differenzierbar nach y mit Ableitung $\int_a^b f_2(x, t) dx$. □

Übungen

Übung 2.1.16 (Lösungen der linearen Wellengleichung). Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion mit $\partial_x^2 f(x, t) = \partial_t^2 f(x, t)$. Man zeige, daß es zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $f(x, t) = u(x - t) + v(x + t)$. Hinweis: Man untersuche zunächst zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\partial_x \partial_y g(x, y) = 0$ und zeige, daß es zweimal stetig differenzierbare Funktionen $h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $g(x, y) = h(x) + k(y)$.

Ergänzung 2.1.17 (Motivation für die lineare Wellengleichung). Wir denken uns eine waagerechte Kette von reibungslos rutschenden Würfeln der Masse M , die durch Federn verbunden sind und einen Abstand von jeweils einem Meter haben. Stören wir dieses System und bezeichnet $f(n, t)$ die Auslenkung der n -ten Kugel zum Zeitpunkt t , so erfüllen die Funktionen $f(n, t)$ nach den Newton'schen Bewegungsgleichungen ein System von Differentialgleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} M \partial_t^2 f(n, t) &= C((f(n+1, t) - f(n, t)) - (f(n, t) - f(n-1, t))) \\ &= C(f(n+1, t) + f(n-1, t) - 2f(n, t)) \end{aligned}$$

mit einer Konstante C , die von der Federkonstante abhängt. Teilen wir die Abstände zwischen unseren Würfeln und die Masse unserer Würfel durch N , so werden die Federn entsprechend kürzer und die entsprechende Gleichung lautet

$$\frac{M}{N} \partial_t^2 f(x, t) = NC(f(x + \frac{1}{N}, t) + f(x - \frac{1}{N}, t) - 2f(x, t))$$

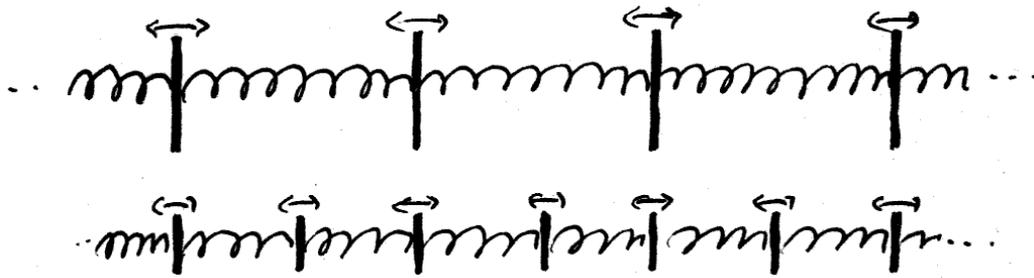


Illustration zur Motivation der linearen Wellengleichung mit Platten statt Würfeln.

für $x \in (1/N)\mathbb{Z}$. Setzen wir stattdessen $h = 1/N$, so ergibt sich

$$M\partial_t^2 f(x, t) = C \frac{f(x+h, t) + f(x-h, t) - 2f(x, t)}{h^2}$$

für alle $x \in h\mathbb{Z}$. Gehen wir schließlich zum Grenzwert für $N \rightarrow \infty$ alias $h \rightarrow 0$ über, so erhalten wir nach [AN1] 5.2.8 die Wellengleichung

$$M\partial_t^2 f(x, t) = C\partial_x^2 f(x, t)$$

Ergänzende Übung 2.1.18. Gegeben ein Vektorraum V und $A \in \text{End } V$ erklärt man die lineare Abbildung $\text{ad } A : \text{End } V \rightarrow \text{End } V$ durch die Vorschrift $\text{ad } A : B \mapsto (AB - BA)$. Man zeige, daß für V endlichdimensional und reell das Differential von $\exp : \text{End } V \rightarrow \text{End } V$ bei $A \in \text{End } V$ gegeben wird durch die Formel

$$d_A \exp = (\cdot \exp A) \circ \left(\frac{\exp(\text{ad } A) - 1}{\text{ad } A} \right)$$

Beim letzten Faktor ist gemeint, daß $\text{ad } A$ in die Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} z^\nu / (\nu + 1)!$ der Funktion $(\exp(z) - 1)/z$ eingesetzt werden soll. Hinweis: Man wende $\partial^2 / \partial s \partial t = \partial^2 / \partial t \partial s$ an auf $\exp(s(A + tB)) \exp(-sA)$, setze $t = 0$ und integriere über s .

2.2 Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen

Satz 2.2.1 (Taylorentwicklung in zwei Veränderlichen). Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, die den Nullpunkt enthält, und sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine d -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. So gibt es genau ein Polynom in zwei Veränderlichen $P(x, y) = \sum_{i+j \leq d} c_{i,j} x^i y^j$ vom Grad $\leq d$ derart, daß gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{|(x, y)|^d} = 0$$

Des weiteren werden die Koeffizienten $c_{i,j}$ dieses Polynoms P gegeben durch die Formel

$$c_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0)$$

2.2.2. Ist $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ selbst eine Polynomfunktion, so erkennt man leicht, daß gilt

$$a_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0)$$

In diesem Fall liefert unsere Formel also $P(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i y^j$ und man sieht sofort, daß dieses P die geforderte Eigenschaft hat.

2.2.3. Um unseren Satz auch in mehr als zwei Veränderlichen übersichtlich formulieren zu können, führen wir neue Notationen ein. Gegeben ein **Multiindex** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ definieren wir

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_n \\ \alpha! &:= \alpha_1! \dots \alpha_n! \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\ \partial^\alpha f &:= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \end{aligned}$$

Für die letzte Notation nehmen wir dabei an, daß f eine $|\alpha|$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R} ist, so daß es insbesondere beim partiellen Ableiten nicht auf die Reihenfolge ankommt.

2.2.4. Unter einem **Polynom in mehreren Veränderlichen** x_1, x_2, \dots, x_n mit reellen Koeffizienten versteht man eine „endliche formale Summe“ der Gestalt

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

wobei die Summe über alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ laufen soll und alle Koeffizienten c_{α} reelle Zahlen sind, die darüber hinaus fast alle verschwinden müssen, da wir ja salopp gesprochen nur endliche formale Summen zulassen wollen. Mit dem **Grad** oder genauer dem **Totalgrad** eines Polynoms in mehreren Veränderlichen meint man $\sup\{|\alpha| \mid c_{\alpha} \neq 0\}$. Das Nullpolynom hat also den Grad $-\infty$, konstante Polynome haben den Grad Null und

$$x^4 y^3 - z^5 y + 3z^2 x^2 y^2$$

ist ein Polynom in den drei Veränderlichen x, y, z vom Grad 7. Wir werden in 2.2.7 zeigen, daß verschiedene polynomiale Ausdrücke auch verschiedene Funktionen liefern, so daß wir im Fall reeller Koeffizienten nicht so genau zu hinterfragen brauchen, was wir unter solch einem „formalen Ausdruck“ eigentlich genau verstehen wollen. Den Fall beliebiger Koeffizienten diskutieren wir in [LA1] 4.3.2 im Fall einer Variablen und in [LA1] 4.3.29 im allgemeinen.

Satz 2.2.5 (Taylorentwicklung). Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine d -mal stetig partiell differenzierbare Funktion, und $p \in A$ ein Punkt. So gibt es genau ein Polynom P vom Grad $\leq d$ mit

$$f(p+h) = P(h) + |h|^d \varepsilon(h)$$

für eine Funktion ε mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, und dieses Polynom wird gegeben durch die Formel

$$P(h) = \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{(\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha$$

2.2.6. Dieser Satz ist deutlich schwächer als unsere verschiedenen Versionen im Fall einer Variablen in [AN1] 5.2.2 folgende. Ich denke jedoch, daß es an dieser Stelle den Aufwand nicht wert ist, entsprechend stärkere Versionen zu zeigen. Ich habe auch in einer Variablen den Aufwand nur getrieben, um den Aspekt der „Verallgemeinerung der Ableitung durch die Taylorentwicklung“ herauszuarbeiten. In 6.5.7 deute ich an, wie der vorhergehende Satz koordinatenfrei formuliert werden könnte. Ich schicke dem Beweis ein Lemma voraus.

Lemma 2.2.7. *Sei R ein Polynom in n Veränderlichen mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq d$. Gilt $\lim_{h \rightarrow 0} R(h)/|h|^d = 0$, so folgt $R = 0$.*

Beweis. Wir zeigen das durch Widerspruch. Wäre $R \neq 0$, so gäbe es $v \neq 0$ mit $R(v) \neq 0$, und $t \mapsto R(tv)$ wäre ein von Null verschiedenes Polynom in einer Veränderlichen $t \in \mathbb{R}$ vom Grad $\leq d$ mit $\lim_{t \rightarrow 0} R(tv)/|t|^d = 0$. Wir wissen aber aus [AN1] 2.6.17, daß es solch ein Polynom in einer Variablen nicht gibt. \square

Beweis des Satzes. Aus unserem Lemma folgt sofort die Eindeutigkeit von P , denn ist \hat{P} ein anderes mögliches Approximationspolynom, so können wir das Lemma auf $R = P - \hat{P}$ anwenden. Um die Existenz der Taylorentwicklung nachzuweisen, nehmen wir ein $h \in \mathbb{R}^m$, das so klein ist, daß sogar das ganze Geradensegment $[p, p + h] = \{p + th \mid t \in [0, 1]\}$ in A enthalten ist, und betrachten die Taylorentwicklung der Funktion $g = g_h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(p + th)$. Wir behaupten zunächst, daß die höheren Ableitungen von g gegeben werden durch

$$g^{(\nu)}(t) = \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{\nu!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(p + th) h^\alpha$$

In der Tat gilt nach der Kettenregel in mehreren Veränderlichen 1.5.4 schon mal

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p + th) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p + th) \cdot h_n$$

und wir folgern induktiv

$$g^{(\nu)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_\nu} \frac{\partial^\nu f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\nu}}(p + th) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_\nu}$$

wobei die Summe über alle möglichen ν -Tupel aus $\{1, \dots, n\}$ laufen soll. Nach dem anschließenden Lemma 2.2.8 gibt es aber genau $\nu!/\alpha!$ Möglichkeiten, ein ν -Tupel $(i_1, \dots, i_\nu) \in \{1, \dots, n\}^\nu$ so zu wählen, daß unter den i_1, \dots, i_ν jedes j genau α_j -mal vorkommt. Fassen wir also gleiche Summanden zusammen, so ergibt sich die behauptete Formel für die ν -te Ableitung $g^{(\nu)}$ von g . Jetzt schreiben wir zur Funktion $g(t)$ die Taylorreihe mit der Lagrange'schen Form des Restglieds

[ANI] ?? um den Entwicklungspunkt $t = 0$ hin und erhalten an der Stelle $t = 1$ mit einer kleinen Umformulierung die Gleichung

$$f(p+h) = \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{(\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=d} \frac{(\partial^\alpha f)(p+\xi_h h) - (\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha$$

für geeignetes $\xi_h \in (0, 1)$. Es reicht also, wenn wir für $|\alpha| = d$ zeigen, daß gilt $\lim_{h \rightarrow 0} (\partial^\alpha f)(p+\xi_h h) - (\partial^\alpha f)(p) = 0$, und das folgt sofort aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen. \square

Lemma 2.2.8. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ gegeben und sei $\nu = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ihre Summe. So gibt es genau $\nu! / \alpha_1! \dots \alpha_n!$ Abbildungen von einer Menge X mit ν Elementen nach $\{1, \dots, n\}$ derart, daß der Wert j jeweils genau α_j -mal angenommen wird.

Beispiel 2.2.9. Wollen wir 10 nummerierte Bälle so anmalen, daß 5 Bälle blau, 3 Bälle rot und 2 Bälle gelb werden, so gibt es dafür also $10! / (5!3!2!) = 2520$ Möglichkeiten.

Beweis. Es gibt genau $\nu!$ Möglichkeiten, unsere Menge X anzuordnen. Jede dieser Möglichkeiten liefert eine Abbildung i wie folgt: Wir bilden die ersten α_1 Zahlen auf 1 ab, die nächsten α_2 Zahlen auf 2, und so weiter, bis wir zum Schluß die letzten α_n Zahlen auf n abbilden. So erhalten wir nur Abbildungen der gewünschten Form, genauer erhalten wir so jede der gewünschten Abbildungen genau $(\alpha_1! \dots \alpha_n!)$ -mal. Das Lemma ist bewiesen. \square

2.3 Rechnen mit Approximationen

Definition 2.3.1. Eine Abbildung $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **polynomial** oder auch **regulär**, wenn sie die Gestalt $P = (P_1, \dots, P_m)$ hat für Polynome P_1, \dots, P_m in n Veränderlichen. Haben alle unsere P_j Grad $\leq d$, so sagen wir, die polynomiale Abbildung P habe **Grad** $\leq d$.

Definition 2.3.2. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ zwei auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ definierte Abbildungen. Seien $p \in D$ ein Punkt und $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir sagen, f und g **stimmen bei p überein bis zur Ordnung d** und schreiben

$$f \sim_p^d g$$

dann, wenn gilt $f(p+h) - g(p+h) = |h|^d \varepsilon(h)$ für eine Funktion ε , die stetig ist bei $h = 0$ mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$.

2.3.3. Ist $p \in D$ ein Häufungspunkt von D , so ist das gleichbedeutend zur Forderung, daß gilt $f(p) = g(p)$ und

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - g(x)}{|x - p|^d} = 0$$

2.3.4. Natürlich stimmen zwei \mathbb{R}^m -wertige Funktionen bis zu einer gewissen Ordnung überein genau dann, wenn alle ihre Komponenten bis zu der entsprechenden Ordnung übereinstimmen. Schreiben wir also $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $g = (g_1, \dots, g_m)$, so gilt

$$f \sim_p^d g \Leftrightarrow (f_j \sim_p^d g_j \quad \forall j)$$

Offensichtlich folgt auch aus $f \sim_p^d g$ und $g \sim_p^d h$ schon $f \sim_p^d h$. Sind weiter $P, Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ polynomiale Abbildungen vom Grad $\leq d$ und ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so folgt aus $P \sim_p^d Q$ schon $P = Q$.

2.3.5. Der Satz über die Taylorentwicklung 2.2.5 liefert uns für d -mal stetig partiell differenzierbares f die eindeutig bestimmte polynomiale Abbildung P vom Grad $\leq d$ mit $P \sim_p^d f$. Genauer besagt unser Satz, daß diese polynomiale Abbildung $P = (P_1, \dots, P_m)$ dadurch charakterisiert wird, daß die partiellen Ableitungen der Polynome P_j bis zur Ordnung d bei p denselben Wert annehmen wie die entsprechenden partiellen Ableitungen der Funktionen f_j .

Satz 2.3.6 (Rechnen mit Approximationen). Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ Teilmengen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}^l$ Abbildungen mit $f(D) \subset E$. Gegeben $p \in D$ und polynomiale Abbildungen P, Q mit $f \sim_p^d P$ und $g \sim_{f(p)}^d Q$ folgt

$$g \circ f \sim_p^d Q \circ P$$

2.3.7. Im Fall $d = 1$ ist die Aussage des Satzes äquivalent zur Kettenregel in mehreren Veränderlichen. Im Fall $d = 0$ bedeutet sie schlicht die Stetigkeit der Verknüpfung bei p . Es reicht also, den Satz für $d \geq 1$ zu beweisen. Dem eigentlichen Beweis schicken wir ein Lemma voraus.

Lemma 2.3.8. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Gegeben $p \in D$ und Polynome P_1, P_2 mit $f_i \sim_p^d P_i$ folgt

$$f_1 + f_2 \sim_p^d P_1 + P_2 \quad \text{und} \quad f_1 f_2 \sim_p^d P_1 P_2$$

2.3.9. Dies Lemma besteht in der Tat aus zwei Spezialfällen des Satzes, man kann nämlich die Addition $(+) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten und rechnen $f_1 + f_2 = (+) \circ (f_1, f_2) \sim_p^d (+) \circ (P_1, P_2) = P_1 + P_2$ und ähnlich für die Multiplikation. Wir brauchen jedoch einen unabhängigen Beweis, damit wir das Lemma beim Beweis des Satzes verwenden dürfen.

Beweis des Lemmas. Dem Leser überlassen. Statt P_i polynomial reicht es auch, P_i stetig bei p anzunehmen. \square

Beweis des Satzes. Wir zeigen nun zunächst $g \circ f \sim_p^d Q \circ f$ und dann $Q \circ f \sim_p^d Q \circ P$. Für die erste Aussage schreiben wir $g(y) = Q(y) + |y - f(p)|^d \varepsilon(y - f(p))$ und erhalten durch Einsetzen von $y = f(x)$ und Erweitern des rechten Terms

$$(g \circ f)(x) = (Q \circ f)(x) + |x - p|^d \left[\left(\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} \right)^d \varepsilon(f(x) - f(p)) \right]$$

für alle $x \neq p$. Wir hatten uns ja bereits auf den Fall $d \geq 1$ zurückgezogen. In diesem Fall stimmt f bei p bis mindestens zur Ordnung 1 überein mit der polynomialen Abbildung P , folglich ist f differenzierbar bei p , die vordere Klammer in den eckigen Klammern bleibt beschränkt für $x \rightarrow p$ und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \rightarrow p$ gegen Null. Wir müssen also nur noch für jede polynomiale Abbildung Q zeigen

$$Q \circ f \sim_p^d Q \circ P$$

Es reicht sicher, das im Fall $l = 1$ zu zeigen, also für Q ein Polynom. In diesem Fall folgt es aber sofort aus dem vorhergehenden Lemma 2.3.8. \square

Beispiel 2.3.10. Wollen wir für die Funktion $f(x, y) = \sin(x e^y)$ die partielle Ableitung $\frac{\partial^3 f}{\partial x (\partial y)^2}$ im Nullpunkt bestimmen, so benutzen wir unseren Satz 2.3.6 und rechnen

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \dots \\ x e^y &= x + xy + \frac{xy^2}{2} + \dots \\ \sin(x e^y) &= x + xy + \frac{xy^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

und die gesuchte partielle Ableitung bei $x = y = 0$ ergibt sich mit der Taylorreihe zu 1.

Übungen

Übung 2.3.11. Eine Potenzreihe in mehreren Veränderlichen, die an allen Stellen einer offenen Menge punktweise absolut konvergiert, stellt auf dieser offenen Menge eine beliebig oft partiell differenzierbare Funktion dar.

Ergänzende Übung 2.3.12. Man zeige die Identität $\log((1+u)(1+v)) = \log(1+u) + \log(1+v)$ im Ring der formalen Potenzreihen in zwei kommutierenden Variablen u, v mit rationalen Koeffizienten.

2.4 Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen

Definition 2.4.1. Sei A ein metrischer Raum, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in A$ ein Punkt. Wir sagen, f hat bei p ein **lokales Minimum** (bzw. **Maximum**) genau dann, wenn gilt $f(x) \geq f(p)$ (bzw. $f(x) \leq f(p)$) für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von p . Wir sagen, f hat bei p ein **isoliertes lokales Minimum** (bzw. **Maximum**) genau dann, wenn gilt $f(x) > f(p)$ (bzw. $f(x) < f(p)$) für alle von p verschiedenen x in einer hinreichend kleinen Umgebung von p .

Proposition 2.4.2. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in A$ ein Punkt. Besitzt f bei p ein lokales Minimum oder Maximum, so gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ für alle i .

2.4.3. Die Bedingung, A sei offen, ist in diesem Zusammenhang wesentlich, wie wir bereits im Fall einer Veränderlichen in [AN1] 4.5.3 diskutiert haben.

Beweis. Für beliebiges i und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ betrachten wir das parametrisierte Geradensegment $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow A$, $t \mapsto p + t e_i$. Natürlich muß auch $f \circ g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Minimum oder Maximum bei $t = 0$ haben, also gilt $(f \circ g)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$. \square

Definition 2.4.4. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Verschwinden alle ersten partiellen Ableitungen unserer Funktion an einer Stelle $p \in A$, so sagt man, die Funktion habe bei p eine **kritische Stelle**. Ist allgemeiner A eine halboffene Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und verschwindet ihr Differential an einem Punkt $p \in A$, in Formeln $d_p f = 0$, so sagt man auch, die Funktion habe bei p eine **kritische Stelle**.

Beispiel 2.4.5. Gegeben drei Punkte $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ suchen wir die Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, für die die Summe der Abstände

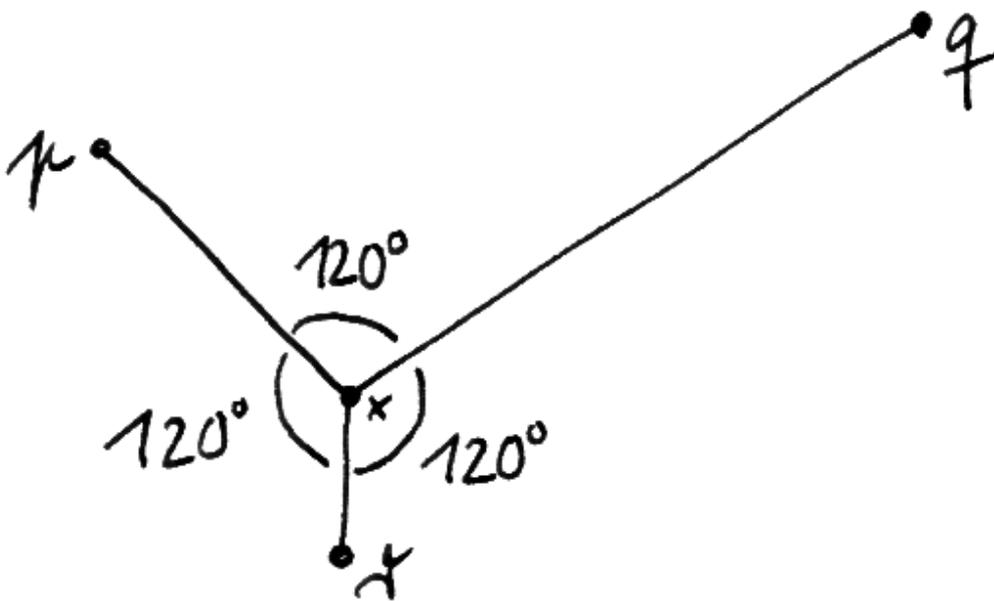
$$S(x) = \|x - p\| + \|x - q\| + \|x - r\|$$

kleinstmöglich wird. Sicher gilt $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} S(x) = \infty$, folglich existiert ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^2} S(x) = \inf_{x \in K} S(x)$$

und damit nimmt unsere Funktion nach [AN1] 7.1.12 ihr Infimum auch wirklich als Funktionswert an. Unsere Funktion ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q, r\}$ stetig differenzierbar und ihr Gradient bei x ergibt sich nach kurzer Rechnung zu

$$(\text{grad } S)(x) = \frac{x - p}{\|x - p\|} + \frac{x - q}{\|x - q\|} + \frac{x - r}{\|x - r\|}$$



Die Summe der Abstände zu drei vorgegebenen Punkten, die nicht auf einer Gerade liegen und ein Dreieck bilden, in dem kein Winkel grösergleich 120° ist, wird minimal an der Stelle, an der die Halbgeraden zu den Ecken jeweils den Winkel 120° einschließen. Ist dahingegen ein Winkel grösergleich 120° , so liegt das Minimum bei der fraglichen Ecke selbst.

Für das Minimum kommen nach unseren Erkenntnissen nur unsere drei Punkte p, q, r sowie die Nullstellen des Gradienten in Frage. Die weiteren Überlegungen führen wir nicht mehr in formaler Strenge durch, da das von unseren formalen Kenntnissen ausgehend einen unangemessenen Aufwand bedeuten würde. Anschaulich scheint es mir klar, daß unser Gradient nur dann verschwinden kann, wenn nicht alle drei Punkte p, q, r auf einer Geraden liegen und x im Inneren der zugehörigen Dreiecksfläche alias ihrer konvexen Hülle liegt und wenn die drei Vektoren $x - p, x - q$ und $x - r$ jeweils einen Winkel von 120° alias $2\pi/3$ einschließen. Das ist für einen Punkt im Innern der Dreiecksfläche jedoch nur dann möglich, wenn jeder der Winkel unseres Ausgangsdreiecks kleiner ist als 120° . Nur unter den Voraussetzungen, daß unsere drei Punkte p, q, r nicht auf einer Geraden liegen und jeder der Winkel des Dreiecks mit den Ecken p, q, r kleiner ist als 120° , kann also das Minimum außerhalb der drei Punkte $\{p, q, r\}$ angenommen werden. Sind sie erfüllt, so kann das Minimum hinwiederum nicht an einem dieser Punkte angenommen werden, da der Wert von $S(x)$ dann abnimmt, wenn wir auf einer Winkelhalbierenden ins Dreieck hineinlaufen, wie man etwa an unserer Beschreibung des Gradienten sehen kann. Folglich muß dann das Minimum bei der kritischen Stelle angenommen werden, die eben dadurch charakterisiert ist, daß die Vektoren $x - p, x - q$ und $x - r$ jeweils einen Winkel von $120^\circ = 2\pi/3$ einschließen.

2.4.6. Um eine hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum oder Maximum zu erhalten, müssen wir wie im Fall einer Veränderlichen die zweiten Ableitungen untersuchen. Am Beispiel der Funktionen $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ bzw. x^2 bzw. $x^2 - y^2$ kann man sehen, was lokal um $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ so alles passieren kann. Wir betrachten nun allgemeiner eine beliebige **quadratische Form** $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{ij}x_i x_j$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ wie in [LA2] 2.2.1.

Definition 2.4.7. Eine quadratische Form $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

positiv definit	genau dann, wenn gilt	$Q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0;$
positiv semidefinit	genau dann, wenn gilt	$Q(x) \geq 0 \quad \forall x;$
negativ definit	genau dann, wenn gilt	$Q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0;$
positiv semidefinit	genau dann, wenn gilt	$Q(x) \leq 0 \quad \forall x;$
indefinit	genau dann, wenn gilt	es gibt $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $Q(x) > 0, Q(y) < 0.$

2.4.8. Wir werden nachher erklären, wie man für eine gegebene quadratische Form entscheiden kann, welche Definitheitseigenschaften sie hat. Zunächst diskutieren wir jedoch, inwieweit diese Eigenschaften für den quadratischen Approximationsterm das lokale Verhalten einer Funktion an einer kritischen Stelle bestimmen.

Satz 2.4.9 (Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen). Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $p \in A$ eine kritische Stelle. Wir bilden zu unserer Funktion die quadratische Form $d_p^2 f$ mit

$$(d_p^2 f)(h) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) h_i h_j$$

die also das Doppelte der quadratischen Terme der Taylorreihe ist.

1. Ist unsere quadratische Form $d_p^2 f$ positiv definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Minimum;
2. Ist unsere quadratische Form $d_p^2 f$ negativ definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Maximum;
3. Ist unsere quadratische Form $d_p^2 f$ indefinit, so hat f bei p weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

2.4.10. Die Notation $d_p^2 f$ wird in 6.5.6 auf Ableitungen beliebigen Grades verallgemeinert. Man beachte, daß der Satz keine Aussage für die semidefiniten Fälle macht, in Verallgemeinerung der Tatsache, daß man auch für Funktionen einer Veränderlichen bei Verschwinden der ersten und zweiten Ableitung an einer vorgegebenen Stelle ohne weitere Informationen noch nichts über Maxima oder Minima aussagen kann.

Beweis. Wir kürzen für das folgende $\frac{1}{2}(d_p^2 f) = Q$ ab. Aus unseren Annahmen folgt mit der Taylor-Formel

$$f(p+h) = f(p) + Q(h) + \varepsilon(h)|h|^2$$

für eine Funktion ε mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Wir behandeln nun als erstes den Fall Q positiv definit. Sei a das Minimum nach [AN1] 7.1.12 von Q auf der Oberfläche des Einheitswürfels, $a = \inf\{Q(h) \mid |h| = 1\}$. Aus unserer Annahme folgt $a > 0$. Offensichtlich gilt $Q(h) \geq a|h|^2$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$. Wegen $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ finden wir $\delta > 0$ derart, daß aus $|h| < \delta$ folgt $|\varepsilon(h)| \leq a/2$. Damit ergibt sich für $|h| < \delta$ aber

$$f(p+h) \geq f(p) + (a/2)|h|^2$$

und f hat in der Tat ein isoliertes lokales Minimum. Ist Q negativ definit, so argumentieren wir entsprechend. Ist Q indefinit, so finden wir zwei Geraden durch Null derart, daß die Einschränkung von Q auf diese Geraden außerhalb des Nullpunkts positiv bzw. negativ ist. Dann muß aber die Restriktion von f auf die erste Gerade ein isoliertes lokales Minimum haben bei p , und auf der zweiten Geraden ein isoliertes lokales Maximum. Folglich hat f bei p weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum. \square

2.4.11. Jeder reellen quadratischen Form $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ ordnen wir die symmetrische Matrix zu mit Einträgen $(a_{ij}+a_{ji})/2$. Nach den Definitionen hat die quadratische Form Q eine gewisse Definitheit im Sinne unserer Definition 2.4.7 genau dann, wenn ihre Matrix die entsprechende Definitheit hat im Sinne der linearen Algebra.

Definition 2.4.12. Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen, die zur quadratischen Form $d_p^2 f$ aus unserem Satz gehört, heißt die **Hesse-Matrix** $H(f)$ von f bei p , in Formeln

$$H(f) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Korollar 2.4.13 (Maxima, Minima und Hesse-Matrix). Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $p \in A$ ein kritischer Punkt.

1. Ist die Hesse-Matrix von f bei p positiv definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Minimum;
2. Ist die Hesse-Matrix von f bei p negativ definit, ein isoliertes lokales Maximum;
3. Ist die Hesse-Matrix von f bei p indefinit, so hat f bei p weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

Beweis. Das ist nur eine Umformulierung von Satz 2.4.9. □

2.4.14. Um die Definitheitseigenschaften einer symmetrischen quadratischen Matrix zu bestimmen, bringt man sie am einfachsten durch Basiswechsel in Diagonalgestalt, wie im Beweis von [LA2] 2.3.11 erklärt. Bei kleineren Matrizen kann auch das Hurwitz-Kriterium [LA2] 2.3.25 ein guter Trick sein: Danach ist eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix positiv definit genau dann, wenn für alle $k < n$ die quadratische Untermatrix, die man erhält durch Wegstreichen der letzten k Spalten und der untersten k Zeilen, eine positive Determinante hat.

Übungen

Übung 2.4.15. Sei V ein normierter Raum, $A \subseteq V$ offen, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in A$ ein Punkt. Besitzt f bei p ein lokales Minimum oder Maximum, so folgt $d_p f = 0$.

Übung 2.4.16. Man zeige in der Situation von Satz 2.4.9: Ist $d_p^2 f$ positiv semidefinit und verschieden von Null, so kann f bei p kein lokales Maximum haben.

3 Umkehrsatz und Anwendungen

3.1 Umkehrsatz für stetig differenzierbare Abbildungen

Definition 3.1.1. Eine im Sinne von 1.5.2 stetig differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen normierter reeller Räume nennt man auch eine \mathcal{C}^1 -**Abbildung**. Der Buchstabe \mathcal{C} steht hier für englisch „continuous“ oder französisch „continu“, zu deutsch stetig, und der obere Index 1 deutet an, daß nur die Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung gefordert wird. Eine bijektive \mathcal{C}^1 -Abbildung, deren Umkehrung auch eine \mathcal{C}^1 -Abbildung ist, heißt ein \mathcal{C}^1 -**Diffeomorphismus**.

Satz 3.1.2 (Umkehrsatz). *Seien X, Y endlichdimensionale reelle Räume, $V \subseteq X$ offen und $f : V \rightarrow Y$ stetig differenzierbar. Ist an einer Stelle $p \in V$ das Differential ein Isomorphismus $d_p f : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$, so induziert f einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung von p in V und einer offenen Umgebung von $f(p)$ in Y .*

3.1.3. Wir zeigen diesen Satz nach einigen Vorbereitungen zu Ende dieses Abschnitts. Die Kettenregel liefert im Übrigen für das Differential des Inversen eines \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus sofort die Formel

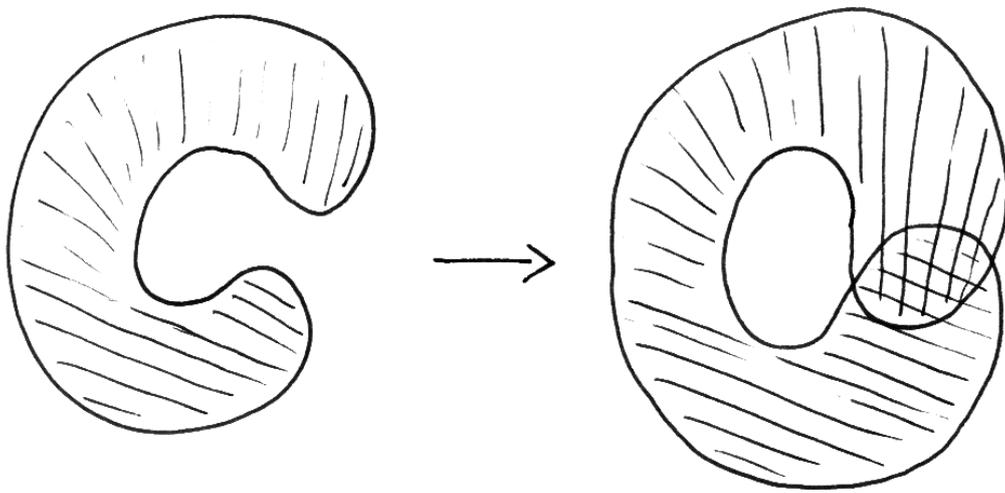
$$d_{f(p)}(f^{-1}) = (d_p f)^{-1}$$

3.1.4. Unser Umkehrsatz gilt auch für unendlichdimensionale normierte Räume X, Y , wenn wir zusätzlich annehmen, daß ihre Richtungsräume vollständig sind. Der Beweis bleibt derselbe, wenn wir zusätzlich voraussetzen, daß das Inverse des Vektorraumisomorphismus $d_p f$ stetig ist. Der Satz vom offenen Bild [AN3] 4.2.19 wird später einmal zeigen, daß unsere zusätzliche Voraussetzung überflüssig da automatisch erfüllt ist, aber das soll vorerst weder bewiesen noch verwendet werden. Die Allgemeinheit unendlichdimensionaler Räume ist durchaus auch von Interesse, eröffnet sie doch einen direkten Zugang zum Studium von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie in 7.5.3 ausgeführt wird. Als erste Prüfung für unseren Umkehrsatz überlege man sich die Gültigkeit der Behauptung im Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$.

Definition 3.1.5. Ein Punkt, der unter einer Abbildung auf sich selbst abgebildet wird, heißt ein **Fixpunkt** besagter Abbildung.

Definition 3.1.6. Eine Abbildung f zwischen zwei metrischen Räumen heißt **Lipschitz-stetig**, wenn es eine Konstante $\lambda > 0$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$



Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{R}^2 mit nirgends verschwindender Ableitung ist notwendig injektiv. Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^2$ in den \mathbb{R}^2 mit überall injektivem Differential ist dahingegen im allgemeinen nur noch „lokal injektiv“ wie im Umkehrsatz genauer erklärt wird.

für alle x, y im Ausgangsraum. Wir sagen dann auch, f sei **lipschitzstetig zur Lipschitz-Konstante** λ . Eine Abbildung f zwischen metrischen Räumen heißt **kontrahierend**, wenn sie lipschitzstetig ist zu einer Lipschitzkonstante $\lambda < 1$, wenn es also $\lambda < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y$$

Beispiel 3.1.7. Natürlich ist jede lipschitzstetige Abbildung stetig. Eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist lipschitzstetig zu einer Lipschitzkonstante λ genau dann, wenn alle ihre Sekantensteigungen betragsmäßig beschränkt sind durch λ . Es ist hoffentlich anschaulich klar, daß im Fall $\lambda < 1$ der Graph einer derart „flachen“ Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} oder auch von einem nichtleeren kompakten reellen Intervall in sich selber an genau einer Stelle die Hauptdiagonale alias den Graphen der Identität kreuzen muß. Der Cosinus ist als Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ keineswegs kontrahierend, das Supremum seiner Sekantensteigungen ist ja Eins. Die Einschränkung des Cosinus zu einer Abbildung $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist jedoch kontrahierend, und den im Banach’schen Fixpunktsatz versteckten Algorithmus zur Bestimmung des Fixpunktes illustriert nebenstehende Abbildung.

Lemma 3.1.8 (Banach’scher Fixpunktsatz). *Jede kontrahierende Selbstabbildung eines vollständigen nichtleeren metrischen Raums besitzt genau einen Fixpunkt.*

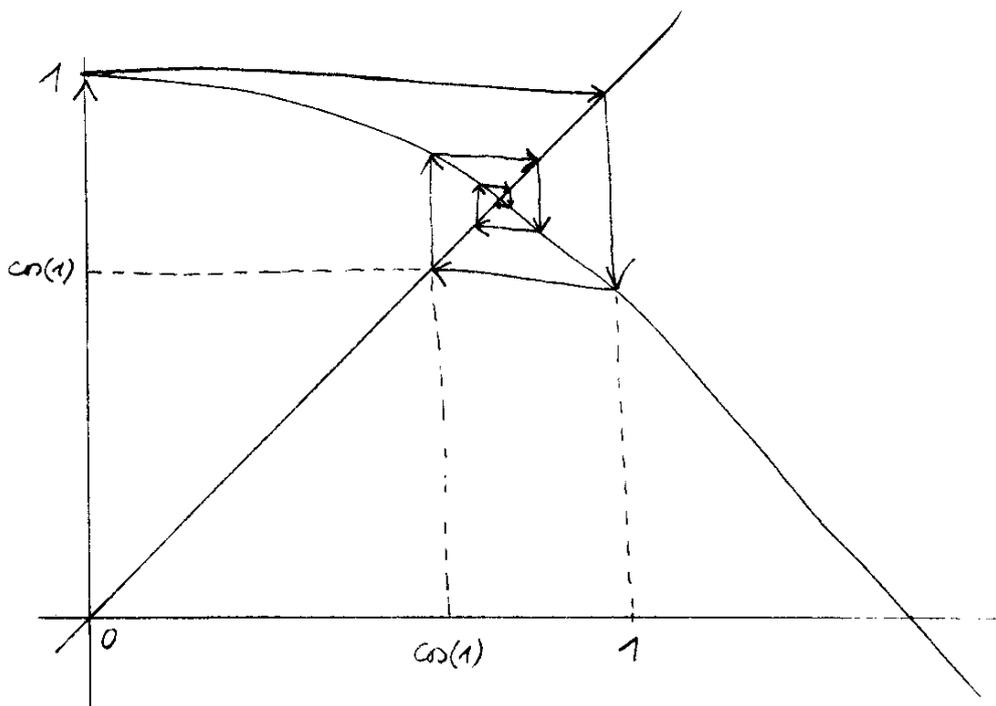
Beweis. Sei $f : M \rightarrow M$ unsere kontrahierende Selbstabbildung und $\lambda < 1$ eine Lipschitzkonstante. Wir wählen $x_0 \in M$ und betrachten die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = f(x_n)$. Mit Induktion folgt $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$, und mit der Dreiecksungleichung folgt für $n \leq m$ bereits

$$d(x_n, x_{m+1}) \leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \dots + \lambda^m) d(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1)$$

Also ist unsere Folge x_n eine Cauchy-Folge und konvergiert aufgrund der Vollständigkeit gegen einen Punkt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \in M$. Da nun eine kontrahierende Abbildung notwendig stetig ist, folgt aus der Vertauschbarkeit nach [AN1] 6.3.9 von Grenzwerten mit dem Anwenden stetiger Abbildungen

$$f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p$$

und wir haben schon mal einen Fixpunkt gefunden. Ist q ein zweiter Fixpunkt, so folgt $d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq \lambda d(p, q)$ für $\lambda < 1$ und damit $d(p, q) = 0$, also $p = q$. \square



Schaltet man den Taschenrechner ein, stellt auf Bogenmaß und drückt wiederholt die Taste „cos“, so wird man feststellen, daß sich die Zahl in der Anzeige nach einer gewissen Zeit überhaupt nicht mehr ändert. Um das zu verstehen beachte man, daß der Cosinus eine kontrahierende Selbstabbildung des Intervalls $[0, 1]$ liefert, da nämlich seine Ableitung dort betragsmäßig durch $\sin(1) \in (0, 1)$ beschränkt ist. Der Beweis des Fixpunktsatzes 3.1.8 zeigt, daß unter diesen Umständen das wiederholte Anwenden stets eine Folge liefert, die gegen den Fixpunkt konvergiert.

Ergänzung 3.1.9. Lassen wir in der Ungleichungskette aus obigem Beweis m nach Unendlich streben, so erhalten wir für den Abstand der n -ten Approximation x_n zum Fixpunkt p zusätzlich die Abschätzung

$$d(x_n, p) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1)$$

Satz 3.1.10 (Umkehrsatz für stetige Abbildungen). *Seien X ein vollständiger normierter reeller Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow X$ eine Abbildung, deren Differenz zur Identität*

$$(f - \text{id}) : U \rightarrow \vec{X}$$

kontrahierend ist, als da heißt lipschitzstetig zu einer Lipschitzkonstante $\lambda < 1$. So ist unsere Abbildung injektiv mit offenem Bild $f(U) \subseteq X$ und ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ ist lipschitzstetig zur Lipschitzkonstante $1/(1 - \lambda)$.

Vorschau 3.1.11. Man kann sogar zeigen, daß jede stetige injektive Abbildung von einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^n offene Teilmengen auf offene Teilmengen abbildet und folglich eine stetige Umkehrabbildung hat. Dieser „Satz über die Invarianz von Gebieten“ gilt jedoch nur im endlichdimensionalen Kontext und sein Beweis benötigt stärkere Hilfsmittel, vergleiche etwa [TS] 3.1.14.

Ergänzung 3.1.12. Der Leser mag zur Übung aus den Argumenten des anschließenden Beweises folgern, daß unter den Annahmen des Umkehrsatzes für stetige Abbildungen 3.1.10 genauer gilt

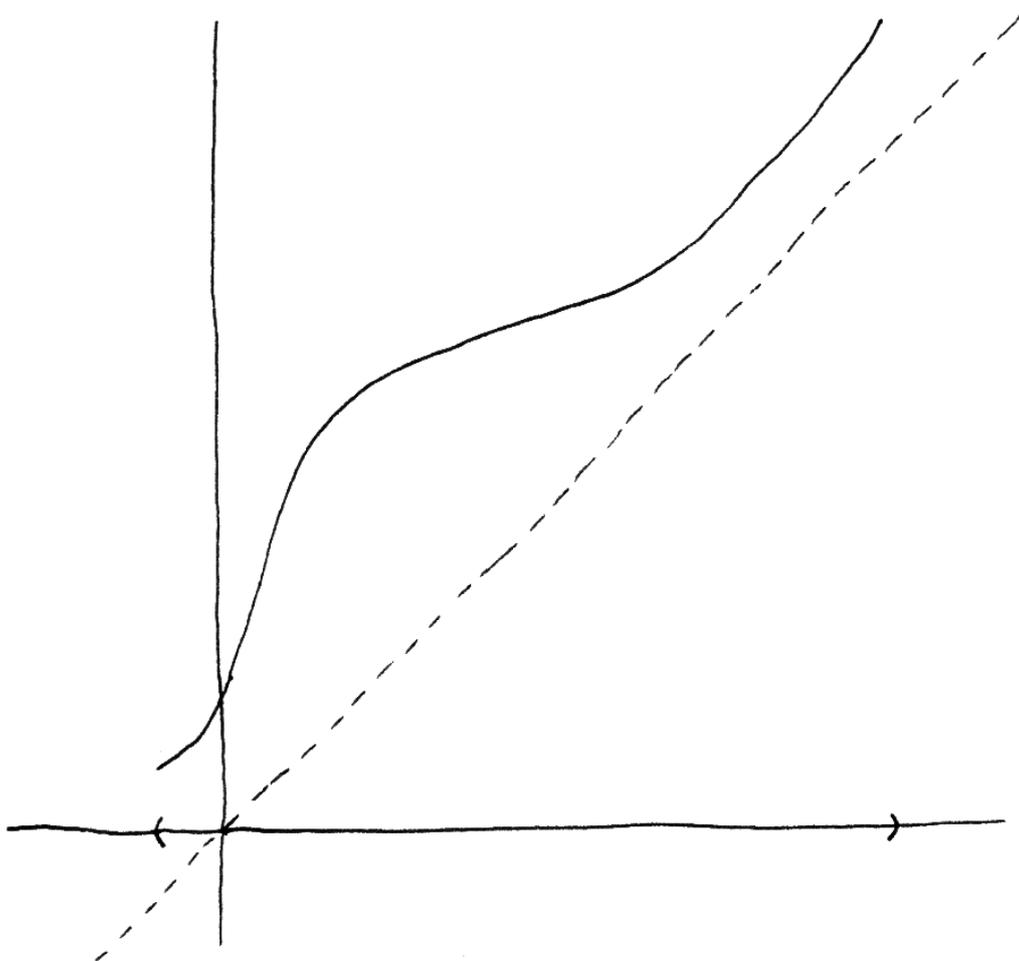
$$B(p; R) \subset U \Rightarrow B(f(p); (1 - \lambda)R) \subset f(U)$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, X sei ein vollständiger normierter Vektorraum. Die Injektivität von f ergibt sich, da aus unserer Annahme $\|(f - \text{id})(x) - (f - \text{id})(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$ sofort folgt $\|y - x\| - \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$ alias

$$\|f(x) - f(y)\| \geq (1 - \lambda)\|x - y\|$$

Durch Einsetzen von $x = f^{-1}(p)$ und $y = f^{-1}(q)$ folgt weiter ohne Schwierigkeiten $\|p - q\| \geq (1 - \lambda)\|f^{-1}(p) - f^{-1}(q)\|$ und damit sogar die Lipschitzstetigkeit der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$. Bis hierher brauchen wir weder U offen noch X vollständig anzunehmen, und unsere Aussagen sind wenig mehr als ein Spezialfall der allgemeinen Resultate für „nicht abstandsverkleinernde“ Abbildungen metrischer Räume aus Übung [AN1] 6.2.27. Der wesentliche Punkt besteht darin, zu zeigen, daß f offenes Bild hat. Dazu betrachten wir für alle $y \in X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} k_y : U &\rightarrow X \\ x &\mapsto x - f(x) + y \end{aligned}$$



Für eine Abbildung f von einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ nach \mathbb{R} ist $(f - \text{id})$ kontrahierend mit Kontraktionsfaktor λ genau dann, wenn alle ihre Sekantensteigungen im Intervall $[1 - \lambda, 1 + \lambda]$ liegen. In diesem Fall sollte es anschaulich klar sein, daß f injektiv und offen ist und daß die Sekantensteigungen der Umkehrfunktion betragsmäßig beschränkt sind durch $(1 - \lambda)^{-1}$: In diesem Fall liegen alle Sekantensteigungen der Umkehrfunktion sogar im Intervall $[(1 + \lambda)^{-1}, (1 - \lambda)^{-1}]$.

Ihre Fixpunkte sind die Urbilder von y unter f und k_y ist unter unseren Annahmen auch kontrahierend. Genauer gilt offensichtlich

$$\|k_y(x) - k_y(z)\| \leq \lambda \|x - z\| \quad \forall x, z \in U$$

Gegeben $p \in U$ finden wir nun einen Radius $R > 0$ derart, daß der „abgeschlossene Ball“

$$A(p; R) := \{x \in X \mid \|p - x\| \leq R\}$$

ganz in U enthalten ist. Für $y \in B(f(p); (1 - \lambda)R)$ bildet dann k_y unseren abgeschlossenen Ball $A(p; R)$ in sich ab, denn für diese y gilt $\|p - k_y(p)\| = \|f(p) - y\| < (1 - \lambda)R$ und damit erhalten wir für $x \in A(p; R)$ sogar

$$\|p - k_y(x)\| \leq \|p - k_y(p)\| + \|k_y(p) - k_y(x)\| < (1 - \lambda)R + \lambda R = R$$

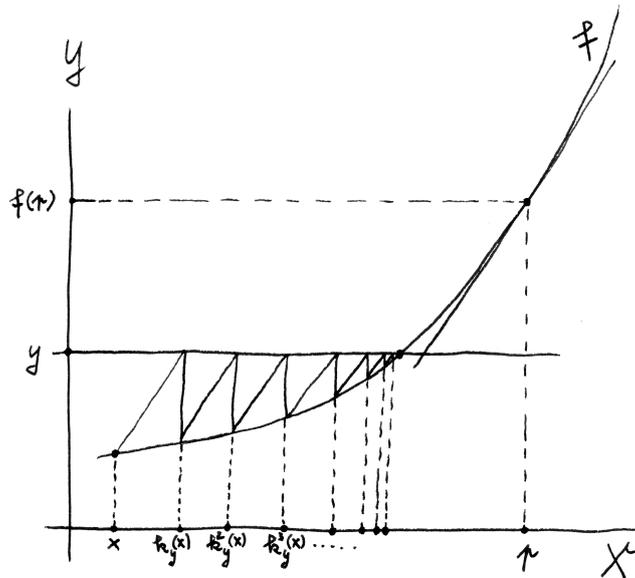
Wenden wir den Banach'schen Fixpunktsatz 3.1.8 auf die Selbstabbildung k_y von $A(p; R)$ an, das nach [AN1] 9.2.2 als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums auch vollständig ist, so finden wir, daß k_y einen Fixpunkt in $A(p; R)$ haben muß. Es folgt $f(A(p; R)) \supset B(f(p); (1 - \lambda)R)$ und das zeigt, daß das Bild von f offen sein muß, in Formeln $f(U) \subseteq X$. \square

Beweis des Umkehrsatzes für C^1 -Abbildungen 3.1.2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien X, Y Vektorräume. Sicher reicht es, wenn wir den Satz für $(d_p f)^{-1} \circ f$ statt für f zeigen. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = Y$ und $d_p f = \text{id}$ annehmen. Es folgt $d_p(f - \text{id}) = 0$. Wählen wir eine Norm auf X und beachten, daß f stetig differenzierbar angenommen war, so folgt leicht die Existenz eines offenen Balls B um p mit $\|d_x(f - \text{id})\| \leq 1/2 \quad \forall x \in B$. Nach 1.3.5 ist dann jedoch $(f - \text{id}) : B \rightarrow X$ kontrahierend mit Lipschitzkonstante $\leq (1/2)$. Mit unserem Umkehrsatz für stetige Abbildungen 3.1.10 folgt, daß f eine Injektion mit offenem Bild $f : B \hookrightarrow X$ liefert, deren Umkehrung lipschitzstetig ist zur Lipschitzkonstante Zwei. Um die Differenzierbarkeit von $f^{-1} : f(B) \rightarrow B$ an der Stelle $f(p)$ zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß gilt $p = 0$ und $f(p) = 0$. Da wir f differenzierbar bei p mit Differential id angenommen hatten, können wir dann schreiben

$$f(x) = x + \|x\|\varepsilon(x)$$

für eine Abbildung $\varepsilon : B \rightarrow X$, die stetig ist bei 0 und die dort den Wert Null annimmt. Setzen wir hier $x = f^{-1}(y)$ ein mit $y \in f(B)$, so ergibt sich

$$y = f^{-1}(y) + \|f^{-1}(y)\| \varepsilon(f^{-1}(y))$$



Das Verfahren aus dem Beweis von 3.1.2 ist auch durchaus von praktischer Bedeutung: Ausgeschrieben besagt es, daß wir eine Lösung x der Gleichung $f(x) = y$ unter geeigneten Annahmen finden können als den Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung

$$k_y : U \rightarrow X$$

$$x \mapsto x + (d_p f)^{-1}(y - f(x))$$

für p mit $f(p)$ hinreichend nah bei y . Es ist dem Newtonverfahren aus [ANI] 2.7.2 eng verwandt, stimmt jedoch nicht damit überein: Beim Newtonverfahren etwa im Fall einer Veränderlichen „gehen wir ja immer auf der Tangente bei $(x, f(x))$ wieder herunter zur x -Achse“, wohingegen wir bei unserer Korrektur k_y aus besagtem Beweis stattdessen auf der Parallelen durch $(x, f(x))$ zur Tangente bei $(p, f(p))$ heruntergehen, wie im Bild dargestellt.

Nun liefert die Lipschitzstetigkeit der Umkehrfunktion für unseren eben gewählten offenen Ball B nach 3.1.10 aber auch für alle $y \in f(B)$ die Abschätzung $\|f^{-1}(y)\| \leq 2\|y\|$. Zusammen ergibt sich dann leicht

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y) - y}{\|y\|} = 0$$

Das aber besagt gerade, daß die Umkehrabbildung f^{-1} bei $y = 0$ differenzierbar ist mit Differential id . Verkleinern wir unsere offene Umgebung von p noch so weit, daß df dort überall invertierbar ist, so folgt die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung an jeder Stelle des Bildes unserer verkleinerten offenen Umgebung. Die Stetigkeit des Differentials der Umkehrabbildung folgt dann leicht aus der Stetigkeit des Differentials der ursprünglichen Abbildung und der Stetigkeit des Invertierens linearer Abbildungen, vergleiche im Fall von Banachräumen etwa 1.4.11. \square

Übungen

Übung 3.1.13. Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Raum hat offenes Bild, wenn ihr Differential an jeder Stelle surjektiv ist. Ist unsere stetig differenzierbare Abbildung zusätzlich injektiv, so liefert sie einen Diffeomorphismus unserer offenen Teilmenge mit ihrem Bild.

3.2 Implizite Funktionen

3.2.1 (**Erläuterung des Satzes in einem Spezialfall**). Gegeben eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ von drei Veränderlichen scheint es mir anschaulich klar, daß ihre Niveauläche N durch einen vorgegebenen Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ salopp gesprochen lokal um p als Graph einer reellwertigen Funktion der ersten beiden Veränderlichen dargestellt werden kann, wenn die Tangentialebene an unsere Niveauläche bei p nicht auf der xy -Ebene alias der Nullstellenmenge der dritten Veränderlichen senkrecht steht, wenn also die partielle Ableitung unserer Funktion f nach der dritten Veränderlichen bei p nicht verschwindet. Etwas formaler sollte es also unter der Bedingung $f_z(p) \neq 0$ offene Teilmengen $C_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $A_1 \subseteq \mathbb{R}$ geben derart, daß gilt $p \in C_1 \times A_1$ und daß $N \cap (C_1 \times A_1)$ der Graph einer Funktion $g : C_1 \rightarrow A_1$ ist. Derartige „implizit definierte Funktionen“ werden wir im folgenden in voller Allgemeinheit studieren, allerdings mit einer anderen Konvention für die Bezeichnung der Variablen: Statt (x, y, z) schreiben wir im folgenden (z_1, z_2, x) und fassen f bei vorgegebenem $b = f(p)$ auf als eine von zwei Parametern z_1, z_2 abhängende Gleichung für x , nämlich die Gleichung

$$f(z_1, z_2, x) = b$$

Unsere implizite Funktion ist in dieser Notation diejenige Funktion $g : C_1 \rightarrow A_1$, die charakterisiert wird durch die Bedingung $f(z_1, z_2, g(z_1, z_2)) = f(p)$. Die Bedingung an die lokale Existenz einer impliziten Funktion lautet in dieser Notation $f_x(p) \neq 0$. Im folgenden betrachten wir allgemeiner nicht nur von Parametern abhängende Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sondern allgemeiner von Parametern abhängende Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Mit x bezeichnen wir dabei Koordinaten des Ausgangsraums und mit y Koordinaten des Raums, in dem unsere Abbildung landet.

3.2.2 (Erläuterung des Satzes in Koordinaten). Gegeben ein Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten, sagen wir mit nur m Gleichungen für $m + n$ Unbekannte, wird man im allgemeinen erwarten, daß sich die Lösungsmenge in der folgenden Weise beschreiben läßt: Wir dürfen n Unbekannte frei wählen und können die übrigen m Unbekannten dann aus unseren m Gleichungen als Funktionen der bereits gewählten n Unbekannten bestimmen. Mir hilft es beim Denken und Reden, diese n frei zu wählenden Unbekannten als „Parameter“ zu bezeichnen und unser System als ein System von m Gleichungen in m Unbekannten x_1, \dots, x_m anzusehen, bei dem unsere m Gleichungen zusätzlich noch von insgesamt n Parametern z_1, \dots, z_n abhängen, in Formeln

$$\begin{aligned} f_1(z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m) &= b_1 \\ &\vdots \\ f_m(z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m) &= b_m \end{aligned}$$

für fest vorgegebene b_1, \dots, b_m . Besteht unser Gleichungssystem etwa aus m linearen Gleichungen in m Unbekannten, wobei diese m Gleichungen noch stetig von den n Parametern z_1, \dots, z_n abhängen, und ist die $(m \times m)$ -Matrix der Koeffizienten für eine feste Wahl der Parameter invertierbar, so wird sie auch für benachbarte Parameter invertierbar bleiben, und wir können den eindeutig bestimmten Lösungsvektor für benachbarte Parameter als Funktion der Parameter schreiben. Im Fall eines nicht notwendig linearen Gleichungssystems gelten entsprechende Aussagen. Eine präzise Formulierung gibt der „Satz über implizite Funktionen“. Mit den „impliziten“ Funktionen sind dabei diejenigen Funktionen gemeint, die die m Unbekannten x_1, \dots, x_m als Funktionen der n Parameter z_1, \dots, z_n ausdrücken: Diese Funktionen sind nämlich a priori nicht explizit etwa als Polynome oder allgemeiner als algebraische Ausdrücke in bekannten Funktionen gegeben, sondern nur implizit als Lösungen eines Gleichungssystems.

3.2.3 (Erläuterung des Satzes im Fall linearer Funktionen). Ich will den Fall, daß unsere Gleichungen linear sind und sogar linear von den Parametern abhängen, auch noch koordinatenfrei und etwas präziser formulieren. Seien dazu ganz allgemein X, Y, Z Vektorräume. Die Elemente von Z spielen im folgenden die Rolle der „Parameter“. Ist $f : Z \times X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung, deren Restriktion auf X bijektiv ist, so gibt es bei festem $b \in Y$ genau eine Abbildung

$g : Z \rightarrow X$ mit $f(z, g(z)) = b$ für alle $z \in Z$. In der Tat ist unsere Gleichung wegen der Linearität von f gleichbedeutend zu $f(0, g(z)) + f(z, 0) = b$, und nach Annahme gibt es eben genau ein $x \in X$ mit $f(0, x) = b - f(z, 0)$. Bezeichnet in Formeln in_X die lineare Einbettung $x \mapsto (0, x)$ von X nach $Z \times X$, so haben wir $g(z) = (f \circ \text{in}_X)^{-1}(b - f(z, 0))$. Notieren wir auch noch in_Z die lineare Einbettung $z \mapsto (z, 0)$ von Z nach $Z \times X$ und nehmen der Einfachheit halber $b = 0$ an, so erhalten wir

$$g = -(f \circ \text{in}_X)^{-1} \circ (f \circ \text{in}_Z)$$

Der Satz über implizite Funktionen besagt, daß ähnliche Aussagen „lokal“ auch allgemeiner für beliebige stetig differenzierbare Abbildungen gelten.

Satz 3.2.4 (über implizite Funktionen). *Seien Z, X, Y endlichdimensionale reelle Räume, $C \subseteq Z$ sowie $A \subseteq X$ offen und $f : C \times A \rightarrow Y$ stetig differenzierbar. Sei eine Stelle $(c, a) \in C \times A$ gegeben derart, daß das Differential $d_{(c,a)}f$ von f an dieser Stelle eine Bijektion*

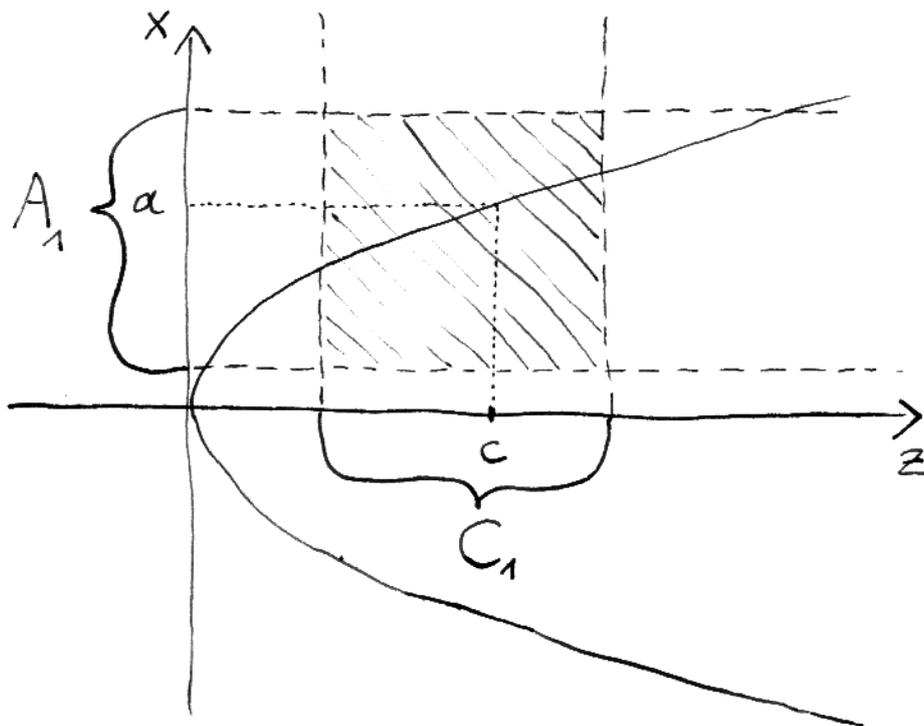
$$(d_{(c,a)}f) \circ \text{in}_{\vec{X}} : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$$

induziert. So existieren Paare (C_1, A_1) bestehend aus einer offenen Umgebung $C_1 \subseteq C$ von c und einer offenen Umgebung $A_1 \subseteq A$ von a derart, daß die Niveaumenge $\{(z, x) \in C_1 \times A_1 \mid f(z, x) = f(c, a)\}$ der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $g : C_1 \rightarrow A_1$ ist. Jede derart durch die Bedingung $f(z, g(z)) = f(c, a)$ erklärte **implizite Funktion** g hat dann bei $z \in C_1$ das Differential

$$d_z g = -(d_{(z, g(z))}f \circ \text{in}_{\vec{X}})^{-1} \circ (d_{(z, g(z))}f \circ \text{in}_{\vec{Z}})$$

3.2.5 (Eindeutigkeit impliziter Funktionen). Es kann durchaus verschiedene Paare (C_1, A_1) und (C'_1, A'_1) geben, für die die Bedingungen des Satzes erfüllt sind. Wenn wir C_1 nicht wegzusammenhängend wählen, kann die implizite Funktion auch durchaus von der Wahl von A_1 abhängen: Zwei Paare (C_1, A_1) und (C_1, A'_1) mit demselben C_1 können also durchaus verschiedene implizite Funktionen $C_1 \rightarrow A$ liefern, wie nebenstehendes Bild illustriert. Wir werden jedoch zusätzlich zeigen, daß man im Satz eine offene Umgebung $C_1 \subseteq C$ von c sogar so wählen kann, daß es (1) für jede darin enthaltene wegzusammenhängende offene Umgebung U von c genau eine stetige Funktion $g : U \rightarrow A$ gibt mit $g(c) = a$ und $f(z, g(z)) = f(c, a)$ für alle $z \in U$ und daß (2) die so erklärten Funktionen $g : U \rightarrow A$ stetig differenzierbar sind.

3.2.6. Die Kettenregel zeigt, daß die lineare Abbildung $(d_{(c,a)}f) \circ \text{in}_{\vec{X}}$ auch als das Differential bei a der Abbildung $x \mapsto f(c, x)$ verstanden werden kann. Wenn also dies Differential invertierbar ist für einen Parameter c , so kann „jedes kleine Verwackeln des Parameters c zu z eindeutig durch ein kleines Verwackeln von a



Der Schnitt der Niveauläche $\{(z, x) \mid f(z, x) = x^2 - z = 0\}$ mit einem geeigneten Rechteck $C_1 \times A_1$ ist der Graph einer Funktion, eben der entsprechenden impliziten Funktion, hier der Funktion $g(z) = \sqrt{z}$. Dieses Beispiel zeigt auch, daß im Fall von nicht zusammenhängendem C_1 die implizite Funktion durchaus von der Wahl von A_1 abhängen kann: Zwei Paare (C_1, A_1) und (C_1, A'_1) mit demselben C_1 können verschiedene implizite Funktionen $C_1 \rightarrow A$ liefern! Die Tangente an den Graphen unserer impliziten Funktion g schließlich steht in (c, a) senkrecht auf dem Gradienten $(f_z(c, a), f_x(c, a))$, so daß auch die Formel für die Tangentensteigung $g'(c) = -f_z(c, a)/f_x(c, a)$ anschaulich unmittelbar einleuchtet.

zu x in dem Sinne ausgeglichen werden, daß unter diesem simultanen Wackeln der Wert von f konstant bleibt“.

3.2.7. Wieder gilt der Satz mit demselben Beweis auch für vollständige normierte Räume, wenn man zusätzlich zur Bijektivität auch noch die Stetigkeit der inversen Abbildung von $(d_{(c,a)}f) \circ \text{in}_{\vec{X}} : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$ fordert und „stetig differenzierbar“ im Sinne von 1.5.2 interpretiert. Diese Allgemeinheit wird sich bei der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 7.5.3 als nützlich erweisen. Der Satz vom offenen Bild [AN3] 4.2.19 wird später einmal zeigen, daß unsere zusätzliche Voraussetzung überflüssig ist, da sie nämlich automatisch erfüllt ist, aber das soll vorerst weder bewiesen noch verwendet werden.

Beispiel 3.2.8. Wir betrachten $f(z, x) = x^3 + zx^2 - 3$ als eine Schar von Polynomen in x mit Parameter z . Für den Parameter $z = 2$ ist $x = 1$ eine Nullstelle, $f(2, 1) = 0$. Wir wollen nun untersuchen, wie diese Nullstelle „mit dem Parameter z wackelt“, und wenden dazu den Satz über implizite Funktionen an. Die partielle Ableitung nach x ist $f_x = 3x^2 + 2zx$, insbesondere haben wir $f_x(2, 1) = 7 \neq 0$ und nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es folglich $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ derart, daß für alle $z \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ das Polynom $f(z, \cdot)$ genau eine Nullstelle $x = g(z) \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ hat. Diese Funktion g ist zwar schwer explizit anzugeben, aber der Satz sagt uns, daß sie in einer Umgebung von $z = 2$ differenzierbar ist, und ihre Ableitung bei $z = 2$ kennen wir auch: Wir haben nämlich $f_z = x^2$, $f_z(2, 1) = 1$ und folglich

$$g'(2) = -f_x(2, 1)^{-1} f_z(2, 1) = -\frac{1}{7}$$

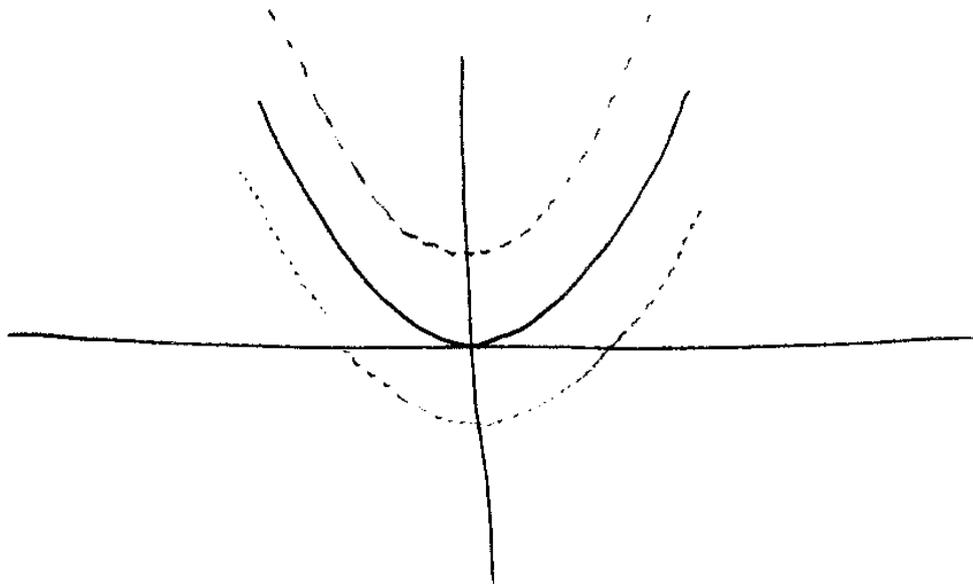
Betrachten wir stattdessen $h(z, x) = x^2 - z$, so ist für $z = 0$ natürlich $x = 0$ eine Nullstelle, aber Entsprechendes gilt keineswegs: Schieben wir z etwas ins Negative, so hat $h(z, \cdot)$ überhaupt keine reelle Nullstelle mehr, schieben wir z dahingegen etwas ins Positive, so werden aus unserer Nullstelle plötzlich zwei Nullstellen, wie das nebenstehende Bild illustriert. Das zeigt, daß die Bedingung an die Ableitung auch wirklich notwendig ist.

3.2.9 (**Der Satz über implizite Funktionen in Koordinaten**). Ich will den Satz über implizite Funktionen auch noch in Koordinaten angeben. Seien dazu $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : C \times A \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und z_1, \dots, z_n unsere „Parameter“ sowie x_1, \dots, x_m unsere „Unbekannten“. So gilt:

1. Ist die Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^m$$

nicht ausgeartet an einer Stelle $(c, a) \in C \times A$, so existieren Tripel (C_1, A_1, g) bestehend aus einer offenen Umgebung $C_1 \subseteq C$ von c , einer offenen Umgebung $A_1 \subseteq A$ von a und einer stetig differenzierbaren Funktion $g : C_1 \rightarrow A_1$



Die Graphen von $h(0, \cdot)$, $h(-1/2, \cdot)$ und $h(1/2, \cdot)$ für die Funktion $h(z, x) = x^2 - z$ vom Ende des Beispiels 3.2.8. Hier haben wir anders als sonst x in horizontaler Richtung aufgetragen und denken an Nullstellen der veränderten Gleichung statt an Schnitte der Niveaulinie $h(z, x) = x^2 - z = 0$ mit verschiedenen horizontalen Geraden. Dies Bild interpretiert also diesselbe Formeln wie das vorhergehende Bild auf Seite 57, nur eben in der alternativen Anschauung der „Abhängigkeit der Nullstellen von den Parametern“ und in einem entsprechend an der Hauptdiagonale gespiegeltem Koordinatensystem.

derart, daß an jeder Stelle $z \in C_1$ der Wert $g(z)$ das einzige $x \in A_1$ ist mit $f(z, x) = f(c, a)$.

2. Die partiellen Ableitungen der Komponenten von g werden dann gegeben durch die Matrix-Gleichung

$$\left(\frac{\partial g_j}{\partial z_k} \Big|_z \right) = - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{(z, g(z))} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_k} \Big|_{(z, g(z))} \right)$$

In dieser Sprache ausgedrückt kann also ein System von m Gleichungen in $m+n$ Unbekannten im allgemeinen „lokal“ in der Weise aufgelöst werden, daß wir n der Unbekannten frei wählen und die restlichen m Unbekannten dadurch dann im Wesentlichen eindeutig festgelegt werden.

Beispiel 3.2.10. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z, x) = z^2 + x^2$ und $(c, a) = (0, 1)$. Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht verschwindet bei $(0, 1)$, sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Ein mögliches Tripel bestünde aus $C_1 = (-1, 1)$, $A_1 = (0, \infty)$ und $g(z) = \sqrt{1 - z^2}$. Unsere implizite Funktion sucht sich in diesem Fall für jedes $z \in (-1, 1)$ dasjenige positive $x = g(z)$ aus, für das der Punkt (z, x) auf dem Einheitskreis liegt. Die Ableitung dieser impliziten Funktion ergibt sich mit unserer Regel richtig zu

$$\frac{\partial g}{\partial z} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = - \frac{2z}{2x} = - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Beispiel 3.2.11. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z, w, x) = z^2 + w^2 + x^2$ und $(c, a) = (0, 0, 1)$. Um Indizes zu vermeiden, haben wir hier die Parameter mit (z, w) statt mit (z_1, z_2) bezeichnet. Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht verschwindet bei $(0, 0, 1)$, sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Ein mögliches Tripel bestünde aus C_1 der offenen Einheitskreisscheibe in der zw -Ebene, $A_1 = (0, \infty)$ und $g(z, w) = \sqrt{1 - z^2 - w^2}$. Anschaulich wählt unsere implizite Funktion für jedes Paar (z, w) aus der offenen Einheitskreisscheibe das positive x aus, für das der Punkt (z, w, x) auf der Einheitssphäre liegt.

Beispiel 3.2.12. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \zeta \xi + \zeta v - \xi u^2 &= 1 \\ \zeta u^3 + 3\zeta u - wv &= 3 \end{aligned}$$

Es ist etwa erfüllt für $(\zeta, \xi, u, v) = (1, 1, 1, 1)$. Wenn man nun ζ und ξ ein bißchen ändert, kann man dann stets u und v so anpassen, daß unser Gleichungssystem erfüllt bleibt? Der Satz über implizite Funktionen liefert genau diese Aussage, man muß dazu nur prüfen, daß die (2×2) -Matrix der partiellen Ableitungen der

beiden Gleichungen unseres Systems nach u und v bei $(1, 1, 1, 1)$ invertierbar ist. Genauer erhält man hier die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit implizite Funktionen $u(\zeta, \xi)$ und $v(\zeta, \xi)$, die in einer Umgebung von $(1, 1)$ definiert sind und die dort jeweils den Wert 1 annehmen. Man beachte jedoch die Verschiebung der Notation: Unser (ζ, ξ) hier entspricht im Satz über implizite Funktionen dem z und unser (u, v) hier hieß dort x . Wie finden wir nun die partiellen Ableitungen von u und v bei $(\zeta, \xi) = (1, 1)$? Sicher können wir unsere abstrakte Formel anwenden, aber dabei verheddert man sich leicht. Ich ziehe es vor, den Beweis im Spezialfall zu wiederholen und die definierenden Gleichungen partiell abzuleiten. Wir erhalten so für die partiellen Ableitungen nach ζ etwa

$$\begin{aligned} \xi + v + \zeta v_\zeta - 2\xi u u_\zeta &= 0 \\ u^3 + 3\zeta u^2 u_\zeta + 3u + 3\zeta u_\zeta - u_\zeta v - u v_\zeta &= 0 \end{aligned}$$

und nach Auswerten bei $(\zeta, \xi) = (1, 1)$ ergibt sich für die Werte unserer partiellen Ableitungen dort das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 + v_\zeta - 2u_\zeta &= 0 \\ 4 + 5u_\zeta - v_\zeta &= 0 \end{aligned}$$

dessen Lösung keine Probleme mehr aufwerfen sollte.

Beweis des Satzes 3.2.4 über implizite Funktionen. Wir setzen $f(c, a) = b$ und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F : C \times A &\rightarrow Z \times Y \\ (z, x) &\mapsto (z, f(z, x)) \end{aligned}$$

Ihr Differential bei (c, a) hat im Sinne von [LA1] 2.4.12 Block-Gestalt

$$\begin{pmatrix} \text{id}_{\bar{z}} & 0 \\ d_{(c,a)}f \circ \text{in}_{\bar{z}} & d_{(c,a)}f \circ \text{in}_{\bar{x}} \end{pmatrix}$$

und ist insbesondere invertierbar. Nach dem Umkehrsatz gibt es also offene Umgebungen $C_1 \subset C$ von c und $A_1 \subset A$ von a und $P_1 \subset Z \times Y$ von $(c, b) = F(c, a)$ derart, daß F einen C^1 -Diffeomorphismus

$$F : C_1 \times A_1 \xrightarrow{\sim} P_1$$

liefert. Die Umkehrabbildung $G = F^{-1} : P_1 \xrightarrow{\sim} C_1 \times A_1$ hat dann offensichtlich die Gestalt $(z, y) \mapsto (z, \tilde{g}(z, y))$ für geeignetes $\tilde{g} : P_1 \rightarrow X$. Nun ist $f(z, x) = b$ gleichbedeutend zu $F(z, x) = (z, b)$, und unter den Zusatzannahmen $(z, x) \in C_1 \times A_1$ und $(z, b) \in P_1$ ist das weiter gleichbedeutend zu $(z, x) = G(z, b)$ alias $x = \tilde{g}(z, b)$. Verkleinern wir falls nötig C_1 noch weiter derart, daß zusätzlich gilt $C_1 \times \{b\} \subset P_1$, dann gibt es zu jedem $z \in C_1$ genau ein $x = g(z) \in A_1$ mit $f(z, x) = b$, nämlich $g(z) = \tilde{g}(z, b)$. Die so definierte Funktion g ist stetig differenzierbar nach dem Umkehrsatz. Ihre Ableitung bei $z \in C_1$ ergibt sich leicht, wenn man die Definitionsgleichung $f(z, g(z)) = b$ als Abbildung $C_1 \rightarrow Y$ auffaßt und auf beiden Seiten das Differential an der Stelle z nimmt: Mit der Kettenregel folgt nämlich

$$d_{(z, g(z))}f \circ \begin{pmatrix} \text{id} \\ d_z g \end{pmatrix} = 0$$

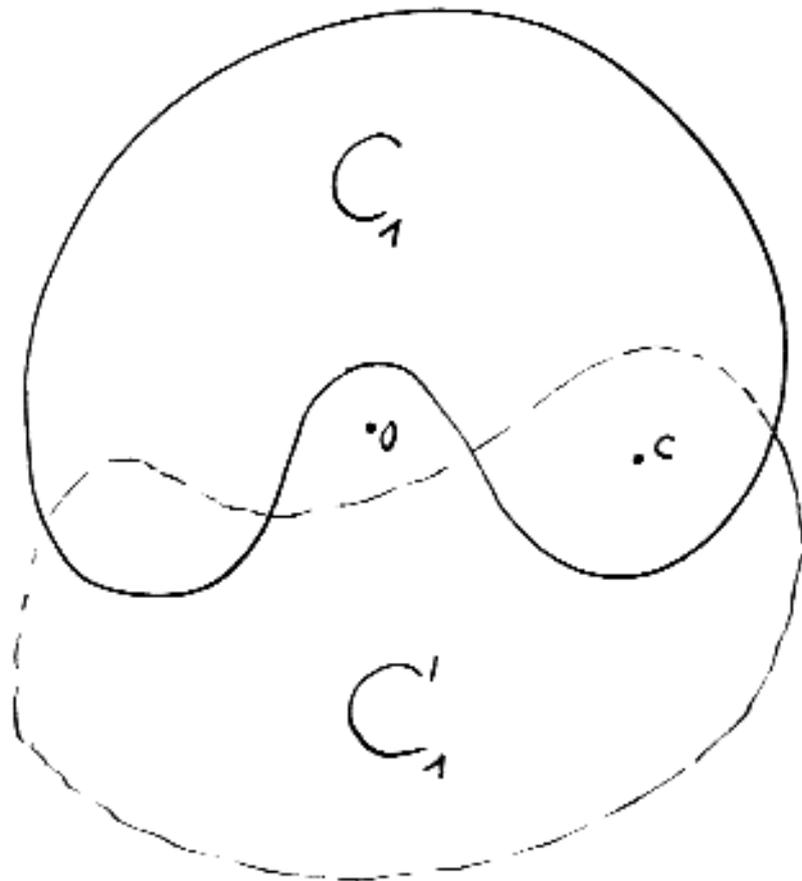
Zerlegen wir darin $d_{(z, g(z))}f = (d_{(z, g(z))}f \circ \text{in}_{\vec{z}}, d_{(z, g(z))}f \circ \text{in}_{\vec{x}})$ als Zeilen-Blockmatrix im Sinne von [LA1] 2.4.12, so ergibt sich sofort die behauptete Formel für das Differential. \square

Ergänzung 3.2.13. Wir zeigen noch unsere Behauptung 3.2.5 und zeigen genauer, daß für C_1 wie im vorhergehenden Beweis und $U \subseteq C_1$ eine wegzusammenhängende Umgebung von c die Einschränkung der bisher betrachteten Funktion $g : C_1 \rightarrow A_1$ auch die einzige stetige Funktion $\hat{g} : U \rightarrow A$ ist mit $\hat{g}(c) = a$ und $f(z, \hat{g}(z)) = b$ für alle $z \in U$. Sei in der Tat solch ein \hat{g} gegeben. Die Menge der Punkte $z \in U$ mit $\hat{g}(z) = g(z)$ ist nicht leer, da sie c enthält. Sie ist abgeschlossen in U wegen der Stetigkeit beider Funktionen. Wenn wir auch noch ihre Offenheit zeigen, sind wir fertig mit 5.5.18. Wegen der Stetigkeit nimmt \hat{g} in einer Umgebung von c nur Werte aus A_1 an, in dieser Umgebung von c muß also \hat{g} mit g übereinstimmen. Dieselbe Argumentation greift nun aber für jeden Punkt $z \in U$ mit $\hat{g}(z) = g(z)$, denn alles bereits Gesagte gilt genauso für $(z, g(z))$ wie für (c, a) .

Übungen

Übung 3.2.14. Gegeben eine einfache Nullstelle eines reellen oder komplexen Polynoms wird bei hinreichend kleinem Wackeln an den Koeffizienten des Polynoms sich auch unsere Nullstelle nur ein bißchen bewegen und differenzierbar, im komplexen Fall sogar komplex differenzierbar von besagten Koeffizienten abhängen. Man formuliere diese Aussage präzise und beweise sie.

Übung 3.2.15. Man zeige, daß es keine stetig differenzierbare bijektive Abbildung $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ geben kann.



Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_3 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Komplement der z -Achse gegeben durch $(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z) \mapsto \sin(z - \vartheta)$ für $r > 0$ und ϑ beliebig hat als Niveaumenge zum Niveau Null eine Wendeltreppe, die sich um die z -Achse $\langle e_3 \rangle$ windet. Eingezeichnet sind zusammenhängende offene Umgebungen C_1 und C'_1 eines Punkte $c \in \mathbb{R}^2$, die sich durchaus zu „erlaubten“ Paaren (C_1, A_1) und (C'_1, A'_1) ergänzen lassen, bei denen die zugehörigen impliziten Funktionen jedoch auf $C_1 \cap C'_1$ nicht übereinstimmen.

3.3 Untermannigfaltigkeiten reeller Räume

3.3.1. Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir Maxima und Minima von Funktionen auf einer Kugel oder einem Ellipsoid oder eines Torus alias Schwimmring im \mathbb{R}^3 untersuchen. Später werden wir darüber hinaus Formeln für die Oberfläche derartiger Gebilde herleiten und sogar Funktionen über derartige Gebilde integrieren. Um alle diese Formeln in angemessener Allgemeinheit diskutieren zu können, führen wir hier den Begriff der Untermannigfaltigkeit einer endlichdimensionalen reellen Raums ein und erklären, wie man mit diesem Begriff umgeht. Anschließend diskutieren wir dann Extremwertaufgaben.

Definition 3.3.2. Sei X ein reeller affiner Raum endlicher Dimension und $k \geq 0$ eine natürliche Zahl. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt eine **k -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit von X** oder eine **in X eingebettete Mannigfaltigkeit** oder kurz eine **Mannigfaltigkeit**, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ ein Paar (U, g) gibt aus einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von p und einem C^1 -Diffeomorphismus $g : U \xrightarrow{\sim} g(U)$ von U auf eine offene Teilmenge $g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, daß gilt:

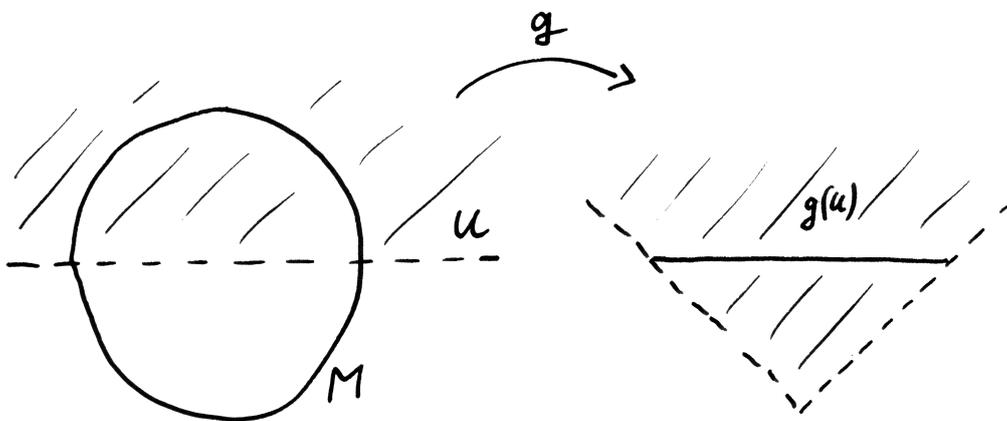
$$g(U \cap M) = \{z \in g(U) \mid z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}$$

Ein derartiges Paar (U, g) heißt eine **Plättung** der Untermannigfaltigkeit M um p .

3.3.3. Natürlich gilt in der vorstehenden Definition notwendig $n = \dim_{\mathbb{R}} X$. Unsere Gleichung hätte ich auch kürzer $g(U \cap M) = g(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0^{n-k})$ schreiben können, mit 0^{n-k} als Abkürzung für die einelementige Menge $\{0\} \subset \mathbb{R}^{n-k}$. In vergleichbaren Situationen werde ich von nun an diese abgekürzte Darstellung bevorzugen. Im Fall $k = n = \dim_{\mathbb{R}} X$ ist insbesondere eine Untermannigfaltigkeit dasselbe wie eine offene Teilmenge.

