

Nichtkommutative Algebra und Symmetrie

Wolfgang Soergel

18. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Darstellungstheorie	3
1.1	Darstellungen allgemeiner Gruppen	3
1.2	Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring	8
1.3	Erzeugende und Relationen für Ringalgebren**	11
1.4	Halbeinfache Moduln	13
1.5	Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten*	16
1.6	Der Dichtesatz von Jacobson	17
1.7	Halbeinfache Ringe	19
1.8	Spurkriterium für Halbeinfachheit*	21
2	Darstellungstheorie endlicher Gruppen	24
2.1	Das Lemma von Schur	24
2.2	Darstellungen von Produkten	25
2.3	Vollständige Reduzibilität	27
2.4	Zur Struktur von Gruppenringen	30
2.5	Charaktere	33
2.6	Inverse Fouriertransformation	39
2.7	Ergänzungen zu Charakteren*	41
2.8	Darstellungen der symmetrischen Gruppen	43
2.9	Der Robinson-Schensted-Algorithmus	50
2.10	Berechnung der Charaktere	53
2.11	Jucys-Murphy-Elemente	55
2.12	Gelfand-Modell	56
3	Verschiedene weiterführende Resultate	57
3.1	Reeller, komplexer und quaternionaler Typ	57
3.2	Induktion und Koinduktion für diskrete Gruppen	65
3.3	Clifford-Theorie	69
3.4	Darstellungen endlicher Heisenberg-Gruppen*	71
4	Danksagung	73
	Literaturverzeichnis	74
	Index	76

1 Allgemeine Darstellungstheorie

1.1 Darstellungen allgemeiner Gruppen

Definition 1.1.1. Eine **Darstellung**, englisch und französisch **representation**, einer Gruppe G über einem Körper k ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k -Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

1.1.2. Oft bezeichnen wir eine Darstellung abkürzend mit demselben Symbol wie den zugrundeliegenden Vektorraum. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe G bezeichnet dann ρ_V den zugehörigen Gruppenhomomorphismus $\rho_V : G \rightarrow \text{GL}(V)$. In derselben Weise definiert man auch allgemeiner den Begriff der **Darstellung eines Monoids** über einem Körper k .

1.1.3 (**Herkunft der Terminologie**). Im Fall $V = k^n$ ist $\text{GL}(V) \cong \text{GL}(n; k)$ isomorph zur Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in k . Ist unser Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ dann auch noch injektiv, so „stellt ρ die abstrakte Gruppe G dar als eine konkrete Gruppe von Matrizen“, daher die Bezeichnung als „Darstellung“. Zum Beispiel könnte die zweielementige Gruppe dargestellt werden, indem man ihr nichttriviales Element als Punktspiegelung auf der Ebene operieren läßt, oder als Spiegelung an einer Achse in der Ebene, oder als Punktspiegelung auf dem Raum, oder als Spiegelung an einer Ebene im Raum, oder auch als Drehung mit dem Winkel 180° um eine Achse. Das Symbol ρ ist ein „rho“, das Analogon für unser „r“ im griechischen Alphabet. Es steht für „representation“. Die folgende Übung erklärt, in welchem Sinn eine Darstellung einer Gruppe G nichts anderes ist als eine Operation von G auf einem Vektorraum „durch lineare Abbildungen“.

Übung 1.1.4. Sei G eine Gruppe und k ein Körper und V ein k -Vektorraum. So induziert die Bijektion $\text{Ens}(G, \text{Ens}(V, V)) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(G \times V, V)$ aus [GR] 2.2.25 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Darstellungen} \\ G \rightarrow \text{GL}(V) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} G\text{-Operationen } G \times V \rightarrow V \\ \text{durch } k\text{-lineare Abbildungen} \end{array} \right\}$$

Hierbei verstehen wir unter einer „ G -Operation durch k -lineare Abbildungen“ eine G -Operation $G \times V \rightarrow V$ im Sinne von [LA2] 5.1.1 mit der Eigenschaft, daß gilt $g(v + w) = gv + gw$ und $g(\lambda v) = \lambda(gv) \quad \forall g \in G, \lambda \in k$ und $v, w \in V$. Analoges gilt allgemeiner auch für Darstellungen von Monoiden.

Beispiel 1.1.5. Jeder Vektorraum V wird eine Darstellung seiner Automorphismengruppe $G = \text{GL}(V)$ mittels $\rho = \text{id}$. Diese Darstellung heißt die **Standarddarstellung von $\text{GL}(V)$** .

Beispiel 1.1.6. Jeder Vektorraum V wird eine Darstellung einer beliebigen Gruppe G mittels der trivialen Operation $\rho(g) = \text{id}_V \quad \forall g \in G$.

Beispiele 1.1.7. Ist K/k eine Körpererweiterung, so ist K eine Darstellung über k der Galoisgruppe $\text{Gal}(K/k)$.

Beispiel 1.1.8. Ist $M \times X \rightarrow X$ die Operation eines Monoids M auf einer Menge X und k ein Ring, so wird der freie k -Modul kX über X mit der linear fortgesetzten Operation eine Darstellung des Monoids M über k . Darstellungen dieser Bauart nennt man **Permutationsdarstellungen**. Ebenso wird der Funktionenraum $\text{Ens}(X, k)$ mit der Operation „durch Vorschalten“ eine Darstellung des opponierten Monoids M^{opp} . Im Fall der Operation einer Gruppe G liefert die offensichtliche Einbettung $kX \hookrightarrow \text{Ens}(X, k)$ einen Homomorphismus von Darstellungen, wenn man die Operation rechts mit dem durch das Invertieren gegebenen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} G^{\text{opp}}$ zu einer Darstellung von G zurückzieht.

Beispiel 1.1.9. Eine Darstellung (V, ρ) der Gruppe \mathbb{Z} anzugeben bedeutet nach der universellen Eigenschaft [GR] 3.3.22 von \mathbb{Z} nichts anderes, als einen Automorphismus $A \in \text{GL}(V)$ eines Vektorraums V anzugeben, nämlich dem Automorphismus $A = \rho(1)$.

Beispiel 1.1.10 (Darstellungen der zweielementigen Gruppe). Sei k ein Körper. Wir untersuchen nun die endlichdimensionalen Darstellungen der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über k . Eine solche Darstellung (V, ρ) anzugeben bedeutet nach der universellen Eigenschaft [GR] 3.3.22 von \mathbb{Z} und der universellen Eigenschaft des Quotienten nichts anderes, als einen Automorphismus $A \in \text{GL}(V)$ eines k -Vektorraums V anzugeben mit $A^2 = \text{id}_V$, nämlich dem Automorphismus $A = \rho(1)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

$\text{char } k \neq 2$: In diesem Fall ist V die direkte Summe $V = V^+ \oplus V^-$ der Eigenräume von A zu den Eigenwerten ± 1 , für alle $v \in V$ gilt nämlich

$$v = \frac{1}{2}(v + Av) + \frac{1}{2}(v - Av)$$

$\text{char } k = 2$: In diesem Fall zerfällt das charakteristische Polynom von A bereits über k und hat nur den Eigenwert 1, in einer geeigneten Basis von V hat also A eine Matrix in Jordan'scher Normalform, und aus $A^2 = \text{id}_V$ folgt, daß hier nur Jordanblöcke der Größen eins und zwei möglich sind.

Um die Analoga dieser Erkenntnisse für eine beliebige Gruppe G formulieren zu können, bauen wir zunächst unseren Begriffsapparat weiter aus.

Definition 1.1.11. Seien V, W Darstellungen einer Gruppe G über einem festen Körper k . Ein **Homomorphismus von Darstellungen** ist eine k -lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ derart, daß gilt $f(gv) = gf(v)$ für alle $v \in V, g \in G$. Ein

Isomorphismus von Darstellungen ist ein bijektiver Homomorphismus. Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei Darstellungen V und W , so schreiben wir auch $V \cong W$ und sagen, die Darstellungen V und W seien **isomorph**.

Ergänzung 1.1.12. Steht der Formalismus der Kategorientheorie zur Verfügung, so kann man das alles auch sehr viel schneller sagen: Die Kategorie der Darstellungen eines Monoids G über einem Ring k ist schlicht die Kategorie

$$\text{Cat}([G], k\text{-Mod})$$

der Funktoren von der Ein-Objekt-Kategorie $[G]$ in die Kategorie der k -Moduln.

Definition 1.1.13. Gegeben Darstellungen V, W einer Gruppe G über einem Körper k definieren wir ihre **direkte Summe** als den Vektorraum $V \oplus W$ mit der Operation $g(v, w) = (gv, gw)$. Ähnlich definieren wir auch direkte Summen von endlich oder sogar unendlich vielen Darstellungen. Die direkte Summe von n Kopien einer Darstellung V kürzen wir ab mit V^n oder auch ausführlicher $V^{\oplus n}$. Für den Fall $n = 0$ vereinbaren wir $V^0 = 0$.

Beispiel 1.1.14. Mit diesen Notationen können wir die obigen Erkenntnisse wie folgt formulieren:

$\text{char } k \neq 2$: Bezeichnet k_+ bzw. k_- die triviale bzw. die nichttriviale eindimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so ist jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über k isomorph zu genau einer Darstellung der Gestalt $k_+^n \oplus k_-^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

$\text{char } k = 2$: Bezeichnet k bzw. P die triviale Darstellung bzw. eine zweidimensionale Darstellung mit nichttriviale Operation von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, bei der also das nichtneutrale Element durch einen Jordanblock der Größe zwei mit Eigenwert Eins operiert, so ist jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über k isomorph zu genau einer Darstellung der Gestalt $k^n \oplus P^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

Von den in 1.1.3 diskutierten Fällen wäre in dieser Notation die Punktspiegelung auf der Ebene \mathbb{R}^2 , die Spiegelung an einer Achse $\mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_-$, die Punktspiegelung im Raum \mathbb{R}^3 , die Spiegelung an einer Ebene $\mathbb{R}_+^2 \oplus \mathbb{R}_-$, und die Drehung mit dem Winkel 180° um eine Achse $\mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_-$.

1.1.15. Wir wollen nun ähnliche Aussagen auch für allgemeinere Gruppen formulieren und bauen dazu unseren Begriffsapparat noch weiter aus.

Definition 1.1.16. Sei G eine Gruppe.

1. Eine Teilmenge $W \subset V$ einer Darstellung V von G heißt eine **Unterdarstellung** genau dann, wenn W ein unter G stabiler Untervektorraum ist, in Formeln $g \in G, w \in W \Rightarrow gw \in W$;
2. Eine Darstellung V von G heißt **irreduzibel** oder **einfach** genau dann, wenn V nicht der Nullraum ist, aber 0 und V die einzigen Unterdarstellungen von V sind;
3. Eine Darstellung V von G heißt **unzerlegbar** genau dann, wenn V nicht der Nullraum ist und es keine zwei von Null verschiedenen Unterdarstellungen $W_1, W_2 \subset V$ gibt mit $V = W_1 \oplus W_2$;
4. Eine Darstellung V von G heißt **zyklisch** genau dann, wenn es einen Vektor $v \in V$ gibt, dessen Bahn bereits die ganze Darstellung als Vektorraum erzeugt, in Formeln $\langle Gv \rangle = V$. Solch ein Vektor heißt dann ein **zyklischer Vektor**.

Beispiele 1.1.17. Jede eindimensionale Darstellung ist irreduzibel. Unsere Darstellung P aus 1.1.14 ist zwar unzerlegbar, aber nicht irreduzibel.

Proposition 1.1.18 (Schranke für die Zahl irreduzibler Darstellungen). *Eine endliche Gruppe hat über jedem Körper bis auf Isomorphismus höchstens soviele irreduzible Darstellungen wie Elemente. Bezeichnet also $\text{irr}_k G$ die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper k , so gilt in Formeln stets*

$$|\text{irr}_k G| \leq |G|$$

1.1.19. Zum Beweis der Proposition 1.1.18 entwickeln wir im Folgenden allgemeine Begriffe und Methoden, die Ihnen auch in anderen Kontexten ständig begegnen werden. Wir beweisen sie dann als Satz 1.2.6.

Ergänzung 1.1.20 (Beispiel für große unzerlegbare Darstellungen). Proposition 1.1.18 gilt nicht mehr, wenn wir darin „irreduzibel“ durch „unzerlegbar“ ersetzen: Bereits für die Klein'sche Vierergruppe gibt es über dem Körper mit zwei Elementen unzerlegbare Darstellungen beliebig großer Dimension. In der Tat ist der Gruppenring in dem Fall isomorph zu $\mathbb{F}_2[a, b]$ mit $a^2 = b^2 = 0$. Dann sind die Moduln $V := \mathbb{F}_2^{2n+1}$ mit $a : e_{2i} \mapsto e_{2i+1}$ und $b : e_{2i} \mapsto e_{2i-1}$ für $1 \leq i \leq n$ und $a, b : e_{2i+1} \mapsto 0$ für $0 \leq i \leq n$. Dann gilt $\ker a = \ker b$ und wir können folglich $\phi : \text{im } a \rightarrow V$ definieren durch $\phi : v \mapsto b(a^{-1}(v))$. Damit erhalten wir eine Filtrierung auf $\text{im } a$ durch

$$\text{im } a \supset \phi^{-1}(\text{im } a) \supset \dots \supset \phi^{-n}(\text{im } a) = 0$$

mit eindimensionalen Subquotienten. Das aber zeigt, daß für jede Zerlegung unserer Darstellung in zwei direkte Summanden $V = U \oplus W$ für einen Summanden

W gilt $\text{im}(a|_W) = 0$ und damit $W \subset \langle e_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq n \rangle$. Es ist aber explizit klar, daß es einen derartigen Summanden nicht geben kann.

Übungen

Übung 1.1.21 (p -modulare Darstellungen von p -Gruppen). Man zeige, daß gegeben eine Primzahl p jede p -Gruppe über einem Körper der Charakteristik p bis auf Isomorphismus nur eine einzige einfache Darstellung besitzt. Hinweis: Man beginne mit dem Fall zyklischer Gruppen und verwende dann Satz [AL] 1.4.9 über die Struktur von p -Gruppen.

Übung 1.1.22 (Zurückziehen mit inneren Automorphismen). Gegeben ein Gruppenhomomorphismus $H \rightarrow G$ können wir jede Darstellung V von G zurückziehen zu einer Darstellung $\text{res}_G^H V$ von H . Man zeige, daß wir beim Zurückziehen mit einem inneren Automorphismus $G \rightarrow G$ eine zur ursprünglichen Darstellung isomorphe Darstellung erhalten.

Ergänzung 1.1.23. Stabilisiert eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ein Gitter, so nennt man sie **kristallographisch**. Gleichbedeutend ist nach 1.1.24 die Forderung, daß sie bezüglich einer geeigneten Basis durch Matrizen mit rationalen Einträgen dargestellt wird.

Ergänzende Übung 1.1.24. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V über \mathbb{Q} einer endlichen Gruppe gibt es stets eine **\mathbb{Z} -Form**, als da heißt ein unter G stabiles Gitter $V_{\mathbb{Z}} \subset V$.

Übung 1.1.25. Gegeben eine Darstellung (V, ρ) einer Gruppe G über einem Körper k erhalten wir eine Darstellung (V^*, ρ^*) auf dem Dualraum durch die Vorschrift $\rho^*(g) := (\rho(g^{-1}))^\top$. Sie heißt die **kontragrediente Darstellung** zur Darstellung (V, ρ) . Man zeige, daß eine endlichdimensionale Darstellung einfach ist genau dann, wenn die zugehörige kontragrediente Darstellung einfach ist. Man gebe ein Beispiel für eine eindimensionale Darstellung, die nicht zu ihrer kontragredienten Darstellung isomorph ist.

Übung 1.1.26. Die Dimension einer zyklischen und erst recht einer irreduziblen Darstellung ist beschränkt durch die Kardinalität der dargestellten Gruppe.

Übung 1.1.27. Man zeige, daß die Quaternionen aufgefaßt als reeller Vektorraum eine irreduzible Darstellung der achtelementigen Quaternionengruppe aus [AL] 1.5.18 bilden.

Übung 1.1.28. Wieviele Unterdarstellungen hat die Darstellung $\mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_-$ der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Ist sie zyklisch? Was ist die Dimension des Raums der Homomorphismen von dieser Darstellung zu sich selber?

Übung 1.1.29. Man gebe alle Unterdarstellungen der Darstellung $\mathbb{R}_+^2 \oplus \mathbb{R}_-$ der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an. Ist diese Darstellung zyklisch? Was ist die Dimension des Raums der Homomorphismen von dieser Darstellung zu sich selber?

Übung 1.1.30. Man bestimme die Dimension des Raums der Homomorphismen von Darstellungen $(\mathbb{R}_+^n \oplus \mathbb{R}_-^m) \rightarrow (\mathbb{R}_+^a \oplus \mathbb{R}_-^b)$.

1.2 Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring

Definition 1.2.1. Gegeben k ein Ring und G eine Gruppe definieren wir den **Gruppenring**

$$kG$$

der Gruppe G über k wie folgt: Als abelsche Gruppe ist kG wie in [LA1] 2.3.4 die Menge aller Abbildungen $f : G \rightarrow k$, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annehmen. So eine Abbildung schreiben wir als eine formale Linearkombination $\sum f(g)g$ von Elementen aus G mit Koeffizienten aus k . Die Multiplikation $*$ in kG , manchmal auch **Konvolution** oder **Faltung** genannt, erklären wir durch die Vorschrift

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) * \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{x \in G} \left(\sum_{gh=x} a_g b_h \right) x$$

wo die innere Summe rechts über alle Paare $(g, h) \in G \times G$ laufen soll mit $gh = x$. Offensichtlich erhalten wir so einen Ring mitsamt einem Ringhomomorphismus $k \hookrightarrow kG$, $a \mapsto ae$ für $e \in G$ das neutrale Element und mitsamt einem Monoidhomomorphismus $G \rightarrow kG$, $g \mapsto 1g$ von unserer Gruppe in ihren Gruppenring mit der Multiplikation als Verknüpfung. Ist k ein Körper, so ist dieser Monoidhomomorphismus, wenn wir ihn als eine durch G indizierte Familie von Elementen von kG auffassen, offensichtlich eine Basis von kG über k . Für Ringe gilt dasselbe mit dem auf Moduln erweiterten Basisbegriff aus [KAG] 1.4.6. Wir schreiben meist kurz $ae = a$ und $1g = g$, auch wenn wir eigentlich Elemente des Gruppenrings meinen, und notieren die Faltung oft ohne $*$ schlicht durch Hintereinanderschreiben.

1.2.2 (Notationsvarianten bei Gruppenringen). Häufig wird der Gruppenring in der Literatur auch $k[G]$ notiert. Zu dem in diesem Text befolgten Notationschema paßt diese Notation nicht, da ich mir ja in [AL] 3.5.1 vorgenommen hatte, eckige Klammern vorzugsweise für die Erzeugung als Ring durch kommutierende Erzeuger zu verwenden. In diesem Sinne sollten wir hier besser $k[G]$ schreiben. Stattdessen benutze ich gerne die alternative Notation $k\langle G \rangle$, denn als k -Modul ist ja der Gruppenring in der Tat erzeugt, ja sogar frei erzeugt von G .

1.2.3 (Exponentialnotation bei Gruppenringen). Die eben eingeführte Notation für Gruppenringe ist nur im Fall multiplikativ notierter Gruppen praktisch: Im Fall additiv notierter Gruppen wäre bereits der Ausdruck $g + h$ zweideutig, es könnte damit entweder die Summe in der Gruppe $1(g + h)$ oder die Summe im Gruppenring $1g + 1h$ gemeint sein. Aus diesem Grund schreibt man im Fall additiv notierter Gruppen Elemente des Gruppenrings lieber in der Form $\sum f(g) e^g$, wobei die Notation e^g rein formale Bedeutung hat. Dann gilt etwa im Gruppenring $e^{g+h} = e^g e^h \neq e^g + e^h$ und man kann wieder ganz intuitiv rechnen.

1.2.4 (Der Polynomring als Monoidring). Wir erhalten einen Isomorphismus $k\langle\mathbb{Z}\rangle \xrightarrow{\sim} k[X, X^{-1}]$ zwischen dem Gruppenring der Gruppe \mathbb{Z} über einem Ring k und dem Ring $k[X, X^{-1}]$ der Laurentpolynome mit Koeffizienten in k durch die Vorschrift $\sum a_n e^n \mapsto \sum a_n X^n$. Im Fall der additiven Gruppe \mathbb{Z} ist die Exponentialnotation im Sinne von 1.2.3 auch ziemlich ungewöhnlich und lädt zu Mißverständnissen ein. Allgemeiner kann man in derselben Weise auch für jedes Monoid G den sogenannten **Monoidring** $kG = k\langle G \rangle$ einführen und erhält analog einen Ringisomorphismus $k\langle\mathbb{N}\rangle \xrightarrow{\sim} k[X]$ zwischen dem Monoidring mit Koeffizienten in k des Monoids $(\mathbb{N}, +)$ und dem Polynomring über k in einer Veränderlichen.

1.2.5 (Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring). Das folgende ist grundlegend für die in diesem Text vorgesehene Entwicklung der Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Sei G eine Gruppe oder allgemeiner ein Monoid. Sei k ein Körper oder allgemeiner ein Ring. Sei weiter M eine abelsche Gruppe. Das Einschränken einer Abbildung $kG \times M \rightarrow M$ zu Abbildungen $k \times M \rightarrow M$ und $G \times M \rightarrow M$ liefert dann die vertikale Bijektion im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{c} kG\text{-Modulstrukturen} \\ kG \times M \rightarrow M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \end{array} \right) & & \\
 \downarrow \wr & & \\
 \left(\begin{array}{c} k\text{-Modulstrukturen} \\ k \times M \rightarrow M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \\ \text{zusammen mit } G\text{-Operation} \\ G \times M \rightarrow M \\ \text{durch } k\text{-lineare Abbildungen} \end{array} \right) & \xrightarrow{\sim} & \left(\begin{array}{c} k\text{-Modulstrukturen} \\ k \times M \rightarrow M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \\ \text{zusammen mit einem} \\ \text{Monoidhomomorphismus} \\ G \rightarrow \text{End}_k(M) \end{array} \right)
 \end{array}$$

wobei die horizontale Bijektion wie so oft schon wieder einmal von unserer Bijektion $\text{Ens}(G \times M, M) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(G, \text{Ens}(M, M))$ aus [GR] 2.2.25 herkommt und $\text{End}_k(M)$ das multiplikative Monoid des Rings $\text{End}_k(M)$ aus [KAG] 1.3.3 meint. In diesem Sinne ist eine Darstellung einer Gruppe G über k also „dasselbe“ wie ein kG -Modul. Wir werden einen guten Teil der Darstellungstheorie von Gruppen aus der Spezialisierung von Resultaten für Moduln über Ringen erhalten, die

hinwiederum durch die Methoden der linearen Algebra für Moduln über Körpern alias Vektorräume motiviert werden.

Satz 1.2.6. *Eine endliche Gruppe hat über jedem Körper höchstens so viele Isomorphieklassen von irreduziblen Darstellungen, wie sie Elemente hat.*

Beweis. Bezeichnet G unsere endliche Gruppe und k unseren Körper, so behaupten wir in Formeln, daß es bis auf Isomorphismus höchstens $|G|$ irreduzible Darstellungen von G über k gibt. Um das zu zeigen, fassen wir unsere Darstellungen mit 1.2.5 als Moduln über dem Gruppenring kG auf. Der Satz folgt dann aus dem Korollar [KAG] 3.5.15 zum Satz von Jordan-Hölder für Moduln. \square

1.2.7. Eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe nennt man auch ein **Gitter**.

Proposition* 1.2.8 (Freie abelsche Gruppen mit Involution). *Jedes Gitter mit Involution (X, σ) ist isomorph als Darstellung der zweielementigen Gruppe über \mathbb{Z} zu einer endlichen direkten Summe von Kopien von (\mathbb{Z}, id) , $(\mathbb{Z}, -\text{id})$, und (\mathbb{Z}^2, τ) für τ die Vertauschung der beiden Einträge. Die Zahl der jeweiligen Summanden ist dabei wohlbestimmt.*

Beweis. Wir setzen $X^\pm := \{\lambda \in X \mid \sigma(\lambda) = \pm\lambda\}$. Die Existenz einer Zerlegung der beschriebenen Art ist klar im Fall $X = X^+ + X^-$. Gibt es dahingegen $\lambda \in X$ mit $\lambda \notin (X^+ + X^-)$, so haben wir $2\lambda = \mu^+ + \mu^-$ mit $\mu^\pm \in X^\pm \setminus 0$. Man überzeugt sich dann leicht, daß

$$Z := \{\nu \in X \mid \exists m \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \text{ mit } m\nu \in \mathbb{Z}\mu^+ + \mathbb{Z}\mu^-\}$$

ein unter σ stabiles zu (\mathbb{Z}^2, τ) isomorphes Untergitter ist. Nach Konstruktion ist X/Z auch ein Gitter. Bilden wir zur kurzen exakten Sequenz $Z \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/Z$ durch Anwenden von $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(_, \mathbb{Z})$ die duale Sequenz, so erhalten wir als wieder eine kurze exakte Sequenz $(X/Z)^* \hookrightarrow X^* \twoheadrightarrow Z^*$. Diese muß aber spalten als Sequenz von Moduln über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[\sigma]/\langle \sigma^2 - 1 \rangle$, da Z^* ebenso wie Z frei zyklisch ist über dem Gruppenring alias isomorph zu unserem Ring als Modul über sich selber. Damit spaltet auch die ursprüngliche Sequenz und wir können den Beweis der Existenz einer Zerlegung der beschriebenen Art mit Induktion zu Ende bringen. Die Zahl der jeweiligen Summanden wird eindeutig festgelegt durch die Dimensionen der σ -Eigenräume in $\text{Hom}(X, \mathbb{Q})$ und die Dimension des \mathbb{F}_2 -Vektorraums $X/(X^+ + X^-)$. Daß dieser Quotient in der Tat ein \mathbb{F}_2 -Vektorraum ist, folgt aus der Identität $2\lambda = (\lambda + \sigma(\lambda)) + (\lambda - \sigma(\lambda))$. \square

Übungen

Übung 1.2.9 (Universelle Eigenschaft des Monoidrings). Gegeben ein Ringhomomorphismus $\varphi : k \rightarrow R$ und ein Monoid G und Monoidhomomorphismus

$\psi : G \rightarrow (R, \cdot)$ mit der Eigenschaft $\varphi(a)\psi(g) = \psi(g)\varphi(a) \forall a \in k, g \in G$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $kG \rightarrow R$, der φ und ψ fortsetzt.

