FUNKTIONENTHEORIE 1

Wolfgang Soergel

16. August 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Holomorphe Funktionen

1.1 Komplexe Differenzierbarkeit

1.1.1. Zunächst einmal bitte ich den Leser, sich die in [LA1] 3.1 eingeführten Grundlagen zum Rechnen mit komplexen Zahlen sowie Abschnitt [AN1] 3.4 zur komplexen Exponentialfunktion in Erinnerung zu rufen. Je nach Vorbildung mag es eine gute Idee sein, die Vorlesung mit einer Wiederholung dieser Abschnitte und insbesondere auch einer Diskussion der Integration rationaler Funktionen [AN1] 4.10 zu beginnen.

1.1.2. Eine grundlegende Schwierigkeit beim Durchdringen der Funktionentheorie scheint mit zu sein, daß gleichzeitig zwei sehr verschiedene Arten von Funktionen betrachtet werden:

1. Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oder allgemeiner Funktionen $I \to \mathbb{C}$ für mehrpunktige Intervalle $I \subset \mathbb{R}$, darunter insbesondere auch Funktionen $I \to \mathbb{R}$;

2. Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oder allgemeiner Funktionen $U \to \mathbb{C}$ für offene Teilmengen $U \Subset \mathbb{C}$.

Und dann ist es zu allem Überfluß so, daß man oft Kompositionen von Funktionen der Typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu betrachten hat und für deren Ableitung die Kettenregel braucht. Um so eine Regel in hinreichender Allgemeinheit bereitzustellen, führe ich im folgenden einen Begriff von „komplexer Differenzierbarkeit“ für Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit sehr allgemeinem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ ein, der insbesondere den Fall eines mehrpunktigen reellen Intervalls $D = I \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und den Fall einer offenen Teilmenge $D = U \Subset \mathbb{C}$ umfaßt, und beweise die Kettenregel in dieser Allgemeinheit. Im ersten Fall eines mehrpunktigen reellen Intervalls als Definitionsbereich bedeutet unsere im folgenden erklärte komplexe Differenzierbarkeit nur die reelle Differenzierbarkeit von Real- und Imaginärteil. Im zweiten Fall einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene als Definitionsbereich bedeutet sie jedoch viel stärker die Gültigkeit der „Cauchy-Riemann’schen Differentialgleichungen“, wie im darauffolgenden Abschnitt noch ausführlich besprochen werden soll.

1.1.3 (**Diskussion der Terminologie**). Andere Autoren erklären abweichend die „komplexe Differenzierbarkeit“ überhaupt nur für auf offenen Teilmengen $U \Subset \mathbb{C}$ erklärte komplexwertige Funktionen. In diesem Fall fällt er dann zusammen mit dem Begriff der „Holomorphie“, wie er in diesem Text verwendet wird.

Definition 1.1.4. Seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $p \in D$ ein Punkt. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **komplex differenzierbar bei p mit Ableitung** $b \in \mathbb{C}$, wenn p ein Häufungspunkt von D ist und es gilt

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch $f'(p) = b$ und nennen $f'(p)$ die **Ableitung** oder ausführlicher die **komplexe Ableitung** der Funktion f an der Stelle p.

1.1.5 (**Diskussion des Konzepts der komplexen Differenzierbarkeit**). Unter einem Häufungspunkt von D verstehen wir wie in [AN1] 6.8.1 einen Punkt $p \in D$ mit der Eigenschaft, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $z \in D$ gibt mit $0 < |z - p| < \varepsilon$. Der Grenzwert in 1.1.4 ist im Sinne von [AN1] 6.8.6 zu verstehen. Ausgeschrieben für unseren Spezialfall bedeutet $\lim_{z \to p} g(z) = b$ für $g : D \to \mathbb{C}$ also, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $0 < |z - p| < \delta \Rightarrow |g(z) - p| < \varepsilon$. Unsere Definition der komplexen Differenzierbarkeit ist identisch zu unserer Definition der „rellen Differenzierbarkeit" [AN1] 4.3.3 bis auf die Details, daß wir (1) überall statt reeller Zahlen komplexe Zahlen betrachten, daß wir (2) etwas allgemeinere Definitionsbereiche zulassen, und daß wir (3), wie im Komplexen üblich, die Variable mit z bezeichnen. Den Definitionsbereich unserer Funktion haben wir statt mit I hier mit D bezeichnet, weil neben dem Fall eines mehrpunktigen reellen Intervalls der Fall einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene besonders relevant sein wird. Im Fall eines mehrpunktigen reellen Intervalls stimmt die hier definierte Ableitung im übrigen überein mit der Ableitung im Sinne von [AN1] 8.2.1. Der Rest dieses Abschnitts besteht nun darin, unsere Resultate zur reellen Differenzierbarkeit mitsamt ihren Beweisen im Komplexen zu wiederholen.

1.1.6. Ich gebe noch einige alternative Formulierungen an. Ist $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $p \in D$ ein Häufungspunkt von D, so ist nach [AN1] 6.8.6 eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p mit Ableitung $b \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn es eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ gibt, die stetig ist bei p mit Funktionswert $\varphi(p) = b$ derart, daß für alle $z \in D$ gilt

$$f(z) = f(p) + (z - p)\varphi(z)$$

In anderen nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p mit Ableitung b genau dann, wenn gilt

$$f(p + h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$

für eine Funktion ε, die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Hier ist zu verstehen, daß die Funktion ε definiert sein soll auf der Menge aller h mit $h + p \in D$. Diese Formulierung hat den Vorteil, daß besonders gut zum Ausdruck kommt, inwiefern für festes p und kleines h der Ausdruck $f(p) + f'(p)h$

eine gute Approximation von $f(p+h)$ ist. Anschaulich wirkt f lokal um einen gegebenen Punkt p in erster Approximation wie eine Drehstreckung mit Zentrum in besagtem Punkt, deren Winkel und Streckfaktor durch $f'(p)$ beschrieben werden, gefolgt von einer Verschiebung um $f(p)$.

Beispiele 1.1.7. Eine konstante Funktion auf einer Menge von komplexen Zahlen ist bei jedem Häufungspunkt besagter Menge komplex differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ hat bei jedem Punkt p die Ableitung $\mathrm{id}'(p) = 1$. Ist $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $p \in D$ und $E \subset D$ eine Teilmenge, für die p auch ein Häufungspunkt ist, so ist auch $f|_E$ komplex differenzierbar bei p mit derselben Ableitung.

Beispiele 1.1.8. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist komplex differenzierbar bei $p \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn sie dort reell differenzierbar ist. Ihre Ableitung stimmt in diesem Fall mit der üblichen Ableitung aus [AN1] 4.3.3 überein. Ist allgemeiner $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge, so ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar genau dann, wenn sie differenzierbar ist als raumwertige Abbildung im Sinne von [AN1] 8.2.1. Die Ableitung stimmt in diesem Fall mit der üblichen Ableitung aus [AN1] 8.2.1 überein.

Lemma 1.1.9. *Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist komplex differenzierbar bei jedem Punkt von $\mathbb{C}^\times$ und ihre Ableitung bei einer Stelle $p \in \mathbb{C}^\times$ ist $-\frac{1}{p^2}$.*

Beweis. Wir rechnen $\lim_{z \to p} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{p}}{z - p} = \lim_{z \to p} \frac{-1}{zp} = -\frac{1}{p^2}$. □

Lemma 1.1.10. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $p \in D$, so ist f stetig bei p.*

Beweis. Das folgt sofort aus 1.1.6. □

Proposition 1.1.11 (Summenregel und Produktregel). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei einem Punkt $p \in D$. So sind auch die Funktionen $f + g$ und fg komplex differenzierbar bei p und es gilt*

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \textit{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

Beweis. Identisch zum Beweis im Reellen nach [AN1] 4.4.1. □

Definition 1.1.12. Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ definiert auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ und komplex differenzierbar bei jedem Punkt von D, so nennen wir f **komplex differenzierbar auf** D und nennen die Funktion $f' : D \to \mathbb{C}, p \mapsto f'(p)$ ihre **Ableitung**. Aus unseren Definitionen folgt insbesondere, daß unsere Menge D hier keine isolierten Punkte haben darf.

1.1.13. Für die Ableitungen komplex differenzierbarer Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich gelten mithin die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Korollar 1.1.14 (Ableiten ganzzahliger Potenzen). *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und unter der Voraussetzung $z \neq 0$ im Fall $n \leq 0$ ist die Ableitung der Funktion $z \mapsto z^n$ die Funktion $z \mapsto nz^{n-1}$.*

Beweis. Man zeigt das durch vollständige Induktion über n separat für $n \geq 0$ und $n \leq -1$ unter Verwendung der Regeln 1.1.7 für die Ableitung der Konstanten und der Funktion $z \mapsto z$, der Regel 1.1.9 für die Ableitung der Funktion $z \mapsto 1/z$ und der Produktregel 1.1.13. □

Satz 1.1.15 (Kettenregel). *Seien $D, E \subset \mathbb{C}$ Teilmengen und $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : E \to \mathbb{C}$ Funktionen und es gelte $f(D) \subset E$. Sei f komplex differenzierbar bei p und g komplex differenzierbar bei $f(p)$. So ist $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

Beweis. Identisch zum Beweis im Reellen nach [AN1] 4.4.6. Man beachte, daß nun rechts ein Produkt komplexer Zahlen steht. □

Beispiel 1.1.16. Wir berechnen für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $m \geq 1$ eine natürliche Zahl die Ableitung der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f : t \mapsto (t^2 + \lambda t + \mu)^m$ und erhalten mit der Kettenregel $f'(t) = (2t + \lambda)m(t^2 + \lambda t + \mu)^{m-1}$. Schalten wir noch eine differenzierbare Abbildung $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau \mapsto t(\tau)$ davor, so ergibt sich die Ableitung der zusammengesetzten Funktion wieder mit der Kettenregel zu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = (2t(\tau) + \lambda)m(t(\tau)^2 + \lambda t(\tau) + \mu)^{m-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

Proposition 1.1.17 (Quotientenregel). *Seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion ohne Nullstelle und $p \in D$ ein Punkt.*

1. *Ist f komplex differenzierbar bei p, so ist auch $z \mapsto 1/f(z)$ komplex differenzierbar bei p und hat dort die Ableitung $-f'(p)/f(p)^2$.*

2. *Ist zusätzlich $g : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p, so ist auch g/f komplex differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

Beweis. Teil 1 folgt sofort aus 1.1.9 mit der Kettenregel 1.1.15. Teil 2 folgt aus Teil 1 mit der Produktregel 1.1.11. □

Übungen

Übung 1.1.18. Ein komplexes Polynom hat bei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn auch seine Ableitung bei λ verschwindet.

1.2 Holomorphe Funktionen

1.2.1. Ich erinnere daran, daß eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ offen heißt, wenn sie mit jedem Punkt auch eine ganze Kreisscheibe um diesen Punkt umfaßt. Die Schreibweise $U \Subset \mathbb{C}$ deutet an, daß U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ sein soll.

Definition 1.2.2. Eine im Sinne von 1.1.4 komplex differenzierbare komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene heißt eine **holomorphe Funktion**.

1.2.3. Eine holomorphe Funktion ist in anderen Worten eine komplexwertige Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{C}$ derart, daß für alle $p \in U$ der Grenzwert

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$$

existiert. Er wird dann $f'(p)$ notiert, und die Funktion $f' : U \to \mathbb{C}$ heißt die **komplexe Ableitung von** f.

Vorschau 1.2.4. In 2.1.5 zeigen wir, daß die Ableitung einer holomorphen Funktion auch selbst wieder holomorph ist. Das steht in scharfem Kontrast zur Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, in der die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ja keineswegs stetig geschweige denn differenzierbar zu sein braucht.

1.2.5 (**Erste Beispiele für holomorphe Funktionen**). Nach 1.1 sind Summen, Produkte, Quotienten und Verknüpfungen holomorpher Funktionen stets wieder holomorph, wann immer sie sinnvoll definiert sind. Ebenfalls nach 1.1 holomorph sind konstante Funktionen und die Identität auf $\mathbb{C}$. Durch Anwenden der erlaubten Operationen erhalten wir so schon einen großen Vorrat holomorpher Funktionen. Insbesondere liefern alle Polynome in $\mathbb{C}[z]$ holomorphe Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$, und auch Quotienten polynomialer Funktionen holomorph auf dem Komplement der Nullstellenmenge ihres Nenners.

Proposition 1.2.6 (Holomorphie der Umkehrfunktion, schwache Form). *Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion mit stetiger nirgends verschwindender Ableitung ist das Bild $f(U)$ offen und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \to U$ holomorph mit der Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

1.2.7. Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ nennen wir eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine **biholomorphe Einbettung** genau dann, wenn sie injektiv ist mit offenem Bild $f(U) \Subset \mathbb{C}$ und wenn die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(U) \xrightarrow{\sim} U$ eine holomorphe Abbildung $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{C}$ liefert. Unsere Proposition besagt in dieser Terminologie, daß jede injektive holomorphe Funktion mit nirgends verschwindender Ableitung eine biholomorphe Einbettung ist. In 2.4.8 zeigen wir stärker, daß überhaupt jede injektive holomorphe Funktion eine biholomorphe Einbettung ist. Unser Beweis stützt sich aber auf die hier gegebene Proposition.

Vorschau 1.2.8. In 1.5.19 wird skizziert, wie man beim Beweis dieser Proposition vorgehen kann, wenn man den Umkehrsatz der Analysis nicht voraussetzen will.

Beweis. Per definitionem ist eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ stets reell differenzierbar im Sinne von [AN2] 1.2.2 und ihr Differential bei $p \in U$ ist die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{d}_p f = (f'(p)\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ in sich selber. Ist f' stetig ohne Nullstelle, so ist f offen nach dem Satz über die Umkehrabbildung [AN2] 3.1.2. Ist f zusätzlich injektiv, so ist mithin seine Umkehrabbildung stetig, ja sogar stetig differenzierbar, wie es auch in Übung [AN2] 3.1.13 bereits bemerkt wurde, und ihr Differential in $q = f(p)$ ist nach dem Satz über die Umkehrabbildung [AN2] 3.1.2 die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$(\mathrm{d}_q(f^{-1}) = (\mathrm{d}_p f)^{-1} = (f'(p)^{-1}\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

In anderen Worten gilt $f^{-1}(q+h) = f^{-1}(q)+f'(p)^{-1}h+\varepsilon(h)|h|$ für eine Funktion ε mit $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, und das bedeutet ja genau die komplexe Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion an der Stelle q sowie die Formel $(f^{-1})'(q) = f'(p)^{-1}$ für ihre Ableitung. □

Beispiel 1.2.9 (**Komplexe Wurzelfunktion**). Das Quadrieren liefert eine Bijektion zwischen der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil und der „geschlitzten Zahlenebene" $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$. Genauer erhalten wir ein kommutatives Diagramm aus Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}_{>0} \times (-\pi/2, \pi/2) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}
\end{array}$$

mit Polarkoordinaten $(r, \vartheta) \mapsto r\exp(\mathrm{i}\vartheta)$ in den Vertikalen, $(r, \vartheta) \mapsto (r^2, 2\vartheta)$ in der oberen Horizontalen und $z \mapsto z^2$ in der unteren Horizontalen, das die Stetigkeit der Umkehrabbildung in der unteren Horizontalen zeigt. Diese Umkehrfunktion ist also nach 1.2.6 eine holomorphe Funktion auf der geschlitzten Zahlenebene mit Ableitung $1/(2\sqrt{z})$. Ich erinnere auch daran, daß es nach [AN1] 3.4.25 keine „stetige Wurzelfunktion" auf ganz $\mathbb{C}$ geben kann.

1.2.10 (**Höhere komplexe Wurzelfunktionen**). In derselben Weise können auf dem Komplement der nichtpositiven reellen Achse $\mathbb{R}_{\leq 0}$ auch holomorphe höhere Wurzeln $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ erklärt werden als die Umkehrfunktionen geeigneter Einschränkungen der Potenzfunktionen $z \mapsto z^n$.

Lemma 1.2.11. *Die komplexe Exponentialfunktion ist holomorph und stimmt auf der ganzen komplexen Zahlenebene mit ihrer eigenen Ableitung überein.*

Beweis. Der Beweis des reellen Analogons [AN1] 4.4.9 kann wortwörtlich übernommen werden. □

Beispiel 1.2.12. Ist $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge derart, daß die komplexe Exponentialfunktion eine Injektion mit offenem Bild und stetiger Umkehrfunktion $\log : \exp(U) \to \mathbb{C}$ liefert, so nennt man $\log$ einen **Zweig des Logarithmus**. Nach unserem Satz 1.2.6 über die Holomorphie von Umkehrfunktionen ist jeder solche Zweig des Logarithmus holomorph mit Ableitung

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$

Im Spezialfall $U = \mathbb{R} + (-\pi, \pi)\,\mathrm{i}$ spricht man auch vom **Hauptzweig des Logarithmus**, den wir bereits in [AN1] 4.10.2 eingeführt und sogar noch auf die negative reelle Achse fortgesetzt hatten, allerdings in nur noch partiell stetiger Weise.

Satz 1.2.13. *Seien $U \Subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $U_\kappa \Subset \mathbb{C}$ ihr Bild unter der üblichen Identifikation $\kappa : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$. Gegeben stetig partiell differenzierbare reelle Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : U_\kappa \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(x + \mathrm{i}y) := u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

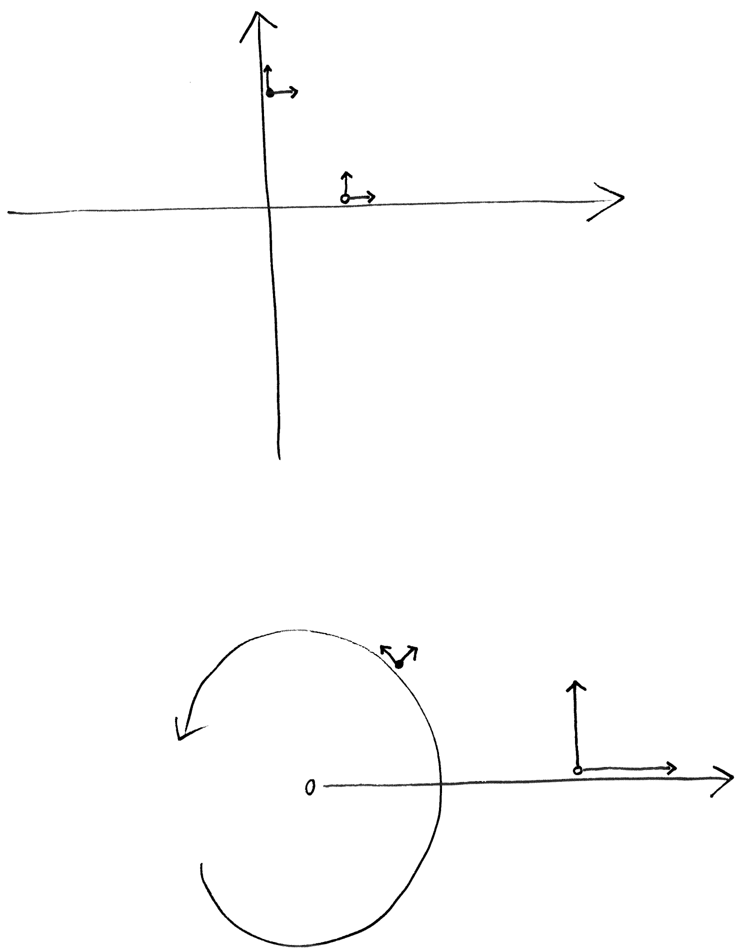
genau dann holomorph, wenn das Funktionenpaar (u, v) die sogenannten **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen** *erfüllt, die da lauten*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

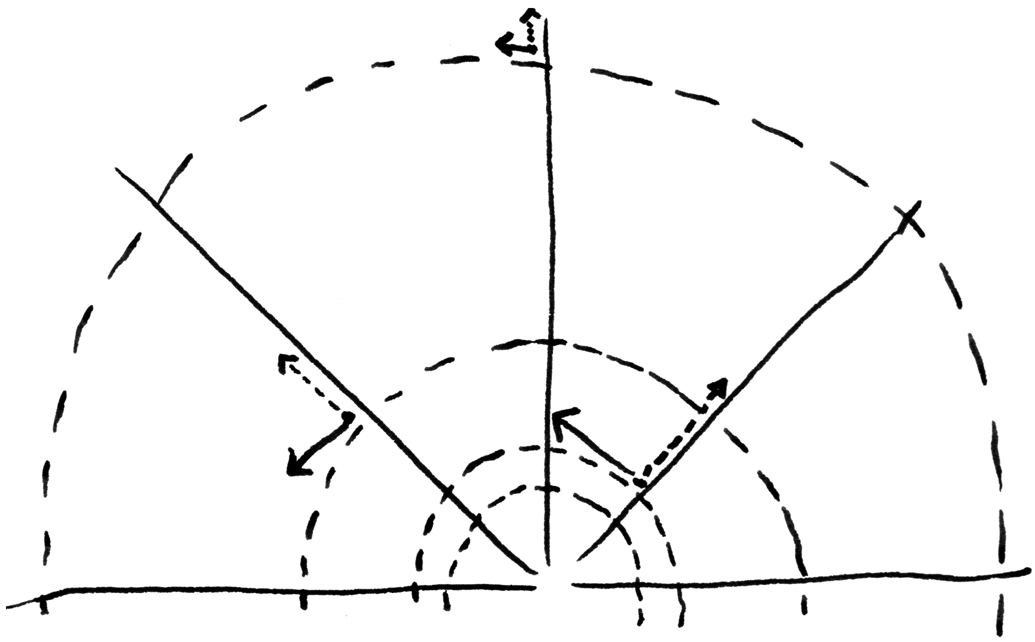
1.2.14. Man kann sich diese Gleichungen veranschaulichen als die Bedingung, daß an jeder Stelle der Gradient von v aus dem Gradienten von u hervorgeht durch die Drehung um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn.

1.2.15 (**Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, Variante**). Verwenden wir partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen wie in [AN2] 1.1.3 und nehmen der Einfachheit halber $\kappa = \mathrm{id}$ an, so können wir die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen auch zusammenfassen zur Gleichung

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$



Anschauliche Bedeutung der Ableitung der komplexen Exponentialfunktion. Das untere Bild entsteht aus dem oberen durch Anwenden der komplexen Exponentialfunktion. Man sieht, daß das Differential dieser Abbildung an einer Stelle auf der reellen Achse eine Streckung um einen reellen Faktor ist, an einer Stelle auf der imaginären Achse dahingegen eine Drehung alias eine Streckung um einen komplexen Faktor vom Absolutbetrag Eins.



Dieses Bild soll die Bedeutung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen veranschaulichen. Die gestrichelten bzw. durchgezogenen Linien deuten die Niveaumengen seines Real- bzw. Imaginärteils eines Zweiges des Logarithmus an, die gestrichelten bzw. durchgezogenen Pfeile deren Gradienten. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen bedeuten gerade, daß an jeder Stelle der Gradient des Imaginärteils durch eine Drehung um $90°$ im Gegenuhrzeigersinn aus dem Gradienten des Realteils hervorgeht.

Die komplexe Ableitung von f wird dann gegeben durch $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$ und wird auch bereits durch Real- oder Imaginärteil unserer Funktion festgelegt als $f' = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$. Fassen wir komplexwertige Funktionen auf einer Teilmenge der komplexen Zahlen als Vektorfelder auf, so entspricht die komplex konjugierte Ableitung mithin dem Gradienten des Realteils unserer Funktion, in Formeln

$$\overline{f'} = \operatorname{grad}(\operatorname{Re} f)$$

Beweis. Für den Beweis dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß κ die Identität ist, daß also insbesondere gilt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und $U = U_\kappa$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist nun per definitionem komplex differenzierbar bei $p \in U$ genau dann, wenn sie dort reell differenzierbar ist im Sinne von [AN2] 1.2.2 und wenn zusätzlich ihr Differential, eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{d}_p f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben wird durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, eben der komplexen Ableitung $f'(p)$ von f bei p. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß $\mathrm{d}_p f$ komplexlinear ist, und gleichbedeutend ist auch die Forderung, daß $\mathrm{d}_p f$ mit der Multiplikation mit i kommutiert. Sind nun u und v stetig partiell differenzierbar, so ist nach [AN2] 1.5.1 auch die Funktion $f = (u, v)$ reell differenzierbar an jeder Stelle $p \in U$ und ihr Differential $\mathrm{d}_p f = \mathrm{d}_p(u, v)$ wird nach [AN2] 1.2.7 beschrieben durch die Jacobi-Matrix

$$[\mathrm{d}_p(u, v)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

an der jeweiligen Stelle p. Damit ist $f = (u, v)$ komplex differenzierbar bei p genau dann, wenn diese Matrix kommutiert mit der Matrix $[(\mathrm{i}\cdot)] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ der Multiplikation mit i, wenn also an der jeweiligen Stelle p gilt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \square$$

Beispiel 1.2.16 (**Real- und Imaginärteil des Logarithmus**). Die Exponentialfunktion definiert eine holomorphe Bijektion $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)\mathrm{i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$. Deren Umkehrung wird auf der oberen Halbebene gegeben durch

$$\log(x + \mathrm{i}y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} - \mathrm{i} \arctan \frac{x}{y}$$

Wir haben also $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ und $v(x, y) = \pi/2 - \arctan(x/y)$. Es ist eine gute Übung, nun die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen zu prüfen. Einfacher folgert man aber die Holomorphie dieser Funktion aus dem Satz 1.2.6 über die komplexe Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen.

Definition 1.2.17. Bezeichne $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation und sei $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **antiholomorph**, wenn $\bar{f} := c \circ f$ holomorph ist.

Übungen

Übung 1.2.18. Man zeige, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ der Hauptzweig des Logarithmus von $1 + z$ auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Hinweis: Es reicht zu zeigen, daß für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ das Einsetzen von $z = wt$ auf beiden Seiten dieselbe Funktion in $t \in (-1, 1)$ liefert. Beide Seiten nehmen aber bei $z = 0$ den Wert Null an, so daß es reicht, die Gleichheit ihrer Ableitungen zu zeigen. In 2.2.10 dürfen Sie diese Übung mit mehr Theorie und weniger Rechnen ein weiteres Mal lösen.

Übung 1.2.19. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Man zeige, daß eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ antiholomorph ist genau dann, wenn $f \circ c : c(U) \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Insbesondere ist die Verknüpfung antiholomorpher Funktionen stets holomorph.

Übung 1.2.20. Eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, die nur reelle Werte annimmt, ist konstant.

Übung 1.2.21 (**Holomorphes Ableiten unter dem Integral**). Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$, $(z, t) \mapsto f(z, t)$ stetig. Ist f für alle t holomorph in z und $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Abbildung $F : z \mapsto \int_a^b f(z, t)\mathrm{d}t$ holomorph und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(w) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(w, t)\mathrm{d}t$$

Hinweis: [AN2] 2.1.14. In 2.1.15 diskutieren wir noch eine etwas stärkere Variante.

1.3 Komplexe Wegintegrale

1.3.1. Wir verwenden im folgenden die Integration stetiger vektorwertiger Funktionen auf kompakten reellen Intervallen [AN1] **??**, benötigen dies Konzept jedoch nur im Fall von stetigen komplexwertigen Funktionen $h : [a, b] \to \mathbb{C}$. In diesem Fall kann man dies Integral auch elementar über die Formel

$$\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_a^b \operatorname{Im} f$$

definieren und die benötigten Eigenschaften elementar nachprüfen. Wir benötigen insbesondere die allgemeinen Regeln [AN1] **??**, die vektorwertige Variante des Hauptsatzes [AN1] **??**, die Substitutionsregel [AN1] **??**, und die Abhängigkeit von Parametern [AN1] **??**.

Definition 1.3.2. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg und f eine stetige auf seinem Bild definierte komplexwertige Funktion, so definieren wir das **Wegintegral der Funktion f über den Weg γ**, eine komplexe Zahl $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, durch die Vorschrift

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Ist allgemeiner γ stückweise stetig differenzierbar im Sinne von [AN2] 5.4.4, so nennen wir γ einen **Integrationsweg** und definieren das Wegintegral wie in [AN2] 5.4.5 als die Summe der Wegintegrale über seine maximalen stetig differenzierbaren Teilstücke.

Ergänzung 1.3.3. In 1.6.5 erlären wir die Bedeutung von $f(z)\mathrm{d}z$ als „komplexwertiges Kovektorfeld" und besprechen, in welcher Weise die vorstehende Definition als eine Verallgemeinerung unserer Definition des Wegintegrals über Kovektorfelder aus [AN2] 5.3 verstanden werden kann.