3.3.4 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Autoren fordern von Mannigfaltigkeiten zusätzlich, daß sie zusammenhängend sein sollen. Andere Autoren, zum Beispiel Warner [War83], verwenden den Begriff einer Untermannigfaltigkeit auch in einer allgemeineren Bedeutung: Unsere Untermannigfaltigkeiten im Sinne der vorhergehenden Definition würde er als „eingebettete Untermannigfaltigkeiten“ bezeichnen. Später werden wir auch Mannigfaltigkeiten „mit Rand“ kennenlernen. Zur Unterscheidung nennt man manchmal die hier eingeführten Mannigfaltigkeiten ausführlicher **Mannigfaltigkeiten ohne Rand**.

3.3.5. Sei X ein reeller affiner Raum endlicher Dimension. Einen C^1 -Diffeomorphismus g von einer offenen Umgebung U eines Punktes $p \in X$ auf eine offene Teilmenge $g(U)$ eines \mathbb{R}^n nennt man auch ein **lokales Koordinatensystem** um den Punkt p und die Komponenten g_1, \dots, g_n von g heißen die **Koordinaten** $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ unseres Koordinatensystems. Ein typisches Beispiel sind etwa die Polarkoordinaten auf offenen Teilmengen von $X = \mathbb{R}^2$, bei denen man statt (g_1, g_2)



Der Einheitskreis ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit der Ebene $M \subset \mathbb{R}^2$. Eine Plättung um beliebige Punkte aus der oberen Halbebene U wird etwa gegeben durch $g(x, y) = (x, \sqrt{x^2 + y^2} - 1)$. In diesem Fall besteht $g(U)$ aus dem schraffierten Bereich, also aus allen Punkten oberhalb des Graphen der Funktion $x \mapsto |x| - 1$.

meist (r, ϑ) schreibt. In dieser Terminologie kann etwa eine Untermannigfaltigkeit von X der Dimension Eins beschrieben werden als eine Teilmenge $M \subset X$ derart, daß es um jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem von X gibt, unter dem M einer Koordinatenachse entspricht.

Beispiele 3.3.6. Jeder affine Teilraum $Y \subset X$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim Y$. Der Graph jeder \mathcal{C}^1 -Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , als Plättung mag man $g : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $g(x, y, z) = (x, y, z - f(x, y))$ nehmen. Der Einheitskreis ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 . Eine Untermannigfaltigkeit der Dimension Null ist dasselbe wie eine diskrete Teilmenge im Sinne von 5.5.6.

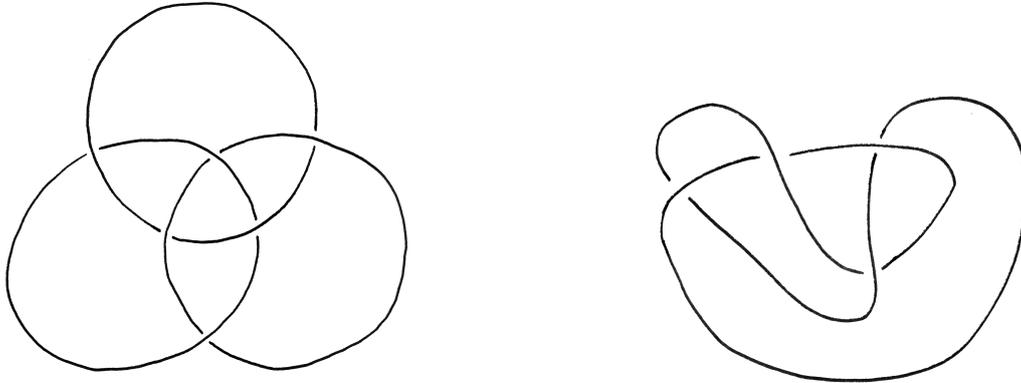
Ergänzung 3.3.7. Eine kompakte Untermannigfaltigkeit der Dimension Eins in \mathbb{R}^3 heißt eine **Verschlingung** und, wenn sie zusätzlich wegzusammenhängend ist, ein **Knoten**. Zwei Verschlingungen heißen **isotop** genau dann, wenn sie durch einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit überall positiver Funktionaldeterminante ineinander überführt werden können. Die „Knotentheorie“ versucht, Kriterien dafür zu entwickeln, wann zwei gegebene Verschlingungen isotop sind.

3.3.8. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Spätestens mit 3.4.7 wird klar, daß für $k, l \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $M \subset X$ nur dann sowohl eine k -dimensionale als auch eine l -dimensionale Untermannigfaltigkeit sein kann, wenn entweder gilt $k = l$ oder aber $M = \emptyset$. Jede nichtleere Untermannigfaltigkeit hat also eine wohlbestimmte Dimension.

3.3.9. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Eine Untermannigfaltigkeit der Dimension Eins von X heißt eine **Kurve** in X und eine Untermannigfaltigkeit der Dimension Zwei eine **Fläche**. Gegeben $k \leq \dim X$ versteht man unter einer Untermannigfaltigkeit der **Kodimension** k eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $(\dim X) - k$. Eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension Eins heißt eine **Hyperfläche**. Jede offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit ist selbst eine Untermannigfaltigkeit derselben Dimension.

Proposition 3.3.10 (Untermannigfaltigkeiten als Urbilder). *Seien X und Y endlichdimensionale reelle Räume, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit überall surjektivem Differential. So ist für alle $c \in Y$ das Urbild $M = f^{-1}(c)$ eine Untermannigfaltigkeit von X der Dimension $\dim X - \dim Y$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ annehmen und haben dann $f = (f_1, \dots, f_m)$. Für jedes $p \in M$ finden wir sicher lineare Abbildungen $l_{m+1}, \dots, l_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß das Differential von $g = (f_1, \dots, f_m, l_{m+1}, \dots, l_n)$ in p bijektiv ist. Nach dem Umkehrsatz 3.1.2 gibt es dann $U' \subseteq U$ mit $p \in U'$ derart, daß g einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $U' \xrightarrow{\sim} g(U') \subseteq$



Die links abgebildete Verschlingung ist besonders bemerkenswert dadurch, daß je zwei der Ringe getrennt werden könnten, wenn eben der Dritte nicht wäre. Sie heißt die Verschlingung der **Borromäischen Ringe** nach einer italienischen Familie, die diese Ringe in ihrem Wappen führte. Rechts ein Beispiel für einen Knoten.

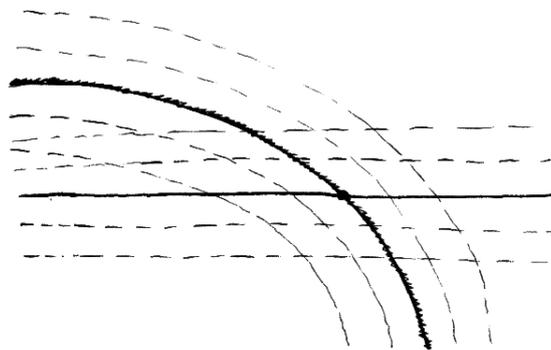


Illustration zum Beweis des Satzes 3.3.10 über Mannigfaltigkeiten als Urbilder. Dick gezackelt eine Niveaulinie einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Liegt p auf dieser Niveaulinie und ist $d_p f$ surjektiv alias nicht null, so läßt sich f durch eine lineare Abbildung, im Bild die Abbildung y , zu einem lokalen Koordinatensystem ergänzen, und der Umkehrsatz 3.1.2 liefert dann die gesuchte lokale Plättung unserer Niveaulinie.

\mathbb{R}^n induziert, und nach Konstruktion gilt $g(U' \cap M) = g(U') \cap (\{c\} \times \mathbb{R}^{n-m})$.
Damit erhält man dann leicht die gesuchte Plättung von M um p . \square

Beispiel 3.3.11. Die **Sphären** $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ sind n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^{n+1} , denn das Differential von $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ verschwindet nirgends auf der Sphäre S^n .

Übungen

Übung 3.3.12 (Jede Untermannigfaltigkeit ist lokal ein Graph). Gegeben eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ derart, daß $M \cap U$ unter der entsprechenden Permutation der Koordinaten dem Graph einer \mathcal{C}^1 -Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ entspricht, die auf einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$ definiert ist. Zum Beispiel ist jede eindimensionale Untermannigfaltigkeit der Ebene \mathbb{R}^2 lokal entweder Graph einer reellwertigen \mathcal{C}^1 -Funktion der x -Koordinate oder der an der Hauptdiagonalen gespiegelte Graph einer reellwertigen \mathcal{C}^1 -Funktion der y -Koordinate.

Übung 3.3.13. In der Situation von 3.3.10 ist allgemeiner auch für jede Untermannigfaltigkeit $C \subset Y$ ihr Urbild $M = f^{-1}(C)$ eine Untermannigfaltigkeit von X der Dimension $\dim X - \dim Y + \dim C$.

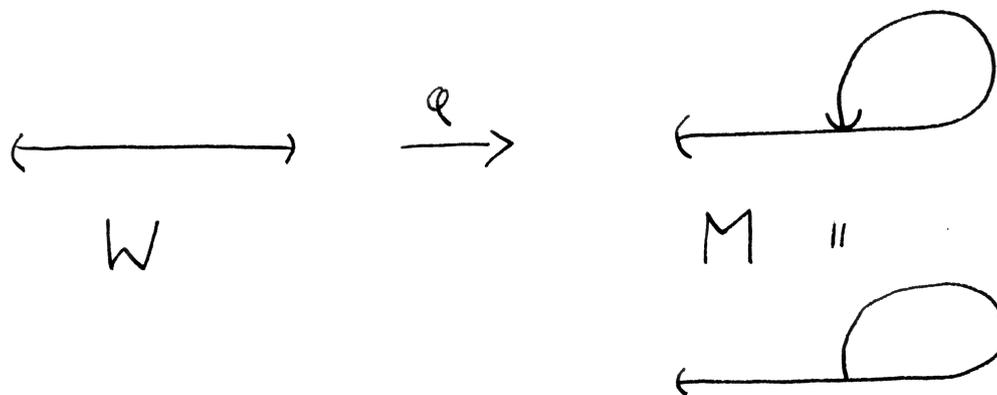
Übung 3.3.14. Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform auf V und $c \neq 0$ eine reelle Konstante, so ist $\{v \in V \mid \langle v, v \rangle = c\}$ eine Hyperfläche in V . Hinweis: Man erinnere das Differential bilinearer Abbildungen 1.4.5.

Übung 3.3.15. Sind X, Y endlichdimensionale reelle Räume und $M \subset X$ sowie $N \subset Y$ Untermannigfaltigkeiten, so ist auch $M \times N \subset X \times Y$ eine Untermannigfaltigkeit.

3.4 Karten und Koordinatensysteme

Proposition 3.4.1 (Untermannigfaltigkeiten als Bilder). Seien ein endlichdimensionaler reeller Raum X der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = n$ und $k \geq 0$ gegeben. Eine Teilmenge $M \subset X$ ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : W \rightarrow X$ von einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^k$ nach X gibt derart, daß gilt:

1. $\varphi(W)$ ist enthalten in M und offen in M und enthält p ;
2. $d_x \varphi$ ist injektiv für alle $x \in W$;
3. φ ist injektiv und $\varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow W$ ist stetig.



Ein Beispiel einer Teilmenge M der Papierebene, die keine Untermannigfaltigkeit ist und für die die Bedingung aus 3.4.1 erfüllt wäre, wenn wir von unseren Karten nicht auch noch fordern würden, daß ihre Umkehrabbildungen stetig sind.

3.4.2. Ein Paar (W, φ) wie in der Proposition nenne ich eine **Karte** der Untermannigfaltigkeit M . Eine Karte der Stadt Freiburg kann als eine Variante dieses Begriffs verstanden werden, bei der W ein Rechteck aus Papier ist und das Bild einiger Punkte des Papiers unter der Abbildung φ in das wirkliche Freiburg durch bildliche Symbole angezeigt wird.

3.4.3. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt ein **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv ist und ihre Umkehrabbildung zusätzlich auch noch stetig ist. In dieser Terminologie fordert Bedingung 3 oben, daß φ einen Homöomorphismus $\varphi : W \xrightarrow{\sim} \varphi(W)$ induziert.

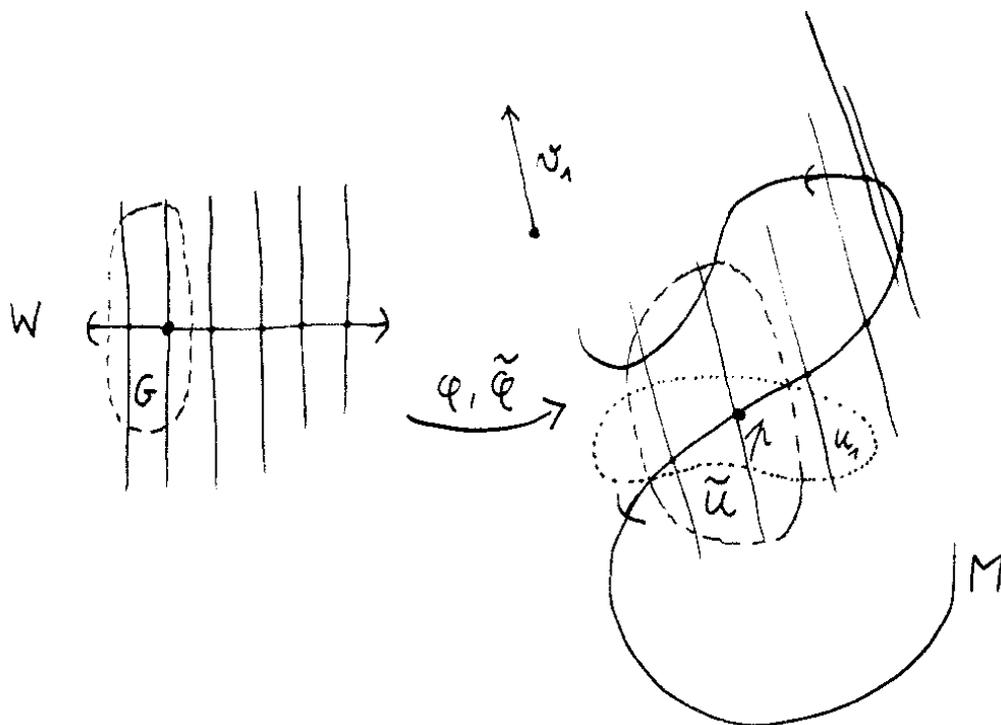
3.4.4. Im Fall $k = 0$ stellt bereits die erste Bedingung sicher, daß jeder Punkt von M offen ist in M , so daß M in der Tat eine nulldimensionale Untermannigfaltigkeit von X ist.

Beweis. Ist $M \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension k und (U, g) eine Plättung von M und $i : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Nullen anhängende Abbildung, so ist für $W := i^{-1}(g(U))$ die Komposition $g^{-1} \circ i : W \rightarrow M$ eine Karte von M . Folglich hat eine Untermannigfaltigkeit um jeden Punkt mindestens eine Karte. Ist andererseits $\varphi : W \rightarrow M \subset X$ eine Karte von M um p mit $W \subseteq \mathbb{R}^k$, so können wir Vektoren $v_1, \dots, v_{n-k} \in \vec{X}$ finden derart, daß das Differential von

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \quad W \times \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow X \\ (w, t_1, \dots, t_{n-k}) &\mapsto \varphi(w) + t_1 v_1 + \dots + t_{n-k} v_{n-k} \end{aligned}$$

im Punkt $(\varphi^{-1}(p), 0^{n-k})$ bijektiv ist. Nach dem Umkehrsatz 3.1.2 induziert $\tilde{\varphi}$ dann einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung $G \subseteq W \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $(\varphi^{-1}(p), 0^{n-k})$ auf eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq X$ von p . Dann ist $i^{-1}(G)$ offen in W und damit $\varphi(i^{-1}(G))$ offen in $\varphi(W)$ und damit in M , aufgrund der Stetigkeit von φ^{-1} und unserer Bedingung $\varphi(W) \subseteq M$. Also gibt es $U_1 \subseteq X$ mit $\varphi(i^{-1}(G)) = M \cap U_1$. Dann setzen wir $U = \tilde{U} \cap U_1$ und $g = \tilde{\varphi}^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die gesuchte Plättung von M um p . \square

3.4.5. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit. Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}^k$ zu einer Karte $\varphi : W \rightarrow M$ von M nennen wir in Verallgemeinerung von 3.3.5 ein **lokales Koordinatensystem von M** und seine Komponenten $\text{pr}_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq k$ nennen wir **lokale Koordinaten auf M** . Viele Autoren verwenden allerdings auch eine andere Terminologie und verstehen unter einer Karte das, was wir ein Koordinatensystem genannt haben. Lokale Koordinaten um einen Punkt der Erdoberfläche, der nicht gerade auf dem sogenannten „Nullmeridian“ liegt, sind etwa die Längen- und Breitengrade. Bilden Funktionen $x_1, \dots, x_k : U \rightarrow \mathbb{R}$



Ein Bild zum Beweis von 3.4.1 im Fall $n = k = 1$

ein System von lokalen Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ einer Mannigfaltigkeit, und ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so bezeichnen wir mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

auch die Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}$, die unter der zugehörigen Karte $\varphi : W \xrightarrow{\sim} U$ verwandt ist zu $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}$, wenn denn $f \circ \varphi$ partiell differenzierbar ist nach der i -ten Variablen. Hierbei gilt es zu beachten, daß $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ von der Wahl aller Koordinaten abhängt, und keineswegs nur von der i -ten Koordinate.

Definition 3.4.6. Sind $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (W_β, φ_β) zwei Karten einer Untermannigfaltigkeit M , so setzen wir $W_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(W_\beta))$ und nennen die Abbildung

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : W_{\alpha\beta} \rightarrow W_{\beta\alpha}$$

den **Kartenwechsel** zwischen unseren beiden Karten.

Proposition 3.4.7. Ist allgemeiner $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und (W, φ) eine Karte von M und $A \subset \mathbb{R}^m$ halboffen und $\psi : A \rightarrow M$ eine Abbildung, deren Verknüpfung mit der Einbettung von M ein stetig differenzierbare Abbildung $A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist, so ist $\varphi^{-1} \circ \psi : A \rightarrow W$ stetig differenzierbar.

3.4.8. Insbesondere sind Kartenwechsel stets \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen.

Beweis. Nach dem Beweis von 3.4.1 kann man für (W, φ) eine Karte und $p \in \varphi(W)$ einen Punkt aus ihrem Bild stets eine offene Umgebung U von p in X finden derart, daß $\varphi^{-1} : U \cap \varphi(W) \rightarrow W$ die Restriktion einer Plättung $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ unserer Mannigfaltigkeit ist. \square

Übungen

Übung 3.4.9. Man zeige: Gegeben eine Karte (W, φ) einer Untermannigfaltigkeit $M \subset X$ und ein Punkt $p \in W$ gibt es stets ein Paar (U, g) bestehend aus einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von $\varphi(p)$ und einer \mathcal{C}^1 -Abbildung $g : U \rightarrow W$ derart, daß gilt $g(\varphi(y)) = y$ für alle $y \in \varphi^{-1}(U)$.

Übung 3.4.10. Der Doppelkegel $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ ist keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Auch die Teilmenge aller seiner Punkte mit nichtnegativer z -Koordinate ist keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Entfernen wir aus dem Doppelkegel jedoch den Ursprung, so erhalten wir eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 .

Übung 3.4.11. Seien $X \subset Y$ ein endlichdimensionaler reeller Raum mit einem affinen Teilraum. So ist eine Teilmenge $M \subset X$ als Teilmenge von Y eine Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn M als Teilmenge von X eine Untermannigfaltigkeit ist.

3.5 Extrema auf Mannigfaltigkeiten

Satz 3.5.1 (Extrema unter Nebenbedingungen). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $U \subseteq X$ offen, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $p \in U$ ein Punkt mit $d_p g$ surjektiv. Wir setzen

$$M := \{q \in U \mid g(q) = g(p)\}$$

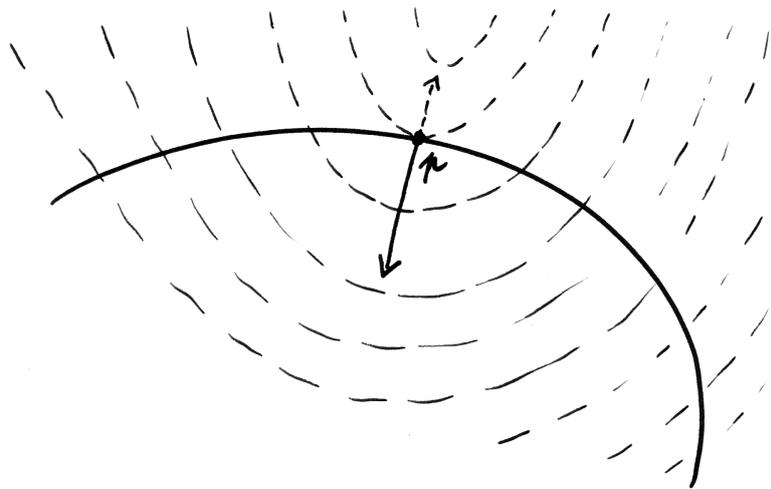
Besitzt dann für eine differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ihre Einschränkung $f|_M$ ein lokales Extremum bei p , so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$d_p f = \lambda_1 d_p g_1 + \dots + \lambda_m d_p g_m$$

3.5.2. In dieser Situation nennt man ein lokales Extremum der Restriktion $f|_M$ auch ein **lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen** $g_1(q) = c_1, \dots, g_m(q) = c_m$ für $c := g(p)$. Die λ_i heißen die **Lagrange'schen Multiplikatoren**. Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ kann man unsere Bedingung dahingehend interpretieren, daß „der Gradient der Funktion f in p auf M senkrecht stehen muß“ oder auch, daß „der Gradient der Funktion f in p eine Linearkombination der Gradienten der Nebenbedingungen sein muß“. Die Bedingung „ $d_p g$ surjektiv“ hinwiederum kann man dahingehend interpretieren, daß die Gradienten der g_i bei p linear unabhängig sein sollen.

Beweis. Indem wir U verkleinern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $d_q g$ surjektiv ist für alle $q \in U$. Nach 3.3.10 ist dann $M \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit. Ist $\varphi : W \rightarrow M$ eine Karte von M um p mit $p = \varphi(w)$, so hat $f|_{M \cap U}$ ein lokales Extremum bei p genau dann, wenn $f \circ \varphi$ ein lokales Extremum bei w hat. Nach 2.4.15 ist eine notwendige Bedingung dafür $d_w(f \circ \varphi) = 0$, als da heißt $d_p f \circ d_w \varphi = 0$. Wir haben aber eh $d_p g \circ d_w \varphi = 0$, also $d_p g_i \circ d_w \varphi = 0$, und aus Dimensionsgründen bilden die $d_p g_i$ für $1 \leq i \leq m$ sogar eine Basis für den Untervektorraum von \vec{X}^* aller Linearformen, die auf dem Bild von $d_w \varphi$ verschwinden. Verschwindet auch $d_p f$ auf diesem Teilraum, so muß es folglich als Linearkombination der $d_p g_i$ geschrieben werden können. \square

Beispiel 3.5.3. Wir suchen lokale Extrema der Funktion $f : (x, y) \mapsto x + y$ auf dem Einheitskreis $M = S^1$, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$. Diese Nebenbedingung bedeutet, daß die Funktion $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ den Wert 1 annehmen muß. Lokale Extrema können nach unserem Satz nur an Stellen $p \in M$ mit $d_p f = \lambda d_p g$ angenommen werden, also an Stellen $p = (x, y) \in S^1$ mit $(1, 1) = \lambda(2x, 2y)$. Damit kommen nur die beiden Stellen $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ und $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ in Frage. Hier ist offensichtlich die erste ein lokales Minimum und die zweite ein lokales Maximum.



Dies Bild soll den Satz über Extrema mit Nebenbedingungen veranschaulichen für den Fall einer Funktion f auf der Papierebene, hier angedeutet durch einige gestrichelt eingezeichnete Niveaulinien, die maximiert werden soll unter einer Nebenbedingung g , hier angedeutet durch die fett eingezeichnete Kurve M der Punkte, bei denen sie erfüllt ist. Es scheint mir anschaulich recht offensichtlich, daß Extrema von f auf M nur an Stellen $p \in M$ zu erwarten sind, an denen der Gradient von f senkrecht steht auf M , also ein Vielfaches des Gradienten von g ist. Im Bild hätten wir etwa grob geschätzt $(\text{grad } f)(p) = -\frac{1}{2}(\text{grad } g)(p)$.

Allerdings ist es für reellwertige Funktionen auf der Papierebene streng genommen erst nach der Wahl eines Maßstabs sinnvoll, von Gradienten zu reden, und in allgemeineren Fällen erst nach Wahl eines Skalarprodukts auf dem Richtungsraum, weshalb ich im Satz die koordinatenfreie Formulierung mit Differentialen vorgezogen habe.

Beispiel 3.5.4. Wir suchen lokale Extrema der Funktion $f : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ auf dem Einheitskreis $M = S^1 \times 0$ in der xy -Ebene, d.h. unter den beiden Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$ und $g_2(x, y, z) = z = 0$. Lokale Extrema können nach unserem Satz nur an Stellen $p \in M$ angenommen werden, für die es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $d_p f = \lambda_1 d_p g_1 + \lambda_2 d_p g_2$, also an Stellen $(x, y, z) \in M$ mit

$$(a, b, c) = \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(0, 0, 1)$$

Daraus folgt jedoch schnell $\lambda_2 = c$, und unter der zusätzlichen Voraussetzung $(a, b) \neq (0, 0)$ kommen nur die beiden Stellen $\pm(a^2 + b^2)^{-1/2}(a, b, 0)$ in Frage. Wieder ist hier offensichtlich die eine ein lokales Minimum und die andere ein lokales Maximum.

Proposition* 3.5.5 (Hinreichende Bedingungen für Extrema). *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $p \in U$ gegeben mit $d_p g$ surjektiv und sei $M := \{q \in U \mid g(q) = g(p)\}$. Sei unsere notwendige Bedingung $d_p f = \lambda_1 d_p g_1 + \dots + \lambda_m d_p g_m$ für ein Extremum der Restriktion $f|_M$ bei p erfüllt und sei*

$$Q := d_p^2 f - \lambda_1 d_p^2 g_1 - \dots - \lambda_m d_p^2 g_m$$

die quadratische Form auf \mathbb{R}^n , die durch die angegebene Linearkombination von Hesse-Matrizen entsteht. So gilt:

1. Ist unsere quadratische Form Q positiv definit auf $\ker d_p g$, so hat $f|_M$ bei p ein isoliertes lokales Minimum;
2. Ist unsere quadratische Form Q negativ definit auf $\ker d_p g$, so hat $f|_M$ bei p ein isoliertes lokales Maximum;
3. Ist unsere quadratische Form Q indefinit auf $\ker d_p g$, so hat $f|_M$ bei p weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

Beweis. Wir beginnen wie beim Beweis von 3.5.1. Indem wir U verkleinern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $d_q g$ surjektiv ist für alle $q \in U$. Nach 3.3.10 ist dann $M \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit. Ist $\varphi : W \rightarrow M$ eine Karte von M um p mit $p = \varphi(w)$, so hat $f|_{M \cap U}$ ein lokales Extremum bei p genau dann, wenn $f \circ \varphi$ ein lokales Extremum bei w hat. Nach 2.4.15 ist eine notwendige Bedingung dafür $d_w(f \circ \varphi) = 0$, als da heißt $d_p f \circ d_w \varphi = 0$, und wir hatten bereits gesehen, wie sich diese Bedingung übersetzt in die Bedingung der Existenz der Lagrange'schen Multiplikatoren. Nun approximiert die polynomiale Abbildung

$$p + h \mapsto f(p) + (d_p f)(h) + \frac{1}{2}(d_p^2 f)(h)$$

unsere Funktion f bei p bis zu zweiter Ordnung im Sinne von 2.3.2. Ebenso approximiert die polynomiale Abbildung

$$w + k \mapsto \varphi(w) + (d_w \varphi)(k) + \frac{1}{2}(d_w^2 \varphi)(k)$$

unsere Funktion φ bei w bis zu zweiter Ordnung. Nach 2.3.6 approximieren folglich die Anteile vom Grad höchstens Zwei von deren Komposition alias die polynomiale Abbildung

$$w + k \mapsto f(\varphi(w)) + \frac{1}{2}(d_p^2 f)((d_w \varphi)(k)) + \frac{1}{2}(d_p f)((d_w^2 \varphi)(k))$$

unsere Funktion $f \circ \varphi$ bei w bis zu zweiter Ordnung. Andererseits liefern die Bedingungen $g_i \circ \varphi = g_i(p)$ bei Übergang zu den Approximationen bis zum Grad Zwei bei w die Identitäten $(d_p^2 g_i)((d_w \varphi)(k)) + (d_p g_i)((d_w^2 \varphi)(k)) = 0$ und damit

$$(d_p f)((d_w^2 \varphi)(k)) = - \sum_i \lambda_i (d_p^2 g_i)((d_w \varphi)(k))$$

Auf diese Weise können wir die Approximation zur Ordnung Zwei von $f \circ \varphi$ bei w umschreiben zu

$$w + k \mapsto f(\varphi(w)) + \frac{1}{2}(d_p^2 f)((d_w \varphi)(k)) - \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i (d_p^2 g_i)((d_w \varphi)(k))$$

alias $w + k \mapsto f(\varphi(w)) + \frac{1}{2}Q((d_w \varphi)(k))$. Wegen unserer Erkenntnis $\text{im}(d_w \varphi) = \ker(d_p g)$ aus dem Beweis von 3.5.1 folgen unsere Behauptungen damit aus den Resultaten zu Extremwerten ohne Nebenbedingungen 2.4.9. \square

4 Oberfläche und Volumen

4.1 Die Transformationsformel

Definition 4.1.1. Seien X ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow V$ eine Abbildung in einen Vektorraum oder allgemeiner eine abelsche Gruppe. Der **Träger** $\text{supp } f$ von f für englisch und französisch **support** ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , außerhalb derer die Funktion verschwindet, in Formeln

$$\text{supp } f = \overline{f^{-1}(V \setminus \{0\})}$$

4.1.2. Diese Definition muß kleinlich genau genommen werden. Ist zum Beispiel $X = (0, 1)$ ein offenes Intervall und f die konstante Funktion 1, so hat f nicht kompakten Träger, denn $\text{supp } f = X$ ist nicht kompakt.

Definition 4.1.3. Sei X ein topologischer Raum. Den Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ oder auch mit

$$\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$$

Ich ziehe letztere Notation vor, sie ist allerdings unüblich.

4.1.4 (**Fortsetzung durch Null**). Gegeben eine offene Teilmenge eines metrischen Raums $U \subseteq X$ und eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger $\text{supp } f$ ist die Fortsetzung durch Null eine stetige Funktion $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$. In der Tat ist $\text{supp } f$ als Kompaktum auch abgeschlossen in X nach [AN1] 7.1.7. Folglich ist $X = U \cup (X \setminus \text{supp } f)$ eine offene Überdeckung von X . Da \tilde{f} auf diesen beiden offenen Mengen stetig ist, muß es nach [AN1] 6.7.8 auf ganz X stetig sein.

Vorschau 4.1.5. Allgemeiner läßt sich jede stetige Funktion mit kompaktem Träger auf einer offenen Teilmenge eines Hausdorffraums stetig durch Null auf den ganzen Raum fortsetzen. Das Argument ist dasselbe, sobald man weiß, daß jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums abgeschlossen ist. Der Punkt ist, daß „kompakt“ eine Eigenschaft eines topologischen Raums ist, im Gegensatz zu „offen“ und „abgeschlossen“, die Eigenschaften von Teilmengen eines topologischen Raums sind.

Definition 4.1.6. Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger definieren wir das **Integral** $\int_U f$ **von** f **über** U , indem wir f durch Null zu einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger auf \mathbb{R}^n fortsetzen und diese Fortsetzung integrieren über irgendeinen kompakten Quader, der ihren Träger umfaßt. Für unser Integral vereinbaren wir die Notationen

$$\int_U f = \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_U f(x) d^n x$$

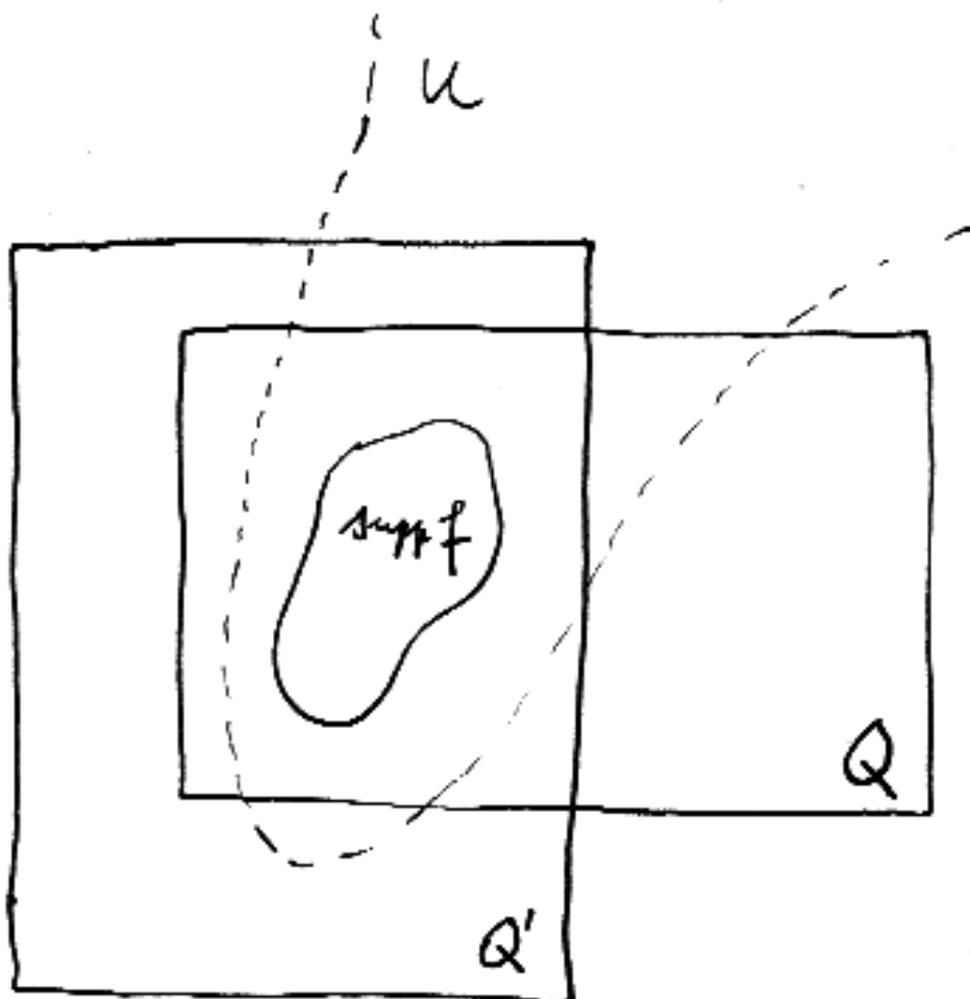


Illustration zur Definition des Integrals stetiger Funktionen mit kompaktem Träger 4.1.6. Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß die Wahl des kompakten Quaders hier keine Rolle spielt, solange er nur den Träger unserer Funktion umfaßt. Im Bild kommen unter vielen anderen etwa die beiden Quader Q und Q' in Frage.

Im Fall $n = 0$ und $U \neq \emptyset$ interpretieren wir unsere Formel dahingehend, daß das Integral der einzige Funktionswert der zu integrierenden Funktion ist.

4.1.7 (Diskussion der Notation). Die Notation $d^n x$ ist insofern unglücklich, als wir auch die konkurrierende Notation $d_p^n f$ für höhere Ableitungen in mehreren Veränderlichen verwenden. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

4.1.8. Das so definierte Integral ist offensichtlich linear, $\int f + g = \int f + \int g$ und $\int \lambda f = \lambda \int f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, und monoton, als da heißt $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$. Insbesondere folgt wie im Fall einer Veränderlichen $|\int f| \leq \int |f|$.

Ergänzung 4.1.9 (Verallgemeinerungen). In derselben Weise erklärt man auch den Träger für vektorwertige Funktionen oder, noch allgemeiner, für Funktionen mit Werten in einer beliebigen Gruppe. In Fortführung von [2.1.5](#) erklärt man weiter für jede stetige Abbildung mit kompaktem Träger von \mathbb{R}^n in einen endlich-dimensionalen reellen Vektorraum ihr Integral, einen Vektor aus besagtem Vektorraum. Auch die folgende Transformationsformel überträgt sich unmittelbar auf den Fall vektorwertiger Funktionen.

Satz 4.1.10 (Transformationsformel). Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\phi : U \xrightarrow{\sim} V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Bezeichne $|\det d\phi|$ die Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto |\det d_p \phi|$. So gilt für jede stetige Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger die Identität

$$\int_V f = \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi|$$

Vorschau 4.1.11. Im Rahmen der Entwicklung der Lebesgue'schen Integrations-theorie folgern wir in [\[AN3\] 1.10.1](#) eine weitgehende Verallgemeinerung dieses Satzes. Eine etwas bescheidenere aber für viele Rechnungen ausreichende Verallgemeinerung liefern die Sätze des folgenden Abschnitts, insbesondere Satz [4.3.8](#) zur Integration mit Integrationskarten.

Beispiele 4.1.12. Ist $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine abstandserhaltende Abbildung, also nach [\[LA2\] 1.7.7](#) die Verknüpfung einer orthogonalen Abbildung mit einer Translation, so liefert die Transformationsformel für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Identität $\int f = \int f \circ \phi$. Ist $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Streckung um den Faktor 2, so liefert die Transformationsformel die Identität $\int f = 4 \int f \circ \phi$. Beide Aussagen sollten auch anschaulich unmittelbar einleuchten.

Beispiel 4.1.13. Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$P : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \setminus (\text{abgeschlossene negative } x\text{-Achse}) \\ (r, \vartheta)^\top \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)^\top$$

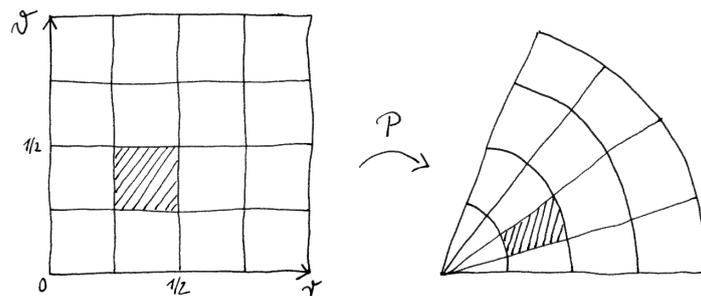


Illustration zur Transformationsformel, insbesondere zu Beispiel 4.1.13. Das Integral einer Funktion f über das rechte Kuchenstück kann angenähert werden, indem wir die angedeutete Unterteilung des Integrationsbereichs betrachten, in jedem der unterteilenden Stücke den Funktionswert an einer Stelle mit der Fläche des entsprechenden Stücks multiplizieren, und diese Produkte aufsummieren. Unter der Polarkoordinatenabbildung P entspricht nun die Unterteilung unseres Kuchenstücks einer Unterteilung unseres Quadrats, und die Fläche des Bildes eines Unterquadrats ist in etwa der Betrag der Funktionaldeterminante $|\det P|$ an einer Stelle unseres Unterquadrats multipliziert mit der Fläche besagten Unterquadrats. So wäre etwa die Fläche des schraffierten Teils im Kuchenstück rechts etwas weniger als halb so groß wie die Fläche des schraffierten Unterquadrats links, und $|\det P| = r$ nimmt auf unserem Unterquadrat Werte zwischen $1/4$ und $1/2$ an. Es wird also in etwa dasselbe herauskommen, wenn wir von der Funktion $(f \circ P)|\det P|$ auf unserem Quadrat in jedem der Unterquadrate den Funktionswert an einer Stelle mit der Fläche des entsprechenden Unterquadrats multiplizieren, und diese Produkte aufsummieren. Im Grenzübergang für immer feinere Unterteilungen kommt dann sogar nicht nur in etwa, sondern ganz genau dasselbe heraus. Das ist die anschauliche Bedeutung der Transformationsformel.

Hier lasse man sich nicht dadurch verwirren, daß die Klammern $(\ , \)$ einmal ein offenes Intervall und dann wieder Elemente kartesischer Produkte andeuten, die wir anschließend noch zu Spaltenvektoren transponieren. Das Differential der Polarkoordinatenabbildung wird gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$dP = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $\det dP = r$. Beim Bilden des Betrages ändert sich nichts und wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(P(r, \vartheta)) r dr d\vartheta$$

für stetige Funktionen auf \mathbb{R}^2 mit kompaktem Träger, der darüber hinaus nicht die abgeschlossene negative x -Achse treffen darf. Oft schreibt man kurz $f(r, \vartheta)$ statt $f(P(r, \vartheta))$ in der Erwartung, daß schon aus der bloßen Bezeichnung der Variablen klar wird, was genau gemeint ist. So ergibt sich dann eine Formel für die Transformation eines Integrals auf Polarkoordinaten, die man als

$$dx dy = r dr d\vartheta$$

abkürzen mag. Leider erhalten wir besagte Formel vorerst nur für sehr spezielle Funktionen. In der Praxis ist deshalb unser Satz kaum anwendbar. Für die Praxis brauchbare Varianten formulieren und zeigen wir in 4.4.2 und [AN3] 1.10.1.

4.1.14. Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar nennt man $\det d\phi$ die **Funktionaldeterminante** von ϕ . Wir verallgemeinern die Transformationsformel in [AN3] 1.10.1 auf beliebige „integrierbare“ Funktionen f . Bevor wir die hier gegebene Version beweisen, wollen wir versuchen, sie mit Anschauung zu füllen. Wir beschränken uns dazu auf den Fall $n = 2$. Zunächst ist hoffentlich anschaulich klar, daß es für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reelle Konstante $c(L) \geq 0$ gibt derart, daß „das Bild unter L eines Flächenstücks U der Fläche $\text{vol}(U)$ die Fläche $\text{vol}(LU) = c(L) \text{vol}(U)$ hat“. Unsere Transformationsformel enthält nun, wenn man sie ohne Rücksicht auf die Bedingungen des Satzes mutig auf die konstante Funktion $f = 1$ auf U anwendet und $\phi = L$ linear annimmt, die Erkenntnis

$$c(L) = |\det L|$$

Das sieht man auch anschaulich leicht ein: Zunächst sollte anschaulich klar sein, daß „eine Scherung die Fläche nicht ändert“ und „die Streckung einer Achse die Fläche genau durch Multiplikation mit dem Betrag des Streckfaktors ändert“, so daß also unsere Erkenntnis anschaulich klar ist für lineare Abbildungen L mit Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Anschaulich klar ist weiter $c(L \circ M) = c(L)c(M)$ und nach der Multiplikationsformel für Determinanten haben wir auch $|\det L \circ M| = |\det L| |\det M|$. So rechtfertigen wir dann unsere Erkenntnis $c(L) = |\det L|$ im allgemeinen. Mehr dazu mag man in [LA1] 5.2.6 nachlesen. Das Integral von f erhalten wir nun im Grenzwert, wenn wir V in lauter kleine Flächenstücke V_i zerlegen und die Produkte der Flächen dieser Flächenstücke mit einem Funktionswert an einem Punkt $y_i \in V_i$ des jeweiligen Flächenstück aufsummieren, in Formeln

$$\int_V f \simeq \sum f(y_i) \text{vol}(V_i)$$

Wir betrachten nun die Urbilder $x_i = \phi^{-1}(y_i)$ unserer Punkte y_i und die Zerlegung von U durch die Urbilder $U_i = \phi^{-1}(V_i)$ unserer kleinen Flächenstücke V_i . Bei x_i wird ϕ bis auf Verschiebung gut approximiert durch $d_{x_i}\phi$, deshalb haben die Bilder $\phi(U_i) = V_i$ dieser Flächenstücke U_i in etwa die Fläche $\text{vol}(V_i) \simeq |\det d_{x_i}\phi| \text{vol}(U_i)$ und wir folgern

$$\int_V f \simeq \sum f(y_i) \text{vol}(V_i) \simeq \sum (f \circ \phi)(x_i) |\det d_{x_i}\phi| \text{vol}(U_i) \simeq \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi|$$

Das beendet unsere anschauliche aber doch recht vage Argumentation und wir kommen nach einem Beispiel zum eigentlichen Beweis.

Beweis. Wir zeigen den Satz durch vollständige Induktion über n . Der Fall $n = 0$ ist unproblematisch und wir behandeln gleich den Fall $n = 1$. Nach [AN1] 1.3.13 kann jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ als disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen U_i geschrieben werden, und deren Bilder in V sind wieder Intervalle nach dem Zwischenwertsatz und offen nach dem Umkehrsatz 3.1.2. Unsere Funktion f verschwindet außerhalb von endlich vielen der $\phi(U_i)$ nach [AN1] 7.5.3 und wir können folglich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß U und V bereits offene Intervalle sind. Wir finden dann sicher ein mehrpunktiges kompaktes Intervall $[c, d] \subset V$, das den Träger von f umfaßt. Die Substitutionsregel [AN1] 4.8.1 liefert nun

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

für $a, b \in U$ mit $\phi(a) = c$ und $\phi(b) = d$. Da ϕ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus sein soll, ist ϕ' stetig mit $\phi' \neq 0$ auf U . Wir folgern, daß auf U entweder gilt $\phi' > 0$ oder aber $\phi' < 0$. Im ersten Fall haben wir $a < b$ und unsere Transformationsformel steht bereits da. Im zweiten Fall haben wir $a > b$ und $|\phi'| = -\phi'$ und

$$\int_U (f \circ \phi) |\det d\phi| = \int_b^a f(\phi(x))|\phi'(x)|dx = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

und sind wieder fertig. Damit ist der Fall $n = 1$ erledigt. Nehmen wir nun also an, wir hätten $n \geq 2$ und der Satz sei für Integration im \mathbb{R}^{n-1} schon bewiesen. Wir gehen dann in mehreren Schritten vor.

1. Läßt ϕ die erste Koordinate unverändert, in Formeln $\phi_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$, so folgt unsere Transformationsformel aus der Induktionsvoraussetzung. Um das zu sehen, betrachten wir für festes $c \in \mathbb{R}$ die Einbettung $i_c : \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(x_2, \dots, x_n) \mapsto (c, x_2, \dots, x_n)$, setzen $U_c := i_c^{-1}(U)$ sowie $V_c := i_c^{-1}(V)$ und betrachten den induzierten \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $\phi_c : U_c \rightarrow V_c$, der durch die Identität $i_c \circ \phi_c = \phi \circ i_c$ charakterisiert wird. Unsere Erkenntnisse über die Determinante von block-unteren Dreiecksmatrizen zeigen

$$|\det d_{(x_2, \dots, x_n)} \phi_c| = |\det d_{(c, x_2, \dots, x_n)} \phi|$$

Für $f_c := f \circ i_c : V_c \rightarrow \mathbb{R}$ alias $f_c(x_2, \dots, x_n) = f(c, x_2, \dots, x_n)$ erhalten wir also nach der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \int f_c &= \int (f_c \circ \phi_c) |\det d\phi_c| \\ &= \int (f \circ \phi)(c, x_2, \dots, x_n) |\det d_{(c, x_2, \dots, x_n)} \phi| \end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung über alle c , so ergibt sich die Transformationsformel für unseren \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus ϕ .

2. Sind $W \xrightarrow{\psi} U \xrightarrow{\phi} V$ zwei \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n und gilt unsere Transformationsformel für ϕ und ψ , so gilt sie auch für $\phi \circ \psi$. In der Tat erhalten wir

$$\begin{aligned} \int f &= \int (f \circ \phi) |\det d\phi| \\ &= \int (f \circ \phi \circ \psi) (|\det d\phi| \circ \psi) |\det d\psi| \\ &= \int (f \circ \phi \circ \psi) |\det d(\phi \circ \psi)| \end{aligned}$$

Hier gilt die erste Zeile nach der Transformationsformel für ϕ angewandt auf die Funktion f , die Zweite nach der Transformationsformel für ψ angewandt auf die Funktion $(f \circ \phi) |\det d\phi|$, und die Dritte nach der Kettenregel

$$d_p(\phi \circ \psi) = d_{\psi(p)}\phi \circ d_p\psi$$

für $p \in W$ und der Multiplikationsformel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ für Determinanten.

3. Für ϕ eine Vertauschung der Koordinaten gilt unsere Formel. In der Tat ist so ein ϕ ja linear mit $|\det d\phi| = 1$, und wir wissen schon nach 2.1.8, daß es bei Mehrfachintegralen nicht auf die Reihenfolge ankommt.

4. Ist eine Komponente von ϕ eine Koordinate auf U , haben wir also in Formeln

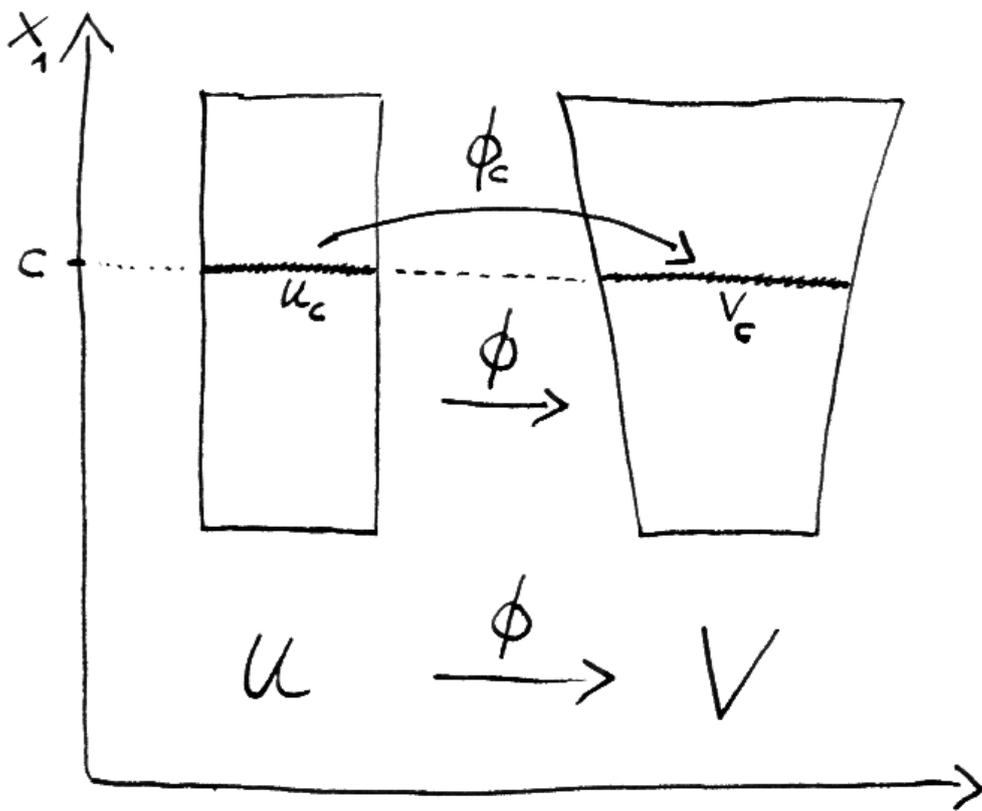


Illustration zum Beweis der Transformationsformel

$\phi_i(x_1, \dots, x_n) = x_j$ für geeignete i und j , so gilt unsere Formel. In der Tat finden wir dann eine Darstellung $\phi = \psi \circ \tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$ derart, daß $\tilde{\phi}$ die erste Koordinate unverändert läßt und $\psi, \tilde{\psi}$ Koordinatenvertauschungen sind. Für $\tilde{\phi}$ gilt dann unser Satz nach Schritt 1, für ψ und $\tilde{\psi}$ nach Schritt 3, und damit für ϕ nach Schritt 2.

5. Jeder Punkt $p \in U$ besitzt eine offene Umgebung U_p derart, daß unsere Transformationsformel gilt für die Restriktion von ϕ auf U_p . In der Tat finden wir zunächst ein i derart, daß gilt $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}(p) \neq 0$, und dann gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung U_p von p derart, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \quad U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (\phi_i(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus von U_p auf eine offene Teilmenge $\psi(U_p) = W_p \subseteq \mathbb{R}^n$ induziert. Wir bezeichnen das Bild von U_p unter ϕ mit $\phi(U_p) = V_p$ und erhalten ein kommutatives Diagramm von \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen

$$\begin{array}{ccc} U_p & \xrightarrow{\psi} & W_p \\ & \searrow \phi & \swarrow \phi\psi^{-1} \\ & & V_p \end{array}$$

wobei die i -te Komponente der Abbildung $\phi\psi^{-1}$ gerade die erste Koordinate ist, in Formeln

$$(\phi\psi^{-1})_i(y_1, \dots, y_n) = y_1$$

Für beide Abbildungen ψ und $(\phi\psi^{-1})$ gilt also nach Schritt 4 unsere Transformationsformel, mithin gilt sie nach Schritt 2 auch für ihre Verknüpfung, als da heißt für die Restriktion $\phi : U_p \xrightarrow{\sim} V_p$ von ϕ auf U_p . Hier ist im übrigen die Stelle im Beweis, die uns daran hindert, unsere Induktion mit dem Trivialfall $n = 0$ zu starten: Im Fall $n = 1$ können wir nämlich Schritt 4 auf ψ nicht anwenden, da in diesem Fall keine Komponente von ψ eine Koordinate wäre.

6. Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $\text{supp } f \subset V$. Für $p \in U$ wählen wir U_p wie in Schritt 5 und setzen wieder $V_p = \phi(U_p)$. Da $\text{supp } f$ kompakt ist, finden wir nach [AN1] 7.5.3 eine endliche Teilmenge $E \subset U$ mit $\text{supp } f \subset \bigcup_{p \in E} V_p$. Jetzt benutzen wir das im Anschluß formulierte und bewiesene technische Lemma 4.1.15 zur „Teilung der Eins“, wählen für unsere endliche Überdeckung von $\text{supp } f$ durch die V_p mit $p \in E$ eine angepaßte Teilung der Eins α_p und schreiben

$$f = \sum_{p \in E} \alpha_p f$$

Die Summanden $\alpha_p f$ sind dann stetig mit kompaktem in V_p enthaltenen Träger. Nach der Wahl der V_p haben wir nun $\int \alpha_p f = \int ((\alpha_p f) \circ \phi) |\det d\phi|$ für alle $p \in E$, und addieren wir diese Gleichungen, so ergibt sich wie gewünscht

$$\int f = \int (f \circ \phi) |\det d\phi| \quad \square$$

Lemma 4.1.15 (Teilung der Eins). Sind $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $V_1, \dots, V_r \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset \bigcup V_i$, so gibt es stetige Funktionen $\alpha_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit kompaktem, jeweils in V_i enthaltenen Träger $\alpha_i \in \mathcal{C}_1(V_i, [0, 1])$ derart, daß gilt

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

4.1.16. Eine derartige Familie von Funktionen α_i heißt eine an die gegebene Überdeckung von K angepaßte **Teilung der Eins**.

Beweis. Wir wählen für jedes $x \in K$ ein $j(x)$ mit $x \in V_{j(x)}$ und eine stetige Funktion $\varphi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ mit kompaktem, in $V_{j(x)}$ enthaltenem Träger, die bei x nicht verschwindet, in Formeln $\varphi_x(x) > 0$. Die $N_x := \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ sind natürlich offen in \mathbb{R}^n und überdecken K und wir haben $\bar{N}_x \subset V_{j(x)}$. Da K kompakt ist, finden wir $E \subset K$ endlich mit $K \subset \bigcup_{x \in E} N_x$. Dann bilden wir

$$\psi := \sum_{x \in E} \varphi_x$$

Diese Funktion ist stetig auf ganz \mathbb{R}^n , nimmt auf $N := \bigcup_{x \in E} N_x$ positive Werte an, und verschwindet außerhalb von N . Nun betrachten wir für jedes $x \in E$ auf der offenen Menge N die stetige Funktion $\psi_x = \varphi_x / \psi$. Natürlich gilt $\sum_{x \in E} \psi_x(z) = 1$ nicht nur für alle $z \in K$, sondern sogar für alle $z \in N$, und ψ_x verschwindet außerhalb von N_x . Als nächstes konstruieren wir eine stetige Funktion $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, die auf K konstant Eins ist und deren Träger in N enthalten ist. Ist zum Beispiel m das Minimum von ψ auf K , so erhalten wir ein mögliches β , indem wir setzen $\beta = h \circ \psi$ für $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $h|_{[m, \infty)} = 1$ und $h|_{(-\infty, m/2]} = 0$. Dann bilden wir schließlich

$$\alpha_i = \sum_{j(x)=i} \beta \psi_x$$

Diese Funktionen sind zwar a priori nur auf N definiert, aber da \mathbb{R}^n durch N und das Komplement des Trägers von β überdeckt wird, lassen sie sich stetig durch Null auf ganz \mathbb{R}^n fortsetzen, und diese Fortsetzungen haben dann offensichtlich die gewünschten Eigenschaften. \square

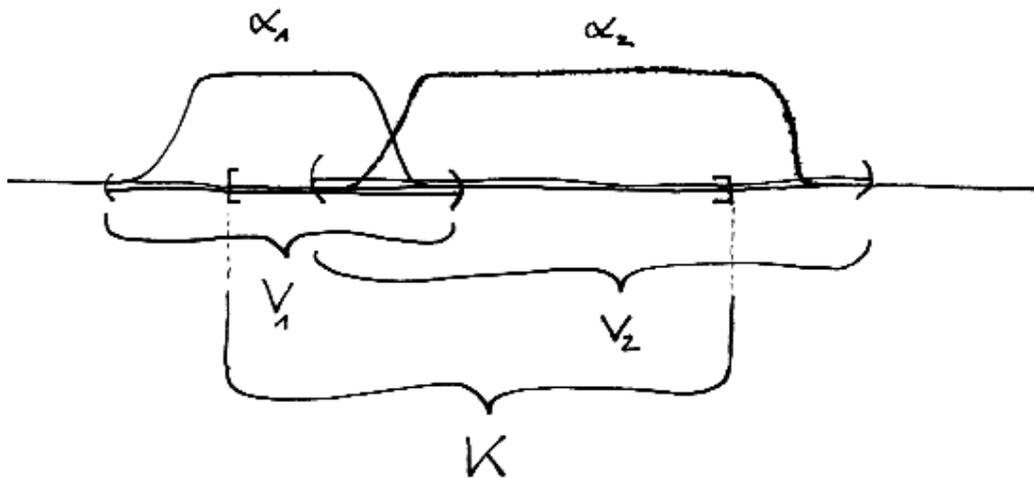


Illustration einer Teilung der Eins im Fall einer Überdeckung eines kompakten Intervalls $K \subset \mathbb{R}$ durch zwei offene Teilmengen.

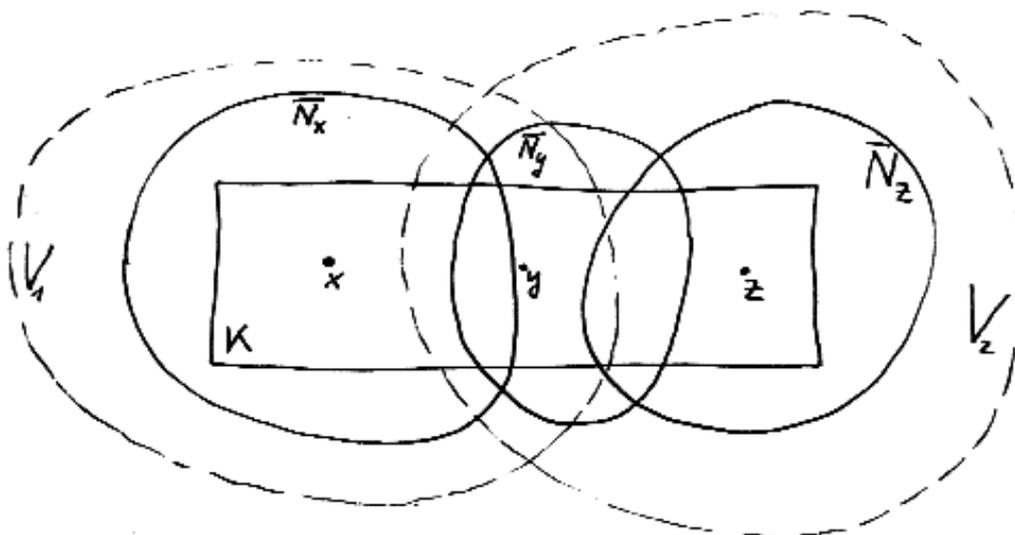


Illustration einiger Mengen, die bei unserer Konstruktion einer Teilung der Eins eine Rolle spielen, im Fall einer Überdeckung eines kompakten Quaders $K \subset \mathbb{R}^2$ durch zwei offene Teilmengen.

Ergänzung 4.1.17 (Glatte Teilung der Eins). Im vorherigen Lemma können die Funktionen α_i sogar glatt, als da heißt beliebig gemischt partiell differenzierbar gewählt werden. Um das zu sehen, sind nur wenige Zusatzüberlegungen von Nöten. Aus [AN1] 4.4.15 kennen wir ja eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf der negativen Halbgeraden verschwindet und auf der echt positiven Halbgeraden positiv ist. Dann ist das Produkt $f(t)f(1-t)$ eine von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktion mit kompaktem Träger auf \mathbb{R} . Man erhält von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktionen mit kompaktem Träger auf \mathbb{R}^n , indem man von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktionen mit kompaktem Träger in den einzelnen Koordinaten nimmt und das Produkt bildet. So sehen wir, daß die φ_x im vorhergehenden Beweis sogar glatt gewählt werden können. Damit sind dann auch ψ und die ψ_x glatt. Wählen wir zusätzlich die Funktion h glatt, bis auf Reskalierung könnte man für h etwa das Integral einer von Null verschiedenen nichtnegativen glatten Funktion mit kompaktem Träger nehmen, so liefert die Konstruktion aus dem vorhergehenden Beweis sogar eine glatte Teilung der Eins.

Übungen

Übung 4.1.18. Man zeige, daß die Funktionaldeterminante der Kugelkoordinatenabbildung K aus 5.2.11 gegeben wird durch $\det dK = r^2 \sin \vartheta$. Salopp gesprochen transformieren sich also Volumenintegrale in Kugelkoordinaten vermittels der Regel

$$dx dy dz = r^2 \sin \vartheta \, dr d\varphi d\vartheta$$

Übung 4.1.19. Eine kompakte Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine **kompakte Nullmenge**, wenn gilt $0 = \lim_{l \searrow 0} l^n |\{q \in \mathbb{Z}^n \mid N \cap l(q + [0, 1]^n) \neq \emptyset\}|$. In der schmutzigen Anschauung heißt das im zweidimensionalen Fall, daß sie auf hinreichend feinem Rechenpapier durch eine Vereinigung von Kästchen mit beliebig kleiner Gesamtfläche überdeckt werden kann. Offensichtlich ist die Vereinigung von zwei kompakten Nullmengen wieder eine kompakte Nullmenge. Man zeige für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig mit kompaktem Träger und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Nullmenge die Gleichheit

$$\int f = \sup \left\{ \int \alpha f \mid \alpha \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, 1]) \text{ mit } (\text{supp } \alpha) \cap N = \emptyset \right\}$$

Übung 4.1.20. Gegeben $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ stetig differenzierbar ist $f(A)$ eine kompakte Nullmenge. Hinweis: Man zerlege $[0, 1]^n$ in kleine Quader und verwende den Schrankensatz.

Übung 4.1.21. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $A \Subset Q$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig mit $f|_A = 0$. So gilt

$$\int_Q f = \sup_{\alpha} \int_Q \alpha f$$

mit dem Supremum über alle stetigen $\alpha : Q \rightarrow [0, 1]$ mit $(\text{supp } \alpha) \cap A = \emptyset$.

4.2 Integration über Mannigfaltigkeiten

Satz 4.2.1 (Integration über Mannigfaltigkeiten). *Gegeben eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine \mathbb{R} -lineare Abbildung*

$$\int_M : \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

derart, daß für jede Karte $\varphi : W \rightarrow M$ und jede Funktion $f \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$ mit Träger im Bild besagter Karte $\text{supp } f \subset \varphi(W)$ gilt

$$\int_M f = \int_W f(\varphi(x)) \sqrt{\det (d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)} d^k x$$

4.2.2. Für unser Integral einer Funktion f mit kompaktem Träger über eine eingebettete Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ findet man in der Literatur auch die Notationen

$$\int_M f = \int_M f d\sigma = \int_M f dS = \int_M f do = \int_M f dO$$

Sie appellieren an unsere Anschauung für den zweidimensionalen Fall, σ und S stehen für „surface“ und o und O für „Oberfläche“. Die obige Konstruktion wird auch als **Flächenintegral** bezeichnet. Im Spezialfall $k = n$ einer n -Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n alias einer offenen Teilmenge erhalten wir unser Integral $\int_M f(x) d^n x$ aus 4.1.6 zurück.

4.2.3 (**Einordnung des vorstehenden Integralbegriffs**). Die hier und im folgenden entwickelte Integrationstheorie ist insofern nützlich, als sie korrekte Definitionen und vollständige Beweise bis hin zum Satz von Stokes erlaubt. Sie erlaubt auch eine formale Rechtfertigung vieler expliziter Rechnungen, ist im Vergleich zur Lebesgue’schen Integrationstheorie [AN3] 1 aber dennoch recht unbeholfen. Bevor ich den obigen Satz beweise, will ich erst einmal versuchen, ihn zu motivieren und den darin erklärten Integralbegriff mit Anschauung zu füllen.

Beispiel 4.2.4. Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und injektiv, so kann man leicht zeigen, daß das Bild $M := \varphi([a, b])$ eine 1-Mannigfaltigkeit ist und das Integral einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ über M genau das Kurvenintegral von dem durch Null auf $\varphi[a, b]$ fortgesetzten f längs der Kurve φ im Sinne von [AN1] 8.3.6.

4.2.5. Hat M die Dimension k , so ist $d_x \varphi$ eine Matrix mit k Spalten und n Zeilen und das Produkt $(d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)$ dieser Matrix mit ihrer Transponierten ist folglich

eine $(k \times k)$ -Matrix. Diese sogenannte **Gram'sche Matrix** kann aufgefaßt werden als die Matrix aller Skalarprodukte zwischen Spaltenvektoren von $d_x\varphi$. Sie ist nach [LA2] 2.3.34 insbesondere positiv semidefinit und hat damit eine nicht-negative Determinante. Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix V mit Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ definieren wir ganz allgemein eine reelle Zahl

$$\text{vol } V = \text{vol}(v_1 | \dots | v_k) := \sqrt{\det(V^\top V)} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$$

und nennen sie das **k -dimensionale Volumen** des von den Vektoren v_i aufgespannten Parallelepeds. Die Wurzel aus der Determinante der Gram'schen Matrix können wir mit dieser Notation auch kürzer schreiben als

$$\sqrt{\det (d_x\varphi)^\top (d_x\varphi)} = \text{vol}(d_x\varphi)$$

Im Fall $k = 1$ ist das eindimensionale Volumen eines Vektors nach dieser Definition schlicht seine Länge. Im Fall $k = 2$ bedeutet das zweidimensionale Volumen eines Paares von Vektoren v, w die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms mit den Ecken $0, v, w$ und $v + w$. Um die Bezeichnung „Volumen“ für die Zahl $\text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$ im Allgemeinen zu rechtfertigen, beachten wir:

1. Es gilt $\text{vol}(v_0 | v_1 | \dots | v_k) = \text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$ falls v_0 die Länge 1 hat und senkrecht steht auf allen anderen v_i .
2. Im Fall $k = n$ haben wir $\text{vol}(v_1 | \dots | v_n) = |\det(v_1 | \dots | v_n)|$. In der Tat, bezeichnet V die in diesem Fall quadratische Matrix mit Spalten v_i , so gilt nach dem Multiplikationssatz für Determinanten $\det(V^\top V) = (\det V)^2$.

Auf diese Weise kann unsere anschauliche Interpretation der Zahl $\text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$ heuristisch auf unsere anschauliche Interpretation der Determinante in [LA1] 5.2.6 und 4.1.14 zurückgeführt werden: Die Fläche eines Parallelogramms im Raum sollte eben das Volumen des Körpers sein, der entsteht, man besagtes Parallelogramm „zu einem Toast des Dicke Eins verdickt“.

4.2.6. Wir wollen nun auch unsere Definition des Integrals anschaulich rechtfertigen. Sei dazu $Q := [a, b] \times [c, d]$ ein kompaktes Rechteck und $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $f : \varphi(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistanten Unterteilungen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$, $c = c_0 < c_1 < \dots < c_r = d$ der Kanten von Q und bezeichnen mit $q_{i,j} = (a_i, c_j)$ die Gitterpunkte im so gegebenen Raster auf Q . Bezeichne weiter $p_{i,j} = \varphi(q_{i,j})$ die Bilder dieser Gitterpunkte unter φ . Damit definieren wir die r -te **Riemannsumme** $S_\varphi^r(f)$ durch die Formel

$$S_\varphi^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(p_{i,j}) \text{vol}(p_{i+1,j} - p_{i,j} | p_{i,j+1} - p_{i,j})$$

Lemma 4.2.7. Seien $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein kompaktes Rechteck und $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. So gilt für jede stetige Funktion $f : \varphi(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ mit unseren eben definierten Riemannsummen

$$\int_Q f(\varphi(x)) \operatorname{vol}(d_x \varphi) d^2x = \lim_{r \rightarrow \infty} S_\varphi^r(f)$$

Ergänzung 4.2.8. Eine noch anschaulichere Variante liefert der Mittelwert von Riemannsummen $(S_\varphi^r(f) + S_{\varphi \circ (-1)}^r(f))/2$ mit $\varphi \circ (-1) : (-Q) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $x \mapsto \varphi(-x)$. Dieser Mittelwert ist nämlich genau die Summe

$$\sum_{i,j=0}^{r-1} f(p_{i,j}) \Delta(p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i,j+1}) + \sum_{i,j=1}^r f(p_{i,j}) \Delta(p_{i,j}, p_{i-1,j}, p_{i,j-1})$$

mit der Notation $\Delta(p, t, s)$ für die Fläche des Dreiecks mit Ecken $p, t, s \in \mathbb{R}^n$. Aus unserem Lemma folgt unmittelbar, daß auch dieser Mittelwert von Riemannsummen gegen das Integral strebt.

Beweis. Um Indizes zu vermeiden bezeichnen wir die Koordinaten auf \mathbb{R}^2 mit x, y und schreiben φ_x, φ_y für die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix von φ . Die linke Seite ist per definitionem das Integral $\int_Q (f \circ \varphi) \operatorname{vol}(\varphi_x | \varphi_y)$. Dies Integral können wir nach 2.1.7 schreiben als den Grenzwert für $r \rightarrow \infty$ gewisser Riemannsummen, die wir der Übersichtlichkeit halber mit $T^r = T_\varphi^r(f)$ abkürzen wollen mit T wie „tangential“ und die gegeben werden durch

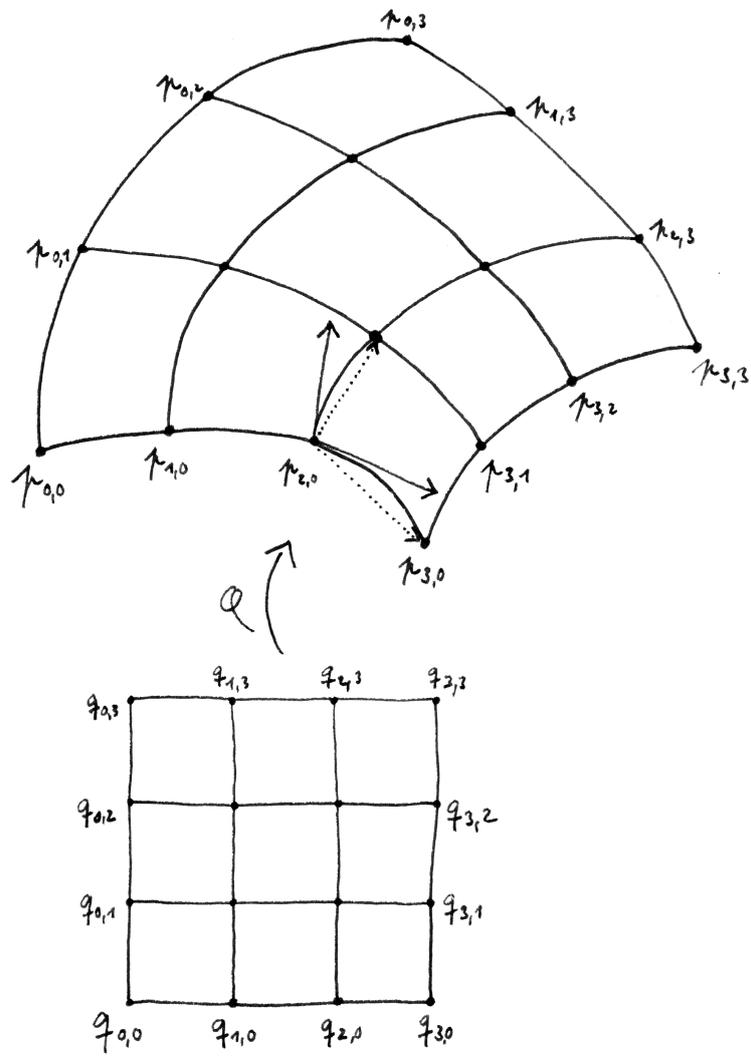
$$T^r = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(\varphi(q_{i,j})) \operatorname{vol}(\varphi_x(q_{i,j}) | \varphi_y(q_{i,j})) \frac{\operatorname{vol} Q}{r^2}$$

für $\operatorname{vol} Q$ die Fläche unseres Rechtecks Q und damit $(\operatorname{vol} Q)/r^2$ die Fläche der kleinen rechteckigen Felder $Q_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Nun ist φ_x gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum Q . Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $R > 0$ derart, daß gilt $\|\varphi_x(p) - \varphi_x(q)\| \leq \varepsilon$, wann immer p und q im selben kleinen rechteckigen Feld für eine Unterteilung mit $r \geq R$ liegen. Jetzt erklären wir die Vektoren $\varepsilon_{i,j}(r)$ durch die Identität

$$p_{i+1,j} - p_{i,j} = \frac{b-a}{r} (\varphi_x(q_{i,j}) + \varepsilon_{i,j}(r))$$

Mit dem Schrankensatz [AN1] 8.2.9 folgt unter der Voraussetzung $r \geq R$ die Abschätzung $\|\varepsilon_{i,j}(r)\| \leq \varepsilon$. Eine analoge Abschätzung erhalten wir für $p_{i,j+1} - p_{i,j}$. Jetzt setzen wir diese Darstellungen in S^r ein und überlassen es dem Leser, hieraus zu folgern, daß gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S^r - T^r) = 0$$



Die gepunkteten Pfeile stellen die Vektoren $p_{3,0} - p_{2,0}$ und $p_{2,1} - p_{2,0}$ dar, die Fläche des durch sie bestimmten Parallelogramms geht in die Riemannsumme S_M^3 ein. Die durchgezogenen Pfeile stellen die Vektoren $\varphi_x(q_{2,0})$ und $\varphi_y(q_{2,0})$ dar, die Fläche des durch sie bestimmten Parallelogramms geht entsprechend in die Riemannsumme S_Q^3 ein. Beim Übergang zu immer feineren Rastern kommen wir zum selben Grenzwert, wie im Beweis von 4.2.7 ausgeführt wird.

Da aber die Folge T^r nach 2.1.7 gegen unser Integral \int_Q im Lemma konvergiert, muß dasselbe auch für die Folge S^r gelten. \square

Beweis für Satz 4.2.1, Integration über Mannigfaltigkeiten. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Der Träger $\text{supp } f$ unserer Funktion f besitzt als Kompaktum nach [AN1] 7.5.3 eine endliche Überdeckung durch Bilder von Karten (W_i, φ_i) . Nach 4.1.15 existiert eine an diese Überdeckung von $\text{supp } f$ angepaßte Teilung der Eins α_i . Dann gilt $f = \sum_i \alpha_i f$, und da unsere Bedingung bereits die Integrale der Summanden festlegt, legt die ebenfalls geforderte Linearität auch das Integral von f fest und wir haben notwendig

$$\int_M f = \sum_i \int_M \alpha_i f = \sum_i \int_{W_i} ((\alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \text{vol}(d_x \varphi_i) d^k x$$

Als nächstes zeigen wir, daß die rechte Seite nicht von den getroffenen Wahlen abhängt. Sei also eine weitere endliche offene Überdeckung von $\text{supp } f$ durch die Bilder endlich vieler Karten (V_j, ψ_j) gegeben sowie eine daran angepaßte Teilung der Eins β_j . Wir behaupten die Gleichheit

$$\sum_i \int_{W_i} ((\alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \text{vol}(d_x \varphi_i) d^k x = \sum_j \int_{V_j} ((\beta_j f) \circ \psi_j)(x) \text{vol}(d_x \psi_j) d^k x$$

Sie ist aufgrund der Linearität all dieser Integrale äquivalent zur Gleichheit

$$\sum_{i,j} \int_{W_i} ((\beta_j \alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \text{vol}(d_x \varphi_i) d^k x = \sum_{i,j} \int_{V_j} ((\beta_j \alpha_i f) \circ \psi_j)(x) \text{vol}(d_x \psi_j) d^k x$$

und folgt, wenn wir die Gleichheit aller Summanden zeigen. Hier haben nun die Funktionen $\beta_j \alpha_i f$ Träger im Schnitt $\varphi_i(W_i) \cap \psi_j(V_j)$. Wir können also die Indizes weglassen und müssen nur für jede Funktion $h \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$, deren Träger im Bild zweier Karten (W, φ) und (V, ψ) liegt, die Identität

$$\int_W h(\varphi(x)) \text{vol}(d_x \varphi) d^k x = \int_V h(\psi(x)) \text{vol}(d_x \psi) d^k x$$

zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\varphi(W) = \psi(V)$ annehmen. Der Kartenwechsel wird so ein Diffeomorphismus $\kappa := \psi^{-1} \circ \varphi : W \xrightarrow{\sim} V$ mit $\psi \circ \kappa = \varphi : W \rightarrow M$. Es folgt $f(\varphi(x)) = f(\psi(\kappa(x)))$ und $d_x \varphi = d_{\kappa(x)} \psi \circ d_x \kappa$. Wir erhalten mit der Multiplikativität der Determinante also

$$\text{vol}(d_x \varphi) = |\det d_x \kappa| \text{vol}(d_{\kappa(x)} \psi)$$

und folgern die behauptete Gleichheit der Integrale aus der Transformationsformel, angewandt auf die Funktion $h \circ \psi$. Damit haben wir gezeigt, daß jede Überdeckung des Trägers unserer Funktion f durch Bilder von Karten und jede zugehörige Teilung der Eins in der Formel oben dieselbe Summe liefert, die wir damit

als unser $\int_M f$ erklären können. Daß die so erklärte Abbildung $f \mapsto \int_M f$ dann auch \mathbb{R} -linear ist und die geforderte Eigenschaft für Funktionen mit Träger im Bild einer Karte hat, folgt unmittelbar. \square

Übungen

Übung 4.2.9. Sind $M \subset \mathbb{R}^m$ sowie $N \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ kompakt getragene stetige Funktionen, so ist auch $f \boxtimes g : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ eine kompakt getragene stetige Funktion und es gilt

$$\int_{M \times N} f \boxtimes g = \left(\int_M f \right) \left(\int_N g \right)$$

4.3 Integration über Fastfaltigkeiten

Definition 4.3.1. Gegeben ein topologischer Raum M und darin eine Teilmenge $T \subset M$ gibt es eine größte offene Teilmenge

$$\text{Inn}_M(T) = \text{Inn}(T) = T^\circ$$

von M , die in T enthalten ist, nämlich die Vereinigung aller offenen Teilmengen $U \subset M$, die in T enthalten sind. Diese Menge $\text{Inn}_M(T)$ heißt der **offene Kern** oder auch das **Innere**, englisch **interior**, von T in M . Weiter setzt man $\partial T = \partial_M T := \bar{T} \setminus T^\circ$ und nennt diese Menge, in Worten das Komplement des Inneren von T im Abschluß von T , den **Rand von T in M** .

Beispiele 4.3.2. Für jeden topologischen Raum M gilt $\text{Inn}_M(M) = M$. Gegeben $a \leq b$ reelle Zahlen gilt $\text{Inn}_{\mathbb{R}}([a, b]) = (a, b)$, aber natürlich immer noch $\text{Inn}_{[a, b]}([a, b]) = [a, b]$.

Definition 4.3.3. Sei X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum. Unter einer **k -Integrationskarte nach X** verstehen wir ein Paar (Q, φ) bestehend aus einer Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^k$, die dargestellt werden kann als eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen kompakten Quadern mit nichtleerem Inneren, und einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi : Q \rightarrow X$ mit $\varphi(Q^\circ) \cap \varphi(\partial Q) = \emptyset$ und $\varphi|_{Q^\circ}$ injektiv und $d_p \varphi$ injektiv für alle $p \in Q^\circ$.

4.3.4. Gegeben eine Integrationskarte (Q, φ) bildet φ abgeschlossene alias kompakte Teilmengen von Q auf abgeschlossene alias kompakte Teilmengen von $\varphi(Q)$ ab. Für $U \subset \varphi(Q)$ impliziert $\varphi^{-1}(U) \subset Q$ also $U \subset \varphi(Q)$. Unsere Annahmen zeigen so, daß $\varphi : Q^\circ \hookrightarrow \varphi(Q)$ offene Mengen auf in $\varphi(Q)$ offene Mengen abbildet. Insbesondere ist $\varphi(Q^\circ) \subset X$ nach 3.4.1 eine Untermannigfaltigkeit mit Karte $\varphi : Q^\circ \xrightarrow{\sim} \varphi(Q^\circ)$.

Definition 4.3.5. Seien $k \in \mathbb{N}$ und X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Unter einer k -**Integrationskarte von M** verstehen wir eine k -**Integrationskarte** $\varphi : Q \rightarrow X$ mit $\varphi(Q) \subset M$ und $\varphi(Q^\circ)$ offen in M . Eine Teilmenge $M \subset X$ heiße eine k -**Fast-Mannigfaltigkeit** oder abkürzend **Fastfaltigkeit**, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine k -Integrationskarte (Q, φ) von M gibt mit $p \in \text{Inn}_M(\varphi(Q))$.

Beispiele 4.3.6. Die Oberfläche eines Würfels ist eine 2-Fastfaltigkeit. Jede k -Mannigfaltigkeit ist eine k -Fastfaltigkeit. Das Bild einer k -Integrationskarte ist stets eine k -Fastfaltigkeit. Der Mercedesstern ist ein schmutziges Beispiel für eine 1-Fastfaltigkeit. Eine Eiswaffel ist ein schmutziges Beispiel für eine 2-Fastfaltigkeit.

4.3.7 (**Diskussion der Terminologie**). Die hier eingeführten Begriffe „Integrationskarte“ und „Fastfaltigkeit“ gibt es bisher in der Literatur noch nicht. Sie sind das Ergebnis meiner Bemühungen, einen begrifflichen Rahmen bereitzustellen, in dem den aus der Schulzeit bekannten Figuren in der vollen Exaktheit dieser Vorlesung eine Oberfläche zugeordnet werden kann, und in dem diese Oberfläche dann auch berechnet werden kann. Für diesen Zweck scheint mir die hier eingeführte Begrifflichkeit praktisch und angemessen.

