

# EINSTIMMUNG

Wolfgang Soergel

1. Oktober 2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einstimmung</b>	<b>3</b>
1.1	Vollständige Induktion und binomische Formel . . . . .	3
1.2	Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff . . . . .	11
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>21</b>
	<b>Indexvorwort</b>	<b>22</b>
	<b>Index</b>	<b>23</b>

# 1 Einstimmung

## 1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel

**Satz 1.1.1.** Für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  gilt  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

*Beispiel 1.1.2.* Im Fall  $n = 5$  behauptet unser Satz  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 \times 6/2$  und in diesem Fall stimmt das schon mal: Beide Seiten sind 15. Man bemerke, daß wir beim Rechnen mit Symbolen wie etwa  $n(n+1)$  die Multiplikationssymbole weggelassen haben, die nur beim Rechnen mit durch Ziffern dargestellten Zahlen wichtig sind.

*Beweis.* Bei diesem Beweis sollen Sie gleichzeitig das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion** lernen. Wir bezeichnen mit  $A(n)$  die Aussage, daß die Formel im Satz für ein gegebenes  $n$  gilt, und zeigen:

**Induktionsbasis:** Die Aussage  $A(1)$  ist richtig. In der Tat gilt  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .

**Induktionsschritt:** Aus der Aussage  $A(n)$  folgt die Aussage  $A(n+1)$ . In der Tat, unter der Annahme, daß unsere Formel für ein gegebenes  $n$  gilt, der sogenannten **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung**, rechnen wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

und folgern so, daß die Formel auch für  $n+1$  gilt.

Es ist damit klar, daß unsere Aussage  $A(n)$  richtig ist alias daß unsere Formel gilt für alle  $n = 1, 2, 3, \dots$  □

1.1.3. Das Zeichen □ deutet in diesem Text das Ende eines Beweises an und ist in der neueren Literatur weit verbreitet. Buchstaben in Formeln werden in der Mathematik üblicherweise kursiv notiert, so wie etwa das  $n$  oder auch das  $A$  im vorhergehenden Beweis. Nur Buchstaben oder Buchstabenkombinationen, die stets dasselbe bedeuten sollen, schreibt man nicht kursiv, wie etwa  $\sin$  für den Sinus oder  $\log$  für den Logarithmus.

1.1.4. Der vorhergehende Beweis stützt sich auf unser intuitives Verständnis der natürlichen Zahlen. Man kann das Konzept der natürlichen Zahlen auch formal einführen und so die natürlichen Zahlen in gewisser Weise „besser“ verstehen. Das wird in [GR] 1.5.24 und ausführlicher in [LA1] 4.1.6 diskutiert. Das Wort „Induktion“ meint eigentlich „Hervorrufen“, so wie etwa das Betrachten einer Wurst die Ausschüttung von Spucke induziert alias uns den Mund wässrig macht.

Im Zusammenhang der vollständigen Induktion ist es dahingehend zu verstehen, daß die Richtigkeit unserer Aussage  $A(1)$  die Richtigkeit von  $A(2)$  induziert, die Richtigkeit von  $A(2)$  wiederum die Richtigkeit von  $A(3)$ , die Richtigkeit von  $A(3)$  die Richtigkeit von  $A(4)$ , und immer so weiter.

1.1.5. Es herrscht keine Einigkeit in der Frage, ob man die Null eine natürliche Zahl nennen soll. In diesem Text ist stets die Null mit gemeint, wenn von natürlichen Zahlen die Rede ist. Wollen wir die Null dennoch ausschließen, so sprechen wir wie oben von einer „natürlichen Zahl  $n \geq 1$ “.

1.1.6. Ich will kurz begründen, warum es mir natürlich scheint, auch die Null eine natürliche Zahl zu nennen: Hat bildlich gesprochen jedes Kind einer Klasse einen Korb mit Äpfeln vor sich und soll seine Äpfel zählen, so kann es ja durchaus vorkommen, daß in seinem Korb gar kein Apfel liegt, weil es zum Beispiel alle seine Äpfel bereits gegessen hat. In der Begrifflichkeit der Mengenlehre ausgedrückt, die wir in [GR] 1.1 einführen werden, muß man die leere Menge endlich nennen, wenn man erreichen will, daß jede Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist. Will man dann zusätzlich erreichen, daß die Kardinalität jeder endlichen Menge eine natürliche Zahl ist, so darf man die Null nicht aus den natürlichen Zahlen herauslassen.

1.1.7. Man kann sich den Satz anschaulich, wie in nebenstehendem Bild angedeutet, klar machen als eine Formel für die Fläche des Querschnitts durch eine Treppe der Länge  $n$  mit Stufenabstand und Stufenhöhe Eins. In der Tat bedeckt ein derartiger Querschnitt ja offensichtlich ein halbes Quadrat der Kantenlänge  $n$  nebst  $n$  halben Quadraten der Kantenlänge Eins. Ein weiterer Beweis geht so:

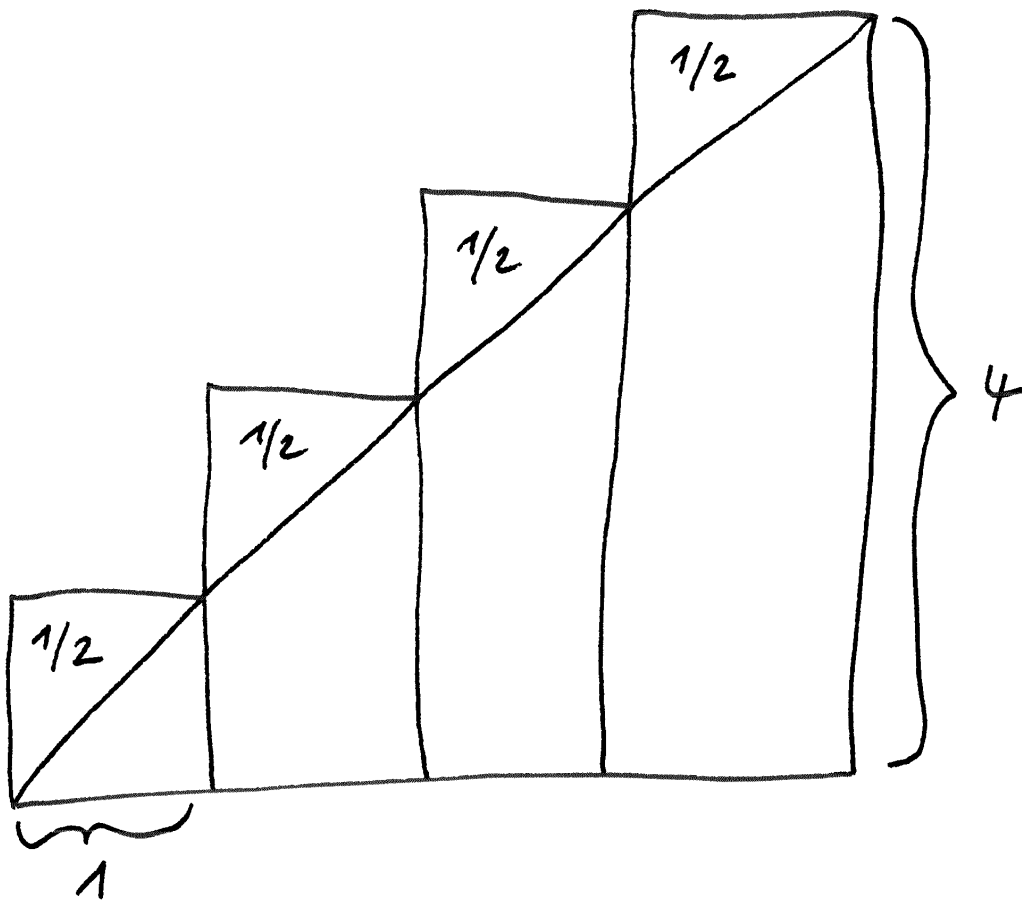
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 1/2 + 2/2 + 3/2 + \dots + n/2 \\ &\quad + n/2 + (n-1)/2 + (n-2)/2 + \dots + 1/2 \\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \dots + \frac{n+1}{2} \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

Ich will letzteren Beweis benutzen, um eine neue Notation einzuführen.

**Definition 1.1.8.** Gegeben  $a_1, a_2, \dots, a_n$  schreiben wir

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Das Symbol  $\sum$  ist ein großes griechisches S und steht für „Summe“. Das Symbol  $:=$  deutet an, daß die Bedeutung der Symbole auf der doppeltepunktbehafteten Seite des Gleichheitszeichens durch den Ausdruck auf der anderen Seite unseres Gleichheitszeichens definiert ist. Im obigen und ähnlichen Zusammenhängen heißen  $a_1, \dots, a_n$  die **Summanden** und  $i$  der **Laufindex**, da er eben etwa in unserem Fall von 1 bis  $n$  läuft und anzeigt alias „indiziert“, welcher Summand gemeint ist.



Die Gesamtfläche dieses Treppenquerschnitts ist offensichtlich

$$4^2/2 + 4/2 = 4 \cdot 5/2$$

1.1.9 (**Zur Sprache in der Mathematik**). Das Wort „Definition“ kommt aus dem Lateinischen und bedeutet „Abgrenzung“. In Definitionen versuchen wir, die Bedeutung von Symbolen und Begriffen so klar wie möglich festzulegen. Sie werden merken, daß man in der Mathematik die Angewohnheit hat, in Definitionen Worte der Umgangssprache wie Menge, Gruppe, Körper, Unterkörper, Abbildung etcetera „umzuwidmen“ und ihnen ganz spezielle und meist nur noch entfernt mit der umgangssprachlichen Bedeutung verwandte neue Bedeutungen zu geben. In mathematischen Texten sind dann überwiegend diese umgewidmeten Bedeutungen gemeint. In dieser Weise baut die Mathematik also wirklich ihre eigene Sprache auf, bei der jedoch die Grammatik und auch nicht ganz wenige Wörter doch wieder von den uns geläufigen Sprachen übernommen werden. Das muß insbesondere für den Anfänger verwirrend sein, der sich auch bei ganz harmlos daherkommenden Wörtern stets wird fragen müssen, ob sie denn nun umgangssprachlich gemeint sind oder vielmehr bereits durch eine Definition auf eine mehr oder weniger andere und viel genauere Bedeutung festgelegt wurden. Um hier zu helfen, habe ich mir große Mühe mit dem Index gegeben, den Sie ganz am Schluß dieses Skriptums finden und in dem alle an verschiedenen Stellen eingeführten oder umgewidmeten und dort fett gedruckten Begriffe verzeichnet sein sollten. Und an dieser Stelle muß ich Sie schon bitten, das Wort „Index“ nicht als Laufindex mißzuverstehen!