1.3.4 (**Anschauung für das komplexe Wegintegral**). Auf der rechten Seite ist $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$ zu verstehen als Geschwindigkeit im Sinne von [AN1] 8.2.1 und das Integral der stetigen komplexwertigen Funktion $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ ist zu verstehen als Integral einer vektorwertigen Funktion im Sinne von [AN1] **??**. Der Realteil des Integrals ist also das Integral des Realteils von $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ und der Imaginärteil des Integrals das Integral des Imaginärteils. Betrachtet man in der Situation der Definition für alle $r \geq 1$ die äquidistanten Unterteilungen $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = b$ und bildet die „Riemannsummen"

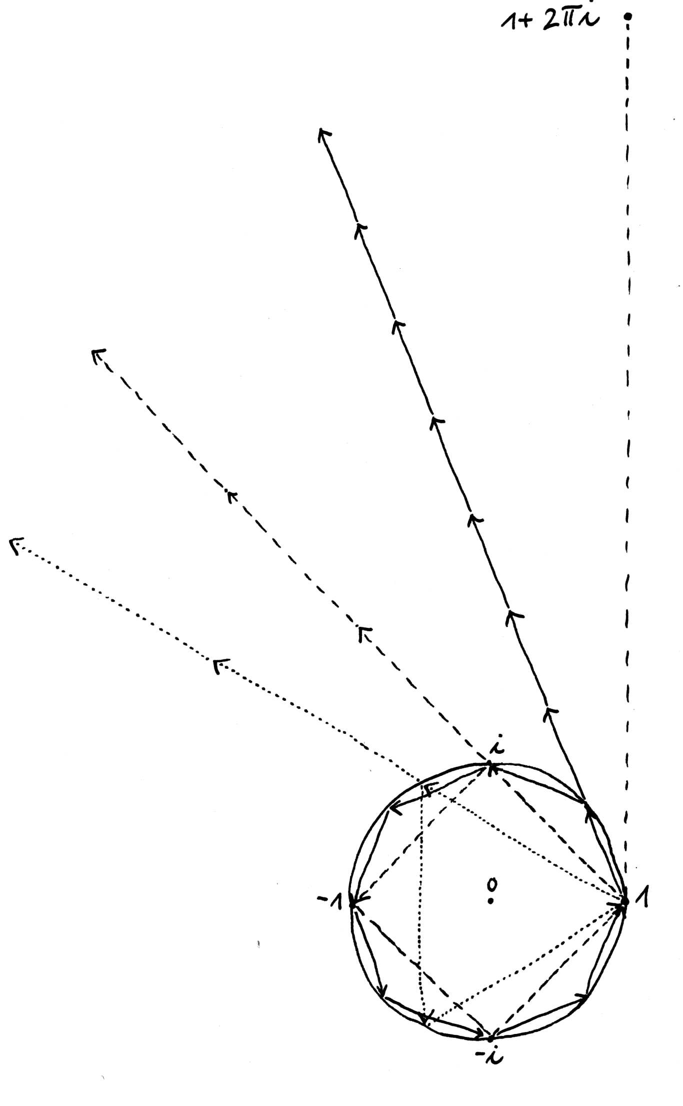
$$S_\gamma^r(f) = \sum_{i=0}^{r-1} f(\gamma(a_i))\,(\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i))$$

mit nun in $\mathbb{C}$ zu bildenden Produkten rechts, so ist unser Wegintegral mit denselben Argumenten wie in [AN2] 5.3.5 der Grenzwert der Folge der Riemannsummen

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty} S_\gamma^r(f)$$

1.3.5 (**Abschätzungen für das komplexe Wegintegral**). Der Absolutbetrag eines Wegintegrals ist beschränkt durch das Produkt der euklidischen Länge des Weges im Sinne von [AN1] 8.1.1 mit dem Supremum der Absolutbeträge der Funktionswerte auf dem Weg. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ unser Integrationsweg, so gilt also in Formeln

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \left(\sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|\right) L(\gamma)$$



Dieses Bild soll dazu helfen, eine Anschauung für die Riemannsummen zum Integral der Funktionen z^n über den Einheitskreis zu entwickeln. Im Fall $n = 0$ sind alle Riemannsummen schlicht Null. Im Fall $n = -1$ dahingegen werden durch den Faktor z^{-1} alle „Kanten unserer Vielecke in die Richtung der ersten Kante gedreht“, und man erkennt, wie die Riemannsummen, hier gezeichnet für $n = 3, 4$ und 8, gegen den Vektor alias die komplexe Zahl $2\pi\mathrm{i}$ konvergieren.

Man kann das direkt an der Darstellung des Wegintegrals durch Riemannsummen ablesen. Es folgt mit der Darstellung $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \mathrm{d}t$ der Weglänge nach [AN1] 8.3.2 auch sofort aus der Abschätzung [AN1] **??** der Norm des Integrals einer vektorwertigen Funktion durch das Integral über die Normen der Funktionswerte, angewandt im Spezialfall einer komplexwertigen Funktion.

Beispiele 1.3.6. Ist der Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ die Identität $\gamma(t) = t$, so haben wir offensichtlich

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Ist unser Weg gegeben durch $t \mapsto \mathrm{i}t$, so haben wir ebenso offensichtlich

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i} \int_a^b f(\mathrm{i}t)\mathrm{d}t$$

Integrieren wir die konstante Funktion 1, so ist offensichtlich bereits die Folge der Riemannsummen konstant $\gamma(b) - \gamma(a)$, und das kommt nach elementarer Rechnung dann auch aus unserer Definition des Wegintegrals heraus und wird durch 1.3.7 verallgemeinert. Ist unser Weg ein kreisförmiger Weg im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung, der durch den Winkel parametrisiert ist und der also in Formeln gegeben wird durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für einen festen Radius $r > 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^n \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{i}r^{n+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n = -1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Im Fall $n \neq -1$ und ganz besonders im Fall $n = 0$ scheint es mir in dieser Situation auch anschaulich recht klar, daß bereits fast alle Riemannsummen verschwinden und damit natürlich auch ihr Grenzwert. Der Fall $n \neq -1$ läßt sich im Übrigen auch elegant als Spezialfall der anschließenden Proposition behandeln.

Proposition 1.3.7 (Komplexes Wegintegral und Stammfunktionen). *Seien $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar und $\gamma : [a, b] \to U$ ein Integrationsweg. So gilt*

$$\int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir γ stetig differenzierbar annehmen. Nach der Kettenregel 1.1.15 hat $(f \circ \gamma) : [a, b] \to \mathbb{C}$ die Ableitung $t \mapsto f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Damit finden wir

$$\int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = (f \circ \gamma)|_a^b$$

nach der Definition und der vektorwertigen Variante [AN1] **??** des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. □

1.3.8. Insbesondere ist also das Integral einer Ableitung über einen geschlossenen Weg stets Null. Das zeigt sofort $\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = 0$ für $n \neq -1$ und jeden geschlossenen Weg γ in der komplexen Zahlenebene. Im Fall $n = -1$ kann dies Argument so nicht angewandt werden, da die Funktion $1/z$ keine auf ganz $\mathbb{C}^\times$ definierte Stammfunktion besitzt. Definieren wir aber $\log : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ als Umkehrung von $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)\mathrm{i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$, so ist $\log$ nach 1.2.6 holomorph mit Ableitung $1/z$, und integrieren wir für $\varepsilon > 0$ die Funktion $1/z$ über einen Integrationsweg von $-1 - \mathrm{i}\varepsilon$ bis $-1 + \mathrm{i}\varepsilon$ durch die geschlitzte Zahlenebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$, so ergibt sich $\log(-1 + \mathrm{i}\varepsilon) - \log(-1 - \mathrm{i}\varepsilon)$ und das strebt für $\varepsilon \searrow 0$ gegen $2\pi\mathrm{i}$.

Korollar 1.3.9. *Eine holomorphe Funktion mit wegzusammenhängendem Definitionsbereich, deren Ableitung identisch verschwindet, ist konstant.*

Beweis. Nach [AN2] 5.5.4 lassen sich je zwei Punkte einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ auch durch einen Integrationsweg verbinden. Nach 1.3.7 hat also unsere Funktion an je zwei Punkten denselben Wert. □

1.3.10 (**Stückweises Integrieren**). Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und f eine auf seinem Bild definierte stetige komplexwertige Funktion, so gilt für alle $c \in (a, b)$ offensichtlich oder genauer nach [AN1] **??** die Identität

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma|[a,c]} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma|[c,b]} f(z)\mathrm{d}z$$

Proposition 1.3.11 (Unabhängigkeit von der Parametrisierung). *Sei $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $\gamma : [a, b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg und sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Ist $t : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar mit $t(c) = a$ und $t(d) = b$, so gilt*

$$\int_{\gamma \circ t} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

Ergänzung 1.3.12. Kehrt hier alternativ unsere Reparametrisierung die Richtung um, d.h. gilt $t(c) = b$ und $t(d) = a$, so ändert unter unserer Reparametrisierung das Integral sein Vorzeichen. Die Proposition ist im übrigen eine Variante des Satzes über die Unabhängigkeit von Wegintegralen im Reellen [AN2] 5.3.15 wird auch im Wesentlichen genauso bewiesen.

Beweis. Wir beachten $(\gamma \circ t)'(\tau) = \gamma'(t(\tau))t'(\tau)$ nach der Kettenregel, können unsere Behauptung demnach ausschreiben zur Behauptung

$$\int_d^c f(\gamma(t(\tau)))\gamma'(t(\tau))t'(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t(d)}^{t(c)} f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

und diese Gleichung folgt aus der Substitutionsregel [AN1] 4.8.1, angewandt auf Real- und Imaginärteil, oder eleganter aus der Substitutionsregel [AN1] **??** für vektorwertige Funktionen. □

Proposition 1.3.13 (Existenz von Stammfunktionen). *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene besitzt eine Stammfunktion genau dann, wenn ihr Wegintegral über jeden geschlossenen Integrationsweg in unserer offenen Teilmenge verschwindet.*

Beweis. Besitzt unsere Funktion eine Stammfunktion, so verschwinden alle Wegintegrale über geschlossene Integrationswege nach 1.3.7. Um die Gegenrichtung zu zeigen dürfen wir nach [AN2] 5.5.12 ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere offene Teilmenge $U \Subset \mathbb{C}$ wegzusammenhängend annehmen. Dann wählen wir $p \in U$ fest und betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rccc} F: & U & \to & \mathbb{C} \\ & w & \mapsto & \int_{\gamma_w} f(z)\mathrm{d}z \end{array}$$

für γ_w einen beliebigen Integrationsweg von p nach w, den es nach [AN2] 5.5.4 geben muß und von dessen Wahl unser Wegintegral nach Annahme ja nicht abhängt. Für kleines $h \in \mathbb{C}$ können wir dann $F(w+h)$ berechnen, indem wir an den Weg γ_w noch das Geradensegment $[w, w+h]$ anhängen. Für kleines $h \in \mathbb{C}$ gilt damit

$$F(w+h) - F(w) = \int_0^1 f(w + \tau h)h\mathrm{d}\tau$$

und teilen wir durch h, so erhalten wir $\int_0^1 f(w + \tau h)\mathrm{d}\tau$, und das strebt für $h \to 0$ offensichtlich gegen $f(w)$. Folglich ist F eine Stammfunktion unserer stetigen Funktion f. □

1.3.14. Unter einem **Rechteck** oder genauer einem **achsenparallelen Rechteck** verstehen wir eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^2$, die das Produkt von zwei kompakten reellen Intervallen ist, die nicht nur aus einem Punkt bestehen. Unter dem **Randweg** $\partial\vec{Q}$ eines Rechtecks Q verstehen wir den geschlossenen Weg, der von der unteren linken Ecke ausgehend einmal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand unseres Rechtecks umläuft, sagen wir mit konstanter Geschwindigkeit Eins auf jeder Kante. Hier vom Gegenuhrzeigersinn zu sprechen ist etwas gefährlich, aber ich hoffe, daß dem Leser dennoch klar ist, welchen Weg ich genau meine. Der Pfeil über dem Q soll daran erinnern, daß es uns bei diesem Randweg auf die Richtung ankommt. Unter dem **Randintegral** einer stetigen komplexwertigen Funktion für ein Rechteck verstehen wir ihr Wegintegral über diesen Randweg.

Ergänzung 1.3.15. Diese Notation ist mit unserer Notation aus [AN2] 6.3 verträglich in dem Sinne, daß beide Notationen Spezialisierungen aus dem noch allgemeineren Rahmen der Integration von Differentialformen über orientierte Mannigfaltigkeiten mit Ecken sind. Versehen wir genauer $\mathbb{C}$ mit der durch unsere übliche Identifikation $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ gegebenen Orientierung, so meint $\vec{Q}$ das Rechteck mit seiner induzierten Orientierung und unter $\partial\vec{Q}$ ist der Rand von Q mit seiner induzierten Orientierung in Verallgemeinerung von [AN2] 6.7.9 zu verstehen. Das wäre dann zwar recht eigentlich kein Weg, sondern vielmehr eine orientierte 1-Mannigfaltigkeit mit Ecken, aber das Integral der komplexwertigen 1-Form $f(z)\mathrm{d}z$ im Sinne von 1.6 über diese 1-Mannigfaltigkeit fällt zusammen mit dem hier definierten Wegintegral.

Lemma 1.3.16 (Stammfunktionen auf offenen Kreisscheiben). *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene besitzt auf besagter Kreisscheibe eine Stammfunktion genau dann, wenn für jedes in unserer Kreisscheibe enthaltene achsenparallele Rechteck das Randintegral verschwindet.*

1.3.17. Diese Variante des Satzes über die Stammfunktion werden wir beim Beweis des Integralsatzes von Cauchy 1.5.1 und beim Beweis des Satzes von Morera 2.1.9 brauchen. Unter einem achsenparallelen Rechteck verstehen wir hier und im Folgenden ein Rechteck, dessen Kanten parallel sind zu den Koordinatenachsen oder in unserem Falle zur reellen bzw. imaginären Achse.

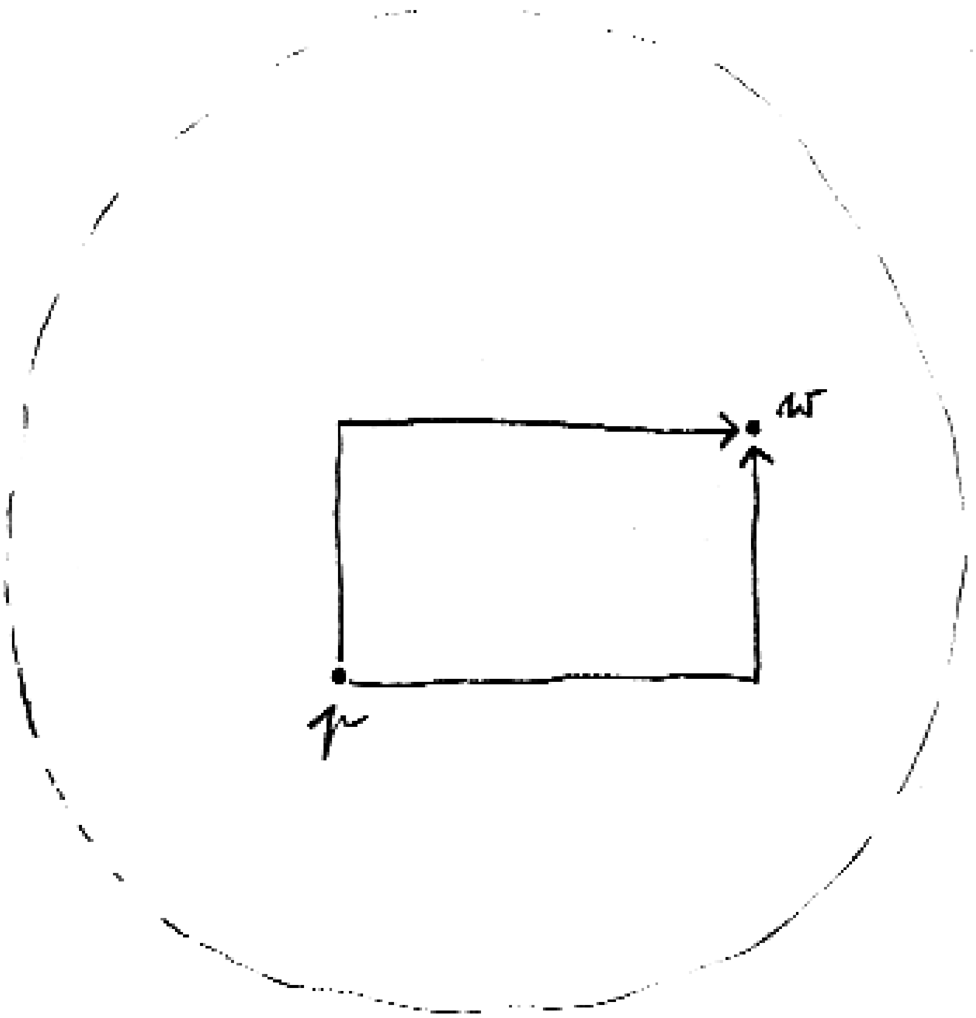
Beweis. Man variiert das Argument des vorhergehenden Beweises für 1.3.13 dahingehend, daß man als Wege γ_w nur die beiden Wege nimmt, die längs der Kanten eines achsenparallelen Rechtecks mit Ecken p und w von p nach w laufen. Damit erkennt man zwar für die Stammfunktion in spe F zunächst nur $\frac{\partial F}{\partial x} = f$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{i}f$, aber nach der Charakterisierung der komplexen Ableitung durch die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen 1.2.13 oder noch schneller ihrer Version 1.2.15 folgt daraus bereits $F' = f$. □

Übungen

Übung 1.3.18 (**Das komplexe Wegintegral respektiert Verwandtschaft**). Man zeige: Gegeben $U, V \Subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \to U$ ein Integrationsweg, $\phi : U \to V$ holomorph und $f : V \to \mathbb{C}$ stetig gilt

$$\int_\gamma f(\phi(w))\phi'(w)\mathrm{d}w = \int_{\phi\circ\gamma} f(z)\mathrm{d}z$$

Diese Identität kann verstanden werden als eine Variante für komplexwertige Kovektorfelder unserer Erkenntnis [AN2] 3, daß das Wegintegral Verwandtschaft respektiert. Für eine ausführlichere Diskussion vergleiche 1.6.8.



Die beiden Integrationswege, die wir im Beweis von Lemma 1.3.16 betrachten, um die Existenz einer Stammfunktion zu zeigen.

1.4 Homotopie von Wegen

1.4.1. Wir erinnern an Homotopie von Wegen und zusammenziehbare Wege, wie sie in [AN2] 5.6.2 und [AN2] 5.6.6 eingeführt wurden. Im folgenden mag man sich je nach Vorkenntnissen statt einem allgemeinen topologischen Raum X auch eine Teilmenge der komplexen Zahlenebene denken.

1.4.2. Einen durch das Einheitsintervall parametrisierten Weg $\gamma : [0,1] \to X$ in einem topologischen Raum X nennen wir im Folgenden einen **normierten Weg**. Zu jedem Weg $\gamma : [a,b] \to X$ bilden wir den zugehörigen normierten Weg $\hat{\gamma} : t \mapsto \gamma((1-t)a + tb)$.

Definition 1.4.3. Seien x, y Punkte eines topologischen Raums X. Zwei normierte Wege α, β von x nach y heißen **homotop** oder präziser **homotop in** X oder ganz pedantisch **homotop mit festen Randpunkten** und wir schreiben $\alpha \simeq \beta$ genau dann, wenn es eine stetige Abbildung

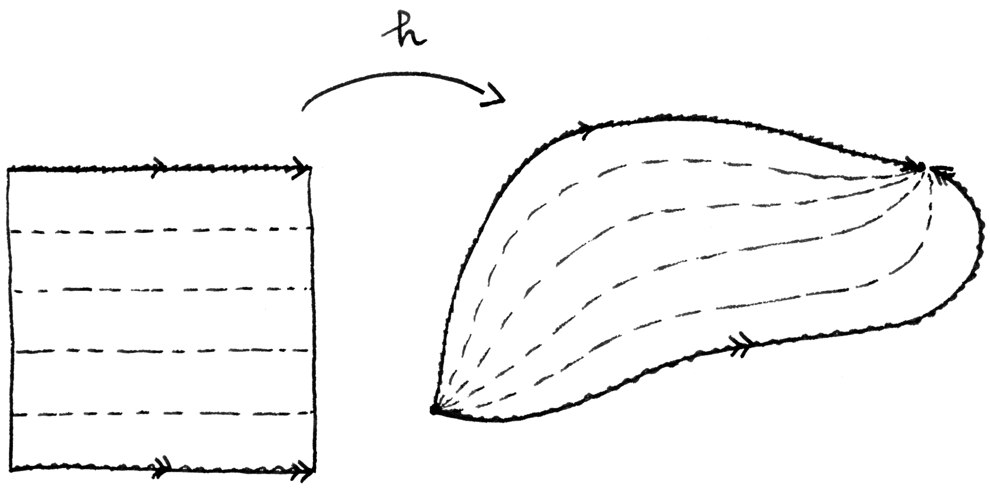
$$h : [0,1]^2 \to X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- bzw. Oberkante unseres Quadrats mit α bzw. β übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also $h(t,0) = \alpha(t)$ und $h(t,1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0,1]$ sowie $h(0,\tau) = x$ und $h(1,\tau) = y$ für alle $\tau \in [0,1]$. Wir sagen dann auch, h sei eine **Homotopie zwischen** α **und** β und schreiben $h : \alpha \simeq \beta$. Zwei beliebige Wege von x nach y nennen wir **homotop** genau dann, wenn die zugehörigen normierten Wege homotop sind.

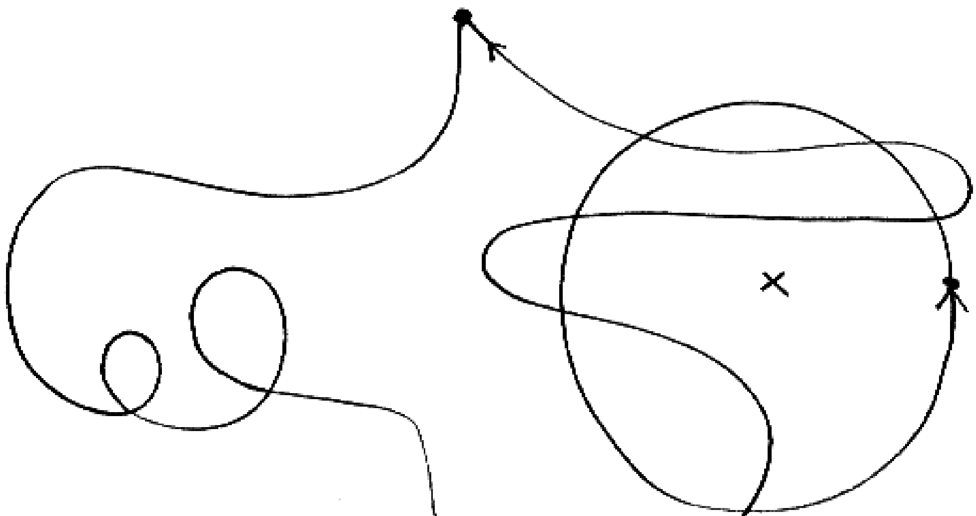
1.4.4. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie von normierten Wegen auch dahingehend interpretieren, daß es eine durch $\tau \in [0,1]$ parametrisierte Familie von normierten Wegen h_τ von x nach y geben soll derart, daß gilt $h_0 = \alpha$, $h_1 = \beta$ und daß unsere Familie stetig von τ abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung $[0,1]^2 \to X$, $(t,\tau) \mapsto h_\tau(t)$ stetig ist.

Beispiel 1.4.5. Für eine konvexe Teilmenge X eines endlichdimensionalen reellen Raums und zwei beliebige Punkte $x, y \in X$ sind je zwei Wege α, β von x nach y homotop in X. Sind unsere Wege normiert, so kann man eine Homotopie explizit angeben vermittels $h(t,\tau) := (1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$.

1.4.6 (**Vorwärtsverwandte homotoper Wege sind homotop**). Ist also in Formeln $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, so folgt aus $h : \alpha \simeq \beta$ schon $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$. Speziell ist ein Weg homotop zu allen seinen Umparametrisierungen, denn nach 1.4.5 sind je zwei Wege in $[0,1]$ von 0 nach 1 homotop und damit gilt dasselbe für ihre Verknüpfung mit einer beliebigen stetigen Abbildung $\gamma : [0,1] \to Y$.



Eine Homotopie zwischen zwei Wegen, in diesem Fall zwischen den beiden Randwegen unserer Banane.



Ein zusammenziehbarer und ein nicht zusammenziehbarer geschlossener Weg in Komplement des durch ein Kreuzchen markierten Punktes in der Papierebene

Definition 1.4.7. Ein Weg in einem topologischen Raum heißt ein **geschlossener Weg** genau dann, wenn sein Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Ein Weg heißt **zusammenziehbar** genau dann, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg. Per definitionem ist also jeder zusammenziehbare Weg geschlossen. Ein topologischer Raum heißt **wegweise einfach zusammenhängend** genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und wenn darüber hinaus jeder geschlossene Weg in unserem Raum zusammenziehbar ist.

Vorschau 1.4.8. In [TF] 3.5.5 werden wir „einfach zusammenhängende“ topologische Räume erklären und zeigen, daß offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene genau dann einfach zusammenhängend sind, wenn sie im Sinne von [AN2] 5.6.6 wegweise einfach zusammenhängend sind. Für grundlegende Überlegungen der Funktionentheorie wird diese Äquivalenz jedoch nicht benötigt und wir werden durchgehend mit wegweise einfach zusammenhängenden Räumen arbeiten.

Übungen

Übung 1.4.9. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege zwischen zwei fest vorgegebenen Punkten. Hinweis: [AN1] 6.7.8.

Übung 1.4.10. Ein Raum ist wegweise einfach zusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und je zwei Wege mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt darin homotop sind.

Ergänzende Übung 1.4.11. Jeder Weg in einer offenen Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums ist in besagter offener Teilmenge homotop zu einem stückweise linearen Weg. Hinweis: **??**.

1.5 Integralsatz von Cauchy

Satz 1.5.1 (Integralsatz von Cauchy). *Das Wegintegral einer holomorphen Funktion längs eines in ihrem Definitionsbereich zusammenziehbaren geschlossenen Integrationsweges ist stets Null.*

Ergänzung 1.5.2. Wenn man so will, gilt Vergleichbares auch im Reellen: Das Wegintegral einer stetigen Einsform auf einer offenen Teilmenge der Zahlengeraden längs eines geschlossenen Integrationsweges ist stets Null. Vom höheren Standpunkt ist sogar der Beweis ähnlich: Beide Male geschieht das Integral über eine Einsform, die aus Dimensionsgründen geschlossen ist.

1.5.3 (**Struktur des Beweises des Integralsatzes von Cauchy**). Ist $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to U$ ein in U

zusammenziehbarer geschlossener Integrationsweg, so behauptet der Integralsatz von Cauchy in Formeln

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Wir werden diesen Satz in 1.5.11 aus dem noch allgemeineren Satz 1.5.10 folgern, bei dem sogar beliebige stetige, nicht notwendig stückweise stetig differenzierbare Wege zugelassen werden. Wir führen den Beweis in einer Art Kaminkletterei. Zunächst zeigen wir in 1.5.4 das Verschwinden des Randintegrals einer holomorphen Funktion für jedes ganz in ihrem Definitionsbereich liegende achsenparallele Rechteck. Daraus folgern wir mit 1.3.16, daß jede holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe eine Stammfunktion besitzt. Mithilfe dieser Erkenntnis erklären wir in 1.5.9 für holomorphe Funktionen das Wegintegral längs beliebiger stetiger nicht notwendig stückweise stetig differenzierbarer Wege. Dann zeigen wir sogar in dieser Allgemeinheit die Homotopieinvarianz 1.5.10 des Wegintegrals. Den Integralsatz erhalten wir schließlich in 1.5.11 als eine einfache Konsequenz der Homotopieinvarianz. Der Cauchy'sche Integralsatz ist im übrigen auch selbst der Beginn einer Kaminkletterei. Sie wird uns schließlich zum Residuensatz 3.2.11 führen, der den Cauchy'schen Integralsatz und viele weitere auf dem Weg dorthin bewiesene Sätze als Spezialfälle enthält.