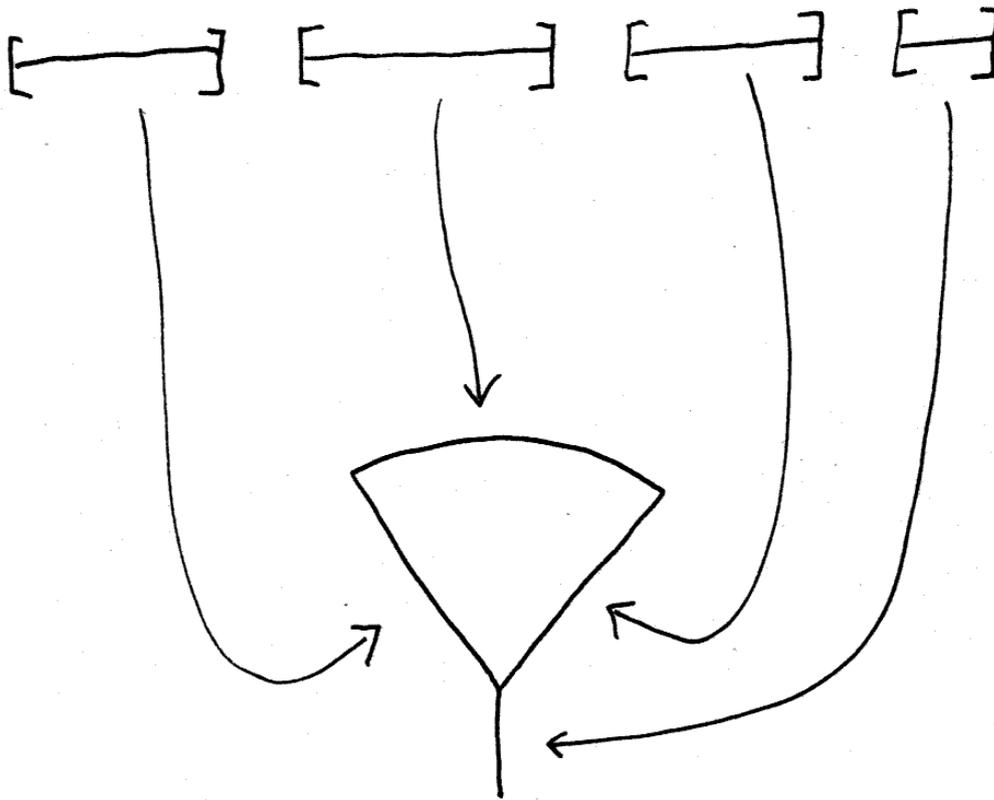
Satz 4.3.8 (Integration über Fastfaltigkeiten). *Gegeben eine k -Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Linearform auf dem Raum ihrer stetigen kompakt getragenen Funktionen*

$$\int_M : \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

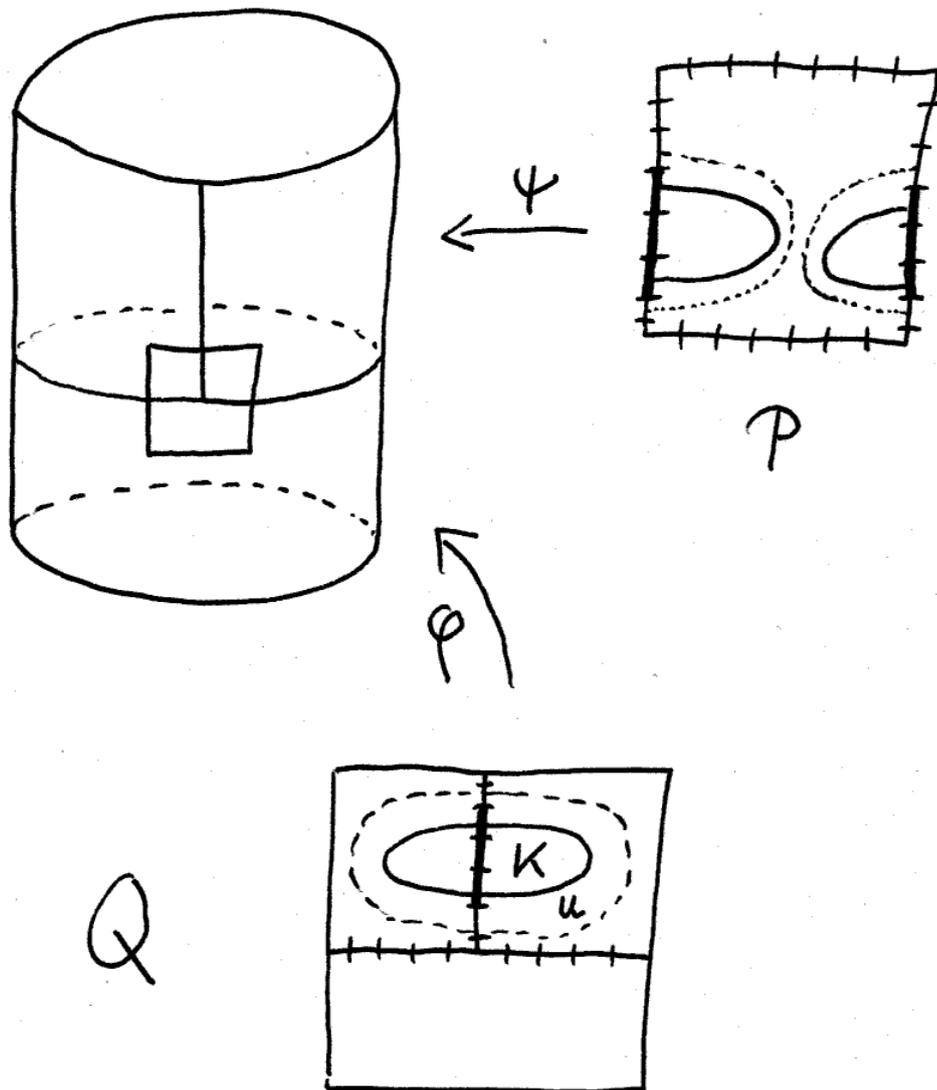
derart, daß für jede k -Integrationskarte (Q, φ) von M und jede stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit Träger im Bild besagter Integrationskarte $\text{supp } f \subset \varphi(Q)$ gilt

$$\int_M f = \int_Q f(\varphi(x)) \sqrt{\det (d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)} d^k x$$

4.3.9. Das Integral über eine endliche Vereinigung Q von paarweise disjunkten kompakten Quadern ist hierbei zu verstehen als die Summe der Integrale über die einzelnen Quader. Im Fall einer Mannigfaltigkeit stimmt dies neue Integral offensichtlich mit dem bereits in 4.2.1 definierten Integral über Mannigfaltigkeiten überein: In diesem Fall finden wir ja eine Überdeckung durch Bilder von Integrationskarten, deren Restriktion auf die Inneren der jeweiligen Definitionsbereiche eine Überdeckung durch Bilder von Karten ist. Im Spezialfall $k = n$ einer n -Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ notieren wir unser Integral $\int_M f(x) d^n x$. Für diesen Fall werden wir in [AN3] 1.6.1 die Verallgemeinerung zum sogenannten „Lebesgue-Integral“ kennenlernen. Auch im Fall $k < n$ werden wir später noch derartige Verallgemeinerungen kennenlernen.



Eine 1-Fastfaltung in der Papierebene und eine surjektive Integrationskarte derselben mit einer disjunkten Vereinigung von vier kompakten Intervallen als Definitionsbereich.



Zum Beweis der Unabhängigkeit des Integrals von der Integrationskarte

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Als Kompaktum besitzt $\text{supp } f$ nach 4.3.5 eine Überdeckung $\text{supp } f \subset \text{Inn}_M(\varphi_1(Q_1)) \cup \dots \cup \text{Inn}_M(\varphi_r(Q_r))$ durch die Inneren von Bildern von endlich vielen Integrationskarten (Q_i, φ_i) von M . Wählen wir eine daran angepaßte Teilung der Eins, so folgt die Eindeutigkeit wie im Fall von Mannigfaltigkeiten beim Beweis von 4.2.1. Um die Existenz nachzuweisen, können wir auch wie im Fall von Mannigfaltigkeiten argumentieren und müssen dann nur noch zeigen, daß gegeben zwei Integrationskarten (Q, φ) und (P, ψ) von M und eine Funktion $f \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$ mit Träger im Bild beider Integrationskarten $\text{supp } f \subset \varphi(Q) \cap \psi(P)$ gilt

$$\int_Q f(\varphi(x)) \text{vol}(d_x \varphi) d^k x = \int_P f(\psi(y)) \text{vol}(d_y \psi) d^k y$$

Hier verwenden wir wieder unsere Abkürzung $\text{vol}(d_x \varphi) = \sqrt{\det (d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)}$. Im Fall $(\text{supp } f) \subset \varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$ folgt das unmittelbar aus dem bereits behandelten Fall der Integration über Mannigfaltigkeiten, angewandt auf die Mannigfaltigkeit $\varphi(Q^\circ) \cup \psi(P^\circ)$. Im allgemeinen Fall werden wir das im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie in [AN3] 1.11.2 auch recht schnell einsehen können. Hier aber argumentieren wir noch sozusagen „zu Fuß“, und das ist etwas mühsam. Es reicht sicher, den Fall nichtnegativer Funktionen $f \geq 0$ zu betrachten und in diesem Fall zu zeigen

$$\int_Q f(\varphi(x)) \text{vol}(d_x \varphi) d^k x = \sup_{\alpha \in \mathcal{C}_1(\varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ), [0,1])} \int_Q (\alpha f)(\varphi(x)) \text{vol}(d_x \varphi) d^k x$$

mit dem Supremum wie angedeutet über alle stetigen $\alpha : M \rightarrow [0, 1]$ mit in $\varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$ enthaltenem Träger. Hierbei denken wir uns die Ausdehnung von α durch Null auf ganz M dazu, die durch unsere Annahme $\varphi(Q^\circ) \Subset M$ an Integrationskarten ermöglicht wird. Für $g : Q \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch $g(x) := f(\varphi(x)) \text{vol}(d_x \varphi)$ gilt unter unseren Annahmen $(\text{supp } g) \subset \varphi^{-1}(\psi(P))$, und es ist gleichbedeutend, für alle stetigen $g : Q \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit dieser Eigenschaft in der eben eingeführten Notation zu zeigen

$$\int_Q g = \sup_{\beta \in \mathcal{C}_1(Q^\circ \cap \varphi^{-1}(\psi(P^\circ)), [0,1])} \int_Q \beta g$$

Nach Übung 4.1.21 gilt das schon mal, wenn wir stattdessen das Supremum über alle stetigen Abbildungen $\eta : Q \rightarrow [0, 1]$ betrachten, deren Träger in der in Q offenen Menge $\{x \in Q \mid g(x) > 0\}$ enthalten ist, und dann offensichtlich sogar stärker, wenn wir das Supremum über alle derartigen stetigen Abbildungen $\eta \in \mathcal{C}_1(Q^\circ, [0, 1])$ betrachten, in Formeln

$$\int_Q g = \sup_{\eta \in \mathcal{C}_1(Q^\circ \cap \{g>0\}, [0,1])} \int_Q \eta g$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ wählen wir nun solch ein η mit $\int_Q g \leq \varepsilon + \int_Q \eta g$. Dann ist

$$K := \text{supp } \eta \subset U := \{x \in Q^\circ \mid g(x) > 0\}$$

ein Paar aus einer kompakten Menge in einer offenen Teilmenge von Q° und $\varphi(K) \subset \varphi(U)$ ein Paar aus einer kompakten Menge in einer offenen Teilmenge von M und $\psi^{-1}(\varphi(K)) \subset \psi^{-1}(\varphi(U))$ ein Paar aus einer kompakten Menge in einer offenen Teilmenge von P . Der Abstand dieser kompakten Menge zum Komplement in P der größeren offenen Menge ist nach [AN1] 7.1.18 positiv, mithin existiert eine Unterteilung von $\partial P := P \setminus P^\circ$ in kleine Würfelchen derart, daß jedes dieser Würfelchen entweder in $\psi^{-1}(\varphi(U))$ enthalten ist oder aber $\psi^{-1}(\varphi(K))$ nicht trifft. Bezeichnet nun $\xi : \varphi(Q^\circ) \rightarrow Q^\circ$ die Umkehrabbildung von φ , so ist $\xi \circ \psi : \psi^{-1}(\varphi(Q^\circ)) \rightarrow Q^\circ$ stetig differenzierbar nach 3.4.7 und wir können auf jedes unserer Würfelchen aus $\psi^{-1}(\varphi(U))$ unsere Übung 4.1.20 anwenden und finden, daß das Bild besagten Würfelchens in Q eine kompakte Nullmenge ist. So erhalten wir eine Darstellung

$$\varphi^{-1}(\psi(\partial P)) = N \cup R$$

als die Vereinigung einer kompakten Nullmenge N mit einer weiteren Menge R , die $K = (\text{supp } \eta)$ nicht trifft. Nach 4.1.19 finden wir also $\alpha \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R}^k, [0, 1])$ mit $(\text{supp } \alpha) \cap N = \emptyset$ derart, daß für unser zuvor gewähltes ε auch die zweite Ungleichung der Ungleichungskette

$$\int_Q g \leq \varepsilon + \int_Q \eta g \leq 2\varepsilon + \int_Q \alpha \eta g$$

gilt. Nach Konstruktion gilt aber $(\text{supp } \eta) \subset Q^\circ \cap \varphi^{-1}(\psi(P))$ und $(\text{supp } \alpha \eta) \cap \varphi^{-1}(\psi(\partial P)) = \emptyset$. Zusammen folgt $(\text{supp } \alpha \eta) \subset Q^\circ \cap \varphi^{-1}(\psi(P^\circ))$. Wir können damit oben $\beta = \alpha \eta$ nehmen und so zeigen, daß unser Supremum höchstens den Abstand 2ε vom behaupteten Wert haben kann. \square

Ergänzung 4.3.10 (Verallgemeinerung auf Situationen mit Einheiten). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum und ein Skalarprodukt s auf seinem Richtungsraum mit Einheiten im orientierten eindimensionalen Vektorraum \mathbb{L} im Sinne von [LA2] 6.5.7 liefern die analogen Definitionen für jedes k -Tupel von Vektoren v_1, \dots, v_k ein Element

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{\det(s(v_i, v_j))} \in \mathbb{L}^{\otimes k}$$

Weiter liefern die analogen Definitionen für jede k -dimensionale Fastfaltigkeit $M \subset X$ ein Integral

$$\int_M : \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes k}$$

So gesehen messen sich also auch in der Mathematik „Längen in Metern, Flächen in Quadratmetern und Volumen in Kubikmetern“. Betrachten wir noch allgemeiner Funktionen mit Werten in einem Banachraum V , so wird unser Integral noch allgemeiner zu einer Abbildung $\int_M : \mathcal{C}_!(M, V) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes k} \otimes V$.

Übungen

Übung 4.3.11. Sind $M \subset \mathbb{R}^m$ sowie $N \subset \mathbb{R}^n$ Fastfaltigkeiten und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ kompakt getragene stetige Funktionen, so ist auch $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine Fastfaltigkeit und $f \boxtimes g : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ eine kompakt getragene stetige Funktion und es gilt

$$\int_{M \times N} f \boxtimes g = \left(\int_M f \right) \left(\int_N g \right)$$

4.4 Explizite Berechnung einiger Integrale

Beispiel 4.4.1 (Integration über eine Kreislinie). Gegeben $R > 0$ ist die Kreislinie $S := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R\}$ eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^2 . Die Abbildung $[0, 2\pi] \rightarrow S$ mit $\vartheta \mapsto (R \cos \vartheta, R \sin \vartheta)$ ist eine surjektive **Integrationskarte** von S . Gegeben $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig zeigt unser Satz 4.3.8 zur Integration über Fastfaltigkeiten folglich

$$\int_S f = \int_0^{2\pi} f(R \cos \vartheta, R \sin \vartheta) R d\vartheta$$

Beispiel 4.4.2 (Übergang zu Polarkoordinaten, Variante). Gegeben $R > 0$ ist die Kreisscheibe $D := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R\}$ eine kompakte zweidimensionale Fastfaltigkeit in \mathbb{R}^2 und die Polarkoordinatenabbildung $P : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow D$ gegeben durch $P : (r, \vartheta)^\top \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)^\top$ ist eine surjektive Integrationskarte von D . Gegeben $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig zeigt unser Satz 4.3.8 zur Integration über Fastfaltigkeiten folglich

$$\int_D f = \int_Q f \circ P |dP| = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r dr d\vartheta$$

Beispiel 4.4.3 (Oberfläche der Einheitskugel). Die Kugelschale

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ist eine kompakte Mannigfaltigkeit und unser Satz 4.2.1 ordnet ihr eine Zahl $\int_{S^2} 1$ zu, die wir als ihre Oberfläche interpretieren. Um sie zu berechnen, wenden wir

unseren Satz 4.3.8 zur Integration über Fastfaltigkeiten an auf die surjektive Integrationskarte

$$K : [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi, \pi] \rightarrow S^2 \\ (\theta, \varphi) \mapsto (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich zu

$$dK = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten als Gram'sche Matrix

$$(dK)^\top (dK) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

Die Wurzel aus der Determinante der Gram'schen Matrix ergibt sich damit zu $\cos \theta$ und wir folgern für jede stetige Funktion $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel

$$\int_{S^2} f = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta) \cos \theta \, d\theta d\varphi$$

Wenden wir unsere Formel auf die konstante Funktion Eins an, so erhalten wir für die Oberfläche der Einheitskugel das Ergebnis

$$\int_{S^2} 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta d\varphi = 4\pi$$

Beispiel 4.4.4 (Schwerpunkt einer Halbkugel). Wir berechnen die Höhe des Schwerpunkts der massiven Halbkugel $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$. Per definitionem ist das diejenige Zahl $h \in \mathbb{R}$, für die gilt $\int_H (z-h) = 0$, so daß wir unter Zuhilfenahme von 4.4.7 erhalten

$$h \frac{2\pi}{3} = h \int_H 1 = \int_H z$$

Durch Übergang zu Kugelkoordinaten 4.1.18 folgt

$$\begin{aligned} \int_H z &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \vartheta) r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta \right) \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\vartheta) d\vartheta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{-\cos(2\vartheta)}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

womit sich die Höhe des Schwerpunkts ergibt zu $h = 3/8$.

Beispiel 4.4.5 (Trägheitsmoment der Einheitskugel). Wir berechnen das Integral der Funktion $x^2 + y^2$ über die Einheitskugel $K := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Physikalisch Gebildete erkennen, daß wir eigentlich das Trägheitsmoment der Einheitskugel um die z -Achse suchen, aber das spielt in unserer Rechnung keine Rolle. Durch Übergang zu Kugelkoordinaten 4.1.18 und mit [AN1] 3.4.31 erhalten wir

$$\int_K x^2 + y^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r^4 \sin^3(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \frac{8\pi}{15}$$

Ergänzung 4.4.6. Es sollte wohl irgendwann einmal gezeigt werden, daß mit der in [FT1] 4.4.1 definierten Interpolation $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ der Zuordnung $n \mapsto (n-1)!$ und der Konvention $x! := \Gamma(x+1)$ gilt

$$(\text{Volumen der Einheitskugel im } \mathbb{R}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$$

Diese Formel kann mithilfe der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ aus [FT1] 4.4.1 und der Erkenntnis $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ aus [FT1] 4.4.6 auch leicht in eine etwas weniger elegante Formel umgeschrieben werden, in der die Γ -Funktion nicht mehr auftritt.

Übungen

Übung 4.4.7. Man zeige, daß die Einheitskugel in \mathbb{R}^3 das Volumen $4\pi/3$ hat.

Übung 4.4.8. Man berechne das Integral der Funktion $(xyz)^2$ über die Einheitskugel in \mathbb{R}^3 .

Übung 4.4.9 (Oberfläche eines Rotationskörpers). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges kompaktes Intervall und $f : I \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Man zeige: Die **Mantelfläche** $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$ ist eine zweidimensionale kompakte Fastfaltung in \mathbb{R}^3 mit der Fläche

$$\int_M \sigma = 2\pi \int_I f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz$$

Die anschauliche Bedeutung unserer Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers erkennt man, wenn man unsere Rotationsfläche durch eine Vereinigung von dünnen Bändern der Gestalt von „oberen Rändern von Eiswaffeln“ approximiert.

Übung 4.4.10. Gegeben eine kompakte k -dimensionale Fastfaltung $M \subset \mathbb{R}^n$ und eine Isometrie $A : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ zeige man

$$\int_M 1 = \int_{A(M)} 1$$

Insbesondere und in Worten bleibt also beim Drehen und Verschieben von Flächen im Raum die Größe ihrer Fläche unverändert.

4.5 Markov-Ketten*

4.5.1. Hier bespreche ich eine Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes, die eigentlich eher in die lineare Algebra oder Wahrscheinlichkeitstheorie gehört.

4.5.2. Gegeben sei eine endliche Menge E , deren Elemente **Zustände** heißen mögen. Gegeben sei weiter eine $(E \times E)$ -Matrix Q mit Einträgen in $[0, 1]$ und Spaltensummen Eins, in Formeln eine Abbildung $Q : E^2 \rightarrow [0, 1], (i, j) \mapsto Q_{ij}$ mit $\sum_i Q_{ij} = 1$ für alle j . Wir nennen Q_{ij} die **Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand j in den Zustand i** und unsere Forderung $\sum_i Q_{ij} = 1$ für alle j bedeutet, daß „vom Zustand j aus im nächsten Schritt mit Wahrscheinlichkeit Eins wieder einer unserer Zustände erreicht werden soll“. Das Datum (E, Q) nennen wir eine **Markov-Kette**. Beginnen wir mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung p auf E , also einer Abbildung $p : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i \in E} p(i) = 1$, und fassen sie als einen Spaltenvektor auf, so stellt sich nach einem Schritt die Verteilung Qp ein und nach n Schritten die Verteilung $Q^n p$. Wir stellen uns nun die Frage, unter welchen Umständen die Folge der $Q^n p$ für alle p konvergiert, unter welchen Umständen ihr Grenzwert zusätzlich gar nicht von p abhängt, und wie schnell unsere Folge im Zweifelsfall konvergiert.

Beispiel 4.5.3. Zu einem endlichen Köcher im Sinne von [LA2] 8.5.2 mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß von jeder seiner Ecken mindestens ein Pfeil ausgeht, erhalten wir die Markov-Kette der „zufälligen Wanderungen in unserem Köcher“ wie folgt: Als Zustände nehmen wir die Ecken des Köchers und denken uns dabei, daß sich ein Wanderer an besagter Ecke befinden möge. In jedem Zeitschritt sucht sich unser Wanderer dann zufällig einen ausgehenden Pfeil aus und wandert auf diesem zur nächsten Ecke. Verfeinern wir unsere Regel dadurch, daß wir jedem Pfeil $i \leftarrow j$ noch eine Wahrscheinlichkeit Q_{ij} zuordnen, mit der er von unserem Wanderer ausgesucht wird, und fassen dafür alle mehrfachen Pfeile zwischen je zwei vorgegebenen Ecken zu einem einfachen Pfeil mit entsprechend höherer Wahrscheinlichkeit zusammen, so sind wir auch schon wieder beim allgemeinen Fall gelandet.

Beispiel 4.5.4 (Urnenmodell von Ehrenfest). In zwei durch ein Loch verbundenen Kammern befinden sich insgesamt $N \geq 1$ nicht unterscheidbare Teilchen. Wir betrachten den Raum $E = \{0, 1, \dots, N\}$ aller „Zustände“, wobei der Zustand i bedeuten möge, daß sich i Teilchen in der linken Kammer und die restlichen $N - i$ Teilchen in der rechten Kammer befinden. Als Übergangswahrscheinlich-

keiten wählen wir

$$Q_{ij} = \begin{cases} j/N & i = j - 1; \\ (N - j)/N & i = j + 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In jedem Zeitschritt wechselt also genau ein Teilchen die Kammer, und die Wahrscheinlichkeit, daß das ein Teilchen aus einer Kammer mit j Teilchen ist, beträgt genau j/N . In diesem Fall konvergiert die Folge $Q^n p$ nicht für alle p , da sich ja in jeder Kammer immer abwechselnd erst eine gerade und dann wieder eine ungerade Anzahl von Teilchen befindet.

Satz 4.5.5 (Konvergenz endlicher Markov-Ketten). *Ist bei einer endlichen Markov-Kette (E, Q) die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen je zwei Zuständen positiv, in Formeln $Q_{ij} > 0 \forall i, j$, so gibt es genau eine stabile Verteilung s und für jede Anfangsverteilung p gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n p = s$$

Ergänzung 4.5.6 (Bewertung von Seiten im Netz). Die Bewertung von Seiten im Netz durch Suchmaschinen baut auf der Vorstellung auf, daß ein Surfer auf einer gegebenen Seite jeden der Verweise zu weiteren Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit anklickt. Damit er nicht bei einer Seite hängenbleiben kann, die auf gar keine weitere Seite verweist, denkt man sich dabei auf jeder Seite zusätzlich einen Verweis angebracht, der einen beim Daraufklicken zu einer zufällig ausgesuchten Seite schickt, und der mit derselben Wahrscheinlichkeit angeklickt wird wie alle anderen. Die durch diese Markovkette bestimmte stabile Verteilung ist dann die gesuchte Bewertung von Seiten im Netz. Eine Seite ist damit desto höher bewertet, je mehr Seiten darauf verweisen, wobei Verweise von Seiten, die ihrerseits höher bewertet sind, entsprechend stärker gewichtet werden.

Beweis. Sicher beschreibt die Matrix Q einen Endomorphismus von $\text{Ens}(E, \mathbb{R})$, der jeden Vektor der Standardbasis ins Innere des positiven Quadranten kippt und der die affine Hyperebene $H = \{(x_i)_{i \in E} \mid \sum x_i = 1\}$ auf sich selbst abbildet. Es scheint mir damit anschaulich klar, daß Q eine Kontraktion $Q : H \rightarrow H$ definiert und daß der Fixpunkt dieser Kontraktion, dessen Existenz durch den Banach'schen Fixpunktsatz [AN3] ?? gesichert ist, im Innern des positiven Quadranten $\text{Ens}(E, \mathbb{R}_{>0})$ liegen muß. Um das zu beweisen reicht es zu zeigen, daß Q bezüglich irgendeiner Norm kontrahierend wirkt auf der linearen Hyperebene L , die gegeben wird durch die Gleichung $\sum x_i = 0$. Wir zeigen das bezüglich der Norm $|x| = \sum |x_i|$. Sei δ der kleinste Eintrag von Q . Schreiben wir $Q = \delta U + R$ für U die Matrix mit einer Eins in jedem Eintrag, so hat R nur nichtnegative Ein-

träge. Damit erhalten wir für $x \in L$ unschwer

$$|Qx| = |Rx| = \sum_i \left| \sum_j R_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i,j} R_{ij} |x_j| = \lambda |x|$$

für $\lambda = 1 - n\delta$ die Summe der Einträge von R in einer und jeder Spalte. Also ist $Q : H \rightarrow H$ kontrahierend und hat genau einen Fixvektor s , dessen Koordinaten alle positiv sein müssen. Alle anderen Eigenwerte von Q müssen auch Eigenwerte der Einschränkung auf die lineare Ebene L mit der Gleichung $\sum x_i = 0$ sein und sind folglich im Absolutbetrag beschränkt durch unsere Kontraktionskonstante $\lambda = 1 - n\delta$. \square

5 Wegintegrale und Potentiale

5.1 Vektorfelder und Kovektorfelder

5.1.1. Unter einem reellen Raum verstehen wir wie in [AN1] 7.4.1 einen affinen Raum über dem Körper der reellen Zahlen.

Definition 5.1.2. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Vektorfeld** oder genauer ein **relatives Vektorfeld auf U** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} A : U &\rightarrow \vec{X} \\ p &\mapsto A_p \end{aligned}$$

von U in den Richtungsraum \vec{X} von X .

5.1.3 (**Diskussion der Terminologie**). Später einmal werden wir ein „Vektorfeld auf einer in die Ebene eingebettete Kreislinie“ als eine Abbildung verstehen wollen, die jedem Punkt der Kreislinie einen Tangentialvektor an besagte Kreislinie an besagtem Punkt zuordnet. Das ist dann natürlich etwas anderes als ein „relatives“ Vektorfeld, das jedem Punkt der Kreislinie einfach irgendeinen Richtungsvektor der Ebene zuordnet. Vorerst jedoch werden wir Vektorfelder, wenn es darauf ankommt, eh nur auf halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume betrachten, und in diesem Fall stimmen unsere „relativen“ Vektorfelder mit den „richtigen“ Vektorfeldern, wie wir sie später definieren werden, überein.

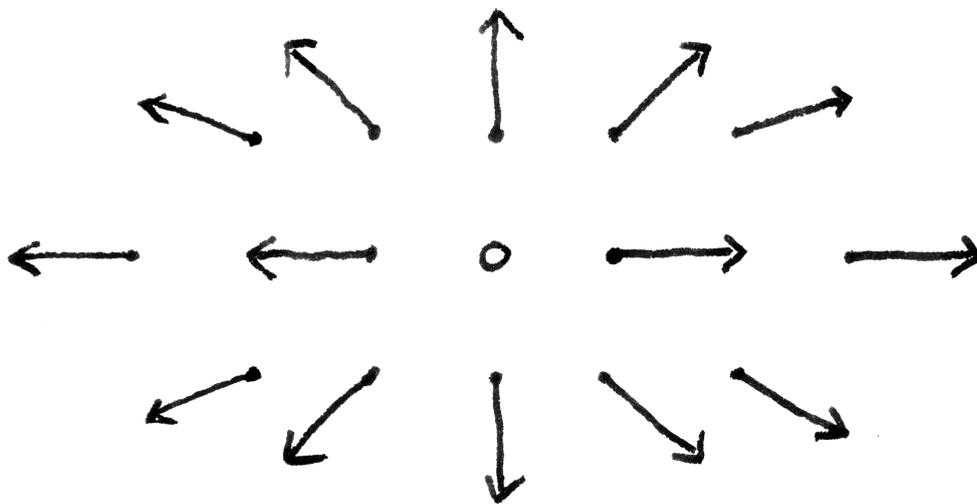
5.1.4. Wir schreiben im Zusammenhang mit Differentialgleichungen statt A_p auch $A(p)$. Die Notation A_p dahingegen ist praktisch, wenn wir unsere Vektorfelder wie in 5.1.19 auf Funktionen anwenden wollen. In der physikalischen Terminologie heißen Vektorfelder **kontravariant** aus Gründen, die in 5.1.24 noch diskutiert werden.

5.1.5. Zu jedem reellen Vektorraum V bilden wir, wie in der linearen Algebra in [LA1] 2.9.1 folgende ausführlich diskutiert und erläutert, seinen **Dualraum** $V^* = V^\top = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$.

Definition 5.1.6. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Kovektorfeld** oder genauer ein **relatives Kovektorfeld auf U** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega : U &\rightarrow \vec{X}^* \\ p &\mapsto \omega_p \end{aligned}$$

von U in den Dualraum \vec{X}^* des Richtungsraums von X .



Graphische Darstellung eines Vektorfelds auf der Papierebene, das in geeigneten Koordinaten in der Notation von 5.1.20 durch die Formel

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \partial_x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \partial_y$$

gegeben würde. Hier haben wir zu ausgewählten Punkten den ihnen zugeordneten Richtungsvektor als Pfeil von besagtem Punkt zu dem um diesen Richtungsvektor verschobenen Punkt dargestellt.

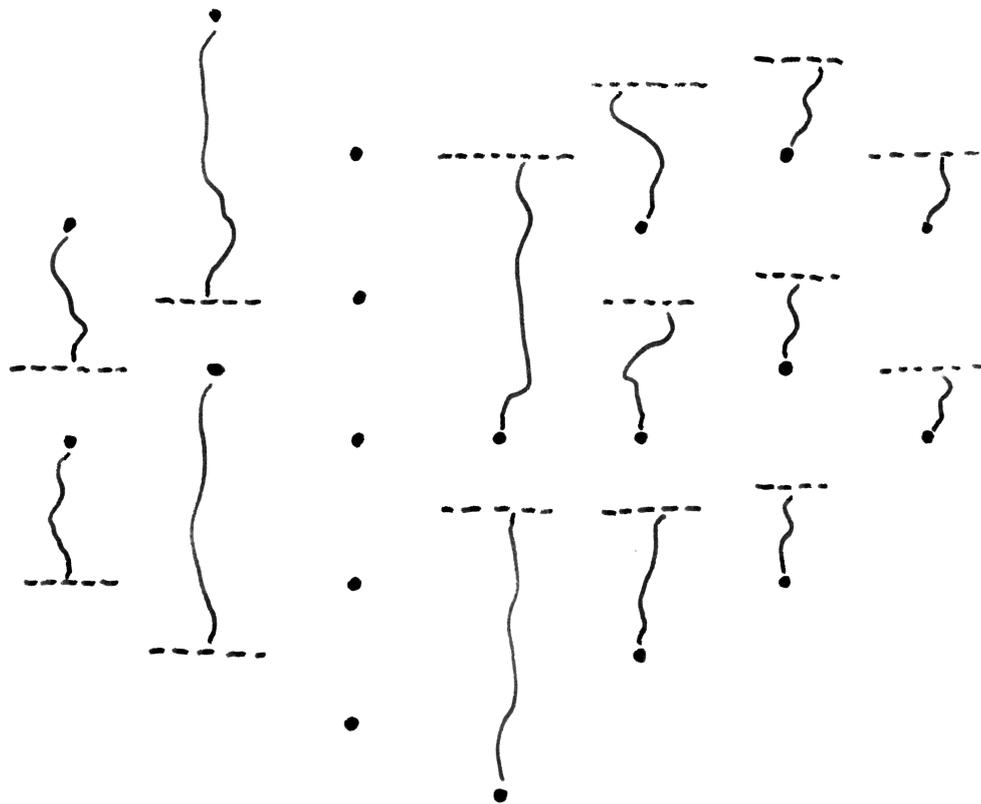
5.1.7 (**Diskussion der Terminologie**). Später einmal in [ML] 6.1.11 werden wir ein „Kovektorfeld auf einer in die Ebene eingebettete Kreislinie“ als eine Abbildung verstehen wollen, die jedem Punkt der Kreislinie eine Linearform auf dem Tangentialraum an besagte Kreislinie in besagtem Punkt zuordnet. Das ist dann natürlich etwas anderes als ein „relatives“ Kovektorfeld, das jedem Punkt der Kreislinie einfach irgendeine Linearform auf dem Richtungsraum der Ebene zuordnet. Jedes „relative“ Kovektorfeld liefert jedoch durch Einschränkung ein „richtiges“ Kovektorfeld, wie wir es später definieren werden, und auf halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume stimmen unsere „relativen“ Kovektorfelder eh mit diesen „richtigen“ Kovektorfeldern überein. Deshalb kommt es auf diese Feinheiten vorerst noch nicht an.

5.1.8. Wir schreiben hier ω_p statt $\omega(p)$, damit $\omega_p(v) \in \mathbb{R}$ den Wert der Linearform ω_p auf einem Vektor $v \in \vec{X}$ bezeichnen kann. Ein Kovektorfeld nennt man auch eine **Pfaff'sche Form** oder eine **Differentialform erster Ordnung** oder eine **1-Form**. In der physikalischen Terminologie heißen Kovektorfelder **kovariant** aus Gründen, die in 5.1.24 noch diskutiert werden.

5.1.9 (**Graphische Darstellung von Kovektorfeldern**). Für die graphische Darstellung von Kovektorfeldern kenne ich keinen Zugang, der mich vollständig überzeugt. Im Bild habe ich zu ausgewählten fett eingezeichneten Punkten den ihnen zugeordneten Kovektor dargestellt durch eine gestrichelte Linie, die jeweils einen Teil der Geraden zeigt, deren Punkte vom jeweiligen fetten Punkt durch einen Richtungsvektor erreicht werden können, auf dem der dem jeweilige Kovektor den Wert 1 annimmt. Die eingezeichneten Fäden deuten an, welche gestrichelte Linie jeweils zu welchem fetten Punkt gehört. Je weiter die gestrichelte Linie von ihrem fetten Punkt entfernt ist, desto kleiner ist also unser Kovektor, so bedeutet etwa der doppelte Abstand den halben Kovektor. Fette Punkte ganz ohne gestrichelte Linie stehen für den Wert Null unseres Kovektorfelds an besagter Stelle. Daß eine gestrichelte Linie durch „ihren“ fetten Punkt geht, ist nicht zulässig. Man mag versuchen, in nebenstehendem Bild auch noch das Vektorfeld $(x, y) \mapsto (1, x)$ oder in der Notation aus 5.1.20 geschrieben $\partial_x + x\partial_y$ einzuzeichnen und anschaulich zu verstehen, daß das Einsetzen im Sinne von 5.1.12 dieses Vektorfelds in unser Kovektorfeld auch tatsächlich die Funktion $(x, y) \mapsto x^2$ liefert.

Beispiel 5.1.10 (**Kovektorfelder auf der Zeitachse**). Ein Kovektorfeld auf der Zeitachse \mathbb{T} aus [LA1] 6.1.11 können wir uns in der in [LA1] 2.9.4 noch genauer erklärten Weise denken als eine Vorschrift, die jedem Zeitpunkt eine Frequenz oder, vielleicht noch besser, eine Drehgeschwindigkeit zuordnet.

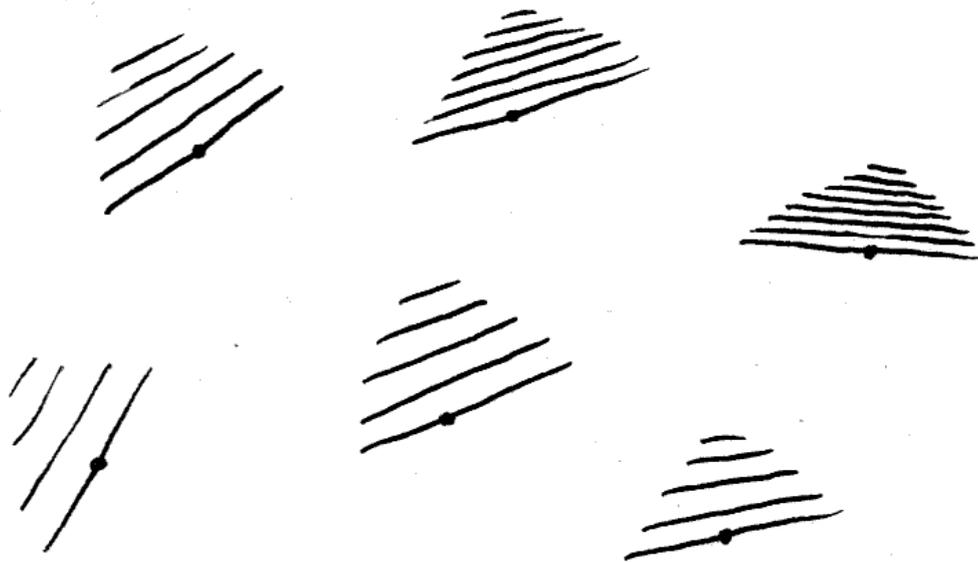
5.1.11 (**Addition von Feldern und Multiplikation mit Funktionen**). Wir addieren Vektorfelder wie auch Kovektorfelder punktweise, die Summe $\omega + \eta$ zweier Kovektorfelder ist also etwa erklärt durch $(\omega + \eta)_p = \omega_p + \eta_p$, wobei letzteres



Versuch der graphischen Darstellung eines Kovektorfelds auf der Papierebene, das in geeigneten Koordinaten in der Notation 5.1.14 durch die Formel

$$x dy$$

gegeben würde.



Alternativer Versuch der graphischen Darstellung eines Kovektorfelds auf der Papierebene. Hier legen wir die Konvention aus [LA1] 2.9.1 zur graphischen Darstellung von Kovektoren zugrunde, der Wert auf einem Vektor ist also salopp gesagt die Anzahl der gekreuzten Striche. Insbesondere bedeuten „enger zusammenliegende Striche“ hier „größere Kovektoren“. Bei einer Streckung etwa um einen Faktor Zwei werden also Vektoren doppelt so lang, aber in Gegensatz dazu Kovektoren halb so lang, weil die Striche weiter auseinander rücken.

Summenzeichen die Addition in \vec{X}^* meint. Wir multiplizieren Vektorfelder und auch Kovektorfelder mit Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls punktweise, indem wir setzen $(fA)_p = f(p)A_p$ bzw. $(f\omega)_p = f(p)\omega_p$.

5.1.12 (Paaren von Vektorfeldern mit Kovektorfeldern). Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ist $A : U \rightarrow \vec{X}$ ein Vektorfeld und $\omega : U \rightarrow \vec{X}^*$ ein Kovektorfeld, so können wir auch das Vektorfeld A in das Kovektorfeld ω einsetzen oder, vielleicht besser gesagt, das Kovektorfeld ω auf dem Vektorfeld A auswerten oder, ganz ausgewogen und immer noch gleichbedeutend, das **Kovektorfeld ω mit dem Vektorfeld A paaren**. Wir erhalten dann eine Funktion

$$\begin{aligned} \omega(A) = \langle \omega, A \rangle : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \omega_p(A_p) \end{aligned}$$

5.1.13 (Verschiedene Interpretationen von Kovektorfeldern). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Im Sinne von [GR] 2.3.34 können wir ein Kovektorfeld $\omega : U \rightarrow \vec{X}^*$ auch auffassen als eine Abbildung $U \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ oder sogar als eine Abbildung $\vec{X} \rightarrow \text{Ens}(U, \mathbb{R})$. Es gehört etwas Übung dazu, alle diese verschiedenen Aspekte gleichzeitig präsent zu haben. Wir können also ein Kovektorfeld einerseits an einem Punkt $p \in U$ auswerten und so eine Linearform $\omega_p : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Richtungsraum erhalten, wir können es aber andererseits auch auf einem Richtungsvektor $v \in \vec{X}$ auswerten und so eine reellwertige Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \omega_p(v)$ erhalten. Wir können es sogar etwas allgemeiner, wie in 5.1.12 besprochen, auf einem Vektorfeld $p \mapsto v_p$ auswerten und auch so eine reellwertige Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \omega_p(v_p)$ erhalten. Man beachte, daß beim Auswerten von Kovektorfeldern auf Vektorfeldern keinerlei Differentiation stattfindet sondern ausschließlich lineare Algebra, nur eben „in Abhängigkeit vom Punkt p “.

Definition 5.1.14 (Differential einer Funktion als Kovektorfeld). Seien X ein reeller endlichdimensionaler Raum und $U \subset X$ eine halboffene Teilmenge. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist das Differential von f bei p eine lineare Abbildung $d_p f : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Unter dem **Differential df von f** verstehen wir dann das Kovektorfeld auf U , das gegeben wird durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \vec{X}^* \\ p &\mapsto d_p f \end{aligned}$$

Für das Differential von einem Produkt gilt nach 1.4.5 die Produktregel $d(fg) = fdg + gdf$ und für das Differential einer Summe haben wir $d(f + g) = df + dg$.

5.1.15 (Anschauung für das Differential einer Funktion). In der vor 5.1.12 erklärten Anschauung für Kovektorfelder wäre das Differential einer Funktion auf

der Ebene, aufgefaßt als die Höhe in einer Landkarte in Metern, salopp gesprochen zu verstehen als eine Linearisierung des durch die Höhenlinien gegebenen Bildes, mit einer Höhenlinie pro Meter.

5.1.16 (Darstellung von Kovektorfeldern in Koordinaten). Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ halboffen und bezeichnet $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Restriktion der i -ten Koordinate auf U , so ist $dx_i : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ konstant die i -te Koordinate selber. Dieselbe Bedeutung vereinbaren wir für beliebige Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$. Die Koordinaten bilden nun eine Basis des Dualraums von \mathbb{R}^n , folglich läßt sich jedes Kovektorfeld auf U schreiben in der Gestalt $\sum a_i dx_i$ mit eindeutig bestimmten $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ich vermute, daß hier der Ursprung der Bezeichnung als „Differentialform“ zu suchen ist: In gewisser Weise können wir eben unsere Kovektorfelder als „Linearkombinationen von Differentialen“ schreiben. Für eine differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer halboffenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ haben wir dann

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Man prüft das leicht durch Auswerten beider Seiten an einer Stelle $p \in U$ und Anwenden der so entstehenden Linearformen auf alle Vektoren der Standard-Basis des \mathbb{R}^n . Speziell haben wir für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ also $df = f'(x)dx$. Ist U nicht offen, sondern nur halboffen, so sind die partiellen Ableitungen dabei im Sinne unserer Notation 1.2.13 zu verstehen.

5.1.17 (Anschauliche Bedeutung von Formeln in Differentialen). Anschaulich gesprochen beschreibt die in 5.1.14 herausgestellte Gleichung, wie sich der Funktionswert der Funktion f in erster Näherung ändert, wenn wir an den Koordinaten x_i wackeln: Genauer gilt bei festen x_1, \dots, x_n für $\delta x_1, \dots, \delta x_n \in \mathbb{R}$ so nah bei Null, daß alles definiert ist, eben

$$f(x_1 + \delta x_1, \dots, x_n + \delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + R(\delta x_1, \dots, \delta x_n)$$

mit einem Rest R , der auch nach dem Teilen durch das Maximum der Beträge aller δx_i noch gegen Null strebt, wenn alle δx_i gegen Null streben. Hierbei ist zu verstehen, daß die fraglichen partiellen Ableitungen an unserer festen Stelle (x_1, \dots, x_n) ausgewertet werden sollen, und um die partiellen Ableitungen zu bilden, müssen die x_i natürlich noch als variabel gedacht werden. Vielleicht wäre es hier konsistenter gewesen, die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ zu notieren oder sogar $(\partial_i f)(x_1, \dots, x_n)$ um anzudeuten, daß sie ja an der festen Stelle (x_1, \dots, x_n) auszuwerten sind, aber es kommt bei komplizierteren Formeln auch nicht selten vor, daß größere Präzision nicht zu besserer Verständlichkeit führt. Die Notation δx_i könnten wir zu δ_i abkürzen, aber dann wirkt die Formel weniger suggestiv.

Kürzen wir auch noch die linke Seite zu δf ab, so können wir unsere Identität mit der in 2.3.2 eingeführten Notation auch schreiben als die Übereinstimmung erster Ordnung von Funktionen der „Verrückungen“ δx_i in der Gestalt

$$\delta f \sim_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

Beispiel 5.1.18. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto 1/\|v\|$ hat mit der Konvention $v := (x, y, z)$ das Differential $df = -(x dx + y dy + z dz)/\|v\|^3$.

Definition 5.1.19 (Ableiten in Richtung eines Vektorfelds). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X , eine halboffene Teilmenge $U \subset X$, ein Vektorfeld $A : U \rightarrow \vec{X}$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ erklären wir eine Funktion $(Af) : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$(Af)(p) := (d_p f)(A_p)$$

Ist U eine Umgebung von p , so ist nach 1.2.7 also $(Af)(p)$ die Richtungsableitung von f bei p in der Richtung A_p . Wir sagen deshalb auch, die Funktion Af entstehe aus f durch **Ableiten in Richtung des Vektorfelds A** . In anderen Worten entsteht diese Funktion durch das Paaren des Vektorfelds A mit dem durch das Differential der Funktion f gegebenen Kovektorfeld df . Mit unserer Notation 5.1.12 kann diese Funktion auch $Af = \langle df, A \rangle$ geschrieben werden.

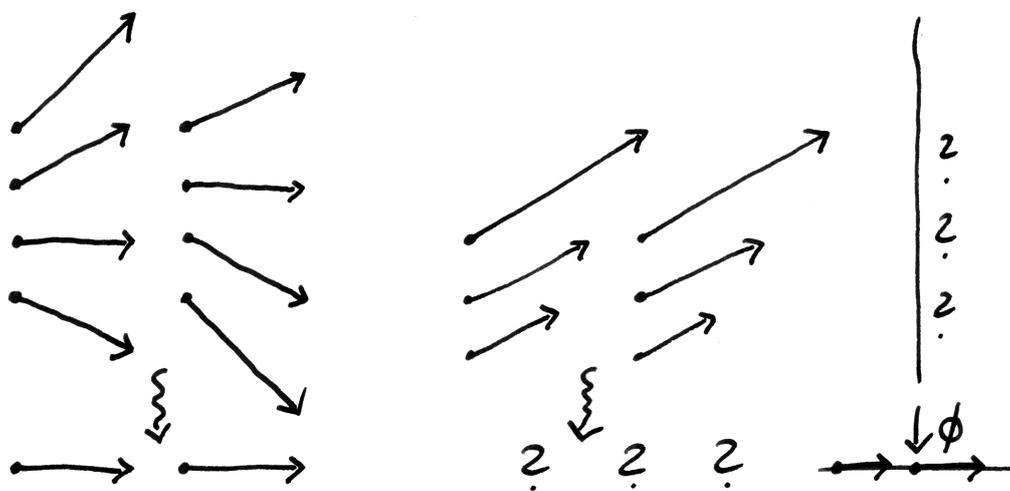
5.1.20 (Darstellung von Vektorfeldern in Koordinaten). Meist werden Vektorfelder identifiziert mit den zugehörigen Differentialoperatoren. So notiere ich etwa das konstante Vektorfeld v wie die zugehörige Richtungsableitung D_v . Spezieller bezeichnet man das konstante Vektorfeld mit Wert e_i auf \mathbb{R}^n oft als „das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_i}$ “ oder „das Vektorfeld ∂_i “ und im Fall nicht nummerierter Koordinaten wie etwa x, y, z auf \mathbb{R}^3 schreiben wir für die fraglichen Vektorfelder auch $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ oder dergleichen. Sicher läßt sich für $U \subset \mathbb{R}^n$ halboffen jedes Vektorfeld auf U schreiben in der Gestalt

$$\sum c_i \partial_i$$

mit eindeutig bestimmten $c_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Paaren wir etwa das Vektorfeld $\sum c_i \partial_i$ auf \mathbb{R}^n mit dem Kovektorfeld $\sum a_i dx_i$, so ergibt sich die Funktion $\sum a_i c_i$. In unserer Notation 5.1.12 und mit dem Kroneckerdelta haben wir nämlich in der Tat

$$\langle dx_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$$

Definition 5.1.21 (Verwandtschaft von Feldern und von Funktionen). Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume X und Y .



Ganz links ist zuerst ein Vektorfeld auf der Ebene abgebildet, das unter der orthogonalen Projektion auf die x -Achse verwandt ist zu einem ebenfalls eingezeichneten konstanten Vektorfeld auf der x -Achse. In der Mitte dann ein Vektorfeld auf der Ebene, das unter dieser Projektion zu keinem Vektorfeld auf der x -Achse verwandt ist. Schließlich ganz rechts die konstante Abbildung der y -Achse auf einen Punkt der x -Achse und ein Vektorfeld auf der x -Achse, das darunter zu keinem Vektorfeld auf der y -Achse verwandt ist.

1. Vektorfelder $A : U \rightarrow \vec{X}$ und $B : V \rightarrow \vec{Y}$ heißen **ϕ -verwandt** und wir schreiben $\phi : A \rightsquigarrow B$ genau dann, wenn für alle $x \in U$ gilt

$$(d_x \phi)(A_x) = B_{\phi(x)}$$

2. Kovektorfelder $\eta : U \rightarrow \vec{X}^*$ und $\omega : V \rightarrow \vec{Y}^*$ heißen **ϕ -verwandt** und wir schreiben $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$ genau dann, wenn für alle Punkte $x \in U$ gilt $\eta_x = \omega_{\phi(x)} \circ d_x \phi$ oder gleichbedeutend, mit der transponierten Abbildung $(d_x \phi)^\top : \vec{X}^* \rightarrow \vec{Y}^*$ aus [LA1] 2.9.13 zum Differential $d_x \phi : \vec{Y} \rightarrow \vec{X}$ notiert,

$$\eta_x = (d_x \phi)^\top(\omega_{\phi(x)})$$

3. Reelle Funktionen $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißen **ϕ -verwandt** und wir schreiben $\phi : g \rightsquigarrow f$ genau dann, wenn gilt $g = f \circ \phi$, als da heißt, wenn für alle $x \in U$ gilt

$$g(x) = f(\phi(x))$$

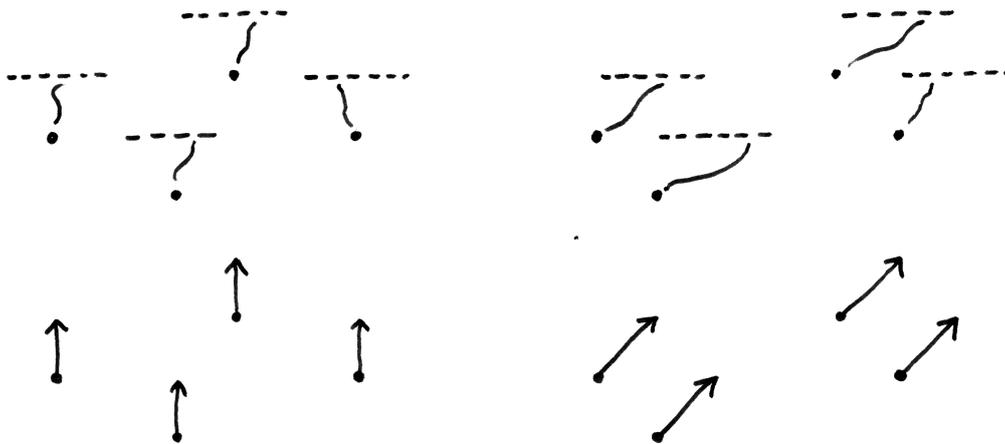
Etwas allgemeiner brauchen wir hier V gar nicht halboffen zu fordern, dann müssen wir nur B und ω als relative Felder auffassen, und bei der Definition der Verwandtschaft von Funktionen dürfen U und V sogar völlig beliebige Mengen sein.

5.1.22 (Existenz und Eindeutigkeit von Verwandten). Unter einer differenzierbaren Bijektion zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume mit differenzierbarer Umkehrabbildung haben alle Vektorfelder, Kovektorfelder und Funktionen jeweils genau einen Verwandten, und unter der Identität sind sie jeweils selbst dieser einzige Verwandte. Ist allgemeiner $\phi : U \rightarrow V$ eine beliebige differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume, so hat jedes Kovektorfeld ω auf V immer noch genau einen „Rückwärtsverwandten“ auf U , der eben gegeben wird durch die Formel $\eta_x = (d_x \phi)^\top(\omega_{\phi(x)})$ und der notiert wird als

$$\eta = \phi^*(\omega)$$

Er heißt das **mit ϕ zurückgezogene** oder **zurückgeholte Kovektorfeld**. Ebenso hat jede Funktion f auf V genau einen „Rückwärtsverwandten“, eben die Funktion $f \circ \phi$, die man auch die **mit ϕ zurückgezogene Funktion** nennt und manchmal $\phi^*(f)$ notiert. Bei Vektorfeldern liegen die Verhältnisse nicht so einfach, aber ist ϕ surjektiv, so hat jedes Vektorfeld auf U zumindest nicht mehr als einen „Vorwärtsverwandten“ auf V .

5.1.23 (Partielle Ableitungen in lokalen Koordinaten). Gegeben ein endlichdimensionaler affiner Raum X und eine halboffene Teilmenge $U \subset X$ und ein



Dieses Bild soll den Effekt der Scherung $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, y)$ auf dem Kovektorfeld dy und dem Vektorfeld ∂_y darstellen. Bei der bildlichen Darstellung unseres Kovektorfelds folgen wir den auf Seite 108 im Anschluß an 5.1.2 eingeführten Konventionen. Man erkennt, daß dy unter dieser Scherung verwandt ist zu sich selber, in Formeln $\phi : dy \rightsquigarrow dy$, wohingegen ∂_y verwandt ist zu $\partial_x + \partial_y$, in Formeln $\phi : \partial_y \rightsquigarrow \partial_x + \partial_y$. Alternativ und im Wesentlichen gleichbedeutend mag man sich auch auf den Standpunkt stellen, daß wir auf dem Wertebereich von ϕ ein „verschertes Koordinatensystem“ (u, v) eingeführt haben mit u und v den Komponenten der zu ϕ inversen Abbildung, also $u(x, y) = x - y$ und $v(x, y) = y$. Dann erhalten wir statt der obigen Verwandtschaften die Formeln $dv = dy$ sowie $\partial_v = \partial_x + \partial_y$.

Diffeomorphismus alias ein System lokaler Koordinaten $(x_1, \dots, x_n) : U \xrightarrow{\sim} V$ mit einer halboffenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet man gerne mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ oder auch mit ∂_i diejenigen Vektorfelder auf U , die unter diesem Diffeomorphismus zu den eben eingeführten Vektorfeldern auf \mathbb{R}^n verwandt sind. Man beachte jedoch, daß für eine einzelne Funktion $x : U \rightarrow \mathbb{R}$ nicht sinnvoll ein Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x}$ auf U erklärt werden kann: Selbst wenn sich unsere Funktion zu einem Koordinatensystem ergänzen lassen sollte, wird doch das durch diese Ergänzung erklärte Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x}$ wesentlich von der Wahl der anderen Koordinaten abhängen. All das steht im Gegensatz zum Differential dx einer Funktion x , das durchaus auch für eine einzelne Funktion sinnvoll definiert ist.

5.1.24 (Kovariante und kontravariante Transformation). Zumindest unter linearen Koordinatentransformationen verhalten sich Kovektorfelder „so wie Koordinaten“. Ist etwa x_1, \dots, x_n ein System linearer Koordinaten auf einem reellen Vektorraum X im Sinne einer Familie von linearen Abbildungen $x_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, die zusammen einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ liefern, und ist y_1, \dots, y_n ein anderes System linearer Koordinaten, und haben wir etwa $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ für eine Matrix von reellen Zahlen a_{ij} , so gilt die Identität von Kovektorfeldern $dy_i = \sum_j a_{ij} dx_j$. Für die durch unsere Koordinatensysteme bestimmten Vektorfelder haben wir dahingegen umgekehrt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

und benötigen die inverse Matrix, um $\frac{\partial}{\partial y_i}$ durch die $\frac{\partial}{\partial x_j}$ auszudrücken. In diesem Sinne „transformieren sich Kovektorfelder wie Koordinaten“ und heißen deshalb auch „kovariant“, wohingegen Vektorfelder sich „vermittels der inversen transponierten Matrix transformieren“ und deshalb „kontravariant“ heißen.

5.1.25 (Transitivität von Verwandtschaft). Seien $\phi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow W$ differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume. Ist ein Vektorfeld C auf W unter ψ verwandt zu B , so ist auch A unter $\psi \circ \phi$ verwandt zu C , in Formeln implizieren $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\psi : B \rightsquigarrow C$ also $\psi \circ \phi : A \rightsquigarrow C$. Analoges gilt für Funktionen und Kovektorfelder und läßt sich in den beiden letzteren Fällen auch schreiben als $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$, so daß etwa für jedes Kovektorfeld κ auf C gilt

$$(\psi \circ \phi)^*(\kappa) = \phi^*(\psi^*(\kappa))$$

Aus Gründen der formalen Vollständigkeit sei noch ergänzt, daß unter der Identität, wie bereits in 5.1.22 erwähnt, jedes Vektorfeld und jedes Kovektorfeld und jede Funktion verwandt ist zu sich selber und nur zu sich selber. Es gilt also in Formeln $(\text{id} : A \rightsquigarrow B) \Leftrightarrow A = B$ und dergleichen.

5.1.26 (Das Differential respektiert Verwandtschaft). Verwandte Funktionen haben verwandte Differentiale. Ist genauer $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume, so impliziert in Formeln $\phi : g \rightsquigarrow f$ bereits $\phi : dg \rightsquigarrow df$, und gleichbedeutend haben wir für alle f die Identität $\phi^*(df) = d(\phi^*(f)) = d(f \circ \phi)$. In der Tat gilt für jeden Punkt y nach der Definition der Verwandtschaft und der Kettenregel

$$(\phi^*(df))_y = (d_{\phi(y)}f) \circ d_y\phi = d_y(f \circ \phi)$$

5.1.27 (Das Ableiten nach Vektorfeldern respektiert Verwandtschaft). Wenden wir verwandte Vektorfelder auf verwandte differenzierbare Funktionen an, so erhalten wir wieder verwandte Funktionen. Ist genauer $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume, so impliziert in Formeln $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\phi : g \rightsquigarrow f$ bereits $\phi : Ag \rightsquigarrow Bf$ oder umgeschrieben $(Bf) \circ \phi = A(f \circ \phi)$. Das folgt direkt aus der Kettenregel in mehreren Veränderlichen. Letzteres ist sogar eine hinreichende Bedingung: Gilt $(Af) \circ \phi = B(f \circ \phi)$ für alle differenzierbaren Funktionen f , so folgt $\phi : A \rightsquigarrow B$.

Beispiel 5.1.28 (Zurückholen von Kovektorfeldern in Koordinaten). Für $X = \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten x_1, \dots, x_n und $Y = \mathbb{R}^m$ mit Koordinaten y_1, \dots, y_m und $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ eine differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge von \mathbb{R}^m in eine halboffene Teilmenge von \mathbb{R}^n ergibt sich $\phi^*(dx_i) = d(\phi^*x_i) = d\phi_i = \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$, da das Differential Verwandtschaft respektiert **5.1.26** und wir für das Differential einer Funktion bereits die explizite Formel **5.1.14** kennen. Folglich kann das Zurückholen von Kovektorfeldern in Koordinaten beschrieben werden durch die Formel

$$\phi^* \left(\sum_i a_i dx_i \right) = \sum_{i,j} (a_i \circ \phi) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$$

Beispiel 5.1.29 (Verwandtschaften unter der Polarkoordinatenabbildung). Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

und benutzen die üblichen Koordinaten x, y auf dem Wertebereich. Unter dieser Abbildung ist etwa das Kovektorfeld dx rechts verwandt zum Kovektorfeld $d(r \cos \vartheta) = (\cos \vartheta)dr - (r \sin \vartheta)d\vartheta$ links. Ebenso ist das Kovektorfeld dy rechts verwandt zum Kovektorfeld $d(r \sin \vartheta) = (\sin \vartheta)dr + (r \cos \vartheta)d\vartheta$ links. Um einen Verwandten für ∂_ϑ zu suchen, wenn dieses Vektorfeld denn einen Verwandten haben sollte, machen wir den Ansatz $\partial_\vartheta \rightsquigarrow a\partial_x + b\partial_y$ mit unbestimmten Funktionen

a, b und finden durch Paaren mit dx leicht $-(r \sin \vartheta) \rightsquigarrow a$ und durch Paaren mit dy ebenso $(r \cos \vartheta) \rightsquigarrow b$, womit wir für das Vektorfeld ∂_ϑ links als einzigen Verwandten das Vektorfeld $-y\partial_x + x\partial_y$ rechts finden. Das Vektorfeld ∂_r links hat keinen Verwandten rechts, denn derselbe Ansatz $\partial_r \rightsquigarrow a\partial_x + b\partial_y$ führt zu $P : \sin \vartheta \rightsquigarrow a$ und $P : \cos \vartheta \rightsquigarrow b$, und derartige Funktionen a, b gibt es nicht. Schränken wir jedoch unsere Polarkoordinatenabbildung ein zu einer Abbildung $P : \{(r, \vartheta) \mid r > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so gibt es derartige Funktionen doch und unser Vektorfeld ∂_r hat unter dieser Einschränkung den einzigen Verwandten

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \partial_x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \partial_y$$

Meist wird man mit diesen Begriffen etwas großzügiger umgehen, zwischen verwandte Objekte schlicht ein Gleichheitszeichen schreiben und es auch mit den Definitionsbereichen nicht so genau nehmen, so daß wir etwa schreiben würden

$$\partial_r = (\cos \vartheta) \partial_x + (\sin \vartheta) \partial_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \partial_x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \partial_y$$

$$\partial_\vartheta = -(r \sin \vartheta) \partial_x + (r \cos \vartheta) \partial_y = -y \partial_x + x \partial_y$$

$$\partial_x = (\cos \vartheta) \partial_r - (r^{-1} \sin \vartheta) \partial_\vartheta$$

$$\partial_y = (\sin \vartheta) \partial_r + (r^{-1} \cos \vartheta) \partial_\vartheta$$

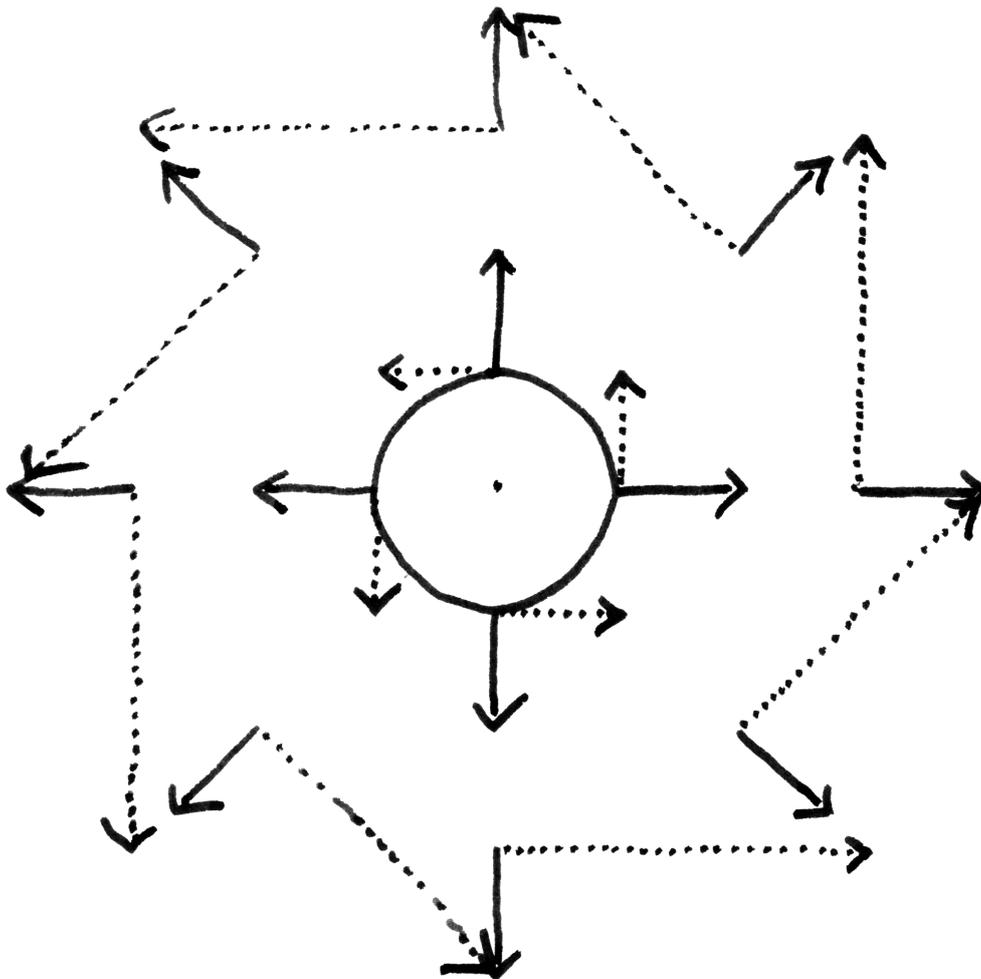
$$dx = (\cos \vartheta) dr - (r \sin \vartheta) d\vartheta$$

$$dy = (\sin \vartheta) dr + (r \cos \vartheta) d\vartheta$$

$$d\vartheta = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy$$

$$dr = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dy$$

Man kann die unteren Formeln auch so verstehen, daß eben dr das Differential der Funktion $r : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto r(x, y)$ meint. Bei $d\vartheta$ wird es schon kritischer, da ja eigentlich ϑ nur auf geschlitzten Ebenen definiert werden kann. Allerdings unterscheiden sich die auf verschiedenen geschlitzten Ebenen definierten ϑ dann wieder nur um additive Konstanten, so daß sie alle dasselbe Differential haben und wir doch ein wohldefiniertes Kovektorfeld $d\vartheta$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erhalten. Das ist auch der tiefere Grund dafür, daß alle unsere Standardvektorfelder in diesem Fall wohldefinierte Verwandte haben und wir mit unseren Gleichheitszeichen nicht in Teufels Küche kommen. Bei komplizierteren Vektorfeldern sähe das anders aus: So hat etwa das Vektorfeld $\vartheta \partial_\vartheta$ gar keinen Verwandten, es sei denn, wir schränken unsere Polarkoordinatenabbildung noch weiter ein.



Einige Werte des Vektorfelds ∂_r als durchgezogene Pfeile und des Vektorfeld ∂_θ als gepunktete Pfeile, gezeichnet in der xy -Ebene.

Übungen

Übung 5.1.30 (Weitere Verträglichkeiten unserer Verwandtschaften). Verwandtschaft ist verträglich mit dem Bilden von Produkten von Funktionen, das gilt sogar für beliebige Abbildungen ϕ . Ist für das folgende $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume, so ist ϕ -Verwandtschaft verträglich mit dem Bilden des Produkts von Funktionen und Vektorfeldern, in Formeln folgt aus Verwandtschaften $\phi : g \rightsquigarrow f$ und $\phi : A \rightsquigarrow B$ also $\phi : gA \rightsquigarrow fB$ oder anders geschrieben folgt aus $\phi : A \rightsquigarrow B$ bereits $\phi : (f \circ \phi)A \rightsquigarrow fB$. Weiter ist ϕ -Verwandtschaft verträglich mit dem Bilden des Produkts von Funktionen und Kovektorfeldern, in Formeln folgt aus $\phi : g \rightsquigarrow f$ und $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$ also $\phi : g\eta \rightsquigarrow f\omega$ oder anders geschrieben gilt $\phi^*(f\omega) = (f \circ \phi)\phi^*\omega$. Schließlich ist ϕ -Verwandtschaft auch verträglich mit dem Auswerten von Kovektorfeldern auf Vektorfeldern, in Formeln folgt aus $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$ und $\phi : A \rightsquigarrow B$ also $\phi : \langle \eta, A \rangle \rightsquigarrow \langle \omega, B \rangle$ alias aus $\phi : A \rightsquigarrow B$ folgt $\langle \phi^*\omega, A \rangle = \langle \omega, B \rangle \circ \phi$. Das ist sogar eine hinreichende Bedingung: Gilt $\langle \phi^*\omega, A \rangle = \langle \omega, B \rangle \circ \phi$ für alle Kovektorfelder ω , so folgt $\phi : A \rightsquigarrow B$.

Übung 5.1.31. Unter der Inversion am Einheitskreis $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $(x, y) \mapsto (u, v) = (x^2 + y^2)^{-1}(x, y)$ zeige man die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\begin{aligned}\partial_x &\rightsquigarrow (v^2 - u^2)\partial_u - 2uv\partial_v \\ \partial_y &\rightsquigarrow (u^2 - v^2)\partial_v - 2uv\partial_u\end{aligned}$$

Übung 5.1.32. Seien auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset E$ eines n -dimensionalen reellen Raums Vektorfelder A_1, \dots, A_n und Kovektorfelder $\omega_1, \dots, \omega_n$ gegeben mit $\langle \omega_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$ an jeder Stelle $p \in U$. So gilt für jede differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Identität $df = (A_1 f)\omega_1 + \dots + (A_n f)\omega_n$.

5.2 Gradienten in krummlinigen Koordinaten*

5.2.1 (Motivation und erstes Beispiel). Gegeben eine halboffene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine partiell differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man wie in **1.1.5** ihren **Gradienten** als das Vektorfeld

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \partial_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \partial_n$$

auf U . Ich will im Folgenden diskutieren, welche Form dieses Konstrukt in krummlinigen Koordinaten annimmt. Formal ist damit folgendes gemeint: Man betrachte zusätzlich eine halboffene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\phi : V \xrightarrow{\sim} U$ und berechne aus $(f \circ \phi)$ das unter ϕ zu $(\text{grad } f)$ verwandte Vektorfeld auf V . In der Notation wird vielfach ϕ einfach weggelassen und nur die Bezeichnungen der Koordinaten deuten das Gemeinte an. Ist etwa $\phi = P : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

wie in 5.1.29 die Polarkoordinatenabbildung, so erhalten wir mit den Formeln aus 5.1.29 sofort $f_x = \cos \vartheta f_r - r^{-1} \sin \vartheta f_\vartheta$ und $f_y = \sin \vartheta f_r + r^{-1} \cos \vartheta f_\vartheta$ und nach kurzer Rechnung die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\text{grad } f = f_x \partial_x + f_y \partial_y = f_r \partial_r + \frac{1}{r^2} f_\vartheta \partial_\vartheta$$

Man nennt sie die **Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten**. Hier haben wir die Notation $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ für die entsprechende partielle Ableitung aus 1.1.1 und die Abkürzung $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ aus 5.1.20 für den besagten Differentialoperator alias besagtes Vektorfeld verwendet. Bereits bei der Transformation des Gradienten in Kugelkoordinaten wird die Rechnung jedoch recht aufwendig. Ich will im folgenden erklären, mit welchen Kunstgriffen man sie strukturieren und übersichtlicher gestalten kann.

5.2.2 (**Tensor-Notation für Bilinearformen**). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k notieren wir

$$\text{Bil}(V) = \text{Bil}_k(V)$$

den Vektorraum aller bilinearen Abbildungen $V \times V \rightarrow k$. Gegeben Linearformen $\lambda, \eta : V \rightarrow k$ notieren wir $(\lambda \otimes \eta) \in \text{Bil}(V)$ die bilineare Abbildung $(v, w) \mapsto \lambda(v)\eta(w)$. Sicher ist $(\lambda, \eta) \mapsto \lambda \otimes \eta$ selbst eine bilineare Abbildung $V^* \times V^* \rightarrow \text{Bil}(V)$. Statt $\eta \otimes \eta$ schreibt man meist kürzer $\eta^{\otimes 2}$. Das Symbol \otimes wird in [LA2] 6.1.2 noch mit mehr Bedeutung aufgeladen. Hier darf und soll es ausschließlich als bequeme Notation verstanden werden.

Definition 5.2.3. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **2-Tensor** oder genauer **relativer kovarianter 2-Tensor auf U** ist eine Abbildung

$$g : U \rightarrow \text{Bil}(\vec{X})$$

von U in den Raum $\text{Bil}(\vec{X})$ aller bilinearen Abbildungen $\vec{X} \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Eine **Riemann'sche Metrik** auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset X$ ist ein 2-Tensor g , der jedem Punkt $p \in U$ ein Skalarprodukt g_p auf \vec{X} zuordnet.

5.2.4 (**Beispiele für 2-Tensoren und Riemann'sche Metriken**). Das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n liefert eine Riemann'sche Metrik auf \mathbb{R}^n und auf jeder halboffenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Gegeben Kovektorfelder ω und η auf einer Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums X können wir den 2-Tensor

$$\begin{aligned} \omega \otimes \eta : U &\rightarrow \text{Bil}(\vec{X}) \\ p &\mapsto \omega_p \otimes \eta_p \end{aligned}$$

betrachten. Weiter können wir 2-Tensoren punktweise addieren und mit Funktionen multiplizieren. Die übliche Riemann'sche Metrik auf \mathbb{R}^n kann in diesen

Konventionen geschrieben werden als $s = dx_1^{\otimes 2} + \dots + dx_n^{\otimes 2}$. Eine beliebige Riemann'sche Metrik g auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ hat in diesen Notationen die Gestalt

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

für Funktionen $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, die an jedem Punkt $p \in U$ eine positiv definite symmetrische Matrix bilden.

5.2.5 (Partielles Auswerten von Bilinearformen). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k liefert jede Bilinearform $g \in \text{Bil}(V)$ eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{can}_g : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto (w \mapsto g(v, w)) \end{aligned}$$

von unserem Vektorraum in seinen Dualraum, die jedem Vektor v die Linearform „Paare mit v “ zuordnet. Zum Beispiel hätten wir $\text{can}_{\lambda \otimes \eta}(v) = \lambda(v)\eta$. Gleichberechtigt könnten wir auch die Abbildung $\text{can}_g : v \mapsto (w \mapsto g(w, v))$ betrachten. Ist speziell g nichtausgeartet und V endlichdimensional, so ist can_g ein Isomorphismus $\text{can}_g : V \xrightarrow{\sim} V^*$ und wir können auch sein Inverses $\text{can}_g^{-1} : V^* \xrightarrow{\sim} V$ betrachten.

5.2.6 (Partielles Auswerten von 2-Tensoren). Gegeben ein Vektorfeld A und ein 2-Tensor g auf einer Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums können wir ein Kovektorfeld $\text{can}_g(A)$ bilden durch das Einsetzen von A in die erste Stelle von g . Ist unser 2-Tensor g an keiner Stelle ausgeartet, insbesondere also im Fall einer Riemann'schen Metrik, so ist diese Abbildung eine Bijektion

$$\text{can}_g : \{\text{Vektorfelder auf } U\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Kovektorfelder auf } U\}$$

Bezeichnet speziell s das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n , so haben wir etwa $\text{can}_s(a\partial_i) = a dx_i$ für jede Funktion a . Für unseren Gradienten aus 1.1.5 gilt folglich $\text{grad } f = \text{can}_s^{-1}(df)$. Im allgemeinen verwendet man die Notation

$$\text{grad}_g f := \text{can}_g^{-1}(df)$$

und nennt dies Vektorfeld den **Gradienten von f in Bezug auf die Riemann'sche Metrik g** oder allgemeiner in Bezug auf den nichtausgearteten 2-Tensor g .

Definition 5.2.7 (Verwandtschaft von 2-Tensoren). Seien $U \subset X$, $V \subset Y$ halboffene Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume und $\phi : U \rightarrow V$ differenzierbar. Vorgegebene 2-Tensoren s auf U und g auf V heißen **ϕ -verwandt** und wir schreiben $\phi : s \rightsquigarrow g$ genau dann, wenn für alle $x \in U$ und $v, w \in \vec{X}$ gilt

$$s_x(v, w) = g_{\phi(x)}((d_x\phi)(v), (d_x\phi)(w))$$

5.2.8 (**Verträglichkeiten unserer Verwandtschaften**). Wieder ist Verwandtschaft verträglich mit allen natürlichen Operationen, etwa mit dem Einsetzen von Vektorfeldern, dem Multiplizieren mit Funktionen, unserer Konstruktion \otimes etc. Insbesondere haben verwandte Funktionen unter verwandten Riemann'schen Metriken verwandte Gradienten, in Formeln impliziert $\phi : s \rightsquigarrow g$ also die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\phi : \text{grad}_s(f \circ \phi) \rightsquigarrow \text{grad}_g f$$

Offensichtlich hat jeder 2-Tensor g auf V genau einen Verwandten auf U , den wir mit ϕ^*g bezeichnen und den **zurückgeholten 2-Tensor** nennen. Gegeben eine parametrisierte Fläche im Raum oder allgemeiner eine differenzierbare Abbildung $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ halboffen bezeichnet man den symmetrischen 2-Tensor auf \mathbb{R}^2 , der durch das Zurückholen der Standardmetrik entsteht, auch als die **erste Fundamentalform** unserer parametrisierten Fläche.

Beispiel 5.2.9 (Gradienten in Polarkoordinaten). Unter der Polarkoordinatenabbildung P aus 5.1.29 ist die Standardmetrik $s = dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$ auf der xy -Ebene verwandt zum 2-Tensor

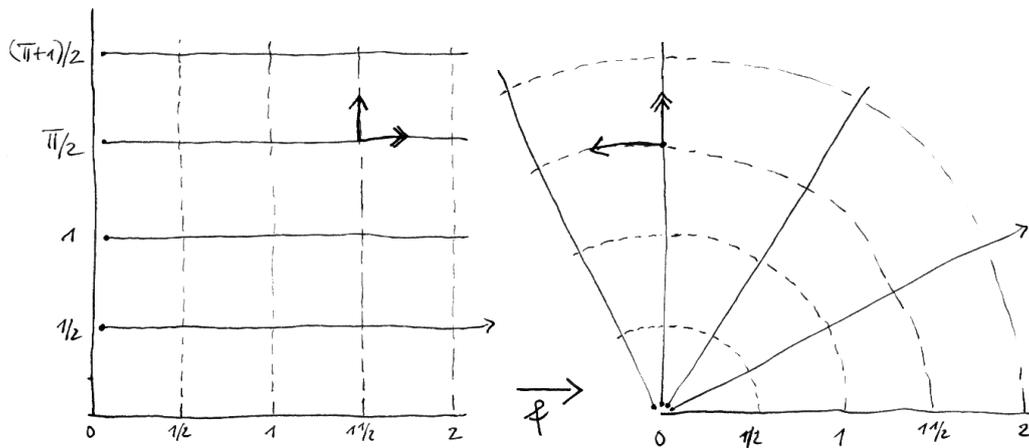
$$\begin{aligned} g &= (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \otimes (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \\ &\quad + (\sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta) \otimes (\sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta) \\ &= dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2} \end{aligned}$$

auf der $r\vartheta$ -Ebene, der auf dem Komplement der Nullstellenmenge von r auch wieder eine Riemann'sche Metrik ist. Daß hier keine gemischten Tensoren $dr \otimes d\vartheta$ auftreten, hat den Grund, daß die Vektorfelder ∂_r und ∂_ϑ auch in der xy -Ebene an jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen. Die Koeffizienten 1 und r^2 bedeuten gerade die quadrierten Längen $s(\partial_r, \partial_r)$ und $s(\partial_\vartheta, \partial_\vartheta)$ der Vektoren dieser Vektorfelder. Für eine Funktion $f = f(x, y)$ muß schließlich df unter P verwandt sein zu $d(f \circ P)$, und dann muß auch $\text{grad} f = \text{grad}_s f = \text{can}_s^{-1}(df)$ verwandt sein zu

$$\text{grad}_g(f \circ P) = \text{can}_g^{-1} d(f \circ P) = \text{can}_g^{-1}(f_r dr + f_\vartheta d\vartheta) = f_r \partial_r + \frac{1}{r^2} f_\vartheta \partial_\vartheta$$

Damit haben wir die Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten ein weiteres Mal hergeleitet.

Ergänzung 5.2.10 (Im Ingenieurwesen gebräuchliche alternative Notation). Ingenieure arbeiten gerne mit einer anderen Darstellung von Vektorfeldern und betrachten etwa auf dem \mathbb{R}^2 die auf euklidische Länge Eins normierten Vektorfelder $e_r = \partial_r$ und $e_\vartheta = r^{-1} \partial_\vartheta$. Natürlich kann jedes Vektorfeld v auf dem Komplement des Ursprungs auch als $v = a e_r + b e_\vartheta$ geschrieben werden mit



Dies Bild soll die Verwandtschaft von Riemann'schen Metriken $f : dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2} \rightsquigarrow dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$ verdeutlichen, mit $f = P$ der Polarkoordinatenabbildung. Das Differential an der Stelle $(r, \vartheta) = (1\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist dargestellt durch seinen Effekt auf der Standardbasis, die wir auch $(\partial_r, \partial_\vartheta)$ notieren könnten. Die Standardbasis geht an jeder Stelle über in eine Orthogonalbasis und das Bild des ersten Basisvektors hat auch wieder die Länge Eins, das Bild des zweiten Basisvektors jedoch im allgemeinen die Länge r und in unserem Fall die Länge $1\frac{1}{2}$. Die Standardmetrik auf der xy -Ebene entspricht folglich einer Metrik auf der $r\vartheta$ -Ebene, bei der ∂_r und ∂_ϑ aufeinander senkrecht stehen und ∂_r die Länge Eins hat, wohingegen ∂_ϑ die Länge r hat. Diese Eigenschaften aber charakterisieren genau unsere Metrik $dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2}$.

geeigneten reellwertigen Funktionen a, b . In Formelsammlungen findet man häufig Formeln für Gradienten und dergleichen in dieser Darstellung, zum Beispiel hätten wir $\text{grad } f = (\partial_r f)\mathbf{e}_r + r^{-1}(\partial_\vartheta f)\mathbf{e}_\vartheta$. Meist heißen die Koeffizienten eines Vektorfelds $v = a\mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_\vartheta$ dann auch noch $a = v_r, b = v_\vartheta$. Das verbietet sich für uns jedoch, da wir die Indexnotation bereits als Kürzel für partielle Ableitungen verwenden.

Beispiel 5.2.11. Die **Kugelkoordinaten** im Raum werden beschrieben durch eine geeignete Einschränkung der Abbildung

$$K : \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$$

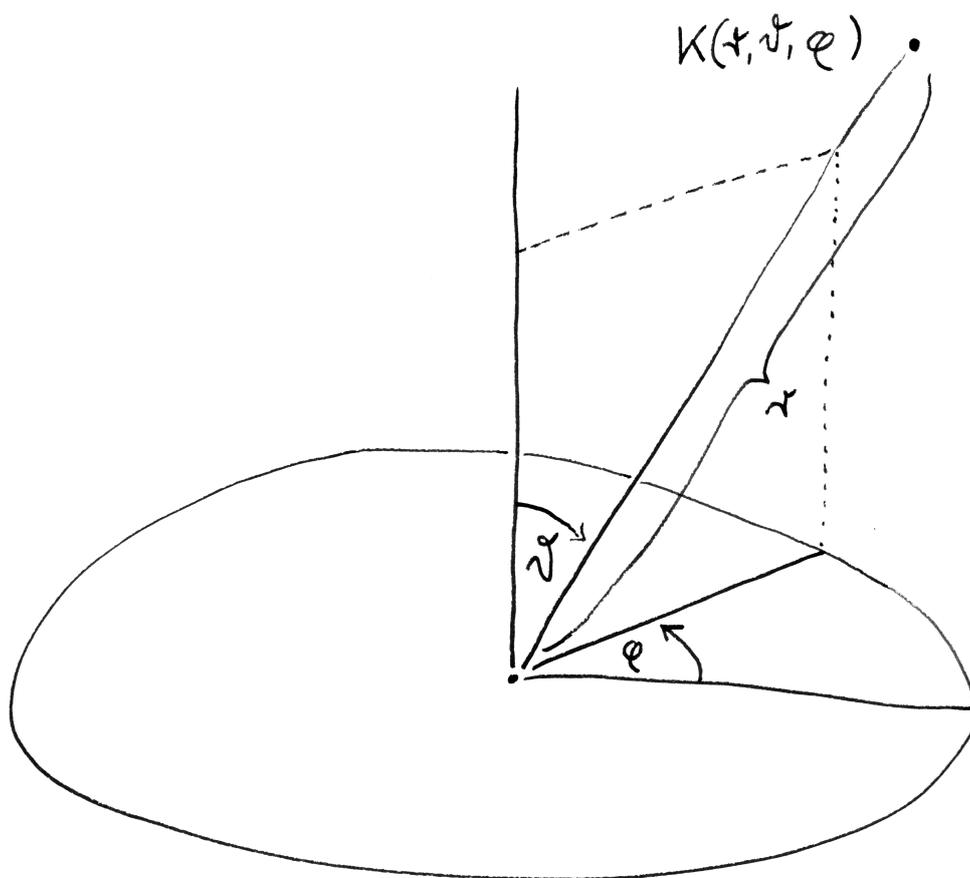
Deren anschauliche Bedeutung wird in nebenstehendem Bild erläutert.

5.2.12 (Anschauliche Bedeutung der Kugelkoordinaten). Die Kugelkoordinatenabbildung hat die folgende anschauliche Bedeutung: Stellen wir uns ein Teleskop vor, das im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems auf einem waagerechten, d.h. in der xy -Ebene liegenden Drehteller steht und senkrecht nach oben zeigt. Um einen Stern zu betrachten, schwenken wir zunächst das Teleskop nach unten in Richtung der positiven x -Achse um einen Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$ und drehen dann den Drehteller um einen geeigneten Winkel, sagen wir um den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ gegen den Uhrzeigersinn. Ist schließlich r die Entfernung unseres Sterns, so gibt $K(r, \vartheta, \varphi)$ seine kartesischen Koordinaten an. Natürlich ist im Fall eines senkrecht über oder unter dem Teleskop befindlichen Sterns φ nicht eindeutig, und befindet sich das Teleskop bereits im Stern, so sind beide Winkel nicht eindeutig. Die Einschränkung unserer Abbildung auf $r > 0, \vartheta \in (0, \pi)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ hinwiederum ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv. Oft findet man auch eine Variante, bei der wir uns das Teleskop zu Beginn horizontal in Richtung der positiven x -Achse ausgerichtet denken und wo die zweite Koordinate $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ den Winkel bezeichnet, um den das Teleskop nach oben bzw. bei negativem Winkel nach unten geschwenkt werden muß. Die Formeln lauten dann abweichend $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$.