Übung 1.2.10. Man zeige, daß es für jeden Ring k und $G = \{e, g\}$ eine zweielementige Gruppe genau einen Ringisomorphismus $k[X]/\langle X^2 - 1 \rangle \xrightarrow{\sim} kG$ gibt mit $\bar{X} \mapsto g$. Man folgere aus dem abstrakten chinesischen Restsatz weiter für k einen Körper mit $\text{char } k \neq 2$ einen Isomorphismus $k[X]/\langle X^2 - 1 \rangle \xrightarrow{\sim} k \times k$.

Übung 1.2.11. Man zeige, daß der Gruppenring der Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ über einem Körper k isomorph ist zum Quotienten $k[X]/\langle X^n - 1 \rangle$ des Polynomrings. Im Fall, daß $X^n - 1$ über k in Linearfaktoren zerfällt, zeige man weiter, daß die einfachen Darstellungen alle eindimensional sind und daß ihre Isomorphieklassen parametrisiert werden durch die Wurzeln dieses Polynoms. Unter der Annahme, daß zusätzlich das Bild von n in k nicht verschwindet, zeige man weiter, daß dieser Gruppenring auch isomorph ist zum Produkt $k \times \dots \times k$ von n Kopien des Körpers k . Im Fall $k = \mathbb{C}$ liefert etwa die diskrete Fouriertransformation aus [AN3] 3.7.11 einen derartigen Isomorphismus.

1.3 Erzeugende und Relationen für Ringalgebren**

1.3.1. Gegeben ein Kring k und eine Menge I definiert man die **freie k -Ringalgebra** $\text{Ralg}_k^\uparrow I$ über I als den Monoidring über k nach 1.2.4 des freien Monoids über I nach [TF] 2.5.1, in Formeln

$$\text{Ralg}_k^\uparrow I := k\langle \text{Mon}^\uparrow I \rangle$$

Salopp gesprochen kann man diese freie Ringalgebra verstehen als einen „Polynomring in den nicht-kommutierenden Variablen $(X_i)_{i \in I}$ “. Wir notieren sie auch

$$k[{}'X_1, X_2, \dots, X_n] = k[X_1, X_2, \dots, X_n]$$

im Fall endlich vieler Variablen oder $k[{}'X_i | i \in I] = k[{}'I]$ im allgemeinen, wo die unfertigen Klammern andeuten sollen, daß nichtkommutierende Variablen gemeint sind und das „Freiheitsstrichlein“ wie in [KAG] ?? vereinbart die Freiheit der Erzeuger andeutet. Die kanonische Einbettung $\text{can} : I \rightarrow \text{Ralg}_k^\uparrow I$ hat dann die universelle Eigenschaft, daß für jede weitere k -Ringalgebra B das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\text{Ralg}_k(\text{Ralg}_k^\uparrow I, B) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(I, B)$$

zwischen Homomorphismen von k -Ringalgebren und Abbildungen von Mengen induziert. Jede Abbildung von der Menge I in eine k -Ringalgebra B faktorisiert

also eindeutig über einen Homomorphismus von k -Ringalgebren $\text{Ralg}_k^\uparrow I \rightarrow B$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\text{can}} & \text{Ralg}_k^\uparrow I \\ & \searrow \varphi & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & B \end{array}$$

1.3.2. Gegeben ein Körper k , eine Menge I und eine Teilmenge $R \subset \text{Ralg}_k^\uparrow I$ der freien k -Ringalgebra über I bezeichnen wir den Quotienten

$$(\text{Ralg}_k^\uparrow I) / \langle R \rangle$$

nach dem von R erzeugten Ideal auch als die **von der Menge I mit den Relationen R erzeugte k -Ringalgebra**. In der Literatur spricht man meist etwas unscharf von der „von der Menge I mit den Relationen R erzeugten k -Algebra“. Oft schreibt man Relationen auch in der Form $a = b$ mit Elementen $a, b \in \text{Ralg}_k^\uparrow I$. Damit ist gemeint, daß die Differenz $a - b$ unserer beiden Elemente zu R gehören soll.

Beispiel 1.3.3. Ist k ein Körper und $B \subset V$ eine Basis eines k -Vektorraums V , so kann die äußere Algebra $\bigwedge V$ von V aus [LA2] 6.8.6 beschrieben werden als die von der Menge B mit den Relationen $b^2 = 0$ erzeugte k -Ringalgebra. Genauer induziert die Abbildung $B \rightarrow \bigwedge V, b \mapsto b \in \bigwedge^1 V$ einen Isomorphismus von k -Ringalgebren

$$(\text{Ralg}_k^\uparrow B) / \langle b^2 \mid b \in B \rangle \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$$

Beispiel 1.3.4. Der Polynomring über einem Kring k in Variablen X_1, \dots, X_n ist die von den Variablen X_i mit den Relationen $X_i X_j = X_j X_i$ erzeugte k -Ringalgebra.

Übungen

Übung 1.3.5. Gegeben eine Menge I und ein Körper k ist unser Monoidring $k\langle \text{Mon}^\uparrow I \rangle$ zum freien Monoid $\text{Mon}^\uparrow I$ über I aus [TF] 2.5.1 isomorph zur Tensoralgebra $\mathbb{T}(k\langle I \rangle)$ über dem freien Vektorraum über I im Sinne von [LA2] 6.8.7. Genauer haben die offensichtlichen Abbildungen $I \rightarrow k\langle \text{Mon}^\uparrow I \rangle$ und $I \rightarrow \mathbb{T}(k\langle I \rangle)$ beide dieselbe universelle Eigenschaft: Für jede k -Ringalgebra A induziert ihr Vorschalten eine Bijektion

$$\text{Ralg}_k(k\langle \text{Mon}^\uparrow I \rangle, A) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(I, A) \quad \text{bzw.} \quad \text{Ralg}_k(\mathbb{T}(k\langle I \rangle), A) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(I, A)$$

1.4 Halbeinfache Moduln

1.4.1. Die sehr allgemeinen Betrachtungen in diesem Abschnitt gelten nicht nur für Moduln über Ringen, sondern unverändert auch für Moduln über beliebigen Mengen, wie sie in ?? diskutiert werden. Um das zu sehen, kann man entweder die Beweise wiederholen, oder Moduln über einer Menge Ω als Moduln über der freien \mathbb{Z} -Ringalgebra alias dem freien Ring $\text{Ralg}_{\mathbb{Z}}^{\uparrow} \Omega = \text{Ring}^{\uparrow} \Omega$ aus 1.3.1 alias dem „Polynomring über \mathbb{Z} in nicht-kommutierenden durch Ω indizierten Variablen“ auffassen, wie in ?? erklärt wird.

Definition 1.4.2. Ein Modul heißt **halbeinfach** genau dann, wenn er die Summe seiner einfachen Untermoduln ist.

1.4.3. Wir fordern bei der Definition *nicht*, daß unser Modul die *direkte* Summe seiner einfachen Untermoduln sein soll. Zum Beispiel ist jeder Modul über einem Körper halbeinfach, er ist ja die Summe seiner eindimensionalen Teilräume, aber im Fall einer Dimension Zwei oder mehr natürlich nicht deren direkte Summe. Der Nullmodul ist halbeinfach als die Summe über die leere Familie seiner einfachen Untermoduln.

1.4.4. Zwei Untermoduln $U, D \subset M$ eines Moduls heißen **komplementär** und wir schreiben $M = U \oplus D$ genau dann, wenn die Addition einen Isomorphismus $U \oplus D \xrightarrow{\sim} M$ liefert. Dafür hinreichend und notwendig ist, daß gilt $U \cap D = 0$ und $U + D = M$. Wir sagen in dem Fall auch, M sei die **direkte Summe** von U und D und D sei ein **Komplement** von U in M . Analoge Begriffsbildungen benutzen wir auch für beliebige Familien von Untermoduln eines Moduls.

Proposition 1.4.5 (Charakterisierung halbeinfacher Moduln). *Seien R ein Ring und M ein R -Modul. So sind gleichbedeutend:*

1. M ist halbeinfach alias die Summe seiner einfachen Untermoduln;
2. M ist eine direkte Summe von einfachen Untermoduln;
3. Jeder Untermodul von M besitzt ein Komplement in M .

Beweis. $2 \Rightarrow 1$: Das ist klar.

$1 \Rightarrow 3$: Sei $M = \sum_{i \in I} M_i$ das Erzeugnis einer Familie von einfachen Untermoduln $M_i \subset M$ und sei $U \subset M$ der Untermodul, für den wir ein Komplement suchen. Gegeben $J \subset I$ setzen wir $M_J := \sum_{i \in J} M_i$. Ist I endlich, so finden wir natürlich unter allen Teilmengen $J \subset I$ mit $M_J \cap U = 0$ eine bezüglich Inklusion maximale Teilmenge. Ist I unendlich, so folgt die Existenz eines solchen maximalen J mit dem Zorn'schen Lemma. In jedem Fall behaupten wir für solch ein maximales J , daß gilt $M_J \oplus U = M$. In der Tat, aus $M_J + U \neq M$ folgt, daß es ein $i \in I$ gibt

mit $M_i \not\subset (M_J + U)$, also $M_i \cap (M_J + U) = 0$ da M_i einfach ist. Dann folgt aber $(M_i + M_J) \cap U = 0$ und J war nicht maximal.

3 \Rightarrow 2: Wir bemerken zunächst, daß sich die Eigenschaft 3 auf Untermoduln vererbt: Sind nämlich $U \subset N \subset M$ Untermoduln und ist V ein Komplement von U in M , so ist notwendig $V \cap N$ ein Komplement von U in N . Jetzt finden wir mithilfe des Zorn'schen Lemmas eine maximale Menge von einfachen Untermoduln derart, daß ihre Summe in M direkt ist. Wäre diese Summe S nicht ganz M , so fänden wir ein von Null verschiedenes Komplement D von S in M . In diesem Komplement D gäbe es einen von Null verschiedenen zyklischen Untermodul $Z \subset D$, und der hätte nach [KAG] 3.5.25 seinerseits einen einfachen Quotienten $Z \twoheadrightarrow Q$. Nun hat diese Surjektion einen Kern $K \subset Z$, und dieser Kern hat ein Komplement $F \subset Z$, und wegen mit $F \cong Q$ ist F einfach. Das aber steht im Widerspruch zur Maximalität von S . \square

Ergänzung 1.4.6. Beim Nachweis der Implikation 1 \Rightarrow 3 im vorhergehenden Beweis hätten wir natürlich auch gleich mit der Familie aller einfachen Untermoduln arbeiten können. Ich hoffe jedoch, daß man anhand des oben gegebenen Arguments besser nachvollziehen kann, in welchen Fällen das Zorn'sche Lemma tatsächlich benötigt wird.

Korollar 1.4.7. *Jeder Quotient und jeder Untermodul eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.*

Beweis. Natürlich ist jeder Quotient eine Summe einfacher Untermoduln und ist damit halbeinfach nach 1.4.5. Weiter besitzt nach 1.4.5 jeder Untermodul ein Komplement und ist damit auch isomorph zu einem Quotienten unseres Moduls, nämlich zu dem Quotienten nach besagtem Komplement. Alternativ kann man sich daran erinnern, daß wir beim Beweis von 3 \Rightarrow 1 in 1.4.5 bereits gezeigt hatten, daß sich die Eigenschaft 3 auf Untermoduln vererbt. \square

Definition 1.4.8. Seien R ein Ring oder allgemeiner eine Menge und M ein R -Modul. Gegeben ein einfacher R -Modul E notieren wir $M_E \subset M$ die Summe aller zu E isomorphen Untermoduln von M und nennen sie den **isotypischen Anteil von M vom Typ E** .

Satz 1.4.9 (Zerlegung in isotypische Anteile). *Seien R ein Ring, M ein R -Modul und $\text{irr}(R)$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher R -Moduln. So liefert die Einbettung der isotypischen Anteile eine Einbettung der direkten Summe*

$$\bigoplus_{E \in \text{irr}(R)} M_E \hookrightarrow M$$

1.4.10. Das Bild dieser Einbettung ist offensichtlich der größte halbeinfache Untermodul von M . Er heißt der **Sockel** $\text{soc } M$ von M . Insbesondere zerfällt demnach jeder halbeinfache Modul in die direkte Summe seiner isotypischen Anteile, die in diesem Kontext auch als **isotypische Komponenten** heißen.

Beweis. Daß das Bild unserer Abbildung der größte halbeinfache Untermodul ist, scheint mir klar. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß die Summe der isotypischen Komponenten direkt ist, daß also gilt

$$M_E \cap \sum_{F \neq E} M_F = 0$$

für alle E . Dazu hinwiederum brauchen wir nur zu zeigen, daß jeder einfache Untermodul einer Summe von einfachen Untermoduln zu einem der Summanden isomorph ist. Da aber besagte Summe halbeinfach ist, ist unser einfacher Untermodul auch ein Quotient dieser Summe und damit notwendig auch ein Quotient eines Summanden. \square

Übungen

Übung 1.4.11. Gegeben $m \geq 1$ ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein halbeinfacher \mathbb{Z} -Modul genau dann, wenn kein Primfaktor in m mehrfach vorkommt.

Übung 1.4.12. Ein $\mathbb{C}[X]$ -Modul M ist halbeinfach genau dann, wenn der durch Multiplikation mit X gegebene Endomorphismus des \mathbb{C} -Vektorraums M diagonalisierbar ist, als da heißt, wenn M eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Dasselbe gilt im Fall von $k[X]$ -Moduln für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k . Hinweis: [KAG] 3.5.26. Ist k ein vollkommener Körper und \bar{k} ein algebraischer Abschluß, so ist ein $k[X]$ -Modul halbeinfach genau dann, wenn der durch Erweiterung der Skalare entstehende $\bar{k}[X]$ -Modul halbeinfach ist. Ist k nicht vollkommen, so gilt das nicht mehr.

Übung 1.4.13. Sei $\varphi : M \rightarrow N$ ein Homomorphismus von Moduln über einem Ring R und sei E ein einfacher R -Modul. So bildet φ den zugehörigen isotypischen Anteil in den entsprechenden isotypischen Anteil ab, in Formeln $\varphi(M_E) \subset N_E$. Ist $U \subset M$ ein Untermodul, so haben wir sogar $U_E = U \cap M_E$.

Übung 1.4.14. Jeder Homomorphismus von Moduln erhält die isotypischen Komponenten. Eine Sequenz $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ von halbeinfachen Moduln ist exakt genau dann, wenn für alle einfachen Moduln die induzierte Sequenz $M'_E \rightarrow M_E \rightarrow M''_E$ exakt ist.

Übung 1.4.15. Man gebe einen halbeinfachen \mathbb{Z} -Modul mit genau tausend Elementen an.

Übung 1.4.16. Man bestimme die isotypischen Komponenten des \mathbb{Z} -Moduls $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

Übung 1.4.17. Man erkläre, inwiefern die Zerlegung eines halbeinfachen Moduls in isotypische Komponenten die Eigenraumzerlegung eines Vektorraums unter einem diagonalisierbaren Endomorphismus verallgemeinert. Hinweis: 1.4.12.

Übung 1.4.18. Ist A ein Ring und E ein einfacher A -Modul, so ist die E -isotypische Komponente A_E von A als A -Linksmodul ein Unterbimodul von A . Ist F ein weiterer einfacher A -Modul mit $E \not\cong F$, so gilt für das Produkt der isotypischen Komponenten insbesondere $A_E A_F = 0$. Analoges gilt für die Rechtsmodulstruktur.

1.5 Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten*

1.5.1 (**Matrixkoeffizienten**). Ist k ein Körper und A eine k -Ringalgebra und M ein A -Modul, so erklären wir für jeden Vektor $v \in M$ und jede Linearform $\varphi \in M^*$ eine Linearform auf A , den zugehörigen **Matrixkoeffizienten**

$$\begin{aligned} c_{\varphi,v} : A &\rightarrow k \\ a &\mapsto \varphi(av) \end{aligned}$$

Die Abbildung $M \otimes_k M^* \rightarrow A^*$ gegeben durch $v \otimes \varphi \mapsto c_{\varphi,v}$ ist dann ein Homomorphismus von A -Bimoduln. Ist weiter $\lambda \in A^*$ beliebig und $A\lambda \subset A^*$ der davon erzeugte Unter- A -Linksmodul und $\iota \in A^{**}$ das Auswerten bei $1 \in A$, so finden wir nach kurzer Rechnung $c_{\iota,\lambda} = \lambda$. Mithin ist jedes $\lambda \in A^*$ ein Matrixkoeffizient des A -Linksmoduls $A\lambda$.

Proposition 1.5.2 (Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten). *Ist k ein Körper und A eine k -Ringalgebra und M ein einfacher A -Modul, so spannen die Matrixkoeffizienten von M als k -Vektorraum genau die M -isotypische Komponente des A -Linksmoduls A^* auf.*

1.5.3. Insbesondere sind von Null verschiedene Matrixkoeffizienten paarweise nichtisomorpher einfacher Moduln stets k -linear unabhängig.

1.5.4. Ist k ein Körper und A eine k -Ringalgebra und M ein endlichdimensionaler einfacher A -Modul, so zeigen unsere Argumente, daß das Bild der zugehörigen Matrixkoeffizientenabbildung sowohl die M -isotypische Komponente von A^* als A -Linksmodul ist als auch die M^* -isotypische Komponente von A^* als A -Rechtsmodul. Insbesondere stimmen in dieser Situation beide besagten isotypischen Komponenten überein.

Beweis. Es ist klar, daß das Bild der Matrixkoeffizientenabbildung $M \otimes_k M^* \rightarrow A^*$ in dieser isotypischen Komponente enthalten ist. Andererseits ist jedes λ aus

dieser isotypischen Komponente auch ein Matrixkoeffizient des A -Linksmoduls $A\lambda$, der seinerseits als Linksmodul in eine direkten Summe von Kopien von M eingebettet werden kann. \square

1.5.5. Ist k ein Körper und A eine k -Ringalgebra und M ein endlichdimensionaler einfacher A -Modul, und gibt es eine Einbettung

$$A \hookrightarrow A^*$$

von A -Bimoduln, so stimmen nach 1.4.13 und 1.5.4 auch die M -isotypische Komponente von A als A -Linksmodul und die M^* -isotypische Komponente von A als A -Rechtsmodul überein. Eine typische Anwendung ist der Fall eines Gruppenrings kG , in dem die Abbildung $kG \hookrightarrow (kG)^*$, unter der jedem $g \in G$ das „Bestimmen des Koeffizienten von g^{-1} “ zugeordnet wird, ein Homomorphismus von Bimoduln ist.

Ergänzung 1.5.6. Für jeden Vektorraum M haben wir eine natürliche Abbildung

$$\kappa : M \otimes_k M^* \rightarrow (\text{End}_k M)^*$$

gegeben durch $(\kappa(v \otimes \varphi))(f) = \varphi(f(v))$. Die Matrixkoeffizientenabbildung läßt sich auch erhalten, indem man zur Operation $A \rightarrow \text{End}_k M$ die transponierte Abbildung $(\text{End}_k M)^* \rightarrow A^*$ betrachtet und dies κ davorschaltet.

1.6 Der Dichtesatz von Jacobson

1.6.1. Jeder Modul ist nach [KAG] 1.3.10 auch ein Modul über seinem eigenen Endomorphismenring.

Satz 1.6.2 (Jacobson's Dichtesatz). *Ist R ein Ring und M ein halbeinfacher R -Modul, so ist das Bild des offensichtlichen Ringhomomorphismus*

$$R \rightarrow \text{End}_{(\text{End}_R M)} M$$

dicht in folgendem Sinne: Gegeben $f \in \text{End}_{(\text{End}_R M)} M$ und endlich viele Elemente $m_1, \dots, m_r \in M$ existiert stets ein $x \in R$ mit $xm_i = f(m_i) \ \forall i$.

1.6.3. Ist unser Modul der Ring R selber, so gilt nach [KAG] 1.5.13 sogar ohne weitere Voraussetzungen stets $R \xrightarrow{\sim} \text{End}_{(\text{End}_R R)} R$ unter der offensichtlichen Abbildung.

1.6.4. Gegeben eine Menge mit Verknüpfung E und eine Teilmenge $T \subset E$ erklärt man den **Kommutator von T in E** durch die Formel $T' := \{x \in E \mid xt = tx \ \forall t \in T\}$. Der Kommutator T'' des Kommutators T' von T heißt dann der **Bikommutator von T** und umfaßt natürlich T selbst. Unser Satz sagt in dieser

Terminologie, daß gegeben ein halbeinfacher Modul M über einem Ring R das Bild von $R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}} M$ in der oben ausgeführten Weise „dicht“ liegt in seinem Bikommutator. Im übrigen fällt der „Trikommutator“ stets mit dem Kommutator zusammen, in Formeln

$$T''' = T'$$

In der Tat, $T'' \supset T$ impliziert $T''' \subset T'$ und $T''' \supset T'$ folgt durch Anwenden der Regel $S'' \supset S$ auf $S = T'$. Man mag das auch als Spezialfall unserer allgemeinen Erkenntnisse [KAG] 1.1.9 auffassen, angewandt auf die Inzidenzstruktur $R \subset E \times E$ bestehend aus allen kommutierenden Paaren.

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $r = 1$ und betrachten zu $m = m_1$ ein Komplement N des Untermoduls $Rm \subset M$, also

$$M = Rm \oplus N$$

Da die Projektion $\pi : M \twoheadrightarrow Rm \hookrightarrow M$ längs unserer Zerlegung in $\text{End}_R M$ liegt, und da gilt $f \circ \pi = \pi \circ f$ nach Annahme, folgt $f(m) \in Rm$. Es gibt also in anderen Worten $x \in R$ mit $f(m) = xm$. Den allgemeinen Fall führen wir auf den Fall $r = 1$ zurück, indem wir das Element $(m_1, \dots, m_r) \in M \oplus \dots \oplus M$ betrachten und die Abbildung $f \times \dots \times f$, die in der Tat kommutiert mit allen Elementen von

$$\text{End}_R(M \oplus \dots \oplus M) \cong \text{Mat}(r; \text{End}_R M) \quad \square$$

Korollar 1.6.5 (Satz von Wedderburn). *Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A \subset \text{Mat}(n; k)$ ein Teilring derart, daß k^n einfach ist als A -Modul, so gilt bereits $A = \text{Mat}(n; k)$.*

Beweis. Zunächst gilt $\text{End}_A k^n = k$, da sonst Eigenräume von Elementen $\varphi \in \text{End}_A k^n$ nichttriviale A -Untermoduln wären. Dann folgt $A = \text{End}_k k^n$ aus dem Dichtesatz 1.6.2. \square

1.6.6. Man mag den Satz von Wedderburn auch koordinatenfrei formulieren: Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und V ein endlichdimensionaler k -Vektorraum und $A \subset \text{End}_k V$ ein Teilring derart, daß V einfach ist als A -Modul, so gilt bereits $A = \text{End}_k V$. In dieser Sprache läßt sich die Notwendigkeit der Bedingungen besonders gut einsehen: Sind $k \subset L$ Körper und betrachten wir den Teilring $L \subset \text{End}_k L$, so ist ja L ein einfacher L -Modul, aber im Fall $k \neq L$ gilt $L \neq \text{End}_k L$.

1.6.7. Aus dem Satz von Wedderburn folgt insbesondere, daß für jede irreduzible Darstellung V einer endlichen Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gilt $(\dim V)^2 \leq |G|$. Stärkere Aussagen in dieser Richtung werden wir in 2.4.7 kennenlernen. Über allgemeineren Körpern gilt diese Abschätzung jedoch im allgemeinen nicht mehr, wie 1.1.27 zeigt.

1.7 Halbeinfache Ringe

Definition 1.7.1. Ein Ring heißt **halbeinfach** genau dann, wenn er halbeinfach ist als Linksmodul über sich selber.

1.7.2. Aus dem Satz über die Struktur halbeinfacher Ringe 1.7.4 wird folgen, daß ein Ring halbeinfach ist genau dann, wenn der opponierte Ring halbeinfach ist. In Teilen der Literatur wird aus mir unerfindlichen Gründen von einem halbeinfachen Ring zusätzlich gefordert, daß er nicht der Nullring sein darf. Der Gruppenring einer endlichen Gruppe über einem Körper oder sogar Schiefkörper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt, ist halbeinfach nach dem Satz von Maschke 2.3.1.