Lemma 1.5.4 (Integralsatz für Rechteckswege). *Gegeben eine holomorphe Funktion und eine achsenparallele Rechtecksfläche in ihrem Definitionsbereich verschwindet das Randintegral, d.h. das Integral unserer Funktion über den Rand unseres Rechtecks.*

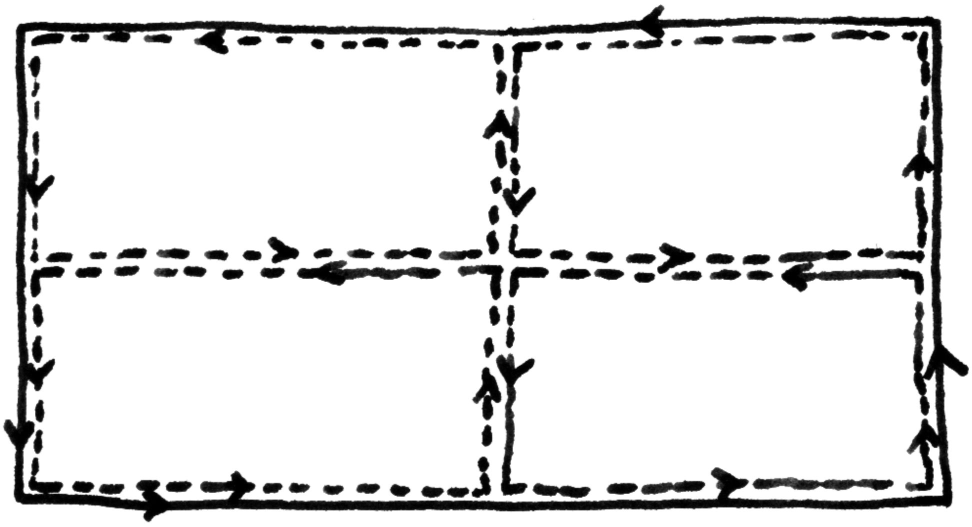
1.5.5. Dies Lemma kann für holomorphe Funktionen mit stetiger Ableitung mithilfe von 1.6 ohne Mühe aus dem Verschwinden des Wegintegrals geschlossener stetig differenzierbarer Kovektorfelder über zusammenziehbare Integrationswege [AN2] 5.7.7 gefolgert werden. Wir wollen es jedoch unter anderem benutzen, um zu zeigen, daß die Ableitung einer holomorphen Funktion stets stetig sein muß. Deshalb geben wir hier auch noch einen eigenständigen Beweis.

Beweis. Bezeichne Q_0 unser Rechteck und I_0 sein Randintegral. Unterteilen wir unser Rechteck Q_0 in vier gleichgroße Teilrechtecke, so wird I_0 die Summe der entsprechenden Randintegrale für diese vier Teilrechtecke und es gibt unter diesen notwendig ein Teilrechteck Q_1 derart, daß für das zugehörige Randintegral I_1 gilt

$$|I_0| \leq 4|I_1|$$

Indem wir so weitermachen, finden wir eine absteigende Folge $Q_0 \supset Q_1 \supset \dots$ von Rechtecken Q_n mit Umfang $2^{-n}a$ für konstantes a derart, daß für die zugehörigen Randintegrale I_n gilt

$$|I_0| \leq 2^{2n}|I_n|$$



Das Randintegral des grossen Rechtecks ist die Summe der Randintegrale der vier kleinen Rechtecke.

Nun ist aber mit doppelter Anwendung des Intervallschachtelungsprinzips [AN1] 2.6.13 oder auch nach [AN1] 7.1.17 der Schnitt aller dieser Rechtecke Q_n nicht leer und besteht genauer sogar aus einem einzigen Punkt p. Bezeichnet f unsere holomorphe Funktion, so können wir nach 1.1.6 schreiben

$$f(z) = f(p) + (z - p)f'(p) + (z - p)\varepsilon(z - p)$$

für eine stetige Funktion ε mit $\varepsilon(0) = 0$. Da der lineare Anteil eine Stammfunktion besitzt, trägt er nach 1.3.7 zum Randintegral I_n nichts bei und wir finden

$$I_n = \int_\gamma (z - p)\varepsilon(z - p)\mathrm{d}z$$

für γ den Randweg um Q_n. Bezeichnet d die Länge der Diagonale von Q_0, so gilt $|z-p| \leq 2^{-n}d$ für alle $z \in Q_n$ und wir können unser Integral mit 1.3.5 abschätzen durch

$$|I_n| \leq (2^{-n}a)(2^{-n}d) \sup_{z \in Q_n} \varepsilon(z - p)$$

Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} 2^{2n}|I_n| = 0$ und damit dann auch $I_0 = 0$. Das zeigt den Integralsatz im Fall, daß unser Weg der Randweg eines im Definitionsbereich unserer Funktion enthaltenen Rechtecks ist. □

Ergänzende Übung 1.5.6. Man zeige, daß $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(z-x)^2}\mathrm{d}x$ nicht von $z \in \mathbb{C}$ abhängt. Vermittels quadratischer Ergänzung liefert das einen weiteren Zugang zur Berechnung der Fouriertransformierten der Gauß'schen Glockenkurve. Man kann auch den umgekehrten Weg gehen.

Lemma 1.5.7. *Eine holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe besitzt dort stets eine Stammfunktion.*

1.5.8. In 1.5.12 werden wir aus dem Integralsatz von Cauchy allgemeiner ableiten, daß jede holomorphe Funktion mit wegweise einfach zusammenhängendem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt.

Beweis. Das eben gezeigte Verschwinden des Randintegrals für alle Rechtecke 1.5.4 ist genau die hinreichende Bedingung aus Lemma 1.3.16 für die Existenz einer Stammfunktion auf offenen Kreisscheiben. □

Definition 1.5.9 (Wegintegrale längs beliebiger Wege). Für eine holomorphe Funktion f und einen beliebigen Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ in ihrem Definitionsbereich können und wollen wir das Wegintegral erklären, indem wir eine Unterteilung

$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ so wählen, daß jedes Wegstück ganz in einer offenen Kreisscheibe aus dem Definitionsbereich verläuft, auf diesen Kreisscheiben jeweils eine Stammfunktion F_ν von f wählen und schließlich setzen

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(\gamma(a_\nu)) - F_\nu(\gamma(a_{\nu-1}))$$

Durch Übergang zu einer gemeinsamen Verfeinerung wird klar, daß dies Integral weder von der gewählten Unterteilung noch von den jeweils gewählten Stammfunktionen abhängt. Wegen 1.3.7 ist diese Definition im Fall von Integrationswegen verträglich mit unserem Wegintegral für Integrationswege nach 1.3.2. Man beachte jedoch, daß in dieser Allgemeinheit, also längs beliebiger, nicht notwendig stückweise stetig differenzierbarer Wege, das Wegintegral nur noch für sehr spezielle Funktionen, wie etwa holomorphe Funktionen, sinnvoll erklärt werden kann.

Satz 1.5.10 (Homotopieinvarianz des Wegintegrals). *Die Wegintegrale einer holomorphen Funktion über je zwei in ihrem Definitionsbereich homotope Wege stimmen überein.*

1.5.11. Der Cauchy'sche Integralsatz 1.5.1 folgt sofort, da ein zusammenziehbarer Weg ja per definitionem homotop ist zu einem konstanten Weg, und da Wegintegale über konstante Wege offensichtlich verschwinden.

Erster Beweis. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ unsere holomorphe Funktion und $h : [0,1]^2 \to U$ eine Homotopie zwischen unseren Wegen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Als nächstes zeigen wir, daß wir unser Quadrat so in kleine „Schachfelder“ unterteilen können, daß jedes dieser Felder unter h ganz in einer in U enthaltenen offenen Kreisscheibe landet: In der Tat wird ja U von offenen Kreisschreiben überdeckt, unser kompaktes Quadrat $[0,1]^2$ also von deren Urbildern, und nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue [AN1] 7.5.9 gibt es dann sogar ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes $x \in [0,1]^2$ der Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ bereits ganz in einem dieser Urbilder liegt. Bezeichnet dann $\rho_{i,j}$ die Randwege unserer Felder, so verschwindet das Wegintegral über jeden der Wege $h \circ \rho_{i,j}$, da unsere Funktion auf Kreisscheiben ja nach 1.5.7 jeweils eine Stammfunktion hat. Die Summe der Wegintegrale über die $h \circ \rho_{i,j}$ ist aber offensichtlich gerade die Differenz der Wegintegrale über unsere beiden ursprünglichen homotopen Wege. □

Zweiter Beweis. Alternativ mag man auch wie beim Beweis von [AN2] 5.7.7 vorgehen. Das hat den Vorteil, daß wir keine Integrale über allgemeine stetige Wege

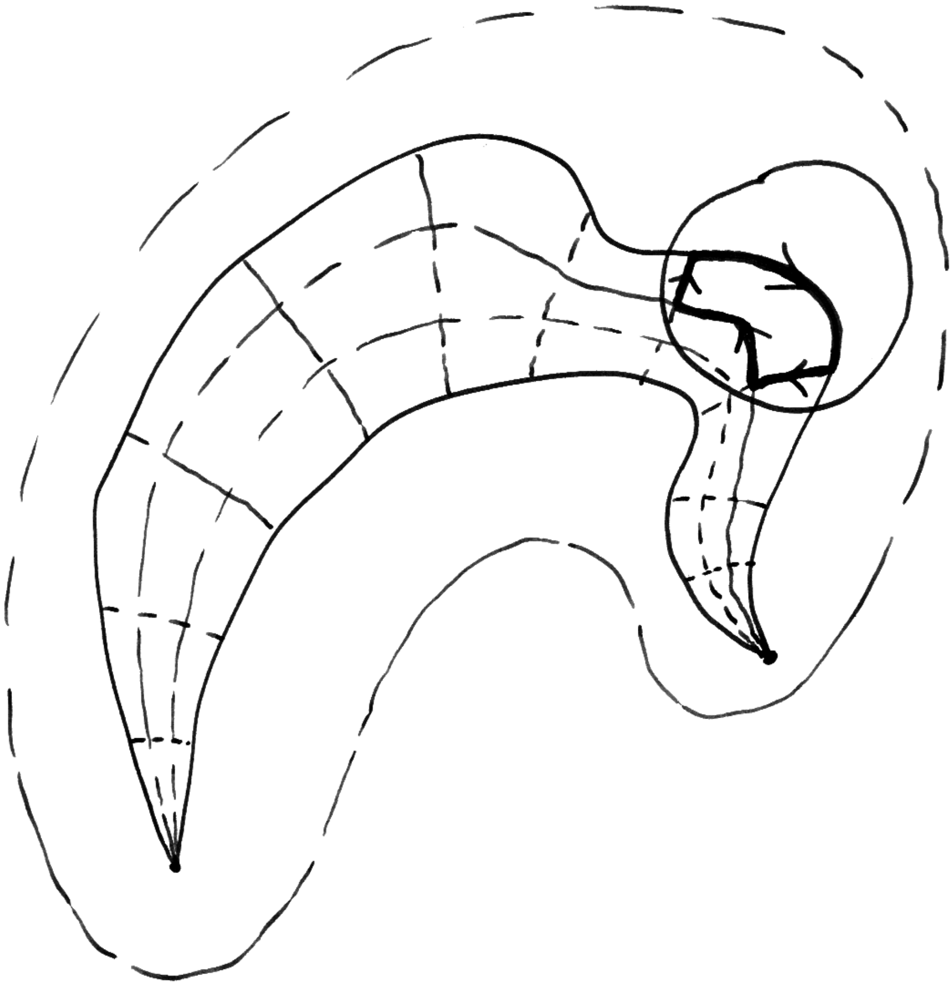


Illustration zum Beweis der Homotopieinvarianz des Wegintegrals holomorpher Funktionen. Eine Homotopie liefert wie angedeutet eine Darstellung der Differenz der Wegintegrale zweier homotoper Wege als eine Summe über die Wegintegrale von „ganz kleinen“ geschlossenen Wegen, wo „ganz klein“ bedeutet, daß sie jeweils ganz in einer im Definitionsbereich unserer Funktion enthaltenen offenen Kreisscheibe verlaufen. Auf jeder Kreisscheibe hat eine holomorphe Funktion aber, das haben wir bereits aus dem Integralsatz für Rechteckswege gefolgert, eine Stammfunktion, folglich sind die Wegintegrale aller unserer ganz kleinen Wege Null.

zu diskutieren brauchen, aber dafür braucht die Argumentation einen zusätzlichen Schritt: Wir gehen erst von unseren ursprünglichen Wegen zu approximierenden Polygonzügen über und betrachten dann statt den möglicherweise nicht mehr differenzierbaren „ganz kleinen“ Wegen $h \circ \rho_{i,j}$ die „ganz kleinen“ Wege, die zwischen den Bildern unter h der Ecken unserer kleinen Schachfelder gerade verlaufen. □

Proposition 1.5.12 (Stammfunktionen holomorpher Funktionen). *Jede holomorphe Funktion mit wegweise einfach zusammenhängendem Definitionsbereich besitzt eine auf dem ganzen Definitionsbereich definierte Stammfunktion.*

Beweis. Nach 1.3.13 müssen wir nur zeigen, daß das Wegintegral unserer Funktion über jeden geschlossenen Weg verschwindet. Nach Annahme ist aber jeder geschlossene Weg aus dem Definitionsbereich bereits im Definitionsbereich zusammenziehbar und damit verschwindet das Wegintegral nach dem Integralsatz von Cauchy 1.5.1. □

Definition 1.5.13. Zwei normierte geschlossene Wege α, β in einem metrischen oder allgemeiner topologischen Raum heißen **frei homotop** genau dann, wenn es eine durch $\tau \in [0, 1]$ parametrisierte Familie geschlossener normierter Wege γ_τ gibt mit $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = \beta$ und so, daß $(t, \tau) \mapsto \gamma_\tau(t)$ stetig ist auf $[0, 1]^2$. Zwei geschlossene Wege heißen frei homotop genau dann, wenn die zugehörigen normierten Wege frei homotop sind.

Satz 1.5.14 (Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie). *Die Wegintegrale über je zwei im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion frei homotope geschlossene Wege stimmen überein.*

Beweis. Das folgt leicht aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals für holomorphe Funktionen 1.5.10. Die Details seien dem Leser zur Übung überlassen. □

Vorschau 1.5.15 (**Integralsatz für nullhomologe Wege**). Wir gehen aus von der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, entfernen daraus zwei Punkte a, b und betrachten den Integrationsweg γ gegeben durch das nebenstehende Bild. Es ist nicht klar, ob dieser Weg in $\mathbb{C}\backslash\{a, b\}$ zusammenziehbar ist, und in [TF] 2.5.10 zeigen wir, daß er es in der Tat nicht ist. Klar ist jedoch, daß dennoch das Integral jeder auf $\mathbb{C}\backslash\{a, b\}$ holomorphen Funktion längs dieses Weges verschwinden muß: Zerlegen wir nämlich unseren Weg in Stücke, indem wir ihn an den drei Selbstschnittstellen aufschneiden, und setzen diese Stücke so wieder zu zwei geschlossenen Wegen zusammen, daß der eine das Gebiet berandet, das von oben an das Mittelkreuz grenzt, und der andere das Gebiet, das von unten an das Mittelkreuz grenzt, so

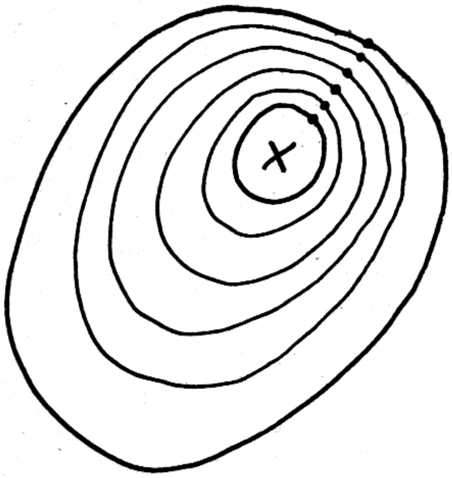


Illustration einer freien Homotopie zwischen zwei geschlossenen Wegen im Komplement eines Punktes der Ebene.

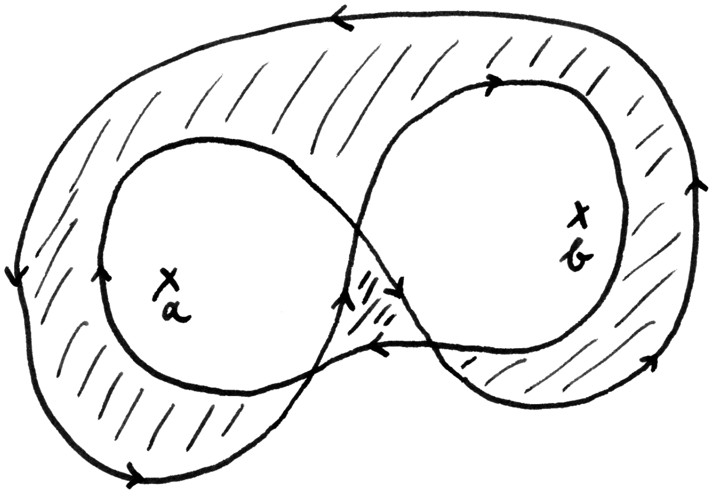


Illustration zu 1.5.15: Ein geschlossener nicht zusammenziehbarer aber Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene, der dennoch die Eigenschaft hat, daß jedes Integral einer holomorphen Funktion auf unserem Komplement darüber verschwindet. Denkt man sich den Weg als Schnur und bei a und b Nägel in der Wand, so bleibt die Schnur durchaus hängen, fällt aber herunter, sobald nur Ein Nagel herausgezogen wird.

erhalten wir zwei in $\mathbb{C}\backslash\{a, b\}$ zusammenziehbare Wege, über die das Wegintegral nach dem Integralsatz von Cauchy 1.5.1 jeweils verschwinden muß. Diesen Trick verwandeln wir im Rahmen der Homologietheorie in eine Methode, vergleiche [TS] 1.2.18.

Beispiel 1.5.16. Wir zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi$$

in dem Sinne, daß sowohl $\lim_{r\to\infty} \int_0^r$ als auch $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^0$ existieren und ihre Summe den angegebenen Wert hat. Um das zu sehen, bemerken wir zunächst, daß der Integrand außerbalb des Ursprungs mit der Einschränkung des Imaginärteils von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$ auf die reelle Achse zusammenfällt. Dann betrachten wir für $a < b$ in $\mathbb{R}^\times$ und $h > 0$ Integrationswege, die einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks mit Ecken $a, b, a + \mathrm{i}h, b + \mathrm{i}h$ umlaufen und im Fall $a < 0 < b$ auf einem kleinen Halbkreis γ_ε mit Radius ε über die Polstelle beim Ursprung hoppeln. Das Wegintegral von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$ längs eines derartigen Weges ist Null nach dem Integralsatz. Die Integrale über die drei Kanten ρ, λ, ω für „rechts, links und oben" außerhalb der reellen Achse können wir jedoch auf der rechten Kante abschätzen durch

$$\left| \int_\rho \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z \right| = \left| \int_0^h \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+\mathrm{i}t)}}{b + \mathrm{i}t} \mathrm{i}\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{|b|} \int_0^h \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{|b|}$$

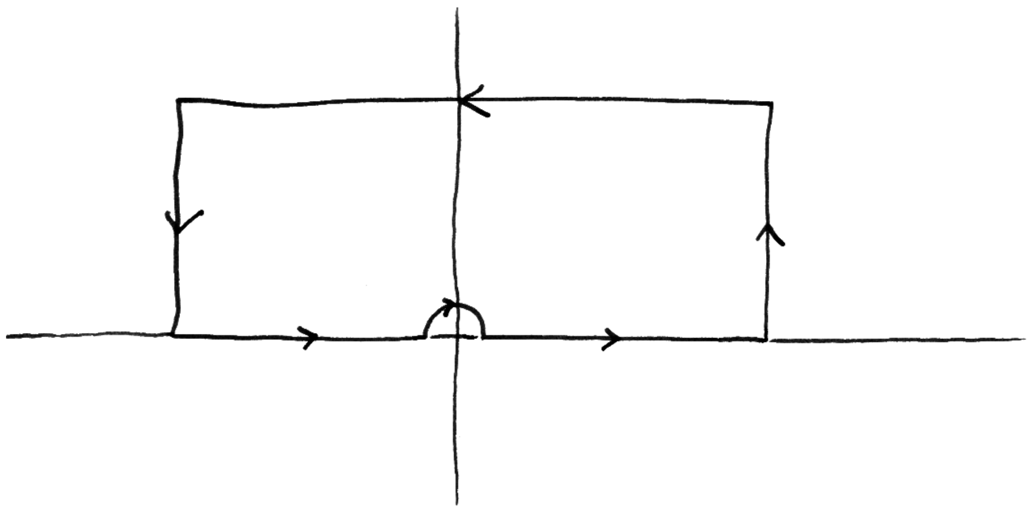
und analog auf der linken Kante durch $1/|a|$, auf der oberen Kante dahingegen durch

$$\left| \int_\omega \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z \right| \leq (b - a) \frac{\mathrm{e}^{-h}}{h}$$

Für festes $a > 0$ folgt so die Existenz des Grenzwerts $\lim_{r\to\infty} \int_a^r$ aus dem Cauchy-Kriterium [AN1] 3.3.27. Die Existenz des anderen Grenzwerts für $b < 0$ in Richtung der negativen reellen Achse $\lim_{r\to-\infty} \int_r^b$ zeigt man analog. Indem wir nun $-a = b = h$ nehmen und das nach Unendlich streben lassen, ergibt sich für jedes $\varepsilon > 0$ andererseits

$$0 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} \mathrm{d}x + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z + \int_\varepsilon^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} \mathrm{d}x$$

Durch explizite Rechnung erkennen wir, daß das Integral über den kleinen Halbkreis für $\varepsilon \to 0$ gegen $-\pi\mathrm{i}$ strebt. Jetzt brauchen wir nun noch den Imaginärteil unserer Gleichung zu nehmen. Nebenbei bemerkt ist $\frac{\sin x}{x}$ Lebesgue'schen Sinne gar nicht auf $\mathbb{R}$ integrierbar.



Einer der Integrationswege bei der Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$. Zum Nachweis der Existenz des Grenzwerts betrachten wir allerdings auch entsprechend verschobene rechteckige Integrationswege, die ganz rechts oder links der imaginären Achse verlaufen.

Übungen

Übung 1.5.17. Sei γ ein stetiger geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $U \Subset \mathbb{C}$ das Komplement seines Bildes. Man zeige, daß die Funktion $u_\gamma : U \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$u_\gamma(w) = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - w}$$

lokal konstant ist, als da heißt holomorph mit Ableitung Null. In 3.2 werden wir sehen, daß f nur Werte in $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ annimmt, und werden diese Werte als das $2\pi\mathrm{i}$-fache der „Umlaufzahl von γ um den Punkt w" verstehen lernen.

Übung 1.5.18. Das in 1.5.9 erklärte Wegintegral bleibt in Verallgemeinerung von 1.3.11 gleich bei beliebiger stetiger Umparametrisierung unseres Weges. Es ändert in Verallgemeinerung von 1.3.12 sein Vorzeichen bei einer Änderung der Durchlaufrichtung des Weges, wir dürfen wie in 1.3.10 stückweise integrieren, und das Integral über einen geschlossenen Weg von einer Funktion mit Stammfunktion verschwindet.

Übung 1.5.19 (**Umkehrsatz für holomorphe Funktionen**). Gegeben eine holomorphe Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ und $p \in U$ mit $f'(p) \neq 0$ existieren offene Umgebungen $V \Subset U$ von p und $W \Subset \mathbb{C}$ von $f(p)$ derart, daß f eine Bijektion $f : V \xrightarrow{\sim} W$ mit stetiger Umkehrabbildung induziert, die dann sogar holomorph sein muß. Ein Beweis dieser Tatsache mithilfe des Umkehrsatzes aus der reellen Analysis [AN2] 3.1.2 wird in 2.4.1 gegeben. Hier wird ein alternativer Beweis skizziert. Man zeige der Reihe nach:

1. Es gibt eine offene Umgebung $A \Subset U$ von p, auf der f injektiv ist und auf der f' keine Nullstelle hat;

2. Für jeden Punkt $q \in A$ ist für einen hinreichend kleinen Kreisweg $\gamma_{\varepsilon,q} : [0, 2\pi] \to V$, $t \mapsto q + \varepsilon \exp(\mathrm{i}t)$ um q der Weg $f \circ \gamma_{\varepsilon,q}$ in $\mathbb{C} \backslash f(q)$ frei homotop zu einem Kreisweg um $f(q)$;

3. Ist für $\varepsilon = \varepsilon_q$ wie im vorhergehenden Punkt B eine Kreisscheibe um $f(q)$, die den Weg $f \circ \gamma_{\varepsilon,q}$ nicht trifft, so gilt $B \subset f(A)$;

4. Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) - f(p) = (z - p)\varphi(z)$ und $\varphi(p) = f'(p)$. Setzen wir hier $z = f^{-1}(w)$, so ist $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(U) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $(w - q)\psi(w) = f^{-1}(w) - f^{-1}(q)$ und $\psi(q) = 1/f'(p)$.

Hinweis: Für den Nachweis der vorletzten Aussage verwende man für $b \in B$ und $\gamma = \gamma_{\varepsilon,q}$ die Formel

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z - b} = \int_\gamma \frac{f'(w)\mathrm{d}w}{f(w) - b}$$

aus 1.3.18 und beachte, daß die linke Seite nach Teil 2 nicht verschwindet.

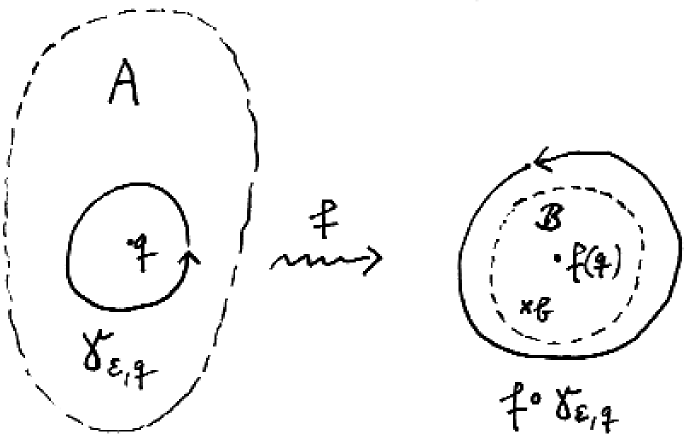


Illustration zu Übung 1.5.19. Wenn der Punkt b nicht in $f(A)$ läge, müßte ein Wegintegral verschwinden, das nun einmal nach unserer Transformationsformel für Wegintegrale 1.3.18 definitiv nicht verschwindet.

1.6 Beziehung zu Wegintegralen im Reellen*

1.6.1. Dieser Abschnitt ist für das Folgende entbehrlich. Er dient dem Zweck, die Notation für komplexe Wegintegrale verständlich zu machen und den Zusammenhang des Satzes von Cauchy mit den Sätzen über Wegintegrale in rotationsfreien Vektorfeldern [AN2] 5.7.7 zu erklären. Zunächst erinnere ich an Wegintegrale vektorwertiger 1-Formen nach [AN2] 5.3.18.

Definition 1.6.2 (Vektorwertige 1-Formen). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge. Eine **W-wertige 1-Form auf** A ist eine Abbildung

$$\omega : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$$

Sie ordnet also jedem Punkt $p \in A$ eine lineare Abbildung des Richtungsraums in den Raum W zu. Um hier noch Richtungsvektoren $v \in \vec{X}$ einsetzen zu können, notieren wir vektorwertige 1-Formen $p \mapsto \omega_p$, so daß dann $\omega_p(v)$ ein Vektor aus W wird.

1.6.3. In offensichtlicher Weise erklären wir das Produkt $f\omega$ einer W-wertigen 1-Form ω mit einer reellwertigen Funktion f. Das Resultat ist dann wieder eine W-wertige 1-Form $f\omega$. Ist W ein komplexer Vektorraum, so definieren wir analog das Produkt $f\omega$ einer W-wertigen 1-Form ω mit einer komplexwertigen Funktion f, indem wir eben setzen $(f\omega)_p(v) = f(p)\omega_p(v)$, zu verstehen als das Produkt der komplexen Zahl $f(p)$ mit dem Vektor $\omega_p(v)$ aus dem komplexen Vektorraum W.

Beispiele 1.6.4. Ist Y ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und $f : A \to Y$ differenzierbar, so ist $\mathrm{d}f$ oder genauer $p \mapsto \mathrm{d}_p f$ eine $\vec{Y}$-wertige 1-Form auf A. Zum Beispiel bezeichnet üblicherweise $z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Identität und $\mathrm{d}z$ ihr Differential, eine komplexwertige 1-Form auf $\mathbb{C}$. Mit $f(z)\mathrm{d}z$ bezeichnet man dann das Produkt dieser 1-Form mit der komplexwertigen Funktion $z \mapsto f(z)$. Eine $\mathbb{R}^n$-wertige 1-Form hinwiederum ist im wesentlichen schlicht ein n-Tupel von $\mathbb{R}$-wertigen 1-Formen.

1.6.5 (**Wegintegrale vektorwertiger 1-Formen**). Sei $\varphi : [a, b] \to A$ ein stetig differenzierbarer Weg in einer Teilmenge A eines endlichdimensionalen reellen Raums X und sei $\omega : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$ eine stetige 1-Form auf A mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum W. So definieren wir wie in [AN2] 5.3.18 einen Vektor $(\int_\varphi \omega) \in W$, das **Integral der W-wertigen 1-Form** ω **längs des Weges** φ, durch die Vorschrift

$$\int_\varphi \omega = \int_a^b \omega_{\varphi(t)}\left(\varphi'(t)\right) \mathrm{d}t$$

Auf der rechten Seite ist also für jeden Zeitpunkt t der Homomorphismus $\omega_{\varphi(t)} : \vec{X} \to W$ auszuwerten auf dem Geschwindigkeitsvektor $\varphi'(t) \in \vec{X}$, und die so entstehende stetige Abbildung $[a, b] \to W$ ist als vektorwertige Funktion zu integrieren im Sinne von [AN1] **??**. Zur Anschauung verweise ich auf die Darstellung als Grenzwert von Riemannsummen im Fall reellwertiger 1-Formen in [AN2] 5.3.5, die sich wortwörtlich übertragen läßt. Im Spezialfall $X = W = \mathbb{C}$ stimmt das auf diese Weise definierte Wegintegral $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z$ überein mit dem Wegintegral gemäß der in 1.3.2 gegebenen expliziten Definition und erklärt so insbesondere die für dieses Konzept übliche Notation.