Ergänzung 5.2.13. Ein 2-Tensor heißt **symmetrisch** beziehungsweise **antisymmetrisch**, wenn er an jedem Punkt als Wert eine symmetrische bzw. antisymmetrische Bilinearform auf \vec{X} annimmt. Antisymmetrische 2-Tensoren werden wir später als sogenannte 2-Formen wiedertreffen. Eine Riemann'sche Metrik ist per definitionem ein symmetrischer 2-Tensor mit der zusätzlichen Eigenschaft, positiv definit zu sein.

Übungen

Übung 5.2.14 (Riemann'sche Metrik in Kugelkoordinaten). Man zeige, daß die Standardmetrik im xyz -Raum unter Kugelkoordinaten, wie sie [5.2.11](#) eingeführt



Die Kugelkoordinatenabbildung

werden, verwandt ist zur Metrik

$$g = dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2} + (r \sin \vartheta)^2 d\varphi^{\otimes 2}$$

Übung 5.2.15 (Gradient in Kugelkoordinaten). Man zeige, daß der Gradient in Kugelkoordinaten, wie sie 5.2.11 eingeführt werden, ausgedrückt wird durch die Formel

$$\text{grad } f = f_r \partial_r + r^{-2} f_\vartheta \partial_\vartheta + (r \sin \vartheta)^{-2} f_\varphi \partial_\varphi$$

5.3 Wegintegrale

5.3.1. Ich unterscheide zwischen dem „Kurvenintegral“ aus [AN1] 8.3.6 und dem „Wegintegral“, wie es jetzt gleich definiert wird. In der Literatur findet man stattdessen meist die Terminologie „Kurvenintegral erster Art“ und „Kurvenintegral zweiter Art“.

Definition 5.3.2. Gegeben $A \subset X$ eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums und $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer **Weg** und $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld auf A erklären wir eine reelle Zahl $\oint_\gamma \omega$, das **Integral des Kovektorfelds ω längs des Weges γ** , durch die Vorschrift

$$\oint_\gamma \omega := \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

In der physikalisch motivierten Terminologie aus [AN1] 8.2.3 gilt es also, zu jedem Zeitpunkt $t \in [a, b]$ den Kovektor $\omega_{\gamma(t)}$ auf dem Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ auszuwerten und die so entstehende reellwertige Funktion über das Intervall $[a, b]$ zu integrieren. Sobald ich hoffe, Sie davon überzeugt zu haben, daß keine Verwechslungen zu befürchten sind, notiere ich Wegintegrale meist ohne Kringel mit \int statt \oint .

5.3.3 (**Diskussion des Symbols \oint**). Üblicherweise verwendet man \oint nur für Wegintegrale über geschlossene Wege. Da mir aber in Latex kein besseres Symbol zur Verfügung stand, und da mir an dieser Stelle die Verwendung einer Variation des Integralzeichens dringend geboten schien, und da das Integral über geschlossene Wege von einem mathematischen Standpunkt aus betrachtet eh kein eigenes Symbol verdient, habe ich mich für dieses Symbol entschieden. Es wird auch nur in diesem Abschnitt verwendet, eben in einer erweiterten Bedeutung auch für Wegintegrale über nicht notwendig geschlossene Wege.

5.3.4 (**Vage Anschauung für das Wegintegral**). In der vor 5.1.12 erklärten Anschauung für Kovektorfelder wäre das Wegintegral zu verstehen als eine Präzisierung der Idee der „von unserem Weg gekreuzten Linien“. Da das arg vage ist, gebe ich auch noch eine präzise Variante in Form eines Lemmas.

Lemma 5.3.5 (Anschauung für das Wegintegral). Seien $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg in einer Teilmenge A eines endlichdimensionalen reellen Raums X und $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld auf A . Man betrachte für $r \geq 1$ die äquidistante Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$ und bilde die Riemannsumme

$$S_\gamma^r(\omega) = \sum_{i=0}^{r-1} \omega_{\gamma(a_i)} (\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i))$$

So ist unser Wegintegral der Grenzwert der Folge von Riemannsummen

$$\oint_\gamma \omega = \lim_{r \rightarrow \infty} S_\gamma^r(\omega)$$

Beweis. Sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf dem Richtungsraum \vec{X} und bezeichne $\| \cdot \|$ auch die zugehörige Operatornorm auf \vec{X}^* . Nach [AN1] 4.2.5 ist unser Integral der Grenzwert der Folge von Riemannsummen

$$S^r = \sum_{i=0}^{r-1} \omega_{\gamma(t_i)} (\gamma'(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ finden wir wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von γ' ein $\delta > 0$ derart, daß gilt $|s - t| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \varepsilon$. Ist r so groß, daß die Länge der Intervalle $t_{i+1} - t_i$ unter δ sinkt, so folgt mit dem Mittelwertsatz [AN1] 8.2.9 in mehreren Veränderlichen $\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \in (t_{i+1} - t_i) B(\gamma'(t_i); \varepsilon)$, was wir umschreiben können zu

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) - (t_{i+1} - t_i)\gamma'(t_i)\| < (t_{i+1} - t_i)\varepsilon$$

Das wiederum liefert für r oberhalb einer geeigneten Schranke die Abschätzung

$$|S_\gamma^r(\omega) - S^r| \leq \sum_{i=0}^{r-1} \|\omega_{\gamma(t_i)}\| (t_{i+1} - t_i)\varepsilon \leq (\sup_{t \in [a, b]} \|\omega_{\gamma(t)}\|) (b - a)\varepsilon$$

Diese Differenz strebt also gegen Null für $r \rightarrow \infty$, folglich strebt die Folge $S_\gamma^r(\omega)$ gegen denselben Grenzwert wie die Folge S^r . \square

Beispiel 5.3.6 (Wegintegral eines Kovektorfelds auf der Zeitachse). Ein Kovektorfeld auf der Zeitachse kann, wie in 5.1.10 erklärt, nach der Wahl eines ausgezeichneten Drehsinns als eine Vorschrift aufgefaßt werden, die jedem Zeitpunkt eine Drehgeschwindigkeit zuordnet. Das Integral eines derartigen Kovektorfelds

über einen Weg in der Zeitachse liefert dann anschaulich gesprochen die Zahl der Umdrehungen in Richtung des ausgezeichneten Drehsinns zwischen Anfangszeitpunkt und Endzeitpunkt. Liegt bei unserem Weg der Endzeitpunkt hier vor dem Anfangszeitpunkt, so ist entsprechend das Negative zu nehmen.

Satz 5.3.7. 1. **(Wegintegrale über Identitätswege).** Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stimmt das Wegintegral des Kovektorfelds $f(x)dx$ über den Identitätsweg $\text{id} : [a, b] \rightarrow [a, b]$ überein mit dem in [ANI] 4.2.1 eingeführten Integral von f , in Formeln

$$\oint_{\text{id}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

2. **(Zerstückeln von Wegintegralen).** Gegeben X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge, $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld, $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg und $c \in (a, b)$ ein Zwischenpunkt gilt

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma|_{[a,c]}} \omega + \oint_{\gamma|_{[c,b]}} \omega$$

3. **(Verwandtschaftsverträglichkeit).** Gegeben X und Y endlichdimensionale reelle Räume, $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilmengen mit A halboffen, $\phi : A \rightarrow B$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ stetig differenzierbar sowie η ein stetiges Kovektorfeld auf B gilt

$$\oint_{\gamma} \phi^* \eta = \oint_{\phi \circ \gamma} \eta$$

4. **(Wegintegral über ein totales Differential).** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X , eine halboffene Teilmenge $A \subset X$, eine stetig differenzierbare Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ und ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ gilt

$$\oint_{\gamma} dg = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen unmittelbar aus den Definitionen. Um die dritte Aussage zu zeigen, erinnere man die Definition $(\phi^* \eta)_p = \eta_{\phi(p)} \circ d_p \phi$ des zurückgeholten Kovektorfelds und die Kettenregel $(\phi \circ \gamma)'(t) = (d_{\gamma(t)} \phi)(\gamma'(t))$. Damit finden wir dann

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \phi^* \eta &= \int_a^b (\phi^* \eta)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b (\eta_{\phi(\gamma(t))} \circ d_{\gamma(t)} \phi)(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_a^b \eta_{\phi(\gamma(t))}((\phi \circ \gamma)'(t)) dt = \oint_{\phi \circ \gamma} \eta \end{aligned}$$

Damit folgern wir schließlich die letzte Aussage durch die Rechnung

$$\oint_{\gamma} dg = \oint_{\text{id}} \gamma^*(dg) = \oint_{\text{id}} d(g \circ \gamma) = \int_a^b (g \circ \gamma)'(x) dx = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. \square

5.3.8 (Diskussion der Verwandtschaftsverträglichkeit). Seien A und B topologische Räume und $\phi : A \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Zwei Wege $\gamma : I \rightarrow A$ und $\kappa : J \rightarrow B$ heißen ϕ -**verwandt** und wir schreiben $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$ genau dann, wenn sie denselben Definitionsbereich $I = J$ haben und wenn für alle $t \in I$ gilt $\kappa(t) = \phi(\gamma(t))$. Sicher hat jeder Weg γ in A genau einen Verwandten in B , nämlich den Weg $\phi \circ \gamma$. Teil 3 von Satz 5.3.7 besagt in dieser Terminologie, daß die Verwandtschaft von Wegen $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$ zusammen mit der Verwandtschaft von Kovektorfeldern $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$ die Gleichheit der Wegintegrale $\oint_{\gamma} \eta = \oint_{\kappa} \omega$ impliziert.

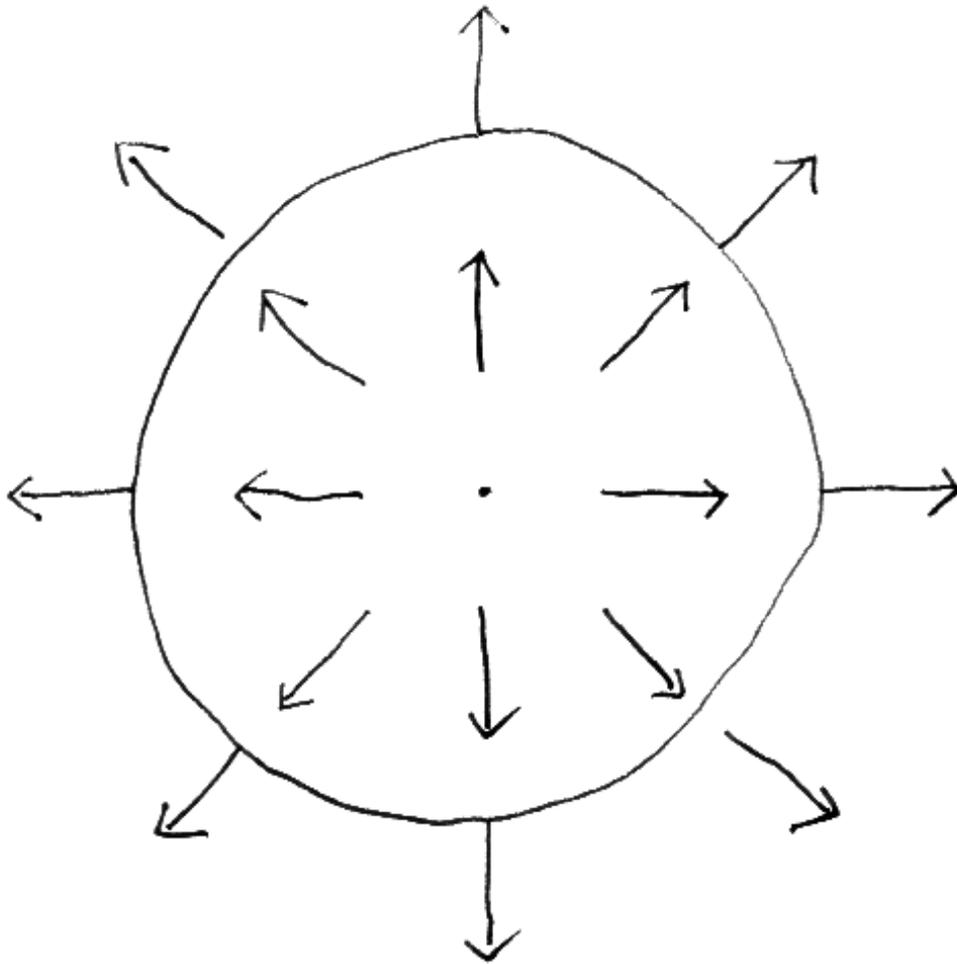
Beispiel 5.3.9 (Berechnung von Wegintegralen). Sei A eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums X . Für einen beliebigen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ und ein beliebiges stetiges Kovektorfeld ω auf A hat das mit dem Weg zurückgeholte Kovektorfeld nach 5.1.21 die Gestalt $\gamma^*\omega = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$ und wir kommen mit den Umformungen

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\text{id}} \gamma^*\omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

wieder zu unserer ursprünglichen Definition zurück, die wir in diesem Sinne als ein „Zurückholen auf den Parameterbereich“ auffassen können. Integrieren wir zum Beispiel das Kovektorfeld $\omega = xdx + x^4dy$ auf der Ebene \mathbb{R}^2 über den Weg $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\sqrt{t}, \log t)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega &= \oint_{\gamma} xdx + x^4dy \\ &= \oint_{\text{id}} \sqrt{t} d(\sqrt{t}) + (\sqrt{t})^4 d(\log t) \\ &= \int_1^2 \sqrt{t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + t^2 t^{-1} dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + t\right) dt = 2 \end{aligned}$$

Ergänzung 5.3.10 (Wegintegrale von Vektorfeldern). Redet man für $A \subset \mathbb{R}^n$ vom Integral eines Vektorfelds $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ längs eines Weges oder von der **Zirkulation eines Vektorfelds in einem Weg**, so ist das Integral des Kovektorfelds $\omega = \langle v, \rangle$ gemeint, mit der Notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standard-Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n , das in Formeln gegeben wird durch $\omega = v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n$. In der



Der Fluß des Vektorfeldes $\partial_r = (x/r)\partial_x + (y/r)\partial_y$ durch den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (3 \cos t, 3 \sin t)$ ergibt sich nach kurzer Rechnung zu 6π . Die Zirkulation desselben Vektorfeldes in demselben Weg ist dahingegen Null.

Physik wird das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n meist $v \cdot w$ notiert und unser Wegintegral über einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ würde geschrieben als

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} v \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b v \cdot d\gamma = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Die Bedeutung der Terme des rechtesten Integrals sollte hier klar sein. In der Mitte ist zu verstehen $d\gamma = d_t\gamma = \dot{\gamma}(t)dt$. Ganz links meint $d\mathbf{x}$ ein „kleines vektorielles Kurvenelement“ und das \mathbf{x} ist fett gedruckt um anzudeuten, daß ein Vektor gemeint ist. Ich mag diese Notation nicht besonders, die fette Schreibweise ist auch an der Tafel schlecht umzusetzen. Allgemeiner kann man Wegintegrale von Vektorfeldern v bilden, wann immer ein Skalarprodukt oder allgemeiner ein ausgezeichneter 2-Tensor g zur Verfügung steht, indem wir eben zu unserem Vektorfeld das Kovektorfeld $\omega = \text{can}_g^1(v)$ oder auch $\omega = \text{can}_g^2(v)$ bilden können, um diese Kovektorfelder dann zu integrieren wie in 5.3.2 erklärt. Ohne einen ausgezeichneten 2-Tensor gelingt es eben nicht, zwei Vektoren in natürlicher Weise zu paaren: Das gelingt ohne zusätzliche Wahlen in natürlicher Weise nur für einen Vektor und einen Kovektor.

5.3.11 (**Wegintegral über Feld mit Potential, Variante**). Die letzte Aussage der Satz 5.3.7 liest sich für Wegintegrale über Vektorfelder auf dem \mathbb{R}^n als die Formel

$$\int_a^b (\text{grad } g) \cdot d\gamma = g(\gamma(a)) - g(\gamma(b))$$

Diese Formel ist nur im \mathbb{R}^n oder allgemeiner in einem Skalarproduktraum sinnvoll, aber die beiden Abhängigkeiten vom Skalarprodukt bei der Definition des Vektorfelds $\text{grad } g$ und bei der Definition des Integrals eines Vektorfelds über einen Weg heben sich darin gegenseitig auf, so daß es eben im Endeffekt dabei auf die Wahl eines Skalarprodukts doch nicht ankommt. Die „Verträglichkeit des Wegintegrals mit Verwandtschaft“ 5.3.7.3 hat für Wegintegrale über Vektorfelder in euklidischen Räumen keine Entsprechung. Das ist ein wesentlicher Grund dafür, daß der Begriff des Wegintegrals über Kovektorfelder weiter trägt.

Ergänzung 5.3.12. Redet man für $X = \mathbb{R}^2$ vom **Fluß eines Vektorfelds** $v = (v_1, v_2) : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ **durch einen Weg**, so ist das Integral über das Kovektorfeld $\omega = v_1 dy - v_2 dx$ gemeint. Dies Kovektorfeld kann alternativ auch beschrieben werden durch die Formel $\omega_p(u) = \det(v(p)|u)$, in der unsere Vektoren $v(p)$ und u als Spaltenvektoren aufzufassen sind.

5.3.13 (**Wegintegral versus Kurvenintegral**). In der Literatur scheint mir eine gewisse Verwirrung zu herrschen was die Begriffe „Wegintegral“ und „Kurvenintegral“ angeht. Die hier gewählte Terminologie soll zum Ausdruck bringen, daß

für einen injektiven stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ unser Kurvenintegral nur von der Bildmenge $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ abhängt, die wir im Sinne unserer Definition 6.7.1 eine „Kurve“ werden nennen dürfen. Unser Wegintegral dahingegen hängt auch von der „durch den Weg γ gegebenen Richtung auf unserer Kurve“ ab und ändert sein Vorzeichen, wenn wir die Kurve „in der umgekehrten Richtung durchlaufen“. Andererseits bleibt das Wegintegral unverändert selbst bei nicht notwendig monotoner „Neuparametrisierung“, wenn diese nur den Anfang beziehungsweise das Ende des neuen Parameterintervalls auf den Anfang beziehungsweise das Ende des Alten wirft, siehe 5.3.15. Das Kurvenintegral dahingegen ändert sich bei derartigen Neuparametrisierungen im allgemeinen sehr wohl.

5.3.14 (Wegintegrale in eindimensionalen Räumen). Ist X ein eindimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge, so ist offensichtlich jedes stetige Kovektorfeld ω auf A das Differential $\omega = dg$ einer stetig differenzierbaren Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Gegeben $c, d \in A$ und ein stetig differenzierbarer Weg γ von c nach d hängt also $\oint_{\gamma} \omega = g(d) - g(c)$ nach unserem Satz 5.3.7 vom Weg γ gar nicht ab. Wir notieren dies Integral dann kürzer

$$\oint_c^d \omega := \oint_{\gamma} \omega$$

Diese Notation ist allerdings nur sinnvoll, wenn es auch in der Tat einen Weg von c nach d gibt, der ganz in A verläuft. Ist $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so prüft man unschwer, daß mit dieser Notation unsere Formel

$$\oint_c^d f(x)dx = \int_c^d f(x)dx$$

aus 5.3.7.1 für beliebige $c, d \in A$ gültig bleibt. Ist schließlich $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg von c nach d , so entpuppt sich die bloße Abhängigkeit des Wegintegrals von den Endpunkten als verkleidete Fassung der Substitutionsregel, indem wir sie für $\omega = f(x)dx$ ausschreiben zu

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \oint_a^b \gamma^* \omega = \oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \omega = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(x)dx$$

Korollar 5.3.15 (Wegintegrale sind unabhängig von der Parametrisierung).

Sei $\gamma : [c, d] \rightarrow X$ ein stetig differenzierbarer Weg in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und ω ein stetiges Kovektorfeld auf einer Teilmenge, die sein Bild umfaßt. Sei $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig differenzierbar mit $u(a) = c$ und $u(b) = d$. So gilt

$$\oint_{\gamma \circ u} \omega = \oint_{\gamma} \omega$$

Beweis. Wir schreiben unsere Behauptung mithilfe der Verträglichkeit von Wegintegral und Verwandtschaft 5.3.7.3 um zur Behauptung $\oint_u \gamma^* \omega = \oint_c^d \gamma^* \omega$. Diese Behauptung hinwiederum folgt unmittelbar aus der Erkenntnis 5.3.14, daß Wegintegrale in eindimensionalen Räumen nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges abhängen. \square

5.3.16 (Verhalten unter richtungsumkehrender Umparametrisierung). Der vorstehende Beweis zeigt auch, daß bei einer richtungsumkehrenden Umparametrisierung, also für u mit $u(a) = d$ und $u(b) = c$ das Wegintegral über den umparametrisierten Weg das Negative des Wegintegrals über den ursprünglichen Weg ist. In 6.4.3 werden wir allgemeiner das Integral von k -Formen über k -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeiten einführen und speziell im Fall $k = 1$ ein Integral von Kovektorfeldern über orientierte Kurven erhalten, das nach 6.4.11 im wesentlichen die in der Proposition enthaltene Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung zu einer Definition umgießt.

Ergänzung 5.3.17 (Integrale rationaler Ausdrücke in \sinh und \cosh). Wir können nun auch den in [AN1] 4.10.7 erklärten Trick zur Berechnung der Integrale von rationalen Ausdrücken in $(x, \sqrt{x^2 + 1})$ geometrisch verstehen. Gegeben solch ein rationaler Ausdruck $R(x, y)$ betrachten wir dazu auf einer geeigneten Teilmenge des \mathbb{R}^2 die Differentialform $R(x, y)dx$ und den Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t, \sqrt{t^2 + 1})$ und fassen unser Integral auf als Wegintegral

$$\int_a^b R(t, \sqrt{t^2 + 1}) dt = \oint_{\gamma} R(x, y) dx$$

Solch ein Wegintegral ist nach 5.3.15 unabhängig von der Parametrisierung. Unser Weg durchläuft ein Stück der Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$, genauer ein Stück des Hyperbelastes mit $y > 0$. Diesen Ast können wir nach [AN1] 4.9.6 auch parametrisieren durch $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(\tau) = \left(\frac{2\tau}{\tau^2 - 1}, \frac{1 + \tau^2}{1 - \tau^2} \right)$$

und bei dieser Parametrisierung führt uns unser Wegintegral ganz offensichtlich auf das Integral einer rationalen Funktion in τ , das wir nach [AN1] 4.10 im Prinzip durch bekannte Funktionen ausdrücken können. In derselben Weise kann man auch das Integral eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar (\sin, \cos) wie zum Beispiel

$$\frac{\sin^3(\tau) + \cos(\tau)}{\cos(\tau) + \cos^2(\tau)}$$

angehen, das bereits in [AN1] 4.10.7 diskutiert wurde. Noch natürlicher als dort mag man es auffassen als Wegintegral im Sinne von [AN1] 8.3.6 eines Kovektorfelds mit rationalen Koeffizienten in zwei Veränderlichen, in unserem Beispiel etwa das Integral des Kovektorfelds

$$R(x, y) \frac{dy}{x} = \frac{y^3 + x}{x + x^2} \frac{dy}{x}$$

über ein Stück des Einheitskreises. Mit der rationalen Parametrisierung [AN1] 4.8.18 des Einheitskreises durch die stereographische Projektion läßt es sich dann umwandeln in ein Integral einer rationalen Funktion einer Veränderlichen. Im wesentlichen dasselbe Verfahren funktioniert auch für rationale Ausdrücke in den Funktionenpaaren (\sinh, \cosh) und $(\sqrt{1+x^2}, x)$.

Ergänzung 5.3.18. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein **W -wertiges Kovektorfeld auf A** ist eine Abbildung

$$\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$$

Sie ordnet also jedem Punkt $p \in A$ eine lineare Abbildung des Richtungsraums in den Raum W zu. Ist etwa Y ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und A halboffen und $f : A \rightarrow Y$ differenzierbar, so ist df oder genauer $p \mapsto d_p f$ ein \vec{Y} -wertiges Kovektorfeld auf A . Ist nun $\varphi : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg in einer Teilmenge A eines endlichdimensionalen reellen Raums X und $\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$ ein stetiges Kovektorfeld auf A mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum W , so definieren wir in Verallgemeinerung des Falls reellwertiger Kovektorfelder aus 5.3 einen Vektor $(\oint_{\varphi} \omega) \in W$, das **Integral des W -wertigen Kovektorfelds ω längs des Weges φ** , durch die Vorschrift

$$\oint_{\varphi} \omega = \int_a^b \omega_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) dt$$

Rechts ist also für jeden Zeitpunkt t der Homomorphismus $\omega_{\varphi(t)} : \vec{X} \rightarrow W$ auszuwerten auf dem Geschwindigkeitsvektor $\varphi'(t) \in \vec{X}$, und die so entstehende stetige Abbildung $[a, b] \rightarrow W$ ist als vektorwertige Funktion zu integrieren im Sinne von 7.2.3.

Ergänzendes Beispiel 5.3.19. In der Physik begegnen einem insbesondere oft Kovektorfelder mit Werten in eindimensionalen reellen Vektorräumen. Zum Beispiel wird man sich ein Kraftfeld auf dem Anschauungsraum \mathbb{E} aus [LA2] 6.6.16 a priori wie in 8.1.8 erklärt als ein „Vektorfeld mit Einheiten“ denken, genauer als Abbildung

$$F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle \text{g/s}^2 \rangle\rangle$$

Da es sich jedoch mit Kovektorfeldern bei Koordinatenwechseln sehr viel besser rechnen läßt als mit Vektorfeldern, ist es oft günstiger, die durch das kanonische Skalarprodukt $s : \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$ aus [LA2] 6.4.1 gegebene Identifikation $\text{can}_s : \vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}}, \mathbb{L}^{\otimes 2})$ nachzuschalten und unser Kraftfeld stattdessen als eine Abbildung

$$\tilde{F} : \mathbb{E} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}}, \langle\langle \text{g m}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle)$$

aufzufassen. Die Elemente des eindimensionalen Vektorraums

$$\langle\langle \text{g m}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle = \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$$

heißen in der Physik auch **Energien**. In diesem Sinne können wir ein Kraftfeld dann also auch als ein Energie-wertiges Kovektorfeld auffassen. Das Wegintegral über dieses Kovektorfeld heißt die bei Durchlaufen des Weges in besagtem Kraftfeld freiwerdende Energie, und ihr Negatives die zu verrichtende **Arbeit**. Anschaulich und etwas vage gesprochen ordnet das Negative dieses Kovektorfelds nämlich gerade „jeder kleinen Verrückung die Arbeit zu, die bei dieser kleinen Verrückung gegen das Kraftfeld zu leisten wäre“. Eine energiewertige Abbildung $V : \mathbb{E} \rightarrow \langle\langle \text{g m}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$ mit $dV = -\tilde{F}$ heißt in der Physik ein **Potential** unseres Kraftfelds.

Ergänzendes Beispiel 5.3.20. Zentral in der sogenannten „Funktionentheorie“ sind die Wegintegrale komplexwertiger Kovektorfelder, die auf Teilmengen der komplexen Zahlenebene definiert sind, vergleiche [FT1] 1.3.2 und [FT1] 1.6. Üblicherweise bezeichnet in diesem Kontext $z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Identität und dz ihr Differential, ein komplexwertiges Kovektorfeld auf \mathbb{C} . Mit $f(z)dz$ bezeichnet man dann das Produkt dieses Kovektorfelds mit einer komplexwertigen Funktion $z \mapsto f(z)$. Das Integral derartiger Kovektorfelder heißt das „komplexe Wegintegral“ und liefert entsprechend komplexe Zahlen.

5.4 Felder mit Potential

5.4.1. Wir interessieren uns im weiteren für die Frage, unter welchen Bedingungen ein stetiges Kovektorfeld das Differential einer Funktion ist, und inwieweit diese Funktion eindeutig bestimmt ist. Diese Fragen werden nach einigen Vorbereitungen durch 5.4.2 und 5.5.5 beantwortet.

Proposition 5.4.2 (Felder mit Potential). *Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und ω ein stetiges Kovektorfeld auf U . So sind gleichbedeutend:*

1. Unser Kovektorfeld ist das Differential einer differenzierbaren Funktion;

2. Das Integral unseres Kovektorfelds über beliebige stetig differenzierbare Wege in U hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab;
3. Das Integral unseres Kovektorfelds über jeden geschlossenen stetig differenzierbaren Weg in U verschwindet.

5.4.3 (**Diskussion der Terminologie**). In physikalischer Terminologie 5.3.19 hat also ein Kraftfeld oder genauer das zugehörige energiewertige Kovektorfeld ein Potential genau dann, wenn die längs beliebiger Wege geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt.

Beweis. Es ist im folgenden bequem, für etwas allgemeinere als nur stetig differenzierbare Wege den Begriff des Wegintegrals zur Verfügung zu haben.

Definition 5.4.4. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ unseres Intervalls gibt derart, daß die Restriktionen $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ stetig differenzierbar sind für alle i . Wir bezeichnen stückweise stetig differenzierbare Wege abkürzend als **Integrationswege**.

5.4.5 (**Wegintegral über Integrationswege**). Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ein Integrationsweg in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und ω ein auf dem Bild von γ definiertes stetiges relatives Kovektorfeld, so setzen wir

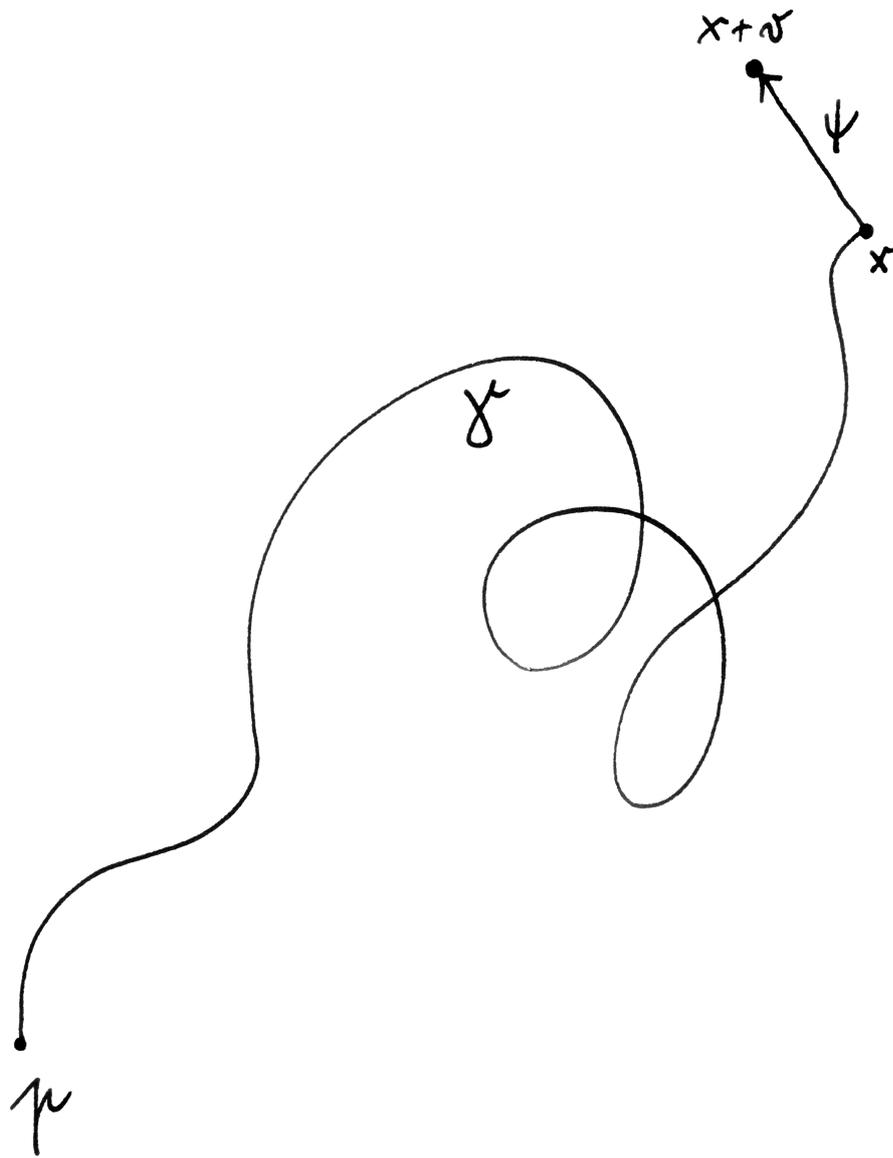
$$\oint_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{[a, a_1]}} \omega + \int_{\gamma|_{[a_1, a_2]}} \omega + \dots + \int_{\gamma|_{[a_{r-1}, b]}} \omega$$

für $a_1 < \dots < a_{r-1}$ die Stellen in (a, b) , an denen γ nicht differenzierbar ist. Sicher gilt dann $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{[a, c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c, b]}} \omega$ für alle $c \in (a, b)$.

Wir behaupten nun zunächst, daß die Aussagen 2 bzw. 3 der Proposition 5.4.2 jeweils gleichbedeutend sind zu

- 2'. Das Integral von ω über beliebige Integrationswege in U hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.
- 3'. Das Integral von ω über jeden geschlossenen Integrationsweg in U verschwindet.

Hier ist $2' \Rightarrow 2$ offensichtlich. Andererseits können wir aber jeden Integrationsweg so umparametrisieren, daß er stetig differenzierbar wird. Das Integral ändert sich dabei nicht, und so folgt auch die andere Richtung $2 \Rightarrow 2'$. Ebenso zeigt man $3 \Leftrightarrow 3'$. Nach diesen Vorarbeiten beginnen wir nun mit dem eigentlichen Beweis der Proposition. Die Folgerungen $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sind offensichtlich. Wir zeigen als nächstes $3' \Rightarrow 2$ durch Widerspruch: Gäbe es zwei Integrationswege



Ein beliebiger Weg mit angehängtem geraden Stück aus dem Beweis von $2' \Rightarrow 1$.

mit demselben Anfangs- und Endpunkt aber verschiedenen Integralen, so könnten wir den einen dieser Wege umdrehen und an den anderen anhängen und so einen geschlossenen Integrationsweg erhalten, über den das Integral von ω nicht Null wäre. Damit ist $3' \Rightarrow 2$ gezeigt. Zeigen wir nun noch $2' \Rightarrow 1$, so haben wir alles bewiesen. Nach 5.5.12 und 5.5.4 dürfen wir annehmen, daß U nicht leer ist und sich je zwei Punkte aus U durch einen Integrationsweg verbinden lassen. Dann wählen wir $p \in U$ fest und definieren eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$f(x) = \int_{\gamma} \omega$$

für einen und nach $2'$ dann auch jeden Integrationsweg γ von p nach x . Ist nun ψ ein stetig differenzierbarer Weg in U von x nach y , so behaupten wir

$$\int_{\psi} \omega = f(y) - f(x)$$

In der Tat können wir ja ψ am γ anhängen und so einen Integrationsweg von p nach y erhalten, so daß also gilt $\int_{\gamma} \omega + \int_{\psi} \omega = f(y)$. Mit dieser Erkenntnis läßt sich das Differential von f nun sehr leicht berechnen. Gegeben $x \in U$ sei $B \subseteq X$ ein offener Ball um Null mit $x + B \subset U$. Gegeben $v \in B$ betrachten wir den Weg $\psi : [0, 1] \rightarrow U$, $\psi(t) = x + tv$ und erhalten

$$f(x + v) - f(x) = \int_{\psi} \omega = \int_0^1 \omega_{x+tv}(v) dt = \omega_x(v) + \int_0^1 (\omega_{x+tv} - \omega_x)(v) dt$$

Das letzte Integral läßt sich aber schreiben als $\|v\|$ mal eine Funktion, die beschränkt ist für $v \in B$ durch $\sup\{\|\omega_{x+w} - \omega_x\| \mid \|w\| \leq \|v\|\}$ und die folglich mit v gegen Null strebt. Das zeigt $d_x f = \omega_x$ wie gewünscht. \square

5.5 Wegzusammenhang

Definition 5.5.1. Ist X ein topologischer Raum und sind $x, y \in X$ Punkte, so nennen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ einen **Weg von x nach y** . Ein topologischer Raum X heißt **wegweise zusammenhängend** oder auch kurz **wegzusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und es für je zwei Punkte unseres Raums einen Weg vom einen zum anderen gibt.

Definition 5.5.2. Unter einem **stückweise linearen Weg** in einem reellen Raum verstehen wir einen Weg, der aus endlich vielen Geradensegmenten zusammengesetzt ist. Genauer und in Formeln heißt also ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ in einem reellen Raum stückweise linear, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ gibt derart, daß γ auf jedem Teilintervall $[a_{i-1}, a_i]$ mit der Restriktion einer affinen Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow X$ übereinstimmt.

5.5.3. Im Lichte unserer allgemeinen Definitionen müßten wir eigentlich eher von einem „stückweise affinen Weg“ reden, aber das tut kein Mensch.

Lemma 5.5.4. *In einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines normierten reellen Raums lassen sich je zwei Punkte auch durch einen stückweise linearen Weg verbinden.*

Beweis. Sei $U \subseteq V$ unsere Teilmenge und seien $x, y \in U$ gegeben. Nach Annahme gibt es einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ von x nach y . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $U \neq V$ annehmen. Dann ist der Abstand zum Komplement von U nach [AN1] 6.2.23 eine stetige Funktion $d_{V \setminus U} : V \rightarrow \mathbb{R}$ ohne Nullstelle auf U . Also hat $d_{V \setminus U} \circ \gamma$ nach [AN1] 4.1.4 auf $[a, b]$ ein Minimum $\varepsilon > 0$, als da heißt, es gibt $\varepsilon > 0$ derart, daß alle Punkte aus $\gamma([a, b])$ mindestens den Abstand ε zum Komplement von U haben. Andererseits ist γ gleichmäßig stetig, wir finden also eine Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$ unseres Intervalls mit $\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| < \varepsilon$ für $1 \leq i \leq n$. Ein zwischen den Eckpunkten $x = \gamma(a_0), \gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n) = y$ jeweils linear verlaufender Weg bleibt also ganz in U . Damit ist gezeigt, daß sich je zwei Punkte aus U auch durch einen stückweise linearen Weg in U verbinden lassen. \square

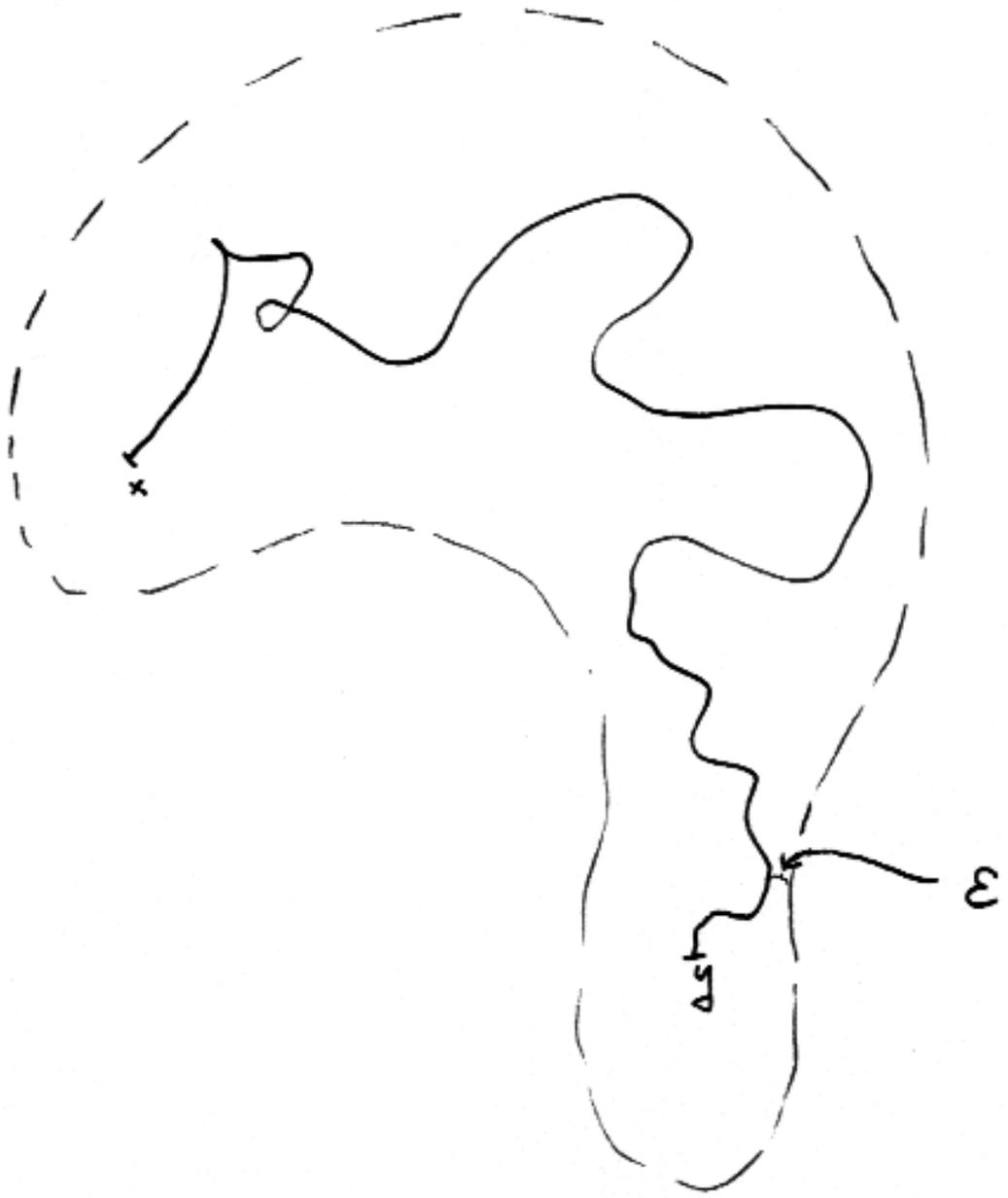
Lemma 5.5.5. *Auf einer offenen wegzusammenhängenden Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist jede differenzierbare reellwertige Funktion mit verschwindendem Differential konstant.*

Beweis. Eine differenzierbare Funktion mit verschwindendem Differential muß nach 5.3.14 am Anfang und Ende jedes stetig differenzierbaren Weges und dann auch am Anfang und Ende jedes stückweise linearen Weges denselben Wert annehmen. Das Lemma folgt damit aus 5.5.4. \square

Definition 5.5.6. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **diskret**, wenn jeder ihrer Punkte eine Umgebung besitzt, in der kein anderer Punkt besagter Teilmenge liegt. In anderen Worten nennen wir also eine Teilmenge eines topologischen Raums diskret, wenn sie mit der Spurtopologie ein diskreter topologischer Raum wird.

5.5.7. Zum Beispiel ist die Menge aller Brüche $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ mit einer Eins im Zähler eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlengeraden.

5.5.8 (**Diskussion der Terminologie**). Andere Autoren verstehen unter einer „diskreten Teilmenge“ eines topologischen Raums abweichend eine Teilmenge derart, daß jeder Punkt des gesamten Raums eine Umgebung besitzt, in der höchstens ein Punkt besagter Teilmenge liegt. In unserer Terminologie sind das genau die diskreten abgeschlossenen Teilmengen.



Definition 5.5.9. Eine Funktion auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^n , die um jeden Punkt ihres Definitionsbereichs in einer Umgebung durch ihre Taylorreihe dargestellt werden kann, heißt **analytisch**.

5.5.10. Wir werden in [FT1] 2.2.7 zeigen, daß Potenzreihen in einer Veränderlichen analytische Funktionen liefern. Analog kann man es auch für Potenzreihen in mehreren Veränderlichen zeigen.

Ergänzung 5.5.11. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend** genau dann, wenn er nicht leer ist und jede nichtleere Teilmenge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, bereits der ganze Raum sein muß. Übung 5.5.18 besagt in dieser Terminologie insbesondere, daß jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist. Besitzt jeder Punkt unseres Raums eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind alle seine Wegzusammenhangskomponenten offen und man sieht umgekehrt, daß ein nicht wegzusammenhängender Raum mit dieser Eigenschaft auch nicht zusammenhängend sein kann. Insbesondere ist eine offene Teilmenge eines reellen normierten Raums genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist. Mehr dazu wird in [TM] 1.3.3 besprochen.

Übungen

Übung 5.5.12. Auf jedem topologischen Raum X definiert man die Relation W der „Wegverbindbarkeit“ durch die Vorschrift, daß gilt xWy , wenn es in X einen Weg von x nach y gibt. Man zeige, daß das eine Äquivalenzrelation ist. Hinweis: Die Transitivität ergibt sich durch das „Aneinanderhängen von Wegen“ und die Stetigkeit der so entstehenden Wege folgt mit [AN1] 6.7.8. Die Äquivalenzklassen für die Äquivalenzrelation der Wegverbindbarkeit heißen die **Wegzusammenhangskomponenten** unseres Raums. Man zeige, daß die Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums offen sind genau dann, wenn jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt.

Übung 5.5.13. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist für $n > 1$ wegzusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung „abgeschlossen“, ist dann aber schwerer zu zeigen.

Übung 5.5.14. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum einer Dimension $\dim A \leq n - 2$ alias einer Kodimension mindestens Zwei, so ist auch $U \setminus A$ wegzusammenhängend. Für Teilräume A der Kodimension Eins alias affine Hyperebenen A gilt das natürlich nicht!

Übung 5.5.15. Stimmen zwei auf derselben wegzusammenhängenden offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n definierte analytische Funktionen auf einer Umgebung eines Punktes überein, so sind sie gleich. Hinweis: Man ziehe sich mithilfe stückweise linearer Wege auf den Fall $n = 1$ zurück.

Ergänzende Übung 5.5.16. Man zeige: Die Gruppe $SO(n)$ aller orthogonalen $(n \times n)$ -Matrizen mit Determinante Eins ist wegzusammenhängend. Hinweis: [LA2] 1.8.3. Weiter ist auch die Gruppe $GL(n; \mathbb{R})^+$ aller invertierbaren reellen $(n \times n)$ -Matrizen mit positiver Determinante wegzusammenhängend. Hinweis: [LA2] 1.8.9. Die Gruppen $SU(n)$ und $U(n)$ und $GL(n; \mathbb{C})$ sind wegzusammenhängend. Die vorgeschlagenen Lösungsansätze laufen auf eine Flickschusterei hinaus. Einen konzeptionellen Beweis werden wir in [TM] 1.11.13 kennenlernen.

Ergänzende Übung 5.5.17. Das Bild eines wegzusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets wieder wegzusammenhängend. Die wegzusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} sind gerade die nichtleeren Intervalle.

Übung 5.5.18. Gegeben ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist jede Teilmenge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, entweder leer oder bereits der ganze Raum. Hinweis: Man wähle sonst einen Weg von einem Punkt unserer Teilmenge in ihr Komplement und konstruiere einen Widerspruch.

Übung 5.5.19. Man zeige: Gegeben ein von Null verschiedenes Polynom $P \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$ ist die Menge seiner Nichtnullstellen in \mathbb{C}^n offen, dicht und wegzusammenhängend.

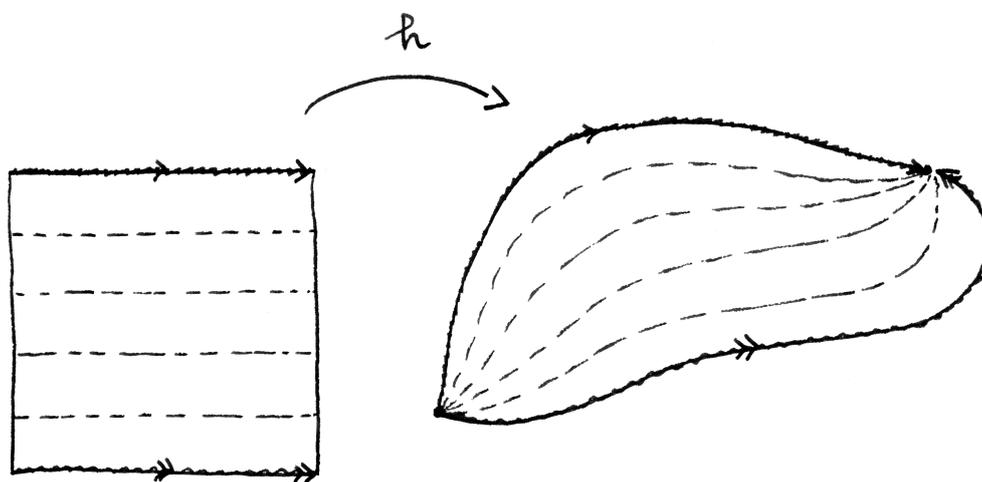
5.6 Homotopie von Wegen

5.6.1. Einen durch das Einheitsintervall parametrisierten Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ in einem topologischen Raum X nennen wir im Folgenden einen **normierten Weg**. Zu jedem Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ bilden wir den zugehörigen normierten Weg $\hat{\gamma} : t \mapsto \gamma((1-t)a + tb)$.

Definition 5.6.2. Seien x, y Punkte eines topologischen Raums X . Zwei normierte Wege α, β von x nach y heißen **homotop** oder präziser **homotop in X** oder ganz pedantisch **homotop mit festen Randpunkten** und wir schreiben $\alpha \simeq \beta$, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- bzw. Oberkante unseres Quadrats mit α bzw. β übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also $h(t, 0) = \alpha(t)$ und $h(t, 1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sowie $h(0, \tau) = x$ und $h(1, \tau) = y$ für alle $\tau \in [0, 1]$. Wir sagen dann auch, h sei eine **Homotopie zwischen α und β** und schreiben $h : \alpha \simeq \beta$. Zwei beliebige Wege von x nach y nennen wir **homotop** genau dann, wenn die zugehörigen normierten Wege homotop sind.



Eine Homotopie zwischen zwei Wegen, in diesem Fall zwischen den beiden Randwegen unserer Banane.

5.6.3. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie von Wegen auch dahingehend interpretieren, daß es eine durch $\tau \in [0, 1]$ parametrisierte Familie von normierten Wegen h_τ von x nach y geben soll derart, daß gilt $h_0 = \alpha$, $h_1 = \beta$ und daß unsere Familie stetig von τ abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung $[0, 1]^2 \rightarrow X$, $(t, \tau) \mapsto h_\tau(t)$ stetig ist.

Beispiel 5.6.4. Für eine konvexe Teilmenge X eines endlichdimensionalen reellen Raums und zwei beliebige Punkte $x, y \in X$ sind je zwei Wege α, β von x nach y homotop in X . Sind unsere Wege normiert, so kann man eine Homotopie explizit angeben vermittels $h(t, \tau) = (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$.

5.6.5 (**Vorwärtsverwandte homotoper Wege sind homotop**). Ist in Formeln $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so folgt aus $h : \alpha \simeq \beta$ schon $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$. Speziell ist ein Weg homotop zu allen seinen Umparametrisierungen, denn nach 5.6.4 sind je zwei Wege in $[0, 1]$ von 0 nach 1 homotop und damit gilt dasselbe für ihre Verknüpfung mit einer beliebigen stetigen Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$.

Definition 5.6.6. Ein Weg in einem topologischen Raum heißt ein **geschlossener Weg**, wenn sein Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Ein geschlossener Weg heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg. Ein topologischer Raum heißt **wegweise einfach zusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend ist und wenn darüber hinaus jeder geschlossene Weg in unserem Raum zusammenziehbar ist.

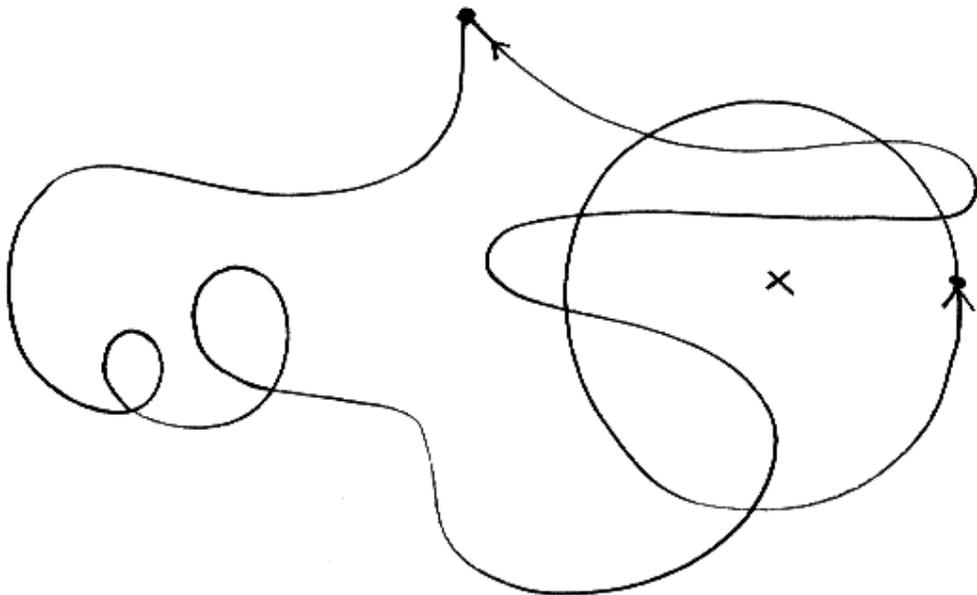
Vorschau 5.6.7. In [TF] 3.5.5 werden wir auch „einfach zusammenhängende“ topologische Räume kennenlernen, die in sehr anderer Weise definiert werden. Für halboffene Teilmengen normierter Räume wird sich dieser neue Begriff jedoch in [TF] 4.3.2 als gleichbedeutend zu „wegweise einfach zusammenhängend“ erweisen.

Ergänzung 5.6.8. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum einer Kodimension ≥ 3 , so ist auch $U \setminus A$ wegzusammenhängend. Für einen Beweis dieses Analogons zu 5.5.14 verweise ich auf die Topologie, siehe etwa [TF] 4.6.7.

Übungen

Übung 5.6.9. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege zwischen zwei fest vorgegebenen Punkten. Hinweis: [AN1] 6.7.8.

Übung 5.6.10. Ein Raum ist wegzusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und je zwei Wege mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt darin homotop sind.



Ein zusammenziehbarer und ein nicht zusammenziehbarer geschlossener Weg in Komplement des durch ein Kreuzchen markierten Punktes in der Papierebene

Ergänzende Übung 5.6.11. Jeder Weg in einer offenen Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums ist in besagter offener Teilmenge homotop zu einem stückweise linearen Weg. Hinweis: 5.5.4.

5.7 Wegintegrale über geschlossene Felder

Definition 5.7.1. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine halboffene Teilmenge. Ein differenzierbares Kovektorfeld $\omega : U \rightarrow \vec{X}^*$ auf U heißt **geschlossen**, wenn an jeder Stelle $p \in U$ sein Differential $d_p\omega : \vec{X} \rightarrow \vec{X}^*$ eine symmetrische Bilinearform auf \vec{X} liefert im Sinne einer Gleichheit von reellen Zahlen

$$(d_p\omega)(\vec{v})(\vec{w}) = (d_p\omega)(\vec{w})(\vec{v}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$$

5.7.2 (Diskussion der Terminologie). Diese Terminologie geht vermutlich auf den gleich folgenden Satz 5.7.7 zurück, nach dem ein stetig differenzierbares Kovektorfeld geschlossen ist genau dann, wenn seine Wegintegrale über alle geschlossenen und im Definitionsbereich zusammenziehbaren Wege verschwinden.

5.7.3 (Rückwärtsverwandtschaft erhält die Geschlossenheit). Gegeben ein differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld ist, wie man leicht sieht, auch sein Rückwärtsverwandter unter jeder affinen Abbildung geschlossen. Dasselbe zeigen wir in 6.6.7 sogar für Rückwärtsverwandte unter beliebigen „zweimal stetig differenzierbaren“ Abbildungen.

Beispiel 5.7.4 (Geschlossene Kovektorfelder auf \mathbb{R}^n). Ein differenzierbares Kovektorfeld $\omega = \sum u_i dx_i$ auf einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist geschlossen genau dann, wenn gilt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$$

In der Tat liefern unsere Definitionen in diesem Fall $(d_p\omega)(e_i)(e_j) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p)$.

Beispiel 5.7.5 (Differenziale sind stets geschlossen). Gegeben eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums X ist ihr Differential df stets geschlossen. In der Tat reicht es nach 5.7.3, den Fall $X = \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Für $\omega = \sum u_i dx_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df$ gilt dann in der Tat wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen stets

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

und damit ist df geschlossen nach 5.7.4. Im übrigen sieht man leicht ein, daß die $d_p(df)$ entsprechende symmetrische Bilinearform gerade das Doppelte des „quadratischen Anteils der Taylorentwicklung der Funktion f um p “ ist.

Vorschau 5.7.6. Später werden wir in 6.6.4 ganz allgemein die „äußere Ableitung von Differentialformen“ einführen. In dieser Terminologie sind dann unsere geschlossenen Kovektorfelder aus der vorhergehenden Definition 5.7.1 genau diejenigen differenzierbaren Kovektorfelder, deren äußere Ableitung $d\omega$, die eben an jeder Stelle gerade als der antisymmetrische Anteil unserer Bilinearform $d_p\omega$ erklärt wird, verschwindet. Daß Rückwärtsverwandschaft Geschlossenheit erhält, ist in diesem Kalkül eine unmittelbare Folgerung aus der Verträglichkeit von äußerer Ableitung mit Verwandtschaft 6.6.7.

Satz 5.7.7 (Wegintegral und Rotation). *Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Für ein stetig differenzierbares Kovektorfeld ω auf U sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kovektorfeld ist geschlossen;*
2. *Die Wegintegrale unseres Kovektorfelds über je zwei in U zueinander homotope Integrationswege stimmen überein;*
3. *Das Wegintegral unseres Kovektorfelds über jeden in U zusammenziehbaren geschlossenen Integrationsweg verschwindet.*

5.7.8. Einen alternativen und in gewisser Weise besonders glatten Beweis des Satzes unter stärkeren Voraussetzungen geben wir in 6.8.27.

5.7.9 (**Beziehung zur Proposition über Wegintegral und Potential**). Unsere Proposition 5.4.2 zu Wegintegral und Potential zusammen mit Teilen ihres Beweises besagt, daß gegeben eine offene Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums und ein stetiges Kovektorfeld auf U gleichbedeutend sind:

1. Unser Kovektorfeld ist das Differential einer differenzierbaren Funktion;
2. Das Integral unseres Kovektorfelds über beliebige Integrationswege in U hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab;
3. Das Integral unseres Kovektorfelds über jeden geschlossenen Integrationsweg in U verschwindet.

Alle diese gleichbedeutenden Bedingungen sind stärker als die entsprechenden Bedingungen in unserem Satz: Die Erste, da nach 5.7.5 Differentiale stets geschlossen sind, die anderen aus offensichtlichen Gründen.

Korollar 5.7.10 (Rotation und Potential). *Auf einer wegweise einfach zusammenhängenden offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist ein stetig differenzierbares Kovektorfeld genau dann geschlossen, wenn es das Differential einer differenzierbaren Funktion ist.*

5.7.11. Beim Beweis von Satz 5.7.7 werden wir für Spezialfälle dieser Aussage auch noch eigenständige Beweise geben.

5.7.12 (**Herkunft der Terminologie**). Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ wegweise einfach zusammenhängend besagt Korollar 5.7.10, daß ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann das Gradientenfeld einer differenzierbaren Funktion ist, wenn gilt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$$

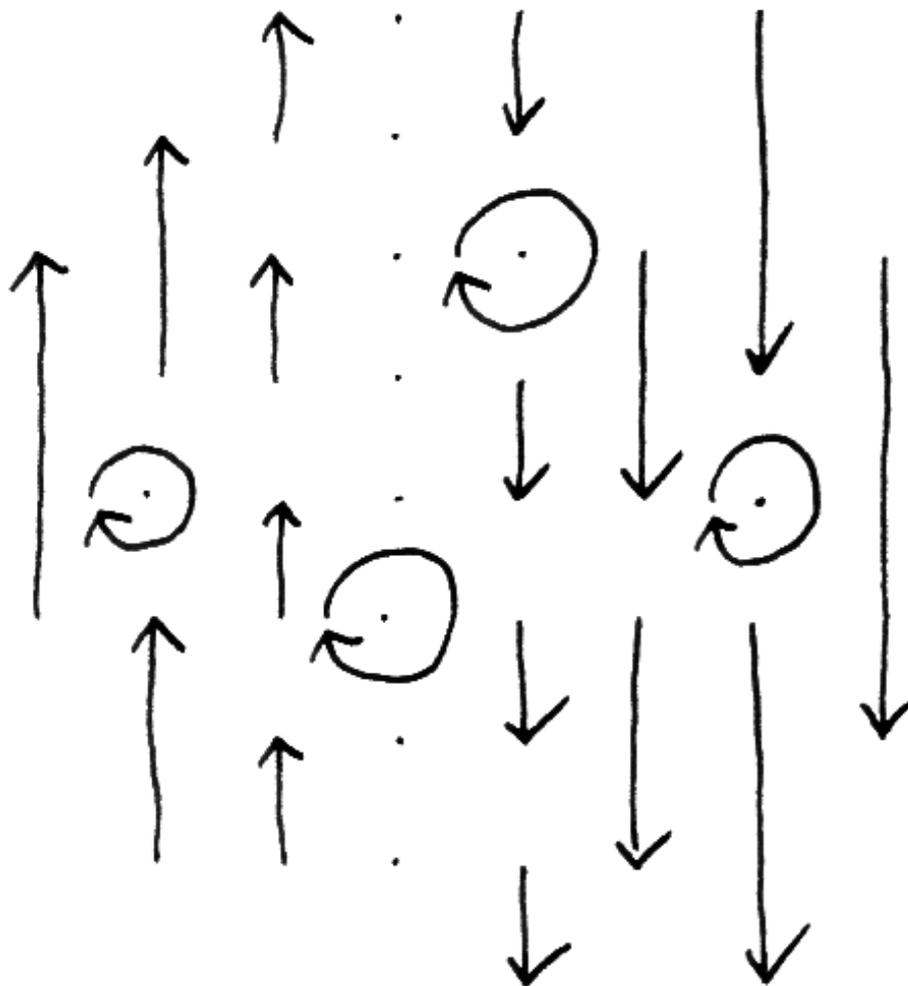
Insbesondere ist für $n = 1$ jedes stetig differenzierbare Vektorfeld ein Gradientenfeld, in diesem Fall wissen wir ja sogar, daß jede stetige Funktion eine Stammfunktion hat. Weiter ist für $n = 2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld v genau dann ein Gradientenfeld, wenn seine **skalare Rotation** alias **Wirbeldichte** $\text{rot } v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ verschwindet. Und schließlich ist für $n = 3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld v genau dann ein Gradientenfeld, wenn seine **Rotation** verschwindet, die man in diesem Falle definiert als das Vektorfeld

$$\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Beweis. Für U wegweise einfach zusammenhängend ist nun die letzte Bedingung aus Satz 5.7.7 zu Wegintegral und Rotation gleichbedeutend zur letzten Bedingung aus Proposition 5.4.2 Wegintegral und Potential. Mithin sind für U wegweise einfach zusammenhängend alle sechs Bedingungen gleichbedeutend und insbesondere ist unter dieser Voraussetzung jedes stetig differenzierbare geschlossene Kovektorfeld auf U das Differential einer Funktion. \square

5.7.13 (**Anschaung für die Rotation**). Um für das Konzept der Rotation eine Anschauung zu entwickeln, mag man sich unser Vektorfeld F als ein Kraftfeld vorstellen. Läßt man im ebenen Fall dieses Kraftfeld auf den Rand einer kleinen Kreisscheibe wirken, die an einer Stelle unserer Ebene drehbar befestigt ist, so beginnt sie sich zu drehen. Drehsinn sowie die Stärke der drehenden Kraft entsprechen Vorzeichen und Betrag der skalaren Rotation. Läßt man im räumlichen Fall dieses Kraftfeld auf die Oberfläche eines kleinen Balls wirken, den man an einer Stelle p hineinhält, so beginnt er sich auch zu drehen. Die Drehachse ist dann die von der Rotation unseres Vektorfeldes bei p erzeugte Gerade, und der Drehsinn sowie die Stärke der drehenden Kraft entsprechen Richtung und Länge der Rotation.

Beweis von Satz 5.7.7. Die Implikation $2 \Rightarrow 3$ ist offensichtlich. Um $3 \Rightarrow 1$ zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß U konvex



Das ebene Vektorfeld $(x, y) \mapsto (0, -x)$ hat konstant die Rotation -1 .

ist. Dann ist in U jeder geschlossene Weg zusammenziehbar und unsere Erkenntnisse zu Wegintegral und Potential 5.4.2 zeigen, daß unser Kovektorfeld auf besagter konvexer Teilmenge das Differential $\omega = df$ einer differenzierbaren Funktion sein muß. Solch ein Differential aber ist nach 5.7.5 stets geschlossen. Alternativ können wir die Implikation $3 \Rightarrow 1$ auch leicht aus Übung 5.7.20 herleiten. Damit bleibt nur noch $1 \Rightarrow 2$ zu zeigen. Wir beginnen unseren Beweis von $1 \Rightarrow 2$, indem wir ein Korollar unseres Satzes als Lemma formulieren und dafür einen eigenständigen Beweis geben.

Lemma 5.7.14. *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und ω darauf ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld, so ist ω das Differential einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.*

5.7.15. Ich gebe für dies Lemma zwei Beweise: Erst einen sehr kurzen mehr rechnerischen Beweis, und im Anschluß einen etwas längeren mehr konzeptionellen Beweis.

Beispiel 5.7.16. Daß ein rotationsfreies Vektorfeld auf einer nicht wegweise einfach zusammenhängenden offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n nicht notwendig ein Potential besitzt, zeigt das Vektorfeld $\text{grad } \theta$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, wo $\theta(x, y)$ der eben nur bis auf eine additive Konstante wohlbestimmte Winkel ist, den der Strahl vom Nullpunkt nach (x, y) mit der horizontalen Koordinatenachse einschließt. Der Gradient $\text{grad } \theta$ ist dann ein wohldefiniertes rotationsfreies Vektorfeld auf dem Komplement des Ursprungs, hat aber kein global definiertes Potential. Es heißt das **Winkelfeld**. Dies Vektorfeld ist nicht ganz leicht zu zeichnen, da die Längen seiner Vektoren gegen den Ursprung hin ins Unendliche wachsen. Auf den ersten Blick mag es absurd wirken, dieses Feld wirbelfrei zu nennen. Eine außerhalb des Ursprungs zum Testen hereingelegte kleine Kreisscheibe würde aber in der Tat nicht gedreht, die stärkeren Vektoren zerren zwar an der dem Ursprung zugewandten Seite, aber von diesen Vektoren greifen andererseits auch weniger an. In gewisser Weise konzentriert sich hier das gesamte Wirbeln im Ursprung, und der gehört nun eben gerade nicht zu unserem Definitionsbereich. In mathematischer Sprechweise ist $d\theta$ ein geschlossenes Kovektorfeld auf der punktierten Ebene, das jedoch nicht das Differential einer global definierten Funktion ist. Anschaulich mag man sich das Winkelfeld als das „Steigungsfeld einer Wendeltreppe“ denken, bei dem auf dem Boden unter einer Wendeltreppe an jeder Stelle eingezeichnet wird, in welcher Richtung es auf der Wendeltreppe darüber am steilsten hochgeht und wie steil es da hochgeht.

Rechnerischer Beweis. Sei $\omega = \sum u_j dx_j$. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \in U$ annehmen, bezeichnen nun wieder mit x einen Vektor und betrachten den Weg $\psi_x : [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto tx$ und die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

gegeben durch

$$f(x) = \int_{\psi_x} \omega = \int_0^1 \omega_{tx}(x) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n u_j(tx) \cdot x_j dt$$

Ihre partielle Ableitung nach x_i ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=p} \left(\sum_{j=1}^n (u_j \circ (t \cdot)) \cdot x_j \right) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n t \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(tp) \cdot p_j + u_i(tp) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n t \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(tp) \cdot p_j + u_i(tp) dt \\ &= \int_0^1 t \cdot \frac{d}{dt}(u_i(tp)) + u_i(tp) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t \cdot (u_i(tp))) dt \\ &= t \cdot u_i(tp) \Big|_0^1 \\ &= u_i(p) \end{aligned}$$

und wir sehen, daß in der Tat gilt $df = \omega$. □

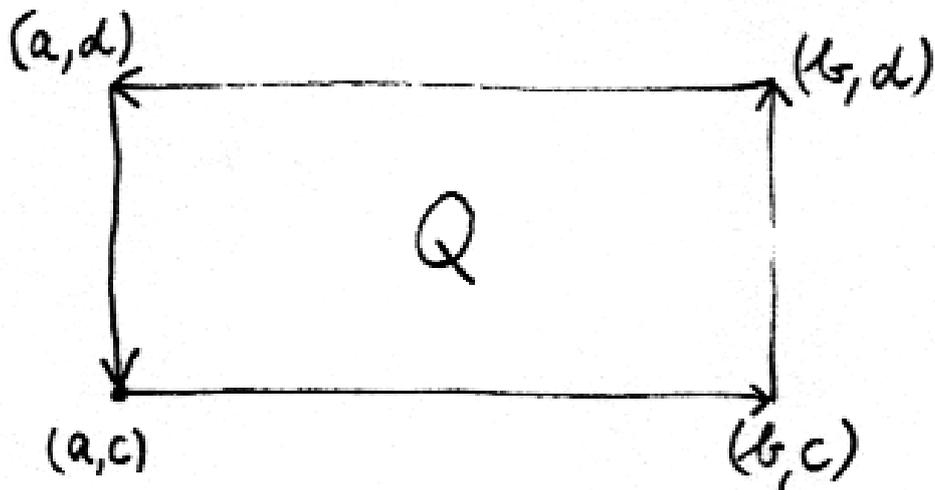
Konzeptioneller Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $n = 2$ als eigenständiges Lemma.

Lemma 5.7.17. *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine ebene Kreisscheibe und ω darauf ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld, so ist ω das Differential einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.*

Beweis. Um Indizes zu vermeiden schreiben wir bei der Behandlung dieses Spezialfalls (x, y) statt (x_1, x_2) in der Hoffnung, daß dies Einsparen von Indizes mehr Klarheit schafft, als die Verwendung der Buchstaben x, y mit verschiedenen Bedeutungen an Verwirrung erzeugt. Betrachten wir ein Rechteck $Q = [a, b] \times [c, d] \subset U$ und integrieren unser Kovektorfeld einmal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand entlang, den wir parametrisieren als Weg ρ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\rho} \omega &= \int_a^b u_1(x, c) dx + \int_c^d u_2(b, y) dy - \int_a^b u_1(x, d) dx - \int_c^d u_2(a, y) dy \\ &= \int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Für ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld verschwindet also das Wegintegral einmal um den Rand unseres Rechtecks und der „obere“ bzw. der



Das Rechteck aus dem Beweis von [5.7.17](#).

„untere“ Weg auf den Kanten des Rechtecks von einem Punkt zum diagonal gegenüberliegenden Punkt liefern dasselbe Wegintegral. Halten wir nun einen Punkt $(p, q) \in U$ fest, so definiert dieses gemeinsame Wegintegral eine Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_p^x u_1(t, q) dt + \int_q^y u_2(x, s) ds \\ &= \int_q^y u_2(p, s) ds + \int_p^x u_1(t, y) dt \end{aligned}$$

für die wegen der ersten Darstellung offensichtlich gilt $f_y = u_2$ und wegen der zweiten Darstellung $f_x = u_1$. Damit gilt $\omega = df$ wie behauptet. \square

Jetzt führen wir unseren konzeptionellen Beweis des Lemmas im Fall allgemeiner Dimension zu Ende. Wir betrachten dazu alle Wege, die längs der Kanten eines achsenparallelen Quaders vom Ursprung nach p laufen. Genauer betrachten wir für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ den Weg $[\sigma] = [\sigma; p]$ vom Ursprung nach p , der gerade verläuft zwischen den Eckpunkten

$$0, p_{\sigma(1)}\vec{e}_{\sigma(1)}, p_{\sigma(1)}\vec{e}_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)}\vec{e}_{\sigma(2)}, \dots, p$$

Ist $\tau = (i, i + 1)$ eine Transposition benachbarter Zahlen, so unterscheiden sich $[\sigma]$ und $[\sigma \circ \tau]$ nur dadurch, daß sie beim i -ten und $(i + 1)$ -ten Geradenstück auf verschiedenen Kantenwegen diagonal gegenüberliegende Punkte eines ebenen Rechtecks verbinden. Ziehen wir unser Kovektorfeld auf eine geeignete Ebene zurück, so landen wir im bereits behandelten Fall und folgern

$$\int_{[\sigma]} \omega = \int_{[\sigma \circ \tau]} \omega$$

für jede Transposition τ der Gestalt $\tau = (i, i + 1)$. Wissen wir nun bereits nach [LA1] 5.1.8, daß derartige Transpositionen die symmetrische Gruppe erzeugen, so können wir sofort folgern, daß $\int_{[\sigma]} \omega$ gar nicht von $\sigma \in \mathcal{S}_n$ abhängt. Die durch

$$f(p) = \int_{[\sigma; p]} \omega$$

für ein und alle σ definierte Funktion f hat dann Differential $df = \omega$, da ihre partielle Ableitung nach x_i auch aus jeder Darstellung durch ein σ mit $\sigma(n) = i$ berechnet werden kann, für die $\frac{\partial f}{\partial x_i} = u_i$ offensichtlich ist. \square

Jetzt können wir schließlich in unserem Satz 5.7.7 auch noch die Implikation $1 \Rightarrow 2$ zeigen. Sei $h : [0, 1]^2 \rightarrow U$ eine Homotopie zwischen unseren beiden Integrationswegen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Analog wie beim Beweis von 5.5.4 zeigen wir mithilfe von [AN1] 6.2.23

und [AN1] 7.1.12, daß es für den Abstand von Punkten aus dem Bild unseres Einheitsquadrats und Punkten außerhalb von U eine positive untere Schranke gibt. Da h nach [AN1] 7.1.15 gleichmäßig stetig ist, finden wir weiter ein $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ derart, daß bei Unterteilung des Einheitsquadrats in r^2 kleine Schachfelder der Kantenlänge $1/r$ die einzelnen Felder unter h jeweils ganz in einen offenen Ball in U abgebildet werden. Jetzt betrachten wir die Integrale längs der Geradensegmente zwischen den Bildern in U von benachbarten Ecken unserer Schachfelder

$$c_{i,j} = \int_{h(\frac{i}{r}, \frac{j}{r})}^{h(\frac{i+1}{r}, \frac{j}{r})} \omega \quad \text{und} \quad d_{i,j} = \int_{h(\frac{i}{r}, \frac{j}{r})}^{h(\frac{i}{r}, \frac{j+1}{r})} \omega$$

Indem wir Lemma 5.7.14 auf unsere offenen Bälle in U anwenden, finden wir $c_{i,j} + d_{i+1,j} - d_{i,j} - c_{i,j+1} = 0$ und durch Aufsummieren

$$\sum_{0 \leq i < r} c_{i,0} + \sum_{0 \leq j < r} d_{r,j} - \sum_{0 \leq j < r} d_{0,j} - \sum_{0 \leq i < r} c_{i,r} = 0$$

Indem wir nochmals Lemma 5.7.14 auf unsere offenen Bälle anwenden sehen wir dann weiter, daß diese vier Summen jeweils den Wegintegralen von ω über die durch die vier Kanten unseres Quadrats gegebenen Wege gleichen. Zwei von diesen Wegen sind eh konstant und die übrigen sind eben gerade die beiden homotopen Integrationswege, von denen wir ausgegangen waren. \square

Satz 5.7.18 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Ergänzung 5.7.19. Einen Überblick über die gängigsten alternativen Beweise mit ihren Stärken und Schwächen gebe ich in [LA1] 4.3.25. Einen recht elementaren analytischen Beweis hatten wir bereits in [AN1] 7.2.1 gesehen.

Beweis. Sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ unser Polynom. Wir argumentieren durch Widerspruch und betrachten für jeden Radius $r > 0$ den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = re^{it} = r \cos t + ir \sin t$, der einmal auf dem Kreis mit Radius r umläuft. Nach 5.6.4 ist er in \mathbb{C} zusammenziehbar. Hätte unser Polynom keine Nullstelle, so lieferte es eine stetige Abbildung $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, und nach 5.6.5 wären alle $P \circ \gamma_r$ zusammenziehbar in \mathbb{C}^\times . Für hinreichend großes r gilt nun jedoch $r^n > |a_{n-1}|r^{n-1} + \dots + |a_1|r + |a_0|$, und für solche r ist der Weg $P \circ \gamma_r$ in \mathbb{C}^\times homotop zum Weg $t \mapsto \gamma_r(t)^n$, da nämlich für kein t die Strecke von $P(\gamma_r(t))$ nach $\gamma_r(t)^n$ den Nullpunkt trifft. Hätte also P keine Nullstelle, so wäre der Weg $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $t \mapsto \gamma_r(t)^n$ zusammenziehbar in \mathbb{C}^\times . Das steht jedoch im Widerspruch zu 5.7.21. \square

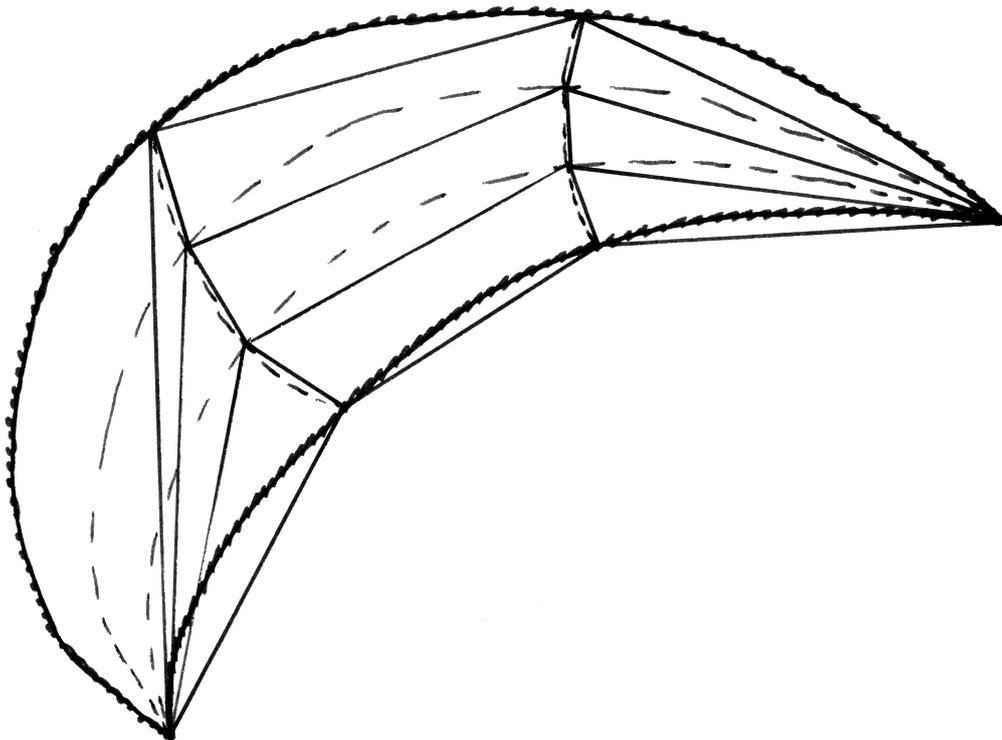
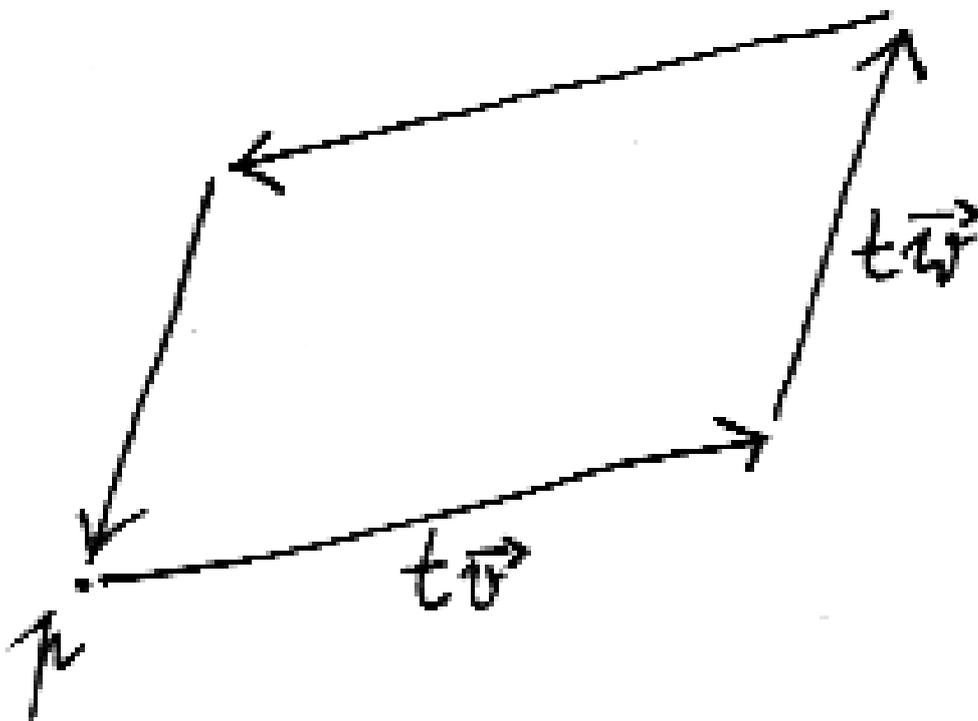


Illustration zum Beweis von Satz 5.7.7 über die Homotopieinvarianz von Wegintegralen bei gewissen Kovektorfeldern. Die beiden Wege werden durch dicke gezackte Linien dargestellt, die Homotopie zwischen ihnen durch feine gestrichelte Linien. Es gilt, diese Unterteilung so fein zu wählen, daß jeder dieser „Ziegel“ ganz in einem im Definitionsbereich unserer geschlossenen Differentialform enthaltenen Ball liegt.



Der Weg $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$ aus Übung 5.7.20. Mit $t \rightarrow 0$ wird er natürlich immer kleiner.

Übungen

Übung 5.7.20. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $A \subseteq X$ eine offene Teilmenge, $p \in A$ ein Punkt und $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetig differenzierbares Kovektorfeld. So gilt in den Notationen der vorhergehenden Definition 5.7.1 für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$ die Identität

$$(\mathrm{d}_p\omega)(\vec{v})(\vec{w}) - (\mathrm{d}_p\omega)(\vec{w})(\vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_{\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})} \omega$$

mit der Notation $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$ für den Weg, der einmal das Parallelogramm mit einer Ecke p und Kantenvektoren $t\vec{v}$ und $t\vec{w}$ umläuft, oder genauer, der stückweise linear läuft erst von p nach $p+t\vec{v}$, dann weiter nach $p+t\vec{v}+t\vec{w}$, von da nach $p+t\vec{w}$, und dann wieder zurück nach p . Hinweis: Es mag die Rechnung vereinfachen, wenn man das fragliche Integral zu einer Funktion von zwei Veränderlichen s, t erweitert.

Übung 5.7.21. Man zeige, daß gegeben $n \in \mathbb{Z}$ der geschlossene Weg $\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nur für $n = 0$ zusammenziehbar ist. Hinweis: Man berechne das Integral des Winkelfeldes über diesen Weg und beachte 5.7.7. Ich empfinde es allerdings als Umweg, diese Aussage mithilfe von Wegintegralen nachzuweisen, und ziehe den topologischen Beweis über Liftungseigenschaften in [TF] 1.3 folgende vor.

Ergänzende Übung 5.7.22. Gegeben ein Rechteck $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ und darauf ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ stimmt das Integral seiner **Wirbeldichte** alias **skalaren Rotation** $\operatorname{rot} v$ über das Rechteck Q überein mit seinem **Wegintegral als Vektorfeld** einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks. In 6.8.24 werden wir diese Aussage als Spezialfall des allgemeinen Stokes'schen Satzes zu verstehen lernen.

6 Der Satz von Stokes

In Abschnitt 4.3.1 haben wir unser Kurvenintegral aus [AN1] 8.3.6 verallgemeinert zum Integral einer Funktion über eine Fastfaltung in einem \mathbb{R}^n . In diesem Abschnitt werden wir unser Wegintegral aus 5.3, als da heißt das Integral eines Kovektorfelds auf einem endlichdimensionalen reellen Raum längs eines Weges, verallgemeinern zum Integral einer „Differentialform“ auf einem endlichdimensionalen reellen Raum über eine „orientierte“ Fastfaltung. Als Spezialfälle enthält diese Konstruktion insbesondere die Definition des „Flusses eines Vektorfelds in \mathbb{R}^3 durch eine orientierte Fläche in \mathbb{R}^3 “. Unser eigentliches Ziel ist dann der sogenannte „allgemeine Satz von Stokes“ 6.8.2, der den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung [AN1] 4.7.1 auf höhere Dimensionen verallgemeinert.

6.1 Multilineare Algebra und Dachprodukt

Definition 6.1.1. Sei k ein Körper. Gegeben ein k -Vektorraum V und eine natürliche Zahl p bilden wir den Raum der **alternierenden p -Multilinearformen** oder kurz **p -Formen**

$$\text{Alt}^p V := \{\omega : V \times \dots \times V \rightarrow k \mid \omega \text{ ist multilinear und alternierend}\}$$

Hier meint alternierend wie in [LA1] 5.3.1, daß $\omega(v_1, \dots, v_p)$ verschwindet, wann immer es $i \neq j$ gibt mit $v_i = v_j$.