Ergänzung 1.7.3. Unter einem **einfachen Ring** verstehen wir einen Ring, der nicht Null ist und außer Null und dem ganzen Ring keine weiteren zweiseitigen Ideale besitzt. Diese Terminologie ist mit der eben in 1.4.2 eingeführten Terminologie nicht gut verträglich, da einfache Ringe keineswegs halbeinfach als Linksmodul über sich selber zu sein brauchen. Ein einfacher Ring R ist vielmehr einfach als Modul über dem Produktring $R \times R^{\text{opp}}$, dessen Operation auf R dabei durch simultane Links- und Rechtsmultiplikation zu verstehen ist. Zum Beispiel erhält man einen einfachen Ring, wenn man in $\text{End}(\mathbb{C}[X])$ den Teilring betrachtet, der von den Multiplikationen mit Polynomen und der Operation ∂ des Ableitens erzeugt wird. Er wird $\mathbb{C}\{X, \partial\}$ notiert, heißt die „Algebra der algebraischen Differentialoperatoren auf \mathbb{C} “ oder auch „Weyl-Algebra in einer Veränderlichen“, und wir zeigen in ??, daß er einfach ist. Als weiteres Beispiel erhält man auch einen einfachen Ring, wenn man den Quotienten des Endomorphismenrings eines Vektorraums abzählbarer Dimension nach dem Ideal aller Endomorphismen endlichen Ranges betrachtet, wie der Leser zur Übung selbst prüfen mag. Dieser Ring E ist jedoch als Linksmodul über sich selber mit denselben Argumenten wie in [KAG] 1.4.9 isomorph zu E^2 , folglich kann er nach 1.7.7 nicht halbeinfach sein. In der Literatur wird auch oft unter einem „einfachen Ring“ das verstanden, was in der hier gewählten Terminologie als ein „halbeinfacher einfacher Ring“ zu bezeichnen ist.

Satz 1.7.4 (Struktur halbeinfacher Ringe). 1. Jeder halbeinfache Ring besitzt bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache Moduln;

2. Der opponierte Ring eines halbeinfachen Rings ist stets auch wieder halbeinfach;

3. Jeder einfache Modul über einem halbeinfachen Ring ist endlichdimensional als Modul über dem Schiefkörper seiner Endomorphismen;

4. Ist L_1, \dots, L_r ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen einfacher Moduln eines halbeinfachen Rings R und sind $D_i = \text{End}_R L_i$ ihre Endomorphismenschiefkörper, so liefert die kanonische Abbildung einen Ringisomorphismus

$$R \xrightarrow{\sim} (\text{End}_{D_1} L_1) \times \dots \times (\text{End}_{D_r} L_r)$$

1.7.5. Umgekehrt zeigt man unschwer, daß jedes endliche Produkt von Matrizenringen über Schiefkörpern ein halbeinfacher Ring ist. Man mag zur Übung zeigen, daß die Faktoren rechts genau den isotypischen Komponenten des R -Moduls R entsprechen.

Beweis. Jeder halbeinfache Ring besitzt nach 1.7.7 bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache Moduln und zerfällt sogar in eine endliche direkte Summe von einfachen Moduln. Ist L_1, \dots, L_r ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen einfacher Moduln und m_i deren jeweilige Vielfachheit, so haben wir also einen Isomorphismus von R -Linksmoduln $R \cong L_1^{m_1} \oplus \dots \oplus L_r^{m_r}$. Sind $D_i = \text{End}_R L_i$ die Endomorphismenringe unserer einfachen Moduln, so erhalten wir nach [KAG] 1.5.13 und [KAG] 1.4.16 Ringisomorphismen

$$R^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_R R \xleftarrow{\sim} \text{Mat}(m_1; D_1) \times \dots \times \text{Mat}(m_r; D_r)$$

Jeder halbeinfache Ring ist also isomorph zu einem endlichen Produkt von Ringen endlicher quadratischer Matrizen mit Einträgen in Schiefkörpern. Umgekehrt kann man auch leicht zeigen, daß alle Ringe dieser Gestalt halbeinfach sind. Insbesondere ist der opponierte Ring eines halbeinfachen Rings stets wieder halbeinfach. Nun ist nach [KAG] 1.5.15 klar, daß gegeben ein Schiefkörper D und eine natürliche Zahl $m \geq 1$ jeder einfache Modul des Matrizenrings $\text{Mat}(m; D)$ isomorph ist zum Modul D^m von Spaltenmatrizen und jeder einfache Rechtsmodul isomorph zum Modul D^m von Zeilenmatrizen, dessen Endomorphismenring hinwiederum D selber ist, nun aber durch Linksmultiplikation wirkend. Das zeigt die vorletzte Aussage. Die letzte Aussage folgt dann unmittelbar. \square

Übungen

Übung 1.7.6. Man zeige, daß jeder Linksmodul über einem halbeinfachen Ring halbeinfach ist.

Übung 1.7.7. Jeder halbeinfache Ring zerfällt als Linksmodul über sich selber in eine direkte Summe von endlich vielen einfachen Untermoduln. Hinweis: Man betrachte die zu einer Zerlegung in eine direkte Summe gehörige Zerlegung des Einselements.

Ergänzende Übung 1.7.8. Besitzt ein einfacher Ring ein Linksideal, das als Linksmodul einfach ist, so muß unser Ring keineswegs halbeinfach sein: Der Endomorphismenring jedes Vektorraums unendlicher Dimension ist ein Gegenbeispiel.

Übung 1.7.9. Gegeben ein Vektorraum über einem Schiefkörper sind die einzigen zentralen Idempotenten seines Endomorphismenrings die Null und die Identität.

Übung 1.7.10. Ein zentrales Idempotentes $z \in R$ eines Rings heißt **primitiv** genau dann, wenn es nicht Null ist und es keine von Null verschiedenen zentralen Idempotenten z_1, z_2 gibt mit $z_1 + z_2 = z$ aber $z_1 z_2 = 0$. Man zeige: Gegeben von Null verschiedene Vektorräume L_1, \dots, L_r über Schiefkörpern D_1, \dots, D_r sind die primitiven zentralen Idempotenten des Produktrings

$$R := (\text{End}_{D_1} L_1) \times \dots \times (\text{End}_{D_r} L_r)$$

genau die Tupel mit der Identität an einer Stelle und sonst nur Nullen. Insbesondere ist in einem halbeinfachen Ring stets die Eins die Summe der primitiven zentralen Idempotenten.

Übung 1.7.11. Selbst in einem kommutativen aber nicht halbeinfachen Ring muß im allgemeinen die Eins keineswegs die Summe der primitiven zentralen Idempotenten sein. Man gebe ein Gegenbeispiel.

Übung 1.7.12. Jeder Ring $\text{Mat}(n; D)$ von endlichen quadratischen Matrizen mit Koeffizienten in einem Schiefkörper D und $n \geq 1$ ist einfach, und jeder halbeinfache einfache Ring ist isomorph zu einem derartigen Matrizenring für genau ein n und einen bis auf Isomorphismus wohlbestimmten Schiefkörper D , seinen **Goldie-Schiefkörper**. Das fragliche n heißt dann der **Goldie-Rang** unseres halbeinfachen einfachen Rings.

1.8 Spurkriterium für Halbeinfachheit*

1.8.1. Sei R ein Ring. Der Schnitt $J(R)$ aller Annulatoren einfacher R -Moduln heißt das **Jacobson-Radikal von R** . Man kann zeigen, daß stets gilt $J(R) = J(R^{\text{opp}})$, aber das ist für uns nicht von Belang.

1.8.2 (**Jacobson-Radikal eines Rings endlicher Länge**). Sei R ein Ring, der von endlicher Länge ist als Linksmodul über sich selber. So ist $J(R)$ offensichtlich ein nilpotentes zweiseitiges Ideal, in Formeln $J(R)^n = 0$ für $n \gg 0$, ja für $n \geq l_R(R)$. Umgekehrt muß jedes Linksideal J , das aus nilpotenten Elementen besteht, jeden einfachen Modul annullieren, denn aus $JL \neq 0$ folgt erst die Existenz von $x \in J$ und $m \in L$ mit $xm \neq 0$ und dann die Existenz von $r \in R$ mit $(rx)m = m$ im Widerspruch zu $(rx) \in J$. Mithin ist in diesem Fall $J(R)$ das größte Linksideal von R , das aus nilpotenten Elementen besteht.

1.8.3 (**Ringe endlicher Länge mit Jacobson-Radikal Null**). Ein Ring R , der von endlicher Länge ist als Linksmodul über sich selber und dessen Jacobson-Radikal verschwindet, muß halbeinfach sein. In der Tat findet man dann Elemente einfacher Moduln $m_1 \in L_1, \dots, m_t \in L_t$ derart, daß das Daranmultiplizieren an $(m_1, \dots, m_t) \in L_1 \oplus \dots \oplus L_t$ eine Injektion $R \hookrightarrow L_1 \oplus \dots \oplus L_t$ induziert, und dann ist R halbeinfach nach 1.4.7.

1.8.4. Auf jeder endlichdimensionalen k -Algebra A können wir die Linearform

$$\begin{aligned} \text{Tr} : A &\rightarrow k \\ a &\mapsto \text{tr}((a \cdot) : A \rightarrow A) \end{aligned}$$

betrachten. Für jede endlichdimensionale Algebra A über einem Körper k erklärt man dann die **Spurform** $A \times A \mapsto k$ durch

$$(a, b) := \text{Tr}(ab)$$

Man prüft leicht die Formeln $(a, b) = (b, a)$ und $(ax, b) = (a, xb)$ für alle $a, b, x \in A$. Daraus folgt, daß das Radikal J der Spurform stets ein zweiseitiges Ideal ist. Da die Spur nilpotenter Endomorphismen Null ist, muß im Fall einer endlichdimensionalen Ringalgebra A das Jacobson-Radikal $J(A)$ stets im Radikal der Spurform enthalten sein. Insbesondere ist jede endlichdimensionale Ringalgebra mit nichtausgearteter Spurform halbeinfach. In Charakteristik Null gilt nach 1.8.8 sogar die Umkehrung.

Ergänzung 1.8.5. Im Fall endlichdimensionaler Liealgebren spezialisiert unsere Spurform zur sogenannten Killingform ??.

Ergänzung 1.8.6. Auf jeder endlichdimensionalen k -Algebra A könnten wir zusätzlich zur Linearform $\text{Tr} : a \mapsto \text{tr}((a \cdot) : A \rightarrow A)$ a priori auch noch die Linearform $a \mapsto \text{tr}((\cdot a) : A \rightarrow A)$ betrachten und so auch eine Variante der Spurform erhalten. Ich kenne jedoch keinen Fall, in dem diese Variante von Nutzen wäre.

Beispiel 1.8.7. Auf der k -Algebra $A = \text{Mat}(n; k)$ kann die Spurform nach [LA1] 4.4.18 beschrieben werden durch die Formel $(M, N) \mapsto n \text{tr}(MN)$ für $\text{tr} : \text{Mat}(n; k) \rightarrow k$ die übliche Spur aus der linearen Algebra.

Proposition 1.8.8 (Spurkriterium für Halbeinfachkeit). *Eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper der Charakteristik Null ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Spurform nichtausgeartet ist.*

1.8.9. Insbesondere bleibt eine halbeinfache endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper der Charakteristik Null halbeinfach unter jeder Erweiterung durch eine Körpererweiterung des Grundkörpers, mit einer halbeinfachen endlichdimensionalen k -Ringalgebra A ist also in Formeln auch $K \otimes_k A$ halbeinfach für K/k

eine beliebige Körpererweiterung und $\text{char } k = 0$. Ein Gegenbeispiel in positiver Charakteristik gibt ??.

Beweis. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß jede halbeinfache Ringalgebra endlicher Dimension über einem Körper der Charakteristik Null eine nichtausgeartete Spurform hat. Nach [AL] 2.8.24 ist aber ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper der Charakteristik Null nilpotent genau dann, wenn die Spuren aller seiner echten Potenzen verschwinden. Man zeigt damit leicht, daß unser Radikal J der Spurform im Fall der Charakteristik Null das größte Linksideal ist, das aus nilpotenten Elementen besteht, also nach 1.8.2 das Jacobson-Radikal. Ist das aber Null, so ist unsere Ringalgebra halbeinfach nach 1.8.3. \square

2 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

2.1 Das Lemma von Schur

Satz 2.1.1 (Schur'sches Lemma). *Eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung einer Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besitzt außer den Skalaren keine Endomorphismen.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe, k unser algebraisch abgeschlossener Körper und V unsere endlichdimensionale irreduzible Darstellung. Der Satz behauptet in Formeln

$$k \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_k^G V$$

Nach Annahme gilt $V \neq 0$. Jedes $\varphi \in \text{Mod}_k^G V$ besitzt also einen Eigenwert, sagen wir λ , und der zugehörige Eigenraum ist offensichtlich eine von Null verschiedene Unterdarstellung $\text{Eig}(\varphi; \lambda) = \ker(\varphi - \lambda \text{id})$. Wenn V irreduzibel ist, muß diese Unterdarstellung schon ganz V sein und wir folgern $\varphi = \lambda \text{id}$. \square

Beispiel 2.1.2 (Gegenbeispiel bei allgemeinem Grundkörper). Die Gruppe G der vierten Einheitswurzeln in \mathbb{C} operiert durch Multiplikation auf dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{C} und macht diesen zu einer irreduziblen Darstellung $V = \mathbb{C}$ von G über $k = \mathbb{R}$. Dennoch haben wir in diesem Fall $k \neq \text{Mod}_k^G V$. Das steht nicht in Widerspruch zu unserem Satz, da $k = \mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen ist.

Beispiel 2.1.3 (Gegenbeispiel bei unendlichdimensionaler Darstellung). Ist $k \subset L$ ein Körpererweiterung, so wird $V = L$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $G = L^\times$ über k . In diesem Fall haben wir offensichtlich $\text{End}_{kG} V = L$ und im allgemeinen kann natürlich $k \neq L$ gelten selbst wenn k algebraisch abgeschlossen ist, zum Beispiel mit $L = k(X)$. Das steht jedoch auch nicht in Widerspruch zu unserem Satz, da unter der Voraussetzung k algebraisch abgeschlossen notwendig gilt $\dim_k L = \infty$.

Korollar 2.1.4. *Jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung einer abelschen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist eindimensional.*

Beweis. Jedes Gruppenelement operiert in diesem Fall durch einen Endomorphismus unserer Darstellung, also nach dem Lemma von Schur durch ein Vielfaches der Identität. Dann aber ist jeder Untervektorraum bereits eine Unterdarstellung und unsere Darstellung kann nur irreduzibel sein, wenn sie eindimensional ist. \square

2.1.5. Die nun folgenden Verallgemeinerungen sind für die Darstellungstheorie endlicher Gruppen ohne Bedeutung. Ihr Beweis benötigt stärkere Resultate der Mengenlehre.

Satz* 2.1.6 (Verallgemeinertes Schur'sches Lemma). Seien R ein Ring und $k \subset R$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $ar = ra \forall a \in k, r \in R$. So liefert für jeden einfachen R -Modul E , dessen Dimension als k -Vektorraum echt kleiner ist als die Kardinalität von k , die Abbildung $a \mapsto a \operatorname{id}_E$ einen Isomorphismus

$$k \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_R E$$

2.1.7. Insbesondere besitzt eine irreduzible Darstellung einer Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, deren Dimension echt kleiner ist als die Kardinalität des Körpers, außer den Skalaren keine Endomorphismen. Wie zuvor folgt auch, daß eine irreduzible Darstellung einer kommutativen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, deren Dimension echt kleiner ist als die Kardinalität des Körpers, eindimensional sein muß.

Beweis. Das Anwenden auf ein beliebiges von Null verschiedenes Element definiert eine Injektion $(\operatorname{End}_R E) \hookrightarrow E$. Die Dimension des Endomorphismenrings von E über k ist folglich höchstens so groß wie die Dimension von E über k . Unser Endomorphismenring ist jedoch auch ein Schiefkörper. Wäre er echt größer als k , so müßte er den Funktionenkörper $k(X)$ umfassen, in dem die Familie der $((X - \lambda)^{-1})_{\lambda \in k}$ etwa nach [LA1] 7.5.10 linear unabhängig ist über k . Das steht jedoch im Widerspruch zu unserer Bedingung an die Kardinalitäten. \square

Übungen

Übung 2.1.8. Sei R ein Ring und $k \subset R$ ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ derart, daß gilt $ar = ra \forall a \in k, r \in R$. So gilt für jeden einfachen R -Modul M , der endlichdimensional ist als k -Vektorraum, notwendig $k \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_R M$.

Ergänzende Übung 2.1.9. Jede irreduzible Darstellung einer abelschen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, deren Dimension echt kleiner ist als die Kardinalität des Körpers, ist eindimensional.

2.2 Darstellungen von Produkten

Definition 2.2.1. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe G und eine Darstellung W einer Gruppe H über demselben Grundkörper k können wir $V \otimes_k W$ zu einer Darstellung des Produkts $G \times H$ unserer Gruppen machen, indem wir setzen $(g, h)(v \otimes w) = gv \otimes hw$. Ich schlage für diese Darstellung die Notation

$$V \boxtimes W = V \boxtimes_k W$$

vor und nenne sie das **äußere Produkt** der Darstellungen V und W .

2.2.2. Gegeben eine Gruppe G und ein Körper k bezeichne

$$\text{irrf}_k G$$

die Menge aller Isomorphieklassen irreduzibler endlichdimensionaler Darstellungen von G über k . Der Buchstabe f steht hier für „finite“ oder „fini“, die Notation irre hätte zu merkwürdig ausgesehen.

Satz 2.2.3 (Einfache Darstellungen von Produkten). *Gegeben Gruppen G, H und ein algebraisch abgeschlossener Körper k induziert das äußere Produkt eine Bijektion*

$$(\text{irrf}_k G) \times (\text{irrf}_k H) \xrightarrow{\sim} \text{irrf}_k(G \times H)$$

2.2.4. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so ist das im allgemeinen falsch. Zum Beispiel ist \mathbb{C} eine irreduzible Darstellung über $k = \mathbb{R}$ der Gruppe $G = \mu_4$ der komplexen vierten Einheitswurzeln, aber die Darstellung $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ von $G \times G$ hat den Kern der durch die Multiplikation gegebenen Surjektion $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ als Unterdarstellung.

Beweis. Gegeben $V \in G\text{-Mod}_k, W \in H\text{-Mod}_k$ einfache endlichdimensionale Darstellungen ist $V \otimes_k W \in (G \times H)\text{-Mod}_k$ einfach, da nach dem Satz von Wedderburn 1.6.5 die Operationen Surjektionen $kG \rightarrow \text{End}_k V$ und $kH \rightarrow \text{End}_k W$ liefern und damit auch eine Surjektion des Gruppenrings von $G \times H$ auf $\text{End}_k(V \otimes_k W)$. Die im Satz angegebene Abbildung ist also sinnvoll definiert. Ist T eine endlichdimensionale Darstellung von $G \times H$, so besitzt T als G -Darstellung eine einfache Unterdarstellung $V \subset T$. Die offensichtliche Abbildung $V \otimes_k \text{Hom}_k(V, T)^G \rightarrow T$ ist dann nach 2.2.5 ein injektiver $(G \times H)$ -Homomorphismus für die offensichtliche Operation von H auf dem Hom-Raum. Ist T einfach, so muß diese Abbildung auch surjektiv sein und der Hom-Raum muß eine einfache Darstellung W von H sein. Die im Satz angegebene Abbildung ist also surjektiv. Der Nachweis ihrer Injektivität kann der Leser ohne Mühe aus dem Nachweis der Surjektivität extrahieren. \square

Lemma 2.2.5. *Ist T eine Darstellung einer Gruppe G über einem Körper k und ist weiter $V \in G\text{-Mod}_k$ eine einfache Darstellung mit Endomorphismenring $\text{Mod}_k^G V = k$, so induziert das Auswerten eine Inklusion*

$$V \otimes_k \text{Hom}_k(V, T)^G \hookrightarrow T$$

2.2.6. Das Bild dieser Injektion ist im Übrigen genau die isotypische Komponente des kG -Moduls T vom Typ V im Sinne von 1.4.8.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß T eine Summe und dann auch eine direkte Summe ist von zu V isomorphen Unterdarstellungen. In diesem Fall ist aber das Lemma explizit klar. \square

Definition 2.2.7. Seien G, H Gruppen, M ein $(G \times H)$ -Modul über einem Körper k und $\phi : G \rightarrow \text{GL}(M), \psi : H \rightarrow \text{GL}(M)$ die zugehörigen Homomorphismen. Mann nennt (G, H) ein **duales Paar** mittels M genau dann, wenn $\text{End}_k^G M$ als k -Algebra erzeugt wird von $\psi(H)$ und ebenso $\text{End}_k^H M$ als k -Algebra von $\phi(G)$.

Proposition 2.2.8 (Zerlegung unter dualen Paaren). *Sind zwei endliche Gruppen G, H ein duales Paar mittels einer endlichdimensionalen komplexen Darstellung M , so gibt es einfache und paarweise nicht isomorphe Darstellungen E_1, \dots, E_r von G und F_1, \dots, F_r von H derart, daß M unter $G \times H$ zerfällt als*

$$M \cong \bigoplus_{\nu=1}^r E_\nu \boxtimes F_\nu$$

2.2.9. Insbesondere liefert ein duales Paar M eine natürliche Bijektion zwischen den einfachen Kompositionsfaktoren von M als G -Modul und den einfachen Kompositionsfaktoren von M als H -Modul. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir allgemeiner statt der Endlichkeit unserer Gruppen nur fordern, daß M vollständig reduzibel ist sowohl über G als auch über H . Unter dieser Voraussetzung gilt die Aussage sogar über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper.

Beweis. Mit 2.2.5 können wir zumindest eine derartige Zerlegung finden mit den E_r irreduzibel und paarweise nicht isomorph. Aber dann liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $\prod_{\nu=1}^r \text{End}_{\mathbb{C}} F_\nu \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{C}}^G M$. Folglich sind die F_ν einfache Moduln für $\text{End}_{\mathbb{C}}^G M$ und damit nach Annahme für H . \square

Ergänzung 2.2.10 (Tensorprodukt von Darstellungen). Gegeben Darstellungen V, W einer Gruppe G über einem Körper k können wir ihr Tensorprodukt $V \otimes W$ zu einer Darstellung von G machen durch die Vorschrift $g(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw)$. Es ist diese Konstruktion, die die Darstellungstheorie weit über das Studium von Moduln über Ringen hinauswachsen läßt. Im Rahmen dieses Skriptes wird das jedoch kaum eine Rolle spielen.

2.3 Vollständige Reduzibilität

Satz 2.3.1 (von Maschke). *Ist G eine endliche Gruppe und k ein Körper, dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt, so ist jede Darstellung von G über k eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen.*

2.3.2. Im Fall der einelementigen Gruppe stimmt das schon mal: Jeder Vektorraum ist eine direkte Summe von eindimensionalen Teilräumen. Eine Darstellung, die eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist, nennt man auch

vollständig reduzibel. Gleichbedeutend ist, daß sie einem halbeinfachen Modul über dem Gruppenring entspricht. Unser Satz gilt mit demselben Beweis auch für einen Schiefkörper k . Beispiel 1.1.14 zeigt, daß er im allgemeinen nicht mehr gilt, wenn die Charakteristik die Gruppenordnung teilt.

Beweis für endlichdimensionale Darstellungen über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . In diesen Fällen benutzen wir:

Lemma 2.3.3. *Ist V eine Darstellung über \mathbb{R} oder \mathbb{C} der endlichen Gruppe G , so gibt es auf V ein G -invariantes Skalarprodukt.*

Beweis. Ist $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ irgendein Skalarprodukt, so definiert die Formel

$$(v, w) = \sum_{g \in G} b(gv, gw)$$

ein G -invariantes Skalarprodukt, i.e. es gilt $(gv, gw) = (v, w) \quad \forall g \in G.$ \square

Ist nun $W \subset V$ eine endlichdimensionale Unterdarstellung, so ist auch ihr orthogonales Komplement $W^\perp \subset V$ unter einem invarianten Skalarprodukt eine Unterdarstellung, und wir haben $V = W \oplus W^\perp$ nach [LA2] 1.5.16. Induktiv zeigt man so, daß V zerfällt in eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen. \square

Beweis für endlichdimensionale Darstellungen im allgemeinen. Wir müssen nur zeigen, daß es für jede Unterdarstellung $W \subset V$ einer endlichdimensionalen Darstellung V von G ein Komplement gibt, als da heißt eine Unterdarstellung $D \subset V$ mit $V = W \oplus D$, denn dann sind wir fertig mit vollständiger Induktion über die Dimension. Ist nun $i : W \hookrightarrow V$ eine Unterdarstellung, so finden wir sicher eine k -lineare Abbildung $\pi : V \rightarrow W$ mit $\pi \circ i = \text{id}_W$. Bilden wir dann in $\text{Hom}(V, W)$ die lineare Abbildung

$$\psi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1}$$

so erhalten wir einen Homomorphismus von Darstellungen $\psi : V \rightarrow W$ mit $\psi \circ i = \text{id}_W$. Dann ist jedoch $\ker \psi$ eine Unterdarstellung von V mit $V = W \oplus \ker \psi.$ \square

Beweis im allgemeinen. Nach dem bereits behandelten endlichdimensionalen Fall wissen wir, daß der Gruppenring halbeinfach ist im Sinne von 1.4.2. Dann ist aber nach 1.7.6 auch jeder Modul darüber halbeinfach, also jede Darstellung eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen. \square

Übung 2.3.4. Ist G eine endliche Gruppe und k ein Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung teilt, so besitzt die Unterdarstellung der konstanten Funktionen im Gruppenring kein G -invariantes Komplement. Hinweis: Der zu solch einer Zerlegung gehörige Projektor wäre nach [KAG] 1.3.5 die Rechtsmultiplikation mit einem Element a des Gruppenrings, das einerseits einer von Null verschiedenen konstanten Funktion entsprechen müßte und andererseits der Formel $a^2 = a$ zu genügen hätte. Für die konstante Funktion $a \in kG$ mit dem einzigen Funktionswert $c \in k$ gilt jedoch $a^2 = |G|ca$.

2.3.5. Ich will den vorhergehenden Beweis nocheinmal von einem anderen Standpunkt aus diskutieren und dazu neue Konzepte einführen, die uns auch an anderer Stelle noch nützlich sein werden.