1.6.6 (**Komplexwertige Differentialformen auf Teilmengen von** $\mathbb{C}$). Speziell interessieren wir uns nun für komplexwertige 1-Formen auf offenen Teilmengen $A \Subset \mathbb{C}$. Man beachte hier, daß für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V sowohl $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathbb{C}, V)$ als auch $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{C})$ in natürlicher Weise $\mathbb{C}$-Vektorräume sind. Auf dem Raum $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ betrachten wir im Folgenden stets diejenige Struktur als $\mathbb{C}$-Vektorraum, die „vom zweiten $\mathbb{C}$ herkommt“. Einerseits bilden nun Real- bzw. Imaginärteil, aufgefaßt als Abbildungen $x, y : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, und jede komplexwertige 1-Form ω auf A kann folglich geschrieben werden als

$$\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $a, b : A \to \mathbb{C}$. Andererseits bilden auch die Identität und die komplexe Konjugation $z, \bar{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, und wir können folglich jede komplexwertige 1-Form ω auch schreiben als

$$\omega = \alpha\mathrm{d}z + \beta\mathrm{d}\bar{z}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $\alpha, \beta : A \to \mathbb{C}$. Natürlich haben wir

$$\begin{array}{rclcrcl} x + \mathrm{i}y & = & z & \qquad & \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y & = & \mathrm{d}z \\ x - \mathrm{i}y & = & \bar{z} & \qquad & \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y & = & \mathrm{d}\bar{z} \end{array}$$

Ist $f : A \to \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar, so ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Homotopieinvarianz von Wegintegralen zum komplexwertigen Kovektorfeld $f(z)\mathrm{d}z = f(z)\mathrm{d}x + \mathrm{i}f(z)\mathrm{d}y$ nach [AN2] 5.7.7, daß unser Kovektorfeld geschlossen ist, was sich in unserem Kontext nach [AN2] 5.7.4 gleichbedeutend ist zur Identität

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x}$$

In Real- und Imaginärteil auseinandergezogen sind das genau die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Wir können also unter der zusätzlichen Annahme der Stetigkeit der komplexen Ableitung den Cauchy'schen Integralsatz und sogar die Homotopieinvarianz des Wegintegrals 1.5.10 auch aus der vektorwertigen Version von [AN2] 5.7.7 folgern, die ihrerseits unmittelbar aus der dort bewiesenen reellwertigen Version folgt.

1.6.7 (**Wirtinger-Ableitungen**). Ist $A \subset \mathbb{C}$ eine halboffene Teilmenge und $f : A \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar, so haben wir weiter

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

für die partiellen Ableitungen, die man erhält über die übliche Identifikation $\mathbb{R}^2 \overset{\sim}{\to} \mathbb{C}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (x + \mathrm{i}y)$. Für eine halboffene Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ und eine reell total differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ definiert man nun zwei komplexwertige Funktionen auf A, ihre **Wirtinger-Ableitungen** $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, durch die Vorschrift

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$$

Die Beziehung dieser Wirtinger-Ableitungen zu den partiellen Ableitungen von eben wird nach dem Vorhergehenden beschrieben durch die Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen ist also eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph genau dann, wenn gilt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, und in diesem Fall ist $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$ ihre komplexe Ableitung.

1.6.8 (**Differential und Wegintegral sind verträglich mit Verwandtschaft**). Ebenso wie für unsere üblichen Kovektorfelder in [AN2] 5.1.22 erklären wir auch das Zurückholen vektorwertiger Kovektorfelder unter differenzierbaren Abbildungen, und wie in [AN2] 5.1.26 gilt wieder

$$\mathrm{d}(f \circ \phi) = \phi^*(\mathrm{d}f)$$

für $\phi : A \to B$ differenzierbar und $f : B \to W$ eine differenzierbare vektorwertige Funktion. Sind speziell A, B offen in $\mathbb{C}$ und ist $\phi : A \to B$ holomorph, so folgt

$$\phi^*(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\phi = \phi' \mathrm{d}w$$

Auch die Verträglichkeit des Wegintegrals mit Verwandtschaft [AN2] 3 gilt in derselben Weise für vektorwertige Kovektorfelder, in Formeln gilt also wieder $\int_\gamma \phi^*\omega = \int_{\phi\circ\gamma} \omega$. Im Spezialfall einer holomorphen Abbildung ϕ erhalten wir insbesondere die bereits in Übung 1.3.18 zu prüfende Identität

$$\int_{\phi\circ\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(\phi(w))\phi'(w)\mathrm{d}w$$

1.6.9 (**Vektorwertige Differentialformen höheren Grades**). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge. Eine **W-wertige r-Form auf** A ist eine Abbildung $\omega : A \to \mathrm{Alt}^r(\vec{X}, W)$. Sie ordnet also jedem Punkt $p \in A$ eine alternierende multilineare Abbildung von $\vec{X}^r$ in den Raum W zu. Für ein stetig differenzierbares vektorwertiges Kovektorfeld ω auf einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist die Homotopieinvarianz des Wegintegrals dann wieder gleichbedeutend zu $d\omega = 0$ für die analog zu [AN2] 6.6.4 definierte W-wertige 2-Form $d\omega$.

1.6.10 (**Körperwertige alternierende Multilinearformen**). Ist K/k eine Körpererweiterung und V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum, so wird die Menge $\mathrm{Alt}^r(V, K) = \mathrm{Alt}_k^r(V, K)$ der k-multilinearen Abbildungen nach K ein K-Untervektorraum von $\mathrm{Ens}(V^r, K)$. Man erklärt dann analog wie im Fall $K = k$ in [AN2] 6.1 ausgeführt K-bilineare Dachprodukte

$$\mathrm{Alt}^r(V, K) \times \mathrm{Alt}^r(V, K) \to \mathrm{Alt}^{r+s}(V, K)$$

und sie haben auch analoge Eigenschaften. Formal erkennt man das am einfachsten, indem man die Einbettung $V \hookrightarrow V_K$ von V in den nach [LA2] 6.1.36 durch Erweiterung der Skalare entstehenden K-Vektorraum betrachtet und sich überlegt, daß die Restriktion Isomorphismen $\mathrm{Alt}_K^r(V_K, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}_k^r(V, K)$ induziert. Bilden insbesondere $f_1, \ldots, f_n$ eine K-Basis von $\mathrm{Hom}_k(V, K)$, so bilden die streng monotonen $\wedge$-Monome der Länge r in den f_i eine K-Basis von $\mathrm{Alt}_k^r(V, K)$.

1.6.11 (**Regeln für die äußere Ableitung komplexwertiger Formen**). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge. So die eben erklärten Regeln liefern auch für $\mathbb{C}$-wertige Differentialformen auf A $\mathbb{C}$-bilineare Dachprodukte, die aus einer r-Form ω und einer s-Form η eine $(r+s)$-Form $\omega \wedge \eta$ machen. Die Regeln aus [AN2] 6.6 für die äußere Ableitung gelten analog auch für komplexwertige Differentialformen.

1.6.12. In unserem Spezialfall eines komplexwertigen Kovektorfelds der Gestalt $\omega = f(z)\mathrm{d}z$ auf einer offenen Teilmenge $U \circledcirc \mathbb{C}$ der komplexen Zahlenebene mit f einmal stetig reell differenzierbar folgt daraus, mit einem komplexlinear zu verstehenden Dachprodukt, die Identität

$$d\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right) \wedge \mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z$$

Aus unseren Erkenntnissen [AN2] 5.7.7 zu Wegintegralen in rotationsfreien Feldern und der Uminterpretation [AN2] 5.7.6 der Rotationsfreiheit als das Verschwinden der äußeren Ableitung folgt dann, daß die Homotopieinvarianz des Wegintegrals von $f(z)\mathrm{d}z$ gleichbedeutend ist zu $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ alias zu $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$ und damit dazu, daß das Differential der reell differenzierbaren Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ sogar komplexlinear ist.

1.6.1 Übungen

Übung 1.6.13 (**Rechnen mit Wirtinger-Ableitungen**). Man zeige $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$. Man zeige weiter für $w = w(z)$ eine reell differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ in eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, auf der hinwiederum eine reell differenzierbare komplexwertige Funktion f definiert ist, die Identitäten

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}$$

Hinweis: Man gehe aus von den Identitäten $\mathrm{d}(\bar{f}) = \overline{\mathrm{d}f}$ und $\mathrm{d}(f \circ w) = w^*(\mathrm{d}f)$.

2 Lokale Struktur holomorpher Funktionen

2.1 Cauchy's Integralformel und ihre Korollare

Satz 2.1.1 (Cauchy's Integralformel). *Seien $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $K \subset U$ eine ganz in U enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe. Bezeichnet $\partial\vec{K}$ einen Weg, der auf dem Rand unserer Kreisscheibe einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft, so gilt für alle Punkte w aus dem Inneren unserer Kreisscheibe die Formel*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\vec{K}} \frac{f(z)}{z - w} \mathrm{d}z$$

2.1.2. Beim ersten Hinsehen mag es so scheinen, als ob in dieser Formel die komplexe Zahl i eine ungebührliche Sonderrolle spielte, denn warum sollte eine der beiden Wurzeln aus -1 hier besser sein als die andere? Dieser scheinbare Widerspruch löst sich jedoch auf, wenn wir bedenken, daß es auch von der Wahl einer Wurzel aus -1 abhängt, welchen Weg um eine Kreisscheibe wir als „im Gegenuhrzeigersinn umlaufend" bezeichnen. Das ist ja überhaupt keine streng mathematische Formulierung und hängt sowohl von der Konvention der Uhr ab als auch von der Konvention, daß wir in der Zahlenebene 1 nach rechts und i nach oben abtragen. Ist streng mathematisch formuliert p das Zentrum unserer Kreisscheibe und R ihr Radius, so meinen wir in Formeln den Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $t \mapsto p + R\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$. Die Integralformel von Cauchy wird sich später als ein Spezialfall des Residuensatzes 3.2.11 erweisen.

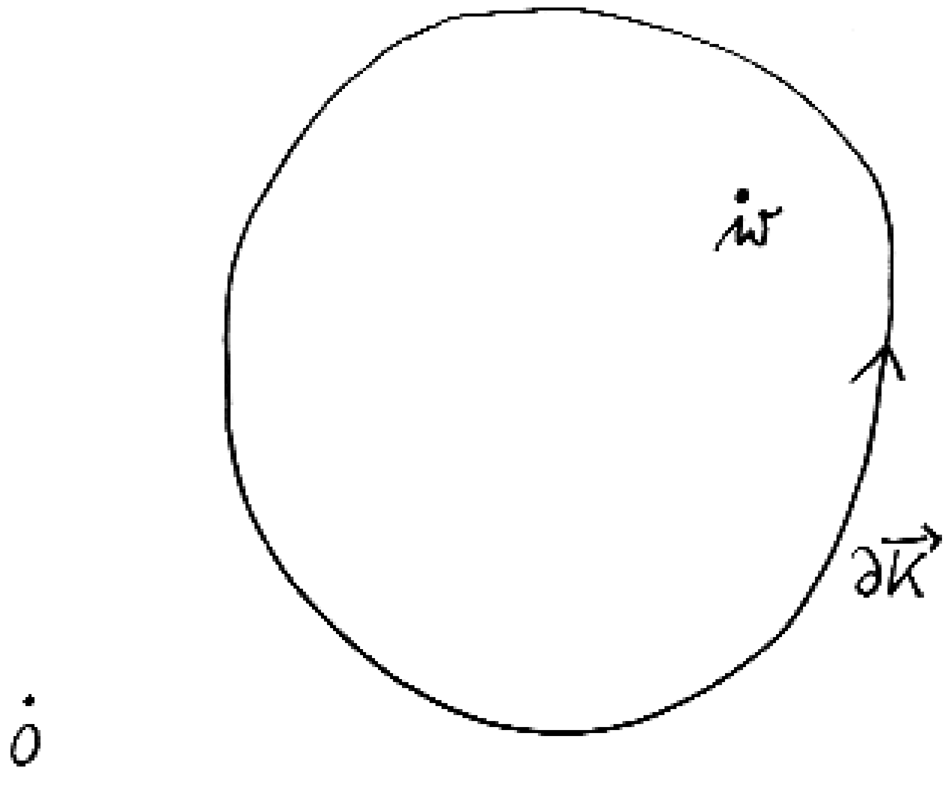
2.1.3. Der Pfeil über dem K soll wie in [AN2] 6.3.7 die Wahl der Orientierung dieser berandeten Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}$ andeuten. Genauer versehen wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ mit der Orientierung, für die $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$ eine positiv orientierte Karte ist, K erbt eine Orientierung als glatt berandete Teilmenge, und ∂K schließlich wird versehen mit der auf dem Rand induzierten Orientierung.

Beweis. Nach der Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie 1.5.14 bleibt die rechte Seite unverändert, wenn wir unseren Weg $\partial\vec{K}$ ersetzen durch den kreisförmigen Weg γ_ε um w mit beliebigem Radius ε, sofern nur besagter Weg ganz in unserer Kreisscheibe verläuft. Es reicht also zu zeigen

$$f(w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - w} \mathrm{d}z$$

Nun hat ja γ_ε die Form $\gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto w + \varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Die fraglichen Integrale ergeben sich damit zu

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + \varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}\varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \varepsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \mathrm{d}t$$



Die Grundsituation bei Cauchy's Integralformel und konvergieren wegen der Stetigkeit von f offensichtlich gegen $f(w)$. $\square$

Korollar 2.1.4 (Mittelwerteigenschaft). *Der Wert einer holomorphen Funktion im Zentrum einer beliebigen abgeschlossenen Kreisscheibe aus ihrem Definitionsbereich ist der Durchschnitt über ihre Funktionswerte auf dem Rand besagter Kreisscheibe.*

Beweis. Dieser Satz gibt nur in Worten die Aussage der Integralformel in dem Spezialfall wieder, daß w das Zentrum der Kreisscheibe ist, wie in den letzten Zeilen des vorhergehenden Beweises bereits ausgeführt wurde. $\square$

Korollar 2.1.5 (Goursat). *Die Ableitung einer holomorphen Funktion ist auch selbst wieder holomorph.*

Beweis. Übung 1.2.21 über das holomorphe Ableiten unter dem Integral zeigt, daß die rechte Seite der Cauchy'schen Integralformel 2.1.1 beliebig oft komplex nach w abgeleitet werden kann. Das liefert für die höheren Ableitungen einer holomorphen Funktion f, die auf einer offenen Umgebung einer abgeschlossenen Kreisscheibe K definiert ist, sogar die explizite Darstellung

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \vec{K}} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} \mathrm{d}z \qquad \square$$

Satz 2.1.6 (Liouville). *Jede holomorphe auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte und beschränkte Funktion ist konstant.*

2.1.7. Eine auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte holomorphe Funktion heißt auch eine **ganze Funktion**. Einen alternativen Beweis für den Satz von Liouville geben wir in 3.1.16.

Beweis. Lassen wir bei der Darstellung der Ableitung, also dem Fall $n = 1$ der Formeln vom Ende des vorhergehenden Beweises zu 2.1.5 den Radius R unserer Kreisscheibe gegen Unendlich streben, so strebt die Länge des Integrationsweges linear mit dem Radius gegen Unendlich, das Supremum der zu integrierenden Funktion aber ist für $R > |w|$ betragsmäßig beschränkt durch eine beliebige obere Schranke von $|f|$ multipliziert mit $(R - |w|)^{-2}$, fällt also salopp gesprochen quadratisch mit dem Radius. Da unsere Formel für alle Radien gilt, folgt $f'(w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{C}$. $\square$

2.1.8 (**Fundamentalsatz der Algebra**). Ich erinnere den an Fundamentalsatz der Algebra [LA1] 4.3.25: Jede Polynomfunktion ohne Nullstelle $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant. Wir zeigen das nun mit den Mitteln der Funktionentheorie. Da für jedes Polynom P positiven Grades gilt $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = \infty$, ist für jede Polynomfunktion ohne Nullstelle aber $1/P$ eine beschränkte holomorphe Funktion. Nach dem Satz von Liouville 2.1.6 ist dann $1/P$ und folglich auch P konstant.

Satz 2.1.9 (Morera). *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene ist holomorph genau dann, wenn für jedes achsenparallele ganz in unserer Teilmenge enthaltene Rechteck das Randintegral verschwindet.*

Ergänzung 2.1.10. Eine in der Literatur oft bewiesene schwächere Variante besagt, daß eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene holomorph genau dann ist, wenn ihr Wegintegral über jeden „Dreiecksrand" verschwindet, sobald die ganze „Dreiecksfläche" im Definitionsbereich unserer Funktion liegt.

Beweis. Für holomorphe Funktionen verschwinden diese Integrale nach dem Integralsatz 1.5.1. Für die Umkehrung dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, unsere Teilmenge sei eine offene Kreisscheibe. Verschwinden dann alle die fraglichen Integrale, so besitzt unsere Funktion nach 1.3.16 eine Stammfunktion und ist folglich als Ableitung einer holomorphen Funktion nach dem Satz von Goursat 2.1.5 selbst holomorph. □

Korollar 2.1.11. *Ist $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die holomorph ist auf dem Komplement einer oder allgemeiner endlich vieler reeller affiner Geraden, so ist f bereits holomorph auf ganz U.*

2.1.12. Man kann in ähnlicher Weise sehr viel stärkere Sätze beweisen. Als Übung mögen sie zeigen, daß eine stetige Funktion, die holomorph ist auf dem Komplement einer endlichen Vereinigung eindimensionaler in U abgeschlossener $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeiten der komplexen Zahlenebene im Sinne von [AN2] 3.3.2, bereits auf ganz U holomorph ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß unsere Funktion auf dem Komplement einer einzigen reellen Geraden holomorph ist und daß diese Gerade sogar die reelle Achse ist. Nach 2.1.9 reicht es nun zu zeigen, daß für jedes achsenparallele ganz in unserer Teilmenge enthaltene Rechteck das Randintegral verschwindet. Durch entsprechendes Zerschneiden von Rechtecken ziehen wir uns auf den Fall zurück, daß eine Kante unseres Rechtecks auf der reellen Achse liegt. Seien also $a, b, a + h\mathrm{i}, b + h\mathrm{i}$ mit $a, b, h \in \mathbb{R}$ und $a < b$ sowie $0 \neq h$ die Ecken unseres Rechtecks. Nach elementaren Abschätzungen ist dies Randintegral für jedes stetige f eine stetige Funktion von h, die sich durch den Wert Null stetig nach $h = 0$ fortsetzen läßt. Nach dem Integralsatz von Cauchy ist für f holomorph auf $U \backslash \mathbb{R}$ dies Randintegral aber unabhängig von h für $h > 0$ und, a priori eventuell mit einem anderen Wert, für $h < 0$. Das zeigt, daß unser Randintegral Null sein muß für alle h. □

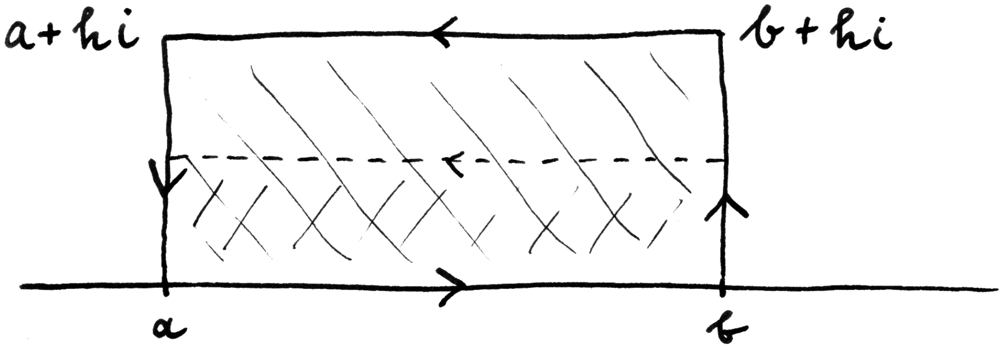


Illustration zum Beweis von 2.1.11. Die reelle Achse in der komplexen Zahlenebene ist als durchgehende Gerade eingezeichnet. Integrieren wir eine stetige Funktion, die außerhalb der reellen Gerade holomorph ist, über den Rand des großen Rechtecks, so kommt dasselbe heraus, wie wenn wir sie über den Rand des kleinen unteren doppelt schraffierten Rechtecks integrieren, denn das Integral über den Rand des einfach schraffierten oberen Rechtecks ist Null.

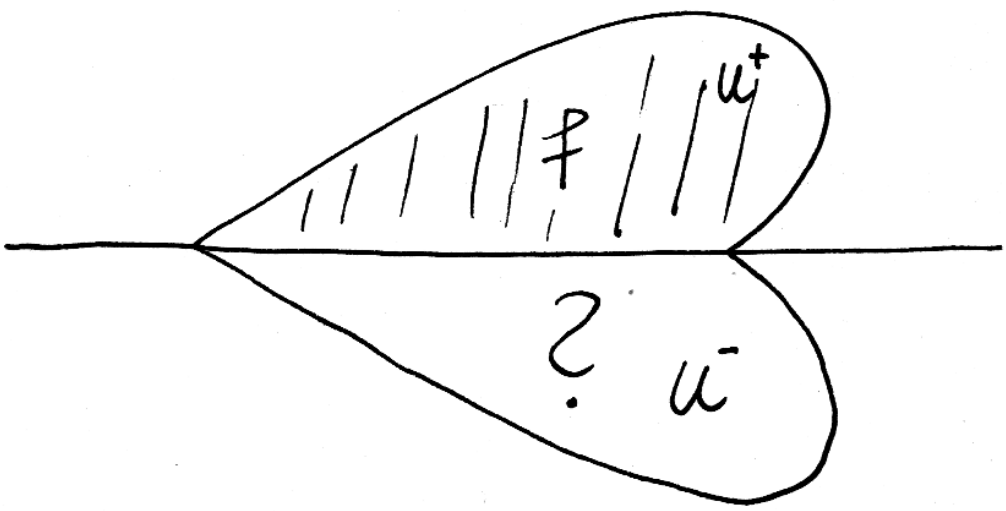


Illustration zum Schwarz'schen Spiegelungsprinzip

Übungen

Übung 2.1.13 (**Maximumsprinzip, schwache Form**). Man zeige: Gegeben eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und ein nichtleeres Kompaktum $K \subset U$ gibt es $p \in K$ derart, daß keine Kreisscheibe mit Zentrum p ganz in K liegt und daß gilt $|f(p)| \geq |f(z)|\ \forall z \in K$. Salopp gesprochen nimmt also die Restriktion unserer Funktion auf unser Kompaktum ihr Betragsmaximum stets in einem „Randpunkt“ unseres Kompaktums an. Eine noch stärkere Aussage in dieser Richtung liefert das Maximumsprinzip 2.4.10.

Übung 2.1.14 (**Schwarz'sches Spiegelungsprinzip**). Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen und stabil unter der komplexen Konjugation. Wir zerlegen U in einen Teil auf der reellen Achse, einen Teil oberhalb und einen unterhalb in der Form

$$U = U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \sqcup U^-$$

mit $U^\pm := \{z \in U \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$. Man zeige: Ist $f : U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph auf U^+ und reellwertig auf $U \cap \mathbb{R}$, so können wir f zu einer holomorphen Funktion auf U ausdehnen, indem wir für alle $z \in U^-$ setzen $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Hinweis: 1.2.19 und 2.1.11.

Übung 2.1.15 (**Integrale über Familien holomorpher Funktionen**). Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$, $(z, t) \mapsto f(z, t)$ stetig. Ist $z \mapsto f(z, t)$ für alle $t \in [a, b]$ holomorph, so ist auch die Abbildung $F : z \mapsto \int_a^b f(z, t)\mathrm{d}t$ holomorph. Des weiteren ist dann $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(w) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(w, t)\mathrm{d}t$$

Hinweis: Man folgere aus dem Satz von Morera 2.1.9, daß F holomorph ist, und aus der expliziten Formel für die Ableitung aus dem Beweis des Satzes von Goursat 2.1.5, daß $\frac{\partial f}{\partial z}$ stetig ist. Dann kann man Übung 1.2.21 zum holomorphn Ableiten unter dem Integral anwenden.

Übung 2.1.16. Jede nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat dichtes Bild. Hinweis: Für $w \notin f(\mathbb{C})$ betrachte man die Funktionen $g : z \mapsto 1/(f(z) - w)$.

2.2 Potenzreihenentwicklung

2.2.1. Einen Ausdruck der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ mit $a_\nu \in \mathbb{C}$ im Sinne von [LA1] 4.3.40 nennen wir eine **komplexe Potenzreihe**. Eine Potenzreihe anzugeben bedeutet also nichts anderes, als die Folge ihrer Koeffizienten a_ν anzugeben. Ist nun $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ eine komplexe Potenzreihe und konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für ein $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^\nu$ absolut für alle $w \in \mathbb{C}$ mit

$|w| < |z|$. Der Beweis dieser Tatsache ist identisch zum Beweis der entsprechenden Aussage im Reellen [AN1] 5.1.1, den wir dort nur deshalb nicht im Komplexen geführt haben, weil uns die komplexen Zahlen noch nicht zur Verfügung standen. Wir erklären den **Konvergenzradius** $r \in [0, \infty]$ einer Potenzreihe $\sum a_\nu z^\nu$ wie im Reellen in [AN1] 5.1.3 durch

$$r = \sup\{|z| \mid \sum a_\nu z^\nu \text{ konvergiert}\}$$

und erkennen dabei auch gleich den geometrischen Ursprung der Bezeichnung „Konvergenzradius“, die im Rahmen der reellen Analysis noch recht unmotiviert wirkt. Genau wie in [AN1] 5.1.4 zeigt man, daß die Partialsummen einer komplexen Potenzreihe mit Konvergenzradius r gleichmäßig konvergieren auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe mit Zentrum im Ursprung und Radius $\rho < r$. Das folgende Korollar 2.2.5 zeigt dann, daß eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius r auf der ganzen offenen Kreisscheibe $\{z \mid |z| < r\}$ mit dem Radius r eine holomorphe Funktion darstellt.

2.2.2. Einen Ausdruck der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-p)^\nu$ mit $a_\nu \in \mathbb{C}$ nennt man auch eine **Potenzreihe mit Entwicklungspunkt** p. Ihr Konvergenzbereich besteht dann aus allen z in einer geeigneten offenen Kreisscheibe mit Zentrum p, möglicherweise noch zusammen mit einigen Punkten auf deren Rand.

Definition 2.2.3. Eine Folge komplexwertiger Funktionen auf einem metrischen oder allgemeiner topologischen Raum heißt **kompakt konvergent** gegen eine Grenzfunktion genau dann, wenn sie auf allen Kompakta unseres Raums gleichmäßig gegen besagte Grenzfunktion konvergiert.

2.2.4. Im Rahmen der Funktionentheorie nennt man eine Reihe von Funktionen **normal konvergent** genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen im Sinne der vorhergehenden Definition 2.2.3 kompakt konvergiert.

Korollar 2.2.5 (Grenzwerte von Folgen holomorpher Funktionen). *Konvergiert eine Folge holomorpher Funktionen kompakt, so ist die Grenzfunktion holomorph und die Folge der Ableitungen konvergiert kompakt gegen die Ableitung der Grenzfunktion.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus der Charakterisierung 2.1.9 der Holomorphie durch das Verschwinden von Randintegralen zu Rechtecken. Was die zweite Aussage angeht, so erhalten wir aus der expliziten Formel für die Ableitung als Wegintegral aus dem Beweis von 2.1.5 schon mal, daß jeder Punkt eine Umgebung besitzt, auf der die Ableitungen unserer Funktionen gleichmäßig gegen die Ableitung der Grenzfunktion streben. Mit [AN1] 7.5.3 besitzt dann jedes Kompaktum eine endliche Überdeckung durch Teilmengen, auf denen die Konvergenz der Ableitungen gleichmäßig ist, und damit ist auch die Konvergenz der Ableitungen gleichmäßig auf Kompakta. □

Beispiel 2.2.6. Für eine in einer Umgebung des Ursprungs durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion $f(w) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu$ gilt stets $f^{(n)}(0) = n!a_n$. In der Tat konvergieren komplexe Potenzreihen wie in 2.2.1 erklärt kompakt auf dem Inneren ihres Konvergenzbereichs, nach 2.2.5 dürfen wir sie also auch im Komplexen gliedweise ableiten, und der konstante Term der durch n-maliges Ableiten entstehenden Potenzreihe ist offensichtlich $n!a_n$.