6.1.2. Hat unser Körper nicht die Charakteristik 2, so mag man gleichbedeutend fordern, daß $\omega(v_1, \dots, v_p)$ sein Vorzeichen ändert, wenn man zwei Einträge v_i und v_j vertauscht. Daher kommt die Bezeichnung „alternierend“. Unter Nullformen verstehen wir Skalare, in Formeln setzen wir also $\text{Alt}^0 V = k$. Einsformen sind Elemente des Dualraums alias Linearformen, wir haben also $\text{Alt}^1 V = V^\top$. Gegeben Linearformen $f_1, \dots, f_p \in V^\top$ definieren wir ein Element $\text{alt}(f_1, \dots, f_p) \in \text{Alt}^p V$ durch die Vorschrift

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p)(v_1, \dots, v_p) := \det(f_i(v_j))$$

Wir nennen es das **Determinantenprodukt** der f_i .

6.1.3. Wir werden unmittelbar im Anschluß das Dachprodukt von alternierenden Multilinearformen einführen und dessen Assoziativität beweisen ebenso wie die Formel $\text{alt}(f_1, \dots, f_p) = f_1 \wedge \dots \wedge f_p$. Sobald das geleistet ist, wird die Notation $\text{alt}(f_1, \dots, f_p)$ obsolet werden und statt „Determinantenprodukt“ dürfen und werden wir von da an „iteriertes Dachprodukt“ sagen.

Vorschau 6.1.4. Im Rahmen unserer Diskussion des Tensorprodukts werden die Begriffsbildungen dieses Abschnitts auch noch unter einem anderen Gesichtspunkt besprochen. Genauer konstruieren wir in [LA2] 7.4.3 einen kanonischen Isomorphismus zwischen dem hier definierten Raum $\text{Alt}^p V$ der alternierenden Multilinearformen auf V und dem Dualraum $(\bigwedge^p V)^\top$ seiner dort definierten p -ten äußeren Potenz $\bigwedge^p V$. Zusätzlich erklären wir in [LA2] 7.4.6 für endlichdimensionales V kanonische Isomorphismen $(\bigwedge^p V)^\top \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p(V^\top)$ zwischen den Dualräumen der äußeren Potenzen und den äußeren Potenzen des Dualraums und erhalten so zusammen einen kanonischen Isomorphismus $\text{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p(V^\top)$.

6.1.5. Sind Linearformen $f_1, \dots, f_n \in V^\top$ gegeben und ist $I \subset \{1, \dots, n\}$ eine Teilmenge mit p Elementen, so setzen wir

$$f_I := \text{alt}(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \in \text{Alt}^p V$$

für das entsprechende Determinantenprodukt der Basisvektoren mit $i_1 < \dots < i_p$ den der Größe nach gereihten Elemente von I . Für $I = \emptyset$ vereinbaren wir $f_\emptyset = 1$.

Proposition 6.1.6 (Basis des Raums der p -Formen). *Ist V ein Vektorraum und f_1, \dots, f_n eine Basis seines Dualraums V^\top , so bilden die Determinantenprodukte f_I aus 6.1.5 mit $|I| = p$ eine Basis von $\text{Alt}^p V$.*

Beweis. Ist v_1, \dots, v_n die duale Basis von V und ist auch $J = \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, n\}$ gegeben mit $j_1 < \dots < j_p$, so gilt offensichtlich

$$f_I(v_{j_1}, \dots, v_{j_p}) = \begin{cases} 1 & I = J; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das zeigt die lineare Unabhängigkeit der f_I . Andererseits ist klar, daß eine alternierende Multilinearform schon festgelegt wird durch ihre Werte auf den p -Tupeln $(v_{j_1}, \dots, v_{j_p})$ mit $j_1 < \dots < j_p$. Das zeigt, daß die f_I auch $\text{Alt}^p V$ erzeugen. \square

6.1.7. Im Vorgriff auf unsere zukünftige Notation $f_1 \wedge \dots \wedge f_p$ für $\text{alt}(f_1, \dots, f_p)$ wäre im Fall eines Vektorraums V der Dimension $\dim V = 4$ also $\text{Alt}^2 V$ ein Vektorraum der Dimension $\dim(\text{Alt}^2 V) = 6$, und für $f_1, \dots, f_4 \in V^*$ eine Basis seines Dualraums wäre $f_1 \wedge f_2, f_1 \wedge f_3, f_1 \wedge f_4, f_2 \wedge f_3, f_2 \wedge f_4, f_3 \wedge f_4$ eine Basis von $\text{Alt}^2 V$.

Proposition 6.1.8. *Seien k ein Körper, V ein k -Vektorraum endlicher Dimension und $p, q \geq 0$. So gibt es genau eine bilineare Abbildung, das **Dachprodukt***

$$\begin{aligned} \text{Alt}^p V \times \text{Alt}^q V &\rightarrow \text{Alt}^{p+q} V \\ (\omega, \eta) &\mapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

derart, daß für alle $f_1, \dots, f_{p+q} \in V^\top$ gilt

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p) \wedge \text{alt}(f_{p+1}, \dots, f_{p+q}) = \text{alt}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+q})$$

6.1.9. Mit 6.1.6 folgt unmittelbar die **Assoziativität des Dachprodukts**

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$$

Damit brauchen wir auch bei längeren Dachprodukten keine Klammern zu setzen und unsere Notation „alt“ wird obsolet, denn offensichtlich folgt aus der Proposition auch

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p) = f_1 \wedge \dots \wedge f_p$$

Vorschau 6.1.10. Ein natürlichere Konstruktion des Dachprodukts besprechen wir im Rahmen der multilinearen Algebra in [LA2] 7.4.13. Sie mögen zur Übung zeigen, daß unter unserem Isomorphismus 6.1.4 das Dachprodukt aus [LA2] 7.4.13 genau unserem Dachprodukt aus 6.1.8 entspricht, vergleiche auch [LA2] 7.4.13. In der Tat reicht es angesichts der Assoziativität beider Dachprodukte, diese Behauptung im Fall des Dachprodukts zweier Linearformen zu prüfen, und in diesem Fall ist sie schnell nachgerechnet.

Ergänzung 6.1.11. Die Formel aus dem anschließenden Beweis definiert auch für alternierende Formen auf einem nicht notwendig endlichdimensionalen Raum ein assoziatives Produkt \wedge . Der Beweis bleibe dem Leser überlassen ebenso wie der Nachweis der graduierten Kommutativität 6.1.12 in dieser Allgemeinheit. Für unsere Belange reicht der endlichdimensionale Fall aus.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus 6.1.6 und nur die Existenz ist noch zu zeigen. Wir betrachten dazu die Menge $\mathcal{S}_{p,q} \subset \mathcal{S}_{p+q}$ aller Permutationen, die die Reihenfolge der ersten p Einträge und die der letzten q Einträge unverändert lassen. Stellen wir uns unsere Permutationen als Mischvorschriften für ein Spiel von $p+q$ Karten vor, so heben wir also p Karten ab und schieben die beiden so gebildeten Stapel von p bzw. q Karten irgendwie ineinander. Solche Permutationen heißen auch (p, q) -**Shuffles**, in Formeln haben wir

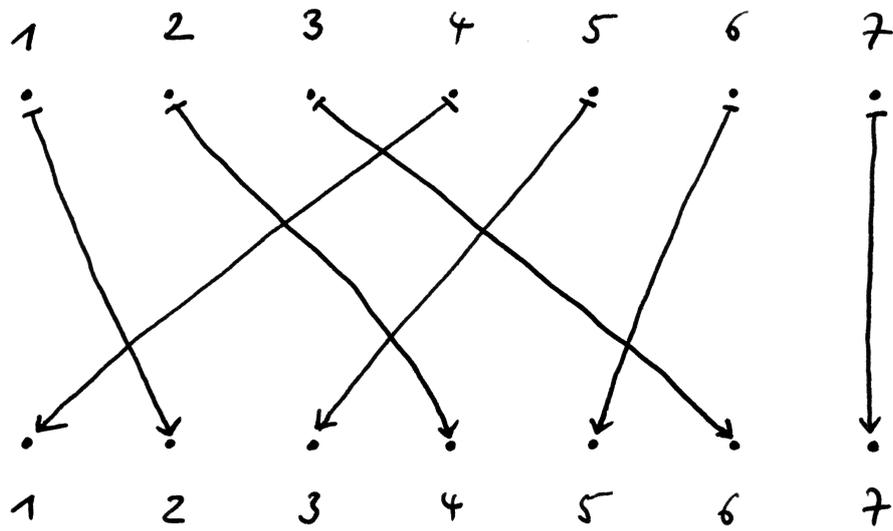
$$\mathcal{S}_{p,q} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q} \mid \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ und } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)\}$$

Weiter betrachten wir in \mathcal{S}_{p+q} die Untergruppe $\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q$ aller Permutationen, die die ersten p Einträge unter sich vertauschen und die letzten q Einträge ebenso. Die Verknüpfung von Permutationen liefert dann offensichtlich eine Bijektion

$$\mathcal{S}_{p,q} \times (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{p+q}$$

Jetzt definieren wir für ω und η wie oben eine Multilinearform $\omega \wedge \eta$ durch die Vorschrift

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$



Ein (3, 4)-Shuffle

Betrachten wir andererseits unsere Definition

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_n)(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\tau) f_1(v_{\tau(1)}) \cdots f_n(v_{\tau(n)})$$

für $n = p, q$ und setzen das in unsere Definition von \wedge ein, so ergibt sich mithilfe unserer Zerlegung $\mathcal{S}_{p,q} \times (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{p+q}$ wie gewünscht

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p) \wedge \text{alt}(f_{p+1}, \dots, f_{p+q}) = \text{alt}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+q})$$

Die Bilinearität von \wedge zeigt dann weiter, daß die Multilinearform $\omega \wedge \eta$ auch im allgemeinen alternierend ist, so daß unsere Formel für \wedge in der Tat eine Abbildung $\text{Alt}^p V \times \text{Alt}^q V \rightarrow \text{Alt}^{p+q} V$ mit den geforderten Eigenschaften liefert. \square

Lemma 6.1.12 (Graduierte Kommutativität des Dachprodukts). *Sei V ein Vektorraum. Für beliebige $\omega \in \text{Alt}^p V$ und $\eta \in \text{Alt}^q V$ gilt $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$. Bezeichnet $|\omega|$ den Grad von ω , also $|\omega| = p$ für $\omega \in \text{Alt}^p$, so können wir diese Regel auch schreiben in der Gestalt*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{|\omega||\eta|} \eta \wedge \omega$$

Beweis. Aus 6.1.8 folgt sofort $f_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge f_{\sigma(n)} = (\text{sgn } \sigma) f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ und alle $f_1, \dots, f_n \in V^\top$. Die Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}$, die die ersten p Einträge an den Schluß schiebt und die letzten q Einträge an den Anfang, hat aber nach [LA1] 5.1.3 das Signum $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{pq}$. Das Lemma folgt so zunächst für ω, η iterierte Dachprodukte und dann auch für allgemeine endlichdimensionale Räume. Der Fall unendlichdimensionaler Räume ist für uns hier nicht relevant, der Beweis in dieser Allgemeinheit bleibe dem Leser zur Übung überlassen. \square

6.1.13 (Funktorialität alternierender Multilinearformen). Zu jeder linearen Abbildung $L : V \rightarrow W$ bilden wir wie in [LA1] 2.9.13 ihre transponierte Abbildung $L^\top : W^\top \rightarrow V^\top$, $f \mapsto f \circ L$ und allgemeiner auch die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} L^\top : \text{Alt}^p W &\rightarrow \text{Alt}^p V \\ \omega &\mapsto \omega \circ (L \times \dots \times L) \end{aligned}$$

mit $L \times \dots \times L$ wie in [LA1] 1.3.4, als da heißt $(L^\top \omega)(v_1, \dots, v_p) = \omega(Lv_1, \dots, Lv_p)$. Wir nennen auch sie **transponierte Abbildungen**. Aus den Definitionen folgen leicht die Formeln $\text{id}^\top = \text{id}$ und $(L \circ M)^\top = M^\top \circ L^\top$ für die transponierten Abbildungen sowie die Verträglichkeit mit dem Dachprodukt

$$L^\top(\omega \wedge \eta) = (L^\top \omega) \wedge (L^\top \eta)$$

Ergänzung 6.1.14. In der Sprache der Kategorientheorie [LA2] 8.2.1 ausgedrückt bilden demnach für jedes p die Zuordnungen $V \mapsto \text{Alt}^p V$, $L \mapsto L^\top$ einen kontravarianten Funktor Alt^p von der Kategorie der k -Vektorräume in sich selber, dessen Effekt auf Morphismen ich nur der Bequemlichkeit der Notation halber $L \mapsto L^\top$ statt $L \mapsto \text{Alt}^p(L)$ notiert habe, und $V \mapsto \text{Alt} V := \bigoplus_p \text{Alt}^p V$ ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der k -Vektorräume in die Kategorie der k -Ringalgebren.

Lemma 6.1.15 (Dachprodukt und Determinante). *Gegeben ein n -dimensionaler Vektorraum V und eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow V$ gilt*

$$L^\top = (\det L) : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$$

Beweis. Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum, so ist $\text{Alt}^n V$ eindimensional. Für $L : V \rightarrow V$ linear muß also $L^\top : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$ die Multiplikation mit einem Skalar aus dem Grundkörper sein. Ist v_1, \dots, v_n eine Basis von V und f_1, \dots, f_n die duale Basis von V^\top , so ist $f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ eine Basis von $\text{Alt}^n V$ und das Lemma folgt mit expliziter Rechnung, für $(\det L)$ die Determinante der Matrix von L in der gewählten Basis. Daß die fragliche Determinante von der Wahl der Basis gar nicht abhängt und deshalb in der Tat $(\det L)$ notiert werden darf, erhält man als Konsequenz. \square

Ergänzung 6.1.16. Nehmen wir 6.1.13 und 6.1.15 zusammen, so ergibt sich unmittelbar die Multiplikationsformel für Determinanten [LA1] 5.4.1.

Ergänzung 6.1.17. Gegeben endlichdimensionale Vektorräume V, W und Formen $\omega \in \text{Alt}^p V$ und $\eta \in \text{Alt}^q W$ verwenden wir für die $(p+q)$ -Form $(\text{pr}_1^\top \omega) \wedge (\text{pr}_2^\top \eta)$ auf $V \times W$ die beiden Notationen $\omega \boxtimes \eta = \omega \wedge \eta$ und hoffen, daß der Leser im Zweifelsfall aus dem Kontext erschließen kann, wann \wedge dieses „äußere Dachprodukt“ meint und wann das „innere Dachprodukt“ aus 6.1.8.

Übungen

Übung 6.1.18. Für jeden Vektorraum V endlicher Dimension $\dim V = n$ liefert das Dachprodukt $V^\top \times \text{Alt}^{n-1} V \rightarrow \text{Alt}^n V$ eine nichtausgeartete Paarung im Sinne von [LA2] 2.3.35, als da heißt, jeder Isomorphismus $\text{Alt}^n V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ liefert mittels unserer Paarung einen Isomorphismus $\text{Alt}^{n-1} V \xrightarrow{\sim} V^{\top\top} \xrightarrow{\sim} V$.

6.2 Differentialformen höheren Grades

Definition 6.2.1. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Feld von relativen p -Formen** oder kürzer eine **p -Form auf**

U ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega : U &\rightarrow \text{Alt}^p \vec{X} \\ x &\mapsto \omega_x \end{aligned}$$

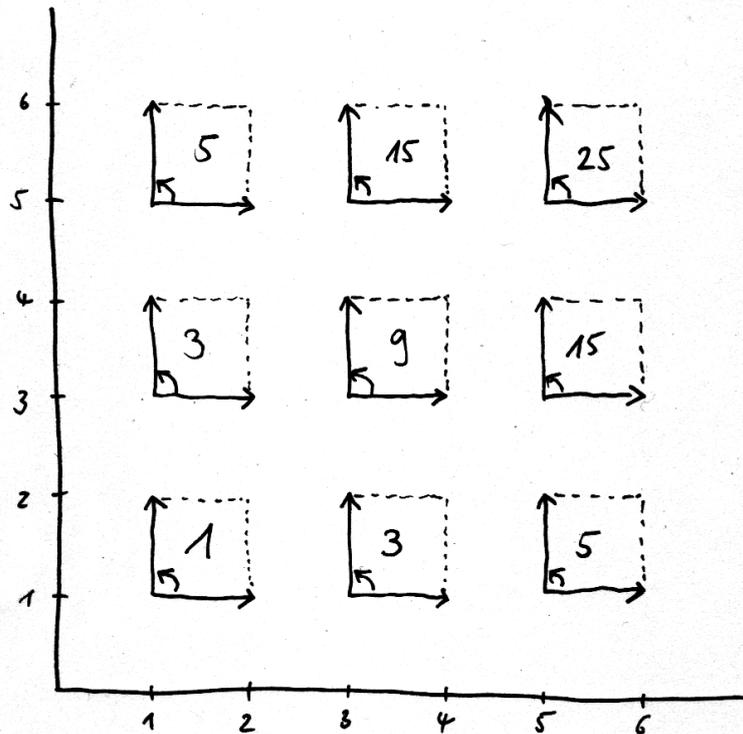
Ausgeschrieben ordnet ω also jedem Punkt $x \in U$ eine alternierende p -Multilinearform $\omega_x : \vec{X} \times \dots \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ zu. Wenn wir hoffen, daß die genaue Bedeutung aus dem Kontext hervorgeht, sprechen wir auch oft abkürzend schlicht von **Differentialformen**.

6.2.2 (Diskussion der Terminologie). In der Differentialgeometrie werden wir allgemein Differentialformen auf abstrakten Mannigfaltigkeiten erklärt als Zuordnungen, die jedem Punkt eine alternierende Multilinearform auf dem Tangentialraum am entsprechenden Punkt zuordnen. Im Fall einer eingebetteten Mannigfaltigkeit $U \subset X$ positiver Kodimension ist das natürlich etwas anderes, als jedem Punkt eine alternierende Multilinearform auf dem Richtungsraum des umgebenden affinen Raums zuzuordnen. Das ist der Grund, aus dem ich das hier eingeführte elementarere Konzept eine „relative Differentialform“ genannt habe. Jede „relative“ Differentialform liefert jedoch durch Einschränkung eine „richtige“ Differentialform, wie wir sie später definieren werden, und auf halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume stimmen unsere „relativen“ Differentialformen bereits mit diesen „richtigen“ Differentialformen überein. Diese Feinheiten werden erst relevant, sobald es einmal um die „de-Rham-Kohomologie“ und dergleichen gehen wird.

6.2.3 (Formen und Formenfelder). In der hier und im vorhergehenden Abschnitt eingeführten abgekürzten Terminologie kann eine „ p -Form auf U “ zwei sehr verschiedene Dinge bedeuten: Entweder ist U ein k -Vektorraum und unsere p -Form ist ein Element von $\text{Alt}^p(U)$, also eine alternierende multilineare Abbildung $\omega : U \times \dots \times U \rightarrow k$, oder aber U ist Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums X und unsere p -Form ist eine Abbildung $\omega : U \rightarrow \text{Alt}^p(\vec{X})$ mit $x \mapsto \omega_x$. Man sollte deshalb eigentlich letztere Objekte besser als „Felder von p -Formen“ ansprechen, sie stehen ja auch zu alternierenden p -Multilinearformen in derselben Beziehung wie Vektorfelder zu Vektoren. Von Formenfeldern aber redet kein Mensch. Ich will deshalb auch nicht damit anfangen und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, welche Bedeutung im Einzelfall gemeint ist.

Beispiel 6.2.4. Sei U eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums X . Eine 0-Form auf U ist eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und eine 1-Form ein Kovektorfeld im Sinne von [5.1.6](#).

Beispiel 6.2.5 (Anschauung für Differentialformen). In einem dreidimensionalen orientierten reellen nicht notwendig euklidischen affinen Raum X bewege sich ein Gas. Wir halten ein kurzes Zeitintervall fest und ordnen jedem Tripel



Versuch einer graphischen Darstellung der 2-Form auf der Papierebene, die in den durch die Koordinatenachsen gegebenen Koordinaten durch die Formel $xydx \wedge dy$ dargestellt werden könnte. Eingezeichnet ist an jedem Punkt ein geordnetes Paar von Richtungsvektoren, gestrichelt ergänzt zu einem Parallelogramm, und hineingeschrieben der Wert unserer Zweiform auf diesem geordneten Paar. Die Anordnung wird hierbei durch einen kleinen Pfeil vom ersten zum zweiten Vektor angezeigt. Natürlich ist dies Vektorenpaar in keinsten Weise eindeutig, wir könnten dieselbe 2-Form auch ganz anders darstellen, die beteiligten Vektoren müssen dabei auch keineswegs parallel zu Koordinatenachsen sein.

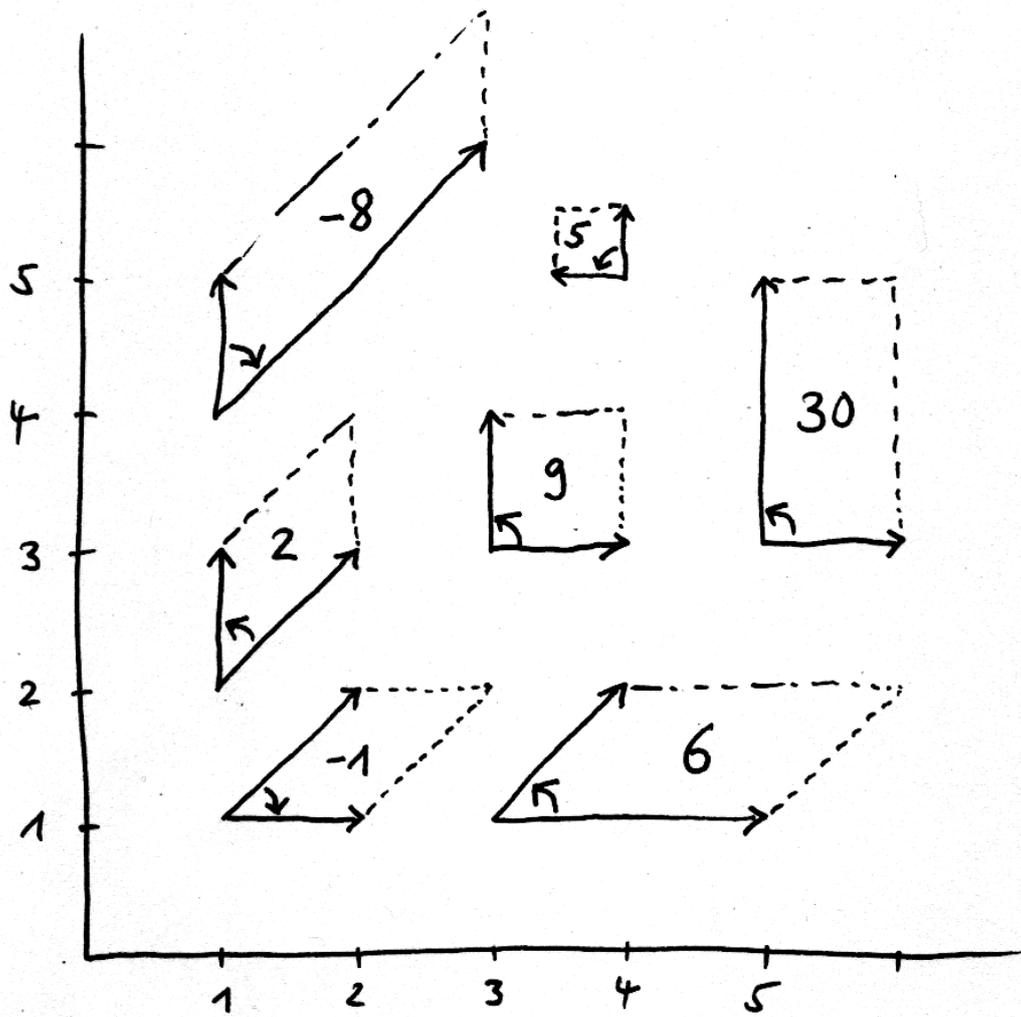
$(p, v, w) \in X \times \vec{X} \times \vec{X}$ bestehend aus einem Punkt und zwei Vektoren, aufgefaßt als „kleine orientierte Parallelogrammfläche“ alias „orientiertes Flächenelement“, die Zahl der Gasmoleküle zu, die in diesem Zeitintervall hindurchtritt, wobei wir je nach der Richtung, in der unsere Moleküle hindurchtreten, noch das Negative nehmen: Nämlich dann, wenn ein und jeder Richtungsvektor u in Richtung des Durchtritts zusammen mit v, w eine negativ orientierte angeordnete Basis (u, v, w) des Richtungsraums \vec{X} bildet. Diese Zuordnung wäre ein schmutziges Feld von 2-Formen. Man nennt es auch die **Flußdichte**. Ruht das Gas und ordnen wir jedem Quadrupel bestehend aus einem Punkt und drei Vektoren, aufgefaßt als „kleines orientiertes Parallelepiped“ alias „orientiertes Volumenelement“ die Zahl der darin befindlichen Gasmoleküle zu, gewichtet mit einem Vorzeichen, das von der Orientierung bestimmt wird, so erhalten wir ein schmutziges Feld von 3-Formen auf unserem affinen Raum. Man nennt es auch die **Dichte** unseres Gases. Wählen wir zusätzlich auf dem Richtungsraum unseres affinen Raums ein Skalarprodukt, so erhalten wir eine Identifikation von Vektorfeldern mit 2-Formen, indem wir jedem Vektor u die 2-Form $(v, w) \mapsto \text{vol}(u, v, w)$ zuordnen, mit $\text{vol}(u, v, w)$ dem „Volumen“ des Parallelepipeds mit Kanten u, v, w und einem Vorzeichen, das von der „Orientierung“ unseres Tripels abhängt. Ähnlich erhalten wir dann auch eine Identifikation von Funktionen mit 3-Formen. Die Möglichkeit dieser Identifikationen mag ein Grund dafür sein, daß Differentialformen der Intuition weniger gut zugänglich sind. Es fällt uns einfach nicht zu, einen dreidimensionalen Raum ohne Skalarprodukt zu visualisieren, geschweige denn Räume höherer Dimension: Das beste Beispiel für eine 2-Form wäre dann nämlich, nach Wahl der dazu nötigen physikalischen Einheiten, das elektromagnetische Feld auf der Raumzeit. Um auch in nichtorthogonalen und eventuell sogar krummlinigen Koordinatensystemen Dichten und Flußdichten anzugeben und mit ihnen zu rechnen, sind unsere Differentialformen jedoch in jedem Falle ein geschickter Formalismus.

Definition 6.2.6. Für zwei Differentialformen ω und η definieren wir ihr **Dachprodukt** $\omega \wedge \eta$ als punktweises Dachprodukt im Sinne von 6.1.8, in Formeln $(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x$. Für f eine Funktion alias Nullform schreiben wir meist $f\eta$ statt $f \wedge \eta$.

6.2.7. Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$ und sind $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen, so läßt sich für $U \subset X$ nach 6.1.6 jede p -Form ω auf U eindeutig schreiben in der Gestalt

$$\omega = \sum_{|I|=p} a_I dx_I$$

Hier läuft die Summe wie angedeutet über alle p -elementigen Teilmengen $I \subset \{1, \dots, n\}$, die Koeffizienten a_I sind reelle Funktionen auf U , und dx_I ist ähnlich wie in 6.1.1 eine Abkürzung für $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ mit $i_1 < \dots < i_p$



Eine alternative Darstellung derselben Form $xydx \wedge dy$

den der Größe nach geordneten Elementen von I . Diese Notation ist allerdings mit Vorsicht zu genießen, denn natürlich ist dx_I für $|I| \neq 1$ in keinsten Weise das Differential einer wie auch immer gearteten Funktion x_I . Das Dachprodukt zweier in dieser Standarddarstellung gegebenen Formen ergibt sich dann leicht mittels der Regeln $dx_i \wedge dx_i = 0$ und $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

6.2.8. Die 2-Form $dx \wedge dy$ auf dem \mathbb{R}^3 kann man sich veranschaulichen als Vorschrift, die „jeder kleinen orientierten Parallelogrammfläche den Flächeninhalt ihrer orthogonalen Projektion auf die (x, y) -Ebene zuordnet, mit einem von der Orientierung abhängigen Vorzeichen“.

Definition 6.2.9. Gegeben endlichdimensionale reelle Räume X, Y und eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi : A \rightarrow B$ von einer halboffenen Teilmenge $A \subset X$ in eine Teilmenge $B \subset Y$ und eine Differentialform $\omega : B \rightarrow \text{Alt}^p \vec{Y}$ auf B definieren wir die **zurückgeholte Differentialform** $\phi^* \omega$ auf A durch die Vorschrift

$$(\phi^* \omega)_x = (d_x \phi)^\top (\omega_{\phi(x)})$$

Hier bezeichnet $(d_x \phi)^\top : \text{Alt}^p \vec{Y} \rightarrow \text{Alt}^p \vec{X}$ die vom Differential $d_x \phi : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ von ϕ an der Stelle $x \in A$ induzierte Abbildung. Alternativ könnten wir auch schreiben $(\phi^* \omega)_x = \omega_{\phi(x)} \circ (d_x \phi \times \dots \times d_x \phi)$ mit p Faktoren ganz rechts.

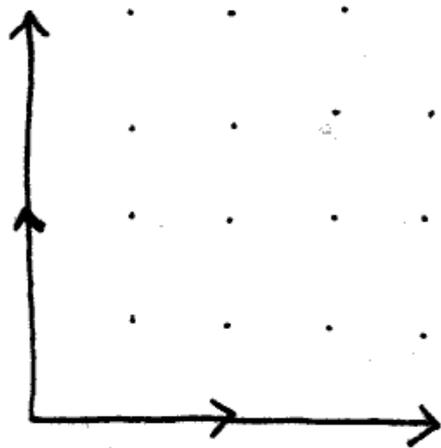
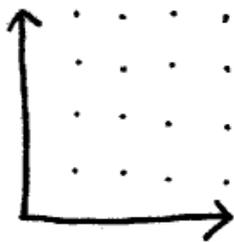
6.2.10. Dies Zurückholen ist bei der Begrifflichkeit der Differentialformen die eigentliche Hauptsache. Das Zurückholen von Funktionen alias Nullformen mit einer Abbildung ist schlicht das „Vorschalten“ von besagter Abbildung, in Formeln $\phi^*(g) = g \circ \phi$ für eine Funktion $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Das Zurückholen von 1-Formen haben wir bereits in 5.1.22 diskutiert. Wir verallgemeinern die dort eingeführte Terminologie auf den vorliegenden Fall und nennen Differentialformen η und ω **verwandt unter** ϕ und schreiben $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$ genau dann, wenn gilt $\eta = \phi^*(\omega)$.

Beispiel 6.2.11. Unter der Abbildung $(2 \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ erhalten wir für das Zurückholen der Standard-Volumenform $(2 \cdot)^*(dx \wedge dy) = 4dx \wedge dy$. In der Tat, denken wir uns ganz schmutzig ein „ebenes Gas“ mit vielen einzelnen Molekülen und expandieren es mit einer Streckung um den Faktor Zwei, so verdünnt es sich um den Faktor Vier. Allgemeiner haben wir $(2 \cdot)^*(a(x, y)dx \wedge dy) = 4a(2x, 2y)dx \wedge dy$.

Lemma 6.2.12. Für das Zurückholen von Differentialformen gilt die Kettenregel, wir haben genauer und in Formeln ausgedrückt stets $\text{id}^* = \text{id}$ und

$$\psi^*(\phi^* \omega) = (\phi \circ \psi)^*(\omega)$$

Beweis. Das folgt mit der üblichen Kettenregel 1.3.1 sofort aus den Definitionen. Wir können die Aussage des Lemmas auch im Sinne von 5.1.25 dahingehend verstehen, daß Verwandtschaft transitiv ist. \square



Versuch einer Veranschaulichung der Verwandtschaft

(2.) : $4dx \wedge dy \rightsquigarrow dx \wedge dy$. Man mag sich den Wert an einer Stelle (a, b) des Koeffizienten vor $dx \wedge dy$ als ein Maß für die „Zahl der Moleküle eines ebenen Gases im Quader $[a, a + 1] \times [b, b + 1]$ “ denken.

Lemma 6.2.13. *Verwandtschaft alias das Zurückholen ϕ^* von Differentialformen ist verträglich mit dem Dachprodukt, in Formeln gilt also*

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta)$$

Beweis. Dem Leser überlassen. □

Beispiel 6.2.14. Wir erinnern 5.1.28. Für $X = \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten x_1, \dots, x_n und $Y = \mathbb{R}^m$ mit Koordinaten y_1, \dots, y_m und $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ eine differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge von \mathbb{R}^m in eine halboffene Teilmenge von \mathbb{R}^n ergibt sich $\phi^*(dx_i) = d(\phi^*x_i) = d\phi_i = \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$. Folglich kann das Zurückholen von 1-Formen in Koordinaten beschrieben werden durch die Formel

$$\phi^* \left(\sum_i a_i dx_i \right) = \sum_{i,j} (a_i \circ \phi) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$$

Beispiel 6.2.15. Ist ϕ die Polarkoordinatenabbildung

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \vartheta) &\mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \end{aligned}$$

und haben wir auf \mathbb{R}^2 die 1-Form $y dx$ gegeben, so wird sie zurückgeholt zu

$$\begin{aligned} \phi^*(y dx) &= \phi^*(y) \phi^*(dx) \\ &= r \sin \vartheta d(r \cos \vartheta) \\ &= r \sin \vartheta \cos \vartheta dr - r^2 \sin^2 \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

und für die 2-Form $dx \wedge dy$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi^*(dx \wedge dy) &= \phi^*(dx) \wedge \phi^*(dy) \\ &= d(r \cos \vartheta) \wedge d(r \sin \vartheta) \\ &= (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \wedge (\sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta) \\ &= r dr \wedge d\vartheta \end{aligned}$$

Man mag sich letztere Formel dahingehend veranschaulichen, daß „ein kleines orientiertes Flächenelement in der xy -Ebene unter der Polarkoordinatenabbildung einem entsprechend größeren oder auch kleineren orientierten Flächenelement in der $r\vartheta$ -Ebene entspricht, je nachdem, in welchem Abstand vom Ursprung unser ursprüngliches Flächenelement liegt“.

Satz 6.2.16 (Funktionaldeterminante und Rückzug von Volumenformen). *Für A halboffen in \mathbb{R}^n und $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar gilt stets*

$$\phi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (\det d\phi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Beweis. Für jeden Endomorphismus L eines n -dimensionalen Vektorraums V ist die induzierte Abbildung $L^\top: \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$ nach 6.1.15 gerade die Multiplikation mit $\det L$. □

6.3 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

Definition 6.3.1. Gegeben $M \subset X$ eine **Mannigfaltigkeit** in einem endlichdimensionalen reellen affinen Raum und $p \in M$ ein Punkt definieren wir den **Tangentialraum an M in p** als den Vektorraum

$$T_p M := \text{im}(d_u \varphi) \subset \vec{X}$$

für eine und jede Karte $\varphi : U \rightarrow M$ mit $\varphi(u) = p$. Wir haben also $\dim T_p M = \dim M$. Anschaulich ist $p + T_p M$ derjenige affine Teilraum von X , der „ M bei p am besten approximiert“. Die Elemente des Tangentialraums heißen **Tangentialvektoren**.

Vorschau 6.3.2. In [ML] 3.3.4 werden wir allgemeiner den Tangentialraum $T_p M$ für beliebige, nicht notwendig eingebettete Mannigfaltigkeiten M erklären. Er ist im Fall eingebetteter Mannigfaltigkeiten kanonisch isomorph zu dem eben erklärten Konzept. Wenn wir besonders betonen wollen, daß wir die obige Definition für eingebettete Mannigfaltigkeiten meinen, schreiben wir genauer $T_p^{\subset} M$.

6.3.3. Man will sich meist die verschiedenen Tangentialräume als paarweise disjunkt denken, ändert die obige Definition deshalb ab und setzt formal

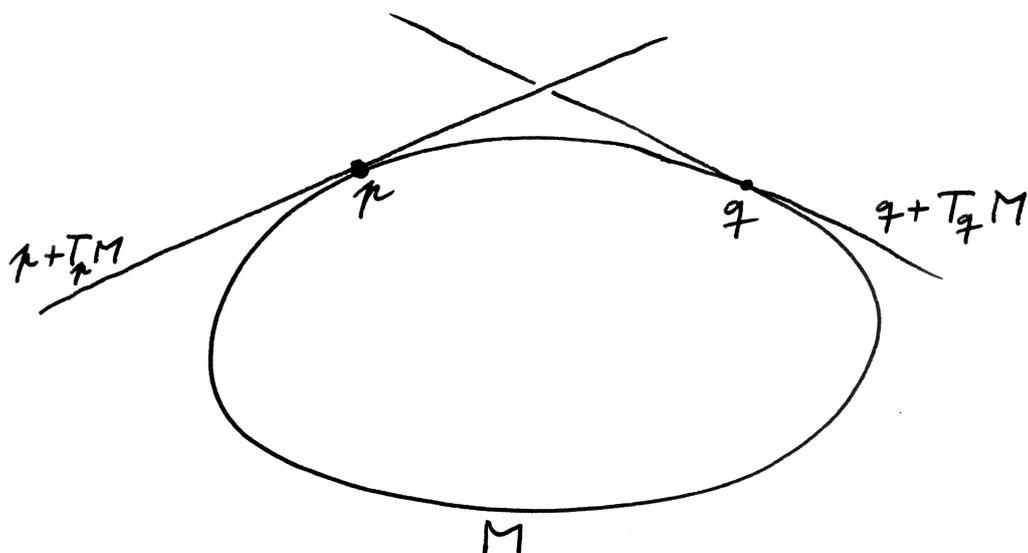
$$T_p M := \{p\} \times \text{im}(d_u \varphi) \subset \{p\} \times \vec{X}$$

So kann man dann das **Tangentialbündel** von M definieren als

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M \subset M \times \vec{X}$$

Unter geeigneten zusätzlichen Differenzierbarkeitsannahmen an unsere Untermannigfaltigkeit M kann man zeigen, daß $TM \subset X \times \vec{X}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $2(\dim M)$ ist, vergleiche [ML] 1.4.15. Die einzelnen Tangentialräume erhält man als die Fasern der **Bündelprojektion** $\pi : TM \rightarrow M$ des Tangentialbündels auf die Mannigfaltigkeit, die man erhält als die Restriktion der Projektion $X \times \vec{X} \rightarrow X$ auf die erste Komponente. In Formeln gilt also $T_p M = \pi^{-1}(p)$.

6.3.4. Ich erinnere daran, daß nach [LA1] 5.5.2 eine **Orientierung** eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem angeordneten Körper eine Vorschrift ε ist, die jeder angeordneten Basis B unseres Vektorraums ein Vorzeichen $\varepsilon(B) \in \{+1, -1\}$ zuordnet und zwar so, daß für je zwei angeordnete Basen B, B' die Determinante der Basiswechsellmatrix das Vorzeichen $\varepsilon(B)\varepsilon(B')$ hat. In [LA1] 5.5.2 werden in diesem Zusammenhang auch noch weitere Begriffsbildungen formal eingeführt, deren Bedeutung hier nicht wiederholt werden soll, da sie leicht erraten werden können.



In diesem Bild habe ich zu einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit der Ebene zwei affine Räume eingezeichnet, deren Richtungsräume ihre Tangentialräume an den beiden fett eingezeichneten Punkten wären. Diese affinen Räume schneiden sich natürlich und ihre Richtungsräume schneiden sich desgleichen. Im bildlich dargestellten Fall besteht dieser Schnitt der Richtungsräume aus dem Nullvektor, aber im allgemeinen kann er auch größer sein. Ich habe die beiden Geraden dennoch als nicht-schneidend gemalt, um bildlich anzudeuten, daß alle diese Überschneidungen von uns bei der Definition des Tangentialbündels sozusagen wegdefiniert werden.

Definition 6.3.5. Eine **Orientierung einer k -Mannigfaltigkeit** M ist eine Vorschrift, die jedem Punkt $p \in M$ eine Orientierung im Sinne von [LA1] 5.5.2 des Tangentialraums $T_p M$ zuordnet und zwar so, daß es um jeden Punkt eine Karte $\varphi : W \rightarrow M$ gibt mit der Eigenschaft, daß die Differentiale $d_x \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(x)} M$ für $x \in W$ entweder alle orientierungserhaltend oder alle orientierungsumkehrend sind.

Beispiel 6.3.6. Eine Orientierung einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit M anzugeben bedeutet insbesondere nichts anderes als eine Abbildung $\varepsilon : M \rightarrow \{+1, -1\}$ anzugeben, deren Wert bei $p \in M$ eben das Vorzeichen der angeordneten Basis \emptyset des Tangentialraums $T_p M$ angibt.

Definition 6.3.7. 1. Ein Punkt p einer **Fastfaltung** M heiße **regulär**, wenn es eine **Integrationskarte** $\varphi : Q \rightarrow M$ von M um p gibt mit $p \in \varphi(Q^\circ)$. Die regulären Punkte einer Fastfaltung M bilden offensichtlich eine Mannigfaltigkeit M_{reg} derselben Dimension.

2. Unter einer **Orientierung einer Fastfaltung** verstehen wir eine **Orientierung der Mannigfaltigkeit** ihrer regulären Punkte. Unter einer **orientierten Fastfaltung** verstehen wir ein Paar bestehend aus einer Fastfaltung M und einer Orientierung von M .

6.3.8. Ich notiere orientierte Fastfaltungen M oft mit einem Pfeil als \vec{M} , aber das ist nicht allgemein üblich. Eine Fastfaltung, die mindestens eine Orientierung zuläßt, heißt **orientierbar**. Das „Möbiusband“, das in der schmutzigen Wirklichkeit entsteht, wenn man einen Papierstreifen einmal verdrillt zu einem Ring verklebt, ist ein Beispiel für eine nicht orientierbare 2-Fastfaltung in \mathbb{R}^3 .

6.3.9 (**Inkonsistenzen der Notation**). Den Pfeil über einem Symbol benutze ich auch bei affinen Räumen als Notation für den zugehörigen Raum von Richtungsvektoren, vergleiche [LA1] 6.1.1. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

Definition 6.3.10. Wir sagen, eine Integrationskarte (Q, φ) einer orientierten Fastfaltung M **habe die Orientierung** ε für $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ genau dann, wenn für jeden Punkt $x \in Q^\circ$ das Bild der Standardbasis unter dem Isomorphismus $d_x \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(x)} M_{\text{reg}}$ die Orientierung ε hat.

6.3.11. Integrationskarten, die nicht zusammenhängend sind, besitzen im allgemeinen weder die Orientierung $+1$ noch die Orientierung -1 . Eine Integrationskarte der Orientierung $+1$ nennen wir **orientierungsverträglich**.

Übungen

Übung 6.3.12. Man zeige: Gegeben eine Untermannigfaltigkeit $M \subset X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums und ein Punkt $p \in M$ kann der Tangentialraum $T_p M$ auch beschrieben werden als die Menge aller möglichen Geschwindigkeitsvektoren bei p von in M verlaufenden und bei p differenzierbaren Wegen.

Übung 6.3.13. Jede orientierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit M besitzt genau zwei Orientierungen. Hinweis: Gegeben zwei Orientierungen ist die Menge aller Punkte p , an denen sie dieselbe Orientierung von $T_p M$ liefern, ebenso offen wie die Menge aller Punkte p , an denen sie verschiedene Orientierungen von $T_p M$ liefern. Nun verwende man [5.5.18](#).

Ergänzende Übung 6.3.14 (Tangentialraum an eine Faser). Seien X und Y endlichdimensionale reelle Räume, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit überall surjektivem Differential. So ist für alle $c \in Y$ nach [3.3.10](#) das Urbild $M = f^{-1}(c)$ eine Untermannigfaltigkeit von X der Dimension $\dim X - \dim Y$. Man zeige für alle $p \in M$ die Formel $T_p M = \ker d_p f$.

Übung 6.3.15. Man zeige: Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine von Null verschiedene symmetrische Bilinearform auf V und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so ist $M := \{v \in V \setminus 0 \mid \langle v, v \rangle = c\}$ eine Hyperfläche in V und unter der üblichen Identifikation $\text{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$ haben wir $T_v M = \text{trans}\{w \in V \mid \langle v, w \rangle = 0\}$ oder abkürzend geschrieben

$$T_v M = v^\perp$$

Übung 6.3.16. Gegeben $M \subset X$ eine **Mannigfaltigkeit** in einem endlichdimensionalen reellen affinen Raum heiße eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ **differenzierbar**, wenn für jede Karte φ von M die Verknüpfung $f \circ \varphi$ differenzierbar ist. Man zeige: Gegeben eine differenzierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Punkt $p \in M$ und ein Tangentialvektor $v \in T_p M$ gibt es genau eine reelle Zahl

$$D_v f$$

mit der Eigenschaft, daß für jede Karte φ von M um p und q den Punkt mit $\varphi(q) = p$ und w den Vektor mit $d_q \varphi : w \mapsto v$ gilt $D_v f = (D_w(f \circ \varphi))(q)$. Diese reelle Zahl heißt die **Richtungsableitung von f in Richtung v** .

Übung 6.3.17. Treffen sich zwei Untermannigfaltigkeiten eines endlichdimensionalen affinen Raums $M, N \subset X$ im Punkt p und gilt $T_p M + T_p N = \vec{X}$, so gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von p derart, daß $U \cap M \cap N$ auch eine Untermannigfaltigkeit von X ist. Deren Tangentialraum bei p ist dann der Schnitt der Tangentialräume $T_p(U \cap M \cap N) = T_p M \cap T_p N$.

6.4 Integration von Differentialformen

Definition 6.4.1. Gegeben eine Fastfaltung M in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und $k \geq 0$ bezeichne $\mathcal{C}_1\Omega^k(M) = \mathcal{C}_1\Omega_X^k(M)$ den reellen Vektorraum aller stetigen relativen k -Formen auf M mit kompaktem Träger im Sinne von 6.2.1.

Vorschau 6.4.2. Schon bei der folgenden Definition der Integration einer Differentialform über eine Mannigfaltigkeit kommt es eigentlich nur darauf an, welche Werte unsere Form an jeder Stelle auf Tupeln von Tangentialvektoren an unsere Mannigfaltigkeit am entsprechenden Punkt annimmt. In der Differentialgeometrie wird eine Differentialform auf einer Mannigfaltigkeit sogar definiert als eine Vorschrift, die jedem Punkt unserer Mannigfaltigkeit eine alternierende Multilinearform auf seinem Tangentialraum zuordnet. So weit will ich aber hier nicht gehen, da für diese Art von Formen schon die Definition der Stetigkeit die Entwicklung zusätzlicher Begrifflichkeiten notwendig macht.

Satz 6.4.3 (Integration von Differentialformen). *Sei M eine orientierte k -Fastfaltung in einem endlichdimensionalen reellen Raum. So gibt es genau eine Linearform $\int : \mathcal{C}_1\Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß für jede Integrationskarte $\varphi : Q \rightarrow M$ der Orientierung ε und jede kompakt getragene k -Form ω mit Träger im Bild dieser Karte $\text{supp } \omega \subset \varphi(Q)$ gilt*

$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_Q (\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k)$$

6.4.4. Für die Form $\varphi^* \omega = \eta = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ ist $(\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k) = \eta(e_1, \dots, e_k)$ per definitionem genau die Funktion f . Das Integral dieser Funktion auf der rechten Seite ist dann als iteriertes Integral im Sinne von 2.1.2 zu verstehen. Ist unsere Fastfaltung M speziell ein kompakter Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k$ und $\eta = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ eine stetige Differentialform auf Q mit kompaktem Träger und geben wir Q die von der Standardorientierung des \mathbb{R}^k induzierte Orientierung, so liefern unsere Definitionen

$$\int_{\vec{Q}} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_Q f(x) d^k x = \int_{a_k}^{b_k} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

In der Situation des Satzes gilt also insbesondere

$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_{\vec{Q}} \varphi^* \omega$$

für \vec{Q} der Definitionsbereich unserer Integrationskarte mit seiner Standardorientierung.

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sei $\omega \in \mathcal{C}_1\Omega^k(M)$ gegeben. Wir finden eine endliche Überdeckung von $\text{supp } \omega$ durch die Inneren von Bildern von Integrationskarten $\text{Off}_M(\varphi_i(Q_i))$ der Orientierungen ε_i und nach 4.1.15 eine an diese Überdeckung angepaßte Teilung der Eins, also stetige Funktionen $\alpha_i \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$ mit Träger $\text{supp } \alpha_i \subset \varphi_i(Q_i)$ und $\sum_i \alpha_i(x) = 1$ für alle $x \in \text{supp } \omega$. Dann haben wir $\omega = \sum_i \alpha_i \omega$, und wenn überhaupt eine lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften existiert, so muß gelten

$$\int_{\vec{M}} \omega = \sum_i \int_{\vec{M}} \alpha_i \omega = \sum_i \varepsilon_i \int_{Q_i} (\varphi_i^*(\alpha_i \omega))(e_1, \dots, e_k)$$

Das ganze Problem ist also zu zeigen, daß die rechte Seite nicht von den Integrationskarten und der Teilung der Eins abhängt. Das geht wie bei unserer Diskussion 4.2.1 der Integration von Funktionen mit kompaktem Träger über Mannigfaltigkeiten und allgemeiner 4.3.8 Fastfaltigkeiten in \mathbb{R}^n . Genau wie dort zieht man sich darauf zurück, für je zwei Integrationskarten (Q, φ) und (P, ψ) der Orientierungen ε und η und ω mit Träger $\text{supp } \omega \subset \varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$ die Gleichheit

$$\varepsilon \int_Q (\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k) = \eta \int_P (\psi^* \omega)(e_1, \dots, e_k)$$

zu zeigen. Wir können also vom Fall einer Mannigfaltigkeit M ausgehen und müssen nur für jede stetige k -Form $\omega \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$, deren Träger im Bild zweier Karten (W, φ) und (V, ψ) der Orientierungen ε und η liegt, die Identität

$$\varepsilon \int_W (\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k) = \eta \int_V (\psi^* \omega)(e_1, \dots, e_k)$$

zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nun $\varphi(W) = \psi(V)$ annehmen. Der Kartenwechsel wird so ein Diffeomorphismus $\kappa := \psi^{-1} \circ \varphi : W \xrightarrow{\sim} V$ mit $\psi \circ \kappa = \varphi : W \rightarrow M$. Nach 6.2.12 folgt $\kappa^* \psi^* \omega = \varphi^* \omega$. Mit der Notation $\omega_\varphi := (\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k)$ gilt per definitionem $\varphi^* \omega = \omega_\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Mit der Notation $\omega_\psi := (\psi^* \omega)(e_1, \dots, e_k)$ gilt ebenso $\psi^* \omega = \omega_\psi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Mit 6.2.16 im letzten Schritt folgt nun

$$\begin{aligned} \omega_\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k &= \kappa^*(\omega_\psi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) \\ &= (\omega_\psi \circ \kappa) \kappa^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) \\ &= (\omega_\psi \circ \kappa) \det(d\kappa) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \end{aligned}$$

alias $\omega_\varphi = (\omega_\psi \circ \kappa) \det(d\kappa)$. Unsere oben zu zeigende Identität läßt sich so umschreiben zur Identität

$$\varepsilon \int_W (\omega_\psi \circ \kappa) \det(d\kappa) = \eta \int_V \omega_\psi$$

von Integralen kompakt getragener Funktionen. Aus den Definitionen folgt aber $\varepsilon\eta \det(d\kappa) = |\det(d\kappa)|$. Damit ergibt sich die letzte Identität aus der Transformationsformel 4.1.10. \square

6.4.5 (Riemannsummen für Differentialformen). Um die Integration von Differentialformen anschaulich zu machen, erkläre ich ihre Interpretation durch Riemannsummen. Sei dazu $Q := [a, b] \times [c, d]$ ein kompaktes Rechteck und $\varphi : Q \rightarrow X$ eine Integrationskarte in einen endlichdimensionalen reellen Raum und $\omega : \varphi(Q) \rightarrow \text{Alt}^2(\vec{X})$ eine stetige 2-Form auf $\varphi(Q)$. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistanten Unterteilungen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$, $c = c_0 < c_1 < \dots < c_r = d$ der Kanten von Q und bezeichnen mit $q_{i,j} = (a_i, c_j)$ die Gitterpunkte im so gegebenen Raster auf Q . Bezeichne weiter $p_{i,j} = \varphi(q_{i,j})$ die Bilder dieser Gitterpunkte unter φ . Damit definieren wir die r -te **Riemannsumme** $S_\varphi^r(\omega)$ durch die Formel

$$S_\varphi^r(\omega) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \omega_{p_{i,j}}(p_{i+1,j} - p_{i,j}, p_{i,j+1} - p_{i,j})$$

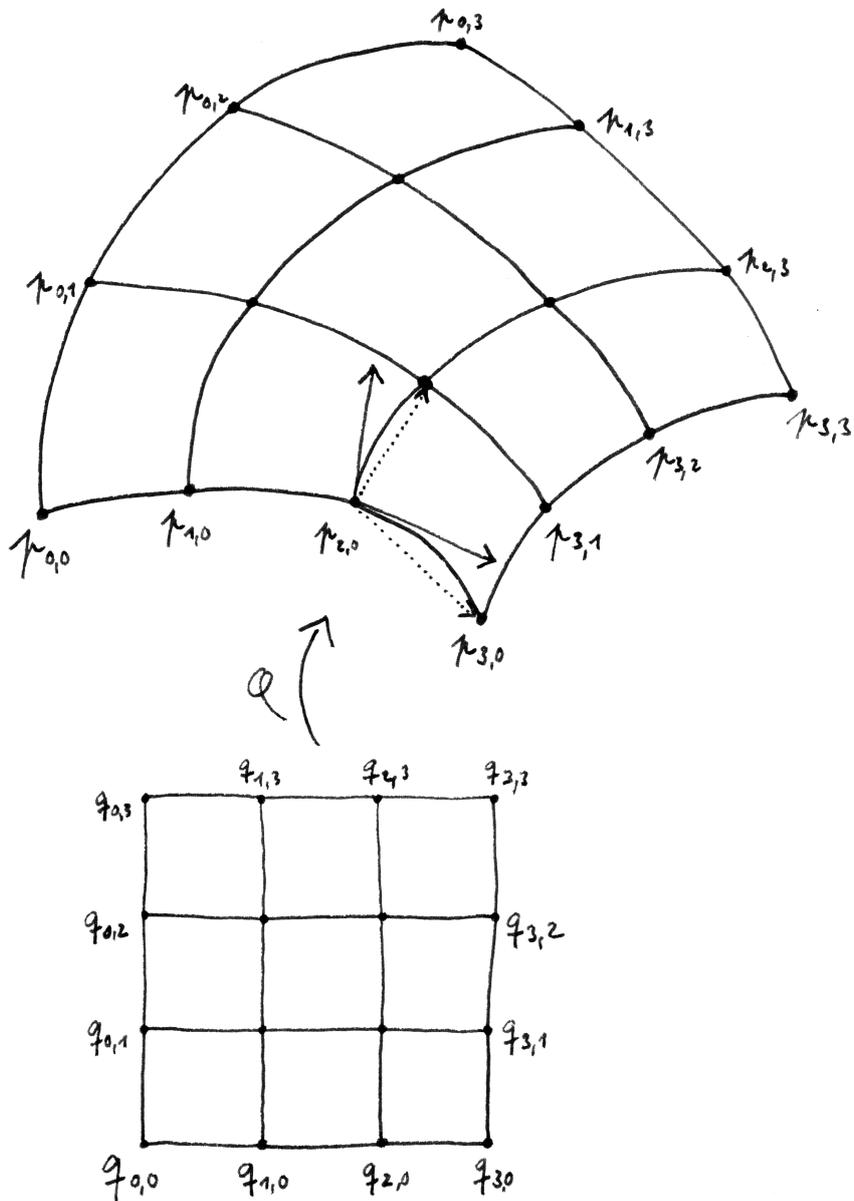
Wir können nun das Integral von ω über $\varphi(Q)$ mit der Orientierung, für die φ eine orientierte Integrationskarte ist, interpretieren als den Grenzwert

$$\int_{\varphi(Q)} \omega = \lim_{r \rightarrow \infty} S_\varphi^r(\omega)$$

Den Beweis dieser Tatsache entlang der Grundlinie des Beweises von 4.2.7 überlassen wir dem Leser zur Übung.

6.4.6 (Sinnhaftigkeit der Integration alternierender Formen). Unter der Voraussetzung einer auf einem Quadrat definierten Integrationskarte, in Formeln $b - a = d - c$, betrachten wir nun die Spiegelung τ an der Hauptdiagonalen und die neue Integrationskarte $\varphi \circ \tau$. Sie ist negativ orientiert und ihre Riemannsummen sind dieselben wie die Riemannsummen von eben, wenn man nur in jedem Summanden den ersten und den zweiten Eintrag der bilinearen Abbildung ω vertauscht und das von der negativen Orientierung der Integrationskarte herrührende Vorzeichen berücksichtigt. Ist also ω alternierend, so liefert unsere neue Integrationskarte dieselben Riemannsummen und dasselbe Integral. Das soll die in unserem Satz enthaltene Aussage veranschaulichen, daß das Integral einer alternierenden Form unabhängig ist von den zur Berechnung gewählten Integrationskarten.

Beispiel 6.4.7 (Integral über eine Hemisphäre). Wir berechnen das Integral der 2-Form $x^2 dx \wedge dy$ über die obere Hemisphäre $H := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ mit der Orientierung, für die die beiden ersten Vektoren e_1, e_2 der Standardbasis des \mathbb{R}^3 in dieser Reihenfolge eine orientierte Basis des Tangentialraums am Pol $T_{(0,0,1)}H$ bilden. Wir betrachten das Rechteck $R := [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2$



Die gepunkteten Pfeile stellen die Vektoren $p_{3,0} - p_{2,0}$ und $p_{2,1} - p_{2,0}$ dar, der Wert von $\omega_{p_{2,0}}$ auf diesem Paar von Vektoren, genommen in einer durch die Orientierung gegebenen Reihenfolge, geht in die Riemannsumme S_φ^3 ein.

und die orientierte Integrationskarte $\phi : R \rightarrow H$ gegeben durch die Formeln $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos \vartheta, \cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta)$, anschaulich gesprochen eine „liegende Version“ unserer Kugelkoordinaten aus 5.2.11, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\bar{H}} x^2 dx \wedge dy &= \int_{\bar{R}} \cos^2 \vartheta d(\cos \vartheta) \wedge d(\cos \varphi \sin \vartheta) \\ &= \int_{\bar{R}} \cos^2 \vartheta (-\sin \vartheta d\vartheta) \wedge (\cos \varphi \cos \vartheta d\vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta d\varphi) \\ &= \int_{\bar{R}} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta \wedge d\varphi \\ &= \int_R \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2(2\vartheta) d\vartheta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{2} - \frac{\cos 4\vartheta}{2} d\vartheta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Hier ist der erste Schritt 6.4.4 mitsamt dem Vertauschen vom Zurückholen mit Dachprodukt und Differential 5.1.26, der Zweite die Formel 5.1.14 für das Differential einer Funktion, der Dritte beruht auf dem Alternieren und der Bilinearität des Dachprodukts, und der Vierte auf 6.4.3.

6.4.8. Die Integrale von Differentialformen über orientierte Fastfaltigkeiten der Dimensionen 0 oder 1 bzw. der Kodimensionen 0 oder 1 in einem \mathbb{R}^n trifft man oft in anderen Gestalten an, die den Formalismus der Differentialformen vermeiden. Besonders wichtig sind in diesem Zusammenhang die Fälle mit $n \leq 3$.

Beispiel 6.4.9 (Summation als Differentialformenintegral). Im Fall einer null-dimensionalen Fastfaltigkeit M alias diskreten Teilmenge ist eine Nullform eine Funktion und eine Nullform mit kompaktem Träger eine Funktion, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annimmt, und unser Integral ist die Summe der Funktionswerte multipliziert mit den durch die auf M gewählte Orientierung ε bestimmten Vorzeichen $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\emptyset)$, in Formeln

$$\int_{\bar{M}} f = \sum_{p \in M} \varepsilon_p f(p)$$

Beispiel 6.4.10 (Funktionenintegral als Differentialformenintegral). Für eine stetige n -Form $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ mit kompaktem Träger auf einer n -Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit der von der Standardorientierung des \mathbb{R}^n induzierten Orientierung liefern unsere Definitionen

$$\int_{\bar{M}} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_M f(x) d^k x$$

Das Integral der Funktion f rechts ist dabei im Sinne von 4.3.8 oder für hinreichend vorgebildete Leser auch als des Lebesgue-Integral der integrierbaren Funktion f über die meßbare Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ zu verstehen.

Beispiel 6.4.11 (Wegintegral als Differentialformenintegral). Gegeben eine orientierte 1-Fastfaltung M und eine surjektive orientierungsverträgliche Integrationskarte $\varphi : [a, b] \rightarrow M$ fällt das Integral einer 1-Form ω über M zusammen mit dem Wegintegral der 1-Form ω über den Weg φ , denn auch das fällt zusammen mit dem Integral der zurückgeholten 1-Form $\varphi^*\omega$ über die in der offensichtlichen Weise orientierte Fastfaltung $[a, b]$, in Formeln

$$\int_{\vec{M}} \omega = \oint_a^b \varphi^* \omega = \oint_{\varphi} \omega$$

Ist speziell unsere Fastfaltung in den \mathbb{R}^n eingebettet, so hat unsere 1-Form ω die Gestalt $\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$ und unser Wegintegral wird von Anwendern meist geschrieben als das Wegintegral des Vektorfelds $v = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$ längs φ , in Formeln

$$\int_{\vec{M}} \omega = \oint_{\varphi} \omega = \int_a^b \langle v, d\varphi \rangle = \int_a^b v \cdot d\varphi$$

Beispiel 6.4.12. Die Interpretation der Integration von Differentialformen über orientierte Hyperflächen in \mathbb{R}^{n+1} als „Fluß“ benötigt von den hier explizit behandelten Fällen den größten begrifflichen Aufwand und wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen.

Definition 6.4.13. Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine **Hyperfläche**, so gibt es zu jedem Punkt $p \in M$ genau zwei Vektoren der Länge Eins in \mathbb{R}^{n+1} , die auf dem Tangentialraum $T_p M$ senkrecht stehen. Ist M darüber hinaus orientiert, so hat genau ein Vektor N_p von diesen beiden die Eigenschaft, daß für jede angeordnete Basis v_1, \dots, v_n von $T_p M$ der Orientierung ε die Standardorientierung der angeordneten Basis N_p, v_1, \dots, v_n des \mathbb{R}^{n+1} auch ε ist. Wir erhalten so eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} N : M &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ p &\mapsto N_p \end{aligned}$$

Man nennt sie das **orientierte Normalenfeld**.

6.4.14. Wir indizieren nun die Koordinaten auf dem \mathbb{R}^{n+1} etwas unüblich als x_0, x_1, \dots, x_n und ordnen jedem Vektor $F \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine alternierende Multilinearform $\omega_F \in \text{Alt}^n(\mathbb{R}^{n+1})$ zu durch die Vorschrift

$$\omega_F(v_1, \dots, v_n) := \det(F|v_1| \dots |v_n)$$

Rechts ist hier die Matrix mit den entsprechenden Spaltenvektoren zu verstehen. In derselben Weise ordnen wir auch jedem Vektorfeld F auf \mathbb{R}^{n+1} eine n -Form

ω_F zu und erkennen durch das Auswerten an Tupeln der Standardbasis, daß sie geschrieben werden kann in der Gestalt

$$\omega_F = \sum_{i=0}^n (-1)^i F_i dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Im \mathbb{R}^3 entspricht speziell einem Vektorfeld $F = (F_x, F_y, F_z)$ die 2-Form

$$\omega_F = F_x dy \wedge dz + F_y dz \wedge dx + F_z dx \wedge dy$$

Die unteren Indizes dürfen dabei nicht als partielle Ableitungen mißverstanden werden, sondern meinen vielmehr die Komponenten unseres Vektorfelds, die wir auch F_1, F_2, F_3 oder in unserer komischen Indizierung vielleicht besser F_0, F_1, F_2 hätten notieren können. Mit diesen ganzen Begriffsbildungen können wir nun formulieren:

Proposition 6.4.15 (Fluß als Differentialformenintegral). *Seien $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine orientierte Hyperfläche, F ein stetiges relatives Vektorfeld auf M mit kompaktem Träger, und N das orientierte Normalenfeld auf M . So gilt für die zu unserem Vektorfeld F gehörige n -Form ω_F die Identität*

$$\int_{\vec{M}} \omega_F = \int_M \langle F, N \rangle = \int_M F \cdot N$$

6.4.16. Die Mitte und die rechte Seite unterscheiden sich hier nur in der Notation für das Skalarprodukt und sind als Flächenintegrale im Sinne von 4.2.1 zu verstehen. Das Integral des Skalarprodukts unseres Vektorfelds F mit dem orientierten Normalenfeld N heißt der **Fluß des Vektorfelds F durch die orientierte Hyperfläche M** . Dies Oberflächenintegral mag der Anschauung besser zugänglich sein als unser Integral über eine Differentialform. Für das explizite Rechnen ist jedoch die Darstellung als Integral einer Differentialform oft günstiger, wie etwa Beispiel 6.4.7 illustriert.

Beispiel 6.4.17 (Integration einer Flußdichte). Ist X ein dreidimensionaler orientierter reeller affiner Raum und $M \subset X$ eine orientierte zweidimensionale Fastfältigkeit alias Fläche und ω die 2-Form der Flußdichte eines bewegten Gases wie in 6.2.5, so beschreibt das Integral von ω über M die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall in einer durch die Orientierung bestimmten Richtung durch unsere Fläche M hindurchtritt. Gas, das in der Gegenrichtung durch unsere Fläche tritt, schlägt dabei negativ zu Buche.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es eine positiv orientierte Integrationskarte $\varphi : Q \xrightarrow{\sim} M$ gibt mit $(\text{supp } F) \cap M \subset$

$\varphi(Q^\circ)$. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir unser Vektorfeld F in der Form $p \mapsto F_p$, wo der Index unglücklicherweise eine völlig andere Bedeutung hat als in 6.4.14. Wir zerlegen nun unser Vektorfeld F an jedem Punkt $p \in M$ in einen orthogonalen und einen tangentialen Anteil als $F_p = \langle F_p, N_p \rangle N_p + R_p$ mit $R_p \in T_p M$ und finden für alle $x \in W$

$$\begin{aligned} (\varphi^* \omega)_x(e_1, \dots, e_n) &= \omega_{\varphi(x)}(d_x \varphi(e_1), \dots, d_x \varphi(e_n)) \\ &= \det(F_{\varphi(x)} | d_x \varphi) \\ &= \langle F_{\varphi(x)}, N_{\varphi(x)} \rangle \det(N_{\varphi(x)} | d_x \varphi) \\ &= \langle F_{\varphi(x)}, N_{\varphi(x)} \rangle \text{vol}(d_x \varphi) \end{aligned}$$

wo in der zweiten Zeile die quadratische Matrix gemeint ist, die aus der Jacobi-Matrix zu $d_x \varphi$ entsteht durch Anfügen von $F_{\varphi(x)}$ als erster Spalte. Für die dritte Gleichheit verwenden wir, daß eine quadratische Matrix mit linear abhängigen Spalten die Determinante Null hat, und für die vierte unsere erste Formel aus 4.2.5 für Gram'sche Determinanten. Die Gleichheit der beiden Integrale folgt nun aus den Definitionen. \square

Beispiel 6.4.18 (Fluß durch eine Hemisphäre). Anschaulich kann man unser Integral aus 6.4.7 also auch als den Fluß durch die obere Hemisphäre des senkrechten Vektorfelds $x^2 e_3$ verstehen. In der Notation von dort hätten wir etwa

$$\int_{\bar{H}} x^2 dx \wedge dy = \int_H x^2 e_3 \cdot N$$

Hier meint N das „nach außen weisende Normalenfeld“, das in unserem Fall auch das „orientierte Normalenfeld“ nach 6.4.13 ist. Zur Probe rechne ich hier die rechte Seite auch noch direkt aus. Auf der Einheitssphäre stimmen ja der Ortsvektor und der nach außen weisende Normalenvektor überein, so daß der Rückzug der Funktion $x^2 e_3 \cdot N$ bezüglich unserer Karte $\phi : R \rightarrow H$ die Funktion $\cos^2 \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta$ ist. Um das Flächenintegral rechts zu bestimmen, gilt es die Gram'sche Matrix zu berechnen. In unserem Fall haben wir

$$d\phi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

und die Matrix der Skalarprodukte der Spaltenvektoren ergibt sich zu

$$(d\phi)^\top d\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

und die Wurzel aus deren Determinante zu $\sin \vartheta$, so daß wir bei demselben Doppelintegral über $\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi$ landen wie in 6.4.7.

Übungen

Übung 6.4.19. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds $F : (x, y, z) \mapsto (x, 0, 0)$ durch die Einheitssphäre, die Sie dazu mit einer Orientierung ihrer Wahl versehen mögen.

6.5 Höhere Ableitungen ohne Koordinaten

6.5.1. Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ **glatt** oder **beliebig differenzierbar** oder auch eine **C^∞ -Abbildung** genau dann, wenn zu allen Komponenten f_μ von f für $1 \leq \mu \leq m$ alle gemischten höheren partiellen Ableitungen, in der Multiindexschreibweise aus 2.2.3 also alle $\partial^\alpha f_\mu$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{N}^n$, auf ganz U existieren. Existieren sie bis zum Totalgrad $|\alpha| \leq k$ und sind stetig, so spricht man von einer **C^k -Abbildung**, wobei das C wieder für „continuous“ alias stetig steht. Wir wollen nun diese Bedingungen auf Abbildungen mit halboffenem Definitionsbereich und den Fall von beliebigen normierten reellen Räumen ausdehnen.

6.5.2. Gegeben Vektorräume V, W und $k \geq 0$ bilden wir dazu den Vektorraum $\text{Mult}^k(V, W)$ aller multilinearen Abbildungen des Produkts von k Kopien von V nach W . Im Fall $k = 0$ verstehen wir $\text{Mult}^0(V, W) = W$. Man bemerke die Isomorphismen $\text{Hom}(V, \text{Mult}^k(V, W)) \xrightarrow{\sim} \text{Mult}^{k+1}(V, W)$ durch $f \mapsto \langle f \rangle$ mit $\langle f \rangle(v_0, v_1, \dots, v_k) = (f(v_0))(v_1, \dots, v_k)$.

6.5.3. Die Notation $\langle f \rangle$ haben wir auch schon an anderer Stelle für den „von f erzeugten Untervektorraum“ eingeführt. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

6.5.4. Gegeben normierte reelle Vektorräume V, W und $k \geq 0$ bilden wir ähnlich den normierten Vektorraum $\mathcal{B}^k(V, W)$ aller stetigen multilinearen Abbildungen des Produkts von k Kopien von V nach W , versehen mit der Norm [AN1] 7.4.29. Im Fall $k = 0$ verstehen wir $\mathcal{B}^0(V, W) = W$. Man bemerke die Isomorphismen von normierten Vektorräumen $\mathcal{B}(V, \mathcal{B}^k(V, W)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^{k+1}(V, W)$ durch $f \mapsto \langle f \rangle$.

6.5.5. Sind X, Y normierte reelle Räume und ist $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge und $g : A \rightarrow \mathcal{B}^k(\vec{X}, \vec{Y})$ eine differenzierbare Abbildung, so fassen wir dg mit der Identifikation aus 6.5.4 auf als diejenige Abbildung $dg : A \rightarrow \mathcal{B}^{k+1}(\vec{X}, \vec{Y})$, die gegeben wird durch $x \mapsto \langle d_x g \rangle$.

Definition 6.5.6. Gegeben X, Y normierte reelle Räume und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge und $f : A \rightarrow Y$ eine Abbildung setzen wir $d^0 f := f$ und $d^1 f := df : x \mapsto d_x f$ und definieren induktiv für $k \geq 2$ die **k -te Ableitung**

$$d^k f : A \rightarrow \mathcal{B}^k(\vec{X}, \vec{Y})$$

als $d^k f := d(d^{k-1} f)$, falls die $(k - 1)$ -te Ableitung existiert und differenzierbar ist auf A . Existieren alle höheren Ableitungen von f bis zur Ordnung k und sind stetig, so nennen wir f **von der Klasse \mathcal{C}^k** oder auch eine **\mathcal{C}^k -Abbildung**. Zum Beispiel bedeutet \mathcal{C}^1 nichts anderes als stetig differenzierbar und \mathcal{C}^0 nichts anderes als stetig. Ist f von der Klasse \mathcal{C}^k für alle k , so heißt die Abbildung f **glatt** oder **beliebig differenzierbar** oder **von der Klasse \mathcal{C}^∞** oder eine **\mathcal{C}^∞ -Abbildung**.

6.5.7 (Koordinatenfreie Taylorformel). Die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen läßt sich koordinatenfrei dahingehend formulieren, daß unsere höheren Ableitungen $d^k f$ in den symmetrischen multilinearen Abbildungen landen, d.h. in denjenigen multilinearen Abbildungen, die ihren Wert nicht ändern, wenn man ihre Argumente untereinander vertauscht. Wir gehen darauf nicht näher ein, empfehlen aber dem Leser zu prüfen, daß sich die höheren Terme der Taylorentwicklung 2.2.5 koordinatenfrei in der Form $(k!)^{-1}(d^k f)(h, \dots, h)$ darstellen lassen.

Definition 6.5.8. Seien X, Y normierte reelle Räume und $A \subset X, B \subset Y$ halboffene Teilmengen. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt ein **\mathcal{C}^k -Diffeomorphismus** genau dann, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch seine Umkehrung $f^{-1} : B \rightarrow A$ beide \mathcal{C}^k -Abbildungen sind. Sprechen wir ohne nähere Spezifizierung von einem **Diffeomorphismus**, so meinen wir einen \mathcal{C}^∞ -Diffeomorphismus.

Übungen

Übung 6.5.9. Die Exponentialabbildung $\exp : \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ ist glatt. Hinweis: Glattheit von Potenzreihen in mehreren Variablen 2.3.11.

Übung 6.5.10. Gegeben ein Banachraum V ist das Invertieren eine glatte Abbildung auf der Menge der invertierbaren Elemente von $\mathcal{B}(V)$. Hinweis: 1.4.11.

Übung 6.5.11. Seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$ halboffen. Eine differenzierbare Abbildung $f : A \rightarrow Y$ ist von der Klasse \mathcal{C}^k genau dann, wenn die Abbildung $A \times \vec{X} \rightarrow Y \times \vec{Y}, (x, v) \mapsto (f(x), (d_x f)(v))$ von der Klasse \mathcal{C}^{k-1} ist.

Übung 6.5.12. Jede Verknüpfung von \mathcal{C}^k -Abbildungen ist von der Klasse \mathcal{C}^k . Jede Verknüpfung von glatten Abbildungen ist glatt. Hinweis: 1.5.11 und 6.5.11.

Übung 6.5.13. Eine Abbildung in ein Produkt von endlich vielen normierten reellen Vektorräumen ist \mathcal{C}^k genau dann, wenn ihre Komponenten \mathcal{C}^k sind.

6.5.14. Seien X und Y vollständige normierte reelle Räume. Ist $U \subseteq X$ offen und $f : U \rightarrow Y$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung für $1 \leq k \leq \infty$ und ist an einer Stelle $p \in U$ das Differential ein Isomorphismus mit stetigem Inversen, so induziert f einen \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung von p mit einer offenen Umgebung von $f(p)$. Das folgt sofort aus 3.1.4 mit den vorhergehenden Übungen, insbesondere 6.5.10.

6.6 Äußere Ableitung von Differentialformen

6.6.1. Gegeben ein Vektorraum V definieren wir für alle $k \geq 0$ eine lineare Abbildung $\text{alt} : \text{Hom}(V, \text{Alt}^k V) \rightarrow \text{Alt}^{k+1} V$ durch die Vorschrift

$$(\text{alt } f)(v_0, v_1, \dots, v_k) := \sum_{i=0}^k (-1)^i f(v_i)(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k)$$

Hier soll die „Tarnkappe“ über v_i wie üblich bedeuten, daß dieser Eintrag beim entsprechenden Summanden auszulassen ist.

Ergänzung 6.6.2. Leser mit entsprechenden Kenntnissen in multilinearer Algebra können unsere Abbildung im endlichdimensionalen Fall, und nur der ist für uns hier relevant, auch verstehen als die Komposition

$$\text{Hom}(V, \text{Alt}^k V) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes \text{Alt}^k V \xrightarrow{\Delta} \text{Alt}^{k+1} V$$

des Inversen zum Standardisomorphismus $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, W)$ aus [LA2] 6.1.18 mit dem Dachprodukt.

Definition 6.6.3. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen. Eine Differentialform $\omega : A \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$ heißt **differenzierbar**, wenn sie als Abbildung von der halboffenen Teilmenge A des endlichdimensionalen reellen Raums X in den endlichdimensionalen reellen Vektorraum $\text{Alt}^k \vec{X}$ differenzierbar ist im Sinne von 1.2.2. Sie heißt stetig differenzierbar wenn sie stetig differenzierbar ist im Sinne von 1.5.2, wenn also ihr Differential auch stetig ist als Abbildung $A \rightarrow \text{Hom}(\vec{X}, \text{Alt}^k \vec{X})$ gegeben durch $x \mapsto d_x \omega$.

Definition 6.6.4. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen. Gegeben $\omega : A \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$ eine differenzierbare k -Form erklären wir eine $(k+1)$ -Form

$$(d\omega) : A \rightarrow \text{Alt}^{k+1} \vec{X}$$

durch die Vorschrift $(d\omega)_x := \text{alt}(d_x \omega)$, wobei $d_x \omega : \vec{X} \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$ das Differential im Sinne von 1.2.2 unserer Form $\omega : A \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$ an einer Stelle $x \in A$ meint. Wir nennen $d\omega$ die **äußere Ableitung von ω** . Den Unterschied zwischen Differential $d\omega$ und äußerer Ableitung $d\omega$ bringen wir nur durch die Wahl der Schriftart zum Ausdruck. Eine differenzierbare Differentialform, deren äußere Ableitung verschwindet, heißt **geschlossen**.

6.6.5. Gegeben $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist ein differenzierbares Kovektorfeld ω auf U geschlossen im hier erklärten Sinne genau dann, wenn ω geschlossen ist im Sinne von 5.7.1, wenn also das Wegintegral von ω über jeden geschlossenen in U zusammenziehbaren Integrationsweg verschwindet.

6.6.6 (**Anschauung für die äußere Ableitung**). Um uns die äußere Ableitung $d\omega$ zu veranschaulichen, erinnern wir zunächst an den Fall einer Nullform alias Funktion, die wir dann statt ω lieber f nennen. Deren äußere Ableitung $(df)_x$ ist schlicht das Differential $d_x f$ bei x und kann dadurch beschrieben werden, daß es jedem Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{X}$ die Zahl

$$(df)_x(\vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + t\vec{v}) - f(x))$$

zuordnet. Im Fall einer Einsform alias eines Kovektorfelds ω kann seine äußere Ableitung $(d\omega)_x$ bei x analog dadurch beschrieben werden, daß sie jedem geordneten Paar von Richtungsvektoren $(\vec{v}, \vec{w}) \in \vec{X}^2$ die Zahl

$$(d\omega)_x(\vec{v}, \vec{w}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_{\gamma(x, t\vec{v}, t\vec{w})} \omega$$

zuordnet mit der Notation $\gamma(x, t\vec{v}, t\vec{w})$ für den Weg, der einmal das Parallelogramm mit einer Ecke x und Kantenvektoren $t\vec{v}$ und $t\vec{w}$ umläuft, und zwar stückweise linear erst von x nach $x + t\vec{v}$, dann weiter nach $x + t\vec{v} + t\vec{w}$, von da nach $x + t\vec{w}$, und dann wieder zurück nach x . Möglicherweise haben Sie das bereits als Übung 5.7.20 gezeigt. Im allgemeinen Fall einer k -Form ω schließlich haben wir

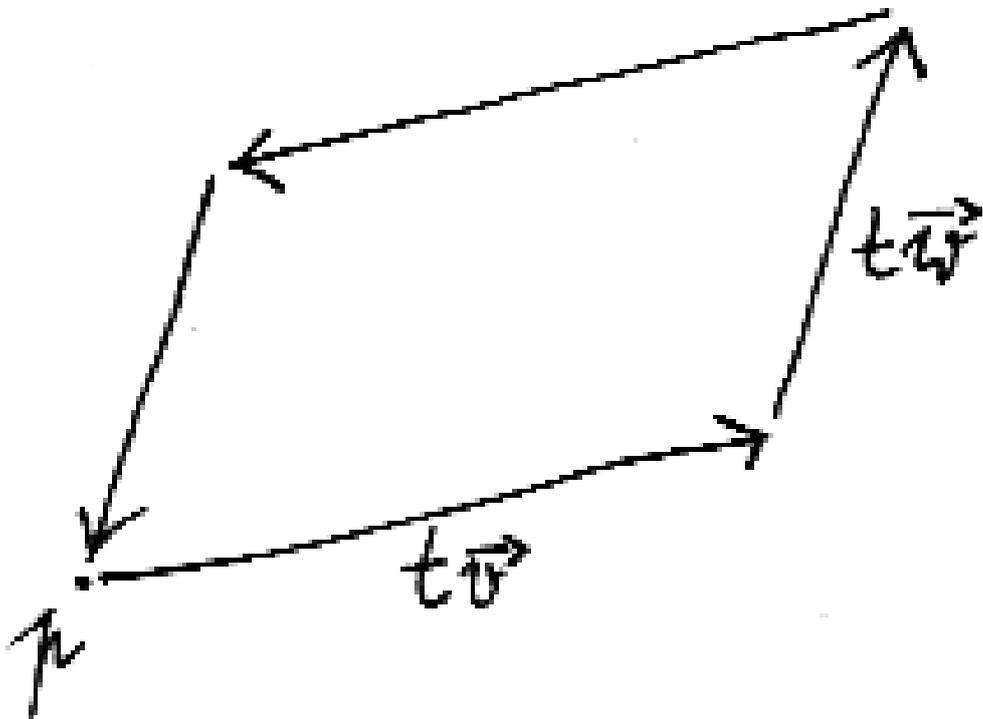
$$(d\omega)_x(\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{k+1}} \int_{F(x, t\vec{v}_0, \dots, t\vec{v}_k)} \omega$$

mit F zumindest für $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k$ linear unabhängig der in geeigneter Weise orientierte Oberfläche eines Parallelepipedes mit Ecke x und Kantenvektoren $t\vec{v}_i$, über die wir dann unsere k -Form integrieren. Das wird recht direkt aus dem Satz von Stokes mit Ecken 6.8.17 folgen, wie sie als Übung 6.8.28 werden ausarbeiten dürfen.

Satz 6.6.7 (Rechnen mit der äußeren Ableitung). *Seien ω und η differenzierbare Differentialformen auf einer halboffenen Teilmenge A eines endlichdimensionalen reellen Raums X . So haben wir:*

1. Die Zuordnung $\omega \mapsto d\omega$ ist linear;
2. Für Nullformen alias Funktionen f gilt $df = d_x f$;
3. Für das Differential des Produkts gilt die **Leibniz-Regel**

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d\eta$$



Der Weg $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$ aus Übung 6.6.6. Mit $t \rightarrow 0$ wird er natürlich immer kleiner.

4. Gegeben eine C^2 -Abbildung $\phi : B \rightarrow A$ von einer halboffenen Teilmenge eines weiteren endlichdimensionalen reellen Raums nach A haben wir die **Verwandtschaftsverträglichkeit der äußeren Ableitung**

$$d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$$

5. Ist ω stetig differenzierbar und $d\omega$ auch stetig differenzierbar, so gilt

$$d(d\omega) = 0$$

6.6.8. Diese Formeln machen zusammen mit der gradierten Kommutativität 6.1.12 des Dachprodukts und mit unserer Regel

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

aus 5.1.16 für das Differential einer differenzierbaren Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer halboffenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ das Rechnen mit Differentialformen außerordentlich bequem. Der Formalismus der Differentialformen geht auf Élie Cartan's Arbeiten zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts zurück. Die Verträglichkeit der äußeren Ableitung mit Verwandtschaft macht die Umrechnung zwischen verschiedenen Koordinatensystemen derart einfach, daß es auch bei anderen Umrechnungen oft der bequemste Weg ist, sie auf diesen Formalismus zurückzuführen. Als Beispiel bespreche ich die Umrechnung des Laplace-Operators in krummlinige Koordinaten in 6.9.11 folgende.

6.6.9 (**Unterschiede zum Kalkül mit beliebigen Multilinearformen**). Man beachte den dramatischen Unterschied zu unseren Ableitungen 6.5.5 von nicht notwendig alternierenden Multilinearformen, die wir dort sogar im vektorwertigen Fall betrachtet hatten. Die Definition dort war fast dieselbe, bis auf das Detail, daß wir dort beliebige Multilinearformen betrachtet hatten und folgerichtig nach dem Ableiten auch nicht den alternierenden Anteil genommen hatten. Dennoch sind alle drei Aussagen des vorhergehenden Satzes in dieser analogen Situation falsch. Etwas vage gesprochen folgen unsere Aussagen eben gerade aus den Zusammenspiel zwischen dem Kommutieren der partiellen Ableitungen und dem Antikommutieren des Dachprodukts.

6.6.10 (**Diskussion der Eigenschaften der äußeren Ableitung**). Die Regel 6.6.7.4 können wir auch $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega \Rightarrow \phi : d\eta \rightsquigarrow d\omega$ schreiben. Sie besagt also in Worten, daß die äußere Ableitung mit Verwandtschaft verträglich ist. Der Leser sei ermutigt, sich das im Lichte unserer Anschauung 6.6.6 auch bildlich klarzumachen. Die Regel $dd\omega = 0$ ist zumindest für Nullformen im Lichte unserer Anschauung 6.6.6 leicht einzusehen, da das Integral des Differentials einer Funktion über jeden

geschlossenen Integrationsweg verschwindet. Für Kovektorfelder sollte die Identität $dd\omega = 0$ zumindest aus dem Stokes'schen Satz 6.8.2 heraus klar werden: Er besagt, daß das Integral von $d\omega$ über eine Fläche unseres Parallelepeds auch als Integral von ω über dessen Rand geschrieben werden kann, und die Summe aller Randintegrale über die sechs Flächen unseres Parallelepeds ist offensichtlich wieder Null.