Definition 2.3.6. Sind V, W zwei Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper k , so machen wir den Raum $\text{Hom}_k(V, W)$ aller k -linearen Abbildungen von V nach W selbst zu einer Darstellung mittels der Vorschrift $(gf)(v) = g(f(g^{-1}v))$ oder, anders geschrieben,

$$gf = g \circ f \circ g^{-1}$$

Wir nennen diese Operation der Gruppe auf dem Hom-Raum die **Operation durch Konjugation**.

2.3.7. Man sieht sofort, daß die Invarianten im Raum aller linearen Abbildungen von einer Darstellung V in eine Darstellung W unter der Operation durch Konjugation genau die Homomorphismen von Darstellungen sind, in Formeln

$$\text{Hom}_k(V, W)^G = \text{Hom}_{kG}(V, W)$$

Im vorhergehenden Beweis haben wir schlicht über die Bahn von π im Hom-Raum gemittelt und so einen G -invarianten Homomorphismus von Vektorräumen alias einen Homomorphismus von Darstellungen erhalten.

Ergänzung 2.3.8. Ist noch allgemeiner V eine Darstellung einer Gruppe G und W eine Darstellung einer Gruppe H , so erhalten wir eine natürliche Operation von $G \times H$ auf $\text{Hom}_k(V, W)$ durch die Vorschrift

$$(g, h)f = \rho_W(h) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) = h \circ f \circ g^{-1}$$

Unsere Definition ergibt sich im Fall $H = G$ durch Einschränken der $(G \times G)$ -Operation auf dem Hom-Raum mittels der diagonalen Einbettung $G \hookrightarrow G \times G$, $g \mapsto (g, g)$. Wir nennen sie präziser die Operation durch Konjugation auf dem Hom-Raum, um sie zu unterscheiden von der **Operation durch Nachschalten** $g : f \mapsto \rho_W(g) \circ f$ und der **Operation durch Vorschalten** $g : f \mapsto f \circ \rho_V(g^{-1})$.

Ergänzung 2.3.9. Gegeben ein komplexer Vektorraum V operiert die symmetrische Gruppe \mathcal{S}_n auf $V^{\otimes n}$ durch die Permutation von Tensoren. Die Zerlegung in isotypische Komponenten

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \text{irr } \mathcal{S}_n} (V^{\otimes n})_\lambda$$

ist dann sogar eine Zerlegung in Unterdarstellungen von $\text{GL}(V)$. Ist W ein weiterer komplexer Vektorraum, so liefert das Tensorieren beider Zerlegungen eine Zerlegung

$$(V \otimes W)^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda, \mu \in \text{irr } \mathcal{S}_n} (V^{\otimes n})_\lambda \otimes (W^{\otimes n})_\mu$$

in eine Summe von unter $\text{GL}(V) \times \text{GL}(W)$ stabilen Teilräumen. Betrachten wir auf beiden Seiten nur die unter \mathcal{S}_n alternierenden Tensoren, so erhalten wir mit dem ersten Isomorphismus nach [LA2] 6.8.15 eine Zerlegung der äußeren Potenzen

$$\bigwedge^n (V \otimes W) \xrightarrow{\sim} (V \otimes W)_{\text{sgn}}^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \text{irr } \mathcal{S}_n} (V^{\otimes n})_\lambda \otimes (W^{\otimes n})_{\lambda \otimes \text{sgn}}$$

Diese Zerlegung heißt auch die **Binet-Cauchy-Identität**. Sie kann mithilfe unserer Erkenntnisse 2.8.2 über irreduzible Darstellungen von symmetrischen Gruppen auch noch konkreter ausgeschrieben werden.

2.4 Zur Struktur von Gruppenringen

Satz 2.4.1 (Fouriertransformation für endliche Gruppen). *Seien G eine endliche Gruppe, k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und L_1, \dots, L_r die irreduziblen Darstellungen von G über k bis auf Isomorphismus. Teilt die Charakteristik von k nicht die Gruppenordnung, so liefert die Operation einen Ringisomorphismus*

$$\rho : kG \xrightarrow{\sim} (\text{End}_k L_1) \times \dots \times (\text{End}_k L_r)$$

Teilt die Charakteristik die Gruppenordnung, so ist diese Abbildung zumindest noch ein surjektiver Ringhomomorphismus.

2.4.2. Der Gruppenring einer endlichen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper einer zur Gruppenordnung teilerfremden Charakteristik ist also in Worten isomorph vermittelt der durch die Operation gegebenen Abbildung zum Produkt der Endomorphismenringe der irreduziblen Darstellungen. Insbesondere ist er isomorph zu einem Produkt von Matrixringen.

Beweis. Der kG -Modul $L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ hat nach dem Schur'schen Lemma den Endomorphismenring $k \times \dots \times k$. Die Surjektivität folgt damit aus dem Dichtesatz 1.6.2, angewandt auf den kG -Modul $L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ mit seinem Endomorphismenring $k \times \dots \times k$, formal unter Verwendung der offensichtlichen Übung [KAG] 1.3.15. Um die Injektivität zu zeigen bemerken wir, daß ja kG nach Maschke selbst eine Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. Liegt also $a \in kG$ im Kern unserer Abbildung, so ist die Linksmultiplikation mit a die Nullabbildung auf kG und es folgt $a = 0$. \square

Alternativer Beweis. Im Fall teilerfremder Charakteristik folgt das auch unmittelbar aus der Halbeinfachheit des Gruppenrings nach Maschke, der Strukturtheorie halbeinfacher Ringe 1.7.4, und dem Schur'schen Lemma. Diese Argumentation hat den Vorteil, ohne den Dichtesatz auszukommen. \square

Ergänzung 2.4.3. Im Fall teilerfremder Charakteristik zeigt der Satz, daß für jede irreduzible Darstellung L von G die L -isotypische Komponente des Gruppenrings kG in seiner Eigenschaft als Linksmodul zusammenfällt mit der L^* -isotypischen Komponente des Gruppenrings kG in seiner Eigenschaft als Rechtsmodul, für die hoffentlich offensichtliche Struktur als Rechtsmodul auf dem Dualraum L^* . Das wissen wir seit 1.5.5 allgemeiner sogar für jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung L einer beliebigen Gruppe G über einem beliebigen Körper k .

Ergänzung 2.4.4. Ist G endlich und kommutativ, so ist jede irreduzible komplexe Darstellung von G eindimensional und die Isomorphieklassen komplexer irreduzibler Darstellungen von G entsprechen eineindeutig den Gruppenhomomorphismen $G \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Unser Isomorphismus aus dem Satz entspricht dann der abstrakten Fouriertransformation

$$M(G) \rightarrow \text{Ens}(\hat{G}, \mathbb{C})$$

von komplexen Maßen auf G zu Funktionen auf \hat{G} , die wir in [AN3] 4.2.11 im Fall einer Vektorgruppe eingeführt hatten und deren Verallgemeinerung auf beliebige lokal kompakte separable Hausdorff'sche topologische Gruppen in [AN3] 4.7.1 diskutiert wird. Daß wir in unserem Satz einen Ringhomomorphismus definieren, entspricht Proposition [AN3] 4.5.7 aus der Fouriertheorie, nach der unter der Fouriertransformation die Faltung zweier Maße in das punktweise Produkt ihrer Fouriertransformierten übergeht.

Beispiel 2.4.5. Ist $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zyklisch, so finden wir unsere diskrete Fouriertransformation bereits im chinesischen Restsatz wieder, wie im folgenden Diagramm

ausgeführt wird, das wir im Anschluß diskutieren, vergleiche auch 1.2.11.

$$\begin{array}{ccc}
 k[X] & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 k[X]/\langle X^n - 1 \rangle & \xrightarrow{\sim} & kG \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 \prod_{\zeta^{n=1}} k[X]/\langle X - \zeta \rangle & \xrightarrow{\sim} & \prod_{L \in \text{irr}_k G} \text{End}_k L \\
 & \swarrow \sim & \nwarrow \sim \\
 & \underbrace{k \times \dots \times k}_{n \text{ Faktoren}} &
 \end{array}$$

Die universelle Eigenschaft des Polynomrings liefert sicher einen Homomorphismus von k -Kringen $k[X] \rightarrow kG$ mit $X \mapsto e^1$ in der Notation 1.2.3. Sicher liegt $X^n - 1$ im Kern und die universelle Eigenschaft des Restklassenrings induziert so die obere Horizontale unseres Diagramms. Die Basis X^0, X^1, \dots, X^{n-1} des Restklassenrings geht dabei in die Standardbasis des Gruppenrings über, so daß unsere obere Horizontale ein Isomorphismus sein muß. Ist $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und $\text{char } k$ kein Teiler von n , so hat $X^n - 1$ nach [AL] 3.9.8 genau n paarweise verschiedene Nullstellen ζ_1, \dots, ζ_n in k und die Faktorisierung $X^n - 1 = (X - \zeta_1) \dots (X - \zeta_n)$ zusammen mit dem chinesischen Restsatz [AL] 2.3.4 liefert den Isomorphismus in der linken Vertikale. Die rechte Vertikale ist dahingegen unsere Fouriertransformation 2.4.1. Da nun nach 2.1.4 jede irreduzible Darstellung unserer abelschen Gruppe G über k eindimensional ist, entsprechen diese irreduziblen Darstellungen eineindeutig den Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow k^\times$ alias nach [LA2] 4.2.14 den n -ten Einheitswurzeln ζ_1, \dots, ζ_n . Die Kommutativität unseres Diagramms folgt aus den Definitionen. In diesem Sinne reduziert sich unser Satz 2.4.1 über die diskrete Fouriertransformation also im Fall zyklischer Gruppen auf einen Spezialfall des chinesischen Restsatzes.

2.4.6. Der obige Satz gilt analog für jede endlichdimensionale halbeinfache Ringalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Die Fouriertransformation im Fall endlicher zyklischer Gruppen läuft meist unter der Bezeichnung **diskrete Fouriertransformation**.

Korollar 2.4.7. *Seien G eine endliche Gruppe und $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt. Seien L_1, \dots, L_r die irreduziblen Darstellungen von G über k , bis auf Isomorphismus. So gilt*

$$|G| = (\dim L_1)^2 + \dots + (\dim L_r)^2$$

Lassen wir die Einschränkung an die Charakteristik fallen, gilt zumindest noch die Abschätzung \leq .

Beweis. Klar mit 2.4.1. □

Korollar 2.4.8. Gegeben eine endliche Gruppe und ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt, gibt es bis auf Isomorphismus genauso viele einfache Darstellungen unserer Gruppe über besagtem Körper wie Konjugationsklassen in unserer Gruppe.

Beweis. Das Zentrum eines Gruppenrings kG besteht offensichtlich genau aus den Funktionen $G \rightarrow k$, die mit allen Gruppenelementen kommutieren, und damit aus den Funktionen, die konstant sind auf Konjugationsklassen. Man nennt sie **Klassenfunktionen**. Das Zentrum der anderen Seite in Satz 2.4.1 ist aber nach den beiden anschließenden Übungen 2.4.9 und 2.4.10 offensichtlich isomorph als k -Vektorraum zu einem Produkt von r Kopien des Grundkörpers $k \times \dots \times k$. □

Übungen

Übung 2.4.9. Das Zentrum des Endomorphismenrings eines Vektorraums besteht genau aus allen Multiplikationen mit Skalaren aus dem Körper.

Übung 2.4.10. Das Zentrum eines Produkts von Ringen ist das Produkt ihrer Zentren.

Ergänzende Übung 2.4.11. Gegeben eine endliche Gruppe und ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt, zeige man: Genau dann ist die Gruppe kommutativ, wenn alle ihre irreduziblen Darstellungen über besagtem Körper eindimensional sind.

2.5 Charaktere

2.5.1 (**Spurform einer endlichdimensionalen Algebra**). Sei k ein Körper. Auf jeder endlichdimensionalen k -Algebra A können wir wie in 1.8.4 die Linearform

$$\begin{aligned} \text{Tr} : A &\rightarrow k \\ a &\mapsto \text{tr}((a \cdot) : A \rightarrow A) \end{aligned}$$

betrachten. Im Fall eines Gruppenrings $A = kG$ gilt offensichtlich $\text{Tr}(\sum a_g g) = |G|a_e$ alias $\text{Tr} = |G|\delta_e$ für $\delta_e : kG \rightarrow k$ das Auswerten beim neutralen Element. Im Fall eines Matrixrings $A = \text{Mat}(n; k)$ gilt ebenso offensichtlich $\text{Tr}(M) = n \text{tr}(M)$ für jede Matrix M und für tr die Spur aus der linearen Algebra. Auf jeder endlichdimensionalen k -Algebra A können wir weiter die **Spurform**, eine symmetrische Bilinearform $A \times A \rightarrow k$, erklären durch $(a, b) \mapsto \text{Tr}(ab)$. Im Fall eines Gruppenring kG gilt offensichtlich $\text{Tr}(gh) = |G|\delta_{g,h^{-1}}$ für alle $g, h \in G$.

2.5.2 (Spurform und Fouriertransformation). Sei G eine endliche Gruppe und $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt. So erhalten wir mit der Fouriertransformation 2.4.1 in der oberen Horizontale und der Spur Tr in den Vertikalen offensichtlich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} kG & \xrightarrow[\rho]{\sim} & \text{End}_k L_1 \times \dots \times \text{End}_k L_r \\ \text{Tr} = |G| \delta_e \downarrow & & \downarrow \text{Tr} = (d_1 \text{tr}_1, \dots, d_r \text{tr}_r) \\ k & \xlongequal{\quad\quad\quad} & k \end{array}$$

Hier meint die rechte Vertikale die Multiplikation eines Tupels von Endomorphismen, aufgefaßt als Spaltenvektor, mit der Zeilenmatrix $(d_1 \text{tr}_1, \dots, d_r \text{tr}_r)$ von Linearformen auf besagten Endomorphismenräumen, wir setzen $d_i := \dim_k L_i$, und $\text{tr}_i : \text{End}_k L_i \rightarrow k$ meint die übliche Spur aus der linearen Algebra. Diese einigermaßen banale Erkenntnis hat bemerkenswerte Konsequenzen, die im folgenden durchdekliniert werden.

Korollar 2.5.3 (Dimension einfacher Darstellungen und Charakteristik). Seien G eine endliche Gruppe und $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt. So teilt die Charakteristik auch keine der Dimensionen der einfachen Darstellungen von G über k .

Beweis. Unter unseren Annahmen ist die Spurform nicht ausgeartet auf dem Gruppenring kG , also ist sie auch nicht ausgeartet auf dem Produkt der Endomorphismenringe der irreduziblen Darstellungen. \square

2.5.4. ($k = \bar{k}$, $\text{char } k \nmid |G|$). Sei G eine endliche Gruppe und k ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt. Sei L eine einfache Darstellung von G . Nach unserer Fouriertransformation 2.4.1 gibt es genau ein Element $e_L \in kG$ derart, daß e_L durch die Identität auf L operiert und durch Null auf jeder einfachen Darstellung M von G , die nicht isomorph ist zu L , in Formeln

$$(e_L \cdot : M \rightarrow M) = \begin{cases} \text{id} : M \rightarrow M & \text{falls } M \cong L; \\ 0 : M \rightarrow M & \text{falls } M \text{ einfach, } M \not\cong L. \end{cases}$$

Dies Element e_L nennen wir den **Projektor** zu L . Die Summe aller dieser Projektoren ist natürlich die Eins des Gruppenrings.

Beispiel 2.5.5. Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat über jedem Körper k der Charakteristik ungleich Zwei die beiden einfachen Darstellungen k_+ und k_- . Die zugehörigen Projektoren sind $e_{k_+} = (e^{\bar{0}} + e^{\bar{1}})/2$ und $e_{k_-} = (e^{\bar{0}} - e^{\bar{1}})/2$.

Beispiel 2.5.6. ($\text{char } k \nmid |G|$). Der Projektor zur trivialen Darstellung k hat stets die Gestalt $e_k = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g$. In der Tat operiert dieses Element des Gruppenrings auf der trivialen Darstellung als die Identität und auf allen anderen einfachen Darstellungen als Null, da diese ja außer der Null keinen unter G invarianten Vektor besitzen.

2.5.7. Die Projektoren zu den einfachen irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe G lassen sich im komplexen Gruppenring $\mathbb{C}G$ auch allein aus der Ringstruktur heraus beschreiben als die primitiven zentralen Idempotenten im Sinne von 1.7.10.

Definition 2.5.8. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V einer Gruppe G über einem Körper k definiert man ihren **Charakter** $\chi_V : G \rightarrow k$ durch die Vorschrift

$$\chi_V(g) := \text{tr}(g|V)$$

2.5.9. Da nach [LA1] 4.4.16 konjugierte Matrizen dieselbe Spur haben, sind Charaktere stets Klassenfunktionen. Die Dimension einer Darstellung ist offensichtlich gerade der Wert ihres Charakters beim neutralen Element. Die Charaktere der einfachen Darstellungen heißen die **einfachen Charaktere** oder auch abkürzend die **Charaktere** unserer Gruppe. Im Fall komplexer Darstellungen einer abelschen Gruppe sind das natürlich genau die Gruppenhomomorphismen $G \rightarrow \mathbb{C}^\times$, weshalb unsere Terminologie hier mit der in [AN3] 3.7.7 eingeführten Terminologie verträglich ist.

Übung 2.5.10 (Charaktere von Permutationsdarstellungen). Gegeben eine Gruppe G und eine endliche G -Menge X und ein Körper k zeige man für den Charakter der zugehörigen Permutationsdarstellung $V := \text{Ens}(X, k)$ nach 1.1.8 die Formel

$$\chi_V(g) = |X^g|$$

In Worten ist also der Wert des Charakters bei g die als Element von k zu verstehende Zahl der Fixpunkte von g in X .

Übung 2.5.11. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe nennen wir $V^* = \text{Hom}(V, k)$ auch die **kontragradiente Darstellung**. Man zeige, daß der Charakter der kontragradienten Darstellung gegeben wird durch die Formel $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$. Weiter zeige man $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

Korollar 2.5.12 (Charakter-Projektor-Formel). ($k = \bar{k}$, $\text{char } k \nmid |G|$). Für jede endliche Gruppe G und jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k , dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt, ist der Charakter einer irreduziblen Darstellung bis auf einen Skalar der Projektor der kontragredienten Darstellung. Genauer gilt in Formeln

$$e_{L^*} = \frac{\dim L}{|G|} \chi_L$$

Beweis. Das Idempotente e_i auf der rechten Seite unserer Fouriertransformation, also das Tupel aus der Identität auf $L = L_i$ und Nullen sonst, entspricht dem Projektor $e_L \in kG$ im Gruppenring. Dessen Koeffizienten finden wir von 2.5.2 ausgehend mit der von der Mitte aus zu entwickelnden Gleichungskette

$$|G|e_L(g^{-1}) = \text{Tr}(e_L g) = \text{Tr}(e_i \rho(g)) = d_i \text{tr}(g : L_i \rightarrow L_i)$$

Mit der Formel 2.5.11 für den Charakter der kontragredienten Darstellung folgt die Behauptung unmittelbar. \square

2.5.13. Wir definieren für jede endliche Gruppe G und jeden Körper k , dessen Charakteristik teilerfremd ist zur Gruppenordnung, auf dem Gruppenring kG eine symmetrische Bilinearform $(\ , \)$ durch die Vorschrift

$$(\varphi, \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \psi(g^{-1})$$

Satz 2.5.14 (Orthonormalität irreduzibler Charaktere). *Seien gegeben eine endliche Gruppe und ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik teilerfremd ist zur Gruppenordnung. So bilden die einfachen Charaktere für die vorstehende Bilinearform 2.5.13 eine Orthonormalbasis des Raums der Klassenfunktionen.*

Beweis. Wir beachten $(\varphi, \psi) = |G|^{-1} \delta_e(\varphi \psi)$. Jetzt schreiben wir die Gleichung $e_M e_L = 0$ für die Projektoren zu nichtisomorphen einfachen Darstellungen mit der Charakter-Projektor-Formel 2.5.12 um auf einfache Charaktere und erhalten schon mal $(\chi_M, \chi_L) = 0$ für verschiedene einfache Charaktere χ_M und χ_L . Sonst schreiben wir die Gleichung $e_L e_L = e_L$ um auf einfache Charaktere und erhalten $\chi_L \chi_L = (|G|/\dim L) \chi_L$. Anwenden von $|G|^{-1} \delta_e$ führt wegen $\delta_e(\chi_L) = \dim L$ dann sofort zu $(\chi_L, \chi_L) = 1$. Die Charaktere bilden also ein Orthonormalsystem, und nach 2.4.8 bilden sie dann sogar eine Basis des Raums der Klassenfunktionen. \square

Ergänzung 2.5.15 (Berechnung von Multiplizitäten). Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V einer endlichen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null können wir also die Vielfachheit, mit der eine vorgegebene irreduzible Darstellung L in einer Zerlegung unserer Darstellung V als direkte Summe irreduzibler Darstellungen auftritt, berechnen als den Wert $[V : L] = (\chi_L, \chi_V)$ unserer Bilinearform auf den Charakteren.

Korollar 2.5.16 (Orthonormalität irreduzibler Charaktere, Variante). *Sei G eine endliche Gruppe. Wir betrachten auf dem komplexen Gruppenring $\mathbb{C}G$ das Skalarprodukt $\langle \ , \ \rangle$ gegeben durch*

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum \overline{\varphi(g)} \psi(g)$$

Für dieses Skalarprodukt bilden die einfachen Charaktere eine Orthonormalbasis des Raums der komplexwertigen Klassenfunktionen.

Beweis. Mit 2.5.14 reicht es, für jeden Charakter $\chi = \chi_V$ über \mathbb{C} die Formel $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ zu zeigen. Nun sind aber alle Eigenwerte von $(g \cdot) : V \rightarrow V$ Einheitswurzeln und die Eigenwerte von $(g^{-1} \cdot) : V \rightarrow V$ sind ihre Inversen alias ihre komplex Konjugierten. Alternativ folgt die Aussage auch sofort aus den Orthonormalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten 2.6.9. \square

Ergänzung 2.5.17 (Berechnung von Multiplizitäten, Variante). Gegeben eine endlichdimensionale komplexe Darstellung V einer endlichen Gruppe über einem \mathbb{C} können wir also die Vielfachheit, mit der eine vorgegebene irreduzible Darstellung L in einer Zerlegung unserer Darstellung V als direkte Summe irreduzibler Darstellungen auftritt, berechnen als den Wert $[V : L] = \langle \chi_L, \chi_V \rangle$ unseres Skalarprodukts auf den Charakteren.

2.5.18. Die wesentlichen Informationen über die komplexen Darstellungen einer endlichen Gruppe werden meist in Form einer **Charaktertafel** dargeboten: Die Spalten solch einer Tafel sind indiziert durch Repräsentanten der Konjugationsklassen, die Zeilen durch irreduzible Darstellungen, und in der Tafel stehen die Werte des Charakters der entsprechenden irreduziblen Darstellung auf Elementen der entsprechenden Konjugationsklasse. Über den Konjugationsklassen wird meist in einer eigenen Zeile ihre Kardinalität angegeben, damit auch das Skalarprodukt auf dem Raum Klassenfunktionen aus der Tafel hervorgeht.

2.5.19 (**Orthogonalitätsrelationen in der Charaktertafel**). Sei G eine endliche Gruppe und χ_1, \dots, χ_r die irreduziblen Charaktere von G . Bilden x_1, \dots, x_r ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen und bezeichnet $\hat{x} \subset G$ die Konjugationsklasse von $x \in G$, so lauten die Orthogonalitätsrelationen

$$\delta_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_k |\hat{x}_k| \overline{\chi_i(x_k)} \chi_j(x_k)$$

Wegen der Bahnformel $|\hat{x}_k| \cdot |Z_G(x_k)| = |G|$ ist also die Matrix mit den Einträgen $|Z_G(x_k)|^{-1/2} \overline{\chi_i(x_k)}$ unitär. Dasselbe gilt a fortiori für ihre transponierte Matrix und zeigt

$$\delta_{ij} |Z_G(x_i)| = \sum_k \overline{\chi_k(x_i)} \chi_k(x_j)$$

Insbesondere können wir also aus der Charaktertafel auch die Gruppenordnung $|G| = |Z_G(e)|$ und die Ordnungen der Konjugationsklassen $|\hat{x}_k| = |G|/|Z_G(x_k)|$ ablesen.

Beispiel 2.5.20. Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_3 sind die triviale Darstellung triv , die Signumdarstellung sgn und die Darstellung spieg als zweidimensionale Spiegelungsgruppe, bei der die drei ungeraden Permutationen operieren als Spiegelungen an drei Geraden durch den Ursprung, die paarweise den Winkel 60° einschließen. Zeichnen wir zwei ungerade Permutationen $s, t \in \mathcal{S}_3$ aus, so können wir die Elemente von \mathcal{S}_3 aufzählen als $\mathcal{S}_3 = \{e, s, t, sts, ts, st\}$ und die Charaktertafel hat die Gestalt

	e	s, t, sts	ts, st
triv	1	1	1
sgn	1	-1	1
spieg	2	0	-1

Um die unterste Zeile zu prüfen bemerkt man, daß jede ebene lineare Spiegelung Spur Null hat, jede ebene Drehung um 120° jedoch Spur $\zeta + \bar{\zeta} = -1$ für ζ eine primitive dritte Einheitswurzel.