*Beispiel* 1.1.10. In der  $\sum$ -Notation liest sich der in 1.1.7 gegebene Beweis so:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} \\ &\text{und nach Indexwechsel } i = n + 1 - k \text{ hinten} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{2} \\ &\text{dann mache } k \text{ zu } i \text{ in der zweiten Summe} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{2} \\ &\text{und nach Zusammenfassen beider Summen} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n+1}{2} \\ &\text{ergibt sich offensichtlich} \\ &= n \left( \frac{n+1}{2} \right) \end{aligned}$$

*Beispiel* 1.1.11. Einen anderen Beweis derselben Formel liefert die folgende von der Mitte ausgehend zu entwickelnde Gleichungskette:

$$(n+1)^2 = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 - i^2 = \sum_{i=0}^n 2i + 1 = 2 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1 = n + 1 + 2 \sum_{i=0}^n i$$

**Definition 1.1.12.** In einer ähnlichen Bedeutung wie das Symbol  $\sum$  verwendet

man auch das Symbol  $\prod$ , ein großes griechisches  $P$ , für „Produkt“ und schreibt

$$\prod_{i=1}^n a_i := a_1 a_2 \dots a_n$$

Die  $a_1, \dots, a_n$  heißen in diesem und ähnlichen Zusammenhängen die **Faktoren** des Produkts.

**Definition 1.1.13.** Für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  definieren wir die Zahl  $n!$  (sprich:  $n$  **Fakultät**) durch die Formel

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

Wir treffen zusätzlich die Vereinbarung  $0! := 1$  und haben also  $0! = 1$ ,  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$  und so weiter.

1.1.14 (**Allgemeinere Summen und Produkte**). Wir vereinbaren, daß Produkten, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 1 zugewiesen werden soll, also etwa  $1 = \prod_{i=1}^0 i = 0!$ . Ebenso vereinbaren wir auch, daß Summen, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 0 zugewiesen werden soll, so daß wir in Erweiterung unserer Formel 1.1.1 etwa schreiben könnten  $0 = \sum_{i=1}^0 i$ . Der Sinn dieser Erweiterungen zeigt sich darin, daß damit Formeln wie  $\sum_{i=k}^l a_i = \sum_{i=k}^m a_i + \sum_{i=m+1}^l a_i$  auch für  $m = k - 1$  richtig bleiben. Man mag sogar noch weiter gehen und die Definition von Summen und Produkten auf beliebige untere und obere Grenzen so erweitern, daß diese Formeln richtig bleiben, zumindest wenn alle Summanden ein Negatives beziehungsweise alle Faktoren einen Kehrwert haben. In dieser Allgemeinheit ist die fragliche Notation jedoch nur beim kontinuierlichen Analogon  $\int$  des Summenzeichens üblich, wie in [AN1] 4.2.10 ausgeführt werden wird.

**Satz 1.1.15 (Bedeutung der Fakultät).** *Es gibt genau  $n!$  Möglichkeiten,  $n$  voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.*

*Beispiel 1.1.16.* Es gibt genau  $3! = 6$  Möglichkeiten, die drei Buchstaben  $a, b$  und  $c$  in eine Reihenfolge zu bringen, nämlich

$$\begin{array}{l} abc \quad bac \quad cab \\ acb \quad bca \quad cba \end{array}$$

In gewisser Weise stimmt unser Satz sogar für  $n = 0$ : In der Terminologie, die wir in [AN1] 1.3 einführen, gibt es genau eine Anordnung der leeren Menge.

*Beweis.* Hat man  $n$  voneinander verschiedene Objekte, so hat man  $n$  Möglichkeiten, ein Erstes auszusuchen, dann  $(n-1)$  Möglichkeiten, ein Zweites auszusuchen und so weiter, bis schließlich nur noch eine Möglichkeit bleibt, ein Letztes auszusuchen. Insgesamt haben wir also wie behauptet  $n!$  mögliche Reihenfolgen.  $\square$

**Definition 1.1.17.** Wir definieren für beliebiges  $n$  und jede natürliche Zahl  $k$  den **Binomialkoeffizienten**  $\binom{n}{k}$  (sprich:  $n$  über  $k$ ) durch die Regeln

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \text{ für } k \geq 1 \text{ und } \binom{n}{0} := 1.$$

Der Sonderfall  $k=0$  wird im Übrigen auch durch unsere allgemeine Formel gedeckt, wenn wir unsere Konvention 1.1.14 beherzigen. Im Lichte des folgenden Satzes schlage ich vor, die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  statt „ $n$  über  $k$ “ inhaltsreicher „ $k$  aus  $n$ “ zu sprechen.

1.1.18. Die Bezeichnung als Binomialkoeffizienten leitet sich von dem Auftreten dieser Zahlen als Koeffizienten in der „binomischen Formel“ 1.1.23 ab.

**Satz 1.1.19 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten).** *Gegeben natürliche Zahlen  $n$  und  $k$  gibt es genau  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten, aus  $n$  voneinander verschiedenen Objekten  $k$  Objekte auszuwählen.*

*Beispiel 1.1.20.* Es gibt genau  $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$  Möglichkeiten, aus den vier Buchstaben  $a, b, c, d$  Zwei auszuwählen, nämlich

$$\begin{array}{l} a, b \quad b, c \quad c, d \\ a, c \quad b, d \\ a, d \end{array}$$

*Beweis.* Wir haben  $n$  Möglichkeiten, ein erstes Objekt auszuwählen, dann  $n-1$  Möglichkeiten, ein zweites Objekt auszuwählen, und so weiter, also insgesamt  $n(n-1)\dots(n-k+1)$  Möglichkeiten,  $k$  Objekte *der Reihe nach* auszuwählen. Auf die Reihenfolge, in der wir ausgewählt haben, kommt es uns aber gar nicht an, jeweils genau  $k!$  von unseren  $n(n-1)\dots(n-k+1)$  Möglichkeiten führen nach 1.1.15 also zur Auswahl derselben  $k$  Objekte. Man bemerke, daß unser Satz auch im Extremfall  $k=0$  noch stimmt, wenn wir ihn geeignet interpretieren: In der Terminologie, die wir gleich einführen werden, besitzt in der Tat jede Menge genau eine nullelementige Teilmenge, nämlich die leere Menge.  $\square$

1.1.21. Offensichtlich gilt für alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $n \geq k$  die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$



Das folgt einerseits sofort aus der formalen Definition und ist andererseits auch klar nach der oben erklärten Bedeutung der Binomialkoeffizienten: Wenn wir aus  $n$  Objekten  $k$  Objekte auswählen, so bleiben  $n - k$  Objekte übrig. Es gibt demnach gleichviele Möglichkeiten,  $k$  Objekte auszuwählen, wie es Möglichkeiten gibt,  $n - k$  Objekte auszuwählen. Wir haben weiter  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$  für jede natürliche Zahl  $n \geq 0$  sowie  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$  für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$ .