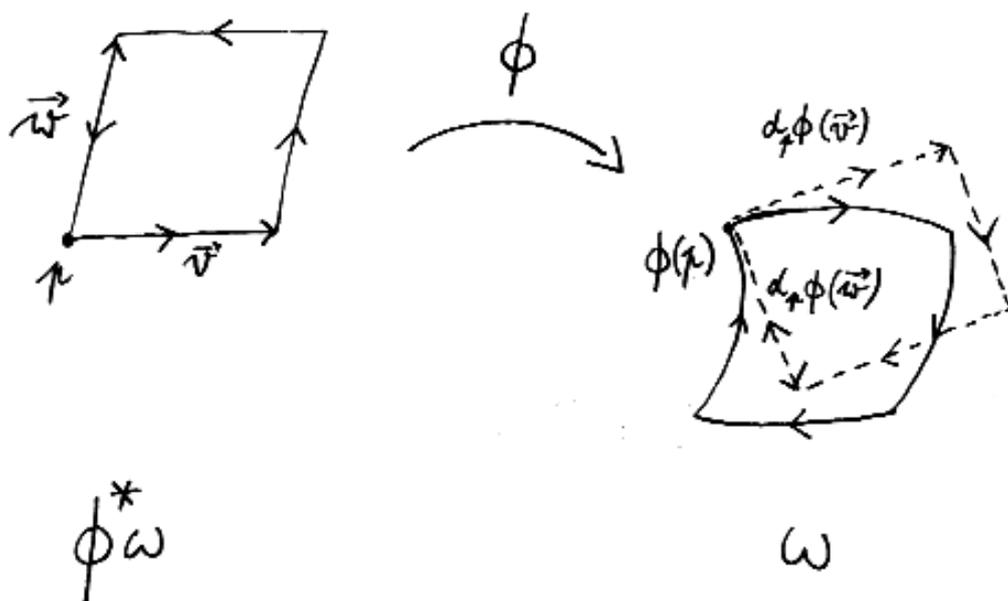
6.6.11. In nebenstehendem Bild wage ich den Versuch einer anschaulichen Interpretation der Verträglichkeit zwischen der äußeren Ableitung und dem Zurückholen von Kovektorfeldern. Gegeben ist ein Kovektorfeld ω rechts und ein Punkt p mit zwei Richtungsvektoren \vec{v}, \vec{w} links. Das Wegintegral von $\phi^*\omega$ über den kleinen Parallelogrammweg links approximiert $(d(\phi^*\omega))_p(\vec{v}, \vec{w})$. Es stimmt nach 5.3.7.3 überein mit dem Wegintegral des Kovektorfelds ω über seinen Bildweg rechts, eingezeichnet als durchgezogener Rundweg aus vier krummen Stücken. Dahingegen approximiert das Wegintegral über den kleinen gestrichelten Parallelogrammweg rechts $(d\omega)_{\phi(p)}(d_p\phi(\vec{v}), d_p\phi(\vec{w}))$. Die Anschauung soll uns nun sagen, daß im Grenzwert $t \rightarrow 0$ wie in 6.6.6 die entsprechenden beiden Wegintegrale rechts nach Teilen durch t^2 gegen denselben Wert streben. In der Tat werden ja nicht nur die beiden Rundwegsintegrale klein von zweiter Ordnung, sondern die beiden Wege werden sich bei $t \rightarrow 0$ auch sehr ähnlich, und das sorgt dafür, daß die Differenz ihrer Rundwegsintegrale für $t \rightarrow 0$ sogar von dritter Ordnung verschwindet.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind offensichtlich. Wir führen den Beweis der restlichen Aussagen in mehreren Schritten.

Leibnizregel. Wir beginnen mit dem Fall des Produkts einer konstanten k -Form $\omega_0 \in \text{Alt}^k \vec{X}$ mit einer differenzierbaren Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. In diesem Fall behauptet unsere Formel

$$d(f\omega_0) = df \wedge \omega_0$$

Leser mit entsprechenden Kenntnissen in multilinearer Algebra erkennen das auf den ersten Blick, das Differential an $x \mapsto f(x)\omega_0$ an einer Stelle $p \in A$ ist eben $d_p(f\omega_0) : \vec{v} \mapsto ((d_p f)(\vec{v}))\omega_0$ und entspricht dem Tensor $(d_p f) \otimes \omega_0$, dessen Bild unter alt dann $(d_p f) \wedge \omega_0$ ist. Man kann die Formel aber auch mit unserer vom Tensorkalkül unabhängigen Beschreibung von alt leicht verifizieren. Im allgemeinen können wir ω und η schreiben als Summen von Formen der Gestalt $a\omega_0, b\eta_0$ mit ω_0, η_0 konstant und a, b differenzierbaren Funktionen. Es reicht also, die Behauptung für $\omega = a\omega_0, \eta = b\eta_0$ zu prüfen. Im Fall von Funktionen liefert die Produktregel, wie bereits in 5.1.14 erwähnt, unmittelbar $d(ab) = (da)b + a(db)$. Dann gilt nach dem bereits bewiesenen Fall aber $d\omega = da \wedge \omega_0, d\eta = db \wedge \eta_0$ und damit $d(\omega \wedge \eta) = ((da)b + a(db))\omega_0 \wedge \eta_0$. Da zusätzlich gilt $db \wedge \omega_0 = (-1)^{|\omega|}\omega_0 \wedge db$, folgt die Leibnizregel.



Versuch einer anschaulichen Interpretation der Verträglichkeit zwischen der äußeren Ableitung und dem Zurückholen von Kovektorfeldern.

$dd = 0$ im Fall $X = \mathbb{R}^n$. Für eine Nullform alias eine Funktion $\omega = a$ auf einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n erhalten wir ganz explizit $da = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i$ und

$$dda = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i = 0$$

Hierbei haben wir die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen 2.1.11 verwendet, die hinwiederum aus der Annahme der Stetigkeit der zweiten Ableitungen folgt. Für eine k -Form ω auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n , sagen wir $\omega = \sum_{|I|=k} a_I dx_I$, erhalten wir damit sofort $d(d\omega) = \sum d(da_I) \wedge dx_I = 0$. Für eine k -Form ω auf einer halboffenen Teilmenge des \mathbb{R}^n folgt unsere Behauptung dann aus der Stetigkeit von $d(d\omega)$.

Verwandtschaftsverträglichkeit für ϕ affin. Gilt $d\phi^* = \phi^*d$ bei ω und η , so nach der Produktregel auch bei $\omega \wedge \eta$. Es reicht also, unsere Formel für Funktionen alias Nullformen und für konstante 1-Formen zu zeigen. Der Fall von Funktionen ist 5.1.26. Für eine konstante 1-Form ω_\circ und ϕ affin ist natürlich $\phi^*\omega_\circ$ auch eine konstante 1-Form, mithin gilt wie gewünscht $d(\phi^*\omega_\circ) = 0 = \phi^*(d\omega_\circ)$.

$dd = 0$ im Allgemeinen. Ist $\phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X$ ein Isomorphismus von affinen Räumen, so folgt $\phi^*(dd\omega) = dd(\phi^*\omega) = 0$ und mithin $dd\omega = 0$.

Verwandtschaftsverträglichkeit im Allgemeinen. Gilt $d\phi^* = \phi^*d$ bei ω und η , so nach der Produktregel auch bei $\omega \wedge \eta$. Es reicht also, unsere Formel für Funktionen alias Nullformen und für konstante 1-Formen zu zeigen. Der Fall von Funktionen ist 5.1.26. Für eine konstante 1-Form ω_\circ haben wir hinwiederum $\omega_\circ = da$ für eine geeignete Funktion a , genauer für jede affine Abbildung a von unserem affinen Raum nach \mathbb{R} mit linearem Anteil $\vec{a} = \omega_\circ$. Damit ergibt sich für ϕ beliebig unmittelbar $d\phi^*\omega_\circ = d\phi^*da = dd\phi^*a = 0 = \phi^*0 = \phi^*d\omega_\circ$, wo wir im mittleren Schritt verwenden, daß uns die Regel $\phi^*da = d\phi^*a$ für Funktionen a ja aus 5.1.26 bereits zur Verfügung steht. \square

Beispiel 6.6.12. Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ wird für eine Differentialform der Gestalt $\omega = \sum a_I dx_I$ ihre äußere Ableitung $d\omega$ gegeben durch die Vorschrift

$$d\omega = \sum d(a_I) \wedge dx_I$$

Vorne ist hier das Differential der Funktion a_I gemeint, hinten der formale Ausdruck $dx_I = dx_{i(1)} \wedge \dots \wedge dx_{i(k)}$ für $i(1) < \dots < i(k)$ die der Größe nach aufgezählten Elemente einer Teilmenge $I \subset \{1, \dots, n\}$.

Übungen

Übung 6.6.13. Prüfen Sie für die Differentialform $x^2 dx \wedge dy - 4e^y dx \wedge dz$, daß erst die äußere Ableitung bilden und dann auf Kugelkoordinaten übergehen dasselbe

Resultat liefert wie erst auf Kugelkoordinaten übergehen und dann die äußere Ableitung bilden.

Übung 6.6.14. Zeigen Sie, daß für eine stetig differenzierbare k -Form ω auf dem \mathbb{R}^3 mit $k \geq 1$ die Bedingung $d\omega = 0$ gleichbedeutend ist zur Bedingung, daß es eine stetig differenzierbare $(k - 1)$ -Form η auf dem \mathbb{R}^3 gibt mit $\omega = d\eta$.

6.7 Randfaltungen

Definition 6.7.1. Sei X ein reeller Raum endlicher Dimension und $k \geq 1$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt eine **k -dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit** oder kurz **Randfaltung** von X , wenn es für jeden Punkt $p \in M$ ein Paar (U, g) gibt aus einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von p und einem Diffeomorphismus $g : U \xrightarrow{\sim} g(U)$ von U auf eine offene Teilmenge $g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, daß gilt:

$$g(U \cap M) = g(U) \cap (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0^{n-k})$$

Ein derartiges Paar (U, g) nenne ich eine **Halbraumplättung** von M um p . Für $a : \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Nullen anhängende Abbildung und $W := a^{-1}(g(U))$ erklären wir die **Plättungskarte**

$$\varphi : W \rightarrow M$$

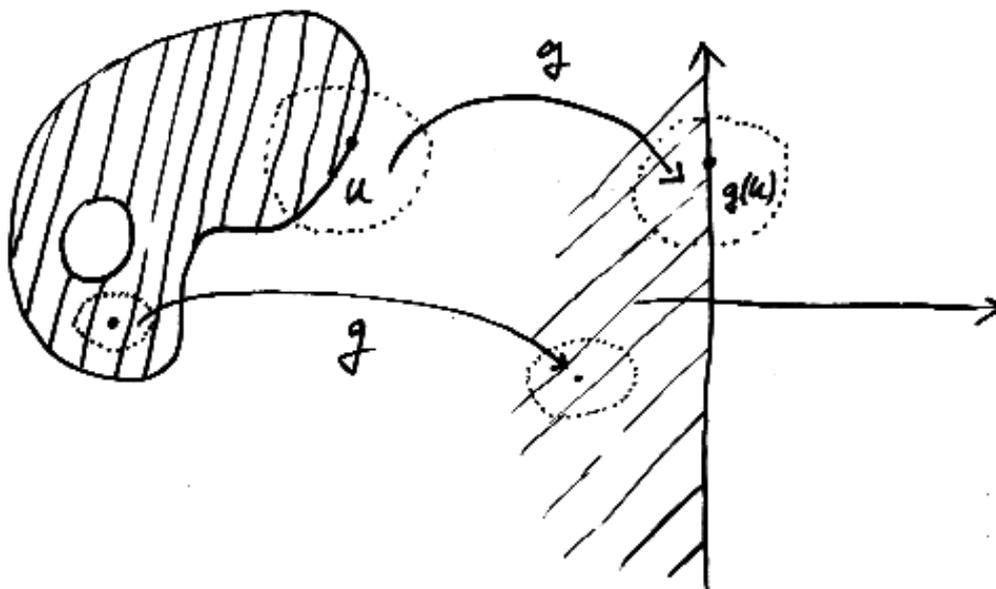
zu unserer Halbraumplättung durch $\varphi := g^{-1} \circ a$. Ganz allgemein heißt eine Abbildung $\varphi : W \rightarrow M$ mit $W \subseteq (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1})$ eine **Plättungskarte von M** , wenn sie die Plättungskarte zu mindestens einer Halbraumplättung von M ist.

6.7.2. Eine berandete Untermannigfaltigkeit der Kodimension Null in einem endlichdimensionalen reellen Raum heißt auch eine **C^1 -berandete Teilmenge**. Unser Bild von eben stellt eine C^1 -berandete Teilmenge der Papierebene dar.

Beispiele 6.7.3. Alle mehrgliedrigen Intervalle in \mathbb{R} sind C^1 -berandete Teilmengen. Die abgeschlossene Vollkugel $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ist eine C^1 -berandete Teilmenge des \mathbb{R}^3 .

Lemma 6.7.4. Sei M eine Randfaltung der Dimension k . So haben wir:

1. Unser M ist eine k -Fastfaltung;
2. Für jede Plättungskarte $\varphi : W \hookrightarrow M$ von M gilt $M_{\text{reg}} \cap \varphi(W) = \varphi(W^\circ)$ mit unserer Notation M_{reg} für die Mannigfaltigkeit der **regulären Punkte**;
3. Das Komplement $\partial M := M \setminus M_{\text{reg}}$ ist eine $(k - 1)$ -Mannigfaltigkeit, der **Rand von M** .



Eine zweidimensionale berandete Untermannigfaltigkeit der Papierebene mit Halbraumplättungen um zwei ausgewählte Punkte.

6.7.5 (Diskussion der Notation). Das Symbol ∂ ist ein griechisches d . Die Notation ∂M für den Rand ist wohl darauf zurückzuführen, daß sich das Bilden des Randes nach dem Satz von Stokes 6.8.2 als eine in gewisser Weise „duale Operation“ zum Differenzieren auffassen läßt und in jedem Falle dazu eng verwandt ist. Der eben erklärte Begriff von Rand fällt im Fall $n = k$ und M abgeschlossen im umgebenden affinen Raum mit dem in der Topologie verwendeten Begriff von Rand 4.3.1 zusammen, ist im allgemeinen aber davon verschieden.

Beweis. Die erste Aussage des Lemmas ist klar. Um Teil 2 zu zeigen bemerken wir, daß gegeben zwei Plättungskarten (V, ψ) und (W, φ) einer Randfaltung mit $\varphi(W) = \psi(V)$ durch Anwenden des Umkehrsatzes 3.1.2 auf den Kartenwechsel $\kappa = \psi^{-1} \circ \varphi$ folgt $\kappa(W^\circ) \subset V^\circ$ und durch Anwenden auf den umgekehrten Kartenwechsel sogar $\kappa(W^\circ) = V^\circ$. Daß ∂M eine $(k - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, folgt dann unmittelbar. \square

Beispiele 6.7.6. Der einzige Randpunkt der Randfaltung $[a, b) \subset \mathbb{R}$ ist a . Eine abgeschlossene Kreisscheibe in der Ebene ist auch als Teilmenge des Raums aufgefaßt eine zweidimensionale Randfaltung mit dem Einheitskreis als Rand.

Definition 6.7.7. Gegeben eine Plättungskarte (W, φ) einer $(k + 1)$ -Randfaltung M definieren wir die **induzierte Karte $(\bar{W}, \bar{\varphi})$ des Randes ∂M** durch die Vorschrift

$$(\bar{W}, \bar{\varphi}) := (i^{-1}(W), \varphi \circ i)$$

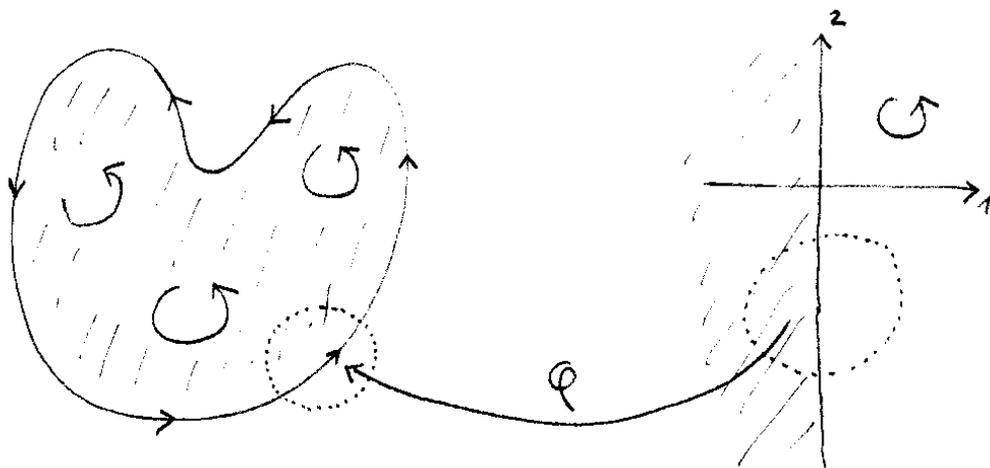
mit $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ der Einbettung $x \mapsto (0, x)$.

6.7.8. Unter einer **Orientierung** einer Randfaltung der Dimension k verstehen wir wie bei allgemeinen Fastfaltigkeiten eine Orientierung ihres regulären Teils.

Lemma 6.7.9. *Gegeben eine orientierte $(k + 1)$ -Randfaltung M gibt es genau eine Orientierung ihres Randes ∂M derart, daß für jede Plättungskarte der Orientierung ε auch die induzierte Karte des Randes die Orientierung ε hat. Wir nennen sie die **induzierte Orientierung des Randes**.*

Beweis. Seien $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (W_β, φ_β) zwei Plättungskarten von M . Der Kartenwechsel $\varphi_{\beta\alpha} : W_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} W_{\beta\alpha}$ identifiziert $W_{\alpha\beta} \cap (0 \times \mathbb{R}^k)$ mit $W_{\beta\alpha} \cap (0 \times \mathbb{R}^k)$ und kann dort durch den Kartenwechsel $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}$ der auf dem Rand induzierten Karten ausgedrückt werden als $\text{id}_0 \times \bar{\varphi}_{\beta\alpha}$. Gegeben $y \in \bar{W}_\alpha \cap \bar{W}_\beta$ hat die Jacobi-Matrix $d_{(0,y)}\varphi_{\beta,\alpha}$ des Kartenwechsels die Gestalt

$$d_{(0,y)}\varphi_{\beta,\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial(\varphi_{\beta\alpha})_1}{\partial x_1}(0, y) & * \\ \hline 0 & d_y\bar{\varphi}_{\beta\alpha} \end{array} \right)$$



Eine orientierte berandete zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit der induzierten Orientierung auf ihrem Rand und einer Randkarte

und ihr Eintrag oben links alias die partielle Ableitung in $(0, y)$ der ersten Komponente des Kartenwechsels nach der ersten Variablen ist offensichtlich nicht negativ. Mithin hat in jedem Randpunkt die Funktionaldeterminante eines Kartenwechsels zweier Plättungskarten von M dasselbe Vorzeichen wie die Funktionaldeterminante des Kartenwechsels der auf dem Rand induzierten Karten. \square

Beispiel 6.7.10. Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und $\varphi : [a, b] \hookrightarrow X$ eine stetig differenzierbare injektive Abbildung in einen endlichdimensionalen reellen Raum zeigt man unschwer, daß $M := \varphi([a, b])$ eine 1-Randfaltung ist und φ eine Integrationskarte von M und daß M genau eine Orientierung besitzt, für die diese Integrationskarte orientierungsverträglich ist. Dann besteht der Rand aus den beiden Punkten $\partial M = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$ und die induzierte Orientierung gibt dem Ersten dieser Punkte ein negatives Vorzeichen und dem Zweiten ein Positives. Im höherdimensionalen Fall bedeutet unsere Definition anschaulich, daß die orientierten Basen der Tangentialräume des Randes diejenigen angeordneten Basen sind, die orientierte Basen der Tangentialräume der Mannigfaltigkeit liefern, wenn man noch einen Vektor davorschreibt, der tangential an die Mannigfaltigkeit ist und an unserem Randpunkt „aus der Mannigfaltigkeit heraus zeigt“. Ist speziell $M = \partial K$ der Rand einer glatt berandeten Teilmenge K mit der von einer Orientierung des umgebenden Raums induzierten Orientierung, so nennt man das orientierte Normalenfeld auch das **äußere Normalenfeld**, da dann anschaulich gesprochen N_p stets „aus K heraus zeigt“.

Übungen

Übung 6.7.11. Seien X und Y endlichdimensionale reelle Räume, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit überall surjektivem Differential. So ist für jede Randfaltung $C \subset Y$ ihr Urbild $M = f^{-1}(C)$ eine Randfaltung von X der Dimension $\dim X - \dim Y + \dim C$ mit Rand $\partial M = f^{-1}(\partial C)$. Man erkennt so zum Beispiel, daß alle Vollkugeln Randfaltungen sind. Hinweis: [3.3.10](#) und [3.3.13](#).

6.8 Integralsatz von Stokes

6.8.1. Bisher haben wir bei der Definition von Fastfaltungen, Randfaltungen und **Mannigfaltigkeiten** sowie ihren Plättungen und Karten alle beteiligten Abbildungen für gewöhnlich als stetig differenzierbar angenommen. Wenn wir stattdessen \mathcal{C}^l für $1 \leq l \leq \infty$ fordern wollen, schreiben wir das explizit dazu. Statt \mathcal{C}^∞ sagen wir auch **glatt**. Den Fall $l = 0$ betrachten wir hier nicht, da dabei zusätzliche Schwierigkeiten auftreten. In diesem Fall versagt etwa unser Beweis für die

Wohldefiniertheit des Randes einer Randfaltung. Für das folgende ist dieser Fall aber auch nicht relevant.

Satz 6.8.2 (Stokes'scher Integralsatz). *Seien M eine kompakte orientierte \mathcal{C}^2 -Randfaltung der Dimension $(k+1)$ in einem endlichdimensionalen reellen Raum und ω eine stetig differenzierbare k -Form auf einer halboffenen Teilmenge unseres Raums, die M umfaßt. So gilt*

$$\int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\partial\vec{M}} \omega$$

mit der induzierten Orientierung des Randes ∂M auf der rechten Seite.

6.8.3 (Verallgemeinerungen des Stokes'schen Integralsatzes). Der Beweis wird zeigen, daß wir statt der Kompaktheit unserer Randfaltung M schwächer nur voraussetzen brauchen, daß der Träger der Differentialform unsere Mannigfaltigkeit in einem Kompaktum trifft. In 6.8.17 erklären wir eine Verallgemeinerung des Stokes'schen Integralsatzes von Randfaltungen auf „Eckfaltungen“, die für die im „wirklichen Leben“ auftretenden Situationen besonders relevant ist.

6.8.4. Konkrete Spezialfälle des vorhergehenden Satzes werden ab 6.8.20 diskutiert. Bereits hier sei angemerkt, daß für eine kompakte Mannigfaltigkeit alias eine kompakte Randfaltung mit leerem Rand das Integral auf der linken Seite verschwinden muß, in Formeln $\partial M = \emptyset \Rightarrow \int_{\vec{M}} d\omega = 0$.

Vorschau 6.8.5 (Varianten für abstrakte Randfaltungen). Später werden wir lernen, was eine „abstrakte Randfaltung“ und eine „Differentialform auf einer abstrakten Randfaltung“ ist und wie man solche Differentialformen ableitet und k -Formen über orientierte k -dimensionale abstrakte Randfaltungen integriert. In dieser Allgemeinheit gilt dann dieselbe Formel für eine beliebige stetig differenzierbare k -Form ω mit kompaktem Träger auf einer beliebigen orientierten $(k+1)$ -dimensionalen \mathcal{C}^2 -Randfaltung M .

Beispiel 6.8.6 (Satz von Stokes im Fall einer Flußdichte). Sei X ein dreidimensionaler orientierter reeller affiner Raum und $K \subset X$ eine kompakte orientierte dreidimensionale \mathcal{C}^2 -Randfaltung alias ein Körper wie etwa eine massive Kugel oder ein massiver Eisenring, den wir uns aber nur als wohlbestimmte Region in X denken, die durchaus von Gas durchströmt wird. Der Rand ∂K ist dann eine Fläche, etwa eine Kugelschale oder die Oberfläche unseres Rings. Sei nun ω die 2-Form der Flußdichte eines bewegten Gases wie in 6.2.5. Nach 6.4.17 beschreibt das Integral von ω über ∂K die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall in einer durch die Orientierung bestimmten Richtung durch unsere Fläche ∂K hindurchtritt. Nach 6.6.6 beschreibt die 3-Form $d\omega$ an jeder Stelle für jede angeordnete Basis aus drei kleinen Vektoren die Gesamtmasse an Gas, die im

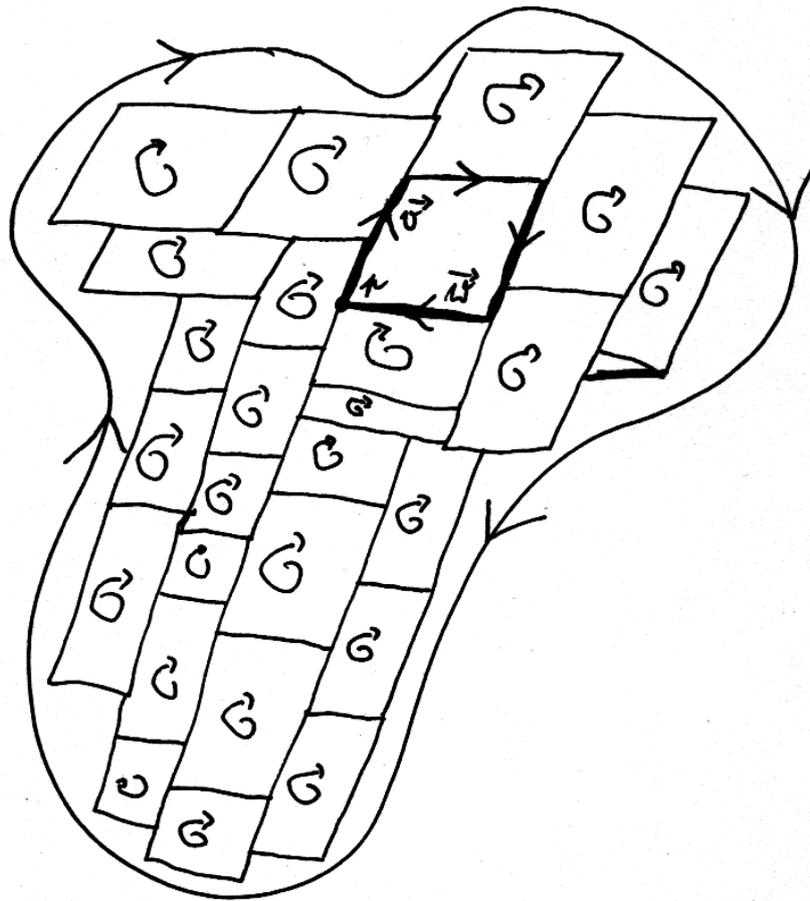


Illustration zum Stokes'schen Satz. Gegeben ein Kovektorfeld ω erinnern wir uns dazu daran, daß nach 6.6.6 seine äußere Ableitung $(d\omega)_p(\vec{v}, \vec{w})$ ausgewertet auf Richtungsvektoren \vec{v}, \vec{w} eine Approximation des Wegintegrals von ω über den Rundweg von p erst nach $p + \vec{v}$, dann weiter nach $p + \vec{v} + \vec{w}$, von dort nach $p + \vec{w}$ und zurück nach p ist. Es sollte nun anschaulich klar sein, daß die Summe über viele derartige kleine Rundwegsintegrale das Randintegral über den ganzen Bereich approximiert. Der Satz von Stokes formalisiert diese Anschauung.

gegebenen Zeitintervall aus dem entsprechenden kleinen Parallelepiped entweicht oder in dieses einströmt, je nach Vorzeichen. Nach 6.4.17 beschreibt das Integral über K dieser 3-Form die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall aus der Region K entweicht oder in diese einströmt, je nach Vorzeichen. Der Satz von Stokes besagt dann schlicht, daß diese Gesamtmasse dieselbe ist wie die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall durch die Oberfläche ∂K hindurchtritt.

Beispiel 6.8.7 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Jedes mehrpunktige kompakte reelle Intervall $M = [a, b]$ ist eine eindimensionale Randfaltung in \mathbb{R} und erbt von \mathbb{R} eine Orientierung. Sein Rand ist die nulldimensionale Mannigfaltigkeit $\partial M = \{a, b\}$ und die induzierte Orientierung darauf gibt dem Punkt a das Vorzeichen -1 und dem Punkt b das Vorzeichen $+1$. Eine stetig differenzierbare Nullform ω auf M ist schlicht eine stetig differenzierbare Funktion G und ihr Differential ist das Kovektorfeld $d\omega = dG = G'(x)dx$. Wir erkennen so, daß unser Satz von Stokes 6.8.2 in diesem Fall zum Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung [AN1] 4.7.3 spezialisiert.

Beispiel 6.8.8 (Fluß durch eine Hemisphäre). Wir kommen nochmal auf unser Integral über die obere Hemisphäre H der 2-Form $x^2 dx \wedge dy$ aus 6.4.7 zurück, wobei unsere Orientierung der oberen Hemisphäre unter der Projektion auf die Ebene die übliche Orientierung des \mathbb{R}^2 entsprach. Nun haben wir das Glück, $x^2 dx \wedge dy = -d(x^2 y dx)$ schreiben zu können. Der Rand von \vec{H} ist dann der im Gegenuhrzeigersinn orientierte Einheitskreis in der xy -Ebene $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ und aus dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{\vec{H}} x^2 dx \wedge dy = \int_{\vec{S}} -x^2 y dx$$

Zur Sicherheit machen wir noch die Probe und landen mit

$$\int_{\vec{S}} -x^2 y dx = \int_0^{2\pi} -\cos^2 \varphi \sin \varphi d(\cos \varphi) = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi$$

im wesentlichen bei demselben Integral wie dem, das wir bereits in 6.4.7 berechnet hatten. Genauer wird der fehlende Faktor 2 von $\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi$ in der Rechnung dort hier dadurch ausgeglichen, daß das Integral bis 2π läuft.

Beweis des Stokes'schen Satzes. Gilt die Aussage für ω und ω' , so auch für $\omega + \omega'$. Wir können also nach der Beschreibung [AN1] 7.5.3 der Kompaktheit und unseren Erkenntnissen 4.1.15 über glatte Teilungen der Eins ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es eine Halbraumkarte (W, φ) von M einer Orientierung ε gibt mit $(\text{supp } \omega \cap M) \subset \varphi(W)$. So gilt per definitionem und da

nach 6.6.7.4 im Fall einer C^2 -Abbildung die äußere Ableitung vertauscht mit dem Zurückholen

$$\int_{\bar{M}} d\omega = \varepsilon \int_W \varphi^*(d\omega) = \varepsilon \int_W d(\varphi^*\omega)$$

Bezeichnet $(\bar{W}, \bar{\varphi})$ wie in 6.7.7 die induzierte Karte des Randes und $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$, $x \mapsto (0, x)$ die offensichtliche Einbettung, so gilt nach unseren Definitionen und wegen $\bar{\varphi} = \varphi \circ i$ und $\bar{W} = i^{-1}(W)$ auch

$$\int_{\partial \bar{M}} \omega = \varepsilon \int_{\bar{W}} \bar{\varphi}^*\omega = \varepsilon \int_{i^{-1}W} i^*(\varphi^*\omega)$$

Bezeichnen wir mit η die Fortsetzung durch Null von $\varphi^*\omega$ auf den ganzen Halbraum, so reduziert sich der Satz auf einen Spezialfall, den wir im Anschluß als eigenständiges Lemma formulieren und beweisen. \square

Lemma 6.8.9. *Bezeichne $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ die Einbettung $x \mapsto (0, x)$ und sei η eine stetig differenzierbare k -Form mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$. So gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^k} i^*\eta = \int_{\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k} d\eta$$

Beweis. Wir nennen unsere Koordinaten ausnahmsweise x_0, x_1, \dots, x_k und können schreiben

$$\eta = \sum_{\nu=0}^k \eta_\nu dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_\nu} \wedge \dots \wedge dx_k$$

für stetig differenzierbare Funktionen η_ν mit kompaktem Träger. Es ergibt sich $i^*\eta = \eta_0 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, die linke Seite ist also schlicht $\int_{\mathbb{R}^k} \eta_0$. Auf der rechten Seite erhalten wir

$$d\eta = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\nu} dx_0 \wedge \dots \wedge dx_k$$

und für alle $\nu \neq 0$ verschwindet beim entsprechenden Summanden das ν -te partielle Integral, da die Stammfunktion η_ν kompakten Träger hat und von $-\infty$ bis ∞ integriert wird. Nur der erste Summand liefert also einen Beitrag, und der ist

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x_0} \right) = \int_{\mathbb{R}^k} \eta_0 \quad \square$$

6.8.10 (Bedeutung des Formalismus der Differentialformen). Der hier vorgeführte Beweis des Stokes'schen Satzes ist ziemlich kurz. Das liegt daran, daß seine Formulierung in der Sprache der Differentialformen so gut mit Koordinatenwechseln verträglich ist, daß wir uns beim Beweis leicht auf einen einfachen Spezialfall

zurückziehen können. In gewisser Weise haben wir also mit der Entwicklung der Sprache der Differentialformen die Hauptarbeit bereits geleistet. Als wesentliche nichttriviale Aussage möchte ich dabei insbesondere die Verträglichkeit der äußeren Ableitung mit \mathcal{C}^2 -Koordinatenwechseln 6.6.7.4 hervorheben, die sich auch in vielen anderen Zusammenhängen noch als ein äußerst starkes Hilfsmittel erweisen wird.

Beispiel 6.8.11. Wir wiederholen unser Beispiel einer Flußdichte 6.8.6 und übertragen es in eine andere Formelwelt. Gegeben eine kompakte \mathcal{C}^1 -berandete Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ im Sinne von 6.7.2 bezeichne $N : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$ das **äußere Normalenfeld**. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ erklären wir seine sogenannte **Quelldichte** oder auch **Divergenz** durch die Vorschrift $\operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$. Ist K sogar \mathcal{C}^2 -berandet im Sinne von 6.8.1, so zeigen wir den **Gauß'schen Integralsatz**

$$\int_K \operatorname{div} F = \int_{\partial K} F \cdot N$$

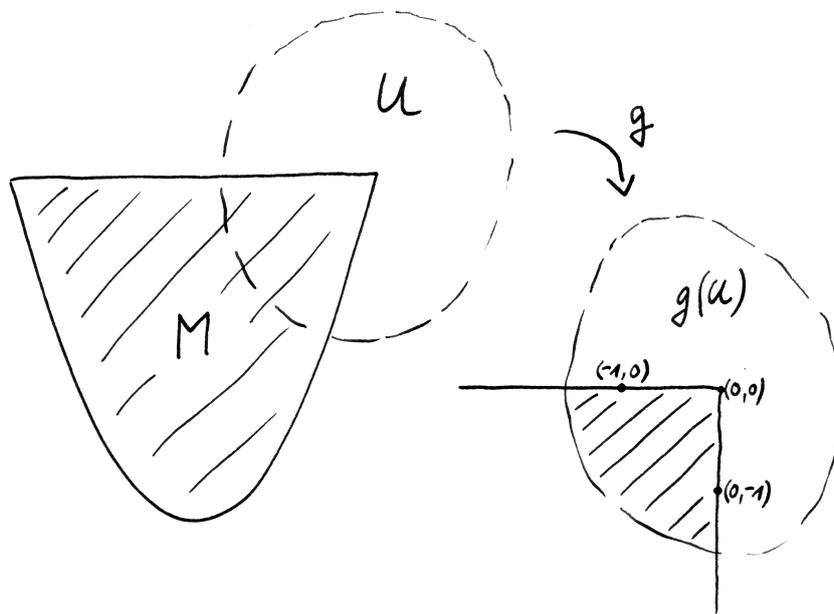
Bilden wir in der Tat zu F wie in 6.4.14 die zugehörige $(n-1)$ -Form $\omega = \omega_F$, so finden wir $d\omega = (\operatorname{div} F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Mit unseren Übersetzungen 6.4.4 und 6.4.15 zeigt der Satz von Stokes 6.8.2 dann

$$\int_K \operatorname{div} F = \int_{\vec{K}} d\omega = \int_{\partial \vec{K}} \omega = \int_{\partial K} F \cdot N$$

In Worten ist also der Fluß eines Vektorfelds durch den Rand eines \mathcal{C}^2 -berandeten Kompaktums im \mathbb{R}^n gleich dem Integral seiner Quelldichte über besagtes Kompaktum. Anschaulich mag man sich im Fall $n=2$ die Oberfläche K eines ebenen Moores denken, in dem Wasser nach oben dringt und über das Moor an den Rand des Moores fließt. Nehmen wir das Geschwindigkeitsfeld dieses Flusses als unser Vektorfeld, so wäre die Divergenz eben die Quelldichte in unserem Moor, das Randintegral mißt die Wassermenge, die pro Zeiteinheit am Rand unseres Moores herausläuft, und unser Satz besagt, daß sie gleich der Wassermenge sein muß, die pro Zeiteinheit im Inneren emporquillt.

Definition 6.8.12. Seien X ein reeller affiner Raum endlicher Dimension n und $k \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt eine **k -dimensionale Eckfaltigkeit**, wenn für jeden Punkt $p \in M$ ein Paar (U, g) existiert bestehend aus einer offenen Umgebung $U \Subset X$ von p und einem Diffeomorphismus $g : U \xrightarrow{\sim} g(U)$ auf eine offene Teilmenge $g(U) \Subset \mathbb{R}^n$ derart, daß gilt

$$g(U \cap M) = g(U) \cap ((\mathbb{R}_{\leq 0})^k \times 0^{n-k})$$



Eine kompakte 2-dimensionale Eckfältigkeit M der Papierebene mitsamt einer Eckenplättung in die dafür in geeigneter Weise mit \mathbb{R}^2 zu identifizierende Papierebene.

Ein derartiges Paar (U, g) heiße eine **Eckenplättung der Eckfaltung** M um p . Unter der zugehörigen **Plättungskarte** verstehen wir die Abbildung

$$\varphi : W \rightarrow M$$

mit $W := a^{-1}(g(U)) \subseteq (\mathbb{R}_{\leq 0})^k$ für $a : (\mathbb{R}_{\leq 0})^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Nullen anhängende Abbildung und mit $\varphi := g^{-1} \circ a$.

6.8.13 (Diskussion der Terminologie). Den Begriff einer „Eckfaltung“ gibt es bisher in der Literatur noch nicht. Er ist das Ergebnis meiner Versuche, eine Begrifflichkeit zu entwickeln, in der der Stokes'sche Integralsatz ohne viel zuztzlichen Aufwand in einer für Anwendungen nützlichen Allgemeinheit präzise formuliert und bewiesen werden kann.

Beispiele 6.8.14. Eine nulldimensionale Eckfaltung ist dasselbe wie eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit alias eine diskrete Teilmenge. Eine eindimensionale Eckfaltung ist dasselbe wie eine eindimensionale Randfaltung. Eine zweidimensionale Eckfaltung wäre zum Beispiel ein „abgeschlossenes Segment einer Kreisscheibe“. Eine dreidimensionale Eckfaltung im dreidimensionalen Raum ist etwa ein Würfel oder ein massiver Zylinder oder eine Vollkugel. Jede Mannigfaltigkeit ist auch eine Eckfaltung. Eine n -dimensionale Eckfaltung in einem n -dimensionalen Raum nenne ich auch eine **eckig berandete Teilmenge** und im C^l -Fall eine **C^l -eckig berandete Teilmenge**, die also salopp gesprochen „lokal um jeden Punkt mit einem C^l -Diffeomorphismus in eine Kopie der Standardecke transformiert werden kann“.

Lemma 6.8.15 (Eckfaltigkeiten und ihr Rand). *Jede k -Eckfaltung M ist auch eine k -Fastfaltung, das Komplement der Menge ihrer regulären Punkte $\partial M := M \setminus M_{\text{reg}}$ ist eine $(k - 1)$ -Fastfaltung, und für jede Plättungskarte $\varphi : W \hookrightarrow M$ von M gilt*

$$M_{\text{reg}} \cap \varphi(W) = \varphi(W^\circ)$$

Zusätzlich ist $M_{\text{reg}} \cup (\partial M)_{\text{reg}}$ eine Randfaltung mit Rand $(\partial M)_{\text{reg}}$.

Beweis. Die erste Aussage des Lemmas ist klar. Um die letzte Aussage des Lemmas zu zeigen, bemerken wir, daß gegeben zwei Karten (V, ψ) und (W, φ) einer Eckfaltung mit $\varphi(W) = \psi(V)$ durch Anwenden des Umkehrsatzes 3.1.2 auf den Kartenwechsel $\kappa = \psi^{-1} \circ \varphi$ folgt $\kappa(W^\circ) \subset V^\circ$ und durch Anwenden auf den umgekehrten Kartenwechsel sogar $\kappa(W^\circ) = V^\circ$. Das zeigt die letzte Aussage. Daß ∂M eine $(k - 1)$ -Fastfaltung ist und $M_{\text{reg}} \cup (\partial M)_{\text{reg}}$ eine Randfaltung, folgt dann unmittelbar. \square

6.8.16. Sei M eine k -dimensionale Eckfaltung. Das Komplement $\partial M := M \setminus M_{\text{reg}}$ nennen wir den **Rand von M** . Unter einer **Orientierung von M** verstehen wir

eine Orientierung als k -Fastfaltung alias eine Orientierung der Mannigfaltigkeit M_{reg} . Das ist auch dasselbe eine Orientierung der Randfaltung $M_{\text{reg}} \cup (\partial M)_{\text{reg}}$ und induziert damit wie in 6.7.9 besprochen eine Orientierung der $(k - 1)$ -Mannigfaltigkeit $(\partial M)_{\text{reg}}$ alias Orientierung der $(k - 1)$ -Fastfaltung (∂M) , die **induzierte Orientierung des Randes**.

Satz 6.8.17 (Stokes'scher Integralsatz mit Ecken). *Seien M eine orientierte \mathcal{C}^2 -Eckfaltung der Dimension $(k + 1)$ in einem endlichdimensionalen reellen Raum und ω eine stetig differenzierbare k -Form auf einer halboffenen Teilmenge unseres Raums, die M umfaßt, und so daß $(\text{supp } \omega) \cap M$ kompakt ist. Versehen wir den Rand ∂M von M mit der induzierten Orientierung, so gilt*

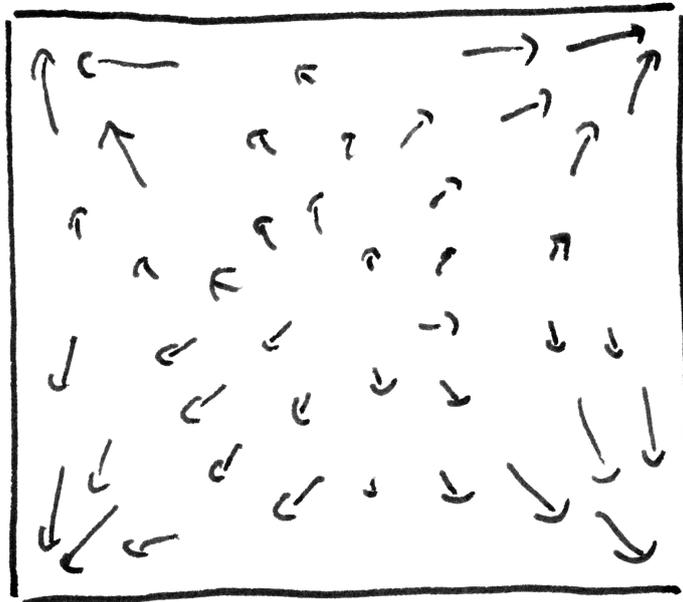
$$\int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\partial \vec{M}} \omega$$

Beweis. Mit denselben Tricks wie beim Beweis des Satzes im Fall von Randfaltungen 6.8.2 ziehen wir uns auf den Fall $M = (\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ zurück. Wir müssen damit nur zeigen, daß für $i_\nu : (\mathbb{R}_{\leq 0})^k \rightarrow (\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}$ das Einfügen einer Null an der ν -ten Stelle und η eine stetig differenzierbare k -Form mit kompaktem Träger auf $(\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^k} i_\nu^* \eta = \int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}} d\eta$$

Das Nachrechnen dieser Verallgemeinerung von Lemma 6.8.9 bleibe dem Leser überlassen. \square

6.8.18 (Bedeutung der Kompaktheitsannahmen). Im allgemeinen gilt der Satz von Stokes keineswegs für nichtkompakte Randfaltungen, selbst wenn am Rand „nur ein Punkt fehlt und das die Kompaktheit zerstört“. Ist zum Beispiel Q ein Quadrat in der Ebene ohne die Ecken, so können wir auf einer offenen Menge, die unser eckenloses Quadrat umfaßt, ein Vektorfeld konstruieren, das den Fluß eines expandierenden Gases beschreibt, das „durch die Löcher in den Ecken entweicht“ aber dessen Fluß durch die Randkanten des Quadrats verschwindet. In dieser Allgemeinheit gälte der Satz von Stokes also nicht. Allerdings müßte unser Gas „mit unendlicher Geschwindigkeit durch die Ecken pfeifen“ und sein Geschwindigkeitsfeld könnte nicht stetig auf besagte Ecken fortgesetzt werden, weshalb auch die Voraussetzungen für unseren Satz von Stokes mit Ecken in diesem Fall nicht erfüllt wären. Es gibt noch sehr viel allgemeinere Versionen des Stokes'schen Satzes mit Ecken, vergleiche etwa [Kön97], mit denen sich zum Beispiel auch der Fluß durch die Oberfläche eines Ikosaeders oder einer Eiswaffel direkt diskutieren



Ein expandierendes Gas, das durch die Ecken entweicht, als Beispiel dafür, daß die Kompaktheitsbedingung beim Satz von Stokes notwendig ist.

ließen. Der hier besprochene Fall scheint mir jedoch für die meisten Anwendungen ausreichend und hat den Vorteil, daß sowohl seine Formulierung als auch sein Beweis nur wenig begrifflichen Aufwand benötigen. Den Fall eines Ikosaeders kann man daraus im übrigen auch noch erhalten, etwa indem man besagten Ikosaeder in Dreieckspyramiden mit einer Ecke im Ursprung zerlegt.

6.8.19. Ich formuliere nun einige Spezialfälle des allgemeinen Stokes'schen Satzes 6.8.2 in klassischer Notation, um die Lektüre älterer Texte zu erleichtern. Ich hoffe jedoch, daß sich der für explizite Rechnungen und theoretische Überlegungen gleichermaßen bestens geeignete Formalismus der Differentialformen mit der Zeit auch bei den Anwendern durchsetzen wird.

Beispiel 6.8.20 (Wegintegral über ein Gradientenfeld). Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine eindimensionale Randfaltung und $\varphi : [a, b] \xrightarrow{\sim} M$ eine bijektive Integrationskarte. So besitzt M genau eine Orientierung, für die φ eine orientierte Karte ist. Gegeben eine Nullform alias Funktion f auf einer halboffenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, die M umfaßt, haben wir $df = \langle \text{grad } f, \cdot \rangle = (\text{grad } f) \cdot$ und der Satz von Stokes erhält nach 6.7.10 und 6.4.9 die Gestalt

$$\int_a^b \langle \text{grad } f, d\varphi \rangle = \oint_{\varphi} df = \int_{\vec{M}} df = \int_{\partial \vec{M}} f = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

In dieser Situation erhalten wir also spezielle Fälle unserer Erkenntnis $\oint_{\varphi} df = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$, die wir bereits allgemeiner für beliebiges stetig differenzierbares $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gezeigt hatten. Wir erhalten die dortige Erkenntnis im allgemeinen, wenn wir mit der Randfaltung $\vec{I} := [a, b]$ mit ihrer offensichtlichen Orientierung und mit der Funktion $f \circ \varphi$ arbeiten. Dann ergibt sich

$$\oint_{\varphi} df = \oint_a^b \varphi^*(df) = \int_{\vec{I}} \varphi^*(df) = \int_{\vec{I}} d(f \circ \varphi) = \int_{\partial \vec{I}} f \circ \varphi = (f \circ \varphi)|_a^b$$

Beispiel 6.8.21 (Schwerpunkt und Auftrieb homogener Körper). Ein homogener, als da heißt überall gleich dichter schwerer Körper K wird an einem Seil ins Wasser gelassen. Wir wollen uns überlegen, daß auch im Wasser der Schwerpunkt unseres Körpers in der Vertikalen unter dem Aufhängepunkt bleibt. Für inhomogene Körper gilt das im allgemeinen natürlich nicht! Wir denken uns unseren Körper als kompakte glatt berandete Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Schwerpunkt auf der z -Achse, also $\int_K x = \int_K y = 0$. Die Wasseroberfläche möge die Ebene $z = 0$ sein. Der Wasserdruck steigt linear mit der Tiefe, auf ein Oberflächenelement der Fläche $\sigma\langle p \rangle$ um $p \in \partial K$ wirkt also die Kraft $z(p)N_p\sigma\langle p \rangle$ mit N_p dem orientierten Normalenvektor bei p . Befindet sich der Aufhängepunkt etwa in der Höhe $h < 0$, so wird das Drehmoment um diesen Aufhängepunkt das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial K} z(p)(N_p \times (p + h e_3))\sigma\langle p \rangle$$

Die Komponenten dieses Vektors bei $p = (x, y, z)$ mit $N_p = (N_1, N_2, N_3)$ sind $z(N_2(z+h) - N_3y)$, $z(N_3x - N_1(z+h))$ und $z(N_1y - N_2x)$ und können auch dargestellt werden als die Skalarprodukte von N_p mit den Vektorfeldern $v_1(x, y, z) = (0, z^2 + hz, -zy)$, $v_2(x, y, z) = (-z^2 - hz, 0, zx)$ und $v_3(x, y, z) = (zy, -zx, 0)$, so daß es gilt $\int_{\partial K} (N \cdot v_i) \sigma = 0$ zu zeigen. Mit dem Satz von Gauß können wir diese Integrale verwandeln in die Integrale $\int_K \operatorname{div} v_i$ und wegen $\operatorname{div} v_1 = -y$, $\operatorname{div} v_2 = x$ und $\operatorname{div} v_3 = 0$ verschwinden sie in der Tat alle drei.

Beispiel 6.8.22 (Klassischer Satz von Stokes). Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierte berandete Fläche oder präziser C^2 -Eckfältigkeit der Dimension 2. Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$, die M umfaßt, und bezeichne $\eta = \langle F, \cdot \rangle$ die zugehörige 1-Form. So finden wir $d\eta = \omega_R$ in der Notation von 6.4.14 für $R : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dasjenige Vektorfeld $\operatorname{rot} F$ auf U , das definiert wird durch die Vorschrift

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Dies Vektorfeld ist die Rotation unseres Vektorfelds F , wie wir sie in 5.7.13 eingeführt haben. Unser allgemeiner Satz von Stokes 6.8.2 spezialisiert in dieser Situation zum **klassischen Satz von Stokes**

$$\int_M N \cdot (\operatorname{rot} F) \sigma = \int_{\vec{M}} d\eta = \int_{\partial \vec{M}} \eta = \int_a^b F \cdot d\varphi$$

Hier bedeutet $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ wieder das durch die Orientierung von M festgelegte Normalenfeld 6.4.13 und die letzte Gleichheit gilt für $\varphi : [a, b] \rightarrow \partial M$ eine surjektive orientierte Integrationskarte ihres Randes. Allgemeiner könnte eine surjektive orientierte Integrationskarte des Randes als Definitionsbereich auch eine endliche disjunkte Vereinigung von kompakten Intervallen haben, dann erhalten wir rechts die Summe über die entsprechenden Wegintegrale. In Worten ist also das Wegintegral eines Vektorfeldes über den Rand einer Fläche gleich dem Fluß der Rotation des Vektorfeldes durch besagte Fläche.

6.8.23. Bei Anwendern, die hauptsächlich im \mathbb{R}^3 arbeiten, ist eine andere symbolische Schreibweise für grad , rot und div sehr beliebt: Sie betrachten den sogenannten **Nabla-Operator** ∇ , den man sich denkt als den „Vektor von Symbolen“ $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, und schreiben

$\nabla f = \operatorname{grad} f$, zu verstehen als symbolisches Produkt des Nabla-Vektors mit einer skalaren Funktion;

$\nabla \cdot F = \operatorname{div} f$, zu verstehen als symbolisches Skalarprodukt des Nabla-Vektors mit einer vektorwertigen Funktion; das Skalarprodukt wird von diesen Anwendern meist $v \cdot w$ notiert statt wie bei uns $\langle v, w \rangle$;

$\nabla \times F = \text{rot } F$, zu verstehen als symbolisches Vektorprodukt des Nabla-Vektors mit einer vektorwertigen Funktion, wo eben das Vektorprodukt $v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$ aus der Geometrie des Raums [LA2] 1.6.1 zugrundegelegt wird.

In dieser Notation wird dann unsere Formel $dd\omega = 0$ für ω eine Funktion beziehungsweise eine 1-Form auf dem \mathbb{R}^3 verstanden als formal-symbolische Konsequenz der Formeln $v \times v = 0$ beziehungsweise $v \cdot (v \times w) = 0$ aus der Geometrie des Raums.

Beispiel 6.8.24 (Green'sche Formel). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte C^2 -eckig berandete Teilmenge und sei $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine surjektive orientierte Integrationskarte ihres Randes mit Q einer Vereinigung der paarweise disjunkten Intervalle $[a_i, b_i]$ für $1 \leq i \leq n$. Anschaulich sind die $\varphi : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ Stücke eines „im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand umlaufenden geschlossenen Integrationswegs“. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, v_2)$ auf einer offenen Umgebung von G betrachten wir die 1-Form $\langle v, \cdot \rangle = \eta = v_1 dx_1 + v_2 dx_2$. Sie hat das Differential $d\eta = (\text{rot } v) dx_1 \wedge dx_2$ für

$$\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

die in 5.7.13 erklärte skalare Rotation eines Vektorfelds in der Ebene. Der Satz von Stokes mit Ecken 6.8.17 spezialisiert dann zur **Green'schen Formel**

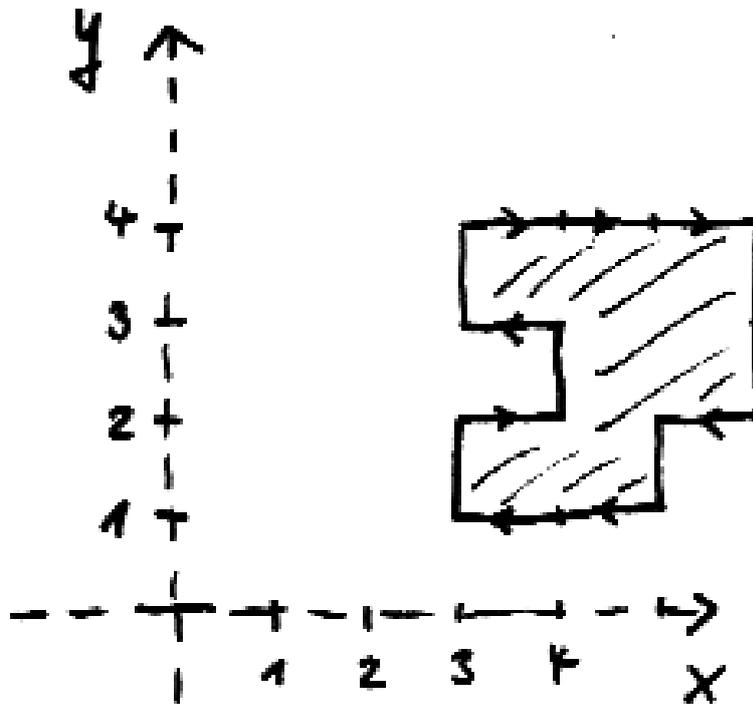
$$\int_G \text{rot } v = \int_{\vec{G}} d\eta = \int_{\partial \vec{G}} \eta = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} v \cdot d\varphi$$

Diese Formel konnten Sie für G ein Rechteck bereits in 5.7.22 zur Übung prüfen.

Beispiel 6.8.25 (Fläche eines ebenen Gebiets). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ wie in 6.8.24 eine kompakte C^2 -eckig berandete Teilmenge und sei $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine surjektive orientierte Integrationskarte ihres Randes mit Q der Vereinigung der disjunkten Intervalle $[a_i, b_i]$ für $1 \leq i \leq n$ und mit den Komponenten $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Betrachten wir die 2-Form $\omega = x dy$ mit Differential $d\omega = dx \wedge dy$ und $\varphi^* \omega = \varphi_1(t) \varphi_2'(t) dt$, so spezialisiert der allgemeine Satz von Stokes 6.8.2 zu einer Formel für die Fläche des Gebietes G , genauer zu der Regel

$$\int_G 1 = \int_{\vec{G}} dx \wedge dy = \int_{\partial \vec{G}} x \wedge dy = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \varphi_1(t) \varphi_2'(t) dt$$

Für achsenparallele Rechtecke prüft man das auch leicht ganz explizit nach.



Die Formel 6.8.25 für die Fläche eines ebenen Gebiets gilt nun natürlich ebenso für „Gebiete mit Ecken“. Diese Formel kann etwa angewandt werden, um ein GPS-Gerät so zu programmieren, daß es einem die Fläche des Gebiets berechnet, das man bei einem Rundweg umrundet hat. Im Spezialfall eines Gebiets, das von einem den Kanten eines Rechenpapiers folgenden Weg im Uhrzeigersinn umrundet wird, ergibt sich, wenn wir Stokes auf die Form ydx anwenden, die Fläche als die Höhe des Schwerpunkts der Menge der horizontalen Kanten, wenn wir jede Kante nach rechts mit ihrer Höhe gewichten und jede Kante nach links mit dem Negativen ihrer Höhe. Für die Fläche des obigen Gebiets ergibt sich so

$$3 \times 4 + 2 - 2 \times 1 - 2 - 3 = 7$$

6.8.26. Ich selber finde die alternative Interpretation dieser Formel mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes besonders anschaulich: Quillt in einem Moor überall gleichviel Wasser hoch, so können wir seine Fläche bestimmen, indem wir messen, wieviel Wasser in einem Graben um unser Moor abläuft. Wie genau das Wasser auf unserem Moor zum Randgraben läuft, ist dabei völlig unerheblich. Statt $\omega = xdy$ könnten wir also ein beliebiges ω mit $d\omega = dx \wedge dy$ nehmen und so weitere Formeln für die Fläche eines ebenen Gebiets erhalten.

6.8.27 (**Alternativer Zugang zur Homotopieinvarianz bei Wegintegralen**). Wir können nun auch einen besonders kurzen Beweis für die Homotopieinvarianz von Wegintegralen in geschlossenen Kovektorfeldern 5.7.7 geben für den Fall, daß wir zwei stetig differenzierbare Wege $\gamma, \psi : [0, 1] \rightarrow A$ betrachten und daß es dazwischen sogar eine zweimal stetig differenzierbare Homotopie $h : [0, 1]^2 \rightarrow A$ gibt. Wir nehmen genauer A offen in einem reellen Raum X an und $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetig differenzierbares Kovektorfeld. Die Behauptung in 5.7.7 besagt ja gerade, daß aus $d\omega = 0$ folgt $\int_\gamma \omega = \int_\psi \omega$. Aber nun finden wir

$$\int_\gamma \omega - \int_\psi \omega = \int_{\partial([0,1]^2)} h^* \omega = \int_{[0,1]^2} d(h^* \omega) = \int_{[0,1]^2} h^*(d\omega) = 0$$

nach der Definition einer Homotopie, dem Satz von Stokes mit Ecken, der Verträglichkeit des Zurückholens von Formen mit dem äußeren Differential 6.6.7.4 und unserer Annahme $d\omega = 0$.

Übungen

Übung 6.8.28. Im Fall einer stetig differenzierbaren k -Form ω auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums X zeige man für $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k \in \vec{X}$ linear unabhängig die Formel

$$(d\omega)_x(\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{k+1}} \int_{F(x, t\vec{v}_0, \dots, t\vec{v}_k)} \omega$$

mit $F(x, \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k)$ der in geeigneter Weise orientierten Oberfläche eines Parallelepipedes mit Ecke x und Kantenvektoren \vec{v}_i , über die wir dann unsere k -Form integrieren. Hinweis: Satz von Stokes mit Ecken 6.8.17.

Übung 6.8.29. Man prüfe die Formel für die Fläche eines ebenen Gebiets im Fall eines achsenparallelen Rechtecks.

Übung 6.8.30. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Man zeige: Ist $M \subset X$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, so ist auch das in 6.3.1 erklärte Tangentialbündel $TM \subset X \times \vec{X}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit.

6.9 Der Hodge-Operator mit Anwendungen*

6.9.1. Die folgenden Argumente bauen nicht auf dem Stokes'schen Integralsatz auf. Es geht vielmehr um Anwendungen des Kalküls der Differentialformen aus 6.6.

6.9.2. Gegeben ein orientierter n -dimensionaler reeller Vektorraum V mit einem Skalarprodukt oder allgemeiner einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform t kann man im eindimensionalen Raum $\text{Alt}^n(V)$ aller sogenannten **Volumenformen auf V** ein von Null verschiedenes Element $\omega = \omega_t$, die **kanonische Volumenform**, auszeichnen durch die Bedingung, daß gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$$

für jede orientierte Orthonormalbasis im positiv definiten Fall bzw. jede orientierte Basis v_1, \dots, v_n mit $|t(v_i, v_j)| = \delta_{ij}$ im allgemeinen Fall. In der Tat erfüllt die Basiswechselmatrix A zwischen zwei derartigen Basen eine Gleichung der Gestalt $A^\top J A = J'$ mit $J = J' = I$ der Einheitsmatrix im Fall eines Skalarprodukts und $\det J = \det J' \neq 0$ im allgemeinen, so daß der Multiplikationssatz für Determinanten $\det A = \pm 1$ liefert, und die Orientiertheit beider Basen zeigt dann sogar $\det A = 1$. Damit aber folgt

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(w_1, \dots, w_n)$$

für jede n -Form ω und je zwei Basen wie oben, etwa indem wir 6.1.15 auf den Automorphismus von V mit $v_i \mapsto w_i$ anwenden. Ändern wir hier unsere Bilinearform und ersetzen t durch λt für $\lambda \in \mathbb{R}^\times$, so erhalten wir für die neue Volumenform

$$\omega_{\lambda t} = |\lambda|^{n/2} \omega_t$$

Definition 6.9.3. Gegeben ein orientierter n -dimensionaler reeller Vektorraum V mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform t erklärt man für jede Zerlegung $n = p + q$ den **Hodge-*-Operator**

$$* = *_t : \text{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q V$$

durch die Formel

$$\alpha \wedge \beta = t(*\alpha, \beta) \omega_t$$

Hier ist t rechts zu verstehen als die Erweiterung unserer Bilinearform auf q -Formen durch $t(f_1 \wedge \dots \wedge f_q, g_1 \wedge \dots \wedge g_q) := \det(t(f_i, g_j))$. Letztere Bilinearform auf V^* hinwiederum ist dadurch erklärt, daß sie unter $\text{can}_t : V \xrightarrow{\sim} V^*$ unserem ursprünglichen t entsprechen soll. Das ω_t schließlich meint unsere **Volumenform** aus 6.9.2. Etwas ausführlicher gesagt konstruiert man unseren Hodge-*-Operator

wie folgt: Man geht aus von der durch das Dachprodukt gegebenen nichtausgareiteten Paarung

$$\text{Alt}^p V \times \text{Alt}^q V \rightarrow \text{Alt}^n V$$

und verknüpft sie mit dem Isomorphismus $\text{Alt}^n V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, der die kanonische Volumenform ω_t aus 6.9.2 auf die Eins wirft. Die so erhaltene Paarung kann als ein Isomorphismus

$$\text{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} (\text{Alt}^q V)^*$$

interpretiert werden, und der kanonische Isomorphismus $(\text{Alt}^q V)^* \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q(V^*)$ aus [LA2] 7.4.6 zusammen mit dem von $\text{can}_t : V \xrightarrow{\sim} V^*$ induzierten Isomorphismus $\text{Alt}^q(V^*) \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q(V)$ liefert dann in der Verknüpfung schließlich unseren Hodge-Operator.

6.9.4 (Natürlichkeit des Hodge*-Operators). Gegeben ein orientierungserhaltender Isomorphismus $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ von endlichdimensionalen orientierten reellen Vektorräumen und nichtausgareitete symmetrische Bilinearformen t auf V und s auf W und eine Zerlegung $n = p + q$ der Dimension n unserer beiden Vektorräume kommutiert offensichtlich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Alt}^p W & \xrightarrow{*s} & \text{Alt}^q W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Alt}^p V & \xrightarrow{*t} & \text{Alt}^q V \end{array}$$

6.9.5 (Diskussion der Konventionen). Die in der obigen Definition des Hodge*-Operators 6.9.3 versteckten und in gewisser Weise zufälligen Wahlen von Vorzeichen wurden so getroffen, daß im Fall eines Skalarproduktes t für alle α gilt

$$\alpha \wedge * \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \omega$$

Wir werden das gleich explizit sehen. Es wäre auch nicht besser oder schlechter, die Vorzeichen so zu wählen, daß das „umgekehrte Dach-Produkt“ in diesem Sinne „positiv definit“ wäre, aber auf eine Konvention muß man sich an dieser Stelle einmal einigen.

6.9.6 (Explizite Formeln für den Hodge*-Operator). Seien zunächst t ein Skalarprodukt, v_1, \dots, v_n eine orientierte Orthonormalbasis von V und f_1, \dots, f_n die duale Basis von V^* . Wir folgern $\omega = f_1 \wedge \dots \wedge f_n$. Gegeben $I \subset \{1, \dots, n\}$ bezeichne ε_I das Vorzeichen der Permutation, die alle Elemente von I an den Anfang schiebt, ihre Reihenfolge untereinander aber ebenso wie die Reihenfolge der Elemente ihres Komplements unverändert läßt. Gegeben I, J mit $|I| = p$ und $|J| = q$ haben wir dann

$$f_I \wedge f_J = \begin{cases} \varepsilon_I \omega & I \sqcup J = \{1, \dots, n\}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unsere Abbildung $\text{Alt}^p V \rightarrow (\text{Alt}^q V)^*$ macht also die Basisvektoren f_I für \bar{I} das Komplement von I bis auf Vorzeichen zu den Vektoren der zu $f_{\bar{I}}$ dualen Basis, genauer haben wir $f_I \mapsto \varepsilon_I f_{\bar{I}}^*$. Unter $(\text{Alt}^q V)^* \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q(V^*)$ entspricht dieser Vektor dann $\varepsilon_I v_{\bar{I}}$ und unter can_t wiederum $\varepsilon_I f_{\bar{I}}$, woraus wir folgern

$$*_t f_I = \varepsilon_I f_{\bar{I}} \quad \text{für } \bar{I} = \{1, \dots, n\} \setminus I$$

Insbesondere gilt also im Fall eines Skalarprodukts und der dualen Basis zu einer Orthonormalbasis die Formel $f_I \wedge *_t f_I = \omega$, die in diesem Fall auch sofort $*(\alpha) = (-1)^{pq} \alpha$ für alle $\alpha \in \text{Alt}^p(V)$ liefert. Ist allgemeiner im symmetrischen nicht ausgearteten Fall v_1, \dots, v_n orientiert und orthogonal, aber haben wir etwa $t(v_i, v_i) = \eta_i = \pm 1$, so müssen wir nur ganz am Schluß noch ein Vorzeichen ergänzen und erhalten mit der Notation $\eta_J = \prod_{j \in J} \eta_j$ die Formel

$$*_t f_I = \varepsilon_I \eta_{\bar{I}} f_{\bar{I}}$$

Sei nun noch allgemeiner t symmetrisch nicht ausgeartet, v_1, \dots, v_n eine orientierte Orthogonalbasis von V mit $t(v_i, v_i) = \eta_i c_i^2$ mit $c_i > 0$ und f_1, \dots, f_n die duale Basis von V^* . Gegeben I mit $|I| = p$ erhalten wir dann mit der Notation $c_J = \prod_{j \in J} c_j$ durch Reskalierung die Formel

$$*_t f_I = \frac{\varepsilon_I \eta_{\bar{I}} c_{\bar{I}}}{c_I} f_{\bar{I}}$$

Definition 6.9.7. Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums X und eine Riemann'sche Metrik t auf U und ein differenzierbares Vektorfeld $v : U \rightarrow \vec{X}$ definieren wir die **Divergenz** unseres Vektorfelds als die Funktion

$$\text{div}_t(v) = (*_t \circ d \circ *_t \circ \text{can}_t)(v)$$

Obwohl der $*$ -Operator von einer zu wählenden Orientierung abhängt, ist die Divergenz wegen des doppelten Auftretens unseres $*$ -Operators davon unabhängig.

Beispiel 6.9.8. Sei $X = \mathbb{R}^3$ mit der Standardorientierung und dem Standardskalarprodukt $t = s$ versehen. Gegeben ein differenzierbares Vektorfeld der Gestalt $v = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z$ mit differenzierbaren Funktionen $a, b, c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ finden wir die übliche Formel $\text{div } v = a_x + b_y + c_z$, indem wir rechnen

$$\begin{aligned} v &= a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z \\ \text{can}_s(v) &= adx + bdy + cdz \\ *_s(\text{can}_s(v)) &= ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dy \\ d(*_s(\text{can}_s(v))) &= a_x dx \wedge dy \wedge dz - b_y dy \wedge dx \wedge dz + c_z dz \wedge dx \wedge dy \\ *_s(d(*_s(\text{can}_s(v)))) &= a_x + b_y + c_z \end{aligned}$$

Hier wäre es zwar in der Tat sehr viel einfacher gewesen, schlicht diese letzte Formel hinzuschreiben. Unsere neue Interpretation verträgt sich jedoch besser mit der Verwandtschaft, insbesondere da die äußere Ableitung d sich so gut mit Verwandtschaft verträgt, und ermöglicht so eine übersichtliche Darstellung in anderen orthogonalen Koordinaten. Um etwa die Divergenz in Polarkoordinaten zu bestimmen, erinnern wir uns daran, daß nach 5.2.9 unter der Polarkoordinatenabbildung P die Standardmetrik $s = dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$ auf der xy -Ebene verwandt ist zum 2-Tensor $g = dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2}$ und rechnen

$$\begin{aligned} v &= a\partial_r + b\partial_\vartheta \\ \text{can}_g(v) &= adr + br^2 d\vartheta \\ *_g(\text{can}_g(v)) &= ar d\vartheta - br dr \\ d(*_g(\text{can}_g(v))) &= (a_r r + a) dr \wedge d\vartheta + b_\vartheta r dr \wedge d\vartheta \\ *_g(d(*_g(\text{can}_g(v)))) &= a_r + b_\vartheta + r^{-1}a \end{aligned}$$

Definition 6.9.9. Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

und nennen Δ den **Laplaceoperator**.

6.9.10 (**Anschauung für den Laplaceoperator**). Der Wert $(\Delta f)(x)$ der durch Anwenden des Laplaceoperators Δ auf eine Funktion f entstehenden Funktion an einer Stelle x mißt die Abweichung des Funktionswerts bei x vom Durchschnitt der Funktionswerte in einer kleinen Umgebung von x . In einer Veränderlichen gilt zum Beispiel für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f''(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)}{2} - f(x) \right)$$

wie der Leser mithilfe der Taylorentwicklung leicht nachprüfen kann und vielleicht auch als Übung [AN1] 5.2.8 bereits geprüft hat. In mehreren Veränderlichen gilt in derselben Weise für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Notation e_i für die Vektoren der Standardbasis

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^n}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2^n} \left(\sum_{i=1}^n f(x + \varepsilon e_i) + f(x - \varepsilon e_i) \right) - f(x) \right)$$

6.9.11 (**Laplace-Operator in anderen Koordinaten**). Um den Laplaceoperator Δ in anderen Koordinaten auszudrücken, kann man von der Darstellung

$$\Delta f = *_s d *_s df$$

ausgehen, mit s der üblichen Riemann'schen Metrik auf \mathbb{R}^n und $*_s$ dem zu dieser Metrik und der Standard-Orientierung gehörenden Hodge-* -Operator. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und eine offene Teilmenge $V \subseteq X$ und eine differenzierbare Abbildung $\phi : V \rightarrow U$ mit bijektivem Differential an jeder Stelle und eine zur Standard-Metrik ϕ -verwandte Riemann'sche Metrik t auf V haben wir dann die Verwandtschaft $\phi : *_t d *_t d(f \circ \phi) \rightsquigarrow *_s d *_s df = \Delta f$. Ist speziell etwa ϕ die Polarkoordinaten- oder die Kugelkoordinatenabbildung, so läßt sich das auch sehr konkret und explizit berechnen.

Beispiel 6.9.12 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten). Wir berechnen den Laplace-Operator einer Funktion f in Polarkoordinaten und finden ähnlich wie in 6.9.8 der Reihe nach

$$\begin{aligned} df &= f_r dr + f_\vartheta d\vartheta \\ *_g(df) &= f_r r d\vartheta - r^{-1} f_\vartheta dr \\ d(*_g(df)) &= (f_{rr} r + f_r + r^{-1} f_{\vartheta\vartheta}) dr \wedge d\vartheta \\ *_g(d(*_g(df))) &= f_{rr} + r^{-1} f_r + r^{-2} f_{\vartheta\vartheta} \end{aligned}$$

Übungen

Weiterführende Übung 6.9.13 (Anschauliche Bedeutung der Divergenz). Man zeige, daß die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfelds auf \mathbb{R}^n genau die „lokale Volumenänderung unter dem Fluß 7.5.1 des besagten Vektorfelds“ beschreibt, daß genauer für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger f gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int f \circ X^t = - \int f \operatorname{div} X$$

Hier ist zu beachten, daß auf jedem Kompaktum der Fluß für eine positive Zeitspanne existiert. Hinweis: Man schränke sich auf den Fall von glattem f ein, ziehe die zeitliche Ableitung unter das Integral, und beachte, daß das Integral über ganz \mathbb{R}^n jeder partiellen Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion mit kompaktem Träger verschwindet.

Übung 6.9.14. Für r -Formen α auf einem orientierten n -dimensionalen Vektorraum mit nichtausgearteter symmetrischer Bilinearform t und $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ prüfe man die Formel $*_{\lambda t} \alpha = (\lambda^r / |\lambda|^{n/2}) *_t \alpha$. Insbesondere gilt für 2-Formen α auf einem vierdimensionalen Raum und $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ stets $*_{\lambda t} \alpha = *_t \alpha$.

Übung 6.9.15. Wir betrachten wieder Kugelkoordinaten wie in 5.2.11. Man zeige, daß für das zum Vektorfeld $a\partial_r + b\partial_\vartheta + c\partial_\varphi$ verwandte Feld auf dem xyz -Raum die Divergenz verwandt ist zur Funktion $a_r + b_\vartheta + c_\varphi + 2r^{-1}a + b \cot \vartheta$.

Übung 6.9.16 (Mehr Anschauung für den Laplaceoperator). Man zeige, daß der Laplaceoperator invariant ist unter Drehungen. Ist genauer $A \in O(n)$ eine

orthogonale Matrix und bezeichnet $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die zugehörige lineare Abbildung, so zeige man für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$. Man folgere die Formel

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^n}{\varepsilon^2} \left(\frac{\int_{\|y-x\|=\varepsilon} f(y) \sigma\langle y \rangle}{\int_{\|y-x\|=\varepsilon} \sigma\langle y \rangle} - f(x) \right)$$

auf deren rechter Seite nach dem Faktor $2^n/\varepsilon^2$ bis auf ein Vorzeichen die Differenz zwischen dem Funktionswert $f(x)$ und dem Durchschnitt der Funktionswerte auf einer Kugelschale mit Zentrum in x und Radius ε steht. Hinweis: Man middle **6.9.10**. Die Taylorentwicklung oben liefert in einer Veränderlichen sogar präziser die Darstellung

$$\frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)}{2} - f(x) \right) = (f''(\xi^+) + f''(\xi^-))/2$$

mit $\xi^+ \in (x, x+\varepsilon)$ und $\xi^- \in (x-\varepsilon, x)$.

Ergänzende Übung 6.9.17 (Drehinvariante Differentialoperatoren). Die polynomialen Funktionen $D \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ auf dem \mathbb{R}^n , die invariant sind unter allen Drehungen $A \in \text{SO}(n)$, sind genau alle Polynome im quadrierten Abstand vom Nullpunkt, in Formeln

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{\text{SO}(n)} = \mathbb{C}[(X_1^2 + \dots + X_n^2)]$$

Die Differentialoperatoren $D \in \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ mit konstanten Koeffizienten auf dem \mathbb{R}^n , die invariant sind unter allen Drehungen $A \in \text{SO}(n)$, sind genau alle Polynome im Laplace-Operator, in Formeln

$$\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]^{\text{SO}(n)} = \mathbb{C}[\Delta]$$

Übung 6.9.18 (Laplace-Operator in Kugelkoordinaten). Man zeige, daß der Laplace-Operator einer Funktion f in den Kugelkoordinaten aus **5.2.11** gegeben wird durch die Formel

$$\Delta f = f_{rr} + 2r^{-1}f_r + r^{-2}f_{\vartheta\vartheta} + r^{-2}f_{\vartheta} \cot \vartheta + (r \sin \vartheta)^{-2}f_{\varphi\varphi}$$

Hinweis: Statt das direkt zu rechnen, kann man auch von **5.2.15** und **6.9.15** ausgehen.

Ergänzende Übung 6.9.19 (Die Maxwell'schen Gleichungen). Bezeichnen wir die Koordinaten des \mathbb{R}^4 mit x, y, z, t und betrachten auf dem \mathbb{R}^4 oder allgemeiner einer halboffenen Teilmenge desselben eine allgemeine glatte 2-Form

$$F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy$$

So ist die Gleichung $dF = 0$ äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

für rot der Rotation wie in 5.7.13 und $\operatorname{div} B$ der Divergenz alias der Summe der partiellen Ableitungen nach x, y und z wie in 6.8.11. Leser mit physikalischer Vorbildung erkennen die beiden ersten Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum. Betrachten wir zusätzlich die sogenannte „Lorentzmetrik“

$$l := dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2} + dz^{\otimes 2} - c^2 dt^{\otimes 2}$$

mit einer reellen Konstante $c \neq 0$, so ist die Gleichung $d(*_l F) = 0$ äquivalent zu den beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum

$$\operatorname{div} E = 0 \quad \text{und} \quad c^2 \operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t}$$

Der Formalismus der Verwandtschaft von Differentialformen sagt uns dann, in welcher Weise ein elektromagnetisches Feld F in andere Koordinaten umgeschrieben werden muß, und daß die Maxwell'schen Gleichungen nicht von der Wahl der Koordinaten abhängen.

7 Gewöhnliche Differentialgleichungen

7.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

7.1.1. Ganz allgemein versteht man unter einer **gewöhnlichen Differentialgleichung** eine Gleichung, in der die Ableitungen einer zu bestimmenden Funktion *einer* Veränderlichen zueinander und mit der Veränderlichen selbst in Beziehung gesetzt werden. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$(f''(t))^2 f'(t) + t f(t) = t^2$$

für eine zu bestimmende zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Im Gegensatz dazu stehen zumindest terminologisch die **partiellen Differentialgleichungen**, bei denen die partiellen Ableitungen einer Funktion *mehrerer* Veränderlichen auftreten. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

für eine zweimal partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Auf Englisch benutzt man die Abkürzungen **ODE** für **ordinary differential equation** und **PDE** für **partial differential equation**. Wir besprechen in diesem Abschnitt nur gewöhnliche Differentialgleichungen. Rein formal ist dieser Abschnitt unabhängig von der Behandlung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in [AN1] 9.1.4 folgende. Ich denke jedoch, daß eine gewisse Vertrautheit mit diesen einfachsten und wichtigsten Spezialfällen es sehr erleichtern kann, die im folgenden zu entwickelnde allgemeine Theorie zu verstehen.

7.1.2. Die Ordnung der höchsten in einer gewöhnlichen Differentialgleichung auftretenden Ableitung heißt die **Ordnung** unserer Differentialgleichung. Von einer **expliziten** Gleichung spricht man, wenn in unserer Gleichung die Ableitung höchster Ordnung „explizit durch die tieferen Ableitungen ausgedrückt wird“. Andernfalls spricht man von einer **impliziten** Gleichung. Bei unserem obigen Beispiel handelt es sich also um eine implizite Gleichung. Wir werden uns im folgenden jedoch nur mit expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen. Eine derartige explizite Gleichung der Ordnung n hat, wenn wir von der Spezifikation allgemeinstmöglicher Definitionsbereiche einmal absehen, die Gestalt

$$f^{(n)}(t) = C(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t))$$

mit einer Abbildung $C : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht sind alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die n -mal differenzierbar sind und eben diese Gleichung erfüllen. Etwas allgemeiner betrachten wir zugleich auch **Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen**, bei denen vektorwertige Funktionen $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$

gesucht werden derart, daß eine Gleichung der obigen Gestalt gilt, die nun aber eine vektorwertige Gleichung meint mit einer fest vorgegebenen vektorwertigen Abbildung $C : \mathbb{R}^{kn+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$, die auf $(n + 1)$ -Tupeln bestehend aus einer reellen Zahl und n Vektoren definiert ist.

7.1.3 (Reduktion auf Systeme erster Ordnung). Die Betrachtung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erlaubt uns zumindest für Fragen des allgemeinen Lösungsverhaltens die Beschränkung auf den Fall erster Ordnung. Um zu zeigen, wie diese Reduktion funktioniert, betrachten wir beispielhaft den Fall einer Gleichung dritter Ordnung

$$f'''(t) = C(t, f(t), f'(t), f''(t))$$

Jede Lösung f liefert sicher eine Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mittels der Vorschrift $\phi(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$, und natürlich gilt dann

$$\begin{aligned}\phi_1'(t) &= \phi_2(t) \\ \phi_2'(t) &= \phi_3(t) \\ \phi_3'(t) &= C(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))\end{aligned}$$

Erklären wir nun also eine neue Abbildung $B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch die Vorschrift $B(t, x, y, z) = (y, z, C(t, x, y, z))$, so ist unser ϕ eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\phi'(t) = B(t, \phi(t))$$

Umgekehrt zeigt man leicht, daß für jede Lösung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dieses Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung die erste Komponente $\phi_1(t) = f(t)$ eine Lösung unserer ursprünglichen Gleichung dritter Ordnung liefert. In derselben Weise kann auch im Allgemeinen die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung auf den Fall von Systemen erster Ordnung zurückgeführt werden. Anschaulich mag man sich dann B als ein zeitabhängiges Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^n denken, das jedem Ort $x \in \mathbb{R}^n$ zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ einen Vektor $B(t, x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. In dieser Anschauung beschreibt eine Lösung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Bewegung eines Teilchens, das zu jedem Zeitpunkt t die für seinen Ort zu diesem Zeitpunkt durch unser zeitabhängiges Vektorfeld B vorgegebene Geschwindigkeit hat.

7.1.4 (Reduktion auf den zeitunabhängigen Fall). Gegeben $B : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ löst eine differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ unsere Differentialgleichung

$$\phi'(t) = B(t, \phi(t))$$

genau dann, wenn die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $t \mapsto (t, \phi(t))$ die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = A(\gamma(t))$$

löst für $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben durch $A(t, x) := (1, B(t, x))$. In diesem Sinne können wir uns also stets auf den Fall zeitunabhängiger Felder zurückziehen. Allerdings erhält man für zeitabhängige Felder bei einer eigenständigen Betrachtung etwas schärfere Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen, weshalb dieser Fall insbesondere in einigen Ergänzungen weiter betrachtet werden wird. Zunächst konzentrieren wir uns nun jedoch auf den zeitunabhängigen Fall und besprechen seine geometrische Bedeutung in einer koordinatenfreien Sprache.

7.1.5. Unter einem **Vektorfeld** auf einer Teilmenge $U \subset X$ eines normierten reellen Raums X verstehen wir wie in 5.1.2 eine Abbildung A von U in den Richtungsraum \vec{X} von X , in Formeln

$$\begin{aligned} A : U &\rightarrow \vec{X} \\ p &\mapsto A_p \end{aligned}$$

Definition 7.1.6. Sei X ein normierter reeller Raum, $U \subset X$ eine Teilmenge und $A : U \rightarrow \vec{X}$ ein Vektorfeld. Ein **Flußweg** unseres Vektorfelds ist eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow U$ von einem mehrpunktigen reellen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach U mit der Eigenschaft, daß „zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ die Geschwindigkeit unseres Flußwegs zum Zeitpunkt t genau der durch das Vektorfeld vorgegebene Vektor an der Stelle $\gamma(t)$ ist“, in Formeln

$$\gamma'(t) = A(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Ist $p \in U$ gegeben, so verstehen wir unter einem **Flußweg mit Anfangswert p** oder kurz einem **Flußweg zu p** einen Flußweg (γ, I) mit $0 \in I$ und $\gamma(0) = p$.

7.1.7. Die Flußwege eines Vektorfelds bilden eine „durch Einschränkung“ partiell geordnete Menge. Deren maximale Elemente nennen wir **maximale Flußwege**. Ein maximaler Flußweg ist also ein Flußweg, der nicht zu einem auf einem echt größeren reellen Intervall definierten Flußweg erweitert werden kann. Das größte Element in der Menge aller Flußwege zu einem vorgegebenen Anfangswert nennen wir dahingegen, wenn es denn existiert, den **größten Flußweg** zu dem vorgegebenen Anfangswert. Das ist dann natürlich auch ein maximaler Flußweg unseres Vektorfelds und sogar der einzige maximale Flußweg zum vorgegebenen Anfangswert.