Korollar 2.2.7 (Entwicklung in eine Potenzreihe). *Eine komplexwertige Funktion auf einer offenen Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene ist holomorph genau dann, wenn sie auf der ganzen offenen Kreisscheibe durch eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt im Zentrum besagter Kreisscheibe dargestellt werden kann.*

Beweis. Warum Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktionen darstellen, haben wir bereits in 2.2.1 diskutiert. Um umgekehrt zu zeigen, daß jede auf einer offenen Kreisscheibe holomorphe Funktion auch tatsächlich durch eine auf der ganzen offenen Kreisscheibe konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere offene Kreisscheibe, sie heiße etwa K, ihr Zentrum im Ursprung hat. Nun beachten wir für $|w| < |z|$ die Entwicklung

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-(w/z)}\right) = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^{\nu}$$

Die Konvergenz der Partialsummen geschieht hier bei festem w gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Kreisring $|z| = \rho$ mit $\rho > |w|$, da die rechte Reihe für alle z auf diesem Kreisring majoriert wird durch die konvergente Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} (|w|/\rho)^\nu$. Folglich können wir unsere Summe mit der Integration in der Integralformel von Cauchy vertauschen und erhalten

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{\nu+1}} \mathrm{d}z \right) w^\nu$$

für jedes $w \in K$ und jedes ρ mit $|w| < \rho < r$ für r den Radius unserer offenen Kreisscheibe K. Bei unserem Wegintegral ist dabei der geschlossene Weg gemeint, der im Gegenuhrzeigersinn auf der Kreislinie $|z| = \rho$ einmal um den Ursprung läuft. Da unser Integral von ρ gar nicht abhängt, steht damit auch schon eine Entwicklung in eine Potenzreihe da. Deren Koeffizienten müssen wegen dem nach 2.2.5 erlaubten gliedweisen Ableiten gerade die $f^{(\nu)}(0)/\nu!$ sein, so daß unsere Funktion auf der ganzen offenen Kreisscheibe dargestellt wird durch ihre **Taylorreihe**

$$f(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} w^\nu \qquad \square$$

2.2.8 (**Konvergenzradius und holomorphe Fortsetzung**). Hat die Taylorreihe einer holomorphen Funktion an einer Stelle einen gegebenen Konvergenzradius, so kann unsere Funktion nicht holomorph auf eine offene Kreisscheibe mit Zentrum in besagter Stelle und echt größerem Radius fortgesetzt werden: Sonst müßte sich nämlich diese Fortsetzung auf der größeren offenen Kreisscheibe nach unserem Korollar auch durch ihre Taylorreihe, notwendig dieselbe, darstellen lassen, im Widerspruch zu unseren Annahmen an den Konvergenzradius.

Übungen

Übung 2.2.9. Man bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe des Arcustangens zum Entwicklungspunkt Eins.

Übung 2.2.10. Man zeige, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ der Hauptzweig des Logarithmus von $1 + z$ auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Hinweis: Mit etwas Tricksen hatten wir das in 1.2.18 schon einmal gesehen.

Übung 2.2.11. Man zeige, daß eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für die $|f(z)|/|z^n|$ für $|z| > 1$ beschränkt bleibt, ein Polynom vom Grad $\leq n$ sein muß.

Übung 2.2.12 (**Cauchy-Abschätzung der Koeffizienten einer Potenzreihe**). Gegeben eine holomorphe Funktion f, deren Definitionsbereich eine abgeschlossene Kreisscheibe um p mit Radius $R > 0$ umfaßt, können die Koeffizienten ihrer Taylorreihe bei p abgeschätzt werden durch

$$\left| \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \right| \leq \frac{1}{R^n} \sup\{|f(z)| \mid |z - p| = R\}$$

In anderen Formeln ausgedrückt gilt für alle Potenzreihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ und alle nichtnegativen R unterhalb ihres Konvergenzradius und alle $n \geq 0$ demnach

$$|a_n| R^n \leq \sup_{|z|=R} \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\right|$$

Salopp gesprochen können also komplexe Potenzreihen, die „nur relativ kleine“ Werte annehmen, auch „nur relativ kleine Koeffizienten“ haben, und wenn ich genauer von einer Potenzreihe alle Terme bis auf einen weglasse, wird sie auf jedem Kreisring im Inneren des Konvergenzbereichs mit Zentrum im Entwicklungspunkt an mindestens einer Stelle betragsmäßig nicht kleiner. Hinweis: Beweis des Satzes von 2.1.5. Selbst im Fall von komplexen Polynomen kenne ich keinen anderen Beweis für diese Tatsache, deren reelles Analogon im Übrigen ziemlich falsch ist: Man denke nur etwa an die Gauß’sche Glockenkurve!

Übung 2.2.13 (**Abschätzung für Potenzreihen von Operatoren**). Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Wir wählen eine Norm auf V und versehen den Raum $\operatorname{End} V$ aller Endomorphismen von V mit der Operatornorm. Gegeben eine komplexe Potenzreihe $\sum a_\nu z^\nu$ mit Konvergenzradius $r \in [0, \infty]$, die gegen eine Funktion $f(z)$ konvergiert, und ein Endomorphismus $A \in \operatorname{End} V$ mit $\|A\| < r$ zeige man, daß $\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu A^\nu$ absolut summierbar ist und daß für $\|A\| < R < r$ gilt

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu A^\nu \right\| \leq \sup\{|f(z)| \text{ mit } |z| = R\} \left(1 - (\|A\|/R)\right)^{-1}$$

Man notiert die Summe dieser absolut summierbaren Familie $f(A) \in \operatorname{End} V$. Unternehmende Leser betrachten allgemeiner den Fall eines Banachraums V. Hinweis: Cauchy-Abschätzung 2.2.12.

Ergänzung 2.2.14 (**Komplexe Analoga des Abel'schen Grenzwertsatzes**). Der Abel'sche Grenzwertsatz [AN1] 5.4.2 muß im Komplexen sorgfältiger formuliert werden: Konvergiert eine komplexe Potenzreihe auch noch auf einem Randpunkt ihrer offenen Konvergenzkreisscheibe, so stellt sie nicht notwendig auf der ganzen offenen Kreisscheibe vereinigt mit diesem Randpunkt eine stetige Funktion dar, sondern nur auf jedem abgeschlossenen Winkelsegment, das „vom fraglichen Randpunkt aus ins Innere der Kreisscheibe geht". Diese Stetigkeit auf Winkelsegmenten zeigen wir im allgemeineren Kontext der Dirichlet-Reihen in 5.3.2. Welche Schwierigkeiten im allgemeinen auftreten können, zeigt die Poisson-Transformation 4.1.13.

Übung 2.2.15 (**Binomische Reihe im Komplexen**). Man zeige, daß auch für $z, \alpha \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ die binomische Reihe [AN1] 5.1.19 gegen $(1+z)^\alpha$ konvergiert. Hier verwendet man die offensichtliche Erweiterung der Binomialkoeffizienten ins Komplexe und versteht $(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \log(z+1))$ für $\log$ den Hauptzweig des Logarithmus, vergleiche [AN1] 4.10.3.

Übung 2.2.16. Gegeben $U, V \Subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(U) \subset V$ und $p \in U$ erhält man die Taylorreihe von $g \circ f$ bei p durch das „Einsetzen" der Taylorreihe von f bei p in die Taylorreihe von g bei $f(p)$. Sind genauer $f(p+z) = \sum a_\nu z^\nu$ und $g(f(p)+w) = \sum b_\mu w^\mu$ und $g(f(p+z)) = \sum c_\lambda z^\lambda$ die jeweiligen Taylorreihen, so gilt

$$c_\lambda = \sum_{\nu(1)+\ldots+\nu(\mu)=\lambda} b_\mu a_{\nu(1)} \ldots a_{\nu(\mu)}$$

wo die Summe zu verstehen ist über alle $\mu \geq 0$ und über alle Abbildungen $\nu : \{1, \ldots, \mu\} \to \mathbb{N}_{\geq 1}$, bei denen die Summe der Werte gerade λ ist. Im Fall $\lambda = 0$ geht das nur mit $\mu = 0$ und wir erhalten speziell $c_0 = b_0$. Der Koeffizient a_0 geht nur insofern ein, als eben g um $f(p) = a_0$ entwickelt werden muß.

Übung 2.2.17 (**Exponential und Logarithmus für Matrizen**). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Wir wählen eine Norm auf V und versehen den Raum $\operatorname{End} V$ aller Endomorphismen von V mit der Operatornorm und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \log : & \mathrm{B}(\mathrm{id}; 1) & \to & \operatorname{End} V \\ & (A + \mathrm{id}) & \mapsto & A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} \dots \end{array}$$

Man zeige die Formel $\exp(\log X) = X$ für alle X im offenen Ball um die Identität mit Radius Eins. Hinweis: Schneiden wir unsere Potenzreihen geeignet ab, so erhalten wir durch Verknüpfen eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig auf jedem Kompaktum aus $\mathrm{B}(1; 1)$ gegen die Funktion z konvergiert. Nun verwende man 2.2.13. Ein schlechter verallgemeinerbares aber elementareres Argument findet man in [AN2] 1.4.14.

Übung 2.2.18 (**Holomorphe Funktionen und formale Potenzreihen**). Die Entwicklung in eine Potenzreihe liefert für jede offene Umgebung $U \Subset \mathbb{C}$ des Ursprungs in der Zahlenebene einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U) \to \mathbb{C}[\![z]\!]$ vom Ring $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U)$ der holomorphen Funktionen auf U in den Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[\![z]\!]$ aus [LA1] 4.3.40. Ist U wegzusammenhängend, so erhalten wir auf diese Weise sogar einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U) \hookrightarrow \mathbb{C}[\![z]\!]$$

2.3 Nullstellenmengen holomorpher Funktionen

Lemma 2.3.1. *Hat eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf $U \Subset \mathbb{C}$ bei $p \in U$ eine Nullstelle, verschwindet aber auf keiner Umgebung von p identisch, so gibt es genau ein $n \geq 1$, genannt die* **Ordnung der Nullstelle***, und genau eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g(p) \neq 0$ und $f(z) = (z - p)^n g(z)$ für alle $z \in U$.*

Beweis. Das folgt sofort aus der Potenzreihenentwicklung 2.2.7. □

Satz 2.3.2 (Isolierte und nicht-isolierte Nullstellen). *Jede Nullstelle einer holomorphen Funktion besitzt entweder eine Umgebung, in der sie die einzige Nullstelle ist, oder eine Umgebung, auf der unsere Funktion identisch verschwindet.*

2.3.3. Der Satz wird sich bald auch als Korollar des allgemeinen Satzes 2.4.5 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen erweisen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege unsere Nullstelle am Ursprung und unsere Funktion sei definiert auf einer offenen Kreisscheibe mit Zentrum im Ursprung. So ist unsere Funktion auf dieser Kreisscheibe entweder identisch Null oder die Potenzreihenentwicklung alias 2.3.1 liefert eine Darstellung der Gestalt $f(z) = z^n g(z)$ mit g stetig und $g(0) \neq 0$. Dann gibt es aber eine Umgebung des Ursprungs, auf der g keine Nullstelle hat, und in dieser Umgebung ist der Ursprung die einzige Nullstelle von f. $\square$

Definition 2.3.4. Eine Nullstelle einer stetigen Funktion, die in einer offenen Teilmenge des Definitionsbereichs die einzige Nullstelle ist, nennen wir ganz allgemein eine **isolierte Nullstelle** unserer Funktion.

Korollar 2.3.5 (**Nullstellenmengen holomorpher Funktionen**). *Hat die Menge der Nullstellen einer holomorphen Funktion mit wegzusammenhängendem Definitionsbereich einen Häufungspunkt in besagtem Definitionsbereich, so ist unsere Funktion die Nullfunktion.*

2.3.6. Insbesondere hat also eine von Null verschiedene holomorphe Funktion mit wegzusammenhängendem Definitionsbereich nur isolierte Nullstellen. Allerdings können sich diese Nullstellen durchaus „am Rand des Definitionsbereichs häufen“.

Beweis mit dem Wegzusammenhangsbegriff. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ unsere holomorphe Funktion. Gegeben eine nichtisolierte Nullstelle wissen wir bereits, daß unsere Funktion auf einer ganzen Umgebung unserer nichtisolierten Nullstelle identisch verschwinden muß. Zu jedem anderen Punkt aus U gibt es nun nach [AN2] 5.5.4 sogar einen stückweise linearen Weg $\gamma : [a, b] \to U$, und wir können zusätzlich annehmen, daß unser Weg auf keinem Teilintervall mit mehr als einem Punkt konstant ist. Würde f an seinem Endpunkt nicht verschwinden, $f(\gamma(b)) \neq 0$, so wäre

$$s := \inf\{t \in [a, b] \mid f(\gamma(t)) \neq 0\}$$

ein Punkt aus unserem Intervall $[a, b]$. Da f in einer Umgebung von $\gamma(a)$ identisch verschwindet, hätten wir $s > a$. Wegen der Stetigkeit von f hätten wir notwendig $f(\gamma(s)) = 0$. Da aber f auf dem Anfangsstück $\gamma[a, s]$ unseres Weges identisch verschwindet, wäre auch $\gamma(s)$ keine isolierte Nullstelle von f. Also müßte f in einer Umgebung von $\gamma(s)$ identisch verschwinden, und das stünde im Widerspruch zur Wahl von s. $\square$

Ergänzung 2.3.7. Ich erinnere daran, daß ein topologischer Raum nach [AN2] 5.5.11 zusammenhängend heißt genau dann, wenn er nicht leer ist und jede nichtleere offene und abgeschlossene Teilmenge bereits der ganze Raum ist. Ich erinnere weiter daran, daß wir seit [AN2] 5.5.11 für offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene wissen, daß sie genau dann zusammenhängend sind, wenn sie wegzusammenhängend sind. Die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ müssen dabei dann allerdings in Bezug auf die Spurtopologie verstanden werden.

Beweis mit dem topologischen Zusammenhangsbegriff. Die nicht-isolierten Nullstellen einer stetigen komplexwertigen Funktion bilden eine abgeschlossene Teilmenge ihres Definitionsbereichs, denn jeder Punkt aus dem Abschluß dieser Menge ist Grenzwert einer Folge von Nullstellen und damit selbst eine nicht-isolierte Nullstelle. Nach 2.3.2 bilden im Fall holomorpher Funktionen die nicht-isolierten Nullstellen jedoch auch eine offene Teilmenge. Ist der Definitionsbereich wegzusammenhängend, so sind nach [AN2] 5.5.18 entweder alle seine Punkte nicht-isolierte Nullstellen oder keiner. Besitzt die Menge aller Nullstellen aber einen Häufungspunkt, so sind wir notwendig im ersten Fall und unsere Funktion ist die Nullfunktion. □

Korollar 2.3.8 (Identitätssatz). *Stimmen zwei auf einer wegzusammenhängenden offenen Menge definierte holomorphe Funktionen überein auf einer Teilmenge mit einem Häufungspunkt in besagter offener Menge, so sind sie gleich.*

Beweis. Man wende das vorhergehende Korollar 2.3.5 über Nullstellenmengen holomorpher Funktionen auf die Differenz unserer beiden Funktionen an. □

Beispiel 2.3.9. Die komplexe Exponentialfunktion ist die einzige holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf der reellen Achse mit der reellen Exponentialfunktion übereinstimmt.

Übungen

Übung 2.3.10. Eine stetige komplexwertige Funktion auf der reellen Achse besitzt höchstens eine Fortsetzung auf die abgeschlossene obere Halbebene, die sowohl stetig ist auf der abgeschlossenen oberen Halbebene als auch holomorph auf der offenen oberen Halbebene. Man zeige auch, daß nicht jede stetige komplexwertige Funktion auf der reellen Achse in dieser Weise fortgesetzt werden kann. Hinweis: Spiegelungsprinzip 2.1.14.

Ergänzende Übung 2.3.11. Man zeige, daß sich die auf der offenen Einheitskreisscheibe durch die Reihen $\sum_{k\geq 1} z^k/k^n$ definierten Funktionen holomorph auf das Komplement von $\mathbb{R}_{\geq 1}$ in der komplexen Zahlenebene fortsetzen lassen. Die zugehörigen Funktionen heißen **Polylogarithmen** oder präziser n**-Logarithmen** und werden $\operatorname{Li}_n(z)$ oder auch $\operatorname{L}_n(z)$ notiert. Insbesondere den **Dilogarithmus** Li_2 trifft man des öfteren. Für den 1-Logarithmus gilt $\operatorname{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ nach [AN1] 5.1.21. Man zeige allgemeiner, daß sie sich für jede einfach zusammenhängende offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}\backslash\{1, 0\}$ und jede Zusammenhangskomponente des Schnitts von U mit der offenen Einheitskreisscheibe eindeutig von diesem Schnitt auf die ganze Menge U fortsetzen lassen. In der Terminologie aus [TG] 2.1.31 liefert also in der „Riemannschen Fläche unseres Funktionskeims das Urbild des Komplements von $\{1, 0\}$ ein Überlagerung dieses Komplements“.

2.4 Lokale Struktur holomorpher Funktionen

Lemma 2.4.1 (Lokaler Umkehrsatz für holomorphe Funktionen). *Ist $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(p) \neq 0$, so gibt es eine offene Umgebung $V \Subset U$ von p derart, daß die Restriktion von f auf V eine biholomorphe Einbettung ist.*

2.4.2. Ein alternativer Beweis dieses Lemmas, der die Analysis mehrerer Veränderlichen weitgehend vermeidet, wird in Übung 1.5.19 skizziert. Er scheint mir aber konzeptionell schwieriger.

Beweis. Nach dem Satz von Goursat 2.1.5 ist f stetig differenzierbar. Der Satz [AN2] 3.1.2 über die Umkehrabbildung aus der Analysis sagt uns dann, daß f eine offene Umgebung von p mit einer offenen Umgebung von $f(p)$ so identifiziert, daß auch die Umkehrabbildung stetig ist, ja sogar stetig reell differenzierbar. Proposition 1.2.6 über Umkehrfunktionen holomorpher Funktionen liefert damit den Rest der Behauptung. □

2.4.3. Wenden wir dieses Lemma auf die Abbildungen $z \mapsto z^n$ an, so ergibt sich, daß jeder Punkt $q \in \mathbb{C}^\times$ eine offene Umgebung W besitzt, auf der eine holomorphe Funktion $k : W \to \mathbb{C}$ existiert mit $k(z)^n = z$ für alle $z \in W$. Es ist aber auch explizit leicht zu sehen, daß es solche n-ten Wurzelfunktionen k sogar auf jeder geschlitzten komplexen Zahlenebene $W = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0} s$ mit $s \in \mathbb{C}^\times$ gibt.

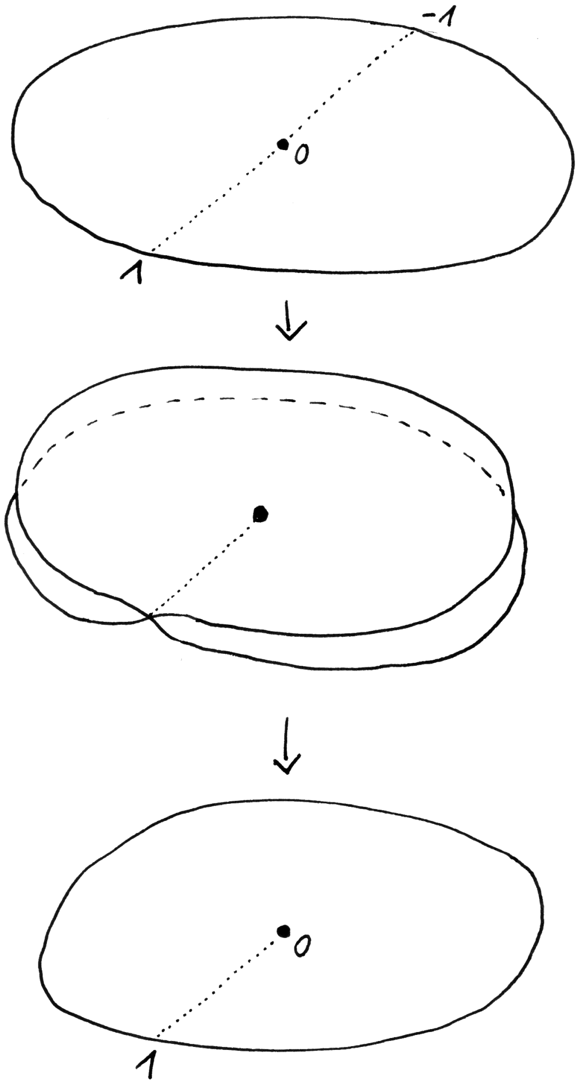
Proposition 2.4.4 (Wurzeln holomorpher Funktionen an Nullstellen). *Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer Nullstelle endlicher Ordnung $n \geq 1$ bei p. So gibt es eine offene Umgebung $V \Subset U$ von p und eine biholomorphe Einbettung $w : V \hookrightarrow \mathbb{C}$ derart, daß für alle $z \in V$ gilt*

$$f(z) = w(z)^n$$

Beweis. Im Fall $n = 1$ gilt es zu zeigen, daß f selbst eine biholomorphe Einbettung auf einer offenen Umgebung von p induziert, und das ist gerade die Aussage des lokalen Umkehrsatzes für holomorphe Funktionen 2.4.1. Im allgemeinen dürfen wir sicher $p = 0$ annehmen. Wir entwickeln f in eine Potenzreihe und erhalten

$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu z^\nu = z^n \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} z^\nu = z^n g(z)$$

für eine holomorphe Funktion g mit $g(0) \neq 0$. Nun finden wir sicher eine offene Umgebung $W \Subset U$ des Ursprungs derart, daß es auf $g(W)$ eine n-te Wurzel gibt, so daß wir auf W ein holomorphes $h(z) = \sqrt[n]{g(z)}$ finden können mit $h(z)^n = g(z) \quad \forall z \in W$. Dann gilt $f(z) = (zh(z))^n \quad \forall z \in W$ und $w : z \mapsto zh(z)$ ist nach dem lokalen Umkehrsatz 2.4.1 nach Restriktion zu einer gegebenenfalls noch kleineren Umgebung V des Ursprungs eine biholomorphe Einbettung. □



Dies Bild soll Anschauung für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der Einheitskreisscheibe auf sich selbst vermitteln. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ für geeignetes monotones und in einer Umgebung von Null streng monotones ε, gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das hat den Vorteil, daß im ersten Schritt nur gegenüberliegende Punkte der reellen Achse identifiziert werden, was man sich leicht wegdenken kann, und daß der zweite Schritt eine sehr anschauliche Bedeutung hat, eben die senkrechte Projektion.

Satz 2.4.5 (Lokale Struktur holomorpher Funktionen). *Seien $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf $U \Subset \mathbb{C}$ und $p \in U$ ein Punkt. So gibt es biholomorphe Einbettungen $u : E \hookrightarrow U$ und $v : E \hookrightarrow \mathbb{C}$ der offenen Einheitskreisscheibe in den Definitions- und Wertebereich von f mit $u(0) = p$ und $v(0) = f(p)$ sowie $n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \sqcup \{\infty\}$ derart, daß das Diagramm punktierter Räume*

$$\begin{tikzcd} z \arrow[d, mapsto] & (E,0) \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d] & (U,p) \arrow[d, "f"] \\ z^n & (E,0) \arrow[r, hook, "v"] & (\mathbb{C}, f(p)) \end{tikzcd}$$

kommmutiert, mit der Interpretation von $z \mapsto z^\infty$ als konstanter Abbildung mit Wert Null. Das n ist dabei die Nullstellenordnung von $z \mapsto f(z) - f(p)$ bei $z = p$.

Beweis. Um das zu sehen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(p) = 0$ annehmen. Hat f eine Nullstelle unendlicher Ordnung bei p, so ist f konstant Null in einer Umgebung von p und u und v sind leicht zu finden. Andernfalls können wir unseren Satz 2.4.4 über Wurzeln holomorpher Funktionen bei Nullstellen anwenden und eine offene Umgebung $V \Subset U$ von p nebst einer biholomorphen Einbettung $w : V \hookrightarrow \mathbb{C}$ finden mit $f(z) = w(z)^n$ für alle $z \in V$. Insbesondere gilt dann $w(p) = 0$. Indem wir eine offene Kreisscheibe $K \Subset w(V)$ mit Zentrum im Ursprung wählen und mit $\bar{u} : K \hookrightarrow U$ als die Umkehrfunktion von $w : w^{-1}(K) \xrightarrow{\sim} K$ erklären, finden wir $f(\bar{u}(z)) = z^n$ für alle $z \in K$. Wählen wir nun noch ein $\lambda \in \mathbb{C}$, das eine Bijektion $(\lambda \cdot) : E \xrightarrow{\sim} K$ induziert, und setzen $u(z) := \bar{u}(\lambda z)$, so folgt $f(u(z)) = \lambda^n z^n$ und mit $v := (\lambda^n \cdot)$ haben wir unser Ziel erreicht. Hier können wir sogar $\lambda > 0$ reell und positiv wählen. □

Korollar 2.4.6 (Gebietstreue). *Das Bild einer offenen wegzusammenhängenden Teilmenge der komplexen Zahlenebene unter einer nicht konstanten holomorphen Funktion ist stets wieder eine offene wegzusammenhängende Teilmenge der komplexen Zahlenebene.*

2.4.7. Eine wegzusammenhängende offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene heißt auch ein **Gebiet** und eine einfach zusammenhängende offene Teilmenge ein **Elementargebiet**. In dieser Terminologie kann das Korollar dahingehend formuliert werden, daß das Bild eines Gebietes unter einer nicht konstanten holomorphen Funktion wieder ein Gebiet ist. Daher rührt auch sein Name. Der einzige Grund, aus dem wir den Definitionsbereich wegzusammenhängend annehmen müssen, liegt darin, daß es sonst Funktionen geben könnte, die auf einer Wegzusammenhangskomponente des Definitionsbereichs konstant sind ohne global konstant zu sein.

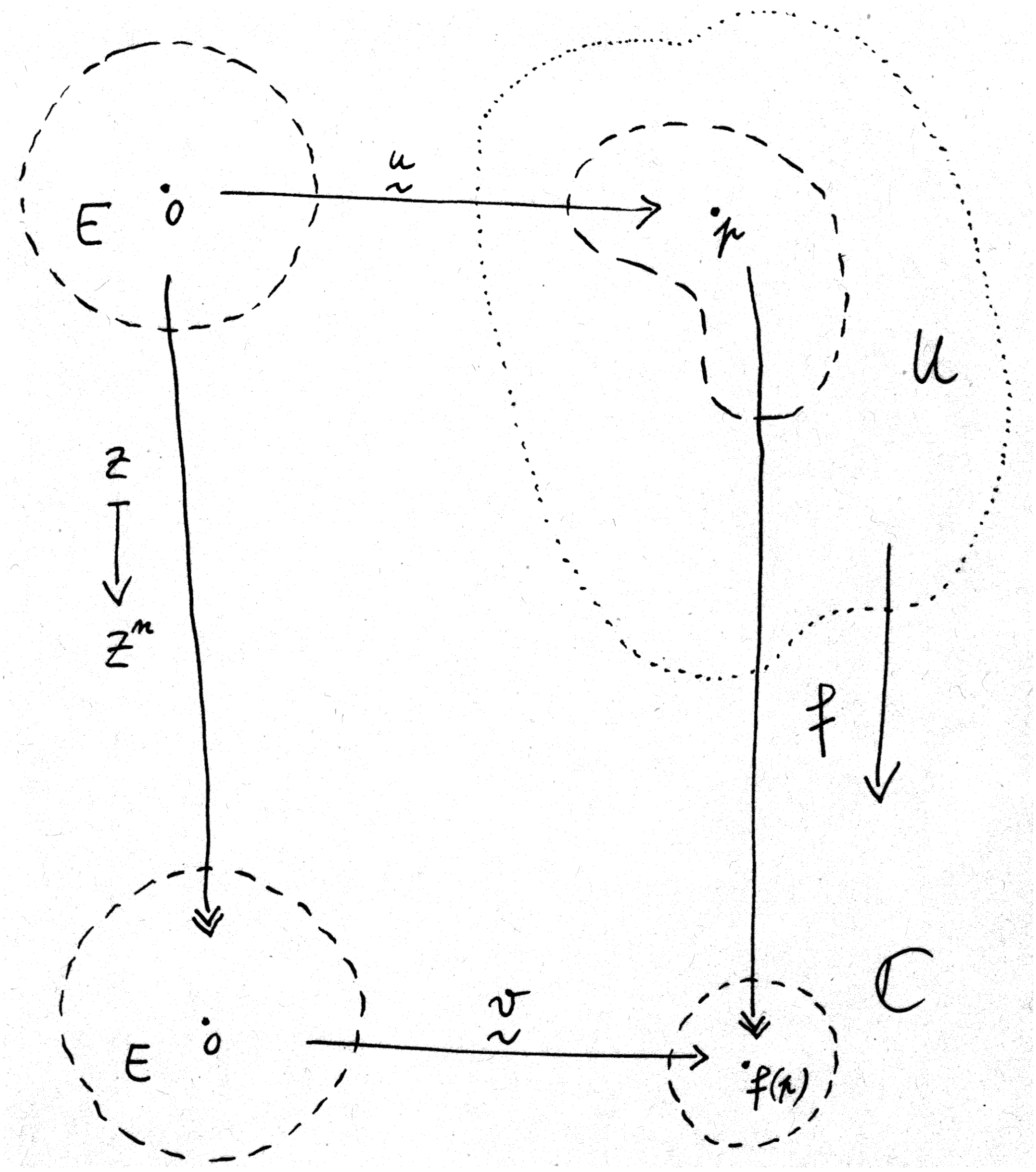


Illustration zum Satz über die lokale Struktur holomorpher Funktionen. Im Bild ist zusätzlich eine Erkenntnis aus dem Beweis angedeutet, nach der man u und v sogar so wählen kann, daß v von der Gestalt $z \mapsto \mu z + f(p)$ ist mit $\mu > 0$. Die durch die Doppelspitzen angedeutete Surjektivität gilt natürlich nur im Fall $n \neq \infty$ einer Abbildungen f, die in keiner Umgebung von p konstant ist.