**Definition 1.1.22.** Wie in der Schule setzen wir  $a^k := \prod_{i=1}^k a$  und sprechen diesen Ausdruck „ $a$  hoch  $k$ “. In Worten ist also gemeint „das Produkt von  $k$ -mal dem Faktor  $a$ “. Im Lichte von 1.1.14 verstehen wir insbesondere  $a^0 := 1$ .

**Satz 1.1.23.** Für jede natürliche Zahl  $n$  gilt die **binomische Formel**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.1.24. Man beachte, wie wichtig unsere Konvention  $a^0 = 1$  und insbesondere auch ihr Spezialfall  $0^0 = 1$  für die Gültigkeit dieser Formel ist.

1.1.25. Die Bezeichnung „binomische Formel“ leitet sich ab von der Vorsilbe „bi“ für Zwei, wie etwa in englisch „bicycle“ für „Zweirad“ alias „Fahrrad“, und dem lateinischen Wort „nomen“ für „Namen“. Mit den beiden „Namen“ sind hier  $a$  und  $b$  gemeint. Mehr dazu wird in [AN1] 2.3.18 erklärt.

*Erster Beweis.* Beim Ausmultiplizieren erhalten wir das Monom  $a^k b^{n-k}$  so oft, wie es Möglichkeiten gibt, aus unseren  $n$  Faktoren  $(a + b)$  die  $k$  Faktoren auszusuchen, „in denen wir beim Ausmultiplizieren das  $a$  nehmen“. Dieses Argument werden wir in [GR] 1.2.12 noch besser formulieren.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Dieser Beweis ist eine ausgezeichnete Übung im Umgang mit unseren Symbolen und mit der vollständigen Induktion. Er scheint mir jedoch auch in einer für Beweise durch vollständige Induktion typischen Weise wenig durchsichtig. Zunächst prüfen wir für beliebiges  $n$  und jede natürliche Zahl  $k \geq 1$  die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

durch explizites Nachrechnen. Dann geben wir unserer Formel im Satz den Namen  $A(n)$  und prüfen die Formel  $A(0)$  und zur Sicherheit auch noch  $A(1)$  durch Hinsehen. Schließlich gilt es, den Induktionsschritt durchzuführen, als da heißt,

$A(n+1)$  aus  $A(n)$  zu folgern. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
 &\text{und mit der Induktionsvoraussetzung} \\
 &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &\text{und durch Ausmultiplizieren} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
 &\text{und Indexwechsel } k = i - 1 \text{ in der ersten Summe} \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
 &\text{dann mit } k \text{ statt } i \text{ und Absondern von Summanden} \\
 &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
 &\text{und nach Zusammenfassen der mittleren Summen} \\
 &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
 &\text{und Einbeziehen der abgesonderten Summanden} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

und folgern so tatsächlich  $A(n+1)$  aus  $A(n)$ . □

1.1.26. Die Formel  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$  für  $k \geq 1$  kann man zur effektiven Berechnung der Binomialkoeffizienten mit dem sogenannten **Pascal'schen Dreieck** benutzen: Im Schema

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
 \end{array}$$

seien die Einsen an den Rändern vorgegeben und eine Zahl in der Mitte berechne sich als die Summe ihrer beiden oberen „Nachbarn“. Dann stehen in der  $(n+1)$ -ten Zeile der Reihe nach die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \dots$ , bis  $\binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1$ . Wir haben also zum Beispiel nach der untersten Zeile in obigem Ausschnitt des Pascal'schen Dreiecks

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

## Übungen

*Ergänzende Übung 1.1.27.* Man zeige: Ist  $p$  eine Primzahl und  $n$  nicht durch  $p$  teilbar und  $e \geq 0$  eine natürliche Zahl, so ist

$$\binom{p^e n}{p^e}$$

auch nicht durch  $p$  teilbar. Hinweis: Man möge bei der Lösung dieser Übung bereits die Erkenntnis verwenden, daß eine Primzahl ein Produkt nur teilen kann, wenn sie einen der Faktoren teilt. Ein Beweis dieser Tatsache wird in [LA1] 4.4.15 nachgeholt.

*Übung 1.1.28.* Man finde und beweise eine Formel für  $\sum_{i=1}^n i^2$ . Hinweis: Man suche zunächst eine Formel für  $\sum_{i=1}^n i^3 - (i-1)^3$  und beachte  $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$ .

*Ergänzende Übung 1.1.29.* Man zeige, daß für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Formel der Gestalt  $\sum_{i=1}^n i^k = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$  gilt mit  $a_k \in \mathbb{Q}$ .

## 1.2 Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff

1.2.1. Ich beginne mit einigen Beispielen für eine mathematische Struktur, die ihnen im weiteren Verlauf des Studiums als „Vektorraum“ geläufig werden wird.