7.1.8 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere Flußwege meist **Integralkurven**. Das paßt aber schlecht zu unserer Terminologie, nach der Kurven gewisse Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume und allgemeiner eindimensionale Mannigfaltigkeiten bezeichnen und eine Bezeichnung als „Integralweg“ läßt zur Verwechslung mit „Integrationsweg“ ein.

Beispiel 7.1.9. Ist unser Vektorfeld konstant, so laufen seine Flußwege auf den Geraden mit diesem konstanten Vektor als Richtungsvektor und mit der durch diesen Vektor vorgegebenen konstanten Geschwindigkeit. Ist unser Vektorfeld auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum $X = V$ definiert durch eine lineare Abbildung, sagen wir durch die lineare Abbildung $A \in \text{End } V$, so haben wir bereits in [AN1] 9.1.4 gezeigt, daß seine maximalen Flußwege genau diejenigen Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow V$ sind, die gegeben werden durch die Formeln $\gamma(t) = \exp(tA)c$ mit $c \in V$.

7.1.10 (**Zeitverschiebung**). Gegeben ein Vektorfeld auf einer halboffenen Teilmenge eines normierten reellen Raums und ein Flußweg (γ, I) ist für alle $c \in \mathbb{R}$ auch die Abbildung $t \mapsto \gamma(t + c)$ ein Flußweg, die nun eben definiert ist auf dem verschobenen Intervall $I - c$. Das gilt im Fall zeitabhängiger Vektorfelder natürlich so nicht mehr.

7.1.11 (**Verwandtschaftsverträglichkeit von Flußwegen**). Entsprechen sich unter einem Diffeomorphismus zwei Vektorfelder, so entsprechen sich auch deren Flußwege. Allgemeiner haben offensichtlich im Sinne von 5.1.21 verwandte Vektorfelder auch verwandte Flußwege. Ist genauer unter einer stetig differenzierbaren Abbildung ϕ ein Vektorfeld A verwandt zu einem Vektorfeld B , so ist für jeden Flußweg γ von A auch $\phi \circ \gamma$ ein Flußweg von B . Ist insbesondere ein Vektorfeld A unter einer stetig differenzierbaren Abbildung ϕ verwandt zum Nullfeld, in Formeln $\phi : A \rightsquigarrow 0$, und ist γ einer seiner Flußwege, so ist $\phi \circ \gamma$ ein Flußweg des Nullfelds und mithin konstant, als da heißt, die Funktion ϕ ist konstant auf Flußwegen von A . Man nennt die Funktion ϕ dann auch ein **erstes Integral** unserer Differentialgleichung. In physikalischen Modellen liefern oft Energie, Impuls und Drehimpuls solche ersten Integrale.

Satz 7.1.12 (Picard-Lindelöf). 1. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines reellen Raums endlicher Dimension gibt es zu jedem Anfangswert einen größten Flußweg;

2. Dieser größte Flußweg hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist dieses Intervall nach oben beschränkt, so verläßt der fragliche Flußweg für positive Zeiten jedes Kompaktum aus unserer offenen Teilmenge irgendwann einmal endgültig.

7.1.13. Wir zeigen diesen Satz als 7.3.7 sogar unter noch etwas schwächeren Voraussetzungen. Der letzte Teil des Satzes besagt salopp formuliert, daß der Grund dafür, daß sich ein Flußweg nicht beliebig weit in Richtung positiver Zeiten fortsetzen läßt, nur darin liegen kann, daß er bereits in endlicher Zeit „aus dem Definitionsbereich des Vektorfeldes hinausläuft“. Entsprechendes gilt in Richtung negativer Zeiten, was man durch Betrachtung des mit (-1) multiplizierten Vektorfelds auch formal leicht folgern kann.

Beispiel 7.1.14 (Ein Fall mit nicht eindeutigen Flußwegen). Bei Vektorfeldern, die nicht stetig differenzierbar sind, kann es durchaus vorkommen, daß zu einem vorgegebenen Anfangswert kein größter Flußweg existiert, weil etwa mehrere maximale Flußwege mit ein und demselben Anfangswert existieren, die auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche nicht übereinstimmen. Betrachten wir zum Beispiel auf \mathbb{R}^2 das Vektorfeld A , für das sämtliche verschobenen Kubiken $\gamma_c(t) = (t + c, t^3)$ Flußwege sind. Wir haben $\dot{\gamma}_c(t) = (1, 3t^2)$ und damit $A(x, y) = (1, 3|y|^{2/3})$. Maximale Flußwege sind in diesem Fall nicht nur die verschobenen Kubiken γ_c , sondern auch alle Wege, die längs einer verschobenen Kubik auf die x -Achse hochsteigen und dann eine Weile auf der x -Achse entlanglaufen bevor sie auf einer anderen verschobenen Kubik weitersteigen. In diesem Fall existieren zwar maximale Flußwege zu jedem Punkt, von Eindeutigkeit kann aber keine Rede sein.

Beispiel 7.1.15 (Der Fall eindimensionaler Felder ohne Nullstellen). Gegeben ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf einer offenen Teilmenge eines eindimensionalen Raums gibt es zu jedem Anfangswert genau einen maximalen Flußweg. In diesem Fall brauchen wir also von unserem Vektorfeld nicht einmal stetige Differenzierbarkeit zu fordern. In der Tat sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und unser stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen zeige in Richtung der positiven x -Achse, als da heißt, es werde gegeben durch $a : U \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Flußwege sind auf mehrpunktigen Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktionen $\gamma : I \rightarrow U$ mit

$$\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

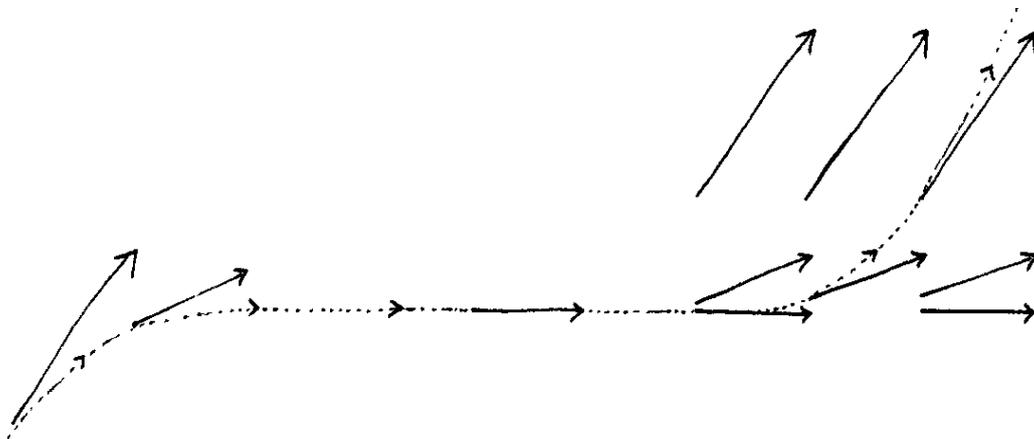
Aus dieser Gleichung folgt für alle $s, t \in I$ sofort

$$t - s = \int_s^t \frac{\dot{\gamma}(\tau) d\tau}{a(\gamma(\tau))} = \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{a(x)} = G(\gamma(t)) - G(\gamma(s))$$

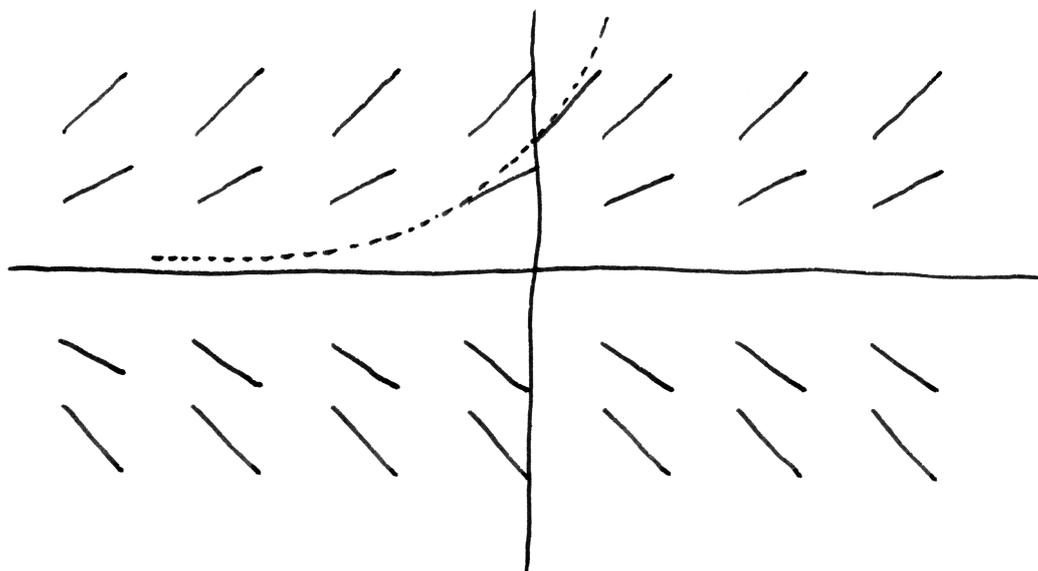
für $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $1/a$. Nun wächst G sicher streng monoton und hat folglich als Bild ein offenes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ und für unsere Flußwege folgt $\gamma(t) = G^{-1}(t + c)$ mit der Konstanten $c = G(\gamma(s)) - s$. In anderen Worten ist

$$G^{-1} : J \xrightarrow{\sim} U$$

bis auf „Zeitverschiebung“ der einzige maximale Flußweg. Zum Beispiel ist $a(x) = x$ ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf $U = \mathbb{R}_{>0}$ und $G(x) = \log x$ ist eine Stammfunktion von $1/x$ und jeder maximale Flußweg ist von der Gestalt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $\gamma(t) = \exp(t + c)$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.



Das ebene stetige aber nicht stetig differenzierbare Vektorfeld aus Beispiel 7.1.14 mit einem seiner Flußwege



Im Fall eindimensionaler Felder mag man sich die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung durch ihren im Bild gestrichelt eingezeichneten Graphen veranschaulichen und das Vektorfeld als eine Vorschrift, die diesem Graphen in jeder Höhe x eine Steigung $a(x)$ vorschreibt.

Beispiel 7.1.16 (Spezielle eindimensionale Felder mit Nullstellen). Gegeben ein stetiges Vektorfeld mit Nullstellen auf einer offenen Teilmenge eines eindimensionalen Raums liegen die Verhältnisse komplizierter als in 7.1.15. Wir suchen etwa für $\alpha \in \mathbb{R}$ Flußwege des Vektorfelds $a(x) = x^\alpha$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ alias auf einem mehrpunktigen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\dot{\gamma}(t) = (\gamma(t))^\alpha \quad \forall t \in I$$

Unsere allgemeine Theorie aus 7.1.15 sagt uns, daß das gerade die Umkehrfunktion zu Stammfunktionen von $x^{-\alpha}$ sind. Den Fall $\alpha = 1$ kennen wir zur Genüge, im Fall $\alpha \neq 1$ erhalten wir als Stammfunktion $G(x) = x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$. Im Fall $\alpha > 1$ induziert nun G eine Bijektion $G : \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{<0}$ und im Fall $\alpha < 1$ eine Bijektion $G : \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$, aber die Umkehrfunktion wird jedesmal durch dieselbe Formel gegeben und wir erhalten die Flußwege

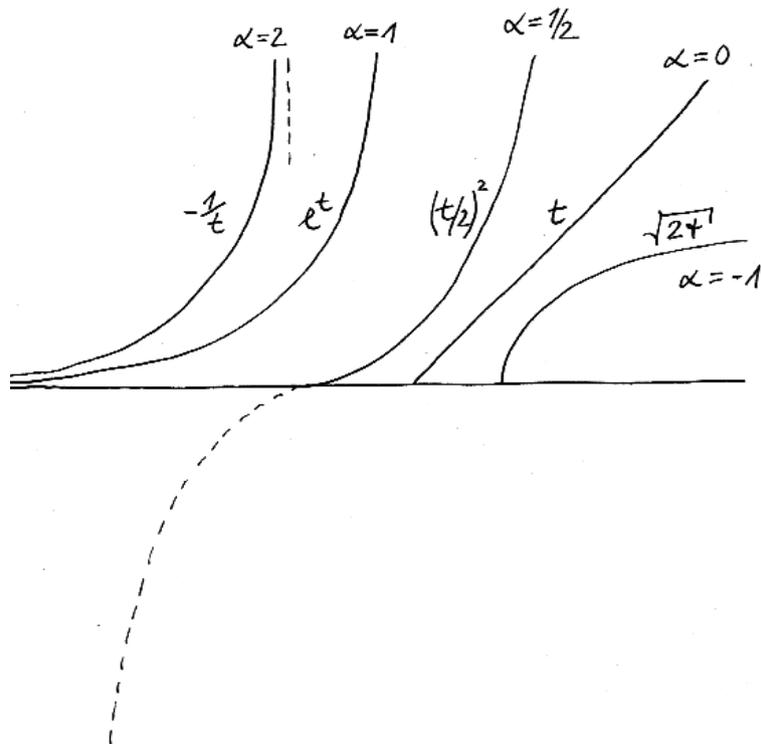
$$\gamma(t) = ((1-\alpha)t)^{(1-\alpha)^{-1}}$$

Im Fall $\alpha = 2$ etwa ergibt sich $\gamma(t) = -1/t$ und unser Flußweg „läuft in endlicher Zeit nach $+\infty$, braucht aber, wenn wir die Zeit rückwärts laufen lassen, unendlich lange bis zum Ursprung“. Dasselbe gilt in allen Fällen mit $\alpha > 1$. Im Fall $\alpha = 0$ dahingegen ergibt sich $\gamma(t) = t$ und unser Flußweg „läuft für alle positiven Zeiten, braucht aber, wenn wir die Zeit rückwärts laufen lassen, nur endlich viel Zeit bis zum Ursprung“. Dasselbe gilt in allen Fällen mit $\alpha < 1$. In den Fällen mit $0 \leq \alpha$ können wir unser Vektorfeld stetig auf \mathbb{R} fortsetzen durch die Vorschrift $a(x) = |x|^\alpha$ und für $0 < \alpha$ hat diese Fortsetzung eine Nullstelle bei Null. In den Fällen $0 < \alpha < 1$ gibt es nun auch Flußwege, die in endlicher Zeit aus dem Negativen nach Null laufen und dort eine Weile stehenbleiben, bevor sie ins Positive weiterlaufen. Erklären wir etwa auf \mathbb{R} ein stetiges Vektorfeld durch $a(x) = \sqrt[3]{x^2}$, so ist $\gamma(t) = t^3/27$ ein Flußweg, aber auch die Abbildung $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$\psi(t) = \begin{cases} t^3/27 & t \leq 0; \\ 0 & 0 \leq t \leq 1; \\ (t-1)^3/27 & 1 \leq t; \end{cases}$$

ist ein Flußweg. Im Rückblick ist unser Beispiel 7.1.14 im wesentlichen dasselbe, nur in trivialer Weise um eine Dimension erweitert, damit es besser bildlich dargestellt werden kann.

Beispiel 7.1.17 (Verhalten unter Längenänderungen). Ändern wir bei einem Vektorfeld ohne Nullstellen nur die Längen seiner Vektoren, durchaus auch in Abhängigkeit vom Ort, so bleiben die Flußwege offensichtlich bis auf Reparametrisierung dieselben. Ist also in Formeln X ein endlichdimensionaler reeller Raum,



Mögliche Lösungsfunktionen mit positiven Werten der Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = (\gamma(t))^\alpha$ für verschiedene Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$. Alle anderen Lösungsfunktionen mit positiven Werten erhält man durch horizontales Verschieben der entsprechenden Graphen. Im Fall $\alpha > 1$ „läuft unsere Lösung in endlicher Zeit nach Unendlich“, was die gestrichelt eingezeichnete vertikale Asymptote andeuten soll. Im Fall $1 > \alpha > 0$ kann man, wie gestrichelt angedeutet, die Lösung zu einer Lösung von $\dot{\gamma}(t) = |\gamma(t)|^\alpha$ ins Negative fortsetzen, aber eben auf vielerlei Weisen. Das war im Wesentlichen auch unser Gegenbeispiel 7.1.14.

$U \subseteq X$ offen, $A : U \rightarrow \vec{X}$ ein Vektorfeld ohne Nullstellen und $c : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstellen und ist $\gamma : I \rightarrow U$ ein Flußweg von A , so finden wir mit dem Ansatz $\psi(t) = \gamma(r(t))$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\psi}(t) = c(\psi(t))A(\psi(t))$$

In der Tat liefert diese Gleichung nämlich für die Reparametrisierung r die Gleichung

$$\dot{r}(t)\dot{\gamma}(r(t)) = c(\gamma(r(t)))A(\gamma(r(t)))$$

und damit $\dot{r}(t) = (c \circ \gamma)(r(t))$, und diese Gleichung haben wir bereits in 7.1.15 lösen gelernt.

7.1.18 (Felder mit separierten Variablen). Gegeben endlichdimensionale reelle Räume X, Z und offene Teilmengen $U \subseteq X, V \subseteq Z$ und Vektorfelder $A : U \rightarrow \vec{X}$ sowie $B : V \rightarrow \vec{Z}$ sind die Flußwege des Vektorfelds $(A \times B) : U \times V \rightarrow \vec{X} \times \vec{Z}$ genau die Abbildungen (γ, ψ) mit $\gamma : I \rightarrow U$ einem Flußweg von A und $\psi : I \rightarrow V$ einem Flußweg von B . In dieser Situation spricht man von einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen oder lateinisierend **separierten Variablen**. Man beachte die enge Beziehung zur „Verwandtschaftsverträglichkeit von Flußwegen“ 7.1.11. Die in 7.1.21 erläuterte Methode der „Separation der Variablen“ mag man auffassen als das Überführen einer Differentialgleichung in eine Gleichung mit separierten Variablen.

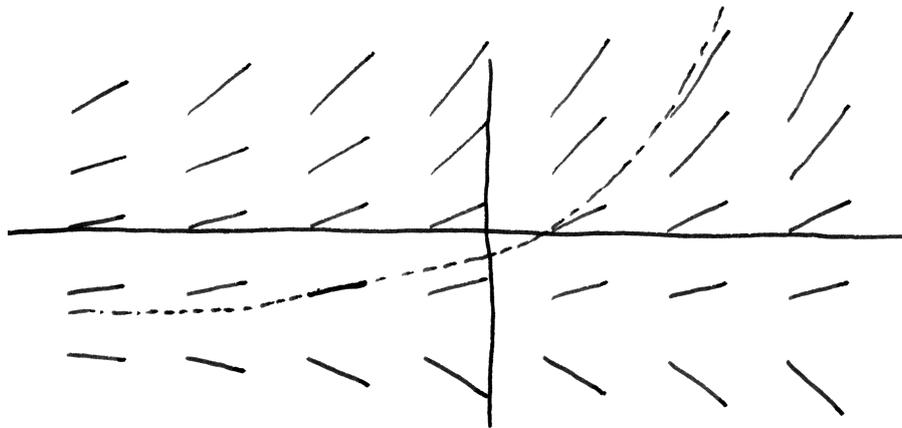
7.1.19 (Geometrische Interpretation im zeitabhängigen Fall). Allgemeiner können wir für einen normierten reellen Raum X eine Abbildung $A : \mathbb{R} \times X \rightarrow \vec{X}$ als ein **zeitabhängiges Vektorfeld** auf X auffassen und uns die Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = A(t, \gamma(t))$$

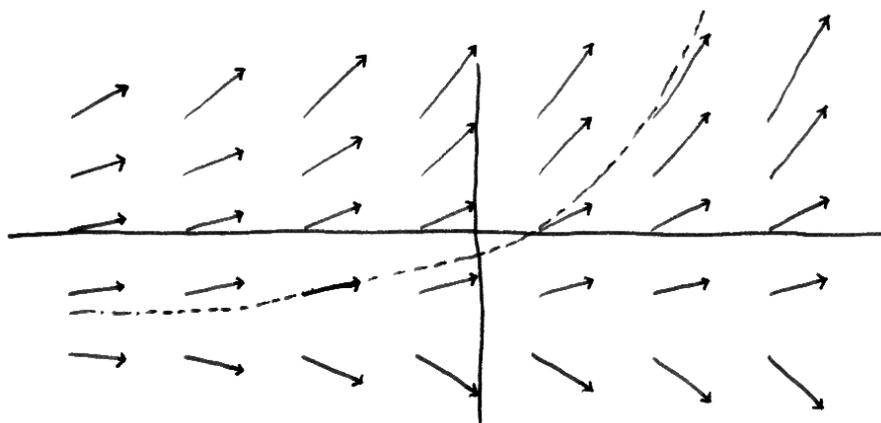
in dieser Weise veranschaulichen. Dasselbe gilt, wenn A nur auf einer Teilmenge $U \subset \mathbb{R} \times X$ definiert ist. Der Fall eines zeitabhängigen Vektorfelds A kann leicht auf den Fall des zeitunabhängigen Vektorfelds $(1, A) : U \rightarrow \mathbb{R} \times \vec{X}$ zurückgeführt werden: In der Tat ist γ ein Flußweg unseres zeitabhängigen Vektorfelds genau dann, wenn (id, γ) ein Flußweg des zeitunabhängigen Vektorfelds $(1, A)$ ist, und jede Flußweg von $(1, A)$ ist etwa nach 7.1.11 bis auf eine Zeitverschiebung von dieser Gestalt. Allerdings gelingt es im Fall zeitabhängiger Felder, die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bei einer direkten Betrachtung unter schwächeren Annahmen zu zeigen, und das führt insbesondere bei der Behandlung linearer Differentialgleichungen zu einfacheren Aussagen.

Beispiel 7.1.20 (Eindimensionale zeitabhängige Felder). Gegeben sind etwa $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ und man interessiert sich für Lösungen der Gleichung

$$\dot{x} = a(t, x)$$



Im Fall zeitabhängiger eindimensionaler Felder mag man sich ein Vektorfeld als ein „Steigungsfeld“ veranschaulichen, bei dem die jeweils vorgeschriebene Steigung $a(t, x)$ von beiden Koordinaten abhängen darf, und die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung durch ihren im Bild gestrichelt eingezeichneten Graphen, der dann eben an jeder Stelle tangential an das dort vorgegebene Steigungsfeld sein soll.



In 7.1.19 habe ich ausgeführt, wie die Untersuchung der Flußwege zeitabhängiger Felder auf einem Raum X auf die Untersuchung der Flußwege zeitunabhängiger Felder auf dem Raum $\mathbb{R} \times X$ zurückgeführt werden kann. Dieses Bild zeigt im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ das zeitunabhängige Vektorfeld auf \mathbb{R}^2 , dessen Flußwege den Flußwegen des durch das Bild darüber dargestellten zeitabhängigen Feldes auf \mathbb{R} entsprechen.

Unter einer „Lösung“ versteht man hierbei ein Paar (γ, I) mit $I \subset \mathbb{R}$ einem mehrpunktigen Intervall und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ einer differenzierbaren Funktion, deren Graph in U enthalten ist und für die gilt

$$\dot{\gamma}(t) = a(t, \gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Ich habe hier Lösungen als $\gamma(t)$ und nicht als $x(t)$ geschrieben, wie es die Gleichung suggeriert, in der Hoffnung, daß das zum besseren Verständnis beiträgt. Hängt $a(t, x)$ gar nicht von x ab, also $a(t, x) = a(t)$, so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung natürlich genau die Stammfunktionen von a . Hängt $a(t, x)$ dahingegen nicht von t ab, also $a(t, x) = a(x)$, so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung nichts anderes als die Flußwege des auf einer geeigneten Teilmenge von \mathbb{R} definierten Vektorfelds $a(x)$, die wir bereits in 7.1.15 diskutiert hatten.

7.1.21. Seien $V, W \subseteq \mathbb{R}$ offen und $a : V \rightarrow \mathbb{R}, b : W \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Differentialgleichungen der Gestalt

$$\dot{x} = a(x)b(t)$$

lassen sich oft mit der Methode der **Separation der Variablen** oder deutsch **Variablentrennung** lösen. Ich führe zunächst dieses Verfahren vor und erkläre dann, inwiefern wir dabei implizit unsere Gleichung in eine Gleichung mit separierten Variablen im Sinne von 7.1.18 transformieren. Wir nehmen an, a habe keine Nullstelle und V sei ein Intervall. Gegeben eine Lösung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ kann die Gleichung $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t))b(t)$ dann auch geschrieben werden als

$$\frac{\dot{\gamma}(t)}{a(\gamma(t))} = b(t)$$

Ist nun G eine Stammfunktion von $1/a$ und B eine Stammfunktion von b , so folgt für alle $s, t \in I$ sofort

$$G(\gamma(t)) - G(\gamma(s)) = \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{a(x)} = \int_s^t \frac{\dot{\gamma}(\tau)}{a(\gamma(\tau))} d\tau = \int_s^t b(\tau) d\tau = B(t) - B(s)$$

Hier ist G sicher streng monoton. Folglich hat es offenes Bild $G(V) \subseteq \mathbb{R}$, und bilden wir die Umkehrabbildung $G^{-1} : G(V) \rightarrow \mathbb{R}$, so folgt

$$\gamma(t) = G^{-1}(B(t) + c) \quad \forall t \in I$$

mit der Konstante $c = G(\gamma(s)) - B(s)$. Umgekehrt prüft man auch ohne Schwierigkeiten, daß für $(s, v) \in W \times V$ die obige Formel für $c = G(v) - B(s)$ und $t \in I + B^{-1}(G(V) - c)$ die größte Lösung unserer Differentialgleichung mit $\gamma(s) = v$

liefert. Um den Zusammenhang mit der Situation separierter Variablen im Sinne von 7.1.18 herzustellen, interpretieren wir unsere Gleichung wie in 7.1.19 als die Suche nach Flußwegen des ebenen Vektorfelds $(z, x) \mapsto (1, a(x)b(z))$ und kommen unter der zusätzlichen Annahme, daß auch b keine Nullstelle habe, mit der in 7.1.17 erläuterten Längenänderung um $c(z, x) = b(z)^{-1}$ zum Vektorfeld $(z, x) \mapsto (b(z)^{-1}, a(x))$. In dieser Weise landen wir dann bei der Suche nach den Flußwegen eines Vektorfelds mit separierten Variablen.

Proposition 7.1.22 (Differenzielle Ungleichungen). *Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und $K : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien $a < b$ gegeben und seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Graph in U derart, daß an jeder Stelle $t \in [a, b]$ gilt*

$$f'(t) \geq K(t, f(t)) \quad \text{und} \quad g'(t) < K(t, g(t)).$$

Haben wir außerdem $g(a) \leq f(a)$, so folgt $g(t) < f(t)$ für alle $t \in (a, b)$.

7.1.23. Fordern wir hier statt der strikten Ungleichung auch für g nur die nicht-strikte Ungleichung $g'(t) \leq K(t, g(t))$, so gilt die Aussage nur noch unter zusätzlichen Annahmen an die Funktion K und ich kenne keinen so einfachen Beweis mehr. Ich diskutiere eine Variante für nicht-strikte Ungleichungen in 7.6.1.

Beweis. Die Funktion $h := g - f$ ist differenzierbar mit $h(a) \leq 0$ und $h(t) = 0 \Rightarrow h'(t) < 0$. Damit folgt leicht $h(t) < 0$ für alle $t \in (a, b)$, wie Sie auch in [AN1] 4.5.22 schon zur Übung selbst zeigen durften. \square

Korollar 7.1.24 (Lemma von Gronwall). 1. *Gegeben Konstanten L, C mit $L > 0$ und $b > 0$ und eine differenzierbare Funktion $g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(0) \leq 0$ und $g'(t) \leq Lg(t) + C$ für alle $t \in [0, b]$ gelten für alle $t \in (0, b)$ die Abschätzungen*

$$g(t) \leq (C/L)e^{Lt} - (C/L) \quad \text{und} \quad g'(t) \leq Ce^{Lt}.$$

2. *Ist $b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gibt es Konstanten L, C mit $L \geq 0$ und*

$$f(t) \leq L \int_0^t f(\tau) d\tau + C$$

für alle $t \in [0, b]$, so erfüllt f die Abschätzung $f(t) \leq Ce^{Lt}$.

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ folgt $g'(t) < Lg(t) + C + \varepsilon$, und damit folgt die erste Ungleichung im ersten Teil sogar für beliebiges $L \neq 0$ sofort aus unseren Erkenntnissen über differenzielle Ungleichungen 7.1.22. Die zweite Ungleichung im ersten Teil folgt durch Einsetzen der ersten Ungleichung in die Annahme. Hierbei

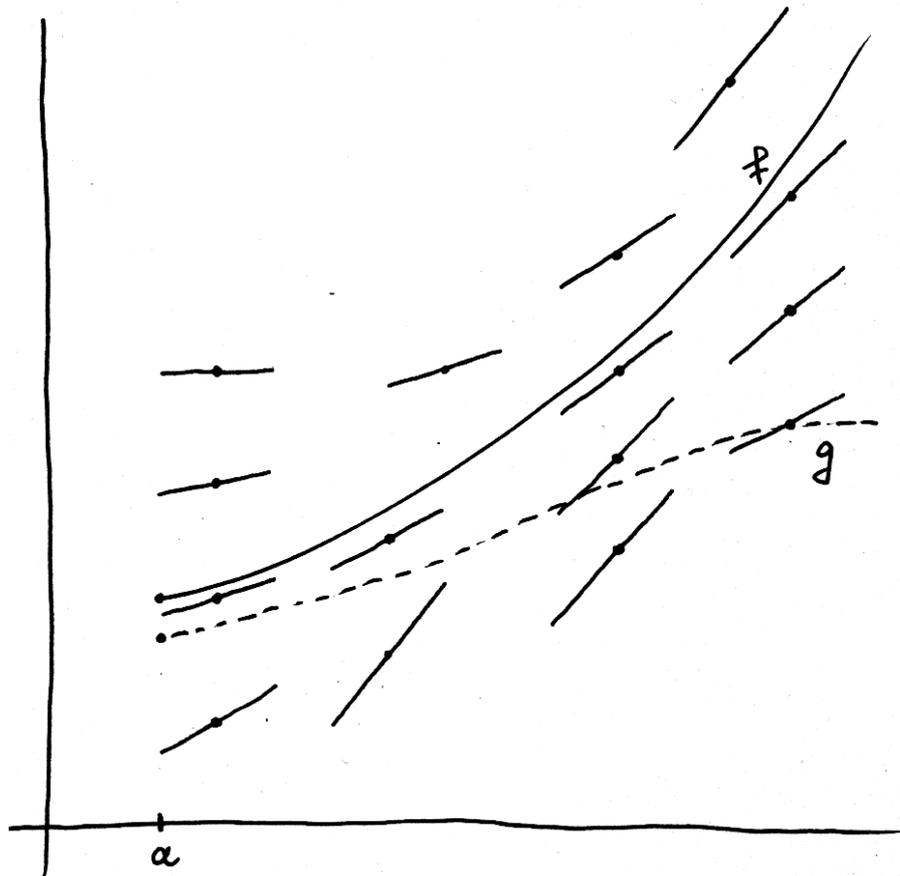


Illustration zur Proposition über strikte differentielle Ungleichungen. Ich denke mir K als ein „Steigungsfeld“. Eine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung muß nun offensichtlich stets über einer Lösung der der entsprechenden differentiellen Ungleichung bleiben, wenn sie zum Anfangszeitpunkt darüber liegt. Das ist die anschauliche Bedeutung der Proposition.

brauchen wir dann $L > 0$, damit sich die erste Ungleichung bei der Multiplikation mit L nicht umdreht. Daß die zweite Ungleichung im ersten Teil auch noch für $L = 0$ gilt, ist eh klar. Wenden wir sie auf $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ an, ergibt sich der zweite Teil. \square

7.1.25. Eine Fülle an weiteren Beispielen und Lösungsmethoden zu gewöhnlichen Differentialgleichungen findet man etwa in [MV00].

Übungen

Übung 7.1.26 (Größere Felder haben schnellere Flußwege). Gegeben $U \subset \mathbb{R}$ halboffen und $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ohne Nullstelle mit $a \leq b$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $\gamma, \kappa : I \rightarrow U$ differenzierbar mit $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t))$ und $\dot{\kappa}(t) = b(\kappa(t))$ für alle $t \in I$ folgt aus $\gamma(t_0) \leq \kappa(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ bereits dieselbe Aussage für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$.

7.2 Integration von vektorwertigen Funktionen

7.2.1. Wir zimmern in diesem Abschnitt einen begrifflichen Rahmen, der nicht nur das Integrieren komplexwertiger Funktionen als Spezialfall umfaßt, sondern auch in natürlicher Weise unsere Überlegungen zum Differenzieren vektorwertiger Funktionen ergänzt und uns in Zukunft noch in mancherlei Weise die Arbeit erleichtern wird. Sie dürfen sich vorerst unter einem Banachraum stets einen normierten endlichdimensionalen reellen Vektorraum vorstellen.

Definition 7.2.2. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Intervall, V ein reeller Vektorraum und $f : [a, b] \rightarrow V$ eine Abbildung. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistante Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r = b$ und definieren die **r -te Riemannsumme** $S^r(f) \in V$ durch

$$S^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_i) = \left(\frac{b-a}{r} \right) \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)$$

Satz 7.2.3 (Integration vektorwertiger Funktionen). Ist $f : [a, b] \rightarrow V$ eine stetige Abbildung von einem nichtleeren kompakten Intervall in einen Banachraum V , so existiert der Grenzwert der zugehörigen Riemannsummen. Das als dieser Grenzwert erklärte **Integral**

$$\int f = \int_a^b f = \int_a^b f(t) dt := \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$$

ordnet jedem f einen Vektor $(\int f) \in V$ zu und hat die folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $c \in [a, b]$ gilt $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;
2. Ist $f = v$ konstant ein $v \in V$, so gilt $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b v dt = (b - a)v$;
3. Ist W ein weiterer Banachraum und $\Lambda : V \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung, so gilt

$$\int (\Lambda \circ f) = \Lambda \left(\int f \right)$$

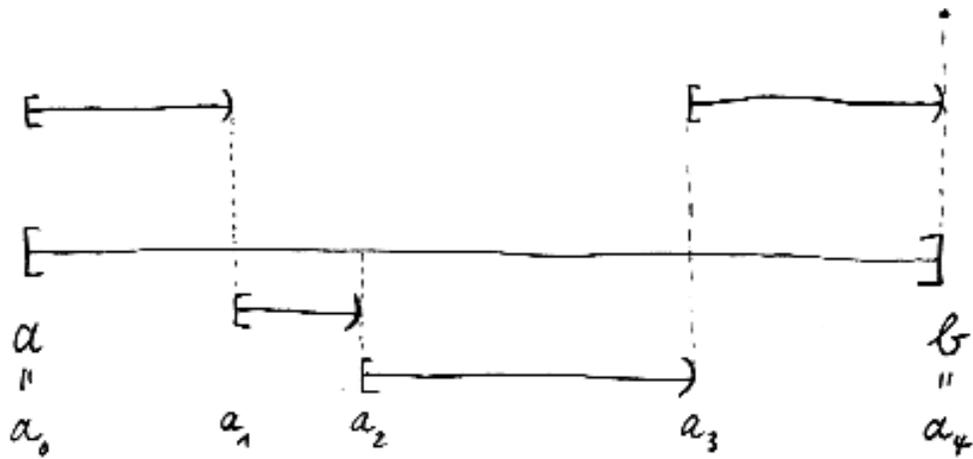
4. Für die Norm des Integrals gilt die Abschätzung $\| \int f \| \leq \int \| f \|$;
5. Im Fall $V = \mathbb{R}$ reellwertiger Funktionen erhalten wir unser Integral aus [AN1] 4.2.1.

7.2.4. Sie mögen in diesem Satz die Regeln $\int \lambda f = \lambda \int f$ sowie $\int (f + g) = \int f + \int g$ für stetige vektorwertige Funktionen f, g und $\lambda \in \mathbb{R}$ vermißt haben. Sie folgen jedoch formal aus Teil 3. In der Tat dürfen wir dort $\Lambda = (\lambda \cdot) : V \rightarrow V$ nehmen und auch $\Lambda : V \times V \rightarrow V$ die Addition sowie die beiden Projektionen. So ergibt sich für die $V \times V$ -wertige Funktion (f, g) zunächst $\text{pr}_1 \int (f, g) = \int f$ und $\text{pr}_2 \int (f, g) = \int g$ und damit $\int (f, g) = (\int f, \int g)$ und durch Anwenden der Addition dann $\int (f + g) = \int f + \int g$.

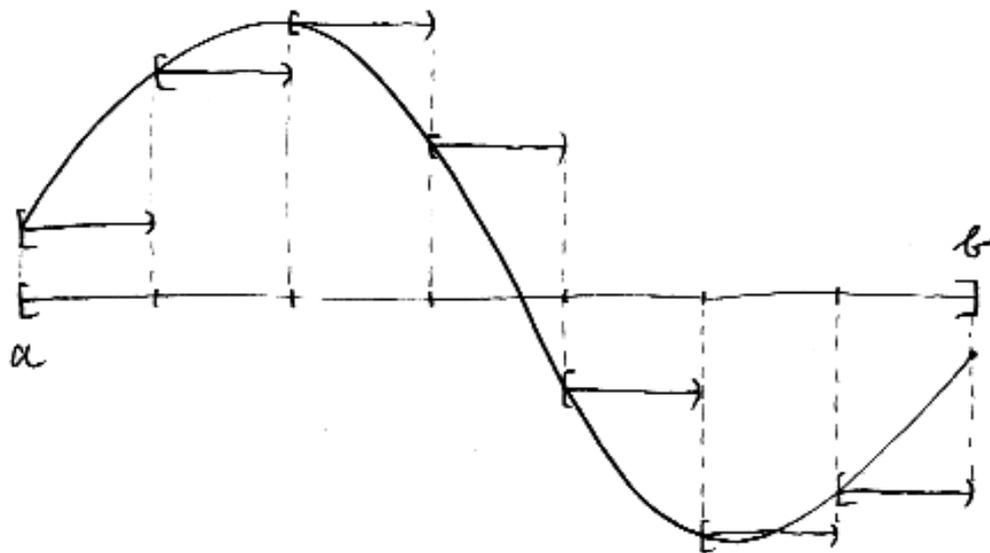
Beweis. Im Fall $a = b$ sind alle Riemannsummen Null und ihr Grenzwert existiert und ist auch Null. Wir dürfen also im folgenden $a < b$ annehmen. Nach [AN1] 9.2.21 ist mit V auch der Vektorraum $\text{Ens}^b([a, b], V)$ aller beschränkten Abbildungen $[a, b] \rightarrow V$ mit seiner Supremumsnorm vollständig. Darin betrachten wir nun den Teilraum $T \subset \text{Ens}^b([a, b], V)$ aller Abbildungen $s : [a, b] \rightarrow V$ mit der Eigenschaft, daß es eine nicht notwendig äquidistante Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ unseres Intervalls gibt derart, daß s auf jedem der Teilintervalle $[a_{i-1}, a_i)$ konstant ist. Die Elemente von T heißen **Treppenfunktionen** auf $[a, b]$. Offensichtlich existiert eine lineare Abbildung $I : T \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$I(s) = \sum_{i=0}^{r-1} s(a_i)(a_{i+1} - a_i)$$

wann immer für eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ unseres Intervalls unsere Funktion s konstant ist auf allen Teilintervallen $[a_i, a_{i+1})$. Offensichtlich hat diese lineare Abbildung auch die Eigenschaft $\|I(s)\| \leq (b - a)\|s\|_\infty$. Insbesondere ist $I : T \rightarrow V$ gleichmäßig stetig. Damit zeigt hinwiederum [AN1] 9.2.18, daß I auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung auf den Abschluß \bar{T} von T in $\text{Ens}^b([a, b], V)$ fortgesetzt werden kann. In diesem Abschluß liegen



Der Graph einer reellwertigen Treppenfunktion.



Der Graph einer reellwertigen Funktion f und der zugehörigen Treppenfunktion f_7 aus dem nebenstehenden Beweis, mit $I(f_7)$ der siebten Riemannsumme von f .

nun aber, etwa nach gleichmäßiger Stetigkeit [AN1] 7.1.15, alle stetigen Abbildungen, in Formeln $\mathcal{C}([a, b], V) \subset \bar{T}$, so daß wir durch stetige Fortsetzung vom Raum der Treppenfunktionen insbesondere eine Abbildung

$$I : \mathcal{C}([a, b], V) \rightarrow V$$

erhalten. Wieder nach gleichmäßiger Stetigkeit [AN1] 7.1.15 ist jede stetige Abbildung $f : [a, b] \rightarrow V$ auch der Grenzwert in der Supremumsnorm derjenigen Treppenfunktionen f_r , die wir erhalten, wenn wir von der äquidistanten Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r = b$ ausgehen und f_r auf $[t_i, t_{i+1})$ konstant den Wert $f(t_i)$ annehmen lassen und auf t_r den Wert $f(t_r)$. Für diese f_r gilt also $\lim_{r \rightarrow \infty} f_r = f$ und wegen $S_r(f) = I(f_r)$ folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_r(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} I(f_r) = I(f)$$

Der Grenzwert unserer Riemannsummen existiert also in der Tat und stimmt mit $I(f)$ überein. Die erste Eigenschaft zeigt man nun, indem man die Notation I zu I_a^b verfeinert, dann die Identität

$$I_a^b(f) = I_a^c(f) + I_c^b(f)$$

zunächst für Treppenfunktionen alias Funktionen $f \in T$ prüft, und sie dann für alle Funktionen aus \bar{T} folgert. Die drei anderen Eigenschaften erhält man, indem man die analogen Eigenschaften für Riemannsummen hinschreibt und zum Grenzwert übergeht. \square

7.2.5. Wie im Fall reellwertiger Funktionen verwenden wir auch im Fall vektorwertiger Funktionen die Konvention $\int_b^a f = -\int_a^b f$ und ist $f : I \rightarrow V$ eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall in einen Banachraum, so gilt für beliebige $a, b, c \in I$ die Formel $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Satz 7.2.6 (Vektorwertige Variante des Hauptsatzes). *Gegeben ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein Banachraum V , eine stetige Funktion $f : I \rightarrow V$ und ein Punkt $a \in I$ ist die Funktion*

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow V \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) \, dt \end{aligned}$$

die einzige differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow V$ mit $F' = f$ und $F(a) = 0$.

Beweis. Sehr ähnlich zum Beweis für reellwertige Funktionen [AN1] 4.7.1 und dem Leser zur Übung überlassen. Man verwende die Abschätzung aus 7.2.3 für die Norm des Integrals und den Schrankensatz [AN1] 8.2.9. \square

Korollar 7.2.7 (Integrieren mit Stammfunktionen). Seien V ein Banachraum und $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \rightarrow V$ stetig. Ist $G : [a, b] \rightarrow V$ eine **Stammfunktion** von f , d.h. eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $G'(t) = f(t)$, so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz 7.2.6. □

Übungen

Übung 7.2.8 (Substitution). Man formuliere und beweise das Analogon der Substitutionsregel [AN1] 4.8.1 für $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : g([a, b]) \rightarrow V$ stetig mit Werten in einem Banachraum V .

Ergänzende Übung 7.2.9. Man berechne $\int_0^1 e^{it} dt$. Hinweis: [AN1] 3.4.28. Man finde eine Stammfunktion von $\cos^4 x$. Hinweis: [AN1] ??.

Ergänzende Übung 7.2.10. Man formuliere und beweise eine Variante für vektorwertige Funktionen des Satzes [AN1] 7.6.1 über Integrale mit Parametern.

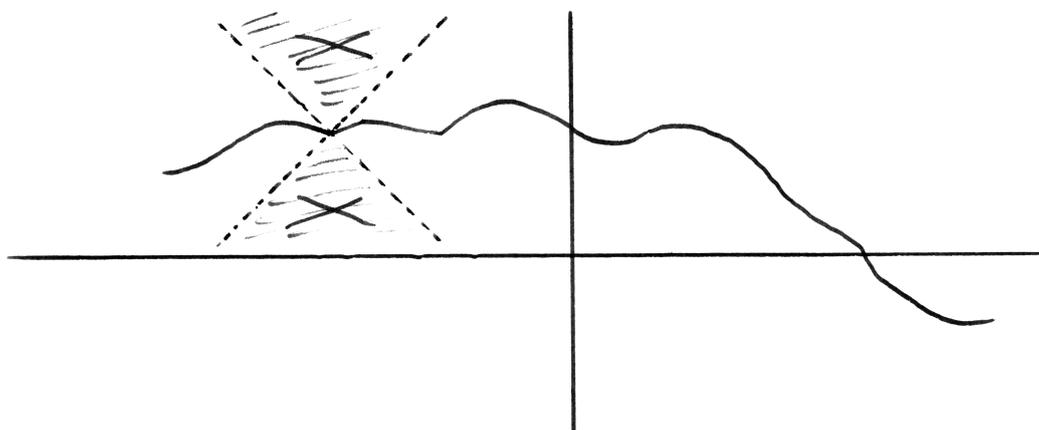
Übung 7.2.11. Gegeben ein mehrpunktiges kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein Banachraum Y ist auch der Raum $\mathcal{C}^1(I, Y)$ aller stetig differenzierbaren Abbildungen von I nach Y vollständig für die Norm $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\| + \|\varphi'\|$ der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und ihrer ersten Ableitungen. Hinweis: Man verwende [AN1] 9.2.31 und verallgemeinere [AN1] 5.1.13.

7.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

7.3.1. Ich erinnere daran, daß wir, gegeben ein normierter reeller Raum X und eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ und ein Vektorfeld $A : U \rightarrow \vec{X}$, unter einem „Flußweg von A mit Anfangswert p “ ein Paar (I, γ) verstehen mit $I \subset \mathbb{R}$ einem mehrpunktigen Intervall, das die Null enthält, und $\gamma : I \rightarrow U$ einer differenzierbaren Abbildung mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(t) = A(\gamma(t))$ für alle $t \in I$.

7.3.2. Ich erinnere weiter daran, daß nach 3.1.6 eine Abbildung f zwischen metrischen Räumen lipschitzstetig heißt, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt mit $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ für alle x, y im Ausgangsraum. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **lokal lipschitzstetig** genau dann, wenn jeder Punkt des Ausgangsraums eine Umgebung besitzt, auf der unsere Funktion lipschitzstetig ist.

7.3.3. Nach 1.3.5 ist jedes stetig differenzierbare Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines normierten Raums lokal lipschitzstetig, deshalb folgt der Satz



Die Restriktion auf die negative x -Achse der hier durch ihren Graphen dargestellten Funktion ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1, da sie an jeder Stelle den schraffierten verbotenen Bereich der entsprechen verschobenen Figur vermeidet. Die Begrenzungslinien haben darin als Steigung die Lipschitzkonstante, in diesem Fall die Steigung 1. Die Restriktion auf die positive x -Achse ist zwar lipschitzstetig, aber mit einer größeren Lipschitzkonstante.

über die Existenz und Eindeutigkeit im Fall stetig differenzierbarer Vektorfelder [7.1.12](#) aus der Version lokal lipschitzstetiger Vektorfelder [7.3.7](#). Die Hauptlast des Beweises trägt jedoch das folgende Lemma [7.3.4](#).

Lemma 7.3.4 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit). *Gegeben X ein vollständiger normierter reeller Raum, $U \subseteq X$ offen und $A : U \rightarrow \vec{X}$ ein beschränktes lipschitzstetiges Vektorfeld existieren zu jedem Anfangswert $p \in U$ Flußwege von A mit offenem Definitionsbereich, und je zwei Flußwege $\gamma : I \rightarrow U$ und $\phi : J \rightarrow U$ mit demselben Anfangswert stimmen für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ auf $I \cap J \cap [-\varepsilon, \varepsilon]$ überein.*

7.3.5. Allgemeiner gilt das auch für stetige beschränkte zeitabhängige Vektorfelder $A : (-a, a) \times U \rightarrow \vec{X}$, die nur **partiell lipschitzstetig** sind in dem Sinne, daß es eine Konstante L gibt mit $\|A(t, x) - A(t, y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $t \in (-a, a)$ und $x, y \in U$. Der Beweis ist mutatis mutandis derselbe. Diese Variante ist insofern stärker, als das Lemma beim Übergang [7.1.19](#) von zeitabhängigen zu zeitunabhängigen Vektorfeldern dieselbe Folgerung nur liefert unter der stärkeren Annahme, daß $A : (-a, a) \times U \rightarrow \vec{X}$ nicht nur „partiell“ sondern „auch in Bezug auf die erste Variable“ lipschitzstetig ist.

Beweis. Wir betrachten für ein beliebiges mehrpunktiges kompaktes reelles Intervall $K \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in K$ den affinen Raum

$$\mathcal{C}_p(K, X)$$

aller stetigen Wege $\gamma : K \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = p$ und versehen seinen Richtungsraum $\mathcal{C}_0(K, \vec{X})$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz. Nach [\[AN1\] 9.2.31](#) erhalten wir so einen vollständigen normierten Vektorraum. Nun betrachten wir in unserem affinen Raum die offene Teilmenge $\mathcal{C}_p(K, U)$ aller in U verlaufenden Wege und die Abbildung

$$F : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p(K, U) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p(K, X) \\ (\tau, \gamma) \mapsto (\tau, \gamma - \tau \int (A \circ \gamma))$$

Hierbei sei $\int : \mathcal{C}(K, \vec{X}) \rightarrow \mathcal{C}_0(K, \vec{X})$ gegeben durch $(\int \psi)(t) = \int_0^t \psi(s) ds$ mit unserem vektorwertigen Integral aus [7.2.3](#). Bezeichne κ den konstanten Weg bei p . Unter unserer Abbildung geht aufgrund der vektorwertigen Variante [7.2.6](#) des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (τ, γ) nach (τ, κ) genau dann, wenn $\gamma : K \rightarrow U$ ein Flußweg des reskalierten Feldes τA ist. Insbesondere haben wir $(0, \kappa) \mapsto (0, \kappa)$. Wir wenden nun den Umkehrsatz für stetige Abbildungen [3.1.10](#) an und zeigen genauer, daß für $\eta > 0$ hinreichend klein und $K \subset [-1/4S, 1/4S]$ mit $S > 0$ einer oberen Schranke der Normen der Vektoren

unseres Vektorfelds A die Restriktion von $F - \text{id}$ auf $(-\eta, \eta) \times \mathcal{C}_p(K, U)$ kontrahierend ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\|(F - \text{id})(\sigma, \psi) - (F - \text{id})(\tau, \gamma)\| &= \left\| \sigma \int A\psi - \tau \int A\gamma \right\|_{\infty} \\
&\leq |\sigma - \tau| \left\| \int A\psi \right\|_{\infty} + |\tau| \left\| \int A\psi - A\gamma \right\|_{\infty} \\
&\leq |\sigma - \tau|(S/4S) + (\eta L/4S) \|\psi - \gamma\|_{\infty} \\
&\leq |\sigma - \tau|/4 + \|\psi - \gamma\|_{\infty}/4 \\
&\leq (1/2) \|(\tau - \sigma, \gamma - \psi)\|
\end{aligned}$$

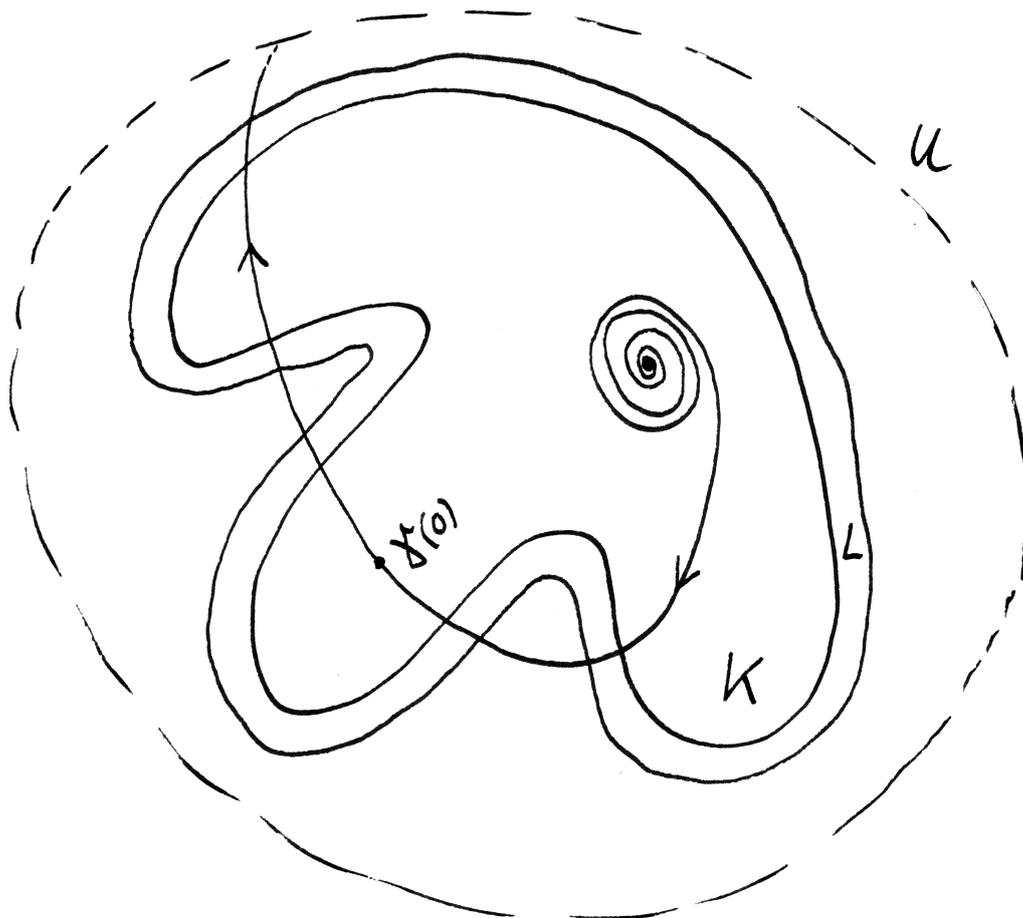
falls im vorletzten Schritt $\eta > 0$ so klein ist, daß gilt $\eta L/S < 1$. Dann liefert uns der Umkehrsatz für stetige Abbildungen **3.1.10** wegen $F : (0, \kappa) \mapsto (0, \kappa)$, daß es für $\tau > 0$ hinreichend klein genau ein Urbild (τ, γ_{τ}) von (τ, κ) unter F gibt, also genau einen Flußweg $\gamma_{\tau} : K \rightarrow U$ des reskalierten Vektorfelds τA . Gehen wir etwa von $K = [-\beta, \beta]$ aus, so ist $\gamma(t) := \gamma_{\tau}(\tau^{-1}t)$ ein auf $(-\tau\beta, \tau\beta)$ definierter Flußweg des Vektorfelds A zu p und die Existenzaussage des Lemmas ist gezeigt. Seien andererseits $\gamma : I \rightarrow U$ und $\phi : J \rightarrow U$ Flußwege mit demselben Anfangswert. Besteht $I \cap J$ nur aus dem Nullpunkt, so ist die Behauptung eh klar. Sonst gibt es $\alpha > 0$ mit $I \cap J \cap [-\alpha, \alpha]$ mehrpunktig und kompakt und in $[-1/4S, 1/4S]$ enthalten, und für alle $\tau \in [0, 1]$ sind die Abbildungen $t \mapsto \gamma(\tau t)$ und $t \mapsto \phi(\tau t)$ auf $I \cap J \cap [-\alpha, \alpha]$ definierte Flußwege zu p des reskalierten Vektorfelds τA . Für hinreichend kleines $\tau > 0$ gibt es aber nach dem, was wir gezeigt haben, nur einen derartigen Flußweg, und damit folgt auch die zweite Behauptung des Lemmas. \square

Ergänzung 7.3.6. Die allgemeinere Aussage **7.3.5** über lokale Existenz und Eindeutigkeit der Flußwege für partiell lipschitzstetige zeitabhängige Vektorfelder folgt analog mithilfe der Abbildung

$$F : (\tau, \gamma) \mapsto \left(\tau, \gamma - \tau \int_0^t A(\tau s, \gamma(s)) ds \right)$$

Satz 7.3.7 (Picard-Lindelöf). *1. Gegeben ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines vollständigen normierten reellen Raums gibt es zu jedem Anfangswert einen größten Flußweg;*

2. Dieser größte Flußweg hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist besagtes Intervall nach oben beschränkt, so verläßt der größte Flußweg für positive Zeiten jedes Kompaktum aus unserer offenen Teilmenge irgendwann einmal endgültig.



Ein größter Flußweg, dessen Definitionsbereich nach oben beschränkt ist und die so jedes Kompaktum wie etwa K oder L irgendwann einmal endgültig verläßt. In diesem Fall wäre der Definitionsbereich nach unten unbeschränkt und unser Flußweg würde für negative Zeiten gegen eine Nullstelle unseres Vektorfeldes konvergieren, die im Zentrum der Spirale liegt.

7.3.8. Beim Beweis zeigen wir stärker als in Teil 2 formuliert: Ist das Definitionsintervall unseres größten Flußwegs nach oben beschränkt, so kann er nicht ab irgendeinem Zeitpunkt ganz innerhalb irgendeiner in unserem affinen Raum abgeschlossenen Teilmenge bleiben, die im Definitionsbereich unseres Vektorfelds enthalten ist und auf der unser Vektorfeld beschränkt ist.

7.3.9. Allgemeiner gilt unser Satz auch für stetige zeitabhängige Vektorfelder $A : U \rightarrow \vec{X}$ auf $U \subseteq \mathbb{R} \times X$, die nur **lokal partiell lipschitzstetig** sind in dem Sinne, daß jeder Punkt von U eine offene Umgebung besitzt, in der sie im Sinn von 7.3.5 partiell lipschitzstetig sind. Der Beweis ist derselbe, man muß sich dafür nur auf 7.3.5 stützen. Diese Allgemeinheit ist insbesondere bei der Behandlung linearer Differentialgleichungen von Nutzen.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß je zwei Flußwege γ, ψ mit demselben Anfangswert p und demselben Definitionsintervall I übereinstimmen. Wir zeigen nur, daß sie auf $I \cap [0, \infty)$ übereinstimmen, für $I \cap (-\infty, 0]$ argumentiert man analog. Stimmen aber unsere Wege auf $I \cap [0, \infty)$ nicht überein, so wäre das Supremum s über alle $t \in I$ mit $\gamma|_{[0, t]} = \psi|_{[0, t]}$ nicht das Supremum von I . Wegen der Stetigkeit der Flußwege gälte $\gamma(s) = \psi(s)$, und nach der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 7.3.4 muß dann auch gelten $\gamma|_{[0, t + \eta]} = \psi|_{[0, t + \eta]}$ für ein positives η , im Widerspruch zur Wahl von s . Folglich stimmen je zwei Flußwege mit Anfangswert p auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein und es gibt genau einen größten Flußweg mit Anfangswert p , dessen Definitionsbereich eben die Vereinigung der Definitionsbereiche aller Flußwege zu p ist. Wäre dieser Definitionsbereich nicht offen, so enthielte er sein Supremum oder sein Infimum. Dann könnten wir jedoch um die Bilder dieser Grenzpunkte auch wieder Flußwege mit offenem Definitionsbereich finden und „ankleben“ und unser Flußweg wäre nicht maximal gewesen. Dieser Widerspruch zeigt, daß unser größter Flußweg offenen Definitionsbereich hat. Bezeichne schließlich A unser Vektorfeld und $U \subseteq X$ seinen Definitionsbereich. Ist $\gamma : [0, b) \rightarrow U$ ein Flußweg von A , dessen Bild in einem Kompaktum $M \subset U$ landet, so ist wegen $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))$ seine Geschwindigkeit $\|\dot{\gamma}(t)\|$ beschränkt auf $[0, b)$, mithin ist γ lipschitzstetig und besitzt nach [AN1] 9.2.18 eine stetige Fortsetzung $\tilde{\gamma} : [0, b] \rightarrow M$. Die Integralform unserer Differentialgleichung zeigt dann sofort, daß auch $\tilde{\gamma}$ ein Flußweg von A sein muß. Mithin kann ein Flußweg mit nach oben beschränktem Definitionsbereich, die ganz in einem Kompaktum $M \subset U$ verläuft, schon einmal nicht maximal sein. Wir erklären nun noch, warum ein maximaler Flußweg mit nach oben beschränktem Definitionsbereich ab einem gewissen Zeitpunkt auch nicht mehr in ein vorgegebenes Kompaktum zurückkehren darf. Sicher besitzt unser Kompaktum M eine endliche Überdeckung durch offene Teilmengen von U , auf denen unser Vektorfeld jeweils lipschitzstetig ist. Mit [AN1] 7.1.18 finden wir auch ein $\varepsilon > 0$ derart, daß die Menge N aller Punkte von X mit Abstand $\leq \varepsilon$ zu einem Punkt von M

in der Vereinigung der Mengen dieser endlichen Überdeckung enthalten ist. Da unser Vektorfeld auch auf N Lipschitzstetig ist, hat unser Flußweg dann an allen Stellen aus N , die er durchläuft, eine gleichmäßig beschränkte Geschwindigkeit. Wann immer unser maximaler Flußweg einen Punkt aus M durchläuft, muß er also noch für eine gewisse von diesem Punkt unabhängige Zeitspanne innerhalb von N weiterlaufen. Sind wir näher als diese Zeitspanne am oberen Ende des Definitionsbereichs unseres maximalen Flußwegs, so kann unser Flußweg demnach keine Punkte aus M mehr durchlaufen, da er ja wegen 7.3.8 nicht ab einem vorgegebenen Zeitpunkt in N bleiben darf, und es sonst nicht mehr schaffen könnte, N noch zu verlassen. \square

7.4 Lineare Differentialgleichungen

Satz 7.4.1 (Homogene lineare Differentialgleichungen). *Gegeben ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V und eine stetige Abbildung $M : I \rightarrow \text{End } V$ bilden die differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \rightarrow V$ mit*

$$\gamma'(t) = M(t)\gamma(t) \quad \forall t \in I$$

einen Untervektorraum $\mathcal{L} \subset \text{Ens}(I, V)$, den Lösungsraum unserer Differentialgleichung. Weiter ist für jedes $t_0 \in I$ das Auswerten bei t_0 ein Vektorraumisomorphismus $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} V$, $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$, der Anfangswertisomorphismus.

Ergänzung 7.4.2. Es ist unmittelbar klar, daß unter der Annahme, M sei k -mal stetig differenzierbar, unsere Lösungen γ sogar $(k + 1)$ -mal stetig differenzierbar sein müssen.

Ergänzung 7.4.3. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch im Fall eines beliebigen Banachraums V , wenn man statt dem Raum $\text{End } V$ aller Endomorphismen von V den normierten Raum $\mathcal{B}(V)$ aller stetigen Endomorphismen von V betrachtet. Wir müssen dann nur am Schluß des Beweises etwas sorgfältiger argumentieren, etwa in dem Sinne, daß eine auf $[0, b)$ definierte Flußweg nach den Abschätzungen im Beweis gleichmäßig stetig wäre und sich nach [AN1] 9.2.18 stetig auf $[0, b]$ fortsetzen ließe. Das Bild dieser stetigen Fortsetzung ist in diesem Fall wieder das gesuchte Kompaktum, das nicht verlassen wird, im Widerspruch zu 7.3.9.

Beispiel 7.4.4 (Explizite Lösung im eindimensionalen Fall). Im eindimensionalen Fall $\dim V = 1$ oder der Einfachheit halber noch besser $V = \mathbb{R}$ haben wir in 7.1.21 schon allgemeinere Differentialgleichungen explizit gelöst. In diesem Fall ist M eine reellwertige Funktion. Bezeichnen wir sie statt mit M mit $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ und bezeichnet $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von h , so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung $\gamma'(t) = h(t)\gamma(t)$ insbesondere schlicht die Funktionen $\gamma(t) = c \exp(H(t))$ für $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Daß unser Lösungsraum $\mathcal{L} \subset \text{Ens}(I, V)$ ein Untervektorraum ist und das Auswerten bei t_0 linear scheint mir beides offensichtlich. Es bleibt nur, Injektivität und Surjektivität des Auswertens zu zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dazu $t_0 = 0$ annehmen. Falls I nicht offen ist, wählen wir eine stetige Fortsetzung von M auf ein offenes Intervall $J \supset I$. Nun erfüllt $\gamma : J \rightarrow V$ nach 7.1.19 unsere Differentialgleichung genau dann, wenn es ein Flußweg des zeitabhängigen Vektorfelds $(t, v) \mapsto M(t)v$ auf $J \times V$ ist. Dies zeitabhängige Vektorfeld ist lokal partiell lipschitzstetig im Sinne von 7.3.9, also besitzt es nach 7.3.9 zu jedem Anfangswert höchstens einen auf I definierten Flußweg, und das zeigt die Injektivität. Für den Beweis der Surjektivität reicht es zu zeigen, daß jeder maximale Flußweg des zeitabhängigen Vektorfelds $(t, v) \mapsto M(t)v$ mit Anfangswert $\gamma(t_0) = v_0$ auf ganz J definiert ist. Sicher reicht es zu zeigen, daß er bis zum oberen Ende von J definiert ist. Sonst gäbe es aber $b \in J$ derart, daß die Lösung nicht in positiver Richtung über $[0, b)$ hinaus fortgesetzt werden könnte. Es gibt jedoch L mit $\|M(t)\| \leq L$ für alle $t \in [0, b]$, daraus folgt für $t \in [0, b)$ erst

$$\|\gamma(t)\| = \left\| v_0 + \int_0^t M(\tau)\gamma(\tau)d\tau \right\| \leq \|v_0\| + L \int_0^t \|\gamma(\tau)\|d\tau$$

und dann $\|\gamma(t)\| \leq \|v_0\| e^{Lt}$ nach dem Lemma von Gronwall 7.1.24. Dann wäre aber $\|\gamma(t)\|$ beschränkt auf $t \in [0, b)$, nämlich durch $\|v_0\| e^{Lb}$, im Widerspruch zur letzten Aussage im Satz über die Existenz und Eindeutigkeit 7.3.7 oder genauer ihrem Analogon 7.3.9 für zeitabhängige Vektorfelder. \square

Korollar 7.4.5 (Inhomogene lineare Differentialgleichungen). Gegeben ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V sowie stetige Abbildungen $M : I \rightarrow \text{End } V$ und $f : I \rightarrow V$, bilden die differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \rightarrow V$ mit

$$\gamma'(t) = M(t)\gamma(t) + f(t) \quad \forall t \in I$$

einen affinen Teilraum $\mathcal{L}_i \subset \text{Ens}(I, V)$ mit dem Lösungsraum der zugehörigen linearen Gleichung als Raum von Richtungsvektoren. Für jedes $t_0 \in I$ definiert weiter das Auswerten bei t_0 eine Bijektion $\mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} V$, $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$, den **Anfangswertisomorphismus**.

Ergänzung 7.4.6. Dies Korollar gilt wieder mit fast demselben Beweis auch im Fall eines beliebigen vollständigen normierten reellen Vektorraums V , wenn man statt dem Raum $\text{End } V$ aller Endomorphismen von V den normierten Raum $\mathcal{B}(V)$ aller stetigen Endomorphismen von V betrachtet.

Beweis. Die Differenz von je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, und die Summe

einer Lösungen der homogenen und einer Lösung der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit bleibt nur zu zeigen, daß die inhomogene Gleichung überhaupt eine Lösung besitzt. Das folgt ähnlich wie im homogenen Fall und ohne weitere Schwierigkeiten aus unseren allgemeinen Prinzipien. Wir geben nun aber sogar eine Lösungsmethode an, die Methode der **Variation der Konstanten**. Dazu wählen wir eine Basis $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ des Lösungsraums der homogenen Gleichung und fassen sie zusammen zu einer Lösung $X : I \rightarrow V^n = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$ der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{X}(t) = M(t)X(t)$$

für Funktionen $I \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$. Da die Werte von $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ an jeder Stelle eine Basis von V bilden, ist $X(t)$ an jeder Stelle ein Vektorraumisomorphismus. Nun machen wir für die Lösung unserer inhomogenen Gleichung den Ansatz $\gamma(t) = X(t)c(t)$ mit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar alias $\gamma(t) = c_1(t)\gamma_1(t) + \dots + c_n(t)\gamma_n(t)$ und finden

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) \\ &= M(t)X(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) \\ &= M(t)\gamma(t) + X(t)\dot{c}(t) \end{aligned}$$

Unser Ansatz führt also zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung genau dann, wenn gilt $X(t)\dot{c}(t) = f(t)$ alias $\dot{c}(t) = X^{-1}(t)f(t)$. Ein c mit dieser Eigenschaft existiert aber ganz offensichtlich, eben das Integral der rechten Seite. \square

7.4.7 (Verhalten benachbarter Flußwege). Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $A : U \rightarrow \vec{X}$ ein lipschitzstetiges Vektorfeld mit Lipschitz-Konstante L . Sind $\gamma_p, \gamma_q : [0, b] \rightarrow U$ Flußwege zu Anfangswerten $p, q \in U$, so finden wir für alle $t \in [0, b]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| &= \left\| p + \int_0^t A(\gamma_p(\tau))d\tau - q - \int_0^t A(\gamma_q(\tau))d\tau \right\| \\ &\leq \|p - q\| + L \int_0^t \|\gamma_p(\tau) - \gamma_q(\tau)\|d\tau \end{aligned}$$

und das Lemma von Gronwall [7.1.24](#) liefert für alle $t \in [0, b]$ die Abschätzung

$$\|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| \leq \|p - q\| e^{Lt}$$

Salopp gesprochen besagt diese Abschätzung, daß zwei Flußwege in einem lipschitzstetigen Vektorfeld „höchstens exponentiell auseinanderlaufen können“. Man mag das Argument vom Schluß des Beweises des Satzes über homogene lineare Differentialgleichungen [7.4.1](#) vergrößernd dahingehend zusammenfassen, daß

sich in diesem Fall eine beliebige Lösung höchstens exponentiell von der Null-Lösung entfernt und folglich nicht in endlicher Zeit ins Unendliche entweichen kann.

Proposition* 7.4.8 (Lösungswachstum für lineare Differentialgleichungen).

Seien V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $M : [b, c) \rightarrow \text{End } V$ stetig. Bezeichne $\| \cdot \|$ eine Norm auf V und die zugehörige Operatornorm auf $\text{End } V$. Erfüllt M die Abschätzung $\|M(t)\| \leq S(t)$ für ein stetiges $S : [b, c) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ und ist $h : [b, c) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $h'(t) = S(t)h(t)$ zum Anfangswert $h(b) = 1$, so gilt für alle Lösungen $\gamma : [b, c) \rightarrow V$ der Differentialgleichung $\gamma'(t) = M(t)\gamma(t)$ die Abschätzung

$$\|\gamma(t)\| \leq h(t)\|\gamma(b)\| \quad \forall t \in [b, c)$$

7.4.9. Die Aussage gilt allgemeiner und mit demselben Beweis, wenn V ein beliebiger reeller Banachraum ist.

Beweis. Unsere Differentialgleichung kann umgeschrieben werden zur Integralgleichung

$$\gamma(t) = \gamma(b) + \int_b^t M(\tau)\gamma(\tau)d\tau$$

So erhalten wir die Abschätzung

$$\|\gamma(t)\| < C + \int_b^t S(\tau)\|\gamma(\tau)\|d\tau$$

für alle $t \in [b, c)$ und alle C mit $C > \|\gamma(b)\|$. Das Integral definiert eine Funktion $g(t)$ mit $g'(t) = S(t)\|\gamma(t)\| < S(t)C + S(t)g(t)$ und mit $g(b) = 0$. Für $f(t) = Ch(t) - C$ gilt nun sicher $f'(t) = S(t)C + S(t)f(t)$ und $f(b) = 0$. Nach unseren Erkenntnissen über strikte differentielle Ungleichheiten 7.1.22 folgt $g(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [b, c)$ und damit

$$\|\gamma(t)\| \leq Ch(t) \quad \forall t \in [b, c)$$

Da das für alle C mit $C > \|\gamma(b)\|$ gilt, folgt die Proposition. □

Korollar* 7.4.10. Seien $b > 0$ und V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $M : (0, b] \rightarrow \text{End } V$ stetig. Bezeichne $\| \cdot \|$ eine Norm auf V und die zugehörige Operatornorm auf $\text{End } V$. Erfüllt M die Abschätzung $\|M(t)\| < N/t$ für ein $N \in \mathbb{R}_{>0}$, so gilt für alle Lösungen $\gamma(t)$ der Differentialgleichung $\gamma'(t) = M(t)\gamma(t)$ die Abschätzung

$$\|\gamma(t)\| \leq \|\gamma(b)\|(b/t)^N$$

Übungen

Übung 7.4.11 (Nahe lineare Differentialgleichungen haben nahe Lösungen). Seien V ein endlichdimensionaler normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $b > 0$. Seien $A, B : [0, b] \rightarrow \text{End } V$ stetig mit durch $M > 0$ beschränkter Operatornorm. Für Lösungen $\phi, \psi : [0, b] \rightarrow V$ der Differentialgleichungen $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ und $\psi'(t) = B(t)\psi(t)$ mit demselben Anfangswert $v = \phi(0) = \psi(0)$ zeige man die Abschätzung

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| \leq \exp(t\|A - B\|_\infty) \cdot \|v\|e^{Mb}$$

Hinweis: Man finde zunächst mit 7.4.7 Schranken für die Lösungen und dann durch nochmalige Anwendung eine Schranke für ihre Differenz.

7.5 Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts

Definition 7.5.1. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge U eines normierten reellen Raums X besitzt nach 7.1.12 zu jedem Anfangswert $q \in U$ einen größten Flußweg $\gamma_q : I_q \rightarrow U$. Wir erklären seinen **Fluß** als die Abbildung

$$\Phi : (t, q) \mapsto \gamma_q(t)$$

von der Menge $\tilde{U} := \{(t, q) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in I_q\}$, dem **Definitionsbereich des Flusses**, in den Definitionsbereich U unseres Vektorfelds.

7.5.2. Allgemeiner vereinbaren wir dieselbe Definition für jedes Vektorfeld, das zu jedem Anfangswert einen größten Flußweg besitzt.

Satz 7.5.3 (Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts). *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums hat sein Fluß offenen Definitionsbereich und ist ebenfalls glatt.*

Ergänzung 7.5.4. Auch dieser Satz gilt mit fast demselben Beweis allgemeiner für jeden vollständigen normierten, nicht notwendig endlichdimensionalen Raum. Beim Beweis zeigen wir sogar, daß für jedes C^k -Vektorfeld mit $k \geq 1$ sein Fluß offenen Definitionsbereich hat und auch von der Klasse C^k ist.

Beweis. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X , eine offene Teilmenge $U \subseteq X$, ein C^k -Vektorfeld $A : U \rightarrow \vec{X}$ mit $k \geq 1$ und ein Punkt $p \in U$ wählen wir zunächst offene Umgebungen $V \subseteq U$ von p und $W \subseteq \vec{X}$ von Null mit $V + W \subseteq U$. Weiter wählen wir eine Norm auf \vec{X} . Dann betrachten wir für ein mehrpunktiges kompaktes reelles Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ den affinen Raum

$$C_p^1(I, X)$$

aller stetig differenzierbaren Wege $\gamma : I \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = p$. Seinen Richtungsraum $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X})$ verstehen wir mit der Norm $\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz von Funktion und erster Ableitung. Nach 7.2.11 erhalten wir so einen reellen Banachraum. Nun betrachten wir die Abbildung

$$F : \mathbb{R} \times V \times \mathcal{C}_0^1(I, W) \rightarrow \mathcal{C}(I, \vec{X}) \\ (\tau, q, \psi) \mapsto \psi' - \tau(A \circ (q + \psi))$$

Genau dann wird (τ, q, ψ) auf Null abgebildet, wenn $t \mapsto \gamma(t) = q + \psi(t)$ ein Flußweg des reskalierten Vektorfelds τA zum Anfangswert $\gamma(0) = q$ ist. Nach Summenregel 1.4.4, Produktregel 1.4.5 und dem im Anschluß bewiesenen Lemma 7.5.5 ist F differenzierbar mit Differential

$$(d_{(\tau, q, \psi)} F)(h, v, \alpha) = \alpha' - h(A \circ (q + \psi)) - \tau((dA) \circ (q + \psi, v + \alpha))$$

Insbesondere gilt $(d_{(0, p, 0)} F)(0, 0, \alpha) = \alpha'$, und da $\alpha \mapsto \alpha'$ eine stetige und stetig umkehrbare Bijektion $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(I, \vec{X})$ definiert und F nach unserer Formel stetig differenzierbar ist, dürfen wir den Satz über implizite Funktionen 3.2.7 anwenden. Er liefert uns ein Paar (A_1, B_1) mit $(0, p) \in A_1 \subseteq \mathbb{R} \times V$ und $0 \in B_1 \subseteq \mathcal{C}_0^1(I, W)$ derart, daß es für jedes $(\tau, q) \in A_1$ genau ein $\psi_{\tau, q} \in B_1$ gibt, für das $\gamma_{\tau, q} = q + \psi_{\tau, q}$ ein auf I definierter Flußweg des reskalierten Vektorfelds τA mit Anfangswert q ist. Wählen wir also etwa $I = [-1, 1]$, so finden wir in A_1 eine offene Umgebung von $(0, p)$ der Gestalt $(-\eta, \eta) \times D$, und daselbst ist dann auch der Fluß definiert. Da Flußwege unter Zeitverschiebung Flußwege bleiben, zeigt das schon mal, daß unser Fluß einen offenen Definitionsbereich hat. Weiter ist F nach obiger Formel für sein Differential sogar von der Klasse \mathcal{C}^k im Sinne von 6.5.6. Damit zeigt der Satz über implizite Funktionen mit den Resultaten und Definitionen von 6.5 aber auch, daß die Zuordnung $(\tau, q) \mapsto \gamma_{\tau, q}$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung $(-\eta, \eta) \times D \rightarrow \mathcal{C}^1(I, U)$ ist. Verknüpfen wir diese mit dem Auswerten an einer festen Stelle $t \in I \setminus \{0\}$, einer stetigen affinen Abbildung, und beachten $\gamma_{\tau, q}(t) = \gamma_q(\tau t)$, so folgt, daß der Fluß selbst eine \mathcal{C}^k -Abbildung ist. \square

Lemma 7.5.5. *Seien X, Y normierte Räume, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $A : U \rightarrow Y$ stetig differenzierbar. Für jedes Kompaktum K ist dann auch die Abbildung $(A \circ) : \mathcal{C}(K, U) \rightarrow \mathcal{C}(K, Y)$ differenzierbar und ihr Differential paßt in ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(K, U) \times \mathcal{C}(K, \vec{X}) & \xrightarrow{d(A \circ)} & \mathcal{C}(K, \vec{Y}) \\ \downarrow \wr & & \parallel \\ \mathcal{C}(K, U \times \vec{X}) & \xrightarrow{(dA) \circ} & \mathcal{C}(K, \vec{Y}) \end{array}$$

7.5.6. Hier verstehen wir für jeden normierten Raum Z den Abbildungsraum $\mathcal{C}(K, Z)$ mit seiner Norm der gleichmäßigen Konvergenz und identifizieren den Richtungsraum unseres Abbildungsraums in der hoffentlich offensichtlichen Weise mit $\mathcal{C}(K, \vec{Z})$. In der oberen Horizontalen meinen wir die Abbildung $(\gamma, \alpha) \mapsto (d_\gamma(A \circ))(\alpha)$ und in der unteren Horizontalen meint dA entsprechend die Abbildung $dA : U \times \vec{X} \rightarrow \vec{X}, (x, v) \mapsto (d_x A)(v)$.

Beweis. Es reicht, an jeder Stelle $\gamma \in \mathcal{C}(K, U)$ die Differenzierbarkeit zu untersuchen und das Differential $d_\gamma(A \circ)$ zu bestimmen. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es für alle $x \in \gamma(K)$ ein größtes $\eta(x) = \eta_\varepsilon(x) \in (0, 1)$ derart, daß gilt $B(x; \eta(x)) \subset U$ und

$$\|x - z\| < \eta(x) \Rightarrow \|d_x A - d_z A\| \leq \varepsilon$$

Man erkennt unschwer, daß $\eta : \gamma(K) \rightarrow (0, 1)$ stetig ist, ja sogar Lipschitzstetig mit Lipschitz-Konstante Zwei. Sei $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ das Minimum von η auf unserem Kompaktum $\gamma(K)$. Für $x \in \gamma(K)$ und $h \in \vec{X}$ mit $\|h\| \leq \delta$ liefert dann der Schrankensatz oder vielmehr sein Korollar 1.3.5 die Abschätzung

$$\|A(x+h) - A(x) - (d_x A)(h)\| \leq \|h\| \varepsilon$$

Für jedes $\alpha : K \rightarrow \vec{X}$ mit $\|\alpha\| \leq \delta$ gilt also

$$\|A \circ (\gamma + \alpha) - A \circ \gamma - (dA) \circ (\gamma, \alpha)\| \leq \|\alpha\| \varepsilon$$

Das war im wesentlichen die Behauptung. □

Satz 7.5.7 (Normalform eines Vektorfelds ohne Nullstelle). *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums, das an einer festen Stelle nicht verschwindet, ist unser Feld auf einer offenen Umgebung dieser Stelle unter einem Diffeomorphismus verwandt zu einem konstanten Feld.*

7.5.8. In Koordinaten gesprochen hat also jedes Vektorfeld, daß an einer vorgegebenen Stelle nicht verschwindet, in geeigneten lokalen Koordinaten x_1, \dots, x_n um diese Stelle die Gestalt $\frac{\partial}{\partial x_1}$.

Beweis. Sei X unser Raum, $U \Subset X$ unsere offene Teilmenge, $A : U \rightarrow \vec{X}$ unser Vektorfeld und $p \in U$ die vorgegebene Stelle. Wir wählen $\vec{Y} \subset \vec{X}$ komplementär zur Geraden mit Richtungsvektor A_p und wählen einen Isomorphismus $L : \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$. Gegeben ein glattes Vektorfeld A auf einer offenen Teilmenge U eines endlichdimensionalen affinen Raums schreiben wir im folgenden $A^t q$ für die Stelle $A^t q \in U$, an der der Punkt $q \in U$ landet, wenn er sich für die Zeitspanne t mit dem Fluß des Vektorfelds A treiben läßt. Man zeigt mühelos, daß für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und eine hinreichend kleine Umgebung $W \Subset \mathbb{R}^{n-1}$ des Ursprungs die Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W \rightarrow U, (t, \vec{w}) \mapsto A^t(p + L\vec{w})$ sinnvoll definiert und ein Diffeomorphismus der gewünschten Art ist. □

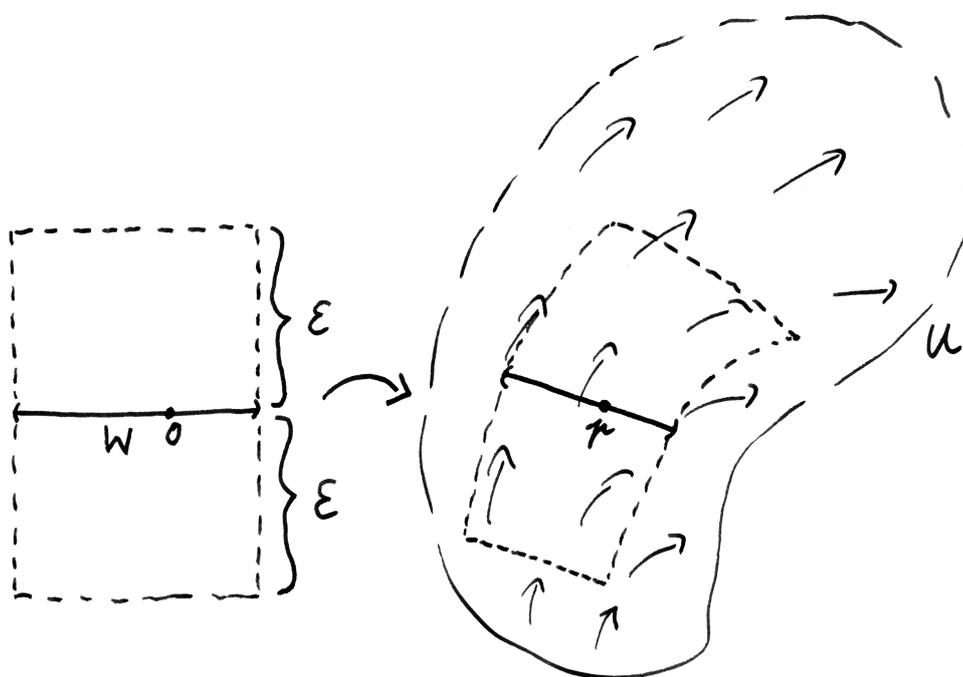


Illustration zum Beweis von Satz 7.5.7 zur lokalen Normalform eines Vektorfelds ohne Nullstelle

7.6 Ergänzung zu differentiellen Ungleichungen*

Lemma* 7.6.1 (Nicht-strikte differentielle Ungleichungen). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und sei $K : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Seien $a < b$ gegeben und seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit Graph in U derart, daß an jeder Stelle $t \in [a, b]$ gilt

$$f'(t) \geq K(t, f(t)) \quad \text{und} \quad g'(t) \leq K(t, g(t)).$$

Haben wir außerdem $g(0) \leq f(0)$, so folgt $g(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [a, b]$.

7.6.2. Die analoge Aussage mit einer strikten Ungleichung in der Formelzeile ist leichter zu zeigen und gilt sogar für beliebige Funktionen K , vergleiche 7.1.22. Sie reicht für die meisten Anwendungen aus.