Beweis. Nach dem Identitätssatz ist unsere Funktion nie in der Umgebung eines Punktes konstant. Das Korollar folgt damit sofort aus dem Satz 2.4.5 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen. □

Korollar 2.4.8 (Holomorphie von Umkehrfunktionen). *Gegeben eine injektive holomorphe Funktion ist ihr Bild offen und ihre Umkehrabbildung holomorph.*

2.4.9. In anderen Worten ist also jede injektive holomorphe Funktion eine biholomorphe Einbettung.

Beweis. Unsere Funktion hat offenes Bild nach dem Satz über die Gebietstreue 2.4.6 und nirgends verschwindende Ableitung nach dem Satz über die lokale Struktur 2.4.5, die darüber hinaus stetig ist nach dem Satz von Goursat 2.1.5. Unter diesen Voraussetzungen aber haben wir die Holomorphie der Umkehrung bereits in 1.2.6 gezeigt. □

Korollar 2.4.10 (Maximumsprinzip). *Eine nicht konstante holomorphe Funktion auf einer wegzusammenhängenden offenen Menge kann nirgends ein Betragsmaximum annehmen.*

Beweis. Durch Widerspruch. Sei sonst $f : U \to \mathbb{C}$ unsere Funktion und $p \in U$ ein Punkt mit $|f(p)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in U$. So könnte keine Umgebung von $f(p)$ in $f(U)$ enthalten sein, da ja jede Umgebung von $f(p)$ auch Punkte w mit $|f(p)| < |w|$ enthält. Dann aber wäre $f(U)$ nicht offen im Widerspruch zur Gebietstreue 2.4.6. □

Satz 2.4.11 (Schwarz'sches Lemma). *Für jede holomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe in sich selber, die den Ursprung festhält, gilt:*

1. *Das Bild jedes Punktes liegt mindestens ebenso nah am Ursprung wie besagter Punkt selbst und die Ableitung unserer Abbildung im Ursprung hat höchstens den Betrag Eins;*

2. *Hat für mindestens einen Punkt außerhalb des Ursprungs sein Bild denselben Abstand zum Ursprung wie der besagte Punkt selbst oder hat die Ableitung im Ursprung den Betrag Eins, so ist unsere Abbildung eine Drehung.*

Beweis. Wir betrachten die offene Einheitskreisscheibe $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Für eine holomorphe Abbildung $f : E \to E$ mit $f(0) = 0$ behauptet unser Satz in Formeln

$$|f(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in E \text{ und } |f'(0)| \leq 1.$$

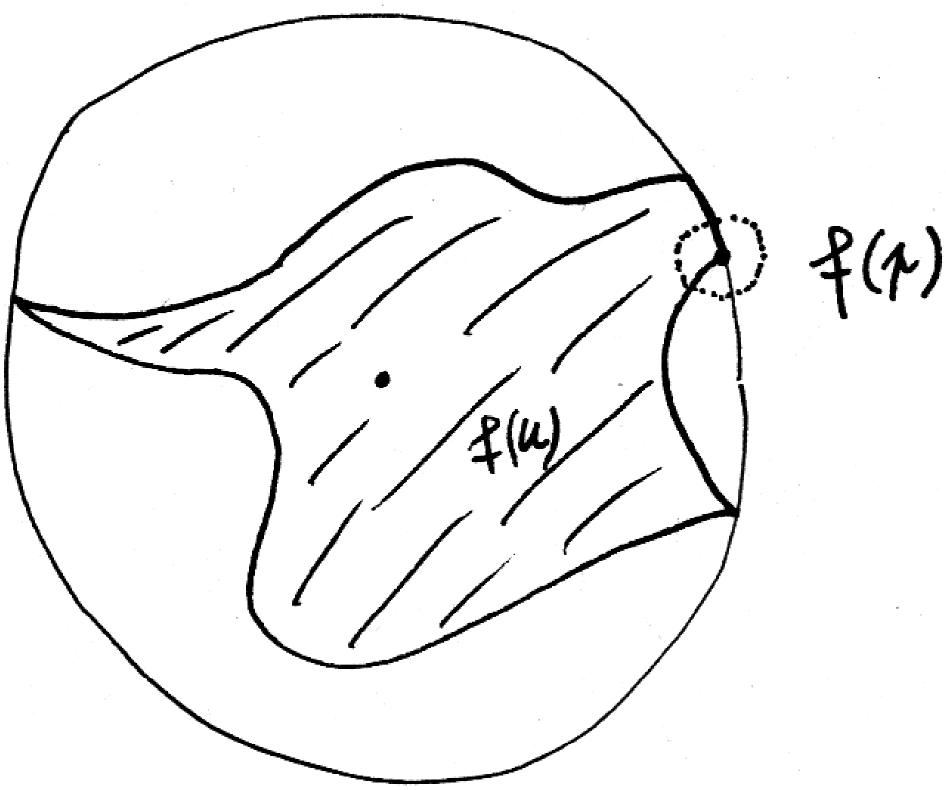


Illustration zum Beweis des Maximumsprinzips.

Des weiteren behauptet er für die Fälle $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in E \backslash 0$ oder $|f'(0)| = 1$, daß f eine Drehung sein muß. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es, wenn f die offene Einheitskreisscheibe in sich selber abbildet, sicher ein $\delta \in (0,1)$ mit $|z| \geq \delta \Rightarrow |f(z)/z| \leq 1 + \varepsilon$. Dieser Quotient kann also salopp gesprochen „betragsmäßig um so weniger über die Eins hinauskommen, je näher z am Rand der Einheitskreisscheibe liegt“. Nun erhält man nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 2.2.7 eine holomorphe Funktion durch die Vorschrift $z \mapsto f(z)/z$ für $z \neq 0$ bzw. $z \mapsto f'(0)$ für $z = 0$. Da diese Funktion nach 2.4.10 auf einer offenen Kreisscheibe ihr Betragsmaximum nicht annehmen kann, wenn sie nicht konstant ist, folgt $|f(z)/z| \leq 1$ für alle $z \in E \backslash 0$ sowie $|f'(0)| \leq 1$. Steht hier an einer Stelle eine Gleichheit, so ist $f(z)/z$ konstant und folglich f eine Drehung. □

Übungen

Übung 2.4.12. Man zeige, daß jede holomorphe Bijektion von der Einheitskreisscheibe auf sich selber, die den Ursprung festhält, eine Drehung alias Multiplikation mit einer komplexen Zahl der Norm Eins sein muß. Hinweis: Man wende das Schwarz'sche Lemma auch auf die Umkehrfunktion an.

Übung 2.4.13. Man konstruiere eine bijektive holomorphe Abbildung von der offenen Einheitskreisscheibe in die Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil, der sogenannten „oberen Halbebene“. Hinweis: Möbius-Geometrie [LA2] 5.7.23. Man zeige, daß die dort eingeführte Operation von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene die Restklassengruppe $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{id}\}$ identifiziert mit der Gruppe aller bijektiven holomorphen Abbildung von der oberen Halbebene auf sich selber. Hinweis: 2.4.12.

3 Singuläre Stellen holomorpher Funktionen

3.1 Isolierte Singularitäten und Laurentreihen

Definition 3.1.1. Ist $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$ ein Punkt und $f : U \backslash p \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt p eine **isolierte Singularität von** f. Läßt sich f zu einer holomorphen Funktion auf ganz U fortsetzen, so spricht man von einer **hebbaren Singularität**. Ist die Singularität zwar nicht hebbar, wird aber hebbar nach Multiplikation unserer Funktion f mit einer geeigneten Potenz $(z-p)^n$, so spricht man von einem **Pol** oder ausführlicher von einer **Polstelle** und das kleinstmögliche solche n heißt die **Polordnung**. Ist die Singularität weder hebbar noch ein Pol, so spricht man von einer **wesentlichen Singularität**.

Beispiel 3.1.2. Die Funktion $z \mapsto \exp(z^{-1})$ hat im Ursprung eine wesentliche Singularität.

Satz 3.1.3 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz). *Bleibt eine holomorphe Funktion in einer Umgebung einer isolierten Singularität betragsmäßig beschränkt, so ist die Singularität hebbar.*

Beweis. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ ein Punkt und $f : U \backslash p \to \mathbb{C}$ unsere holomorphe Funktion. Sicher kann man die Funktion $z \mapsto (z-p)f(z)$ unter unserer Voraussetzung durch Null stetig auf ganz U fortsetzen. Dann ist die Fortsetzung durch Null von $g : z \mapsto (z-p)^2 f(z)$ offensichtlich sogar holomorph auf ganz U mit $g(p) = g'(p) = 0$. Nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 2.3.1 kann g also geschrieben werden in der Gestalt $g : z \mapsto (z-p)^2 h(z)$ für $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dies h ist dann die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f. □

Alternative zum Beweis. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ ein Punkt und $f : U \backslash p \to \mathbb{C}$ unsere holomorphe Funktion. Sicher kann man die Funktion $k : z \mapsto (z-p)f(z)$ unter unserer Voraussetzung durch Null stetig auf ganz U fortsetzen. Nach Korollar 2.1.11 zum Satz von Morera ist dann k bereits holomorph auf ganz U und nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 2.3.1 kann k also geschrieben werden in der Gestalt $k : z \mapsto (z-p)h(z)$ für $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dies h ist dann die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f. □

3.1.4 (**Lokale Struktur von Polstellen**). Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$ ein Punkt. Genau dann hat eine holomorphe Funktion $f : U \setminus p \to \mathbb{C}$ mit einer isolierten Singularität bei p einen Pol n-ter Ordnung bei p, wenn f die Gestalt

$$f(z) = (z-p)^{-n} g(z)$$

hat für g holomorph auf U mit $g(p) \neq 0$. Um die eine Richtung zu zeigen, gilt es nur zu bemerken, daß die Funktion auf der rechten Seite eine Polstelle der

Ordnung n bei p hat. Für die andere Implikation bemerken wir, daß es gemäß der Definition einer Polstelle ein $n > 0$ und g holomorph gibt mit $f(z) = (z - p)^{-n} g(z)$ außerhalb von p, und im Fall $g(p) = 0$ wäre nach 2.3.1 unser n nicht kleinstmöglich mit $(z - p)^n f(z)$ holomorph.

3.1.5. Wir verwenden von nun an die Notation $\mathbb{P}^1\mathbb{C} := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ für die disjunkte Vereinigung der komplexen Zahlenebene mit einem weiteren Element ∞. Die Herkunft dieser Notation wird in [LA1] **??** erklärt und in [LA1] **??** erklären wir auch die Herkunft der Bezeichnung von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ als **Riemann'sche Zahlenkugel** und eine natürliche Topologie auf dieser Menge. Später einmal werden wir sie zusätzlich mit der Struktur einer „Riemann'schen Fläche" versehen, aber alles zu seiner Zeit.

Definition 3.1.6. Eine **meromorphe Funktion** auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene $U \Subset \mathbb{C}$ ist eine Abbildung $f : U \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit den Eigenschaften, daß $f^{-1}(\infty)$ in U keinen Häufungspunkt hat, daß f holomorph ist auf $U \backslash f^{-1}(\infty)$, und daß für alle $p \in U$ mit $f(p) = \infty$ gilt $\lim_{z \to p}(1/f(z)) = 0$.

3.1.7. In Worten ist also eine meromorphe Funktion eine Funktion, die „holomorph ist bis auf isolierte Polstellen". Insbesondere darf eine meromorphe Funktion keine wesentlichen Singularitäten haben. Sicher ist jede holomorphe Funktion auch meromorph. Weitere Beispiele liefert das anschließende Lemma. Eine gute Anschauung für meromorphe Funktionen liefert die Interpretation von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ als „Riemann'sche Zahlenkugel", die in [ML] 3.2.10 erklärt wird. Eine meromorphe Funktion kann in diesem Bild nach **??** aufgefaßt werden als eine Art „Aufwicklung auf die Kugelschale", und nichtkonstante rationale Funktionen bedeuten anschaulich ein „Aufwickeln der Kugelschale auf sich selber". Mehr zu diesem Gesichtspunkt werden wir bei der Behandlung Riemann'scher Flächen lernen.

Lemma 3.1.8. *Ist $f : U \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ eine von Null verschiedene meromorphe Funktion auf einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene, so ist mit der Konvention $(1/0) = \infty$ und $(1/\infty) = 0$ auch die Funktion $(1/f) : U \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ meromorph.*

3.1.9. Wir müssen den Definitionsbereich U wegzusammenhängend annehmen, da U sonst die disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Mengen sein könnte. Die Funktion f, die auf einer dieser Mengen konstant Eins und auf der anderen konstant Null ist, macht dann: Bilden wir dazu nämlich die Funktion $1/f$ nach dem im Lemma vorgeschriebenen Verfahren, so hätte die Menge der ∞-Stellen unserer Funktion $1/f$ einen Häufungspunkt in U und wäre folglich nicht meromorph im Sinne unserer Definition 3.1.6.

Beweis. Das Lemma folgt sofort aus unserer Diskussion von Polstellen 3.1.4 in Verbindung mit dem Spezialfall 2.3.5 des Identitätssatzes. □

Definition 3.1.10. Wir definieren die Summe und das Produkt meromorpher Funktionen f, g auf $U \Subset \mathbb{C}$, indem wir sie erst punktweise addieren bzw. multiplizieren auf dem Komplement $U \backslash (f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty))$ der Vereinigung ihrer Polstellenmengen, dann alle hebbaren Singularitäten aus der Vereinigung der Polstellenmengen heben, und schließlich an den nicht hebbaren Singularitäten den Wert ∞ vergeben. Die Menge der meromorphen Funktionen auf einer wegzusammenhängenden offenen Menge $U \Subset \mathbb{C}$ wird so zu einem Körper

$$\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U)$$

wie der Leser zur Übung zeigen mag. Ich verwende die Bezeichnung $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}$, um diese „analytischen" Funktionen zu unterscheiden von ihren algebraischen Analoga, den rationalen Funktionen auf einer irreduziblen algebraischen Varietät U, die ich später einmal $\mathcal{M}(U)$ notieren will.

Satz 3.1.11 (Casorati-Weierstraß). *Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so ist ihr Bild eine dichte Teilmenge der komplexen Zahlen.*

3.1.12. Natürlich besitzt auch die Einschränkung unserer Funktion auf eine beliebige Umgebung dieser wesentlichen Singularität dort eine wesentliche Singularität, das Bild jeder Umgebung der singulären Stelle ist also dicht in der komplexen Zahlenebene. Der Satz von Picard sagt sogar stärker, daß jedes dieser Bilder alle komplexen Zahlen bis auf höchstens eine Ausnahme enthalten muß.

Beweis. Sei $f : U \backslash p \to \mathbb{C}$ unsere Funktion und p die Singularität. Wäre $f(U \backslash p)$ nicht dicht, so gäbe es eine offene Kreisscheibe $\mathrm{B}(w; \varepsilon)$ außerhalb des Bildes. Dann wäre $(f(z) - w)^{-1}$ beschränkt und holomorph auf $U \backslash p$, ließe sich also nach dem Hebbarkeitssatz 3.1.3 zu einer holomorphen Funktion h auf U fortsetzen, und h hätte keine Nullstelle auf $U \backslash p$. Also wäre unsere Funktion $f(z) = h(z)^{-1} + w$ meromorph auf U. □

Satz 3.1.13 (Laurententwicklung). *Gegeben ein Kreisring in der komplexen Zahlenebene der Gestalt $U = \{z \mid r < |z| < R\}$ mit $0 \leq r < R \leq \infty$ und darauf eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ derart, daß gilt*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$$

im Sinne der kompakten Konvergenz auf unserem Kreisring der Folge P_n der Partialsummen über alle k mit $|k| \leq n$. Sogar die positiven und die negativen Terme unserer Reihe bilden in dieser Situation für sich genommen jeweils kompakt konvergente Reihen auf besagtem Kreisring.

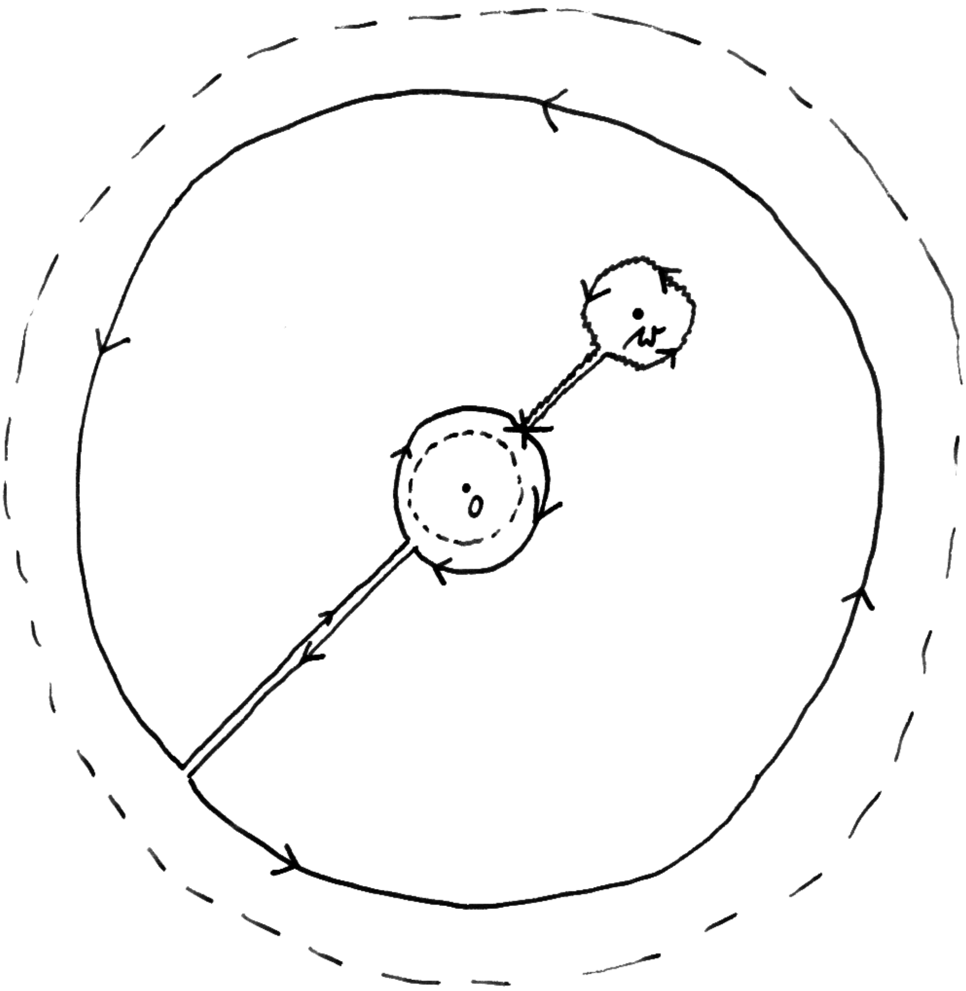


Illustration zum Beweis der Laurententwicklung. Der glatt eingezeichnete Weg ist unser γ.

Beweis. Die Koeffizienten sind durch die Funktion eindeutig bestimmt, denn für jeden kreisförmigen Weg γ, der in unserem Kreisring einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung läuft, muß gelten

$$\int_\gamma f(z)z^n \mathrm{d}z = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_\gamma z^{k+n}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} c_{-n-1}$$

Es bleibt also nur die Existenz einer derartigen Entwicklung zu zeigen. Gegeben w aus unserem Kreisring wählen wir a, A mit $r < a < |w| < A < R$ und betrachten einen Integrationsweg γ, der auf demselben Strahl wie w beginnend erst im Gegenuhrzeigersinn die Kreislinie $|z| = A$ halb herumläuft, dann auf einem Radius zur Kreislinie $|z| = a$, darauf einmal im Uhrzeigersinn herum, wieder auf dem Radius zurück nach aussen, und auf der Kreislinie $|z| = A$ weiter zum Ausgangspunkt. Dieser Weg ist offensichtlich homotop zu jedem Weg, der vom selben Ausgangspunkt erst ein Stück auf dem Radius in Richtung w läuft, dann auf einem kleinen Kreisweg im Gegenuhrzeigersinn um w, um dann wieder auf dem Radius zurück zum Ausgangspunkt. Mit der Integralformel von Cauchy und der Homotopieinvarianz des Wegintegrals folgt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=A} \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z$$

Das erste dieser Integrale verwandeln wir wie beim Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 2.2.7 in die Potenzreihe

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{|z|=A}\frac{f(z)}{z^{k+1}}\mathrm{d}z\right) w^k$$

mit Konvergenzradius $\geq A$. Das zweite Integral behandeln wir ähnlich, nur schreiben wir nun, da auf dem Integrationsweg ja $|w| > |z|$ gilt,

$$\frac{-1}{z-w} = \frac{1}{w}\left(\frac{1}{1-(z/w)}\right) = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{w^k}$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz in z auf dem Kreisring $|z| = a$ und erhalten

$$\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=a}\frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{|z|=a} f(z)z^k\mathrm{d}z\right) w^{-k-1}$$

zunächst einmal im Sinne punktweiser Konvergenz an jeder Stelle w mit $a < |w| < A$. Hier steht nun aber eine Potenzreihe im w^{-1}, die konvergiert für $|w^{-1}| < a^{-1}$. Also ist für $|w| \geq a + \varepsilon$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ die Konvergenz gleichmäßig in w. Das zeigt die Existenz der Entwicklung in eine Laurentreihe. $\square$

3.1.14. Insbesondere können wir jede holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität im Ursprung in eine Laurentreihe entwickeln. Unsere Funktion hat einen Pol im Ursprung genau dann, wenn ihre Laurentreihe mindenstens einen und höchstens endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten vor negativen Potenzen von z stehen hat. Allgemeiner folgt unmittelbar, daß wir jede holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität bei w in einer Umgebung von w in eine Reihe der Gestalt

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z-w)^k$$

entwickeln können. Diese Darstellung heißt dann auch die **Laurententwicklung bei** w. Die Summe $\sum_{k<0} c_k(z-w)^k$ heißt dann der **Hauptteil von** f **bei** w. Besonders üblich ist dieser Begriff im Zusammenhang mit Polstellen.

Satz 3.1.15 (Mittag-Leffler zu Funktionen mit vorgegebenen Hauptteilen). *Gegeben eine diskrete Teilmenge $P \subset \mathbb{C}$ und an jeder Stelle $p \in P$ eine außerhalb von p konvergente Laurentreihe h_p existiert eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \backslash P$, die an allen Stellen $p \in P$ denselben Hauptteil hat wie h_p.*

Beweis. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Summen

$$S_n = \sum_{n \leq |p| < n+1} h_p$$

der Hauptteile zu Punkten aus P aus dem entsprechenden Kreisring oder, im Fall $n=0$, der entsprechenden Kreisscheibe. Sicher ist S_n holomorph auf der Kreisscheibe $\{z \mid |z| < n\}$ und durch Entwicklung in eine Potenzreihe um den Ursprung finden wir ein Polynom Q_n mit $|S_n(z) - Q_n(z)| \leq 2^{-n}$ für alle z aus der kleineren Kreisscheibe $\{z \mid |z| < n-1\}$. Es ist dann klar, daß die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} (S_n - Q_n)$ auf $\mathbb{C} \backslash P$ kompakt konvergiert gegen eine holomorphe Funktion mit den vorgegebenen Hauptteilen an allen Stellen $p \in P$. □

Übungen

Übung 3.1.16. Man folgere aus 3.1.4 den Satz von Liouville 2.1.6, indem man für eine beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz die Funktion $z \mapsto f(1/z)$ über den Punkt $z = 0$ fortsetzt und dann das Maximumsprinzip 2.4.10 anwendet.

Ergänzende Übung 3.1.17. Jede rationale Funktion $f \in \mathbb{C}(T)$ im Sinne von [LA1] 4.6.7 liefert eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, wenn wir ihr an allen Polstellen im Sinne von [LA1] 4.6.7 den Wert ∞ zuweisen. Man zeige, daß das Bild der so erklärten Einbettung $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ genau aus allen meromorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ besteht, für die es ein $N \geq 1$ gibt mit $\lim_{|z| \to \infty} f(z)/z^N = 0$. Hinweis: 3.1.3.

Übung 3.1.18. Man zeige: Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so besitzt sie mindestens eine unendliche Faser. Hinweis: Man kombiniere den Satz von der Gebietstreue 2.4.6 mit Casorati-Weierstraß 3.1.11 und dem Baire'schen Kategoriensatz [AN3] 4.2.5 oder besser seinem Korollar [AN3] 4.2.21. Noch stärker zeigen dieselben Methoden, daß die Werte, die unendlich oft angenommen werden, sogar eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ bilden.

Übung 3.1.19 (**Biholomorphe Automorphismen der Zahlenebene**). Man zeige, daß jede holomorphe injektive Abbildung $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ von der Gestalt $z \mapsto az + b$ ist für $a \in \mathbb{C}^\times$, $b \in \mathbb{C}$. Hinweis: Potenzreihenentwicklung und 3.1.18.

Übung 3.1.20. Gegeben $U \Subset \mathbb{C}$ und $p \in U$ definiere man die **Bewertung bei p einer meromorphen Funktion f auf U** durch die Vorschrift

$$v_p(f) := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (z-p)^{-n} f(z) \text{ ist holomorph bei } p\}$$

In Formeln ist die Bewertung also eine Abbildung $v_p : \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U) \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$. Unsere Bewertung ist positiv auf Funktionen, die bei p eine Nullstelle haben, negativ auf Funktionen, die bei p eine Polstelle haben, und unendlich genau dann, wenn unsere Funktion in einer Umgebung des Punktes p identisch verschwindet. Man zeige für alle meromorphen Funktionen $f, g \in \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U)$ und alle $p \in U$ die Formeln $v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g)$ und $v_p(f+g) \geq \min(v_p(f), v_p(g))$ sowie im Fall $v_p(f) \neq v_p(g)$ die Gleichheit $v_p(f+g) = \min(v_p(f), v_p(g))$. Ist U wegzusammenhängend, so ist v_p mithin eine diskrete Bewertung im Sinne von [KAG] 5.8.1 auf dem Körper $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U)$.

Vorschau 3.1.21. Für jede Primzahl p erklärt man analog auch eine Bewertung $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ durch die Vorschrift, daß gilt $v_p(0) = \infty$ und $v_p(p^n a/b) = n$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu p. Diese Bewertung hat analoge Eigenschaften wie unsere Bewertung meromorpher Funktionen aus der vorhergehenden Übung 3.1.20. Die hier aufscheinende formale Analogie zwischen dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und Körpern von meromorphen Funktionen geht noch sehr viel weiter und hat sich für die Zahlentheorie als äußerst fruchtbar erwiesen.

Übung 3.1.22. Die Entwicklung in eine Laurentreihe liefert für jede zusammenhängende offene Umgebung $U \Subset \mathbb{C}$ des Ursprungs in der komplexen Zahlenebene einen Körperhomomorphismus

$$\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(U) \to \mathbb{C}((z))$$

vom Körper der meromorphen Funktionen auf U in den Ring der formalen Laurentreihen $\mathbb{C}((z))$ aus [LA1] 4.3.41.

Übung 3.1.23. Man gebe eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ an, die $\mathbb{C}$ surjektiv auf $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ abbildet.

3.2 Umlaufzahl und Residuensatz

Satz 3.2.1 (zur Umlaufzahl). *Jeder geschlossene Weg in der punktierten Ebene $\mathbb{C}^\times$ ist für genau eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ frei homotop zu dem geschlossenen Weg, der gegeben wird durch die Vorschrift $[0,1] \to \mathbb{C}^\times$, $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n t}$. Diese ganze Zahl n heißt die* **Umlaufzahl** *oder auch* **Windungszahl** *des geschlossenen Weges γ um den Ursprung.*

3.2.2. Analog definiert man die Windungszahl eines geschlossenen Weges γ um jeden Punkt w der komplexen Zahlenebene, der nicht auf dem Bild des Weges liegt. Wir notieren sie

$$\mathrm{Um}(\gamma, w)$$

3.2.3. Anschaulich beschreibt für $n \geq 1$ die Abbildung $[0,1] \to \mathbb{C}^\times$, $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n t}$ einen Weg, der vom Punkt 1 ausgehend mit konstanter absoluter Geschwindigkeit n-mal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitskreis umläuft; für $n \leq -1$ ist es der Weg, der $(-n)$-mal im Uhrzeigersinn umläuft; und für $n = 0$ haben wir den konstanten Weg vor uns, der schlicht auf dem Punkt 1 sitzenbleibt.