*Beispiel 1.2.2.* Die **Fibonacci-Folge**

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

entsteht, indem man mit  $f_0 = 0$  und  $f_1 = 1$  beginnt und dann jedes weitere Folgenglied als die Summe seiner beiden Vorgänger bildet, in Formeln

$$f_{i+2} := f_{i+1} + f_i$$

Wir suchen nun für die Glieder  $f_i$  dieser Folge eine geschlossene Darstellung. Dazu vereinbaren wir, daß wir Folgen  $x_0, x_1, x_2, \dots$  mit  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$  für  $n = 2, 3, 4, \dots$  **Folgen vom Fibonacci-Typ** nennen wollen. Kennen wir die beiden ersten Glieder einer Folge vom Fibonacci-Typ, so legt das natürlich bereits die gesamte Folge fest. Nun bemerken wir, daß für jede Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  vom Fibonacci-Typ und jedes  $\alpha$  auch die Folge  $\alpha x_0, \alpha x_1, \alpha x_2, \dots$  vom Fibonacci-Typ ist, und daß für jede weitere Folge  $y_0, y_1, y_2, \dots$  vom Fibonacci-Typ auch die gliedweise Summe  $(x_0 + y_0), (x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \dots$  eine Folge vom Fibonacci-Typ ist. Der Trick ist dann, danach zu fragen, für welche  $\beta$  die Folge  $x_i := \beta^i$  vom Fibonacci-Typ ist. Das ist ja offensichtlich genau dann der Fall, wenn gilt

$\beta^2 = \beta + 1$ , als da heißt für  $\beta_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ . Für beliebige  $c, d$  ist mithin die Folge

$$x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$$

vom Fibonacci-Typ, und wenn wir  $c$  und  $d$  bestimmen mit  $x_0 = 0$  und  $x_1 = 1$ , so ergibt sich eine explizite Darstellung unserer Fibonacci-Folge. Wir suchen also  $c$  und  $d$  mit

$$\begin{aligned} 0 &= c + d \\ 1 &= c\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right) + d\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right) \end{aligned}$$

und folgern leicht  $c = -d$  und  $1 = c\sqrt{5}$  alias  $c = 1/\sqrt{5} = -d$ . Damit ergibt sich schließlich für unsere ursprüngliche Fibonacci-Folge die explizite Darstellung

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^i$$

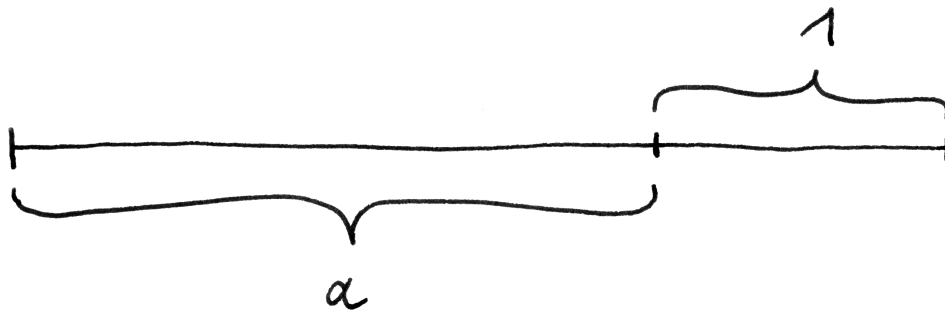
Im übrigen ist der zweite Summand hier immer kleiner als  $1/2$ , so daß wir  $f_i$  auch beschreiben können als diejenige ganze Zahl, die am nächsten am ersten Summanden liegt. Es wäre rückblickend natürlich ein Leichtes gewesen, diese Formel einfach zu „raten“, um sie dann mit vollständiger Induktion 1.1.1 zu beweisen. Diese Art mathematischer Zaubertricks halte ich jedoch für unehrenhaft. Ich denke, unsere Aufgabe als Mathematiker besteht darin, Verständnis zu erzeugen und nicht Bewunderung. Ich werde deshalb stets nach Kräften versuchen, das Tricksen zu vermeiden, auch wenn die Beweise dadurch manchmal etwas länger werden sollten. Eine Möglichkeit, auch den letzten verbleibenden Trick aus den vorhergehenden Überlegungen zu eliminieren, zeigt [LA1] 5.5.18. Die bei unserer Lösung auftretende reelle Zahl  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  ist im Übrigen auch bekannt als „goldener Schnitt“ aus Gründen, die in nebenstehendem Bild diskutiert werden. In [AN1] 2.7.15 dürfen Sie dann zur Übung zeigen, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den goldenen Schnitt strebt, daß also genauer und in Formeln für unsere Fibonacci-Folge  $f_0, f_1, f_2, \dots$  von oben gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

*Beispiel 1.2.3.* Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 7z &= 0 \\ 4x + y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

Wie man die Menge  $L$  aller Lösungen  $(x, y, z)$  ermittelt, sollen sie später in dieser Vorlesung lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:



Der **goldene Schnitt** ist das Verhältnis, in dem eine Strecke geteilt werden muß, damit das Verhältnis vom größeren zum kleineren Stück gleich dem Verhältnis des Ganzen zum größeren Stück ist, also die positive Lösung der Gleichung  $a/1 = (1+a)/a$  alias  $a^2 - a - 1 = 0$ , also  $a = (1 + \sqrt{5})/2$ .

1. Sind  $(x, y, z)$  und  $(x', y', z')$  Lösungen, so ist auch ihre komponentenweise Summe  $(x + x', y + y', z + z')$  eine Lösung;
2. Ist  $(x, y, z)$  eine Lösung und  $\alpha$  eine reelle Zahl, so ist auch das komponentenweise Produkt  $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$  eine Lösung.