Satz 2.5.21 (Dimensionen einfacher Darstellungen). *Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und eine endliche Gruppe ist die Dimension jeder einfachen Darstellung unserer Gruppe über dem gegebenen Körper ein Teiler der Gruppenordnung.*

Beweis. Sei G unsere endliche Gruppe, L unsere einfache Darstellung und $M = L^*$ ihre kontragrediente Darstellung. Wir gehen aus von der Gleichung $e_M e_M = e_M$. Mit der Charakter-Projektor-Formel 2.5.12 folgt

$$\chi_L \chi_L = \frac{|G|}{\dim L} \chi_L$$

Per definitionem ist $\chi_L(g)$ die Summe der Eigenwerte von $g : L \rightarrow L$. Wegen $g^n = 1$ für $n = |G|$ sind diese Eigenwerte n -te Einheitswurzeln. Ist also $\zeta \in k$ eine primitive n -te Einheitswurzel, so nehmen alle Charaktere Werte in $\mathbb{Z}[\zeta]$ an. Bezeichnet $I \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ das von den Werten des Charakters χ_L erzeugte Ideal, so folgern wir im Körper k die Inklusionsrelation

$$I \supset \frac{|G|}{\dim L} I$$

Da die Potenzen $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$ bereits $\mathbb{Z}[\zeta]$ als abelsche Gruppe erzeugen, ist mit [LA2] 4.4.1 auch I eine endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe und mit [LA2] 4.4.12 ist dann I frei über \mathbb{Z} , in Formeln $I \cong \mathbb{Z}^r$ für geeignetes $r \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Erkenntnis $I \neq 0$ impliziert unsere Inklusion oben nun $(|G|/\dim L) \in \mathbb{Z}$ wie gewünscht. \square

Ergänzung 2.5.22. Sei G eine endliche Gruppe. Die Projektoren e_1, \dots, e_r zu den einfachen komplexen Darstellungen bilden eine Basis des Zentrums des Gruppenrings $Z := Z(\mathbb{C}G)$, und entwickeln wir $z \in Z$ als $z = \sum_{i=1}^r \omega_i(z)e_i$, so sind die ω_i Ringhomomorphismen $\omega_i : Z \rightarrow \mathbb{C}$. Bezeichnet \hat{g} die Konjugationsklasse von $g \in G$ und $[\hat{g}] \in \mathbb{C}G$ ihre Indikatorfunktion, so erzeugen die $[\hat{g}]$ einen Teilring $Z_{\mathbb{Z}} \subset Z$. Sein Bild $\omega_i(Z_{\mathbb{Z}}) \subset \mathbb{C}$ ist dann ein Teilring, der endlich erzeugt ist als \mathbb{Z} -Modul und der damit nach [KAG] 4.1.5 aus über \mathbb{Z} ganzen Elementen von \mathbb{C} bestehen muß. Insbesondere sind die $\omega_i([\hat{g}])$ stets ganz über \mathbb{Z} .

2.6 Inverse Fouriertransformation

2.6.1 (Inverse Fouriertransformation). ($k = \bar{k}$, $\text{char } k \nmid |G|$). Gegeben ein Vektorraum L und ein Vektor $v \in L$ und eine Linearform $\varphi \in L^*$ können wir einen Endomorphismus $[v \otimes \varphi]$ von L vom Rang höchstens Eins erklären durch die Vorschrift $[v \otimes \varphi] : w \mapsto \varphi(w)v$. Er hat offensichtlich die Spur $\text{tr}[v \otimes \varphi] = \varphi(v)$. Ist nun $L = L_i$ eine unserer irreduziblen Darstellungen und suchen wir das Urbild $f \in kG$ von $[v \otimes \varphi]$ unter unserer Fouriertransformation, genauer das f mit $\rho : f \mapsto (0, \dots, [v \otimes \varphi], \dots, 0)$, so erhalten wir es von 2.5.2 ausgehend mit der von der Mitte aus zu entwickelnden Gleichungskette

$$|G|f(g^{-1}) = \text{Tr}(gf) = \text{Tr}(\rho_L(g)[v \otimes \varphi]) = (\dim L) \text{tr}[(gv) \otimes \varphi] = (\dim L)\varphi(gv)$$

Definition 2.6.2. Ist V eine Darstellung eines Monoids M über einem Körper k , so definiert man ganz allgemein für $v \in V$, $\varphi \in V^*$ den **Matrixkoeffizienten** $c_{\varphi,v} : M \rightarrow k$ durch die Vorschrift $c_{\varphi,v}(a) := \varphi(av)$. Die Matrixkoeffizienten definieren eine Abbildung, die **Matrixkoeffizientenabbildung**

$$\begin{aligned} V^* \otimes_k V &\rightarrow \text{Ens}(M, k) \\ \varphi \otimes v &\mapsto c_{\varphi,v} \end{aligned}$$

2.6.3. Im Fall $V = k^n$ und $v = e_i$ und $\varphi = e_j^*$ ist $c_{\varphi,v}(a)$ in der Tat ein Koeffizient der Matrix $\rho(a) \in \text{Mat}(n; k)$. Schalten wir die Identifikation $\text{Ens}(M, k) \xrightarrow{\sim} (kM)^*$ nach, die für jede Menge M in offensichtlicher Weise erklärt ist, so erhalten wir unsere Matrixkoeffizientenabbildung für Moduln über Ringalgebren aus 1.5.1 im Spezialfall von Monoidringen.

2.6.4. Jedes Monoid M trägt eine natürliche Operation des Monoids $M \times M^{\text{opp}}$ mittels der Vorschrift $(x, y^\circ)z := xzy$. Gegeben eine Menge E erhalten wir auch eine Operation von $M^{\text{opp}} \times M$ auf $\text{Ens}(M, E)$ durch die Vorschrift $((x^\circ, y)f)(z) := f(xzy)$. Unsere Matrixkoeffizientenabbildung ist ein Homomorphismus $V^* \boxtimes_k V \rightarrow \text{Ens}(M, k)$ von Darstellungen des Monoids $M^{\text{opp}} \times M$.

2.6.5 (Verschwindende Produkte von Matrixkoeffizienten). Gegeben eine endliche Gruppe und ein Körper haben Matrixkoeffizienten zu nichtisomorphen irreduziblen Darstellungen im Gruppenring das Produkt Null. In der Tat gehören unsere Matrixkoeffizienten dann zu verschiedenen isotypischen Komponenten des Gruppenrings, aufgefaßt als Rechtsmodul über sich selber, und diese isotypischen Komponenten sind ja wie in 1.4.18 Unterbimoduln des Gruppenrings.

2.6.6 (Operation von Matrixkoeffizienten). Gegeben Darstellungen L, V einer endlichen Gruppe G über einem Körper k mit L irreduzibel und verschwindendem Homomorphismenraum $\text{Hom}_k^G(L^*, V) = 0$ operieren alle Matrixkoeffizienten zu L durch Null auf V . In der Tat ist das Anwenden auf $v \in V$ ein Homomorphismus $kG \rightarrow V$ von kG -Linksmoduln, und die fraglichen Matrixkoeffizienten liegen in der L^* -isotypischen Komponente des kG -Linksmoduls kG . Ist zusätzlich $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und teilt seine Charakteristik nicht die Gruppenordnung, so ist die Verknüpfung

$$L^* \otimes L \rightarrow kG \rightarrow \text{End}_k L^*$$

der Matrixkoeffizientenabbildung mit der Operation das $|G|/(\dim L)$ -fache der kanonischen Identifikation $L^* \otimes L \xrightarrow{\sim} \text{End}_k L^*$. Das ist nur eine Umformulierung unserer Formel aus 2.6.1. Das Nichtverschwinden des Nenners wird durch 2.5.3 garantiert.

2.6.7. Gegeben ein Monoid M und eine Darstellung V von M über einem Körper k erhalten wir offensichtlich stets ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (V^* \otimes_k V) & \xrightarrow{c} & \text{Ens}(M, k) \\ \text{ev} \downarrow & & \downarrow \delta_e \\ k & \xlongequal{\quad} & k \end{array}$$

mit der Matrixkoeffizientenabbildung in der oberen Horizontalen. So wird in nochmal anderer Weise klar, daß unsere inverse Fouriertransformation mit den Spurformen verträglich ist.

Ergänzung 2.6.8. Wieder im Fall einer endlichen kommutativen Gruppe G haben wir kanonische Identifikationen $k \xrightarrow{\sim} \text{End} L \xrightarrow{\sim} L^* \otimes_k L$ und die Matrixkoeffizientenabbildungen aller irreduziblen komplexen Darstellungen definieren eine Abbildung, die man als Spezialfall der Fouriertransformation

$$M(\hat{G}) \rightarrow \text{Ens}(G, \mathbb{C})$$

auffassen kann. Unser Satz besagt dann im Lichte von [AN3] 4.3.14 und [AN3] 4.7.1, daß das Plancherelmaß zum auf Gesamtmasse Eins normalisierten Haarmaß auf G das Zählmaß auf \hat{G} ist, wie das ja sogar ganz allgemein für kompakte

Gruppen gilt. Der zugehörige Isomorphismus von Räumen quadratintegrierbarer Funktionen ist bereits ein Spezialfall von [AN3] 3.7.11 und wird im folgenden insbesondere auch durch 2.6.9 verallgemeinert.

Korollar* 2.6.9 (Orthogonalität von Matrixkoeffizienten). *Bilden gewisse $\rho_L : G \rightarrow U(d_L)$ ein Repräsentantensystem für die einfachen unitären Darstellungen einer endlichen Gruppe G , so bilden die renormalisierten Matrixkoeffizienten $\sqrt{d_L} (\rho_L)_{ij}$ eine Orthonormalbasis des Gruppenrings $\mathbb{C}G$ für das bereits in 2.5.16 betrachtete Skalarprodukt*

$$\langle f, h \rangle := |G|^{-1} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} h(g)$$

Ergänzung 2.6.10. Im Fall einer endlichen kommutativen Gruppe ist das ein Spezialfall der Theorie der abstrakten Fourierreihen [AN3] 3.7.11, nach der die unitären Charaktere einer kompakten kommutativen Hausdorff'schen topologischen Gruppe eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf meiner Gruppe bilden, in Bezug auf das auf Gesamtmasse Eins normalisierte Haarmaß. Die Orthogonalitätsrelationen für irreduzible Charaktere aus 2.5.16 folgen leicht mit $\chi_L = (\rho_L)_{11} + \dots + (\rho_L)_{dd}$ für $d = d_L$.

Beweis. Unser kommutatives Diagramm aus 2.5.2 kann in diesem Fall umgeschrieben werden zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}G & \xrightarrow[\rho]{\sim} & \text{Mat}(d_1; \mathbb{C}) \times \dots \times \text{Mat}(d_r; \mathbb{C}) \\ \text{Tr} = |G| \delta_e \downarrow & & \downarrow \text{Tr} = (d_1 \text{tr}_1, \dots, d_r \text{tr}_r) \\ \mathbb{C} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{C} \end{array}$$

mit der zusätzlichen Maßgabe, daß gilt $\rho(g^{-1}) = (\rho_1(g)^*, \dots, \rho_r(g)^*)$. Damit entspricht die Selbstabbildung $f \mapsto \overline{f \circ \text{inv}}$ des Gruppenrings dem hermitesch Konjugieren aller Matrizen unserer Tupel. Die Standardmatrizen E_{ij} bilden nun eine Orthonormalbasis von $\text{Mat}(d; \mathbb{C})$ unter dem Skalarprodukt $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^* B)$ und die $(\sqrt{d})^{-1} E_{ij}$ bilden folglich eine Orthonormalbasis von $\text{Mat}(d; \mathbb{C})$ unter dem durch $(A, B) \mapsto d \text{tr}(A^* B)$ gegebenen Skalarprodukt. Damit bilden nach unserer Beschreibung der inversen Fouriertransformation die Matrixkoeffizienten $(d_L/|G|)(\sqrt{d_L})^{-1}(\rho_L)_{ij}$ eine Orthonormalbasis des Gruppenrings für das Skalarprodukt $(f, h) \mapsto |G| \delta_e(\overline{f} \cdot (h \circ \text{inv}))$, und das ist eben das $|G|^2$ -fache des Skalarprodukts in unserem Satz. \square

2.7 Ergänzungen zu Charakteren*

2.7.1. Auch wenn bei endlichdimensionalen Darstellungen nicht notwendig endlicher Gruppen über nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körpern beliebiger Charakteristik bestimmt der Charakter die Darstellung noch sehr weitgehend.

In diesem Abschnitt werden verschiedene Aussagen in dieser Richtung besprochen.

Übung 2.7.2 (Kriterien für von Null verschiedenen Charakter). Gegeben eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung V einer Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null oder einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist ihr Charakter nicht die Nullfunktion. Hinweis: Satz von Wedderburn 1.6.5. Ich erwarte, daß das allgemeiner für vollkommene Körper gilt, und muß mal in Bourbaki nachschlagen. Für allgemeine Körper gilt es nicht, wie das folgende Beispiel 2.7.4 zeigt.

Ergänzung 2.7.3. Gegeben eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung V einer Gruppe über einem endlichen Körper ist ihr Charakter nicht die Nullfunktion. In der Tat ist der Endomorphismenring ein endlicher Schiefkörper, also kommutativ nach ??, also hat die durch Übergang zum algebraischen Abschluß entstehende Darstellung keine höheren Multiplizitäten. Man müßte nun wissen, ob über einem vollkommenen Körper der Rang jedes Schiefkörpers teilerfremd ist zur Charakteristik.

Ergänzung 2.7.4. Gegeben eine endliche inseparable Körpererweiterung L/K ist L eine irreduzible Darstellung über K der multiplikativen Gruppe L^\times , deren Charakter nach [KAG] 5.10.6 die Nullfunktion ist.

Ergänzung 2.7.5. Eine irreduzible Darstellung einer Gruppe wird bereits durch die Angabe einer beliebigen von Null verschiedenen Linearkombination ihrer Matrixkoeffizienten bis auf Isomorphismus eindeutig festgelegt. In der Tat liegt nach 1.5.1 jeder Matrixkoeffizient in derjenigen isotypischen Komponente des Raums der Funktionen auf unserer Gruppe, der zu besagter irreduzibler Darstellung gehört. Insbesondere wird eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung durch ihren Charakter bis auf Isomorphismus eindeutig festgelegt, sofern dieser nicht die Nullfunktion ist.

Satz 2.7.6 (Charakterisierung durch Charaktere). 1. *Endlichdimensionale Darstellungen einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null sind isomorph genau dann, wenn sie denselben Charakter haben.*

2. *Endlichdimensionale Darstellungen einer beliebigen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null haben dieselben Kompositionsfaktoren mit denselben Vielfachheiten genau dann, wenn sie denselben Charakter haben.*

Beweis. Nach dem Satz von Maschke 2.3.1 sind Darstellungen einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null halbeinfach alias vollständig reduzibel. Es reicht also, die zweite Aussage zu zeigen. Sind aber L_i diejenigen

paarweise nichtisomorphen irreduziblen Darstellungen, die als Kompositionsfaktoren in unserer Darstellung M auftreten, und ist $m(i)$ die Vielfachheit des Auftretens von L_i und bezeichnet χ_i den Charakter von L_i , so gilt

$$\chi_M = \sum_{i=1}^r m(i)\chi_i$$

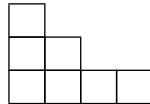
Da aber die χ_i in verschiedenen isotypischen Komponenten des Gruppenrings liegen und nicht Null sind, sind sie linear unabhängig. Da wir in Charakteristik Null arbeiten, können wir somit die Multiplizitäten $m(i)$ am Charakter χ_M von M ablesen. \square

2.8 Darstellungen der symmetrischen Gruppen

2.8.1. Wir stellen zunächst die beiden Hauptsätze vor, die wir beweisen wollen. Unter einem **Young-Diagramm** verstehen wir wie in [AL] 1.3.3 eine endliche Teilmenge $T \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$((i, j) \in T \text{ und } i' \leq i \text{ und } j' \leq j) \Rightarrow (i', j') \in T$$

Die Elemente von T nennen wir die „Kästchen“ unseres Youngdiagramms und stellen uns ein Element (i, j) vor als das Kästchen auf einem Rechenpapier, bei dem die Koordinaten der linken unteren Ecke gerade (i, j) sind. Zum Beispiel stellt das Bild



die Menge $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 0)\}$ dar. In der Praxis denke ich bei Youngdiagrammen stets an Bilder dieser Art.

Satz 2.8.2 (Einfache Darstellungen der symmetrischen Gruppen).

1. Gegeben ein Youngdiagramm T besitzt die Gruppe $\mathcal{S}_T := \text{Ens}^\times T$ aller Permutationen von T bis auf Isomorphismus genau eine einfache komplexe Darstellung $L(T)$ mit der Eigenschaft, daß darin sowohl die triviale Darstellung des Spaltenstabilisators von T als auch die Signumdarstellung des Zeilenstabilisators von T vorkommen;
2. Gegeben $n \geq 0$ erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_n & \xrightarrow{\sim} & \text{irr } \mathbb{C}\mathcal{S}_n \\ T & \mapsto & L(T) \end{array}$$

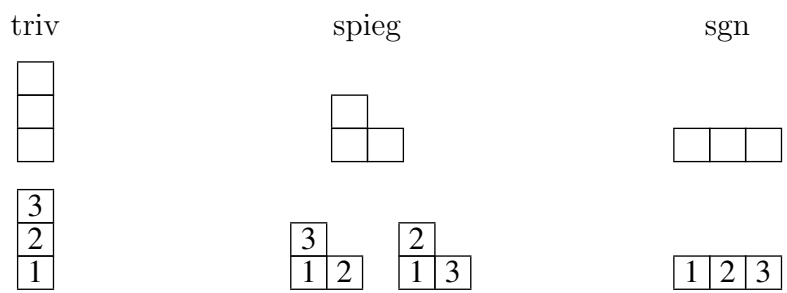
zwischen der Menge \mathcal{Y}_n aller Youngdiagramme mit n Kästchen und der Menge aller Isomorphieklassen von einfachen komplexen Darstellungen der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n , indem wir für jedes Youngdiagramm T mit n Kästchen eine Bijektion $T \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ wählen, dadurch \mathcal{S}_T mit \mathcal{S}_n identifizieren, und unsere einfache Darstellung $L(T)$ aus Teil 1 mit dieser Identifikation als Darstellung von \mathcal{S}_n auffassen.

2.8.3. Nach 1.1.22 hängt die so erhaltene Darstellung $L(T)$ der Gruppe \mathcal{S}_n bis auf Isomorphismus nicht von der Wahl der Bijektion $T \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ ab.

Definition 2.8.4. Gegeben ein Youngdiagramm T mit n Kästchen ist ein **Tableau der Gestalt T** eine Bijektion $\varphi : T \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$. Wir veranschaulichen so ein Tableau, indem wir in jedes Kästchen unseres Youngdiagramms den Wert schreiben, den φ dort annimmt. Ein **Standardtableau** ist ein Tableau, dessen Einträge in allen Zeilen und Spalten monoton wachsen.

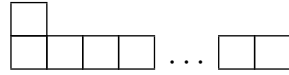
Satz 2.8.5 (Dimensionen der einfachen Darstellungen). Für ein Youngdiagramm T stimmt die Dimension der zugehörigen einfachen komplexen Darstellung $L(T)$ von \mathcal{S}_n überein mit der Zahl von Standardtableaus der Gestalt T .

Beispiel 2.8.6. Im Fall der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_3 haben wir drei Youngdiagramme mit drei Kästchen. Sie entsprechen den drei irreduziblen Darstellungen nach 2.5.20. Die Spiegelungsdarstellung ist zweidimensional, was der Tatsache entspricht, daß es für das fragliche Youngdiagramm zwei Standardtableaus gibt.



Beispiel 2.8.7. Die Permutationsdarstellung von \mathcal{S}_n auf \mathbb{C}^n zerfällt für $n \geq 2$ in zwei irreduzible Darstellungen, nämlich die Gerade $\langle (1, 1, \dots, 1) \rangle$ und ihr orthogonales Komplement unter dem Standard-Skalarprodukt. Daß dieses Komplement irreduzibel ist, erkennt man zum Beispiel, indem man nachrechnet, daß der Endomorphismenring unserer Permutationsdarstellung zweidimensional ist: Genauer besteht er aus allen Matrizen, bei denen alle Einträge auf der Diagonalen übereinstimmen und alle Einträge außerhalb der Diagonale ebenfalls übereinstimmen.

Das Youngtableau für den nichttrivialen Summanden hat die Gestalt



In der Tat kommt in unserem orthogonalen Komplement die triviale Darstellung von $\mathcal{S}_{n-1} \subset \mathcal{S}_n$ vor als die Gerade $\langle(1, 1, \dots, 1 - n)\rangle$ und die Signumdarstellung von $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_n$ als die Gerade $\langle(1, -1, 0, \dots, 0)\rangle$.

2.8.8. Ist R ein Ring und $e \in R$ idempotent und M ein R -Modul, so induziert das Auswerten bei e nach [KAG] 1.3.11 eine Bijektion $\text{Hom}_R(Re, M) \xrightarrow{\sim} eM$.

Beweis von 2.8.2. Wir betrachten im Gruppenring $\mathbb{C}\mathcal{S}_T$ die beiden Idempotenten

$$E_T = |S|^{-1} \sum_{g \in S} g \quad \text{und} \quad A_T = |Z|^{-1} \sum_{h \in Z} \text{sgn}(h) h$$

Diese Idempotenten sind genau die Projektoren zur trivialen Darstellung von S und zur Signumdarstellung von Z . Die beiden von diesen Idempotenten erzeugten Linksideale des Gruppenrings $\mathbb{C}\mathcal{S}_T$ notieren wir $M(T) := (\mathbb{C}\mathcal{S}_T)E_T$ und $N(T) := (\mathbb{C}\mathcal{S}_T)A_T$. Der mit Induktion von Darstellungen 3.2.2 vertraute Leser wird sie im übrigen leicht identifizieren können mit den induzierten Darstellungen zur trivialen Darstellung des Spaltenstabilisators bzw. der Signumdarstellung des Zeilenstabilisators. In einer Darstellung L von \mathcal{S}_T kommt nach 2.8.8 die triviale Darstellung des Spaltenstabilisators vor genau dann, wenn gilt $E_T L \neq 0$ alias $\text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{S}_T}(M(T), L) \neq 0$, und ebenso kommt die Signumdarstellung des Zeilenstabilisators vor genau dann, wenn gilt $A_T L \neq 0$ alias $\text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{S}_T}(N(T), L) \neq 0$. Jede einfache Darstellung L von \mathcal{S}_T mit beiden Eigenschaften ist also das Bild eines Homomorphismus von Darstellungen $M(T) \rightarrow N(T)$, und Teil 1 folgt leicht, wenn wir zeigen können, daß gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{S}_T}(M(T), N(T)) = 1 \tag{*}$$

In der Tat ist dann unser L notwendig das Bild eines und jedes von Null verschiedenen derartigen Homomorphismus. Nehmen wir speziell den durch Rechtsmultiplikation mit A_T gegebenen Homomorphismus und beachten die im folgenden gezeigte Formel $E_T A_T \neq 0$, so ergibt sich für diese durch T bestimmte einfache Darstellung $L \cong L(T)$ sogar die explizite Formel

$$L(T) \cong (\mathbb{C}\mathcal{S}_T)E_T A_T$$

In anderen Worten kann $L(T)$ also beschrieben werden als das vom sogenannten **Young-Symmetrisator** $E_T A_T$ im Gruppenring erzeugte Linksideal. Um nun

unsere Identität (*) zu zeigen, schreiben wir sie zunächst mithilfe unserer Vorbemerkung 2.8.8 und den Definitionen um zur Behauptung

$$\dim_{\mathbb{C}} E_T(\mathbb{C}\mathcal{S}_T)A_T = 1$$

Nun gilt ja offensichtlich $S \cap Z = 1$, also $E_TA_T \neq 0$, und für alle $x \in SZ$ gilt $E_TxA_T = \pm E_TA_T$. Es reicht also, wenn wir zusätzlich für alle $x \notin SZ$ zeigen $E_TxA_T = 0$ oder gleichbedeutend $x^{-1}E_TxA_T = 0$. Nun haben wir natürlich

$$|S|x^{-1}E_Tx = \sum_{g \in x^{-1}Sx} g$$

und bezeichnet $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots$ die Partition von T in die Spalten des Youngdiagramms, so ist $x^{-1}Sx$ gerade die Gruppe aller derjenigen Permutationen von T , die jedes Stück der Partition

$$T = x^{-1}T_1 \cup x^{-1}T_2 \cup \dots$$

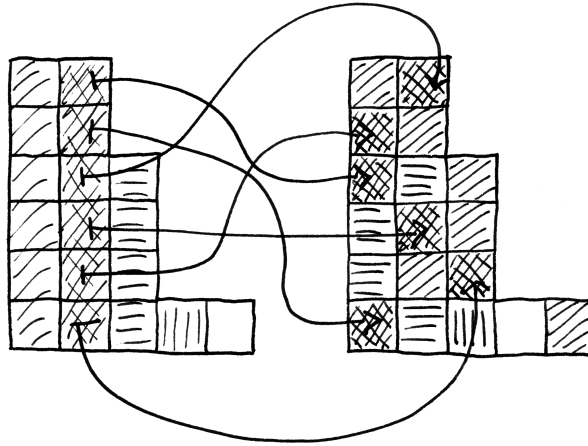
von T stabilisieren. Trifft nun jede transformierte Spalte $x^{-1}T_i$ jede Zeile unseres Youngdiagramms in höchstens einem Element, so scheint es mir offensichtlich, daß es ein y im Zeilenstabilisator Z geben muß mit $yx^{-1}T_i = T_i$ für alle i , woraus sofort folgt $x \in SZ$. Im Fall $x \notin SZ$ gibt es folglich eine transformierte Spalte $x^{-1}T_i$, die mit einer Zeile von T mindestens zwei Elemente gemeinsam hat. Die Vertauschung dieser beiden Elemente ist dann eine Transposition $t \in x^{-1}Sx \cap Z$, und deren Existenz zeigt $E_TxA_T = 0$, da dann ja gilt

$$(x^{-1}E_Tx)A_T = (x^{-1}E_Txt)A_T = (x^{-1}E_Tx)tA_T = -(x^{-1}E_Tx)A_T$$

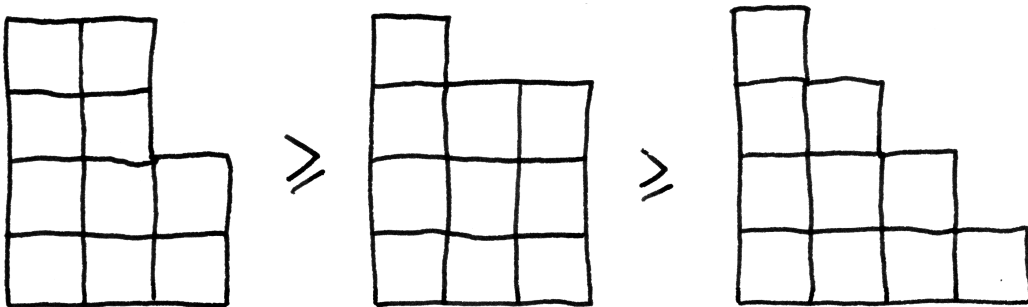
Damit wissen wir, daß die Darstellungen $L(T)$ einfach sind. Da es offensichtlich ebensoviele Young-Diagramme mit n Kästchen gibt wie Partitionen der Zahl n wie nach [AL] 1.3.6 Konjugationsklassen in der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n , ist der erste Satz bewiesen, sobald wir zeigen, daß die Darstellungen $L(T)$ paarweise nicht isomorph sind. Um das zu zeigen, führen wir auf der Menge \mathcal{Y}_n aller Youngdiagramme mit n Kästchen eine partielle Ordnung ein.