Ergänzung 3.2.4. Natürlicher ist es, statt der Umlaufzahl gleich das Element $2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Um}(\gamma, w)$ von $\ker(\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ zu betrachten: Dieses Element ist nämlich auch für einen Körper von vergeßlichen komplexen Zahlen im Sinne von [LA1] 3.1.7 wohldefiniert. Man notiert diese Gruppe auch $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(1) := \ker(\exp)$ und nennt sie den **Tate-Twist von** $\mathbb{Z}$.

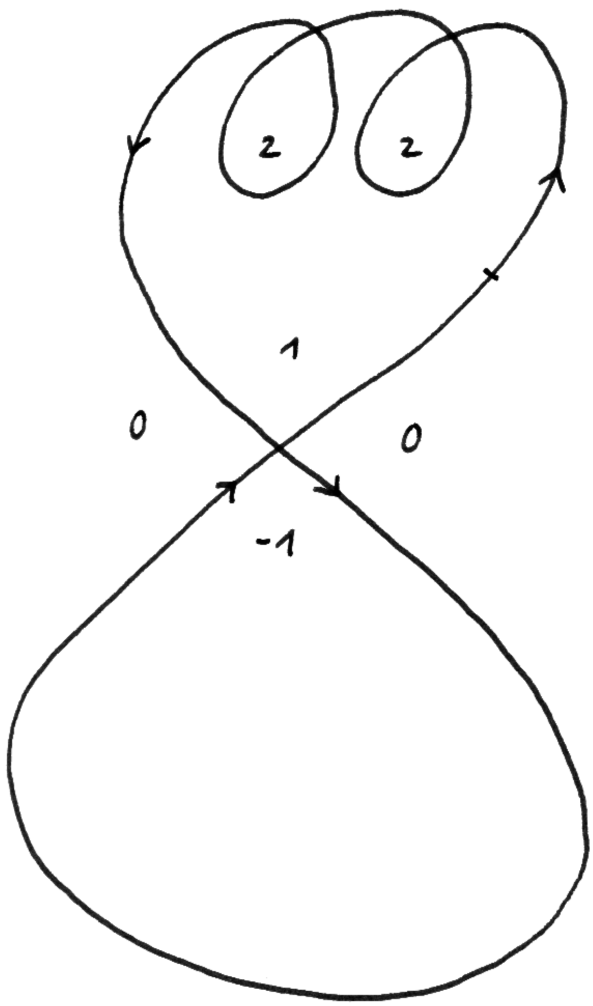
Beweis von Satz 3.2.1. Mit der Homotopieinvarianz des Wegintegrals 1.5.14 erhalten wir für die Umlaufzahl eines geschlossenen Weges γ um einen beliebigen Punkt w außerhalb des Bildes von γ die Integraldarstellung

$$n = \mathrm{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{z - w} \mathrm{d}z$$

Sie wird in der Funktionentheorie meist als Definition der Umlaufzahl genommen und zeigt sofort deren Eindeutigkeit. Wir zeigen nun noch die Existenz eines n wie im Satz behauptet, obwohl das im weiteren Verlauf dieser Vorlesung keine Rolle mehr spielen wird. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^\times$ unser geschlossener Weg. Wir zeigen zunächst, daß es einen Weg $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}$ gibt mit $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$, und das sogar zu jedem vorgegebenen Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(a)$ mit $\exp(\tilde{\gamma}(a)) = \gamma(a)$. Falls γ ganz in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$ verläuft, ist das klar: Wir nehmen einfach

$$\tilde{\gamma}(t) = \log(\gamma(t)) + 2\pi\mathrm{i}k$$

mit $\log$ der Umkehrung von $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi\mathrm{i}, \pi\mathrm{i}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$ und $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt, daß unser „hochgehobener Weg“ $\tilde{\gamma}$ beim vorgegebenen Anfangspunkt beginnt. Falls γ ganz in einer andersartig geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0} w$ mit $w \in \mathbb{C}^\times$



In jede Zusammenhangskomponente aus dem Komplement des hier gezeichneten Weges habe ich hier die Umlaufzahl des besagten Weges um einen und jeden Punkt aus besagter Zusammenhangskomponente geschrieben.

verläuft, finden wir unsere Hochhebung analog. Im allgemeinen wählen wir $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$ so, daß $\gamma[a_{i-1}, a_i]$ jeweils ganz in einer geschlitzten Ebene enthalten ist, wählen induktiv Hochhebungen $\tilde{\gamma}_i$ der $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ so, daß $\tilde{\gamma}_i$ dort beginnt, wo $\tilde{\gamma}_{i-1}$ aufhört, und setzen diese stückweisen Hochhebungen dann zum gesuchten Weg $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{C}$ zusammen. Da das Urbild der Eins unter der komplexen Exponentialfunktion nach [AN2] **??** gerade $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ ist, haben wir natürlich $\tilde{\gamma}(b) = \tilde{\gamma}(a) + 2\pi\mathrm{i}n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Nach 1.4.5 oder auch kurzem Nachdenken sind je zwei Wege in $\mathbb{C}$ mit demselben Anfangs- und Endpunkt homotop, folglich muß $\tilde{\gamma}$ sein homotop zum Weg $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \tilde{\gamma}(a) + \mathrm{i}nt$. Dann ist aber nach 1.4.6 auch $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$ homotop zu $\exp \circ \beta$. Dieser Weg ist aber offensichtlich in $\mathbb{C}^\times$ frei homotop zum Weg $[0, 1] \to \mathbb{C}^\times$, $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nt}$, und das zeigt im Satz die Existenz. □

Ergänzung 3.2.5. Wenden wir unsere Erkenntnis 1.3.18, nach der das Wegintegral mit Verwandtschaft verträglich ist, auf die Situation vom Ende des vorhergehenden Beweises an, so erhalten wir zumindest im Fall eines Integrationsweges γ die Identität

$$\int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z$$

und so ergibt sich ein weiteres Mal $\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) = 2\pi\mathrm{i}n$ für n die Umlaufzahl von γ um den Ursprung.

Vorschau 3.2.6. Der in oben gegebene Beweis für die Eindeutigkeit der Umlaufzahl ist zwar im Rahmen der Funktionentheorie bequem, scheint mir für sich allein betrachtet jedoch unangemessen verwickelt. Ich ziehe den Beweis im Rahmen der Topologie vor, der in [TF] 1.7.6 besprochen wird.

Vorschau 3.2.7. Der Begriff der Umlaufzahl ermöglicht auch eine noch allgemeinere Fassung des Cauchy'schen Integralsatzes, die sogenannte **Umlaufzahlversion des Integralsatzes**: Ist im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion ein geschlossener Weg gegeben, der keinen Punkt außerhalb des Definitionsbereichs umläuft, so verschwindet das Wegintegral unserer Funktion längs dieses Weges. Wir diskutieren seinen Beweis im Rahmen der singulären Homologietheorie in [TS] 1.6.5.

Definition 3.2.8. Der Koeffizient von $(z - w)^{-1}$ in der Laurententwicklung nach 3.1.14 einer holomorphen Funktion $f(z)$ mit isolierter Singularität bei w heißt das **Residuum** $\operatorname{Res}(f, w) = \operatorname{Res}_w f$ von f bei w. Ist die Funktion f durch einen Ausdruck in einer komplexen Variablen gegeben, etwa als Ausdruck in der Variablen z, so verwenden wir für das Residuum von f bei w in Bezug auf z auch die Notation $\operatorname{Res}_{z=w} f(z)$.

3.2.9. Nach 3.1.13 oder genauer dem Beweis dieser Aussage haben wir also

$$\mathrm{Res}(f,w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-w|=r} f(z)\mathrm{d}z$$

für jeden Radius $r > 0$ derart, daß unsere Funktion f mit Ausnahme der singulären Stelle w auf einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{z \mid |z-w| \leq r\}$ definiert ist und dort keine weiteren Singularitäten hat. Die Bezeichnung als „Residuum", lateinisierend für „Überbleibsel", hat wohl damit zu tun, daß diese Zahl den einzigen Term der Laurentreihe beschreibt, der in diesem Zusammenhang beim Integrieren übrigbleibt.

3.2.10. Hat unsere Funktion f nur einen Pol erster Ordnung bei w, so läßt sich $g(z) = (z-w)f(z)$ stetig über $z = w$ fortsetzen und wir haben offensichtlich $g(w) = \mathrm{Res}(f,w)$. Läßt sich allgemeiner für irgendein $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $g(z) = (z-w)^{n+1}f(z)$ stetig über $z = w$ fortsetzen, so ist diese Fortsetzung holomorph und ihre n-te Ableitung bei w liefert das Residuum von f bei w vermittels der Identität $g^{(n)}(w) = n! \,\mathrm{Res}(f,w)$, die man leicht mithilfe der Laurententwicklung von f um w einsehen kann.

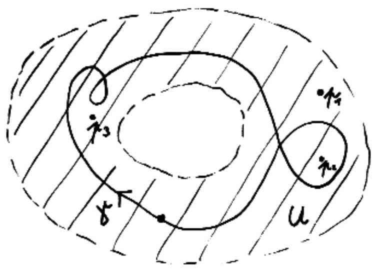
Satz 3.2.11 (Residuensatz). *Ist $U \Subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ endlich, $f : U \backslash P \to \mathbb{C}$ holomorph und γ ein geschlossener Weg in $U \backslash P$, der in U zusammenziehbar ist, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{p \in P} \mathrm{Um}(\gamma, p)\,\mathrm{Res}(f,p)$$

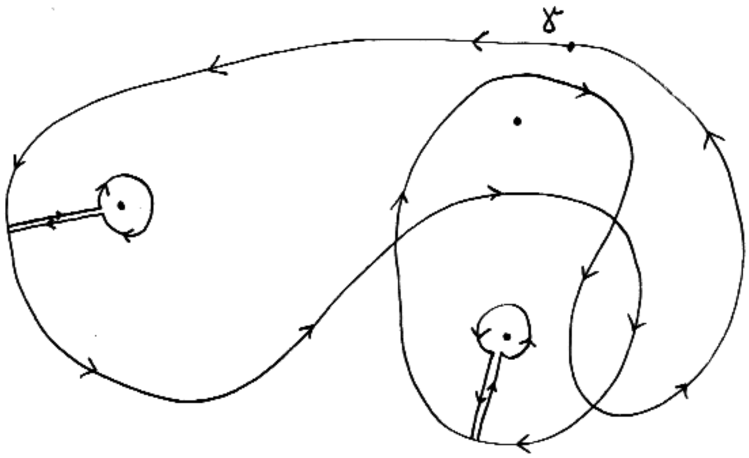
3.2.12. Integrieren wir also in Worten eine holomorphe Funktion mit endlich vielen isolierten Singularitäten längs eines geschlossenen Weges, der in ihrem Definitionsbereich vereinigt mit den singulären Stellen zusammenziehbar ist, so ist das Wegintegral bis auf den Faktor $2\pi\mathrm{i}$ die Summe der Residuen, jeweils gewichtet mit der Umlaufzahl unseres Weges um die entsprechende singuläre Stelle. Ist unser geschlossener Weg sogar bereits im Komplement $U \backslash P$ der singulären Stellen zusammenziehbar, so verschwindet das Wegintegral nach den Cauchy'schen Integralsatz, und der Residuensatz liefert auch Null für den Wert der Integrals, da dann bereits alle Umlaufzahlen um Punkte aus P Null sind. In [TS] 1.6.6 diskutieren wir auch noch eine etwas allgemeinere Version für „in U nullhomologe Wege".

Beweis. Entwickeln wir f um ein $p \in P$ in seine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-p)^n$$



Ein geschlossener Weg in einer ringförmigen offenen Menge $U \Subset \mathbb{C}$, der in U nicht zusammenziehbar ist. Mit $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ dürfen wir also in diesem Fall den Residuensatz nicht anwenden: Das geht nur, wenn sich unsere Funktion „holomorph auf das fehlende innere Ei fortsetzen läßt“.



Anschaulicher Beweis des Residuensatzes in einem Spezialfall. Ergänzen wir unseren Weg durch die zwei kleinen Extrawege, die von unserem großen Weg auf kleinen Stichwegen zu den fraglichen Punkten hinlaufen, einmal im Kreis darum herum und, auf demselben Stichweg wieder zurück auf unseren großen Weg, so ändert sich das Wegintegral nur um die Integrale der beiden kleinen Kreiswege. Diese sind jedoch mit Hilfe der Laurententwicklung um die besagten singulären Stellen leicht zu berechnen. Der so ergänzte Weg ist dann zusammenziehbar in $U \backslash P$, und deshalb verschwindet das Wegintegral über diesen ergänzten Weg nach Cauchy. Um diese meines Erachtens wunderbar anschauliche Argumentation zu einem Beweis des Residuensatzes auszubauen, benötigen wir jedoch die Umlaufzahlversion des Cauchy’schen Integralsatzes 3.2.7, die wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht bewiesen haben.

und fassen darin alle Terme für $n \leq -2$ zusammen zur auf der punktierten Ebene kompakt konvergenten Reihe $h_p(z) := \sum_{n\leq -2} a_n(z-p)^n$, so ist h_p eine wohldefinierte holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}\backslash p$ und besitzt sogar eine Stammfunktion, gegeben durch die Reihe $\sum_{n\leq -2} a_n(z-p)^{n+1}/(n+1)$. Die Funktion

$$f(z) - \sum_{p\in P} h_p(z) - \sum_{p\in P} \frac{\operatorname{Res}(f,p)}{z-p}$$

hat nun offensichtlich hebbare Singularitäten bei allen $p \in P$, mithin verschwindet nach dem Integralsatz von Cauchy 1.5.1 ihr Wegintegral über unseren in U zusammenziehbaren Weg γ. Da die h_p Stammfunktionen haben, verschwindet auch ihr Wegintegral über den geschlossenen Weg γ. Mit unserer funktionentheoretischen Beschreibung der Umlaufzahl aus dem Beweis von 3.2.1 ergibt sich damit

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{p\in P} \operatorname{Res}(f,p) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-p} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{p\in P} \operatorname{Res}(f,p)\operatorname{Um}(\gamma,p) \qquad \square$$

3.2.1 Übungen

Übung 3.2.13. Man erkläre, inwiefern Cauchy's Integralformel 2.1.1 ein Spezialfall des Residuensatzes ist.

3.3 Anwendungen des Residuensatzes

3.3.1. Für jede meromorphe Funktion mit isolierten Nullstellen f erklären wir ihre **logarithmische Ableitung** als die meromorphe Funktion

$$\frac{f'}{f}$$

Ist f holomorph und existiert ein Logarithmus von f, also eine Funktion g mit $f(z) = \exp g(z)$, so haben wir $f'/f = g'$, daher die Bezeichnung. In jedem Falle ist die logarithmische Ableitung eines Produkts offensichtlich die Summe der logarithmischen Ableitungen der Faktoren. Konvergiert weiter eine Folge holomorpher Funktionen ohne Nullstellen kompakt gegen eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle, so vertauscht das Bilden der logarithmischen Ableitung mit dem Grenzwert, wie der Leser leicht aus 2.2.5 folgern kann.

Satz 3.3.2 (Zählen von Null- und Polstellen). *Seien f eine meromorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{C}$ und γ ein in U zusammenziehbarer Weg, der keine Nullstelle und keine Polstelle von f trifft. So gilt*

$$\operatorname{Um}(f\circ\gamma, 0) = \sum_{p\in U} \operatorname{Um}(\gamma,p) v_p(f)$$

3.3.3 (**Anschauung für den Satz zum Zählen von Null- und Polstellen**). Besonders anschaulich scheint mir der Fall $f(z) = z^n$ mit γ einem Kreisweg um den Ursprung. Im Fall einer allgemeinen holomorphen Funktion f kann man sich überlegen, daß unser Weg γ homotop sein muß zu einer „Verkettung“ von Wegen, die erst von einem festen Punkt zu einer ihrer Nullstellen laufen, dann auf einem kleinen Kreisweg um diese herum, und danach auf demselben Weg wieder zurück. Für Wege dieser Art und dann auch für ihre Verkettungen scheint mir die Aussage anschaulich klar, wenn man den Satz 2.4.5 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen beachtet. Die Erweiterung dieser Anschauung auf den meromorphen Fall bleibe dem Leser überlassen.

Ergänzung 3.3.4 (**Topologische Variante zum Zählen von Nullstellen**). Der Satz bleibt richtig, wenn wir eine beliebige stetige Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ betrachten, bei der die Faser $f^{-1}(0)$ über dem Ursprung endlich ist. Wir müssen dann nur $v_p(f)$ interpretieren als die Umlaufzahl $\mathrm{Um}(f \circ \beta_p, 0)$ um den Ursprung für β_p einen „sehr kleinen“ Kreisweg um p im Gegenuhrzeigersinn und müssen zeigen, daß das wohldefiniert ist. Diese Summe geht dann über alle Punkte der Faser $f^{-1}(0)$ über dem Ursprung, und für Punkte dieser Faser ist das so erklärte $v_p(f)$ ein Spezialfall eines Konzepts, das wir in **??** in größerer Allgemeinheit als „lokalen Abbildungsgrad“ einführen. Unsere Formel folgt dann aus Argumenten im Beweis von **??**. Die Erweiterung dieser Anschauung auf den Fall einer stetigen Abbildung in die Sphäre $f : U \to S^2$ bleibe dem Leser überlassen.

3.3.5 (**Im Satz ist die Summe auf der rechten Seite endlich**). Wir erinnern daran, daß die Bewertung $v_p(f)$ von f bei p, wenn f nicht in einer Umgebung von p identisch verschwindet, in 3.1.20 definiert wurde als die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = (z - p)^n g(z)$ für g holomorph um p ohne Nullstelle bei p. Wir haben also $v_p(f) > 0$ bei Nullstellen, $v_p(f) < 0$ bei Polstellen, und $v_p(f) = 0$ sonst. Für einen zusammenziehbaren Weg läßt sich nun per definitionem die zugehörige Abbildung vom Einheitskreis stetig auf die ganze Einheitskreisscheibe fortsetzen. Außerhalb des kompakten Bildes dieser Fortsetzung kann er dann keinen Punkt umlaufen, und innerhalb dieses Bildes können nur endlich viele Nullstellen und Polstellen liegen. Damit hat die Summe auf der rechten Seite unserer Formel auch wirklich nur endlich viele von Null verschiedene Terme. Sollte f auf einer Komponente von U identisch verschwinden, so kann der Weg nicht in dieser Komponente verlaufen und wir interpretieren die Beiträge $0 \cdot \infty$ zu unserer Summe durch Punkte aus einer derartigen Komponente als Null.

Beweis. Wir zeigen feiner die Gleichungskette

$$\mathrm{Um}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)} \mathrm{d}w = \sum_{p \in U} \mathrm{Um}(\gamma, p) v_p(f)$$

Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus dem Residuensatz. Die Zweite folgt aus der Erkenntnis 1.3.18, daß das Wegintegral Verwandtschaft respektiert. Für die Dritte schreiben wir $f(w) = (w-p)^n g(w)$ mit $g(w)$ holomorph ohne Nullstelle bei p, so erhalten wir

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{n(w-p)^{n-1}g(w) + (w-p)^n g'(w)}{(w-p)^n g(w)} = \frac{n}{(w-p)} + \frac{g'(w)}{g(w)}$$

und das Residuum ergibt sich zu $\operatorname{Res}(f'/f, p) = v_p(f) = n$. Der Satz folgt damit aus dem Residuensatz. □

Ergänzung 3.3.6 (**Vereinfachung durch den Kalkül von Einsformen**). Diejenigen unter Ihnen, die sich mit Einsformen bereits wohlfühlen, mögen auch die komplexwertige Einsform $\mathrm{dlog}\, f := (f'/f)\mathrm{d}z$ integrieren und sich die linke Seite lokal durch irgendeinen Zweig des Logarithmus definiert denken, auf den es dann nach dem Ableiten gar nicht mehr ankommt. Damit folgt dann sofort die Formel $\mathrm{dlog}(fh) = \mathrm{dlog}\, f + \mathrm{dlog}\, h$ und bei $f(z) = (z-p)^n g(z)$ ergibt sich speziell $\mathrm{dlog}\, f = n\, \mathrm{dlog}(z-p) + \mathrm{dlog}\, g$.

Satz 3.3.7 (Weierstraß). *Gegeben eine diskrete Teilmenge $P \subset \mathbb{C}$ und eine Abbildung $n : P \to \mathbb{N}$ gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die an jeder Stelle $p \in P$ eine Nullstelle der Ordnung $n(p)$ hat und außerhalb von P keine Nullstellen.*

Beweis. Existiert solch eine Funktion f, so löst ihre logarithmische Ableitung f'/f offensichtlich die Hauptteilverteilung $n(p)/(z-p)$ für $p \in P$. Ist umgekehrt g eine Lösung dieser Hauptteilverteilung nach 3.1.15, so gilt für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C}\backslash P$ nach dem Residuensatz

$$\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

Wählen wir einen Ausganspunkt $q \in \mathbb{C}\backslash P$ fest und erklären für $w \in \mathbb{C}\backslash P$ beliebig $f(w) := \exp \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$ für irgendeinen Weg γ in $\mathbb{C}\backslash P$ von q nach w, so hängt $f(w)$ nicht von der Wahl des Weges ab und wir erhalten so eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash P \to \mathbb{C}$ ohne Nullstellen, deren logarithmische Ableitung f/f' die Hauptteilverteilung $n(p)/(z-p)$ hat. Genauer besitzt jeder Punkt $p \in P$ eine Umgebung U, in der gilt $g(z) = h_p(z) + n(p)/(z-p)$ für $h_p : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Daraus folgt $f(w) = a_p(z)(z-p)^{n(p)}$ für $a_p : U \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstellen wie gewünscht. □

Korollar 3.3.8 (Satz von Rouché). *Im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion f sei eine abgeschlossene Kreisscheibe B gegeben. Sei weiter g holomorph mit demselben Definitionsbereich und $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \partial B$. So haben f und $f+g$ mit Vielfachheiten gezählt gleichviele Nullstellen in B.*

Ergänzung 3.3.9. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir f und g meromorph ohne Pole auf ∂B nehmen und „Polstellen als Nullstellen negativer Vielfachheit“ werten. Dasselbe gilt mit demselben Beweis auch, wenn wir statt dem Rand einer Kreisscheibe einen beliebigen im Definitionsbereich unserer beiden meromorphen Funktionen zusammenziehbaren Weg nehmen, und alle Polstellen und Nullstellen zusätzlich mit der Umlaufzahl gewichten.

Beweis. Nach Annahme können auf dem Rand ∂B unserer Kreisscheibe weder f noch $f+g$ Nullstellen haben. Mit unserem Satz 3.3.2 über das Zählen von Null- und Polstellen und γ einem auf ∂B einmal im Gegenuhrzeigersinn umlaufenden Weg finden wir

$$\operatorname{Um}(f\circ\gamma,0)=\sum_{p\in B} v_p(f) \quad \text{und} \quad \operatorname{Um}((f+g)\circ\gamma,0)=\sum_{p\in B} v_p(f+g).$$

Wegen $|f(z)|>|g(z)| \quad \forall z\in\partial B$ sind aber $f(z)+tg(z)$ für $t\in[0,1]$ und $z\in\partial B$ nie Null, und das liefert eine freie Homotopie unserer beiden geschlossenen Wege $f\circ\gamma$ und $(f+g)\circ\gamma$ in $\mathbb{C}^\times$. Folglich haben beide Wege dieselbe Umlaufzahl um den Ursprung. □

Beispiel 3.3.10 (**Integrale rationaler Funktionen**). Gegeben eine rationale Funktion f ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im}\zeta>0}\operatorname{Res}(f,\zeta)$$

Nach dem Residuensatz ergibt sich nämlich die rechte Seite, wenn wir für r größer als der Betrag aller Polstellen das Wegintegral von $-r$ bis r entlang der reellen Achse und dann auf einen großen Halbkreis durch die obere Halbebene zurück ausrechnen. Lassen wir hier r gegen unendlich streben, so strebt die Länge dieses Halbkreises linear gegen unendlich, das Betragsmaximum der Funktion darauf strebt jedoch quadratisch gegen Null. Folglich streben die Wegintegrale über immer größere Halbkreise gegen Null und die Formel folgt. Diese Anwendung war allerdings die Mühe des Residuensatzes nicht wert. Wir hätten auch einfach wie in [AN2] **??** erklärt die Funktion f in einem Partialbruch entwickeln und eine Stammfunktion explizit angeben und zwischen $-\infty$ und ∞ auswerten können. Als Übung mögen Sie zeigen, daß dabei dasselbe herausgekommen wäre. Als Beispiel bestimmen wir nochmal das Integral über die ganze reelle Achse von $f(x)=1/(1+x^2)=1/((x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}))$. Diese Funktion hat einfache Pole bei $\pm\,\mathrm{i}$. Ihr Residuum bei i können wir bestimmen, indem wir unsere Funktion mit $(x-\mathrm{i})$ multiplizieren und dann bei $x=\mathrm{i}$ auswerten. So folgt $\operatorname{Res}(f,\mathrm{i})=1/(2\,\mathrm{i})$ und wir erhalten $\int_{-\infty}^{\infty}1/(1+x^2)\mathrm{d}x=\pi$ in Übereinstimmung mit [AN1] 4.4.14.

Beispiel 3.3.11 (**Integrale rationaler Funktionen mit Exponentialterm**). Gegeben eine rationale Funktion f ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners größer ist als der Grad des Zählers, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im}\zeta>0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$$

in dem Sinne, daß sowohl $\lim_{r\to\infty}\int_0^r$ als auch $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^0$ existieren und ihre Summe den angegebenen Wert hat. Im Fall, daß der Grad des Nenners sogar um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, kann das in 3.3.10 angewandte Argument unverändert übernommen werden. Im allgemeinen betrachten wir ähnlich wie in 1.5.16 Wege einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks mit Ecken $a, b, a+\mathrm{i}h, b+\mathrm{i}h$ für $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $h > 0$. Ist unser Rechteck so groß, daß es alle Polstellen von f in der oberen Halbebene umfaßt, so ist das Wegintegral um seinen Rand nach dem Residuensatz genau die rechte Seite der behaupteten Formel. Die Integrale über die drei Kanten ρ, λ, ω für „rechts, links und oben“ außerhalb der reellen Achse können wir jedoch abschätzen durch

$$\left|\int_\rho f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\right| \le \sup\nolimits_{z\in\rho}|f(z)|\int_0^h \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \le \sup_{z\in\rho}|f(z)|$$

und analog auf der linken Kante, auf der oberen Kante dahingegen durch

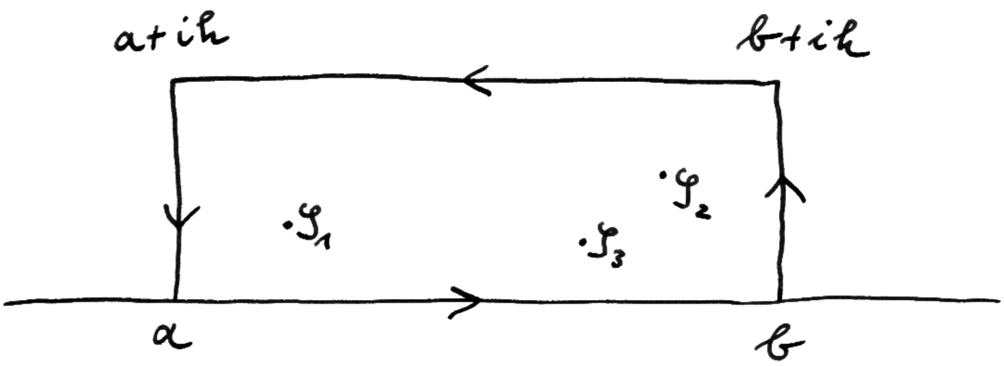
$$\left|\int_\omega f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\right| \le (b-a)\,\mathrm{e}^{-h}\sup_{z\in\omega}|f(z)|$$

Halten wir a fest und nehmen $b = h$ und lassen h nach Unendlich streben, so ergibt sich die Existenz des Grenzwerts $\lim_{r\to\infty}\int_0^r$. Die Existenz des anderen Grenzwerts zeigt man analog, und die behauptete Formel folgt, wenn wir $h = b = -a$ nehmen und das gegen Unendlich streben lassen.