*Beispiel 1.2.4.* Wir betrachten die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die zweimal differenzierbar sind und der Differentialgleichung

$$f'' = -f$$

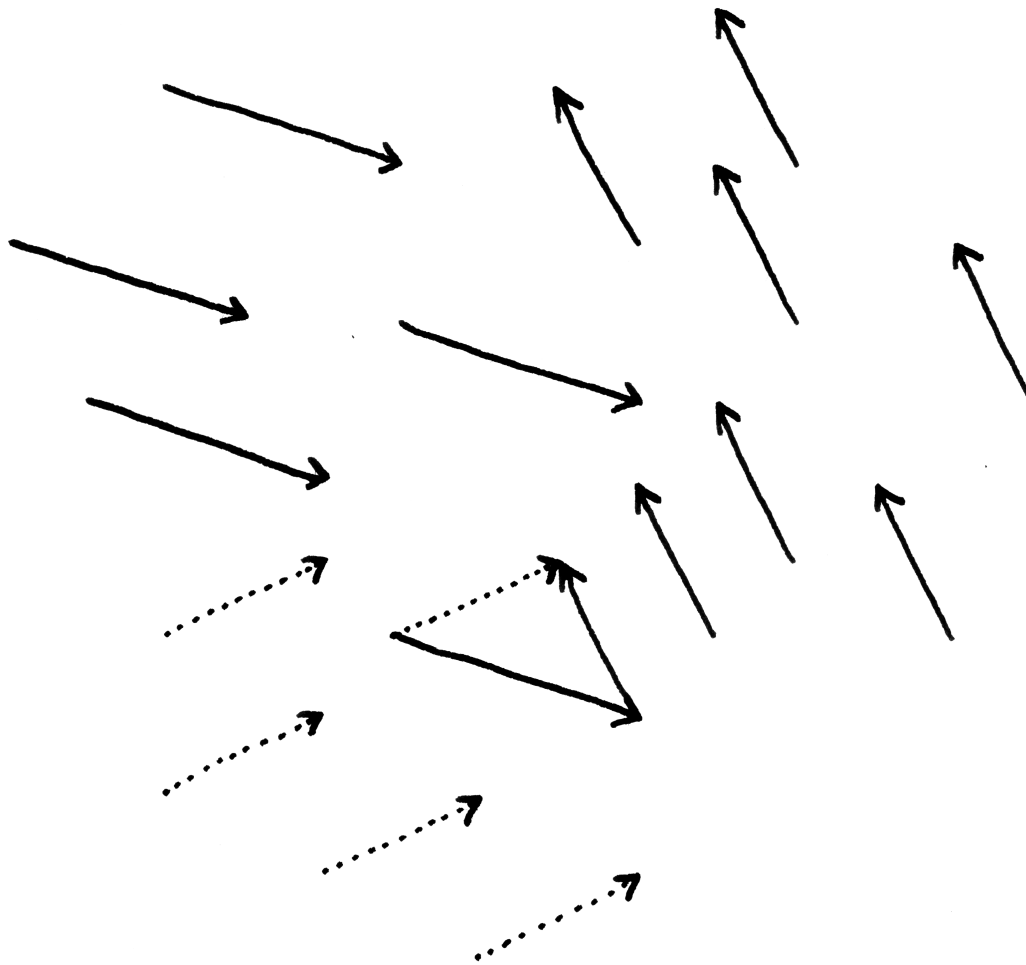
genügen. Lösungen sind zum Beispiel die Funktionen  $\sin, \cos$ , die Nullfunktion oder auch die Funktionen  $f(x) = \sin(x+a)$  für konstantes  $a$ . Wie man die Menge  $L$  aller Lösungen beschreiben kann, sollen Sie in der Analysis lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:

1. Mit  $f$  und  $g$  ist auch die Funktion  $f + g$  eine Lösung;
2. Ist  $f$  eine Lösung und  $\alpha$  eine reelle Zahl, so ist auch  $\alpha f$  eine Lösung.

*Beispiel 1.2.5.* Wir betrachten die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafel Ebene. Graphisch stellen wir solch eine Parallelverschiebung dar durch einen Pfeil von irgendeinem Punkt zu seinem Bild unter der Verschiebung. Im nebenstehenden Bild stellen etwa alle gepunkteten Pfeile dieselbe Parallelverschiebung dar. Was für ein Ding diese Gesamtheit  $P$  aller Parallelverschiebungen eigentlich ist, scheint mir recht undurchsichtig, aber einiges ist a priori klar:

1. Sind  $p$  und  $q$  Parallelverschiebungen, so ist auch ihre „Hintereinanderausführung“  $p \circ q$ , sprich „ $p$  nach  $q$ “, eine Parallelverschiebung.
2. Ist  $\alpha$  eine reelle Zahl und  $p$  eine Parallelverschiebung, so können wir eine neue Parallelverschiebung  $\alpha p$  bilden, das „ $\alpha$ -fache von  $p$ “. Bei negativen Vielfachen vereinbaren wir hierzu, daß damit eine entsprechende Verschiebung in die Gegenrichtung gemeint ist.
3. Führen wir eine neue Notation ein und schreiben für die Hintereinanderausführung  $p \dot{+} q := p \circ q$ , so gelten für beliebige Parallelverschiebungen  $p, q, r$  der Tafel Ebene und beliebige reelle Zahlen  $\alpha, \beta$  die Formeln

$$\begin{aligned}
 (p \dot{+} q) \dot{+} r &= p \dot{+} (q \dot{+} r) \\
 p \dot{+} q &= q \dot{+} p \\
 \alpha(\beta p) &= (\alpha\beta)p \\
 (\alpha + \beta)p &= (\alpha p) \dot{+} (\beta p) \\
 \alpha(p \dot{+} q) &= (\alpha p) \dot{+} (\alpha q)
 \end{aligned}$$



Die Hintereinanderausführung der beiden Parallelverschiebungen der Tafel- oder hier vielmehr der Papierebene, die durch die durchgezogenen Pfeile dargestellt werden, wird die durch die gepunkteten Pfeile dargestellt.