Definition 2.8.9. Ein Youngdiagramm heißt kleinergleich einem anderen in der **Dominanz-Ordnung** genau dann, wenn es für jedes $s \in \mathbb{N}$ in den ersten s Spalten insgesamt höchstens ebensoviele Kästchen besitzt wie das andere. Wir notieren diese partielle Ordnung $T \leq T'$.

Fortführung des Beweises. Wählen wir irgendeine Bijektion $T \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$, identifizieren mit ihrer Hilfe \mathcal{S}_T mit \mathcal{S}_n und fassen mithilfe dieser Identifikation



Eine Permutation der Kästchen eines Youngdiagramms, bei der das Bild jeder Spalte höchstens ein Kästchen in jeder Zeile hat, kann durch Nachschalten eines Elements des Zeilenstabilisators in den Spaltenstabilisator geschoben werden. Das Bild deutet solch eine Permutation an, die Wirkung der Permutation auf die Kästchen der zweiten Spalte habe ich durch Pfeile angedeutet, bei den anderen Kästchen rechts ist nur an der Textur zu sehen, aus welcher Spalte sie kommen.



Beispiel zur Dominanzordnung. Stellen wir uns ein Youngdiagramm als eine Geröllhalde von Kästchen vor, so sind in unserer Dominanzordnung genau diejenigen Partitionen kleiner, die entstehen, wenn in unserer Geröllhalde ein oder mehrere Kästchen weiter nach unten purzeln.

die Darstellungen $M(T)$ und $N(T)$ von \mathcal{S}_T als Darstellungen von \mathcal{S}_n auf, so erhalten wir nach 1.1.22 bis auf Isomorphismus wohldefinierte Darstellungen von \mathcal{S}_n . Für je zwei Diagramme $T, T' \in \mathcal{Y}_n$ behaupten wir nun

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{S}_n}(M(T), N(T')) \neq 0 \Rightarrow T \leq T'$$

Sobald das gezeigt ist, sind wir fertig, denn dann folgt aus $L(T) \cong L(T')$ sofort $T \leq T' \leq T$ und damit $T = T'$. Seien also Bijektionen $\varphi : T \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ und $\varphi' : T' \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ beliebig gewählt. Die von φ induzierte Identifikation $\mathcal{S}_T \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$ hat die Gestalt $x \mapsto \varphi x \varphi^{-1}$, und den zugehörigen Isomorphismus von Gruppenringen notieren wir analog $C \mapsto \varphi C \varphi^{-1}$. Mit denselben Argumenten wie zuvor gilt es in diesen Notationen zu zeigen

$$T \not\leq T' \Rightarrow (\varphi E_T \varphi^{-1})(\mathbb{C}\mathcal{S}_n)(\varphi' A_{T'} \varphi'^{-1}) = 0$$

Es reicht dazu, für jede Bijektion $\psi : T' \xrightarrow{\sim} T$ zu zeigen

$$T \not\leq T' \Rightarrow E_T \psi A_{T'} = 0$$

Hier ist die Summe nun in hoffentlich offensichtlicher Weise als formale Linearkombination von Bijektionen $T' \xrightarrow{\sim} T$ zu verstehen. Wie zuvor reicht es dafür weiter zu zeigen, daß unter unserer Voraussetzung $T \not\leq T'$ unter jeder Bijektion $T \xrightarrow{\sim} T'$ aus mindestens einer Spalte von T mindestens zwei Kästchen in derselben Zeile von T' landen. In der Tat gibt es dann ja ein s derart, daß T mehr Kästchen in den ersten s Spalten stehen hat als T' . Dann können wir diese Kästchen jedoch nicht so mit Kästchen von T' identifizieren, daß wir in jeder Zeile von T' höchstens s Kästchen erwischen. Also erwischen wir in mindestens einer Zeile von T' mindestens $s + 1$ Kästchen, und von denen müssen dann mindestens zwei aus derselben Spalte von T kommen. \square

Übung 2.8.10. Man zeige, daß das Tensorieren mit der Vorzeichendarstellung dem Übergang zur dualen Partition alias zum an der Hauptdiagonale gespiegelten Youngdiagramm entspricht, in Formeln $L(T) \otimes \mathrm{sgn} \cong L(\tau T)$ für τ die Vertauschung der beiden Koordinaten.

Übung 2.8.11. Man zeige in der Notation [KAG] 3.5.13 die beiden Implikationen $[M(T) : L(T')] \neq 0 \Rightarrow T \leq T'$ und $[N(T) : L(T')] \neq 0 \Rightarrow T \geq T'$, die beschreiben, welche einfachen Darstellungen als Kompositionsfaktoren von $M(T)$ und $N(T)$ auftreten können. Darüberhinaus zeige man

$$[M(T) : L(T)] = [N(T) : L(T)] = 1$$

Beweis von 2.8.5. Gegeben ein Youngdiagramm T operiert die Gruppe \mathcal{S}_T aller Permutationen der Kästchen frei und transitiv von rechts auf der Menge $\mathcal{B}_T :=$

$\text{Ens}^\times(T, \{1, \dots, n\})$ aller Tableaus der Gestalt T mittels der Vorschrift $\varphi^\sigma = \varphi \circ \sigma$ für

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$$

ein Tableau und $\sigma : T \xrightarrow{\sim} T$ eine Permutation. Als $\mathbb{C}\mathcal{S}_T$ -Rechtsmodul ist also $\mathbb{C}\mathcal{S}_T$ isomorph zum freien \mathbb{C} -Vektorraum $\mathbb{C}\mathcal{B}_T$ über der Menge aller Tableaus der Gestalt T mit seiner hoffentlich offensichtlichen Rechtsoperation von $\mathbb{C}\mathcal{S}_T$. Bezeichne nun $\mathcal{D}_T \subset \mathcal{B}_T$ die Menge aller Standardtableaus der Gestalt T . Ich behaupte, daß die Einschränkung res einer formalen Summe auf die Teilmenge aller Standardtableaus eine Surjektion

$$\text{res} : (\mathbb{C}\mathcal{B}_T)E_T A_T \twoheadrightarrow \mathbb{C}\mathcal{D}_T$$

induziert. In der Tat, wenden wir auf ein Standardtableau x der Gestalt T alle Elemente von SZ an, d.h. eine beliebige Vertauschung der Einträge jeder Spalte gefolgt von einer beliebigen Vertauschung der Einträge jeder Zeile, so erhalten wir zwar eventuell außer x selbst noch weitere Standardtableaus, aber für diese ist offensichtlich die Folge der Zeilensummen lexikographisch größer als bei unserem Ausgangstableau. Gegeben $x \in \mathcal{B}_T \subset \mathbb{C}\mathcal{B}_T$ ein Standardtableau gilt für unsere Einschränkung res auf die Teilmenge aller Standardtableaus demnach

$$\text{res}(xE_T A_T) \in |S|^{-1}|Z|^{-1}x + \sum_{x < y} \mathbb{C}y$$

wobei die Notation $x < y$ rechts andeuten soll, daß nur über Standardtableaus y mit einer lexikographisch größeren Folge von Zeilensummen summiert wird. So ergibt sich die behauptete Surjektivität. Es folgt, daß die Zahl der Standardtableaus eine untere Schranke für die Dimension von $(\mathbb{C}\mathcal{B}_T)E_T A_T$ und damit auch eine untere Schranke für die Dimension der einfachen Darstellung $L(T)$ ist. Daß die Zahl der Standardtableaus sogar mit dieser Dimension übereinstimmt, folgt dann aus der durch 2.9.1 bewiesenen Formel mit der aus 2.4.7 spezialisierten allgemeinen Erkenntnis

$$\sum_{T \in \mathcal{Y}_n} (\dim_{\mathbb{C}} L(T))^2 = |\mathcal{S}_n| \quad \square$$

Ergänzung 2.8.12. Gegeben ein Youngdiagramm T trägt die Menge \mathcal{B}_T aller Tableaus der Gestalt T auch eine Linksoperation der \mathcal{S}_n „durch Nachschalten“, die mit der Rechtsoperation von \mathcal{S}_T „durch Vorschalten“ kommutiert. Unsere Räume $(\mathbb{C}\mathcal{B}_T)E_T A_T$ für die verschiedenen Young-Diagramme werden mit dieser Operation von \mathcal{S}_n nach dem vorhergehenden genau die irreduziblen Darstellungen von \mathcal{S}_n . Die Argumente von oben zeigen, daß die $yE_T A_T$ für $y \in \mathcal{D}_T$ Standardtableaus eine Basis dieser irreduziblen Darstellung bilden. Dasselbe gilt für die um die

Nenner bereinigten sogenannten **Specht-Vektoren**

$$v(y) := y|Z||S|E_T A_T = y \left(\sum_{g \in S} g \right) \left(\sum_{h \in Z} \operatorname{sgn}(h)h \right)$$

Sie sind in Worten formale Linearkombinationen von Tableaus, die zu jedem Standardtableau y der Gestalt T gebildet werden, indem man erst seine Varianten mit in jeder Spalte beliebig permutierten Einträgen betrachtet, und dann deren Varianten mit in jeder Zeile beliebig permutierten Einträgen, und alle diese Tableaus aufsummiert, jeweils gewichtet mit dem Signum der letzteren Permutation.

Ergänzung 2.8.13. Eine besonders schöne Formel für die Dimension der irreduziblen Darstellung $L(T)$ einer symmetrischen Gruppe ist die **Hakenlängenformel**

$$\dim_{\mathbb{C}} L(T) = \frac{|T|!}{\prod_{(i,j) \in T} (\text{Hakenlänge von } (i,j))}$$

Die **Hakenlänge** eines Kästchens $(i,j) \in T$ ist dabei erklärt als die Zahl aller $(a,b) \in T$ mit $a = i, b \geq j$ oder $b = j, a \geq i$. Ich gebe hierfür keinen Beweis.

2.8.14. Über die Darstellungen der symmetrischen Gruppen ist noch sehr viel mehr bekannt, siehe zum Beispiel [Sag00, Jam78, JK81, FH91]. Was die Darstellungen über Körpern positiver Charakteristik angeht, ist aber auch noch vieles offen. Selbst die Dimensionen der meisten irreduziblen Darstellungen sind in diesem Fall noch nicht bekannt.

2.9 Der Robinson-Schensted-Algorithmus

2.9.1. Wir erhalten eine Bijektion zwischen der Menge aller Permutationen σ von $\{1, \dots, n\}$ und der Menge aller Paare von Standardtableaus mit jeweils n Kästchen und gleicher Gestalt, d.h. gleichem zugrundeliegendem Young-Diagramm mittels des sogenannten **Robinson-Schensted-Algorithmus** wie folgt: Zunächst stellen wir unsere Zahlen in der durch σ gegebenen Reihenfolge auf als $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$. Dann lassen wir sie „ein Young-Haus bauen und bewohnen“ nach den folgenden Regeln: Im i -ten Schritt geht die Zahl $\sigma(i)$ von links nach rechts durch die erste Etage des Young-Hauses, wie es bis dahin bereits konstruiert ist. Ist sie größer als alle Bewohnerinnen der ersten Etage, baut sie am Ende der ersten Etage ein Kästchen an und zieht dort ein. Sonst verdrängt sie die erste Bewohnerin der ersten Etage, die größer ist als sie selber, und diese versucht es in der zweiten Etage. Ist sie größer als alle Bewohnerinnen der zweiten Etage, so baut sie sich am Ende der zweiten Etage ein Kästchen an und zieht dort ein. Sonst verdrängt sie in der zweiten Etage die erste Bewohnerin, die größer ist als sie selber, und diese

$$\mathcal{Z} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \\ - \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{Z} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \\ - \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Die beiden Specht-Vektoren zu den beiden Standardtableaux einer gewissen vorgegebenen Gestalt mit drei Kästchen. Das Mitteln über die Bilder unter dem Spaltenstabilisator $Z \subset \mathcal{S}_T$ liefert in obigem Bild die Zeilensummen, das Mitteln mit Vorzeichen über den Zeilenstabilisator dann die alternierenden Spaltensummen unter jedem Eintrag.

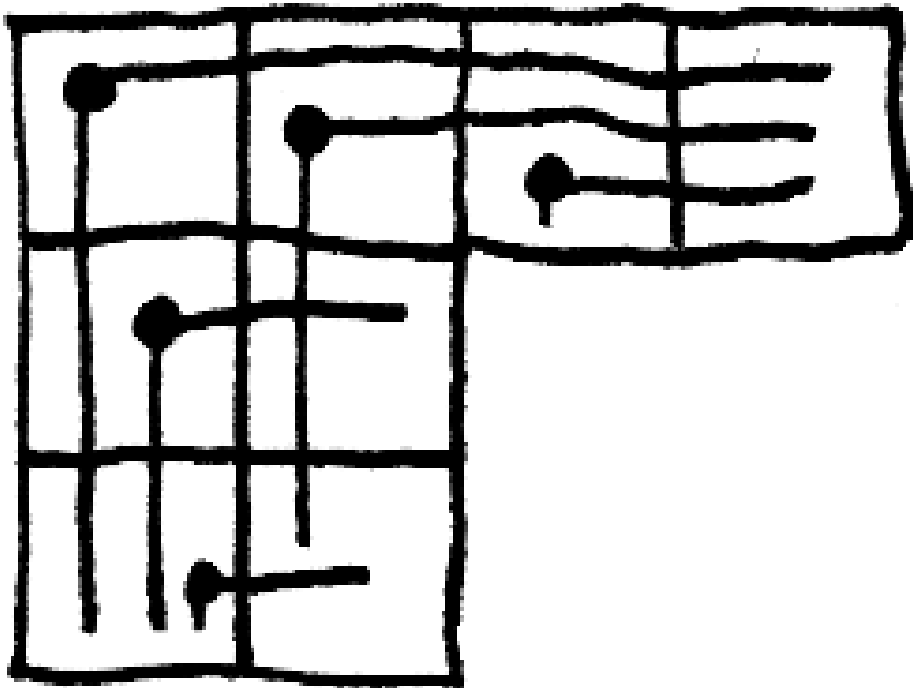
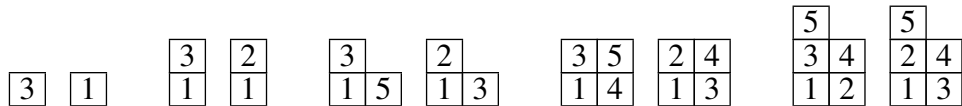


Illustration der Hakenlängenformel. Eingezeichnet sind alle Haken mit mehr als nur einem Kästchen. Die zu diesem Young-Diagramm gehörige irreduzible Darstellung hat danach die Dimension

$$\frac{8!}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 2 = 112$$

versucht es in der dritten Etage etc. Der i -te Schritt ist fertig, wenn die Zahlen $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)$ alle wieder in einem Kästchen wohnen. So entsteht, wie man sich unschwer überlegt, ein Standardtableau $L(\sigma)$. Die Reihenfolge, in der die Kästchen angebaut werden, erinnern wir in einem zweiten Standardtableau $R(\sigma)$ derselben Gestalt, bei dem in demjenigen Kästchen die Zahl i steht, das im i -ten Schritt angebaut wurde. Daß wir auf diese Weise in der Tat eine Bijektion zwischen der Menge aller Permutationen und der Menge aller Paare von Standardtableaus gleicher Gestalt erhalten, kann der Leser hoffentlich ohne allzu große Schwierigkeiten selbst einsehen. In jedem Fall denke ich, daß es noch schwieriger wäre, einen in Worten aufgeschriebenen Beweis nachzuvollziehen.

Beispiel 2.9.2. Es sei $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(5)$ die Folge 3, 1, 5, 4, 2. Wir erhalten der Reihe nach



Das Paar von Standardtableaus ganz am Ende der Zeile ist dann dasjenige, das der Robinson-Schensted-Algorithmus unserer Permutation σ zuordnet.

2.10 Berechnung der Charaktere

2.10.1. Aus dem Beweis von Satz 2.8.2 wissen wir insbesondere, daß für je zwei Young-Diagramme $T, T' \in \mathcal{Y}_n$ gilt

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{S}_n}(M(T), N(T')) \neq 0 \Rightarrow T \leq T'$$

Zusätzlich wissen wir aus demselben Beweis $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{S}_T}(M(T), N(T)) = 1$. Es ist nun für das folgende bequemer, mit Partitionen natürlicher Zahlen im Sinne von [AL] 1.3.1 zu arbeiten. Gegeben eine Partition $\lambda \in \mathcal{P}_n$ alias eine absteigende Folge $\lambda(1) \geq \lambda(2) \geq \dots \geq \lambda(r) > 0 = 0 = 0 \dots$ natürlicher Zahlen mit Summe n bilden wir in hoffentlich offensichtlicher Weise die Untergruppe $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda(1)} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda(r)} \subset \mathcal{S}_n$ der symmetrischen Gruppe und schreiben

$$M(\lambda) = (\mathbb{C}\mathcal{S}_n)E_\lambda$$

mit $E_\lambda = |\mathcal{S}_\lambda|^{-1} \sum_{g \in \mathcal{S}_\lambda} g$ für die Darstellung, die wir später auch als die induzierte der trivialen Darstellung $M(\lambda) = \text{ind}_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n} \mathbb{C}$ verstehen werden. Wie in [AL] 1.3.4 erklärt liefert das Bilden der Spaltenlängen eine Bijektion $s : \mathcal{Y}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_n$ und für $\lambda = s(T)$ haben wir per definitionem $M(\lambda) = M(T)$. Ebenso setzen wir dann $L(\lambda) = L(T)$ und übertragen die Dominanzordnung 2.8.9 mittels s von

Young-Tableaus auf Partitionen. Notieren wir nun die Charaktere der induzierten Darstellung $M(\lambda)$ und der einfachen Darstellung $L(\lambda)$ als

$$\chi_{M(\lambda)} = \psi_\lambda \quad \text{und} \quad \chi_{L(\lambda)} = \chi_\lambda$$

so liefern unsere obigen Formeln

$$\psi_\lambda = \chi_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} a_{\lambda, \mu} \chi_\mu$$

mit natürlichen Zahlen $a_{\lambda, \mu}$. Wir können also die Charaktere χ_λ der einfachen Darstellungen erhalten, indem wir auf die Basis der ψ_λ mit einer Anordnung, in der die ψ_λ zu größeren Indizes zuerst kommen, das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren anwenden.

2.10.2. Wie zu Beginn des Beweises von 2.8.2 liefert das Auswerten auf dem Idempotenten Isomorphismen $\text{Hom}_{\mathbb{C}}^{S_n}((\mathbb{C}S_n)E_\lambda, (\mathbb{C}S_n)E_\mu) \xrightarrow{\sim} E_\lambda(\mathbb{C}S_n)E_\mu$ und für das Skalarprodukt der zugehörigen Charaktere folgt sofort

$$(\psi_\lambda, \psi_\mu) = |\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S} / \mathcal{S}_\mu|$$

Um die Kardinalität dieser Menge von Doppelnebenklassen zu berechnen, beachten wir die Bahnformel $|Gx| \cdot |G_x| = |G|$ und folgern für jede endliche Menge X mit der Operation einer endlichen Gruppe G die Formel

$$|G \backslash X| = \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{x \in X} \frac{|G_x|}{|G|}$$

Ist speziell $X = \mathcal{S}_n$ und $G = \mathcal{S}_\lambda \times \mathcal{S}_\mu$, so spezialisiert unsere Formel zur Identität

$$|\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_\mu| = \frac{1}{|\mathcal{S}_\lambda| \cdot |\mathcal{S}_\mu|} \sum_{x \in \mathcal{S}_n} |x\mathcal{S}_\lambda x^{-1} \cap \mathcal{S}_\mu|$$

Untersuchen wir hier die Schnitte für jede Konjugationsklasse $\mathcal{C}_\nu \subset \mathcal{S}_n$ separat und beachten für den Zentralisator Z_ν eines Elements der Konjugationsklasse \mathcal{C}_ν die Bahnformel $|\mathcal{C}_\nu| \cdot |Z_\nu| = |\mathcal{S}_n|$, so ergibt sich

$$|\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_\mu| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{|\mathcal{S}_\lambda| \cdot |\mathcal{S}_\mu|} \sum_{\nu} \frac{|\mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{C}_\nu| \cdot |\mathcal{S}_\mu \cap \mathcal{C}_\nu|}{|\mathcal{C}_\nu|}$$

2.10.3. Für die Gruppe \mathcal{S}_4 haben wir zum Beispiel die Partitionen $\lambda = (4), (3, 1), (2^2), (2, 1^2), (1^4)$ in abkürzender Notation, wo die Hochzahlen Vielfachheiten meinen, so daß etwa $((2, 1^2)$ ein Kürzel wäre für die Partition $4 = 2 + 1 + 1$. Wir erhalten $|\mathcal{S}_\lambda| = 24, 6, 4, 2, 1$ und $|\mathcal{C}_\lambda| = 6, 8, 3, 6, 1$. Die Kardinalitäten der

Schnitte $|\mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{C}_\nu|$ werden gegeben durch den Eintrag in der Spalte unter λ und der Zeile neben ν in der Tafel

	4	3, 1	2 ²	2, 1 ²	1 ⁴
4	6	0	0	0	0
3, 1	8	2	0	0	0
2 ²	3	0	1	0	0
2, 1 ²	6	3	2	1	0
1 ⁴	1	1	1	1	1

Die Matrix der (ψ_λ, ψ_μ) ergibt sich dann zu

	4	3, 1	2 ²	2, 1 ²	1 ⁴
4	1	1	1	1	1
3, 1	1	2	2	3	4
2 ²	1	2	3	4	6
2, 1 ²	1	3	4	7	12
1 ⁴	1	4	6	12	24

Damit ergibt sich schließlich die Zerlegung unserer induzierten Darstellungen in einfache Darstellungen zu

$$\begin{aligned}
 \psi_{(4)} &= \chi_{(4)} \\
 \psi_{(3,1)} &= \chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \\
 \psi_{(2^2)} &= \chi_{(2^2)} + \chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \\
 \psi_{(2,1^2)} &= \chi_{(2,1^2)} + \chi_{(2^2)} + 2\chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \\
 \psi_{(1^4)} &= \chi_{(1^4)} + 3\chi_{(2,1^2)} + 2\chi_{(2^2)} + 3\chi_{(3,1)} + \chi_{(4)}
 \end{aligned}$$

2.11 Jucys-Murphy-Elemente

Definition 2.11.1. Das j -te **Jucys-Murphy-Element** ξ_j im Gruppenring $\mathbb{Z}\mathcal{S}_n$ der n -ten symmetrischen Gruppe ist die Summe aller Transpositionen von j mit kleineren Elementen, in Formeln

$$\xi_j = \sum_{1 \leq i < j} (i, j)$$

2.11.2 (**Die Jucys-Murphy-Elemente kommutieren paarweise**). Per definitionem ist $\xi_1 = 0$. Offensichtlich kommutiert das j -te Jucys-Murphy-Element mit allen Elementen aus \mathcal{S}_n , die die Partition $\{1, \dots, n\} = \{1, \dots, j-1\} \sqcup \{j\} \sqcup \{j+1, \dots, n\}$ stabilisieren. Insbesondere kommutieren die Jucys-Murphy-Elemente untereinander.

Lemma 2.11.3. Die elementarsymmetrischen Funktionen in den Jucys-Murphy-Elementen ξ_j liegen im Zentrum des Gruppenrings $\mathbb{Z}\mathcal{S}_n$.

Beispiel 2.11.4. Die Summe $\xi_1 + \dots + \xi_n$ ist die Summe aller Transpositionen plus dem n -fachen des neutralen Elements und folglich zentral.