Beweis. Die Beweisidee besteht darin, sich durch einen geeigneten Koordinatenwechsel auf den Fall zurückzuziehen, daß K die Nullfunktion ist. Wir argumentieren durch Widerspruch. Wäre die Aussage des Lemmas falsch, so gehörte

$$t := \inf\{s \in [a, b] \mid g(s) > f(s)\}$$

zu $[a, b)$ und wir hätten $g(t) = f(t)$. Wir setzen $y := g(t) = f(t)$. Für jedes $(t, y) \in U$ gibt es nach Satz 7.5.3 über den Fluß, genauer seiner Variante 7.5.4 für stetig differenzierbare Vektorfelder, positive $\varepsilon, \delta > 0$ und $F : (t - \delta, t + \delta) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $(s, F(s, z)) \in U$ für alle (s, z) aus dem Definitionsbereich von F und $k_z : s \mapsto F(s, z)$ einer Lösung der Differentialgleichung $k_z'(s) = K(s, k_z(s))$ mit Anfangswert $k_z(t) = z$ für alle $z \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Indem wir, um uns zusätzliches Nachdenken zu ersparen, möglicherweise ε und δ noch verkleinern, dürfen wir sogar annehmen, daß die Abbildung $\bar{F} : (s, z) \mapsto (s, F(s, z))$ offenes Bild $V \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $\bar{H} : V \xrightarrow{\sim} (t - \delta, t + \delta) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ hat, die wir natürlich als $\bar{H}(s, u) = (s, H(s, u))$ schreiben können mit $H : V \rightarrow \mathbb{R}$. Nun können wir $\delta > 0$ sogar so klein wählen, daß gilt $(s, f(s)), (s, g(s)) \in V$ für alle $s \in [t, t + \delta)$. Offensichtlich gilt $\partial_u F > 0$ und dann auch $\partial_u H > 0$ auf den jeweiligen Definitionsbereichen. Wir erreichen also bereits den gesuchten Widerspruch, wenn wir $H(s, g(s)) \leq H(s, k_y(s)) \leq H(s, f(s))$ zeigen für $s \in [t, t + \delta)$. Es reicht, die erste Ungleichung zu zeigen. Nach Konstruktion von H gilt $z = H(s, k_z(s))$ für alle (s, z) . Damit müssen wir einerseits nur noch $H(s, g(s)) \leq y$ zeigen für $s \in [t, t + \delta)$, und andererseits erhalten wir

$$0 = \frac{d}{ds} H(s, k_z(s)) = \frac{\partial H}{\partial s}(s, k_z(s)) + \frac{\partial H}{\partial u}(s, k_z(s))k_z'(s)$$

alias $0 = \frac{\partial H}{\partial s}(s, u) + \left(\frac{\partial H}{\partial u}(s, u)\right) K(s, u)$ für alle $(s, u) \in V$. Insbesondere haben wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}H(s, g(s)) &= \frac{\partial H}{\partial s}(s, g(s)) + \frac{\partial H}{\partial u}(s, g(s))g'(s) \\ &\leq \frac{\partial H}{\partial s}(s, g(s)) + \left(\frac{\partial H}{\partial u}(s, g(s))\right) K(s, g(s)) = 0\end{aligned}$$

Daraus folgt aber sofort $H(s, g(s)) \leq y$ für $s \in [t, t + \delta)$. □

8 Erste Schritte in klassischer Mechanik

8.1 Die Newton'schen Bewegungsgleichungen

8.1.1. Wie in [LA1] 5.5.10 fixieren wir einen eindimensionalen orientierten reellen affinen Raum

$$\mathbb{T}$$

und nennen ihn die **Zeit**. Die **Sekunde** entspricht einer orientierten Zeitspanne $s \in \vec{\mathbb{T}}_{>0}$. Weiter fixieren wir einen Bewegungsraum

$$\mathbb{E}$$

im Sinne von [LA2] 6.6.3 und nennen ihn den **Anschauungsraum**. Wie in [LA2] 6.4.1 erklärt, konstruieren wir aus diesen Daten einen ausgezeichneten orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum, die **Längengerade** $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathbb{E}}$. Außerdem erinnern wir aus [LA2] ?? das Tensorprodukt \otimes mit eindimensionalen Räumen und konstruieren nach [LA2] 6.4.1 ein kanonisches Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \vec{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

mit Einheiten in dieser Längengerade. Zumindest in Europa wird die schmutzige Längengerade meist vermittels des in der französischen Revolution gewählten **Meters** $m \in \mathbb{L}_{>0}$ mit der Zahlengerade \mathbb{R} identifiziert. Das kanonische Skalarprodukt auf dem Richtungsraum des schmutzigen Anschauungsraums nimmt also Werte in einem eindimensionalen reellen Vektorraum an, für den das Quadratmeter m^2 eine Basis ist. Des weiteren haben wir nach [LA2] 6.4.1 auch eine natürliche Abbildung $\| \cdot \| : \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{L}_{\geq 0}$, die eben jedem Vektor seine Länge zuordnet.

8.1.2. Um die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu formulieren, wählen wir zusätzlich einen $\mathbb{R}_{>0}$ -Torsor $\mathbb{M}_{>0}$ im Sinne von [LA2] 5.1.5.??, dessen Elemente wir **Massen** nennen. Ein schmutziges Element dieses Torsors ist zum Beispiel das in der französischen Revolution gewählte **Gramm** $g \in \mathbb{M}_{>0}$, das dadurch bestimmt wird, daß 1000 g in etwa die Masse eines Wasserwürfels der Kantenlänge 0,1 m ist. Den zugehörigen orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum notieren wir

$$[[\text{Masse}]] = \mathbb{M} := \mathbb{R} \times_{\mathbb{R}_{>0}} \mathbb{M}_{>0}$$

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen beschreiben die Bewegung eines Körpers oder Teilchens in Abhängigkeit von seiner Masse. Diese Masse kann etwa bestimmt werden durch das Aufwiegen mit Wasser und Bestimmung des benötigten Wasservolumens oder, wenn man es genauer braucht, durch den Vergleich mit der Masse eines im „Bureau international des poids et mesures“ in Sèvres bei Paris seit 1889 sorgsam gehüteten Zylinders aus einer Platin-Iridium-Legierung, des sogenannten **Urkilogramms**.

8.1.3. Gegeben ein bewegtes Teilchen im Sinne der Newton'schen Mechanik alias eine Abbildung

$$\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$$

von der Zeit oder allgemeiner einem mehrpunktigen Intervall dieser nach [LA1] 5.5.8 angeordneten Menge in den Anschauungsraum ist ihr Differential 1.2.2, wenn es denn existiert, eine Abbildung $\dot{\gamma} : t \mapsto d_t \gamma, \mathbb{T} \rightarrow \text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$. Unter unserer Identifikation $\text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}}) \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ aus [LA2] 6.1.18 wird dieses Differential zu einer Abbildung

$$\dot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$$

Man nennt $\dot{\gamma}(t)$ die **Geschwindigkeit** oder präziser die **vektorielle Geschwindigkeit** unseres Teilchens zum Zeitpunkt t .

8.1.4. Seien gegeben V ein reeller Vektorraum, L ein orientierter eindimensionaler reeller Vektorraum, ein Skalarprodukt mit Längeneinheiten $s : V \otimes V \rightarrow L^{\otimes 2}$ im Sinne von [LA2] 6.5.7, sowie ein weiterer eindimensionaler orientierter Vektorraum T . In dieser Situation erhalten wir durch Darantensorieren von $T^{\otimes 2}$ offensichtlich auf $V \otimes T$ ein Skalarprodukt mit Einheiten $L \otimes T$.

8.1.5. Das kanonische Skalarprodukt auf $\vec{\mathbb{E}}$ liefert insbesondere auf $\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ ein Skalarprodukt mit Einheiten in $\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$. Den zugehörigen Absolutbetrag im Sinne von [LA2] 6.5.7 des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\gamma}(t) \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ heißt die **absolute Geschwindigkeit** $\|\dot{\gamma}(t)\| \in (\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)_{\geq 0}$ unseres Teilchens zum Zeitpunkt t .

8.1.6. Um unserer Notation der Einheiten etwas an Schwere zu nehmen, vereinbaren wir für unsere eindimensionalen Vektorräume von Einheiten die Notation als Erzeugnis eines üblichen Erzeugers in verdoppelten Erzeugerklammern, also etwa

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{T}} &= \langle\langle s \rangle\rangle && \text{mit } s \text{ für „Sekunde“ ;} \\ \mathbb{L} &= \langle\langle m \rangle\rangle && \text{mit } m \text{ für „Meter“ ;} \\ \mathbb{M} &= \langle\langle g \rangle\rangle && \text{mit } g \text{ für „Gramm“ .} \end{aligned}$$

Weiter notieren wir bei unseren eindimensionalen Räumen die duale Basis des Dualraums statt v^\top meist lieber v^{-1} oder $1/v$, so daß wir den Dualraum $\vec{\mathbb{T}}^*$ des Raums der Zeitspannen auch schreiben könnten als $\vec{\mathbb{T}}^* = \langle\langle 1/s \rangle\rangle$ oder $\vec{\mathbb{T}}^* = \langle\langle s^{-1} \rangle\rangle$. Schließlich lassen wir in diesem Zusammenhang die \otimes -Zeichen meist weg und schreiben für ganze Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ kürzer v^r für unser Element $v^{\otimes r} \in V^{\otimes r}$ aus [LA2] 6.1.13. So wäre etwa $\langle\langle m^2 \rangle\rangle = \mathbb{L}^{\otimes 2}$ eine Notation für den eindimensionalen orientierten reellen Vektorraum, dessen nichtnegative Elemente man meist „Flächen“ nennt und den wir manchmal statt mit $\mathbb{L}^{\otimes 2}$ auch mit $\llbracket \text{Fläche} \rrbracket$ bezeichnen werden. In derselben Weise schreiben wir etwa m/s für den Vektor $m \otimes s^{\otimes (-1)}$ aus $\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ und notieren diesen Raum auch $\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* = \langle\langle m/s \rangle\rangle$.

8.1.7. Das Differential der vektoriellen Geschwindigkeit ist, wenn es denn existiert, hinwiederum eine Abbildung $\dot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$ oder in unserer neuen Notation

$$\dot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$$

Man nennt $\ddot{\gamma}(t)$ die **Beschleunigung** oder genauer die **vektorielle Beschleunigung** unseres Teilchens zum Zeitpunkt t . Die **absolute Beschleunigung** bezeichnet dahingegen den Betrag $\|\ddot{\gamma}(t)\| \in \langle\langle m/s^2 \rangle\rangle$ der vektoriellen Beschleunigung.

8.1.8. Unter einem **Kraftfeld** versteht man eine Abbildung

$$F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$$

Hierbei ist im Sinne unserer neuen Notation $\langle\langle g/s^2 \rangle\rangle = \mathbb{M} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$ zu verstehen. Der Buchstabe F erinnert an englisch **force**. Unter der **Newton'schen Bewegungsgleichung** für die Bewegung eines Teilchens einer Masse $m \in \mathbb{M}$ in einem Kraftfeld F versteht man die Forderung „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ und in Formeln ausgedrückt die Gleichheit

$$F \circ \gamma = m\ddot{\gamma}$$

von Abbildungen $\mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$, der die Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ unseres Teilchens gehorchen soll.

8.1.9. Unter einem **Gravitationsfeld** versteht man eine Abbildung

$$G : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$$

Die von einem derartigen Feld auf ein Teilchen der Masse m ausgeübte Kraft wird per definitionem gegeben durch die Gleichung

$$F = mG$$

Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen beliebiger Masse in einem Gravitationsfeld G lautet damit

$$G \circ \gamma = \ddot{\gamma}$$

und ist aufzufassen als eine Gleichheit von Abbildungen $\mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$.

Ergänzung 8.1.10. A priori könnte man auch eine konsistente Theorie formulieren, die zwei Arten von Massen postuliert, als da heißt zwei $\mathbb{R}_{>0}$ -Torsoren $\mathbb{M}_{\text{sch}}^+$ und \mathbb{M}_{tr}^+ , und in der jedem Teilchen zwei Arten von Masse, seine **schwere Masse** $m_{\text{sch}} \in \mathbb{M}_{\text{sch}}^+$ sowie seine **träge Masse** $m_{\text{tr}} \in \mathbb{M}_{\text{tr}}^+$ zugeordnet würden. Wir hätten dann die beiden zugehörigen eindimensionalen reellen Vektorräume \mathbb{M}_{sch} und

\mathbb{M}_{tr} zu bilden. Ein Kraftfeld hätte per definitionem Werte in $\vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2} \otimes \mathbb{M}_{\text{tr}}$ und die Bewegungsgleichung in diesem Kraftfeld hätte die Gestalt

$$m_{\text{tr}} \ddot{\gamma} = F \circ \gamma$$

Dahingegen würde ein Gravitationsfeld Werte in $\vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2} \otimes \mathbb{M}_{\text{tr}} \otimes \mathbb{M}_{\text{sch}}^*$ annehmen und die jeweils auf unser Teilchen wirkende Kraft durch die Multiplikation des Gravitationsfelds wäre mit seiner schweren Masse m_{sch} zu berechnen. Mit der Waage mässe man also die schwere Masse und durch die Beobachtung etwa von Stößen mit einem „Referenzteilchen“ und Ausnützen der im folgenden noch zu besprechenden „Impulserhaltung“ die träge Masse. Ein durch viele Experimente bestätigtes Prinzip der klassischen Mechanik ist nun jedoch die **Gleichheit von träger und schwerer Masse**, so daß wir stets $m_{\text{sch}} = m_{\text{tr}}$ annehmen und ohne nähere Spezifikation schlicht von der **Masse** eines Teilchens reden werden.

8.1.11. Das Gravitationsfeld an der Erdoberfläche kann lokal recht gut approximiert werden durch ein konstantes Feld \vec{g} mit $\vec{g} \sim (9,8)\vec{m}/s^2$, wobei $\vec{m} \in \vec{\mathbb{E}}$ denjenigen einen Meter langen Vektor bezeichnet, der an der gegebenen Stelle in Richtung des Erdmittelpunktes zeigt. Man schreibt auch $\|\vec{g}\| := g \sim (9,8)m/s^2$ für den Betrag dieses konstanten Feldes und nennt diese Beschleunigung die **Erdbeschleunigung**. Ob der Buchstabe g das Gramm oder die Erdbeschleunigung meint, muß aus dem Kontext erschlossen werden.

Beispiel 8.1.12 (Flugbahn eines geworfenen Massenpunktes). Für die Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ eines nur der Gravitationskraft ausgesetzten Massepunktes an der Erdoberfläche, etwa einer Kanonenkugel oder eines Schneeballs, muß nach dem vorhergehenden die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt die Erdbeschleunigung sein, in Formeln

$$\ddot{\gamma}(t) = \vec{g}$$

für alle Zeiten t . Um das zu konkretisieren, bezeichne $t : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}$ die Identifikation der reellen Zahlengeraden mit der Zeitachse mittels der Abbildungsvorschrift $t : x \mapsto t_0 + xs$ für einen beliebigen Zeitpunkt t_0 und unsere Zeiteinheit Sekunde $s \in \vec{\mathbb{T}}$, so werden die Ableitungen der Verknüpfung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$, $x \mapsto \gamma(t_0 + xs)$ nach der Kettenregel gegeben durch

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{dx} = s \frac{d\gamma}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\gamma}{(dx)^2} = s \frac{d^2\gamma}{(dt)^2} \frac{dt}{dx} = s^2 \frac{d^2\gamma}{(dt)^2}$$

Hier ist nun bereits alles mögliche implizit zu verstehen, aber das alles auszu-schreiben führt zu ungenießbaren Formeln. So ergibt sich für die Bewegung unseres Teilchens in unserer von Einheiten befreiten Zeitkoordinate x die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\gamma}{(dx)^2} = s^2 \vec{g}$$

Deren allgemeine Lösung ergibt sich durch direktes Integrieren zu

$$\gamma(xs + t_0) = (x^2/2)s^2 \vec{g} + x\vec{a}_0 + p_0$$

mit $\vec{a}_0 \in \mathbb{E}$ einem festen Richtungsvektor und $p_0 \in \mathbb{E}$ einem festen Ort. Durch Einsetzen von $xs = \tau$ erhalten wir schließlich

$$\gamma(\tau + t_0) = (\tau^2/2)\vec{g} + \tau\vec{v}_0 + p_0 \sim (4,9)\tau^2(\vec{m}/s^2) + \tau\vec{v}_0 + p_0$$

mit $\vec{v}_0 = \vec{a}_0/s$ der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 und $p_0 \in \mathbb{E}$ dem Ort zum Zeitpunkt t_0 . Mit etwas Übung oder sogar schon vorher wird der hier noch ganz pedantisch ausgeführte Zwischenschritt der Wahl eines Isomorphismus von affinen Räumen $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}$ üblicherweise dann auch weggelassen.

Beispiel 8.1.13 (Reichweite eines Geschützes). Wollen wir wissen, in welcher Entfernung eine an einer Stelle $p_0 \in \mathbb{E}$ unter einem gegebenen Winkel ϑ gegen die Horizontale mit einer gegebenen Mündungsgeschwindigkeit $v_0 \in \langle\langle \text{m/s} \rangle\rangle$ abgeschossene Kugel einschlägt, so betrachten wir einen vertikalen einen Meter langen Vektor $\vec{m}_v = -\vec{m}$ und einen horizontalen einen Meter langen Vektor in Richtung der Mündung \vec{m}_h und finden für die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = a\vec{m}_v/s + b\vec{m}_h/s$ die Bahnkurve

$$\gamma(t + t_0) = -(4,9)t^2 \vec{m}_v/s^2 + ta \vec{m}_v/s + tb \vec{m}_h/s + p_0$$

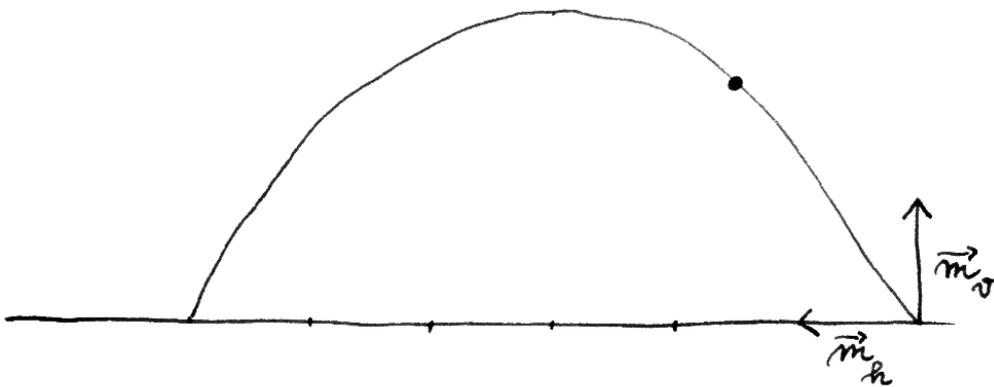
Die Zeit, nach der die Kugel wieder den Boden erreicht, ist folglich die Lösung der Gleichung $(-4,9)t^2/s^2 + ta/s = 0$ alias $t = (a/(4,9))s$. Der Einschlagsort ist mithin

$$p_0 + \frac{ab}{4,9}\vec{m}_h$$

Mündungsgeschwindigkeit v_0 und Abschlußwinkel ϑ berechnen sich aus a und b mittels $v_0 = (\sqrt{a^2 + b^2})\text{m/s}$ und $\tan \vartheta = a/b$. Wir finden aber auch umgekehrt für $v_0 = c(\text{m/s})$ die Identitäten $\sin \vartheta = a/c$ und $\cos \vartheta = b/c$ alias $a = c \sin \vartheta$ und $b = c \cos \vartheta$. Der Abschlußwinkel, unter dem die Kugel am weitesten kommt, ist das Maximum von $(\cos \vartheta \sin \vartheta)$ für $\vartheta \in [0, \pi/2]$ alias das Maximum von $\frac{1}{2} \sin 2\vartheta$. Der optimale Abschlußwinkel ist also $\pi/4 = 45^\circ$, und die Kugel schlägt dann bei einer Mündungsgeschwindigkeit von $v_0 = c(\text{m/s})$ in einer Entfernung von $(c/(9,8))$ m ein.

8.2 Die Mathematik der Bewegungsgleichungen

8.2.1. Wählen wir eine affine Bijektion zwischen der reellen Zahlengeraden \mathbb{R} und der Zeitachse \mathbb{T} , so wird unsere Bewegungsgleichung 8.1.9 in der Terminologie aus 7 folgende ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter



Die Flugbahn einer Kanonenkugel ist bei Vernachlässigung des Luftwiderstands eine Parabel im Sinne von [AN1] 4.9.5. Die Bezeichnung „Parabel“ kommt eben nicht umsonst vom griechischen Wort für „Werfen“.

Ordnung. Die allgemeine Theorie 7.1.3 legt uns die Reduktion auf ein System von doppelt so vielen Gleichungen erster Ordnung nahe. In unserem konkreten Fall betrachten wir dazu den sogenannten **Phasenraum**, genauer den **Geschwindigkeitsphasenraum** $\mathbb{E} \times (\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)$ aller Paare (r, v) bestehend aus einem Ort $r \in \mathbb{E}$ und einer Geschwindigkeit $v \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$. Jede differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ liefert uns eine Abbildung in den Phasenraum

$$\psi := (\gamma, \dot{\gamma}) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E} \times (\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)$$

Mit dieser Notation erfüllt γ die Newton'schen Bewegungsgleichungen $m\ddot{\gamma} = F \circ \gamma$ genau dann, wenn $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{1}{m} F \circ \psi_1 \end{aligned}$$

erfüllt. In geometrischer Sprache kann entsprechen die Lösungen ψ dieses letzteren Systems unter jeder affinen Identifikation der Zeitachse mit der reellen Zahlengeraden den Flußwegen eines Vektorfelds auf dem Phasenraum. Um auch diese Identifikation noch zu vermeiden, vereinbaren wir für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines affinen Raums X , daß wir unter einem **Geschwindigkeitsfeld auf U** eine Abbildung

$$A : U \rightarrow \vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$$

verstehen wollen. Flußwege derartiger Geschwindigkeitsfelder A verstehen wir dann als auf mehrpunktigen Zeitintervallen $I \subset \mathbb{T}$ definierte Abbildungen $\psi : I \rightarrow U$ mit

$$\dot{\psi} = A \circ \psi$$

Unter vernünftigen Annahmen, etwa für jedes stetig differenzierbare Kraftfeld F , gibt es dann nach dem Satz von Picard-Lindelöf 7.1.12 zu jedem Punkt (x_0, v_0) des Phasenraums und jedem Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{T}$ genau einen maximalen Flußweg

$$\psi : I \rightarrow \mathbb{E} \times (\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)$$

mit $t_0 \in I$ und $\psi(t_0) = (x_0, v_0)$ alias genau eine maximale Lösung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}$ der ursprünglichen Bewegungsgleichungen mit vorgegebenem Ort $x_0 = \gamma(t_0)$ und vorgegebener Geschwindigkeit $v_0 = \dot{\gamma}(t_0)$ zum vorgegebenen Zeitpunkt t_0 .

8.2.2. Unter einem **Potential** eines Kraftfelds $F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle \text{g/s}^2 \rangle\rangle$ versteht man eine differenzierbare Abbildung $V : \mathbb{E} \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$ mit der Eigenschaft

$$-(d_x V)(v) = \langle F(x), v \rangle \quad \forall x \in \mathbb{E}, v \in \vec{\mathbb{E}}$$

Anders gesagt fordern wir von einem Potential also, daß das Negative seines Differentials $-dV : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}^* \otimes \langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$ unter der durch unser kanonisches Skalarprodukt $\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \langle\langle \text{m}^2 \rangle\rangle$ gegebenen Identifikation $\text{can} : \vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^* \otimes \langle\langle \text{m}^2 \rangle\rangle$ dem Kraftfeld $F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle \text{g}/\text{s}^2 \rangle\rangle$ entspricht.

Satz 8.2.3 (Energieerhaltung). Für die Bewegung γ eines Massepunktes der Masse m in einem Kraftfeld mit Potential V erhalten wir eine Invariante der Bewegung alias eine von der Zeit t unabhängige Konstante durch den Ausdruck

$$\frac{m}{2} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + V(\gamma(t))$$

8.2.4. Der erste Summand heißt die **kinetische Energie**, der zweite die **potentielle Energie**, und der Satz ist ein Spezialfall des allgemeinen physikalischen Prinzips der „Energieerhaltung“.

Beweis. Ableiten nach t liefert mit unserer Formel 1.4.5 für das Differential bilinearer Abbildungen

$$m \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + (d_{\gamma(t)} V)(\dot{\gamma}(t)) = \langle m \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle - \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0 \quad \square$$

8.3 Planetenbewegung

8.3.1 (**Heuristische Vorüberlegung**). Stellen wir uns einmal vor, wir wären Newton. Kepler hat bereits aus den akribischen Beobachtungen von Tycho Brahe herausdestilliert, daß die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne kreisen, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht. Wir gehen von der zumindest nicht unvernünftigen Annahme aus, daß die von der Sonne ausgehende Gravitationskraft mit wachsendem Abstand schwächer wird in derselben Weise, wie sich ein Gas verdünnen würde, das von der Sonne ausgeschwitzt wird und sich, indem es nach allen Seiten mit konstanter Geschwindigkeit von der Sonne wegströmt, in den unendlichen Weiten des Weltraums verteilt. Dann ist klar, daß durch jede in der Sonne zentrierte Kugelschale in einer festen Zeitspanne dieselbe Gasmenge strömen muß. Da aber die Oberfläche einer Kugelschale vom Radius r ein festes Vielfaches r^2 ist, muß unser Gas in einem Abstand r von der Sonne eine zu $1/r^2$ proportionale Dichte haben. Durch derartige Überlegungen motiviert machen wir für das Gravitationsfeld G der Sonne den Ansatz

$$G(x) = c \cdot \frac{S - x}{\|S - x\|^3}$$

für $S \in \mathbb{E}$ den Ort der Sonne, den wir uns fest denken, und $c \in \langle\langle \text{m}^3/\text{s}^2 \rangle\rangle$ eine Konstante. Ist M die Masse unseres Planeten, so ist MG das zu unserer Bewegung

gehörige Kraftfeld und dieselbe Rechnung wie in 5.1.18 liefert uns für dieses Feld das Potential

$$V(x) = -\frac{Mc}{\|S - x\|}$$

Nun setzen wir die Bewegung unseres Planeten an als

$$\gamma(t) = S + \vec{\gamma}(t)$$

für $\vec{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}$. Da ein **Zentralfeld** vorliegt, die auf unseren Planeten wirkende Kraft zeigt nämlich stets in Richtung der Sonne, ist auch das mit Einheiten, genauer als Element von $\vec{\mathbb{E}} \otimes \mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}})$ verstandene und in [LA2] 6.7.4 konstruierte Kreuzprodukt

$$L := \vec{\gamma}(t) \times \dot{\vec{\gamma}}(t)$$

eine Invariante der Bewegung: In der Tat ergibt sich seine zeitliche Ableitung nach der Produktregel für bilineare Abbildungen zu

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) \times \dot{\vec{\gamma}}(t) + \vec{\gamma}(t) \times \ddot{\vec{\gamma}}(t) = 0$$

Multiplizieren wir diese Invariante noch mit der Masse des Planeten, so erhalten wir den sogenannten **Drehimpuls** des Planeten um die Sonne. Ist dieser Drehimpuls Null, so liegt eine Lösung vor, bei der unser Planet auf geradem Wege in die Sonne stürzt oder sich umgekehrt längs eines Sonnenstrahls von der Sonne entfernt. Ist der Drehimpuls nicht Null, was wir von nun an annehmen wollen, so muß unser Planet in derjenigen Ebene durch die Sonne bleiben, auf der sein Drehimpuls senkrecht steht, und kann nie in die Sonne stürzen. Wir wählen in dieser Ebene nun ein Orthogonalsystem \vec{e}_1, \vec{e}_2 bestehend aus zwei Vektoren gleicher Länge $l = \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\|$ und gehen zu Polarkoordinaten über und betrachten genauer die Abbildung

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} &\rightarrow \vec{\mathbb{E}} \\ (r, \varphi) &\mapsto r((\cos \varphi)\vec{e}_1 + (\sin \varphi)\vec{e}_2) \end{aligned}$$

Da wir bereits wissen, daß die Bewegung in einer Ebene bleiben muß und nicht durch die Sonne führt, können wir $\vec{\gamma}(t) = P(r(t), \varphi(t))$ ansetzen, zumindest für t aus einem kleinen Zeitintervall. Wir erhalten

$$\dot{\vec{\gamma}} = \dot{r}((\cos \varphi)\vec{e}_1 + (\sin \varphi)\vec{e}_2) + r\dot{\varphi}(-(\sin \varphi)\vec{e}_1 + (\cos \varphi)\vec{e}_2)$$

und insbesondere

$$\langle \dot{\vec{\gamma}}, \dot{\vec{\gamma}} \rangle = l^2(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2)$$

Der Energieerhaltungssatz liefert damit, daß die Gesamtenergie

$$\frac{M}{2}l^2(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - \frac{Mc}{rl} = E$$

eine Konstante der Bewegung ist. Dasselbe gilt für die Länge unseres Kreuzprodukts alias den Drehimpuls und damit für

$$r^2\dot{\varphi} = D$$

Insbesondere gilt unter unseren Annahmen stets $\dot{\varphi} \neq 0$. Wir wollen nun zeigen, daß diese beiden Gleichungen bereits implizieren, daß unsere Bewegung auf einem Kegelschnitt mit der Sonne in einem Brennpunkt geschehen muß. Die Kunst besteht dabei darin, in einem ersten Schritt die vollständige Berechnung der Bewegung zu vermeiden, die auf ziemlich komplizierte Ausdrücke führt. Vielmehr interessieren wir uns vorerst nur für die Form der Bahnkurve. Der zeitliche Ablauf, in dem sie durchlaufen wird, folgt dann ohne weitere physikalische Schwierigkeiten aus dem Energieerhaltungssatz, aber die Berechnung der dabei entstehenden Integrale wollen wir eben vermeiden. Dazu bilden wir aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, die die Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung in Polarkoordinaten ausdrücken, eine einzige Gleichung, in der die zeitlichen Ableitungen unserer neuen Koordinaten nur in der Kombination $\dot{r}/\dot{\varphi}$ vorkommen: Dieser Quotient ist nämlich von der Parametrisierung der Bahnkurve durch die Zeit unabhängig. Teilen wir etwa das Quadrat der zweiten Gleichung aus der ersten Gleichung weg, so ergibt sich mit

$$\frac{Ml^2}{2r^4} \left(\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \right)^2 + \frac{Ml^2}{2r^2} - \frac{Mc}{rD^2} = \frac{E}{D^2}$$

eine Gleichung der gewünschten Form. Da nun gilt $\dot{\varphi} \neq 0$, können wir den Radius als Funktion des Winkels schreiben, $r = r(\varphi)$. Da auch der Radius bei Lösungen mit von Null verschiedenem Drehimpuls nie Null wird, können wir weiter auch den inversen Radius als Funktion des Winkels schreiben und setzen $u(\varphi) := 1/r(\varphi)$. Für die Ableitung u' von u nach dem Winkel erhalten wir dann

$$u' = -r'/r^2 = -\dot{r}/\dot{\varphi}r^2$$

und unsere Differentialgleichung erhält die Gestalt

$$(u')^2 + u^2 + Au = B$$

mit $A = 2c/D^2l^3$ und $B = 2E/Ml^2D^2$. Ableiten nach φ liefert unmittelbar

$$2u'u'' + 2uu' + Au' = 0$$

Alle Lösungen müssen auf dem Teil ihres Definitionsbereichs, auf dem die Ableitung u' nicht verschwindet, demnach auch der Differentialgleichung

$$2u'' + 2u = -A$$

gehören. Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Eine Basis des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung bilden $u_1(\vartheta) = \sin \vartheta$ und $u_2(\vartheta) = \cos \vartheta$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist etwa $u_s(\vartheta) = -A/2$. Die allgemeine Lösung ist also $u(\vartheta) = b \cos(\vartheta - \vartheta_0) - A/2$ für Konstanten b, ϑ_0 . Indem wir das in unsere ursprüngliche Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir $b^2 - A^2/4 = B$ alias $b = \pm \sqrt{B + A^2/4}$. Damit ist unser Problem gelöst. Wir prüfen nun nur noch, daß die Lösungen Kegelschnitte sein müssen.

8.3.2 (Ellipsen sind Planetenbahnen). Es gilt, eine Ellipse mit einem Brennpunkt im Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten zu schreiben. Nach der Diskussion in [LA2] 1.9.40 lautet die entsprechende Gleichung

$$c = r + \sqrt{(r \cos \varphi - a)^2 + r^2 \sin^2 \varphi}$$

für $(a, 0)$ den zweiten Brennpunkt und $((a + c)/2, 0)$ den Schnittpunkt unserer Ellipse mit der positiven x -Achse. Wir subtrahieren r auf beiden Seiten und quadrieren zu

$$r^2 - 2ar \cos \varphi + a^2 = r^2 - 2cr + c^2$$

Elementare Umformungen liefern

$$r = \frac{c^2 - a^2}{2c - 2a \cos \varphi}$$

Durch Ändern der Parameter zu $\beta := a/c$ und $\alpha := (c^2 - a^2)/2c$ landen wir bei der Gleichung

$$r = \frac{\alpha}{1 - \beta \cos \varphi}$$

Um unsere obige Gleichung zu prüfen, dürfen wir die Durchlaufgeschwindigkeit beliebig wählen, so etwa auch $\varphi(t) = t$. Damit erhalten wir $\dot{\varphi} = 1$ und

$$\dot{r} = \frac{-\alpha\beta \sin t}{(1 - \beta \cos t)^2} = \frac{-\beta \sin t}{\alpha} r^2$$

und Einsetzen in unsere obige Gleichung liefert

$$\frac{Ml^2}{2\alpha^2} \beta^2 \sin^2 t + \frac{Ml^2}{2\alpha^2} (1 - 2\beta \cos t + \beta^2 \cos^2 t) - \frac{Mc}{\alpha l D^2} (1 - \beta \cos t) = \frac{E}{D^2}$$

Hier ist aber in der Tat die linke Seite unabhängig von t falls gilt

$$\frac{Ml^2}{\alpha^2} = \frac{Mc}{\alpha l D^2}$$

alias $\alpha = l^3 D^2 / c$. Wir sehen so, daß in der Tat unsere Ellipsen mögliche Lösungskurven sein müssen.

Ergänzung 8.3.3. Daß die Lösungskurven Kegelschnitte sein müssen, kann man auch unschwer einsehen, indem man nachrechnet, daß der sogenannte **Runge-Lenz-Vektor**

$$\frac{1}{c} \dot{\vec{\gamma}} \times L + \frac{\vec{\gamma}}{\|\vec{\gamma}\|}$$

eine Invariante der Bewegung sein muß. Man beachte $L \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle \text{m/s} \rangle\rangle \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}})$, also $\dot{\vec{\gamma}} \times L \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle \text{m}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$, und wegen $c \in \langle\langle \text{m}^3/\text{s}^2 \rangle\rangle$ gehören beide Summanden zum Raum $\vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/\text{m} \rangle\rangle$. Dieser Zugang gefällt mir aber weniger, da man den Runge-Lenz-Vektor dabei „vom Himmel fallen lassen muß“.

8.4 Systeme mit Zwangsbedingungen

Beispiel 8.4.1 (Ein Massepunkt mit einer Zwangsbedingung). Wir untersuchen als erstes Beispiel das Verhalten eines einzigen Massepunktes alias Teilchens, dessen Bewegung auf eine Fläche im Raum eingeschränkt ist. Als physikalisches Modell mag man an ein nasses Stück Seife denken, das in der Schwerelosigkeit und ohne Reibung im leeren Tank einer Raumfähre herumrutscht, in den es ein übermütiger Astronaut mit Schwung hat hineingleiten lassen. Wir modellieren diesen Tank als eine zweidimensionale **Untermannigfaltigkeit** $M \subset \mathbb{E}$ des Anschauungsraums, die wir der Einfachheit halber **glatt** annehmen wollen. Zu jedem Zeitpunkt übt unsere Fläche eine Kraft auf unser Teilchen aus, deren Richtung – das jedenfalls scheint eine „physikalisch sinnvolle“ Annahme – senkrecht zur Fläche steht und deren Größe gerade so bemessen ist, daß sie das Teilchen auf der Fläche hält. Die Bewegung wird unter dieser Annahme beschrieben durch eine zweimal differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow M$ mit der Eigenschaft

$$\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{T}$, wo die zweifache Ableitung für die Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ zu verstehen ist, die aus γ durch das Nachschalten der Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{E}$ entsteht. Formal betrachtet liegt $\ddot{\gamma}(t)$ zwar in $\vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/\text{s}^2 \rangle\rangle$ und unsere Tangentialräume aus 6.3.1 sind für alle Punkte $p \in M$ Untervektorräume $T_pM \subset \vec{\mathbb{E}}$, aber die Bedingung des Senkrechtstehens ist dennoch sinnvoll. Für die Leser, die die entsprechende mathematische Terminologie kennen, kann das formuliert werden als die Aussage, daß sich unser Teilchen mit konstanter absoluter Geschwindigkeit längs einer „Geodäte von M “ bewegt. Bewegt sich unser Teilchen zusätzlich in einem Kraftfeld $\mathbf{F} : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle \text{g/s}^2 \rangle\rangle$ und hat die Masse m , so lauten die Bewegungsgleichungen analog

$$m\ddot{\gamma}(t) - \mathbf{F}(\gamma(t)) \perp T_{\gamma(t)}M$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{T}$. Bevor wir Lösungswege diskutieren, besprechen wir erst einmal ein etwas komplizierteres System.

Beispiel 8.4.2 (Eine Hantel in der Schwerelosigkeit). Denken wir uns zwei durch einen starren masselosen Stab positiver Länge $l \in \mathbb{L}_{>0}$ verbundene Punkte der Massen $m_1, m_2 \in \mathbb{M}_{>0}$, also eine Art unsymmetrische Hantel, die in der Schwerelosigkeit durch das Weltall torkelt. Die Bewegung unserer Hantel wird dann beschrieben durch zwei Abbildungen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| = l$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{T}$, also durch eine Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow M$ der Zeitachse \mathbb{T} in die Untermannigfaltigkeit

$$M := \{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathbb{E}^2 \mid \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = l\} \subset \mathbb{E}^2$$

Hier und im folgenden gilt es zu beachten, daß die Einträge in Tupeln keineswegs immer reelle Zahlen zu sein brauchen. So meinen im vorhergehenden etwa \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 Punkte des Anschauungsraums \mathbb{E} und können ihrerseits durch die Wahl eines Koordinatensystems mit Elementen des \mathbb{R}^3 identifiziert werden, so daß man unser Paar $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ nach der Wahl geeigneter Koordinaten auch mit einem Sextupel von reellen Zahlen identifizieren könnte. Weiter gilt es zu beachten, daß wir $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^{\oplus 2} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{E} = \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ meinen, aber $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}^{\otimes 2} \in \mathbb{L}^{\otimes 2}$. Nach dem Newton'schen Prinzip „actio est reactio“ gilt $\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{Z}_2$ für die vom Stab auf die jeweiligen Massepunkte ausgeübten „Zwangskräfte“ \mathbf{Z}_1 und \mathbf{Z}_2 . Des weiteren deklarieren wir die Annahme als „physikalisch sinnvoll“, daß diese Zwangskräfte stets in Richtung unseres Stabes wirken. Zusammengefaßt und in Formeln geschrieben nehmen wir also an, daß gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(t) &= a(t)(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) \\ \mathbf{Z}_2(t) &= a(t)(\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) \end{aligned}$$

für unbekanntes $a : \mathbb{T} \rightarrow \langle\langle \text{g/s}^2 \rangle\rangle$. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) &= a(t)(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t) &= a(t)(\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) \end{aligned}$$

für $\gamma = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \mathbb{T} \rightarrow M$. Um diese Gleichungen als Geodätengleichung zu interpretieren, berechnen wir zunächst das orthogonale Komplement des Tangentialraums von M . Per definitionem ist M eine Niveaufläche der Funktion $f : (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mapsto \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2$. Das Differential dieser Abbildung bei $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ergibt sich mit 1.4.5 zu

$$d_r f : (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \mapsto 2\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{h}_1 \rangle - 2\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{h}_2 \rangle$$

Der Kern dieser Abbildung ist der Tangentialraum $T_r M$. Wir erkennen so, daß für alle $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in M$ der Vektor $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ auf $T_r M$ senkrecht steht, da nämlich für das komponentenweise $\langle\langle \text{m}^2 \rangle\rangle$ -wertige Skalarprodukt auf dem Richtungsraum $\vec{\mathbb{E}}^2$ des Raums \mathbb{E}^2 das Skalarprodukt dieses Vektors mit allen weiteren

Vektoren ein festes Vielfaches des Wertes von $d_r f$ auf den fraglichen weiteren Vektoren ist. Definieren wir nun zusätzlich auf $\vec{\mathbb{E}}^2$ das **massebehaftete Skalarprodukt**

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_g : \vec{\mathbb{E}}^2 \times \vec{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2 \rangle\rangle$$

durch $\langle (\vec{r}_1, \vec{r}_2), (\vec{s}_1, \vec{s}_2) \rangle_g := m_1 \langle \vec{r}_1, \vec{s}_1 \rangle + m_2 \langle \vec{r}_2, \vec{s}_2 \rangle$, so wird das bezüglich dieses massebehafteten Skalarprodukts orthogonale Komplement zu $T_r M$ aufgespannt von $((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/m_1, (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/m_2)$. Dieser Vektor liegt zwar von seinen Einheiten her in $\vec{\mathbb{E}}^2 \otimes \langle\langle 1/g \rangle\rangle$, aber da es uns nur auf seine Richtung ankommt, dürfen wir das ignorieren. Wir sehen so, daß unsere Bewegungsgleichungen zusammengefaßt werden können zur Bedingung

$$\ddot{\gamma}(t) \perp_g T_{\gamma(t)} M$$

mit der Notation \perp_g für das Senkrechtstehen in Bezug auf das massebehaftete Skalarprodukt. Für Leser, die die entsprechende mathematische Terminologie bereits kennen, sind die möglichen Bewegungen also gerade die verallgemeinerten Geodäten auf M in Bezug auf unser massebehaftetes Skalarprodukt. Wirken zusätzlich noch externe Kräfte, sind etwa unsere Massepunkte elektrisch geladen und bewegt sich unsere Hantel in einem Raum mit einem elektrischen Feld und einem Gravitationsfeld, und beschreiben etwa $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$ die auf die jeweiligen Massepunkte wirkenden externen Kräfte, so bilden wir die „massebereinigte externe Gesamtkraft“

$$Q : \mathbb{E}^2 \rightarrow \vec{\mathbb{E}}^2 \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$$

mit $Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1)/m_1, \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2)/m_2)$ und unsere Bewegungsgleichungen an $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow M$ erhalten allgemeiner die Gestalt

$$\ddot{\gamma}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_g T_{\gamma(t)} M$$

8.4.3 (Allgemeine Systeme mit Zwangsbedingungen). Nun betrachten wir ganz allgemein den Fall eines Systems von $N \in \mathbb{N}$ Massepunkten der Massen m_1, \dots, m_N , deren Bewegung in der Weise eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{E}^N$ sich stets auf einer fest vorgegebenen **glatten Untermannigfaltigkeit** $M \subset \mathbb{E}^N$ befindet. Sie heißt der **Konfigurationsraum** unseres Systems. Man mag hier etwa an unsere Hantel aus Beispiel 8.4.2 denken, an unser Seifenstück im Tank aus Beispiel 8.4.1, an ein Doppelpendel, und noch an vieles andere mehr. Auch dieser Allgemeinheit betrachten wir das **massebehaftete Skalarprodukt** $\langle \cdot, \cdot \rangle_g : \vec{\mathbb{E}}^N \times \vec{\mathbb{E}}^N \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2 \rangle\rangle$ gegeben durch

$$\langle (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N), (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N) \rangle_g := m_1 \langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 \rangle + \dots + m_N \langle \vec{v}_N, \vec{w}_N \rangle$$

Im folgenden soll erklärt werden, wie man durch physikalische Überlegungen für die Bewegung $\gamma : I \rightarrow M$ unseres Systems während eines mehrpunktigen Zeitintervalls $I \subset \mathbb{T}$ auf die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\gamma}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_{\mathbf{g}} T_{\gamma(t)}M$$

geführt wird, für $Q := (\mathbf{F}_1/m_1, \dots, \mathbf{F}_N/m_N)$ die Zusammenfassung der massebereinigten externen Kräfte und $\perp_{\mathbf{g}}$ das Senkrechtstehen bezüglich des massebehafteten Skalarprodukts. Wesentlich ist dabei zusätzlich zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen das sogenannte **d'Alembert'sche Prinzip**, nach dem „die Zwangskräfte unter infinitesimalen Verrückungen keine Arbeit verrichten“. Wird genauer im Verlauf der Bewegung an einer Stelle $p \in M$ auf unser System die Zwangskraft $Z = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N) \in \mathbb{E}^N \otimes \langle\langle \mathbf{g}/\text{s}^2 \rangle\rangle$ ausgeübt und ist $\varphi : (-a, a) \rightarrow M$ ein glatter Weg in M mit $\varphi(0) = p$, dann soll, so kann man dies Prinzip in Formeln ausdrücken, stets gelten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \langle Z, \varphi'(\zeta) \rangle d\zeta = 0$$

Ds bedeutet aber genau $\langle Z, \varphi'(0) \rangle = 0$ und damit gerade $Z \perp T_p M$ für das komponentenweise gebildete Skalarprodukt auf \mathbb{E}^N . Für die massebereinigte Zwangskraft $\tilde{Z} = (\mathbf{Z}_1/m_1, \dots, \mathbf{Z}_N/m_N)$ haben wir dann natürlich auch $\tilde{Z} \perp_{\mathbf{g}} T_p M$ für das massebehaftete Skalarprodukt. Nun liefern die Newton'schen Bewegungsgleichungen die Identität $\ddot{\gamma}(t) = Q(\gamma(t)) + \tilde{Z}(\gamma(t))$ und wir erhalten wie behauptet für unser System mit Zwangsbedingungen die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\gamma}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_{\mathbf{g}} T_{\gamma(t)}M$$

Beispiele 8.4.4 (Beispiele für das d'Alembert'sche Prinzip). Das Vorhergehende gilt nur für Systeme ohne Reibung. Im Fall unserer Seife im Tank besagt das d'Alembert'sche Prinzip, daß Zwangskräfte ausschließlich senkrecht zur Innenfläche des Tanks an der Stelle, an der sich unser Seifenstück gerade befindet, ausgeübt werden. Im Fall unserer Hantel besagt das d'Alembert'sche Prinzip, daß Zwangskräfte ausschließlich in Richtung des Stabes ausgeübt werden und dem Prinzip „actio est reactio“ gehorchen. Im Fall dreier schwerer Perlen, die auf einem masselos gedachten Seilring aufgefädelt sind, liefert das d'Alembert'sche Prinzip bei genauerer Betrachtung, daß sich (1) die Zwangskräfte auf jede Perle als Summe zweier Kräfte in den beiden Richtungen, in denen das Seil sie verläßt, schreiben lassen, und daß (2) alle diese Kräfte betragsmäßig gleich groß sind, daß also anschaulich gesprochen die Seilspannung konstant ist. All das wirkt physikalisch vernünftig, und es erweist sich, daß die so erhaltenen Bewegungsgleichungen auch in guter Übereinstimmung zum Experiment stehen.

8.5 Der Hamilton'sche Formalismus

8.5.1. Die Bedingung des Senkrechtstehens in den Bewegungsgleichungen, die wir in 8.4.3 hergeleitet haben, eignet sich nicht für explizite Rechnungen. Im sogenannten „Hamilton'schen Formalismus“ werden unsere Bewegungsgleichungen umgeschrieben zu einem besonders einfachen System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Das braucht jedoch einige Vorbereitungen.

8.5.2 (**Symplektischer Gradient**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum X und eine symplektische Form $\omega : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ erklären wir in Spezialisierung von 5.2.6 für jede differenzierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ihren **symplektischen Gradienten** als das Vektorfeld $\text{grad}_\omega f$, dessen Wert an einer Stelle $x \in X$ gegeben wird durch die Bedingung, daß für alle Vektoren $\vec{w} \in \vec{X}$ gilt

$$\omega((\text{grad}_\omega f)(x), \vec{w}) = (D_{\vec{w}}f)(x)$$

mit $(D_{\vec{w}}f) = (d_x f)(\vec{w})$ der Richtungsableitung von f in Richtung \vec{w} an der Stelle x . Mit unserer Identifikation $\text{can}_\omega : \vec{X} \rightarrow \vec{X}^*$ durch $\vec{v} \mapsto \omega(\vec{v}, \cdot)$ haben wir also $(\text{grad}_\omega f)(x) = \text{can}_\omega^{-1}(d_x f)$. Ist weiter $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ ein Isomorphismus von reellen affinen Räumen und ist η eine symplektische Form auf Y und gelten die Verwandtschaften $\vec{\varphi} : \omega \rightsquigarrow \eta$ und $\varphi : f \rightsquigarrow g$, so folgt nach 5.2.8 die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\varphi : \text{grad}_\omega f \rightsquigarrow \text{grad}_\eta g$$

8.5.3 (**Bewegungsgleichungen als System erster Ordnung**). Nun betrachten wir ein System von $N \in \mathbb{N}$ Massepunkten der Massen m_1, \dots, m_N im Raum \mathbb{E} . Zur Vereinfachung der Notation ignorieren wir im folgenden erst einmal alle Einheiten und identifizieren unsere Räume von Zeiten, Massen und Längen alle kurzerhand mit \mathbb{R} . Das massebehaftete Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ aus 8.4.3 induziert dann einen Vektorraumisomorphismus $\kappa : \vec{\mathbb{E}}^N \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^{*N}$. Unter dem Isomorphismus

$$\iota := \text{id} \times \kappa : \vec{\mathbb{E}}^N \times \vec{\mathbb{E}}^N \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^N \times \vec{\mathbb{E}}^{*N}$$

entspricht die sogenannte **kanonische symplektische Form** ω auf dem Wertebereich, die gegeben wird durch die Formel $\omega((v, \phi), (w, \psi)) := \psi(v) - \phi(w)$, einer symplektischen Form η auf dem Definitionsbereich, die gegeben wird durch die Formel

$$\eta((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = \langle w_2, v_1 \rangle_g - \langle v_2, w_1 \rangle_g$$

Wir nennen η die **symplektische Form zum massebehafteten Skalarprodukt**. Die Funktion der **kinetischen Energie** $K : \mathbb{E}^N \times \vec{\mathbb{E}}^N \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben in Formeln durch $K : (x, v) \mapsto \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_g$, hat das Differential $(d_{(x,v)}K) : (w_1, w_2) \mapsto \langle w_2, v \rangle_g$

für $w_1, w_2 \in \vec{\mathbb{E}}^N$ und hat folglich als symplektischen Gradienten das Vektorfeld mit den Werten

$$(\text{grad}_\eta K)(x, v) = (v, 0)$$

Dahingegen hat die Funktion der **potentiellen Energie** $V : \mathbb{E}^N \times \vec{\mathbb{E}}^N \rightarrow \mathbb{R}$ per definitionem das Differential $d_{(x,v)}V : (w_1, w_2) \mapsto -\langle Q(x), w_1 \rangle_g$ für $Q(x)$ die Zusammenfassung der massebereinigten externen Kräfte. Folglich hat sie den symplektischen Gradienten

$$(\text{grad}_\eta V)(x, v) = (0, Q(x))$$

Für die **Gesamtenergie** $E := K + V$ wird der symplektische Gradient $\text{grad}_\eta E$ mithin gegeben durch

$$(\text{grad}_\eta E)(x, v) = (v, Q(x))$$

Seine Flußwege $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^N \times \vec{\mathbb{E}}^N$, $t \mapsto (\gamma(t), \rho(t))$ für $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall sind genau die differenzierbaren Abbildungen $\alpha = (\gamma, \rho)$, für deren Komponenten gilt $\dot{\gamma}(t) = \rho(t)$ und $\dot{\rho}(t) = Q(t)$ alias $\ddot{\gamma}(t) = Q(t)$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ alias die Abbildungen $\alpha : t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ für γ eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichungen ohne Zwangsbedingungen.

8.5.4 (Bewegungsgleichungen als System erster Ordnung mit Einheiten). Jetzt schreiben wir dasselbe nocheinmal mit Einheiten. Das massebehaftete Skalarprodukt induziert einen Isomorphismus $\kappa : \vec{\mathbb{E}}^N \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^{*N} \otimes \langle\langle \text{gm}^2 \rangle\rangle$. Unter dem Isomorphismus

$$\iota := \text{id} \times \kappa : \vec{\mathbb{E}}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle) \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^{*N} \otimes \langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle)$$

entspricht die sogenannte **kanonische $\langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle$ -wertige symplektische Form** ω auf dem Wertebereich, die gegeben wird durch die Formel $\omega((v, \phi), (w, \psi)) := \psi(v) - \phi(w)$, einer $\langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle$ -wertigen symplektischen Form η auf dem Definitionsbereich, die gegeben wird durch die Formel

$$\eta((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := \langle w_2, v_1 \rangle_g - \langle v_2, w_1 \rangle_g$$

Die Funktion der **kinetischen Energie** $K : \mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle) \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/s^2 \rangle\rangle$, gegeben in Formeln durch $K : (x, v) \mapsto \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_g$, hat das Differential $(d_{(x,v)}K) : (w, s) \mapsto \langle s, v \rangle_g$ für $w \in \vec{\mathbb{E}}^N$ und $s \in \vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$ und hat folglich als symplektischen Gradienten das **Geschwindigkeitsfeld** mit den Werten

$$(\text{grad}_\eta K)(x, v) = (v, 0)$$

Dahingegen hat die Funktion $V : \mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle) \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/s^2 \rangle\rangle$ der **potentiellen Energie** per definitionem das Differential $(d_{(x,v)}V) : (w, s) \mapsto -\langle Q(x), w \rangle_g$

für $Q(x)$ die Zusammenfassung der massebereinigten externen Kräfte und hat folglich als symplektischen Gradienten das **Geschwindigkeitsfeld** mit den Werten

$$(\text{grad}_\eta V)(x, v) = (0, Q(x))$$

Für die **Gesamtenergie** $E := K + V$ wird der symplektische Gradient $\text{grad}_\eta E$ mithin gegeben durch das **Geschwindigkeitsfeld**

$$(\text{grad}_\eta E)(x, v) = (v, Q(x))$$

Seine Flußwege $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle)$, $t \mapsto (\gamma(t), \rho(t))$ für $I \subset \mathbb{T}$ ein mehrpunktiges Zeitintervall sind genau die differenzierbaren Abbildungen mit $\dot{\gamma}(t) = \rho(t)$ und $\dot{\rho}(t) = Q(t)$ alias $\ddot{\gamma}(t) = Q(t)$ für alle Zeiten $t \in I$ alias die Abbildungen $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ für γ eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichungen ohne Zwangsbedingungen.

8.5.5. Um auch noch Zwangsbedingungen in den obigen Formalismus einzubauen, muß ich einige Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie erklären. Hier bespreche ich sie nur ad hoc und sozusagen zu Fuß für eingebettete Mannigfaltigkeiten. Den vollen Formalismus können Sie in der Differentialgeometrie kennenlernen.

8.5.6 (**Vektorfelder und ihre Flußwege**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum X und eine glatte Untermannigfaltigkeit $M \subset X$ erinnere ich an ihr **Tangentialbündel** $TM \subset X \times \vec{X}$, das wir in 6.8.30 als eine glatte Untermannigfaltigkeit von $X \times \vec{X}$ erklärt hatten. Ein **Vektorfeld auf M** ist definiert als ein Schnitt A der Bündelprojektion $\pi : TM \rightarrow M$, also eine Abbildung $A : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ A = \text{id}_M$, die jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $A_p \in T_p M$ an M bei p zuordnet. Ein **Flußweg** eines Vektorfelds A ist eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow M$ von einem mehrpunktigen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach M mit $\gamma'(t) = A_{\gamma(t)}$ für alle $t \in I$. Mit „differenzierbar“ ist hier gemeint, daß die durch Nachschalten der Einbettung $M \hookrightarrow X$ entstehende Abbildung $\gamma : I \rightarrow X$ differenzierbar sein soll im bereits in [AN1] 8.2.1 definierten Sinne.

8.5.7 (**Kovariante 2-Tensoren und Gradienten auf Mannigfaltigkeiten**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum X und eine glatte Untermannigfaltigkeit $M \subset X$ versteht man unter einem **kovarianten 2-Tensor ω auf M** eine Zuordnung ω , die jedem Punkt $p \in M$ eine Bilinearform ω_p auf seinem Tangentialraum $T_p M$ zuordnet. Sind alle diese Bilinearformen nichtausgeartet, so heißt unser 2-Tensor **nichtausgeartet**. Ist zusätzlich zu einem nichtausgearteten 2-Tensor eine differenzierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so erklären wir ihren **ω -Gradienten**, ein Vektorfeld $\text{grad}_\omega f$ auf M , durch die Vorschrift, daß sein Wert bei $p \in M$ gegeben wird durch die Formel

$$\omega_p((\text{grad}_\omega f)(p), v) = D_v(f) \quad \forall v \in T_p M$$

8.5.8 (Bewegungsgleichung mit Zwangsbedingungen, Vorbereitungen). Nun betrachten wir ein allgemeines System mit Zwangsbedingungen, also ein System von $N \in \mathbb{N}$ Massepunkten der Massen m_1, \dots, m_N , deren Bewegung in der Weise eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{E}^N$ sich stets auf einer fest vorgegebenen **glatten Untermannigfaltigkeit** $M \subset \mathbb{E}^N$ befindet, dem Konfigurationsraum unseres Systems. Wir arbeiten wieder in einem ersten Durchgang ohne Einheiten. Die Lösungen der Newton'schen Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingungen sind nach 8.4.3 genau die ersten Komponenten von differenzierbaren Abbildungen $\alpha : t \mapsto \alpha(t) := (\gamma(t), \rho(t))$ mit den Eigenschaften $\gamma(t) \in M$ und $\dot{\gamma}(t) = \rho(t)$ und

$$\dot{\rho}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_g T_{\gamma(t)}M$$

für jeden Zeitpunkt $t \in I$. Erinnern wir aus 8.5.4 unsere Formel für den symplektischen Gradienten der Gesamtenergie $(\text{grad}_\eta E)(x, v) = (v, Q(x))$, so sehen wir, daß wir gleichbedeutend differenzierbare Abbildungen $\alpha : I \rightarrow TM$ mit

$$\dot{\alpha}(t) - (\text{grad}_\eta E)(\alpha(t)) \in 0 \times T_{\text{pr}_1(\alpha(t))}^\perp M$$

für das orthogonale Komplement in Bezug auf das massebehaftete Skalarprodukt auf \mathbb{E}^N ganz rechts suchen können. Jetzt betrachten wir die Restriktionen $\bar{\eta}_{(x,v)}$ unserer symplektischen Form η auf den jeweiligen Tangentialraum $T_{(x,v)}(TM)$ unserer Mannigfaltigkeit TM . Man prüft leicht, daß diese Restriktionen auch ihrerseits symplektische Formen und insbesondere nichtausgeartet sind. Wir nennen $\bar{\eta}$ auch in diesem Fall den **symplektischen 2-Tensor zum massebehafteten Skalarprodukt**. Insbesondere können wir nach 8.5.7 den $\bar{\eta}$ -Gradienten von E bilden, ein Vektorfeld $\text{grad}_{\bar{\eta}} E$ auf TM .

Satz 8.5.9 (Lösungen unter Zwangsbedingungen als Integralkurven). *Seien M der Konfigurationsraum eines mechanischen Systems mit Zwangsbedingungen, $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ die Gesamtenergie und $\bar{\eta}$ der symplektische 2-Tensor zum massebehafteten Skalarprodukt. So sind die Flußwege $\alpha : I \rightarrow TM$ des symplektischen Gradienten der Gesamtenergie*

$$\text{grad}_{\bar{\eta}} E$$

genau alle Abbildungen der Gestalt $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ für $\gamma : I \rightarrow M$ Lösungen unserer Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingungen $\ddot{\gamma}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_g T_{\gamma(t)}M$.

Vorschau 8.5.10. Verwendet man die durch das massebehaftete Skalarprodukt gegebene Identifikation $TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ des Tangentialbündels von M mit dem sogenannten „Kotangentialbündel“ von M , so entspricht unser $\bar{\eta}$ der sogenannten „kanonischen symplektischen Form auf dem Kotangentialbündel“ und unsere Funktion E entspricht der sogenannten „Hamiltonfunktion“ H und unsere Bewegungsgleichungen nehmen in sogenannten „kanonischen Koordinaten“ die besonders

transparente Form

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

an. Um das alles zu verstehen, müssen Sie jedoch zunächst noch mehr Differentialgeometrie lernen. Ich bespreche es in [ML] 6.2.

Beweis. Dazu müssen wir nach dem Vorhergehenden nur an jeder Stelle $(x, v) \in TM$ die Beziehung $(\text{grad}_{\bar{\eta}} E)(x, v) - (\text{grad}_{\eta} E)(x, v) \in 0 \times T_x^{\perp g} M$ nachweisen. Wir gehen aus von der kurzen exakten Sequenz

$$T_x M \xrightarrow{\text{in}_2} T_{(x,v)}(TM) \xrightarrow{\text{pr}_1} T_x M$$

mit der Injektion in die zweite Komponente alias das „Davorschreiben einer Null“ als erster Abbildung und der Projektion auf die erste Komponente als zweiter Abbildung. Wir wissen bereits $(\text{grad}_{\eta} E)(x, v) = (v, b)$ mit $b = Q(x)$. Unser symplektischer Gradient $(\text{grad}_{\bar{\eta}} E)(x, v) = (c, d)$ hinwiederum ist dadurch charakterisiert, daß er in $T_{(x,v)}(TM)$ liegt und daß gilt

$$\eta((w_1, w_2), (c, d)) = \eta((w_1, w_2), (v, b))$$

für alle $(w_1, w_2) \in T_{(x,v)}(TM)$. Gegeben $w \in T_x M$ gilt nach unserer kurzen exakten Sequenz stets $(0, w) \in T_{(x,v)}(TM)$, und wegen $v \in T_x M$ folgt bereits $c = v$ und wir haben $(\text{grad}_{\bar{\eta}} E)(x, v) = (v, d)$ für unbestimmtes d . Die Differenz unserer symplektischen Gradienten ist folglich $(0, b - d)$ und hat die Eigenschaft

$$\eta((w_1, w_2), (0, b - d)) = 0$$

für alle $(w_1, w_2) \in T_{(x,v)}(TM)$. Mit unserer kurzen exakten Sequenz zeigt das aber in der Tat $b - d \in T_x^{\perp g} M$ wie behauptet. \square

8.5.11 (Lösungen mit Zwangsbedingungen als Flußwege, Variante). Sei M der Konfigurationsraum eines mechanischen Systems mit Zwangsbedingungen. Bezeichne $TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \subset \mathbb{E}^N \times (\mathbb{E}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle)$ das **Geschwindigkeitsbündel** alias den **Geschwindigkeitsphasenraum** und

$$E : TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/s^2 \rangle\rangle$$

die Gesamtenergie und $\bar{\eta}$ den symplektischen $\langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle$ -wertigen 2-Tensor zum massebehafteten Skalarprodukt. So ist $\text{grad}_{\bar{\eta}} E$ ein Geschwindigkeitsfeld auf dem Geschwindigkeitsphasenraum $TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$ und für ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{T}$ sind die Flußwege $\alpha : I \rightarrow TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$ dieses Geschwindigkeitsfelds genau die Abbildungen der Gestalt $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ für $\gamma : I \rightarrow M$ Lösungen unserer Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingungen.

9 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Christina Pflanz, ...

10 Die Vorlesung Analysis 3 im WS 15/16

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 20.10 Integrale stetiger Funktionen über kompakte Quader, auch mit Riemannsummen. Stetige Funktionen mit kompaktem Träger, deren Fortsetzung durch Null, deren Integral. Formulierung der Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Erste Beispiele.
- 22.10 Beweis der Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Motivation. Zerlegung der Eins.
- 27.10 Äquivalenz von je zwei Normen auf endlichdimensionalem reellen Vektorraum. Differential für Abbildungen einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen affinen Raum. Untermannigfaltigkeiten über Plättungen als Definition. Karten und Koordinatensysteme. Untermannigfaltigkeiten als Bilder noch ohne Beweis.
- 29.10 Untermannigfaltigkeiten als Bilder mit Beweis. Differenzierbarkeit der Kartenwechsel. Integration von Funktionen mit kompaktem Träger über in \mathbb{R}^n eingebettete Mannigfaltigkeiten. Approximation des Integrals durch Riemannsummen.
- 3.11 Fastfaltigkeiten, Integrationskarten, Integration über Fastfaltigkeiten, Oberfläche der Kugel.
- 5.11 Vektorfelder und Kovektorfelder, Schreibweise, Verwandtschaft, Zurückholen. Das Differential einer Funktion als Kovektorfeld. Zurückholen vertauscht mit dem Differential. Zurückholen in Koordinaten.
- 10.11 Wegintegral über Kovektorfeld und seine Eigenschaften. Beziehung zu Wegintegralen über Vektorfelder und Fluß durch eine Kurve. Am Schluß noch alternierende Multilinearformen. Satz über das Dachprodukt formuliert, aber noch nicht bewiesen. Satz über Basisformen noch nicht formuliert.
- 12.11 Dachprodukt, Formeln in der äußeren Algebra. Determinante und Rückzug, Satz über Basisformen. Felder von p -Formen, Rückzug von p -Formen, anschauliche Bedeutung.
- 17.11 Rückzug von Volumenformen und Determinante. Orientierung von Mannigfaltigkeiten und Fastfaltigkeiten. Integration von Formen über orientierte Fastfaltigkeiten. Beispiel der Hemisphäre. Noch nicht: Beschreibung durch

- Riemann-Summen, alternative Interpretation für Fastfaltigkeiten kleiner Dimension und kleiner Kodimension.
- 19.11 Beschreibung des Formen-Integrals durch Riemann-Summen, alternative Interpretation für Fastfaltigkeiten kleiner Dimension und kleiner Kodimension, insbesondere Fluß durch Hyperfläche. Äußere Ableitung und Formelsammlung dazu noch ohne Beweis. Interpretation von Divergenz und Rotation als äußere Ableitung.
- 24.11 Anschauliche Bedeutung der äußeren Ableitung. Beweis der Formeln der Formelsammlung. Randfaltigkeiten und Beweis des Stokes'schen Integralsatzes.
- 26.11 Stokes'scher Integralsatz für Eckfaltigkeiten. Beispiele. Green'sche Formel. Ableitung der klassischen Sätze von Gauß und Stokes und Wegintegral über ein Feld mit Potential. Abschluß des ersten Teils der Vorlesung.
- 1.12 Mengenalgebren, σ -Algebren, Borelmengen, Meßräume, Maße. Charakterisierung des Lebesgue-Maßes. Unmöglichkeit eines translationsinvarianten Maßes auf der Potenzmenge der reellen Zahlengeraden, das dem Einheitsintervall das Maß Eins zuordnet. Noch nicht dessen Regularität.
- 3.12 Regularität für die Anschauung, Beweis kommt viel später. Prämaße, Konstruktion des Prämaßes zum Lebesguemaß und zu Stieltjes-Maßen auf der reellen Geraden. Maßfortsetzungssatz und Beschreibung der kanonischen Fortsetzung noch ohne Beweis. Nächstes Mal mit der Definition eines äußeren Maßes beginnen.
- 8.12 Äußere Maße, Zerlegerlemma, Beweis des Maßfortsetzungssatzes von Caratheodory. Vervollständigung von Maßräumen. Stieltjes-Maße nicht behandelt.
- 10.12 Stieltjes-Maße. Meßbarkeit. Summen, Produkte und Grenzwerte meßbarer Funktionen. Definition des Integrals meßbarer nichtnegativer reeller Stufenfunktionen. Noch nicht dessen Linearität.
- 15.12 Integral meßbarer nichtnegativer Funktionen und Satz über monotone Konvergenz. Integrierbare Funktionen, deren Integral, Linearität des Integrals, Satz über dominierte Konvergenz.
- 17.12 Produktmaß, Sätze von Tonelli und Fubini. Noch nichts außer der reinen Theorie. Noch nicht Cavalieri, Beziehung zum Riemann-Integral.

- 22.12 Cavalieri, Beziehung zum Riemann-Integral, partielle Integration. Regularität von Borelmaßen auf dem \mathbb{R}^n , jedoch nicht auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen.
- 7.1 Transformationsformel. Bildmaß, Integral über Bildmaß. Produkt von Maß mit meßbarer nichtnegativer Funktion. Regularität von Borelmaßen auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n , jedoch nicht auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen. Nützliche Nullmengen. Fläche unter der Glockenkurve. Nicht Flächenmaß von Fastfaltigkeiten, nur kurz mündlich was dazu gesagt.
- 12.1 Integrierbarkeit und Integral komplexwertiger Funktionen. Räume quadratintegrierbarer Funktionen und Fouriertransformation. Räume integrierbarer Funktionen, fast überall definierte Funktionen, Raum der L^p -Funktionen. Noch nicht $\| \cdot \|_p$ -Norm.
- 14.1 Die $\| \cdot \|_p$ -Norm ist eine Norm. Die L^p -Räume sind vollständig. Hilberträume, Hilbertbasen. Noch nicht der Satz über Hilbertbasen.
- 19.1 Satz über Hilbertbasen. Die differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger auf einer offenen Teilmenge der \mathbb{R}^n liegen dicht in den L^p Funktionen für $p < \infty$. Konvergenz der Fourier-Reihe in $L^2([0, 2\pi])$.
- 21.1 Einparameteruntergruppen der multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen. Charaktere der Kreisgruppe. Produkttopologie. Noch nicht topologische Gruppen.
- 26.1 Topologische Gruppen und ihre Charaktere. Charaktere von $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und von der Kreisgruppe. Fouriergruppen erklärt als topologische Gruppen, die isomorph sind zu endlichen Produkten der eben aufgezählten Beispiele. Definition, Existenz und Eindeutigkeit ihrer Haar-Maße bewiesen. Die Charaktere bilden eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer kompakten Fouriergruppe für das normierte Haarmaß.
- 28.1 Standardisierte Fouriertransformation. Formelsammlung. Die Fouriertransformation erhält den Schwarzraum. Fouriertransformierte integrierbarer Funktionen verschwinden im Unendlichen. Abstrakte Fouriertransformation eines Maßes und seine Beziehung zur standardisierten Fouriertransformation. Natürlichkeit, aber noch nicht Produktverträglichkeit.
- 2.2 Paarung, duale Paarung, exakte Paarung von Fouriergruppen. Zugehörige abstrakte Fouriertransformationen, Fourierreihe und Fouriertransformation

als Beispiele. Abstrakte Inversionsformel, konkrete Variante für \mathbb{R} , abstrakte und konkrete Poissonformel, Herleitung der Inversionsformel aus der Poissonformel (bis auf letzten Schliff).

- 4.2 Herleitung der Inversionsformel aus der Poissonformel. Interpretation der Poissonformel als Natürlichkeit. Fourierisomorphismus für quadratintegrierbare Funktionen. Gleichheit der verschiedenen Varianten der Fouriertransformation im Dualraum des Schwartzraums.
- 9.2 Falten von Maßen. Assoziativität. Verhalten unter Fouriertransformation. Beweis des zentralen Grenzwertsatzes begonnen. Gekommen bis zur punktweisen Konvergenz der charakteristischen Funktionen.
- 11.2 Beweis zentraler Grenzwertsatz beendet. Translationsinvariante abgeschlossene Teilräume des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf der reellen Geraden.

Literatur

- [AN1] *Skriptum Analysis 1*;
- [AN3] *Skriptum Analysis 3*;
- [FT1] *Skriptum Funktionentheorie 1*;
- [GR] *Skriptum Grundlagen*;
- [Kön97] Königsberger, *Analysis 1 und 2*, Springer, 1997.
- [LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*;
- [LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*;
- [ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen*;
- [MV00] Meyberg and Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, Springer, 2000.
- [TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*;
- [TM] *Skriptum Topologie und kompakte Gruppen*;
- [TS] *Skriptum Singuläre Homologie*;
- [War83] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, Springer, 1983.

Index

- ⊠
 - für Differentialformen, 166
- $\dot{\gamma}$ physikalische Geschwindigkeit, 255
- $\langle f \rangle$ bei multilinearen Abbildungen, 186
- ⊗
 - Notation für Bilinearform, 122
- \simeq homotop, 144
- \wedge
 - äußeres Dachprodukt, 166
 - Dachprodukt, 162
- $|\omega|$
 - Grad der Form ω , 165
- \rightsquigarrow verwandt
 - 2-Tensoren, 123
 - Differentialformen, 171
 - Funktionen, 115
 - Vektorfelder, 115
 - Wege, 131
- $\langle\langle \rangle\rangle$ Erzeugnis physikalischer Einheit, 255
- *
- Hodge-*-Operator, 214
- Ableitung
 - höhere, koordinatenfrei, 186
 - nach Vektorfeld, 113
 - partielle, 4
 - partielle, mit Einheiten, 26
 - Richtungs-, 9
- äußere Ableitung, 188
- äußeres Normalenfeld, 199
- Alembert, de, Prinzip von, 268
- alt Alternator, 161
- Alt
 - Raum alternierender Formen, 161
- alternierende p -Form, 161
- analytisch
 - auf \mathbb{R}^n , 143
- Anfangswert
 - von Flußweg, 223
- Anfangswertisomorphismus, 244, 245
- antisymmetrisch
 - 2-Tensor, 126
- Arbeit
 - gegen Kraftfeld, 137
- auswerten
 - Kovektorfeld auf Vektorfeld, 111
- Banach'scher Fixpunktsatz, 48
- berandet
 - Teilmenge, 195
- Beschleunigung, 256
 - absolute, 256
 - vektorielle, 256
- Bil Bilinearformen, 122
- Borromäische Ringe, 67
- Bündelprojektion, 174
- \mathcal{C}^1 -Abbildung, 46
- \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus, 46
- \mathcal{C}^∞ -Abbildung
 - zwischen affinen Räumen, 187
- \mathcal{C}^k -Abbildung
 - zwischen affinen Räumen, 187
- \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus, 187
- $\mathcal{C}_l(X, \mathbb{R})$ stetige Funktionen mit kompaktem Träger, 77
- $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ stetige Funktionen mit kompaktem Träger, 77
- dx_I , 169
- ∂T Rand von T , 94
- ∂_i Vektorfeld, 113
- ∂_x Vektorfeld, 113
- D_v konstantes Vektorfeld, 113
- $D_{\vec{v}}$ Richtungsableitung, 9
- Dachprodukt, 162

df Differential von f , 111
 Diffeomorphismus
 C^1 -Diffeomorphismus, 46
 C^k -Diffeomorphismus, 187
 Differential, 9
 totales, 11
 von \exp auf Matrizen, 35
 von bilinearer Abbildung, 22
 differential equation
 ordinary, 221
 partial, 221
 Differentialform, 167
 erster Ordnung, 108
 relative, 166
 Differentialgleichung
 gewöhnliche, 221
 partielle, 221
 Differentialquotient, 18
 differenzierbar
 auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 177
 beliebig, 186
 mehrere Veränderliche, 8
 partiell, 11
 total, 11
 Differenzieren unter dem Integral, 32
 directional derivative, 9
 diskret
 Teilmenge von topologischem Raum, 141
 Divergenz, 204, 216
 Drehimpuls, 262
 Dualraum, 106

 \mathbb{E} Anschauungsraum, 254
 Eckenplättung, 206
 Eckfaltigkeit, 204
 eckig berandet, 206
 Ehrenfest
 Urnenmodell, 103
 einfach
 zusammenhängend, wegweise, 146
 Eins-Form, 108
 einsetzen
 Vektorfeld in Kovektorfeld, 111
 Energie, 137
 kinetische, 269, 270
 Erdbeschleunigung, 257
 explizit
 gewöhnliche Differentialgleichung, 221
 Extrema
 in mehreren Veränderlichen, 41
 unter Nebenbedingungen, 73

 Fast-Mannigfaltigkeit, 95
 Fastfaltigkeit, 95
 Fixpunkt, 46
 Fläche, 66
 Flächenintegral, 89
 Fluß
 eines Vektorfelds, 184
 von Vektorfeld, 248
 Flußdichte, 169
 Flußweg, 223, 271
 größter, 223
 maximaler, 223
 force, 256
 1-Form, 108
 Fréchet-differenzierbar, 8
 Fundamentalform, erste, 124
 Funktion
 implizite, 56
 Funktionaldeterminante, 81

 g Erdbeschleunigung, 257
 Gauß
 Integralsatz von, 204
 geschlossen
 Differentialform, 188
 Kovektorfeld, 148
 Geschwindigkeit

- absolute, 255
- vektorielle, 18, 255
- Geschwindigkeitsbündel, 273
- Geschwindigkeitsfeld, 260
- Geschwindigkeitsphasenraum, 260
- glatt, 199
 - Abbildung
 - koordinatenfrei, 187
 - Abbildung nach \mathbb{R}^m , 186
- grad
 - Gradient, 6
- $\text{grad}_\omega f$ symplektischer Gradient, 269
- grad_g Gradient zu Metrik g , 123
- Grad
 - einer polynomialen Abbildung, 38
 - eines Polynoms
 - in mehreren Veränderlichen, 36
- Gradient, 6, 121
 - symplektischer, 269
- Gram'sche Matrix, 90
- Gramm, 254
- Gravitationsfeld, 256
- Green'sche Formel, 211
- Gronwall
 - Lemma von, 232
- $H(f)$ Hesse-Matrix, 45
- halboffen
 - in reellem affinen Raum, 13
- Halbraumplättung, 195
- Hesse-Matrix, 45
- Hodge-*-Operator, 214
- Homöomorphismus, 70
- homotop, 144
 - mit festen Randpunkten, 144
 - Wege, 144
- Homotopie
 - von Wegen, 144
- Hyperfläche
 - Untermannigfaltigkeit, 66
- implizit
 - Funktion, 56
 - gewöhnliche Differentialgleichung, 221
 - indefinit, 43
 - induzierte Orientierung, 197
 - $\text{Inn}_M(T)$ Inneres von T , 94
 - Inneres, in topologischem Raum, 94
 - Integral
 - erstes, einer Differentialgleichung, 224
 - stetige reelle Funktion
 - über kompakten Quader, 28
 - stetige vektorwertige Funktion
 - über kompaktes Intervall, 234
 - Integralkurve, 223
 - Integrationskarte, 94
 - Integrationsweg, 138
 - interior, 94
 - Inversion, 24
 - isotop
 - Verschlingungen, 66
 - Jacobi-Matrix, 11
 - Karte, 70
 - auf dem Rand induzierte, 197
 - Kartenwechsel, 72
 - Kettenregel
 - in mehreren Veränderlichen, 19
 - kinetische Energie, 261
 - Knoten, 66
 - Kodimension
 - einer Untermannigfaltigkeit, 66
 - Komponente
 - Wegzusammenhangskomponente, 143
 - Konfigurationsraum, 267
 - konform
 - Abbildung, 24
 - kontrahierend
 - Abbildung metrischer Räume, 48
 - kontravariant, 106

Koordinaten, 64
 Koordinatensystem, 64
 kovariant, 108
 Kovektorfeld, 106
 relatives, 106
 vektorwertiges, 136
 Kraftfeld, 256
 kritische Stelle, 41
 Kugelkoordinaten, 126
 Kugelvolumen, 102
 Kurve
 in reellem Raum, 66

 \mathbb{L} Längengerade, 254
 Lagrange'sche Multiplikatoren, 73
 Laplaceoperator
 im \mathbb{R}^n , 217
 Leibniz-Regel
 für Differentialformen, 189
 Lipschitz-Konstante, 48
 Lipschitz-stetig, 46
 lipschitzstetig
 lokal, 238
 partiell, 240
 Lösungsraum
 einer linearen Differentialgleichung
 allgemeiner Fall, 244
 lokale Koordinaten, 70
 lokales Koordinatensystem, 70

 m Meter, 254
 \mathbb{M} Massen, 254
 Mannigfaltigkeit
 berandete Untermannigfaltigkeit von
 affinem Raum, 195
 eingebettete, 64
 Untermannigfaltigkeit von affinem
 Raum, 64
 Mantelfläche, 102
 Markov-Kette, 103
 Markovkette, 103

 Masse, 254, 257
 schwere, 256
 träge, 256
 maximal
 Flußweg, 223
 Maximum
 isoliertes lokales, 41
 lokales, 41
 Meter, 254
 Minimum
 isoliertes lokales, 41
 lokales, 41
 Mult^k multilineare Abbildungen, 186
 Multiindex, 36

 Nabla-Operator, 210
 negativ definit, 43
 Newton'schen Bewegungsgleichung, 256
 Normalenfeld
 orientiertes, 183
 normiert
 Weg, 144

 0^d die Null in \mathbb{R}^d , 64
 T° Inneres von T , 94
 \otimes
 Notation für Bilinearform, 122
 ODE ordinary differential equation, 221
 offen
 Kern, 94
 Ordnung
 einer gewöhnlichen Differentialgleichung, 221
 orientierbar
 Fastfaltigkeit, 176
 orientiert
 Fastfaltigkeit, 176
 Orientierung
 von Fastfaltigkeit, 176
 von Mannigfaltigkeit, 176
 von Vektorraum, 174

orientierungsverträglich, 176
 partiell
 Ableitung, 4
 Ableitung, mit Einheiten, 26
 Ableitung, virtuelle, 15
 differenzierbar, 4
 PDE partial differential equation, 221
 Pfaff'sche Form, 108
 Phasenraum, 260
 Plättung, 64
 Plättungskarte, 206
 Polarkoordinaten
 Gradient in, 122
 Polynom, 36
 polynomial
 Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 38
 positiv definit, 43
 positiv semidefinit, 43
 Potential
 eines Kraftfeldes, 137
 im Anschauungsraum, 260
 potentielle Energie, 261
 Quader, 28
 quadratisch
 Form, reelle, 43
 Quelldichte, 204
 Rand, 94
 von Eckfaltigkeit, 206
 von Randfaltigkeit, 195
 Rechteck, 30
 regulär
 Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 38
 Punkt von Fastfaltigkeit, 176
 Richtungsableitung, 9
 auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 177
 Riemann
 Riemann'sche Metrik, 122
 Riemannsumme
 für Funktion auf Mannigfaltigkeit, 90
 für Funktion auf Rechteck, 30
 für Integral einer Volumenform, 180
 für vektorwertige Funktion, 234
 für Wegintegrale, 129
 Rotation, 150
 skalare, 150
 Rückzug
 von Funktionen, 115
 von Kovektorfeld, 115
 Runge-Lenz-Vektor, 265

 S^n die n -Sphäre, 68
 \int_c^d Wegintegral, 134
 \oint Wegintegral, 128
 schwere Masse, 256
 Separation der Variablen, 229, 231
 Shuffle, 163
 skalare Rotation
 eines ebenen Vektorfeldes, 150
 Skalarprodukt
 massebehaftetes, 267
 Stammfunktion, 238
 stetig differenzierbar
 in mehreren Variablen, 25
 stimmen ueberein bis zur Ordnung d , 38
 Stokes
 Integralsatz von
 allgemeiner, 200
 klassischer, 210
 mit Ecken, 207
 Summenregel, 21
 support, 77
 symmetrisch
 2-Tensor, 126
 symplektisch
 Gradient, 269

 \mathbb{T} Zeit, 254
 TM , siehe Tangentialbündel

$T_p^C M$ Tangentialraum
 im eingebetteten Fall, 174
 $T_p M$ Tangentialraum, 174
 tangential
 Abbildung, 9
 Tangentialbündel
 im eingebetteten Fall, 174
 Tangentialraum
 im eingebetteten Fall, 174
 Tangentialvektor, 174
 Taylorentwicklung
 in mehreren Veränderlichen, 35
 Teilung der Eins, 86
 Tensor
 2-Tensor, 122
 Totalgrad, 36
 träge Masse, 256
 Träger
 einer Funktion, 77
 Transformationsformel
 bei kompaktem Träger, 79
 transponiert
 Abbildung, 165
 Treppenfunktion, 235
 Übergangswahrscheinlichkeit, 103
 Umkehrsatz, 46
 Urkilogramm, 254
 Urnenmodell, 103
 Variablentrennung, 231
 Variation der Konstanten, 246
 Vektorfeld
 auf affinem Raum, 223
 auf eingebetteter Mannigfaltigkeit,
 271
 relatives, 106
 vektorwertig
 Kovektorfeld, 136
 Verschlingung, 66
 Vertauschen
 von partiellen Ableitungen, 31
 von partiellen Integrationen, 31
 verwandt
 2-Tensoren, 123
 Differentialformen, 171
 Funktionen, 115
 Kovektorfelder, 115
 Vektorfelder, 115
 Wege, 131
 $\text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$ 90
 Volumen, 90
 Volumenform, 214
 kanonische, 214
 Weg
 geschlossener, 146
 normierter, 144
 stückweise linearer, 140
 zusammenziehbarer, 146
 Wegintegral, 128
 für Kovektorfeld, 128
 für Vektorfeld, 131
 vektorwertiges, 136
 wegweise einfach zusammenhängend, 146
 Wegzusammenhang, 140
 Wegzusammenhangskomponente, 143
 Winkelfeld, 152
 Wirbeldichte, 150
 Zeit, 254
 Zentralfeld, 262
 Zirkulation, 131
 zusammenhängend
 topologischer Raum, 143
 wegweise, 140
 wegweise einfach, 146
 zusammenziehbar
 geschlossener Weg, 146
 Zustand
 bei Markovkette, 103