Will man sich die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafel Ebene anschaulich machen, so tut man im Übrigen gut daran, einen Punkt als „Ursprung“ auszuzeichnen und jede Parallelverschiebung mit dem Punkt der Tafel Ebene zu identifizieren, auf den unsere Parallelverschiebung diesen Ursprung abbildet.

*Beispiel 1.2.6.* Analoges gilt für die Gesamtheit der Parallelverschiebung des Raums unserer Anschauung und auch für die Gesamtheit aller Verschiebungen einer Geraden und, mit noch mehr Mut, für die Gesamtheit aller Zeitspannen.

1.2.7. Die Formeln unserer kleinen Formelsammlung von 1.2.5.3 gelten ganz genauso auch für die Lösungsmenge unserer Differentialgleichung  $f'' = -f$ , wenn wir  $f \dot{+} g := f + g$  verstehen, für die Lösungsmenge unseres linearen Gleichungssystems, wenn wir

$$(x, y, z) \dot{+} (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z')$$

als „komponentenweise Addition“ verstehen, und für die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ, wenn wir ähnlich die Summe  $\dot{+}$  zweier Folgen erklären. Ein wesentliches Ziel der Vorlesungen über lineare Algebra ist es, einen abstrakten Formalismus aufzubauen, dem sich alle diese Beispiele unterordnen. Dadurch soll Zweierlei erreicht werden:

1. Unser abstrakter Formalismus soll uns dazu verhelfen, die uns als Augentieren und Nachkommen von Ästehüpfern angeborne räumliche Anschauung nutzbar zu machen zum Verständnis der bis jetzt gegebenen Beispiele und der vielen weiteren Beispiele von Vektorräumen, denen Sie im Verlauf Ihres Studiums noch begegnen werden. So werden sie etwa lernen, daß man sich die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ durchaus als Ebene vorstellen darf und die Menge aller Folgen mit einem vorgegebenem Folgenglied an einer vorgegebenen Stelle als eine Gerade in dieser Ebene. Suchen wir also alle Folgen vom Fibonacci-Typ mit zwei vorgegebenen Folgengliedern, so werden wir im allgemeinen genau eine derartige Lösung finden, da sich eben zwei Geraden aus einer Ebene im allgemeinen in genau einem Punkt schneiden. In diesem Licht betrachtet soll der abstrakte Formalismus uns also helfen, a priori unanschauliche Fragestellungen der Anschauung zugänglich zu machen. Ich denke, diese Nähe zur Anschauung ist auch der Grund dafür, daß die lineare Algebra meist an den Anfang des Studiums gestellt wird: Von der Schwierigkeit des Formalismus her gesehen gehört sie nämlich keineswegs zu den einfachsten Gebieten der Mathematik. Hier würde ich eher an Gruppentheorie oder Graphentheorie oder dergleichen denken.

2. Unser abstrakter Formalismus soll so unmißverständlich sein und seine Spielregeln so klar, daß Sie in die Lage versetzt werden, alles nachzuvollziehen und mir im Prinzip und vermutlich auch in der Realität Fehler nachzuweisen. Schwammige Begriffe wie „Tafel Ebene“ oder „Parallelverschiebung des Raums“ haben in



einem solchen Formalismus keinen Platz mehr. In diesem Licht betrachtet verfolgen wir mit dem Aufbau des abstrakten Formalismus auch das Ziel einer großen Vereinfachung durch die Reduktion auf die Beschreibung einiger weniger Aspekte der uns umgebenden in ihrer Komplexität schwer faßbaren Wirklichkeit.

Die lineare Algebra hat in meinen Augen mindestens drei wesentliche Aspekte: Einen **geometrischen Aspekt**, wie ihn das Beispiel 1.2.5 der Gesamtheit aller Parallelverschiebungen illustriert; einen **algorithmischen Aspekt**, unter den ich das Beispiel 1.2.3 der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems und insbesondere explizite Verfahren zur Bestimmung dieser Lösungsmenge einordnen würde; und einen **abstrakt-algebraischen Aspekt**, zu dem etwa die folgende Definition 1.2.8 gehört, eine Art gedankliches Skelett, das Algorithmik und Geometrie verbindet und Brücken zu vielen weiteren Anwendungen schafft, die man dann als das Fleisch auf diesem Gerippe ansehen mag. Ich will im Verlauf meiner Vorlesungen zur linearen Algebra versuchen, diese drei Aspekte zu einer Einheit zu fügen. Ich hoffe, daß Sie dadurch in die Lage versetzt werden, eine Vielzahl von Problemen mit den verbundenen Kräften Ihrer räumlichen Anschauung, Ihrer algorithmischen Rechenfähigkeiten und Ihres abstrakt-logischen Denkens anzugehen. Als Motivation für den weiteren Fortgang der Vorlesungen über lineare Algebra beschreibe ich nun das „Rückgrat unseres Skeletts“ und formuliere ohne Rücksicht auf noch unbekannte Begriffe und Notationen die abstrakte Definition eines reellen Vektorraums.

**Definition 1.2.8.** Ein **reeller Vektorraum** ist ein Tripel bestehend aus den folgenden drei Dingen:

1. Einer Menge  $V$ ;
2. Einer Verknüpfung  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(v, w) \mapsto v \dot{+} w$ , die die Menge  $V$  zu einer abelschen Gruppe macht;
3. Einer Abbildung  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ ,  $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$ ,

derart, daß für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und alle  $v, w \in V$  gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta v) &= (\alpha\beta)v \\ (\alpha + \beta)v &= (\alpha v) \dot{+} (\beta v) \\ \alpha(v \dot{+} w) &= (\alpha v) \dot{+} (\alpha w) \\ 1v &= v \end{aligned}$$

Hier ist nun viel zu klären: Was ist eine Menge? Eine Verknüpfung? Eine abelsche Gruppe? Eine Abbildung? Was bedeuten die Symbole  $\times$ ,  $\rightarrow$ ,  $\mapsto$ ,  $\in$ ,  $\mathbb{R}$ ? Wir beginnen in der nächsten Vorlesung mit der Klärung dieser Begriffe und Notationen.