Beweis. Wir betrachten im Polynomring über dem Gruppenring $(\mathbb{Z}\mathcal{S}_n)[X]$ das Produkt

$$(X + \xi_1)(X + \xi_2) \dots (X + \xi_n)$$

Es reicht zu zeigen, daß es mit allen Transpositionen $s_j := (j, j + 1)$ benachbarter Elemente kommutiert. Dazu reicht es zu zeigen, daß s_j mit

$$(X + \xi_j)(X + \xi_{j+1})$$

kommutiert, also mit $\xi_j + \xi_{j+1}$ und $\xi_j\xi_{j+1}$. Wir finden ohne große Mühe

$$\begin{aligned} s_j\xi_j s_j &= \xi_{j+1} - s_j \\ s_j\xi_{j+1} s_j &= \xi_j + s_j \end{aligned}$$

und müssen also nur noch prüfen, daß gilt $\xi_j\xi_{j+1} = (\xi_{j+1} - s_j)(\xi_j + s_j)$ alias $s_j\xi_j + 1 = \xi_{j+1}s_j$. Hier aber rechnen wir ohne Schwierigkeiten aus, daß beide Seiten beschrieben werden können als eine Summe der Identität mit Dreizykeln

$$1 + \sum_{1 \leq i < j} (i, j + 1, j) \quad \square$$

2.12 Gelfand-Modell

2.12.1. Ich habe von Soto-Andrade folgende bemerkenswerte Aussage gelernt: Sei $I \subset \mathcal{S}_n$ die Menge aller Idinvolutionen in der symmetrischen Gruppe. Auf der Menge I operiert die symmetrische Gruppe durch Konjugation. So gibt es ein äquivariantes Geradenbündel \mathcal{L} auf I derart, daß seine globalen Schnitte isomorph sind zur direkten Summe aller irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n , in Formeln

$$\bigoplus_{T \in \mathcal{Y}_n} L(T) \cong \Gamma(I; \mathcal{L})$$

Das Geradenbündel kann hierbei dadurch charakterisiert werden, daß für eine Idinvolution τ die Operation der Isotropiegruppe von τ auf der Faser \mathcal{L}_τ durch den Charakter geschieht, der durch das Signum der Operation der Elemente der Isotropiegruppe auf der Fixpunktmenge $\{1, \dots, n\}^\tau$ von τ gegeben wird.

3 Verschiedene weiterführende Resultate

3.1 Reeller, komplexer und quaternionaler Typ

3.1.1. Wir erinnern an die Körper bzw. Schiefkörper $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ der reellen Zahlen, komplexen Zahlen und Quaternionen \mathbb{H} wie in [LA1] 7.6.4 und bezeichnen Darstellungen einer Gruppe G über den jeweiligen Ringen als reelle, komplexe und quaternionale Darstellungen. Die Restriktion der Skalare macht in offensichtlicher Weise aus quaternionalen Darstellungen komplexe Darstellungen und aus komplexen Darstellungen reelle Darstellungen. Umgekehrt macht die Erweiterung der Skalare aus reellen Darstellungen komplexe Darstellungen und aus komplexen Darstellungen quaternionale Darstellungen. In Formeln meint man etwa für V eine komplexe Darstellung mit der durch Erweiterung der Skalare gegebene quaternionale Darstellung die quaternionale Darstellung $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V$, wobei das Tensorprodukt in Bezug auf die Wirkung von \mathbb{C} auf \mathbb{H} durch Multiplikation von rechts zu verstehen ist.

Definition 3.1.2. 1. Eine reelle Darstellung heißt:

- (a) von **quaternionalem Typ** genau dann, wenn sie durch Restriktion der Skalare aus einer quaternionalen Darstellung entsteht;
- (b) von **komplexem Typ**, wenn sie durch Restriktion der Skalare zwar nicht aus einer quaternionalen, aber doch immerhin aus einer komplexen Darstellung entsteht;
- (c) und von **reellem Typ** sonst.

2. Eine komplexe Darstellung heißt:

- (a) von **reellem Typ**, wenn sie isomorph ist zu einer Darstellung, die durch Erweiterung der Skalare aus einer reellen Darstellung entsteht;
- (b) von **quaternionalem Typ**, wenn sie durch Restriktion der Skalare aus einer quaternionalen Darstellung entsteht;
- (c) und von **komplexem Typ** sonst.

3. Eine quaternionale Darstellung heißt:

- (a) von **reellem Typ**, wenn sie isomorph ist zu einer Darstellung, die durch Erweiterung der Skalare aus einer reellen Darstellung entsteht;
- (b) von **komplexem Typ**, wenn sie zwar nicht von reellem Typ ist, aber isomorph ist zu einer Darstellung, die durch Erweiterung der Skalare aus einer komplexen Darstellung entsteht;

(c) und von **quaternionalem Typ** sonst.

3.1.3. Gegeben eine irreduzible reelle Darstellung höchstens abzählbarer Dimension ist ihr Endomorphismenring nach [AL] 3.12.2 als \mathbb{R} -Ringalgebra isomorph zu genau einem der Ringe \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} , und offensichtlich können wir den Typ unserer Darstellung in diesem Fall an ihrem Endomorphismenring ablesen.

3.1.4. Gegeben eine irreduzible quaternionale Darstellung höchstens abzählbarer Dimension ist ihr Endomorphismenring nach [AL] 3.12.2 als \mathbb{R} -Ringalgebra isomorph zu genau einem der Ringe \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} . Wieder können wir den Typ unserer Darstellung an ihrem Endomorphismenring ablesen, aber diesmal ist die Beziehung umgekehrt, der Endomorphismenring \mathbb{R} zeigt quaternionalen Typ an und der Endomorphismenring \mathbb{H} reellen Typ. In der Tat liefert die Rechtsmultiplikation auf dem ersten Tensorfaktor für jede reelle Darstellung V von G einen \mathbb{R} -linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{H}^{\text{opp}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{H}}^G(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} V)$, und ist umgekehrt eine quaternionale Darstellung W von G mit einem \mathbb{R} -linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{H}^{\text{opp}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{H}}^G(W)$ gegeben, so können wir W als Modul über $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\text{opp}}$ mit G -Operation auffassen, nach 3.1.5 also als Modul über $\text{End}_{-\mathbb{R}} \mathbb{H}$ mit G -Operation und nach [KAG] 1.5.15 entsteht W dann durch Erweiterung der Skalare $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}}$ aus einer reellen Darstellung von G . Ähnlich liefert die Rechtsmultiplikation auf dem ersten Tensorfaktor für jede komplexe Darstellung V von G einen \mathbb{R} -linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{H}}^G(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V)$, und ist umgekehrt eine quaternionale Darstellung W von G mit einem \mathbb{R} -linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{H}}^G(W)$ gegeben, so können wir W als Modul über $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{\text{opp}}$ mit G -Operation auffassen, nach 3.1.5 also als Modul über $\text{End}_{-\mathbb{C}} \mathbb{H}$ mit G -Operation und nach [KAG] 1.5.15 entsteht W dann durch Erweiterung der Skalare $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}}$ aus einer komplexen Darstellung von G .

Übung 3.1.5. Die Abbildung $q \otimes w \mapsto (u \mapsto quw)$ induziert einen Ringisomorphismus $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$. Dieselbe Abbildung induziert einen Ringisomorphismus $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{-\mathbb{C}}(\mathbb{H})$.

3.1.6. Auch irreduzible komplexe Darstellungen höchstens abzählbarer Dimension haben einen wohlbestimmten Typ, d.h. können nicht gleichzeitig durch Skalarerweiterung aus einer reellen Darstellung und durch Restriktion aus einer quaternionalen Darstellung hervorgehen. Um das zu sehen, holen wir etwas weiter aus, um diese Behauptung dann schließlich in 3.1.10 sogar etwas allgemeiner zu zeigen für beliebige komplexe Darstellungen mit Endomorphismenring \mathbb{C} .

3.1.7. Zu jedem komplexen Vektorraum V bilden wir wie in [LA2] 1.10.32 den komplex konjugierten Vektorraum \bar{V} , indem wir dieselbe unterliegende additive Gruppe nehmen, die Operation von $a \in \mathbb{C}$ auf $v \in V$ jedoch ändern zu einer Operation $a \cdot v$, die mit der ursprünglichen Operation av verknüpft ist durch die Formel $a \cdot v = \bar{a}v$. Ist V eine komplexe Darstellung einer Gruppe G , so ist \bar{V}

mit derselben Operation von G auch eine komplexe Darstellung, die **komplex konjugierte Darstellung**.

Übung 3.1.8. Gegeben eine endlichdimensionale komplexe Darstellung V einer endlichen Gruppe G ist die komplex konjugierte Darstellung stets isomorph zur kontragredienten Darstellung, in Formeln $\overline{V} \cong V^*$. Hinweis: 2.3.3.

Proposition 3.1.9. Sei V eine komplexe Darstellung einer Gruppe G .

1. Genau dann ist V die Komplexifizierung einer reellen Darstellung von G , wenn es einen Isomorphismus von Darstellungen $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ gibt mit $J^2 = \text{id}_V$;
2. Genau dann ist V die Restriktion einer quaternionalen Darstellung von G , wenn es einen Isomorphismus von Darstellungen $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ gibt mit $J^2 = -\text{id}_V$.

Beweis. Im ersten Fall ist V isomorph zur Komplexifizierung der reellen Unterdarstellung V^J der J -Invarianten, vergleiche auch [ML] 2.1.23. Im zweiten Fall können wir V zu einem \mathbb{H} -Rechtsmodul machen, indem wir als Rechtsmultiplikation mit $j \in \mathbb{H}$ unser J nehmen. Der Rest des Beweises sei dem Leser überlassen. \square

Korollar 3.1.10. Sei V eine komplexe Darstellung einer Gruppe G , deren einzige Endomorphismen die Skalare sind, in Formeln $\text{Mod}_{\mathbb{C}}^G V = \mathbb{C}$. So sind wir in genau einem der folgenden drei Fälle:

1. Die Darstellung V ist von reellem Typ, d.h. entsteht aus einer reellen Darstellung W durch Komplexifizierung.
2. Die Darstellung V ist von quaternionalem Typ, d.h. entsteht aus einer quaternionalen Darstellung V über \mathbb{H} durch Restriktion der Skalare.
3. Die Darstellung V ist nicht isomorph zu ihrer komplex konjugierten Darstellung \overline{V} .

3.1.11. Per definitionem heißt eine komplexe Darstellung von komplexem Typ genau dann, wenn sie weder von reellem noch von quaternionalem Typ ist. Das Korollar impliziert, daß diese Eigenschaft für komplexe Darstellungen mit Endomorphismenring \mathbb{C} gleichbedeutend ist zur Eigenschaft, nicht isomorph zu sein zu ihrer konjugierten Darstellung.

Beweis. Aus unseren Voraussetzungen folgt $\dim \text{Hom}^G(V, \overline{V}) \leq 1$. Ist diese Dimension Null, so sind wir im dritten Fall. Ist diese Dimension Eins, so gibt es

einen von Null verschiedenen Homomorphismus $J : V \xrightarrow{\sim} \bar{V}$. Per definitionem gilt

$$Jav = a \cdot Jv = \bar{a}Jv \quad \forall a \in \mathbb{C}, v \in V$$

Nach Annahme gilt auch $J^2 = a \text{id}_V$ für geeignetes $a \in \mathbb{C}^\times$, und da J^2 kommutiert mit J , haben wir nach der vorhergehenden Rechnung hier sogar $a \in \mathbb{R}^\times$. Ändern wir J ab um einen Skalar $z \in \mathbb{C}$, so ändert sich J^2 um den Skalar $|z|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Unter der Voraussetzung $V \cong \bar{V}$ gilt also für alle von Null verschiedenen J entweder $J^2 = a \text{id}_V$ mit $a > 0$ oder $J^2 = a \text{id}_V$ mit $a < 0$. Im ersten Fall finden wir leicht ein J mit $J^2 = \text{id}_V$ und nach 3.1.9 ist unsere Darstellung die Komplexifizierung einer reellen Darstellung. Im zweiten Fall finden wir leicht ein J mit $J^2 = -\text{id}_V$ und nach 3.1.9 ist unsere Darstellung die Restriktion einer quaternionalen Darstellung. \square

Übung 3.1.12. Gegeben eine Gruppe G bezeichne $\text{irra}_{\mathbb{K}} G$ die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von G über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ von höchstens abzählbarer Dimension und

$$\text{irra}_{\mathbb{K}} G = \text{irra}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{R}} G \sqcup \text{irra}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{C}} G \sqcup \text{irra}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{H}} G$$

die Zerlegung nach reellem, komplexem und quaternionalem Typ. So liefern die offensichtlichen durch Restriktion bzw. Erweiterung der Skalare gegebenen Abbildungen Bijektionen

$$\begin{array}{ccccc} \text{irra}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{H}} G & \xrightarrow{\sim} & \text{irra}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} G & \xrightarrow{\sim} & \text{irra}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}} G \\ \text{irra}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{R}} G & \xleftarrow{\sim} & \text{irra}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} G & \xleftarrow{\sim} & \text{irra}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} G \\ \text{irra}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}} G & \xleftarrow{\sim} & \text{irra}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}} G / (V \sim \bar{V}) & \xrightarrow{\sim} & \text{irra}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} G \end{array}$$

wo in der Mitte der untersten Zeile der Quotient nach der Äquivalenzrelation gemeint ist, unter der eine Darstellung und ihre komplex konjugierte Darstellung identifiziert werden. Hierbei bestehen im übrigen nach 3.1.10 alle Äquivalenzklassen aus genau zwei Elementen. Hinweis: Für die Wohldefiniertheit der Abbildung unten links muß der Leser zunächst $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{V}$ zeigen. Die Surjektivität aller Abbildungen folgt aus den Definitionen. Für die Injektivität etwa der ersten Abbildung oben links beachte man $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V \cong V \oplus V$ für jede quaternionale Darstellung V . Die Injektivität der anderen Pfeile zeigt man ähnlich.

Proposition 3.1.13. *Seien G eine Gruppe und V eine endlichdimensionale einfache Darstellung von G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit $\text{char } k \neq 2$. So sind wir in genau einem der folgenden drei Fälle:*

1. *Es gibt auf V eine von Null verschiedene symmetrische G -invariante Bilinearform. Diese ist dann nichtausgeartet und bis auf einen Skalar eindeutig bestimmt;*

2. Es gibt auf V eine von Null verschiedene symplektische G -invariante Bilinearform. Diese ist dann nichtausgeartet und bis auf einen Skalar eindeutig bestimmt;

3. Es gibt auf V keine von Null verschiedene G -invariante Bilinearform.

Beweis. Nach dem Schur'schen Lemma haben wir $\dim \text{Hom}_k^G(V, V^*) \leq 1$ und jeder von Null verschiedene Homomorphismus ist ein Isomorphismus. Da unsere Identifikation $\text{Hom}(V, V^*) \xrightarrow{\sim} \text{Bil}(V)$ aus 3.1.14 verträglich ist mit der Operation von G , folgt auch für den Raum der invarianten Bilinearformen

$$\dim_k \text{Bil}(V)^G \leq 1$$

und jede von Null verschiedene invariante Bilinearform ist nichtausgeartet. Ist unser Raum von Bilinearformen eindimensional, so operiert schließlich unsere durch das Vertauschen der Argumente definierte Selbstinverse aus 3.1.15 darauf entweder als die Identität oder als die Multiplikation mit (-1) . \square

Übung 3.1.14. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k erhalten wir eine Bijektion

$$\text{Hom}(V, V^*) \xrightarrow{\sim} \text{Bil}(V)$$

zwischen dem Raum der Homomorphismen von V in seinen Dualraum und dem Raum der Bilinearformen auf V , indem wir jedem Homomorphismus $\varphi : V \rightarrow V^*$ die Bilinearform $\hat{\varphi}$ zuordnen, die gegeben wird durch $\hat{\varphi}(v, w) = (\varphi(v))(w)$. Wir kennen diese Bijektion bereits aus [AN2] 6.2.12, wo wir ihre Inverse $g \mapsto \text{can}_g$ notiert hatten.

Übung 3.1.15. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k haben wir auf dem Raum $\text{Bil}(V)$ der Bilinearformen eine natürliche selbstinverse Abbildung, das „Vertauschen der Argumente“. Ihr Eigenraum zum Eigenwert 1 besteht genau aus allen symmetrischen Bilinearformen, ihr Eigenraum zum Eigenwert (-1) aus allen symplektischen alias alternierenden Bilinearformen, und Fall $\text{char } k \neq 2$ ist $\text{Bil}(V)$ die direkte Summe dieser Eigenräume.

3.1.16. Im allgemeinen definiert man S^2V als den Quotienten von $V \otimes V$ nach allen $v \otimes w - w \otimes v$ und $\wedge^2 V$ als den Quotienten von $V \otimes V$ nach allen $v \otimes v$. Ist unsere Charakteristik nicht Zwei, so geht der Unterraum der Invarianten unter der Vertauschung der Faktoren unter der Projektion isomorph nach S^2V der Unterraum der Schiefinvarianten isomorph nach $\wedge^2 V$, aber in Charakteristik zwei ist beides nicht mehr richtig. Für endlichdimensionales V haben wir stets $\text{Bil}(V) = V^* \otimes V^*$ in kanonischer Weise.

Lemma 3.1.17. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $g : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, so haben wir*

$$\mathrm{tr}(g^2|V) = \mathrm{tr}(g|S^2V) - \mathrm{tr}(g|\wedge^2V)$$

Beweis. Ist g diagonalisierbar und v_1, \dots, v_n eine Basis aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist $(v_i v_j)_{i \leq j}$ eine Basis aus Eigenvektoren in S^2V und $(v_i \wedge v_j)_{i < j}$ eine Basis von Eigenvektoren von \wedge^2V und unsere Behauptung reduziert sich auf die offensichtliche Identität

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i \leq j} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$$

Im allgemeinen ist g jedenfalls trigonalisierbar über einer geeigneten Erweiterung des Grundkörpers, und dann greift dasselbe Argument. \square

Proposition 3.1.18. *Gegeben eine einfache Darstellung V einer endlichen Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik gilt*

$$|G|^{-1} \sum \chi_V(g^2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } V \text{ eine symmetrische Form besitzt;} \\ 0 & \text{falls } V \text{ keine Form besitzt;} \\ -1 & \text{falls } V \text{ eine symplektische Form besitzt.} \end{cases}$$

Mit der Abkürzung „Form“ sind jeweils von Null verschiedene G -invariante Bilinearformen gemeint, die dann wie bereits gezeigt notwendig nichtausgeartet sind.

Beweis. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik zerfällt der Raum der Bilinearformen $\mathrm{Bil}(V)$ in die Teilräume

$$\mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Sym}(V) \oplus \mathrm{Alt}(V)$$

der symmetrischen bzw. alternierenden Bilinearformen. Ist V eine Darstellung einer Gruppe G , so notieren wir die entsprechende Darstellung

$$B = S \oplus A$$

Die entsprechenden kanonischen Identifikationen definieren Isomorphismen von Darstellungen $S^2V^* \xrightarrow{\sim} S$ und $\wedge^2V^* \xrightarrow{\sim} A$ und mit Lemma 3.1.17 erhalten wir

$$\chi_V(g^2) = \chi_S(g^{-1}) - \chi_A(g^{-1})$$

Nun gilt ja $(\chi_S, \chi_{\mathrm{triv}}) = 1$ bzw. $(\chi_A, \chi_{\mathrm{triv}}) = 1$ in Bezug auf unsere symmetrische Bilinearform aus 2.5.13 genau dann, wenn es auf V bis auf Skalar genau eine nichtausgeartete symmetrische bzw. symplektische Form gibt. Die Proposition folgt. \square

Proposition 3.1.19. *Sei G eine endliche Gruppe und V eine einfache komplexe Darstellung von G .*

1. *Genau dann ist V von reellem Typ, wenn es auf V eine nichtausgeartete symmetrische G -invariante Bilinearform gibt;*
2. *Genau dann ist V quaternionalem Typ, wenn es auf V eine nichtausgeartete symplektische G -invariante Bilinearform gibt;*
3. *Genau dann ist V von komplexem Typ, wenn V nicht isomorph ist zu seiner eigenen kontragredienten Darstellung, $V \not\cong V^*$.*

3.1.20. Ich zeige zu Ende dieses Abschnitts als 3.1.26 auch noch eine Variante dieser Proposition im Fall nicht notwendig einfacher Darstellungen. Dann schließen sich die Fälle jedoch nicht mehr gegenseitig aus.

Beweis. 1. Ist unsere Darstellung die Komplexifizierung einer Darstellung über \mathbb{R} , so erhalten wir durch Komplexifizieren eines invarianten Skalarprodukts auf besagter Darstellung über \mathbb{R} eine invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf unserer komplexen Darstellung. Ist umgekehrt eine invariante symmetrische Bilinearform $(v, w) \mapsto s(v, w)$ gegeben, so wählen wir zusätzlich ein invariantes Skalarprodukt $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ und betrachten die Komposition J der von unserer Bilinearform und unserem Skalarprodukt induzierten Isomorphismen

$$V \xrightarrow{\sim} V^* \xrightarrow{\sim} \overline{V}$$

Per definitionem gilt $(v, w) = \langle v, Jw \rangle \forall v, w \in V$ und folglich

$$\langle v, J^2 w \rangle = (v, Jw) = (Jw, v) = \langle Jw, Jv \rangle$$

und wir erkennen, daß J^2 selbstadjungiert ist und nur positive Eigenwerte hat. Aus dem Schur'schen Lemma folgt $J^2 = a \operatorname{id}_V$ mit $a > 0$. Mit 3.1.9 folgt dann leicht, daß unsere Darstellung die Komplexifizierung einer Darstellung über \mathbb{R} ist.

2. Ist unsere Darstellung die Restriktion einer Darstellung über \mathbb{H} , so ist der j -Teil im Sinne von 3.1.23 eines invarianten quaternionalen Skalarprodukts im Sinne von 3.1.21, das es nach 3.1.24 stets gibt, eine invariante nichtausgeartete symplektische Bilinearform auf unserer komplexen Darstellung. Ist umgekehrt eine invariante symplektische Bilinearform gegeben, so liefert unsere Konstruktion wieder ein komplex-schieflinesares J , für das J^2 selbstadjungiert ist und diesmal nur negative Eigenwerte hat. Aus dem Schur'schen Lemma folgt dann $J^2 = a \operatorname{id}_V$ mit $a < 0$, und mit 3.1.9 folgt dann leicht, daß unsere Darstellung die Restriktion einer quaternionalen Darstellung ist.

3. Das ist klar nach 3.1.8. □

Definition 3.1.21. Ein **Skalarprodukt** oder genauer ein **quaternionales Skalarprodukt** auf einem quaternionalen Vektorraum alias \mathbb{H} -Rechtsmodul V ist eine Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{H}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ derart, daß für alle $v, w, v', w' \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{H}$ gilt:

1. $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$, $\langle v\lambda, w \rangle = \bar{\lambda}\langle v, w \rangle$;
2. $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$, $\langle v, w\mu \rangle = \langle v, w \rangle\mu$;
3. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$, insbesondere $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$;
4. $\langle v, v \rangle \leq 0 \Rightarrow v = 0$.

Beispiel 3.1.22. Auf dem \mathbb{H}^n erhalten wir ein quaternionales Skalarprodukt durch die Vorschrift $\langle v, w \rangle = \bar{v}_1 w_1 + \dots + \bar{v}_n w_n$.

Übung 3.1.23. Jedes $q \in \mathbb{H}$ läßt sich eindeutig schreiben als $q = z + jw$ mit $z, w \in \mathbb{C}$. Ich nenne dann w den **j-Teil** von q und schreibe $w = \text{jot}(q)$. Man prüft leicht $\text{jot}(zq) = \bar{z}\text{jot}(q)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\text{jot}(\bar{q}) = -\text{jot}(q)$. Man zeige: Gegeben ein Skalarprodukt auf einem quaternionalen Vektorraum ist die Zuordnung $(v, w) \mapsto \text{jot}\langle v, w \rangle$ komplex-bilinear und symplektisch.

Übung 3.1.24. Auf jeder endlichdimensionalen quaternionalen Darstellung einer endlichen Gruppe existiert ein invariantes quaternionales Skalarprodukt.

Korollar 3.1.25. Gegeben eine einfache komplexe Darstellung V einer endlichen Gruppe G gilt

$$|G|^{-1} \sum \chi_V(g^2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } V \text{ von reellem Typ ist;} \\ 0 & \text{falls } V \text{ von komplexem Typ ist;} \\ -1 & \text{falls } V \text{ von quaternionalem Typ ist.} \end{cases}$$

Beweis. Das folgt sofort, wenn man 3.1.18 mit 3.1.13 kombiniert. □

Proposition 3.1.26. Seien G eine endliche Gruppe und V eine endlichdimensionale komplexe Darstellung von G . So gilt:

1. Genau dann ist V isomorph zur Komplexifizierung einer reellen Darstellung von G , wenn es auf V eine invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform gibt;
2. Genau dann ist V isomorph zur Restriktion einer quaternionalen Darstellung von G , wenn es auf V eine invariante nichtausgeartete symplektische Bilinearform gibt.

Beweis. Die Hinrichtung geht genauso wie im Beweis von 3.1.13. Für die Rückrichtung wählen wir wie im Beweis von 3.1.13 auf unserer Darstellung ein invariantes Skalarprodukt und finden wieder einen schieflinearen Automorphismus J unserer Darstellung derart, daß J^2 selbstadjungiert ist und nur positive bzw. negative Eigenwerte hat. Ändern wir dann J auf den Eigenräumen von J^2 durch einen geeigneten Skalar ab, so können wir $J^2 = \text{id}$ bzw. $J^2 = -\text{id}$ erreichen. \square

3.2 Induktion und Koinduktion für diskrete Gruppen

3.2.1. Ich erinnere an das Konzept adjungierter Funktoren, das in [TF] 4.4 diskutiert wird.

Satz 3.2.2 (Adjungierte von Restriktionen). Sei $\varphi : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus. Das Restringieren von Darstellungen alias der Funktor $\text{res}_G^H : G\text{-Mod} \rightarrow H\text{-Mod}$ besitzt einen Rechtsadjungierten ind_H^G und einen Linksadjungierten prod_H^G .

3.2.3. Ist $\varphi : H \hookrightarrow G$ die Einbettung einer Untergruppe, so nennt man ind_H^G meist die **Induktion** und prod_H^G manchmal die **Koinduktion**. Im Extremfall $G = 1$ benutzt man die Bezeichnungen $\text{ind}_H^1 M = M^H$ sowie $\text{prod}_H^1 M = M_H$ und nennt diese abelschen Gruppen die **H -Invarianten** und die **H -Koinvarianten** H -Invarianten von M .

3.2.4. Gegeben Darstellungen $M \in H\text{-Mod}$ und $N \in G\text{-Mod}$ bezeichnet man als **Frobenius-Reziprozität** die kanonischen Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Hom}^H(\text{res}_G^H N, M) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}^G(N, \text{ind}_H^G M) \\ \text{Hom}^H(M, \text{res}_G^H N) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}^G(\text{prod}_H^G M, N) \end{aligned}$$

Aus der Transitivität der Restriktionen folgt auch in diesem Kontext sofort die Transitivität von Induktion und Koinduktion.

Beweis. Wir geben verschiedene Beweise, um diese zentralen Konstruktionen unter verschiedenen Blickwinkeln zu beleuchten.

1. Für jeden Ringhomomorphismus $A \rightarrow B$ hat die Restriktion $B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ den Rechtsadjungierten $M \mapsto \text{Hom}_A(B, M)$ und den Linksadjungierten $M \mapsto B \otimes_A M$, siehe [TS] 3.3.5 und [TS] 3.3.7. Identifizieren wir $H\text{-Mod} = \mathbb{Z}H\text{-Mod}$ und $G\text{-Mod} = \mathbb{Z}G\text{-Mod}$ und spezialisieren zum von φ induzierten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}H \rightarrow \mathbb{Z}G$, so erhalten wir eine erste Beschreibung unserer adjungierten Funktoren als

$$\text{ind}_H^G M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M) \quad \text{und} \quad \text{prod}_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$$

2. Alternativ können wir die induzierte Darstellung konstruieren als

$$\text{ind}_H^G M = \{f : G \rightarrow M \mid f(hx) = hf(x) \quad \forall h \in H, x \in G\}$$

mit der G -Operation gegeben durch $(gf)(x) = f(xg)$ für alle $x, g \in G$. Die Identifikation mit $\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$ geschieht durch die Einschränkung eines derartigen Homomorphismus auf die Teilmenge $G \subset \mathbb{Z}G$.

3. Die folgende Konstruktion induzierter und koinduzierter Darstellungen scheint mir am anschaulichsten, sie funktioniert jedoch nur für $H \subset G$. Wir betrachten dazu das sogenannte balancierte Produkt $G \times_H M$, das definiert ist als der Raum der H -Bahnen in $G \times M$ unter der Operation $h(g, m) = (gh^{-1}, hm)$, und die Menge aller Schnitte bzw. aller Schnitte mit endlichem Träger der Projektion $\pi : G \times_H M \rightarrow G/H$, also

$$\begin{aligned} \text{ind}_H^G M &= \{s : G/H \rightarrow G \times_H M \mid \pi \circ s = \text{id}\} \\ \text{prod}_H^G M &= \{s : G/H \rightarrow G \times_H M \mid \pi \circ s = \text{id}, |\text{supp } s| < \infty\} \end{aligned}$$

Die Fasern von π sind hier abelsche Gruppen in natürlicher Weise, π ist G -äquivariant für die offensichtliche G -Operation von links auf beiden Räumen, und die Operation von G induziert Gruppenhomomorphismen zwischen den Fasern von π . Damit erhalten wir eine Operation von G auf unseren Mengen von Schnitten durch „Verschieben“, $(gs)(x) = g(s(g^{-1}x))$, und das ist unsere dritte Konstruktion. Um sie im Fall der induzierten Darstellung mit der vorherigen Konstruktion zu identifizieren, bilden wir zu einer Abbildung $f : G \rightarrow M$ die Abbildung $\tilde{f} : G \rightarrow G \times M, x \mapsto (x, f(x^{-1}))$ und beachten, daß sie für unsere speziellen f absteigt zu einem Schnitt $s : G/H \rightarrow G \times_H M$, falls $H \subset G$ eine Einbettung ist. Im Fall der koinduzierten Darstellung ordnen wir einem Tensor $g \otimes m \in \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ den Schnitt s zu mit $s(gH) = \overline{(g, m)}$. Insbesondere gibt es im Fall $H \subset G$ stets eine natürliche Einbettung $\text{prod}_H^G M \subset \text{ind}_H^G M$ und unter der Zusatzannahme $|G/H| < \infty$ ist diese Einbettung sogar ein Isomorphismus. \square

Ergänzung 3.2.5. Manchmal gibt es besondere interessante Transformationen $\text{prod}_H^G \rightarrow \text{ind}_H^G$ und ich weiß nicht, welcher allgemeine Formalismus sie liefern könnte. Speziell ist für H endlich und G trivial die Multiplikation mit $N_H := \sum_{h \in H} h$ solch eine Transformation von den Koinvarianten zu den Invarianten, und für $H \subset G$ eine Einbettung wird eine derartige Transformation im vorhergehenden dritten Beweis von 3.2.2 mit konstruiert.

3.2.6. Sei $\varphi : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und k ein Körper und bezeichne $d : H\text{-Mod}_{\mathbb{C}} \rightarrow H\text{-Mod}_{\mathbb{C}}^{\text{opp}}$ das Bilden der kontragredienten Darstellung.

So induziert die offensichtliche Isotransformation

$$\begin{array}{ccc} G\text{-Mod}_k & \xrightarrow{d} & G\text{-Mod}_k^{\text{opp}} \\ \text{res}_G^H \downarrow & \swarrow \sim & \downarrow (\text{res}_G^H)^\circ \\ H\text{-Mod}_k & \xrightarrow{d} & H\text{-Mod}_k^{\text{opp}} \end{array}$$

durch Übergang zu den Rechtsadjungierten eine Isotransformation

$$\begin{array}{ccc} G\text{-Mod}_k & \xleftarrow{d^\circ} & G\text{-Mod}_k^{\text{opp}} \\ \text{ind}_H^G \uparrow & \swarrow \sim & \uparrow (\text{prod}_H^G)^\circ \\ H\text{-Mod}_k & \xleftarrow{d^\circ} & H\text{-Mod}_k^{\text{opp}} \end{array}$$

Wir haben also kürzer geschrieben stets natürliche Isomorphismen

$$\text{ind}_H^G(dM) \xrightarrow{\sim} d(\text{prod}_H^G M)$$

Wenden wir sie auf $M = dN$ an und schalten $N \rightarrow ddN$ davor, so ergeben sich natürliche Homomorphismen $\text{ind}_H^G(N) \rightarrow d(\text{prod}_H^G dN)$. Dualisieren wir sie, so erhalten wir natürliche Homomorphismen $\text{prod}_H^G M \rightarrow d(\text{ind}_H^G(dM))$.

Übung 3.2.7. Gegeben endliche Gruppen $H \subset G$ und ein Körper k der Charakteristik Null können wir die koinduzierte Darstellung der trivialen Darstellung von H auch beschreiben als

$$\text{prod}_H^G k \cong (kG) \left(\sum_{h \in H} h \right)$$

Dieselbe Formel gilt, wenn nur H endlich ist.

Satz 3.2.8 (Mackey). *Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H, L und sei A eine Darstellung von H . Sei $X \subset G$ ein Repräsentantensystem für die L - H -Doppelnebenklassen. Gegeben $x \in X$ setzen wir $U_x = xHx^{-1} \cap L$ und betrachten die Einbettung $U_x \hookrightarrow H, u \mapsto x^{-1}ux$. So haben wir kanonische Isomorphismen*

$$\text{res}_G^L(\text{prod}_H^G A) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in X} \text{prod}_{U_x}^L(\text{res}_H^{U_x} A)$$

$$\text{res}_G^L(\text{ind}_H^G A) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} \text{ind}_{U_x}^L(\text{res}_H^{U_x} A)$$

Beweis. Wir zeigen nur den ersten Isomorphismus, der Zweite ergibt sich analog. Auf der linken Seite steht $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A$. Nun zerfällt $\mathbb{Z}G$ als $\mathbb{Z}L$ - $\mathbb{Z}H$ -Bimodul offensichtlich in $\mathbb{Z}G = \bigoplus_Q \mathbb{Z}Q$, wo Q über die L - H -Doppelnebenklassen in G läuft. Wählen wir $x \in Q$, so liefert weiter die Vorschrift $f \otimes g \mapsto fxg$ einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}L$ - $\mathbb{Z}H$ -Bimoduln $\mathbb{Z}L \otimes_{\mathbb{Z}U_x} \mathbb{Z}H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}Q$. Damit ist der Satz klar. \square

Bemerkung 3.2.9. Ist im vorhergehenden Satz speziell $H = L$ ein Normalteiler von G , so haben wir $X = G/H$ und die Summanden bzw. Faktoren auf der rechten Seite unserer Formeln sind schlicht die H -Moduln A^x , die man erhält, wenn man die Operation von H auf A mit der Konjugation durch $x \in G$ vertwistet.

Korollar 3.2.10. Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H, L und seien $A \in H$ -Mod, $B \in L$ -Mod Darstellungen. Sei $X \subset G$ ein Repräsentantensystem für die L - H -Doppelnebenklassen in G . Für $x \in X$ setzen wir $U_x = xHx^{-1} \cap L$ und betrachten die Einbettung $U_x \hookrightarrow H$, $u \mapsto x^{-1}ux$. So haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}^G(\mathrm{prod}_H^G A, \mathrm{ind}_L^G B) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}^{U_x}(\mathrm{res}_H^{U_x} A, \mathrm{res}_L^{U_x} B)$$

Beweis. Klar mit dem vorhergehenden Satz von Mackey 3.2.8 und den Adjunktionen (prod, res) sowie (res, ind). \square

Ergänzung 3.2.11. Vertauschen wir die Rollen von H und L , so haben wir mit demselben Beweis auch einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}^G(\mathrm{prod}_L^G B, \mathrm{ind}_H^G A) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}^{U_x}(\mathrm{res}_L^{U_x} B, \mathrm{res}_H^{U_x} A)$$

Übung 3.2.12 (Charaktere induzierter Darstellungen). Gegeben endliche Gruppen $H \subset G$ und V eine endlichdimensionale komplexe Darstellung von H und $W := \mathrm{ind}_H^G V$ die induzierte Darstellungen gilt

$$\chi_W(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{\chi}_V(xgx^{-1})$$

für $\dot{\chi}_V : G \rightarrow \mathbb{C}$ die Ausdehnung von $\chi_V : H \rightarrow \mathbb{C}$ durch Null. Bilden alternativ x_1, \dots, x_r ein Repräsentantensystem für die Rechtsnebenklassen von H in G , also $G = \sqcup_{i=1}^r x_i H$, so gilt auch

$$\chi_W(g) = \sum_{i=1}^r \dot{\chi}_V(x_i g x_i^{-1})$$

In diesem Sinne ist es sinnvoll, zu jeder Klassenfunktion $\chi : H \rightarrow \mathbb{C}$ die **induzierte Klassenfunktion** $\chi : H \rightarrow \mathbb{C}$ durch ebendiese Formel zu definieren. Für die Standardskalarprodukte auf den Räumen der Klassenfunktionen sind damit das Restringieren und das Induzieren von Klassenfunktionen adjungierte lineare Abbildungen

$$\mathcal{C}(H) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{ind}_H^G} \\ \xleftarrow{\text{res}_G^H} \end{array} \mathcal{C}(G)$$

im Sinne von [LA2] 1.10.5. Daher rührt vermutlich die Terminologie der „adjungierten Funktoren“.

3.3 Clifford-Theorie

3.3.1. Gegeben H eine Gruppe und k ein Körper bezeichne im folgenden

$$\hat{H} := \text{irr}_k H$$

die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen der Gruppe H über k . Gegeben eine Darstellung V von H und $\chi \in \hat{H}$ bezeichne $V_\chi \subset V$ den zugehörigen **isotypischen Anteil** alias die Summe aller Bilder von Verflechtungsoperatoren von unserer irreduziblen Darstellung nach V .

3.3.2. Gegeben $G \supset N$ eine Gruppe mit einem Normalteiler induziert die Operation von G auf N durch Konjugation eine Operation der Gruppe G auf der Menge \hat{N} . Die Isotropiegruppe von $\chi \in \hat{N}$ notieren wir G_χ . Nach 1.1.22 gilt stets $G_\chi \supset N$.

Satz 3.3.3 (Irreduzible Darstellungen und Normalteiler). Gegeben k ein Körper und $G \supset N$ eine Gruppe mit Normalteiler liefert die Abbildung $V \mapsto \{(\chi, V_\chi) \mid \chi \in \hat{N} \text{ mit } V_\chi \neq 0\}$ eine Bijektion

$$\hat{G} \xrightarrow{\sim} \text{Par}(G, N)/G$$

zwischen der Menge der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von G und der Menge aller G -Bahnen auf der Menge $\text{Par}(G, N)$ aller Paare

$$\text{Par}(G, N) := \{(\chi, W) \mid \chi \in \hat{N}, W \in \hat{G}_\chi \text{ mit } W_\chi = W\}$$

unter der offensichtlichen G -Operation. Die inverse Abbildung wird gegeben durch $[(\chi, W)] \mapsto \text{prod}_{G_\chi}^G W$.

Beweis. Sei V eine Darstellung von G . Die Operation von G auf N induziert eine Operation von G auf \hat{N} und für alle $g \in G$ gilt offensichtlich $g : V_\chi \rightarrow V_{g\chi}$. Weiter ist die Summe der isotypischen Komponenten stets direkt nach [NAS] 1.4.9. Folglich bilden für jede G -Bahn $B \subset \hat{N}$ die zugehörigen isotypischen Komponenten eine G -Unterdarstellung

$$V_B := \bigoplus_{\chi \in B} V_\chi$$

von V . Ist V irreduzibel, so muß es demnach genau eine Bahn $G\chi = B = B(V)$ geben mit $V = V_B$. Wir schreiben $kG\text{-Mod}_B$ für die Kategorie aller G -Moduln V mit $V = V_B$ und behaupten für alle $\chi \in \hat{N}$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} kG\text{-Mod}_{G\chi} & \xrightarrow{\cong} & kG_\chi\text{-Mod}_\chi \\ V & \mapsto & V_\chi \end{array}$$

In der Tat können wir den Funktor $R : kG\text{-Mod} \rightarrow kG_\chi\text{-Mod}_\chi$ gegeben durch $R : V \mapsto V_\chi$ schreiben als die Restriktion gefolgt vom Bilden des besagten N -isotypischen Anteils. Wir erhalten dazu einen Linksadjungierten durch die Vorschrift

$$L : W \mapsto \text{prod}_{G_\chi}^G(W)$$

Wegen $g : V_\chi \xrightarrow{\cong} V_{g\chi}$ ist klar, daß L bereits in $kG\text{-Mod}_{G\chi}$ landet. Aus demselben Grund induziert die kanonische Abbildung $W \rightarrow \text{prod}_{G_\chi}^G(W)$ einen Isomorphismus auf die χ -isotypische Komponente der rechten Seite, als da heißt, die Adjunktion induziert einen Isomorphismus $W \xrightarrow{\cong} RLW$. Es bleibt nur zu zeigen, daß auch umgekehrt die Adjunktion einen Isomorphismus $LRV \xrightarrow{\cong} V$ induziert, daß also für $V \in kG\text{-Mod}_{G\chi}$ die von der Adjunktion alias Frobenius-Reziprozität 3.2.4 herkommende Abbildung ein Isomorphismus

$$\text{prod}_{G_\chi}^G V_\chi \xrightarrow{\cong} V$$

ist. In der Tat induziert nun unsere Abbildung einen Isomorphismus auf den χ -isotypischen Komponenten. Damit haben sowohl Kern als auch Kokern unseres Isomorphismus in spe höchstens von Null verschiedene isotypische Komponenten an Stellen $\psi \in G\chi$. Andererseits aber haben sowohl Kern als auch Kokern Komponente Null bei χ und folglich auch Komponenten Null bei allen $\psi \in G\chi$. Der Satz folgt. \square

3.3.4. Gegeben $H \ltimes N$ ein semidirektes Produkt zweier Gruppen induziert die Operation von H auf N eine Operation der Gruppe H auf der Menge \hat{N} . Die Isotropiegruppe von $\chi \in \hat{N}$ notieren wir H_χ .

Korollar 3.3.5 (Darstellungen semidirekter Produkte). Gegeben ein semidirektes Produkt $H \rtimes N$ einer endlichen Gruppe H mit einer abelschen Gruppe N liefert die Abbildung $V \mapsto \{(\chi, V_\chi) \mid \chi \in \text{irrf}_{\mathbb{C}} N \text{ mit } V_\chi \neq 0\}$ eine Bijektion

$$\text{irrf}_{\mathbb{C}}(H \rtimes N) \xrightarrow{\sim} \text{Par}/H$$

zwischen der Menge der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von $H \rtimes N$ und der Menge der H -Bahnen auf der Parametermenge Par aller Paare $\text{Par} := \{(\chi, W) \mid \chi \in \text{irrf}_{\mathbb{C}} N, W \in \text{irrf}_{\mathbb{C}} H_\chi\}$ mit der offensichtlichen H -Operation.

Beweis. Das folgt durch Spezialisierung aus Clifford-Theorie 3.3.3. Genauer induziert die dort gegebene Bijektion unter der Annahme $|G/N| < \infty$ eine Bijektion zwischen endlichdimensionalen Irreduziblen auf beiden Seiten. Nehmen wir zusätzlich den Grundkörper k algebraisch abgeschlossen und N abelsch an, so sind die irreduziblen endlichdimensionalen k -Darstellungen eindimensional und die Restriktion liefert für alle derartigen χ eine Äquivalenz von Kategorien

$$k(H_\chi \rtimes N)\text{-Mod}_\chi \xrightarrow{\sim} kH_\chi\text{-Mod}$$

So folgt dann das Korollar. Statt \mathbb{C} dürfen wir darin sogar allgemeiner einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper nehmen. \square

3.4 Darstellungen endlicher Heisenberg-Gruppen*

3.4.1. Das folgende habe ich von David Groß gelernt.

3.4.2. Allgemein definiert man für jeden Vektorraum V über einem Körper k mit einer symplektischen Bilinearform ω , ja mit einer beliebigen alternierenden Bilinearform ω , die zugehörige **Heisenberg-Gruppe**

$$\text{Heis}(V, \omega) := V \times k$$

mit der Verknüpfung $(v, \alpha)(w, \beta) := (v + w, \alpha + \beta + \omega(v, w))$. Das Zentrum dieser Gruppe ist $0 \times k$, falls k nicht die Charakteristik Zwei hat. Im Fall der Charakteristik Zwei ist unsere Gruppe kommutativ.

3.4.3 (**Irreduzible Darstellungen der endlichen Heisenberggruppen**). Wir untersuchen nun irreduzible komplexe Darstellungen der Heisenberggruppe G im Fall eines endlichdimensionalen symplektischen Vektorraums V über einem endlichen Körper $k = \mathbb{F}_q$. Das Zentrum operiert auf jeder irreduziblen Darstellung durch einen multiplikativen Charakter. Ist dieser Charakter der triviale Charakter, so kommt unsere Darstellung durch Rückzug von einer irreduziblen Darstellung der additiven Gruppe V her und wir erhalten so $q^{2n} = |V|$ paarweise nicht-isomorphe eindimensionale Darstellungen. Ist dieser Charakter $\chi : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times$

nicht der triviale Charakter, so betrachten wir irgendeinen Lagrange'schen Teilraum $L \subset V$ und den trivial fortgesetzten Charakter $\tilde{\chi} : L \times \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $\tilde{\chi}(v, \alpha) = \chi(\alpha)$ und induzieren $\mathbb{C}_{\tilde{\chi}}$ zu einer Darstellung $V_{\tilde{\chi}}$ unserer Heisenberggruppe. Für $2n = \dim V$ erhalten wir dann eine q^n -dimensionale Darstellung der Heisenberggruppe, auf der das Zentrum immer noch durch denselben multiplikativen Charakter χ operiert. Diese induzierten Darstellungen sind jedoch alle irreduzibel, denn $L \times \mathbb{F}_q$ ist ein Normalteiler und die Bahn von $\tilde{\chi}$ unter Konjugation hat genau q^n Elemente: Es gilt nämlich

$$(w, 0)(v, \beta)(w, 0)^{-1} = (v, \beta + 2\omega(w, v))$$

Folglich ist für jede Linearform $\lambda \in L^*$ der Charakter $(v, \alpha) \mapsto \chi(2\lambda(v) + \alpha)$ konjugiert zu $\tilde{\chi}$. Wegen $(q-1)(q^n)^2 + (q^n)^2 = |G|$ müssen das bereits alle irreduziblen Darstellungen gewesen sein.

4 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Frau Noemi Joosten, Frau Nata-scha Moser, Frau Bettina Eiche, . . .

Literatur

- [AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).
- [AN2] *Skriptum Analysis 2*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).
- [AN3] *Skriptum Analysis 3*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).
- [FH91] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory*, Springer, 1991.
- [GR] *Skriptum Grundlagen*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).
- [Jam78] G. D. James, *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer, 1978.
- [JK81] Gordon James and Adalbert Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia, vol. 16, Addison-Wesley, 1981.
- [KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).
- [LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).
- [LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).

- [ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).
- [NAS] *Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).
- [Sag00] Bruce E. Sagan, *The symmetric group*, Springer, 2000.
- [TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).
- [TS] *Skriptum Singuläre Homologie*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei [Öffentliche Werkbank](#).

Index

- \bar{V} komplex konjugierter Vektorraum, 58
- $k[G]$ Gruppenring, 8
- *
- Faltung in Gruppenring, 8
- ⊠
- äußeres Produkt
 von Darstellungen, 25
- äußeres Produkt
 von Darstellungen, 25
- Algebra
 durch Erzeuger und Relationen, 12
- Bikommutator, 17
- Binet-Cauchy-Identität, 30
- Charakter
 - einer Darstellung, 35
 - einfacher, 35
- Charakter-Projektor-Formel, 35
- Charaktertafel, 37
- χ_V Charakter von V , 35
- Darstellung
 - einfache, 6
 - irreduzible, 6
 - komplex konjugierte, 59
 - kontragradiente, von Gruppe, 35
 - unzerlegbare, 6
 - von Gruppe, 3
 - von Monoid, 3
 - zyklische, 6
- Dichtesatz
 - von Jacobson, 17
- Dichtesatz von Jacobson, 17
- direkte Summe, 5, 13
- Dominanz-Ordnung, 46
- duales Paar, 27
- einfach
 - Charakter, 35
 - Darstellung, Gruppe, 6
 - Ring, 19
- Faltung
 - Multiplikation eines Gruppenrings, 8
- Fouriertransformation
 - diskrete, 32
- Frobenius-Reziprozität
 bei Gruppen, 65
- Gitter, 10
- Goldie-Rang, 21
- Goldie-Schiefkörper, 21
- Gruppenring, 8
- Hakenlänge, 50
- Hakenlängenformel, 50
- halbeinfach
 - Modul, 13
 - Ring, 19
- Heisenberg-Gruppe, 71
- Homomorphismus
 - von Darstellungen, 4
- Induktion
 - von Darstellungen, 65
 - von Klassenfunktionen, 69
- induziert
 - Darstellung, 65
 - Klassenfunktion, 69
- Invarianten, 65
 - von Gruppe, 65
- $\text{irr}_k G$ irreduzible Darstellungen, 6
- irra irreduzible Darstellungen höchstens abzählbarer Dimension, 60
- irreduzibel
 - Darstellung, Gruppe, 6

$\text{irrf}_k G$ irreduzible endlichdimensionale Darstellungen, 26
 isomorph Darstellungen, 5
 Isomorphismus von Darstellungen, 5
 isotypisch Anteil, 14
 isotypische Komponente, 15
 isotypischer Anteil, 69
 Jacobson's Dichtesatz, 17
 Jacobson-Radikal, 21
 Jucys-Murphy-Element, 55
 Klassenfunktion, 33
 Koinduktion von Darstellungen, 65
 Koinvarianten von Gruppe, 65
 Kommutator einer Teilmenge, 17
 Komplement, 13
 komplementär, 13
 komplexer Typ, 57
 konjugiert Darstellung komplexe, 59 Vektorraum, komplexer, 58
 kontragredient Darstellung von Gruppe, 7
 Konvolution Multiplikation eines Gruppenrings, 8
 kristallographisch, 7
 Mackey-Formel, 67
 Maschke, Satz von, 27
 Matrixkoeffizient, 16, 39
 Matrixkoeffizientenabbildung, 39
 Modul halbeinfacher, 13
 Monoidring, 9
 Operation durch Konjugation, 29 durch Nachschalten, 29 durch Vorschalten, 29
 Permutationsdarstellung, 4
 primitiv zentrales Idempotents, 21
 Produkt äußeres von Darstellungen, 25
 Projektor, 34
 quaternionaler Typ, 57, 58
 Radikal Jacobson-Radikal, 21
 Rang Goldie-Rang, 21
 reeller Typ, 57
 representation, 3
 Ring einfacher, 19
 Ringalgebra freie, 11
 Robinson-Schensted-Algorithmus, 50
 Schiefkörper Goldie-Schiefkörper, 21
 Schur, Lemma von bei Gruppen, 24 bei Moduln, 25
 Skalarprodukt quaternionales, 64
 soc Sockel, 15
 Sockel, 15
 Specht-Vektor, 50
 Spurform, 22 bei Gruppenringen, 33
 Spurkriterium, 22

Standarddarstellung, 3
Standardtableau, 44

Tableau, 44
Typ einer Darstellung, 57

Unterdarstellung
 abstrakte, 6
unzerlegbar
 Darstellung, 6

Vektor
 zyklischer in Darstellung, 6
vollständig reduzibel, 28

Wedderburn, 18

⊠
 äußeres Produkt
 von Darstellungen, 25

Young-Diagramm, 43
Young-Symmetrisator, 45

\mathbb{Z} -Form
 einer Darstellung, 7

zyklisch
 Darstellung, 6
 Vektor in abstrakter Darstellung, 6