1.2.9. Bereits hier will ich die Symbole  $\alpha$  und  $\beta$  erklären: Sie heißen „Alpha“ und „Beta“ und sind die beiden ersten Buchstaben des griechischen Alphabets, das ja hinwiederum selbst nach ihnen benannt ist. Bei der Darstellung von Mathematik hilft es, viele verschiedene Symbole und Symbolfamilien zur Verfügung zu haben. Insbesondere werden die griechischen Buchstaben oft und gerne verwendet. Ich schreibe deshalb hier zum Nachschlagen das griechische Alphabet auf. In der ersten Spalte stehen der Reihe nach die griechischen Kleinbuchstaben, dahinter die zugehörigen Großbuchstaben, dann ihr lateinisches Analogon soweit vorhanden, und schließlich, wie man diesen griechischen Buchstaben auf Deutsch benennt und spricht.

$\alpha$	A	a	alpha
$\beta$	B	b	beta
$\gamma$	$\Gamma$	g	gamma
$\delta$	$\Delta$	d	delta
$\epsilon, \varepsilon$	E	e	epsilon
$\zeta$	Z	z	zeta
$\eta$	H	ä	eta
$\theta, \vartheta$	$\Theta$	th	theta
$\iota$	I	i	iota
$\kappa$	K	k	kappa
$\lambda$	$\Lambda$	l	lambda
$\mu$	M	m	my, sprich „mü“
$\nu$	N	n	ny, sprich „nü“
$\xi$	$\Xi$	x	xi
$o$	O	o	omikron, „kurzes o“
$\pi$	$\Pi$	p	pi
$\rho, \varrho$	P	r	rho
$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	s	sigma
$\tau$	T	t	tau
$\upsilon$	$\Upsilon$	y	ypsilon
$\phi, \varphi$	$\Phi$	f	phi
$\chi$	X	ch	chi
$\psi$	$\Psi$	ps	psi
$\omega$	$\Omega$	oh	omega, „langes o“

## Übungen

*Übung 1.2.10.* Ein Kredit von 10000 Euro wird am Ende jeden Jahres mit einem jährlichen Zinssatz von 5% auf die jeweilige Restschuld verzinst und der Kreditnehmer zahlt zu Beginn jeden Jahres 1000 Euro zurück. Man finde eine geschlossene Formel für die Restschuld am Ende des  $n$ -ten Jahres. Hinweis: Man mag es

mit dem Ansatz  $x_n = c\beta^n + \alpha$  versuchen.

*Übung 1.2.11.* Kann man für jede Folge  $x_0, x_1, \dots$  vom Fibonacci-Typ Zahlen  $c, d$  finden mit  $x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$  für alle  $i$ ? Finden Sie eine geschlossene Darstellung für die Glieder der Folge, die mit  $0, 0, 1$  beginnt und dem Bildungsgesetz  $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$  gehorcht.

*Übung 1.2.12.*      Wer Alles mit  $\varphi$ l  $\mu$  ka $\pi$ rt, hat eine g $\rho$ \beta $\eta$ t g $\eta$ n.  
Wer Hausis nur ko $\pi$ rt, steht am P $\rho$ \beta g hintan.

Gestern standen wir noch vor einem tiefen Abgrund,  
aber heute haben wir einen g $\rho$ \betaen Schritt nach vorne g $\eta$ n

Liebe ist, wenn sich der  $\tau$ sendste Kuss noch wie der erste an $\varphi$ lt.

Nach dem Takt, den man t $\rho$ mmelt, wird auch g $\eta$ nzt.

Vorg $\eta$ n und nach $\beta$ cht  
hat manchem schon g $\rho$ \beta Leid gebracht.

Was mit wenigem abg $\eta$ n werden kann,  
muss nicht mit  $\varphi$ lem g $\eta$ n werden.

Als ich eine  $\rho$ se brach,  
und mir in den  $\varphi$ nger stach. . .

$\tau$ send Freunde sind zu wenig,  
ein Feind jedoch ist zu  $\varphi$ l

## Literatur

[AN1] *Skriptum Analysis 1*, Wolfgang Soergel.

[GR] *Skriptum Grundlagen*, Wolfgang Soergel.

[LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*, Wolfgang Soergel.

## **Indexvorwort**

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das  $\cup$  dem Buchstaben u oder das  $\subset$  dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa  $\zeta$  unter z und  $\omega$  unter o.

## Index

□ Beweisende, 3

$n!$  Fakultät, 7

$\binom{n}{k}$  Binomialkoeffizient, 8

$=:$  wird definiert als, 4

$:=$  ist definiert durch, 4

$a^k$  Potenz, 9

∏ Produkt

von Zahlen, 7

∑ Summe

von Zahlen, 4

Alphabet, griechisches, 18

Binomialkoeffizienten, 8

binomische Formel, 9

Definition, 6

Faktoren, 7

Fakultät, 7

Fibonacci-Folge, 11

goldener Schnitt, 13

griechisches Alphabet, 18

Induktion, vollständige, 3

Induktionsannahme, 3

Induktionsbasis, 3

Induktionsschritt, 3

Induktionsvoraussetzung, 3

Laufindex, 4

∏ Produkt

von Zahlen, 7

Pascal'sches Dreieck, 10

reeller Vektorraum, 17

∑ Summe

von Zahlen, 4

Summanden, 4