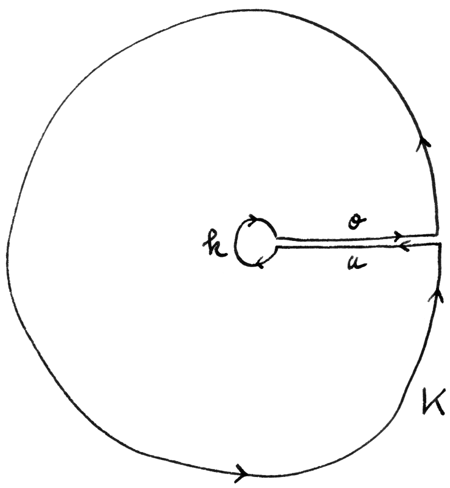
Beispiel 3.3.12 (**Integrale rationaler Funktionen mit allgemeiner Potenz**). Sei $0 < \alpha < 1$ und sei f eine rationale Funktion ohne Pole auf der positiven reellen Achse, bei der der Grad des Nenners mindestens um zwei größer ist als der Grad des Zählers und die in Null holomorph ist oder einen Pol erster Ordnung hat. So existiert das Integral

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\mathrm{d}x$$

nach [AN1] 4.7.5 und wir können seinen Wert wie folgt bestimmen: Wir wählen einen Zweig des Logarithmus log auf der geschlitzten Halbebene $\log : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ so, daß $\lim_{t\searrow 0}\log(x+it)$ für $x \in \mathbb{R}$ der übliche reelle Logarithmus ist. Dann



Der Integrationsweg bei der Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$



Integrationsweg zu Beispiel 3.3.12 des Integrals $\int_0^\infty x^\alpha f(x)\mathrm{d}x$, von einem Punkt weit außen dicht über der reellen Achse auf einem großen Kreis bis dicht unter die reelle Achse, dann längs der reellen Achse ganz nah zum Ursprung, einmal eng um den Ursprung herum, und dann wieder längs der reellen Achse weit nach außen.

setzen wir $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$ und finden für den in nebenstehendem Bild gezeigten Integrationsweg bei hinreichend kleinem Radius innen und hinreichend großem Radius außen

$$\int z^\alpha f(z) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{\zeta \neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^\alpha$$

Lassen wir nun den inneren Radius gegen Null streben und den äußeren Radius gegen ∞, so streben die Integrale über die beiden Kreiswege gegen Null wegen $|z^\alpha| = |z|^\alpha$. Das Integral über den oberen horizontalen Abschnitt des im Bild gezeigten Integrationsweges strebt gegen das gesuchte Integral, das Integral über den unteren dahingegen gegen $-\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\alpha}$ mal das gesuchte Integral. So folgt dann schließlich

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x) \mathrm{d}x = \frac{2\pi \mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\alpha}} \sum_{\zeta \neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^\alpha$$

4 Verschiedene weiterführende Resultate

4.1 Harmonische Funktionen

Definition 4.1.1. Eine auf einer offenen Teilmenge einer euklidischen Ebene definierte stetige reellwertige Funktion heißt **harmonisch**, wenn für jede in unserer Teilmenge enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe der Funktionswert in ihrem Zentrum der Durchschnitt ist über die Funktionswerte auf ihrem Rand.

Ergänzung 4.1.2. Analog definiert man die Harmonizität vektorwertiger Funktionen mit Werten, die je nach den Vorkenntnissen des Lesers in endlichdimensionale reellen Vektorräumen, in reellen Banachräumen oder gar in beliebigen reellen von-Neumann-Räumen liegen mögen.

Vorschau 4.1.3 (**Harmonische Funktionen in anderen Dimensionen**). Allgemeiner heißt eine auf einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ oder noch allgemeiner auf einer offenen Teilmenge eines euklidischen Raums definierte stetige reellwertige Funktion harmonisch, wenn für jede in unserer Teilmenge enthaltene abgeschlossene Kugel der Funktionswert in ihrem Zentrum der Durchschnitt ist über die Funktionswerte auf ihrer Randsphäre.

4.1.4. In Formeln fordern wir im ebenen Fall also, daß unsere harmonische Funktion h auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ definiert sein soll und daß für jeden Punkt p aus dem Definitionsbereich von h und jedes $r > 0$ derart, daß der abgeschlossene r-Ball um p noch ganz zum Definitionsbereich von h gehört, unter der üblichen Identifikation von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ gilt

$$h(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(p + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t$$

Anschaulich mag man sich eine harmonische Funktion als eine stabile Wärmeverteilung denken. Alternativ mag man sich im ebenen Fall eine Ameisendichte vorstellen, die unter der Annahme eines unabhängigen ziellosen Hin- und Herkrabbelns sämtlicher Ameisen zeitlich konstant bleibt. Beide Vorstellungen sind allerdings nur lokal sinnvoll und erweisen sich global als wirklichkeitsfern, da eine nichtkonstante harmonische Funktion auf einem $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ stets alle reellen Zahlen als Werte annimmt, insbesondere also auch beliebig negative Zahlen, die sich ja nicht mehr gut als Ameisendichte oder Temperatur interpretieren lassen.

4.1.5. In der Literatur wird eine harmonische Funktion meist definiert als eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die vom **Laplaceoperator**

$$\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2$$

annulliert wird. Diese Bedingung ist zwar leichter zu prüfen, scheint mir jedoch weniger anschaulich. Wir zeigen die Äquivalenz beider Bedingungen im ebenen Fall in 4.1.9.

Proposition 4.1.6 (Harmonische Funktionen mit Extrema). *Nimmt eine harmonische Funktion auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge eines* $\mathbb{R}^n$ *ihr Maximum oder ihr Minimum an, so ist sie konstant.*

Beweis. Die Menge aller Stellen, an denen eine stetige Funktion ihr Maximum oder auch irgendeinen anderen festen Wert annimmt, ist stets abgeschlossen. Ist unsere Funktion harmonisch und nimmt sie ihr Maximum bei p an, so muß andererseits unsere Funktion auf einer ganzen Kreisscheibe bzw. Kugel $\mathrm{B}(p; \varepsilon(p))$ um p konstant sein, da sonst der Durchschnitt über die Funktionswerte auf gewissen Kreisringen bzw. Kugelschalen um p zu klein wäre. Die Menge der Stellen, an denen das Maximum angenommen wird, ist also auch offen. Ist der Definitionsbereich wegzusammenhängend, so ist diese Menge nach [AN2] 5.5.18 folglich alles oder nichts. □

Lemma 4.1.7. *Je zwei stetige Funktionen auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe, die im Inneren harmonisch sind und auf dem Rand übereinstimmen, stimmen auf der ganzen Kreisscheibe überein.*

Ergänzung 4.1.8. Analoges gilt mit demselben Beweis in allen Dimensionen.

Beweis. Die Differenz unserer beiden Funktionen ist stetig, verschwindet auf dem Rand unserer Kreisscheibe und ist im Inneren harmonisch. Als stetige Funktion muß sie auf der abgeschlossenen Kreisscheibe ihr Maximum und ihr Minimum annehmen. Wäre eines von diesen nicht Null, so würde es im Innern unserer Kreisscheibe angenommen im Widerspruch zu 4.1.6. Also sind das Maximum und das Minimum beide Null und die Differenz verschwindet auf der ganzen Kreisscheibe. □

Satz 4.1.9 (Harmonizität und Laplace-Operator). *Eine stetige reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der Ebene ist harmonisch genau dann, wenn sie zweimal stetig reell differenzierbar ist und vom Laplaceoperator* $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ *annulliert wird.*

Satz 4.1.10 (Harmonizität und Holomorphie). *Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind stets harmonisch. Jede reelle harmonische Funktion mit wegweise einfach zusammenhängendem Definitionsbereich ist umgekehrt der Realteil einer holomorphen Funktion, und diese ist bis auf eine additive rein imaginäre Konstante sogar eindeutig bestimmt.*

Beispiel 4.1.11. Die Funktion $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \log |z|$ alias $\mathbb{R}^2 \backslash 0 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (1/2) \log(x^2 + y^2)$ ist harmonisch. In der Tat ist sie auf jeder geschlitzten Ebene der Realteil jedes Zweiges des komplexen Logarithmus, und diese Zweige sind holomorph als Umkehrfunktionen der geeignet eingeschränkten Exponentialfunktion.

Beweis beider Sätze. Wir untersuchen für stetige reelle Funktionen auf offenen Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ die Beziehungen zwischen den folgenden drei Eigenschaften: (1) „ist harmonisch“, (2) „ist zweimal stetig differenzierbar und wird vom Laplace-Operator annulliert“ sowie (3) „ist Realteil einer holomorphen Funktion“.

(3) $\Rightarrow$ (1): Die Harmonizität des Realteils einer holomorphen Funktion F ergibt sich aus der Integralformel von Cauchy vermittels der Umformungen

$$\begin{aligned} F(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=r} \frac{F(z)}{z-a} \mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{F(a+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t \end{aligned}$$

In der Tat können wir hier überall den Realteil nehmen und im Integral rechts unten stimmt der Realteil des Integrals offensichtlich mit dem Integral des Realteils überein. Das ist gerade die Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen 2.1.4.

(3) $\Rightarrow$ (2): Daß der Realteil jeder holomorphen Funktion zweimal stetig partiell differenzierbar ist und vom Laplace-Operator annulliert wird, folgt leicht aus den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen und der Glattheit holomorpher Funktionen.

(2) $\Rightarrow$ (3) bei einfach zusammenhängendem Definitionsbereich: Wir bemerken, daß für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion h mit $\Delta h = 0$ die Funktion $f = \frac{\partial h}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial y}$ holomorph ist nach 1.2.13, da sie eben die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt. Sie hat also nach 1.5.12 auf jedem einfach zusammenhängenden Definitionsbereich eine holomorphe Stammfunktion F, für die gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{i}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial x}$$

woraus wir folgern, daß ihr Realteil $\operatorname{Re} F$ denselben Gradienten hat wie h. Ändern wir also F um eine geeignete additive Konstante ab, so erhalten wir $h = \operatorname{Re} F$ wie gewünscht. Geometrisch gesprochen bilden wir zu h das Gradientenfeld, drehen es an jeder Stelle um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn, erhalten wegen der $\Delta h = 0$ wieder ein wirbelfreies Vektorfeld und jedes Potential dieses Vektorfeldes ist ein möglicher Imaginärteil, der unsere Funktion h zu einer holomorphen Funktion ergänzt. In der Tat ist ein solches Vorgehen ja nach 1.2.15 auch eine natürliche Methode, um zu einer reellwertigen Funktion einen Imaginärteil zu finden, der sie zu einer holomorphen Funktion ergänzt.

(1) $\Rightarrow$ (2): Es reicht zu zeigen, daß jede stetige Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, die harmonisch ist auf der offenen Einheitskreisscheibe, auf der offenen Einheitskreisscheibe der Realteil einer holomorphen Funktion

ist, denn dann ist unsere Funktion zweimal stetig differenzierbar, ja sogar glatt mit $\Delta = 0$ nach der bereits gezeigten Implikation (3) $\Rightarrow$ (2). Das und noch viel mehr leistet die „Poisson-Transformation" nach 4.1.13, die wir im Folgenden als eigenständigen Satz formulieren und beweisen. □

4.1.12 (**Motivation für die Poisson-Transformation**). Ich will zunächst erklären, wie man von der Fourier-Entwicklung in natürlicher Weise zur Poisson-Transformation geführt wird. Wir denken uns dazu eine reellwertige harmonische Funktion auf einer im Nullpunkt zentrierten offenen Kreisscheibe mit Radius $R > 1$ und suchen eine holomorphe Funktion F auf der offenen Einheitskreisscheibe D° mit $\operatorname{Re} F = h$. Dazu entwickeln wir zunächst einmal die Restriktion $h|S^1$ unserer Funktion auf den Einheitskreis in eine Fourierreihe. Nach [AN2] **??** finden wir wohlbestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ mit

$$h = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu z^\nu$$

auf S^1 im Sinne der Konvergenz der Folge der Partialsummen im quadratischen Mittel, und dabei gilt $\sum |c_\nu|^2 < \infty$. Da h reellwertig ist, haben wir $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$ und können unsere Darstellung von $h|S^1$ umschreiben zu

$$h = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu + \bar{c}_\nu \bar{z}^\nu$$

Hierbei ist wieder im Sinne der Konvergenz der Folge der Partialsummen im quadratischen Mittel gemeint. Da die c_ν beschränkt sind, definiert die Potenzreihe

$$F(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2 c_\nu z^\nu$$

eine holomorphe Funktion auf der offenen Einheitskreisscheibe. Unter der Voraussetzung, daß diese Potenzreihe einen Konvergenzradius > 1 hat, gilt für die Partialsummen $F_n = c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} 2c_\nu z^\nu$ sowohl $F_n \to F$ gleichmäßig auf S^1 also auch $\operatorname{Re} F_n \to h$ im quadratischen Mittel auf S^1, woraus sofort folgt $\operatorname{Re} F = h$ erst auf S^1 und dann wegen 4.1.7 auf der ganzen Einheitskreisscheibe D und wir haben unsere harmonische Funktion wie gewünscht als Realteil einer holomorphen Funktion geschrieben. Um auch ohne die Voraussetzung, daß unsere Potenzreihe einen Konvergenzradius > 1 hat, die Gleichheit $\operatorname{Re} F = h$ auf der offenen Einheitskreisscheibe D° zu zeigen, müssen wir feiner argumentieren. Die Fourierkoeffizienten c_ν sind ja nach [AN2] **??** gegeben als

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\, \mathrm{d}t$$

Wir können also unsere Funktion F für $|z| < 1$ nach Vertauschen eines gleichmäßigen Grenzwerts mit dem Integral auch schreiben in der Gestalt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \left(1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} z^\nu \right) \mathrm{d}t$$

Beim Ausdruck in Klammern ziehen wir einen Faktor $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} z$ aus der Summe, die dadurch zu einer geometrischen Reihe wird, und erhalten

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} z^\nu = 1 + \frac{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} z}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} z} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} z}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} z} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z}$$

So ergibt sich schließlich für die durch unsere Potenzreihe definierte Funktion die Darstellung

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} \mathrm{d}t$$

Wir zeigen im anschließenden Satz, daß für jede stetige Funktion $h : S^1 \to \mathbb{R}$ der Realteil der durch diese Formel gegebenen Funktion $F(z)$ für $z \in D$ eine stetige Fortsetzung von h auf die ganze abgeschlossene Einheitskreisscheibe definiert.

Satz 4.1.13 (Poisson-Transformation). *Jede stetige reellwertige Funktion auf dem Einheitskreis $h : S^1 \to \mathbb{R}$ läßt sich auf genau eine Weise zu einer stetigen Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe D fortsetzen, die auf der offenen Einheitskreisscheibe D° harmonisch ist, und diese Fortsetzung wird für alle $z \in D^\circ$ gegeben durch die Formel*

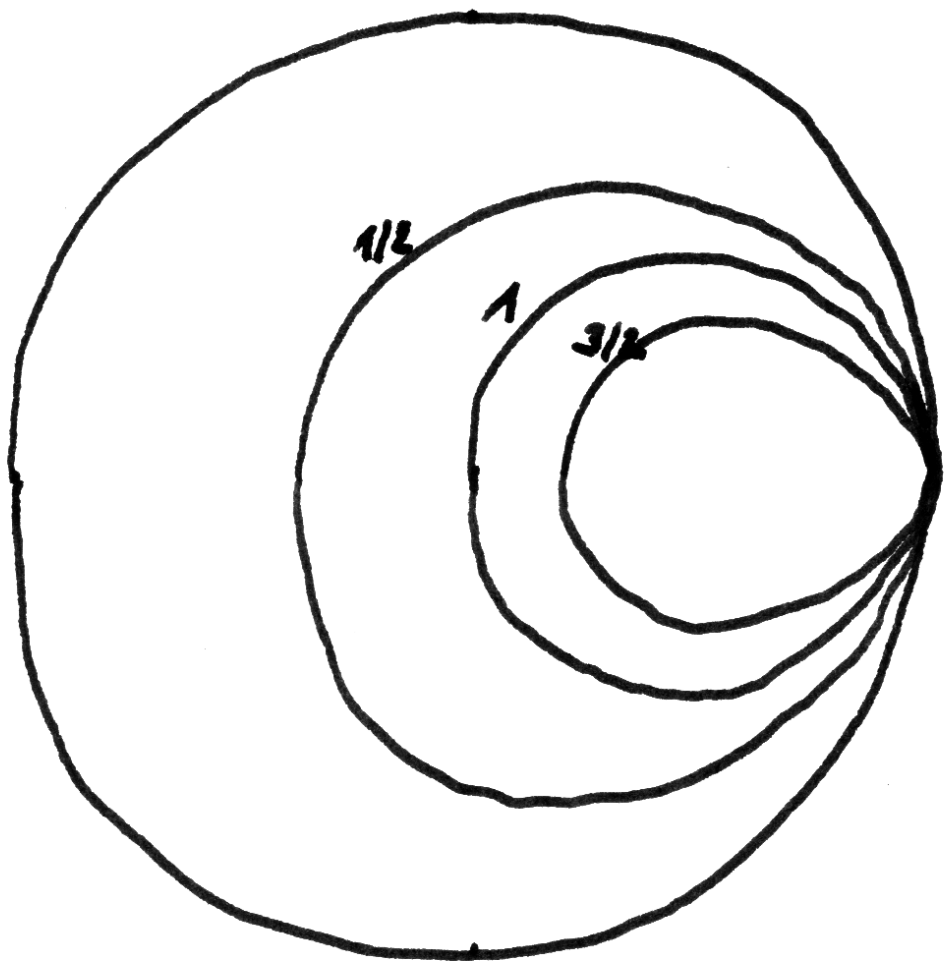
$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \operatorname{Re} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} \right) \mathrm{d}t$$

4.1.14. Anschaulich mag man sich die Funktion h als eine fest vorgegebene Temperaturverteilung auf dem Rand der Einheitskreisscheibe denken, die dann eine unter diesen Randbedingungen stabile Temperaturverteilung auf der ganzen Einheitskreisscheibe erzeugt. Der zweite Faktor unter dem Integral heißt der **Poisson-Kern**. Mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = w$ wird er dargestellt durch

$$P(w, z) = \operatorname{Re} \left(\frac{w + z}{w - z} \right)$$

für $w \in S^1$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq w$. Bei festem w verschwindet dieser Realteil für alle $z \in S^1$ mit $z \neq w$, denn wir haben dann

$$\frac{w + z}{w - z} = \frac{z^{-1} + w^{-1}}{z^{-1} - w^{-1}} = \frac{\bar{z} + \bar{w}}{\bar{z} - \bar{w}}$$



Einige Niveaulinien der Poissonverteilung $z \mapsto P(1, z) = \mathrm{Re}((1+z)/(1-z))$ zu $w = 1$. Sie sollten eigentlich Kreislinien sein und sind nur aufgrund meiner zeichnerischen Schwäche etwas eiförmig geraten. Anschaulich mag man für festes $w \in S^1$ die Funktion $z \mapsto P(w, z)$ auf der offenen Einheitskreisscheibe verstehen als diejenige geeignet normalisierte Wärmeverteilung, die sich einstellt, wenn man „den Punkt w sehr heiß macht und den ganzen übrigen Rand S^1 auf Temperatur Null hält“. Die Niveaulinien dieser Funktion sind die hier gezeichneten Kreise, die den Einheitskreis in w berühren, wie zum Beispiel aus der in [LA2] 5.7.23 diskutierten „Möbius-Geometrie“ folgt.

als da heißt, das komplex Konjugierte unseres Bruches ist gerade das Negative unseres Bruches. Lassen wir aber z aus dem Inneren der Einheitskreisscheibe radial gegen w laufen, also $z = \lambda w$ mit $\lambda \nearrow 1$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$P(w, \lambda w) = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \to \infty$$

Anschaulich mag man für festes $w \in S^1$ die Funktion $z \mapsto P(w, z)$ auf der offenen Einheitskreisscheibe verstehen als diejenige geeignet normalisierte Wärmeverteilung, die sich einstellt, wenn man „den Punkt w sehr heiß macht und den ganzen übrigen Rand S^1 auf Temperatur Null hält". Die Niveaulinien dieser Funktion sind übrigends Kreise, die den Einheitskreis in w berühren, wie zum Beispiel aus der in [LA2] 5.7.23 diskutierten „Möbius-Geometrie" folgt.

Beweis mit Stone-Weierstraß. Für festes z mit $|z| < 1$ finden wir in Erinnerung an das Ende des Beweises von 4.1.12 und durch Vertauschen des Integrals mit der gleichmäßig konvergenten Summe

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, z) \mathrm{d}t = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} z^\nu \right) \mathrm{d}t = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}t = 1$$

Definieren wir also für $h : S^1 \to \mathbb{R}$ seine Poisson-Transformierte $\tilde{h}$ auf der offenen Einheitskreisscheibe durch

$$\tilde{h}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, z) \mathrm{d}t$$

So gilt für das Supremum der Funktionswerte von $\tilde{h}$ auf der offenen Einheitskreisscheibe die Abschätzung $\|\tilde{h}\|_\infty \leq \|h\|_\infty$. Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen g_n auf dem Einheitskreis S^1 gleichmäßig gegen h, so konvergieren demnach ihre Poisson-Transformierten $\tilde{g}_n$ auf der offenen Einheitskreisscheibe D° gleichmäßig gegen $\tilde{h}$. Definieren wir also

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Top}(S^1, \mathbb{R}) & \to & \mathrm{Ens}(D, \mathbb{R}) \\ h & \mapsto & \hat{h} \end{array}$$

durch $\hat{h}(z) := \tilde{h}(z)$ für $|z| < 1$ und $\hat{h}(z) := h(z)$ für $|z| = 1$, so wird eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen auf dem Einheitskreis unter $h \mapsto \hat{h}$ zu einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Für $h : S^1 \to \mathbb{R}$ ein trigonometrisches Polynom $h(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu z^\nu + \bar{c}_\nu \bar{z}^\nu$ wird aber $\hat{h}$ nach den Argumenten aus 4.1.12 schlicht gegeben durch dieselbe Formel auf der ganzen abgeschlossenen Einheitskreisscheibe und ist insbesondere stetig. Indem wir ein beliebiges h mithilfe von

[AN2] **??** als gleichmäßigen Grenzwert einer Folge von trigonometrischen Polynomen schreiben, erkennen wir, daß im allgemeinen $\hat{h}$ auf der ganzen abgeschlossenen Einheitskreisscheibe ein gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist. Das zeigt, daß $\hat{h}$ auch im allgemeinen stetig ist auf der ganzen abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. □

Übungen

Übung 4.1.15. Man zeige durch direkte Abschätzungen, daß eine stetige Funktion auf dem Einheitskreis durch ihre Poisson-Transformierte stetig auf die ganze Einheitskreisscheibe fortgesetzt wird. Dies Argument hat den Vorteil, daß es sich ohne Schwierigkeiten auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. Im Übrigen verallgemeinern sich alle hier für harmonische Funktionen bewiesenen Aussagen ziemlich direkt auf den Fall harmonischer Funktionen auf offenen Teilmengen eines beliebigen $\mathbb{R}^n$.

Übung 4.1.16. Man zeige, daß für $U \circledcirc \mathbb{C}$ wegweise einfach zusammenhängend eine stetige komplexwertige Funktion $U \to \mathbb{C}$ harmonisch ist genau dann, wenn sie als Summe einer holomorphen Funktion mit einer antiholomorphen Funktion dargestellt werden kann.

4.2 Reihenentwicklung des Kotangens

Satz 4.2.1 (Summe der $(z-k)^{-1}$). *Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ gilt im Sinne absoluter Konvergenz*

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) = \pi \cot(\pi z)$$

4.2.2. Die Summe der $(z-k)^{-1}$ über alle ganzen k konvergiert nicht absolut, aber fassen wir wie angedeutet vor dem Summieren jeweils gegenüberliegende Terme zusammen, so entsteht eine absolut konvergente Reihe, die auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ kompakt konvergiert. „Vernünftiges“ anderes Zusammenzufassen von jeweils einem positiven und einem negativen Term liefert dasselbe Ergebnis, unsere Summe hat ja denselben Wert bei z und bei $z+k$. Formeln für die Summen der $(z-k)^{-a}$ bei beliebigem ganzen $a \geq 1$ gewinnen wir aus unserem Satz leicht durch Ableiten. Allerdings stützt sich der hier gegebene Beweis von 4.2.1 auf Proposition 4.2.5, die den Fall $a = 2$ beschreibt, so daß wir besagte Proposition auf andere Weise herleiten müssen.

4.2.3. Zu diesem Beweis gibt es eine wunderbare Alternative, den „Herglotz-Trick“. Den sollte ich auch vorführen!

Beweis. Leiten wir beide Seiten der behaupteten Gleichung nach z ab, so ergibt sich die Gleichung 4.2.5, die wir im Anschluß zeigen. Die Differenz beider Seiten ist also eine Konstante. Da beide Seiten ungerade Funktionen von z sind, ist diese Konstante Null. $\square$

4.2.4. Unter dem **Hauptteil** einer meromorphen Funktion an einer gegebenen Stelle versteht man die Summe derjenigen Terme ihrer Laurententwicklung an besagter Stelle, die dort einen Pol haben. Haben zwei meromorphe Funktionen an einer gegebenen Stelle denselben Hauptteil, so ist ihre Differenz dort natürlich holomorph.

Proposition 4.2.5 (Summe der $(z-k)^{-2}$). *Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ gilt im Sinne absoluter Konvergenz*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

Vorschau 4.2.6. Summiert man nur über die nichtpositiven k, so erhält man die zweite Ableitung des Logarithmus der Γ-Funktion, vergleiche 4.4.9.

Beweis. Die Summe auf der linken Seite konvergiert offenbar unabhängig von der Reihenfolge der Summanden kompakt gegen eine Grenzfunktion, die meromorph ist auf ganz $\mathbb{C}$ mit Polen an allen ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und mit den Hauptteilen $(z-k)^{-2}$ an diesen Polen. Die rechte Seite hat nun jedoch dieselben Polstellen mit denselben Hauptteilen. Die Differenz beider Seiten ist folglich ein holomorphe Funktion $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\delta(z+1) = \delta(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Wir lassen nun im Streifen $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ den Imaginärteil von z sehr groß oder sehr klein werden und behaupten, daß beide Seiten unserer Gleichung und erst recht ihre Differenz δ gegen Null streben, und zwar gleichmäßig im Realteil von z, in Formeln

$$\lim_{|\operatorname{Im}(z)|\to\infty} \delta(z) = 0$$

Damit ist dann ihre Differenz δ beschränkt, nach Liouville 2.1.6 also konstant, also Null. Es bleibt damit nur, diese Behauptung zu zeigen. Sie lohnt nur für die linke Seite einen Beweis. Für z in unserem Streifen mit $|\operatorname{Im}(z)| \geq n$ schätzen wir dazu die Terme unserer Summe mit $-n \leq k \leq n+1$ jeweils ab durch n^{-2}, so daß sie alle zusammen höchstens $(2n+2)n^{-2}$ beitragen. Die übrigen Terme können jeweils abgeschätzt werden durch $(\sqrt{2}k)^{-2}$, und da die Summe der inversen Quadrate aller natürlichen Zahlen ≥ 1 konvergiert, muß die Summe dieser übrigen Terme bei hinreichend großem n auch beliebig klein werden. $\square$

Korollar 4.2.7 (Einige Werte der Riemann'schen ζ-Funktion). *An den positiven geraden ganzzahligen Stellen ist der Wert der Riemann'schen ζ-Funktion ein* *rationales Vielfaches der entsprechenden Potenz der Kreiszahl π. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt also in Formeln*

$$\sum_{k \geq 1} k^{-2n} \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$$

Ergänzung 4.2.8. Für die Summe $\zeta(u)$ der ungeraden Potenzen k^{-u} für ungerades natürliches u, die sogenannten „ungeraden ζ-Werte, ist derzeit (2016) meines Wissens keine Aussage dieser Art bekannt. Vermutet wird, daß die reellen Zahlen $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$ algebraisch unabhängig sind über $\mathbb{Q}$. Apéry hat gezeigt, daß $\zeta(3)$ irrational ist. Bekannt ist weiter, daß unendlich viele ungerade ζ-Werte irrational sind, und daß von den vier ungeraden ζ-Werten $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ mindestens einer irrational ist.

Beweis. Multiplizieren wir die Reihenentwicklung des Kotangens 4.2.1 mit z, so erhalten wir

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + z \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right)$$

im Sinne der kompakten Konvergenz, erst auf $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$, aber dann sehr leicht auch auf $(\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Sicher sind beide Seiten gerade Funktionen von z. Leiten wir beide Seiten $2n$-mal ab und werten bei $z = 0$ aus, so ergibt sich, da wir ja nach 2.2.5 Grenzwert und Ableitung vertauschen dürfen, für $n \geq 1$ die Formel

$$\left. \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}} \right|_{z=0} \pi z \cot(\pi z) = 2n \sum_{k=1}^{\infty} 2 \, \frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)!}{k^{2n}}$$

Diese Formel drückt den Wert der Riemann'schen ζ-Funktion an allen positiven geraden natürlichen Zahlen aus in den Laurentkoeffizienten des Kotangens. Nun ergibt sich die Laurentreihe des Kotangens durch Multiplikation und Inversenbildung aus den Taylorreihen von Sinus und Cosinus und hat nach elementaren Überlegungen insbesondere stets rationale Koeffizienten. Das Korollar folgt. □

4.2.9. Um die Werte der ζ-Funktion an den geraden positiven ganzen Zahlen explizit zu berechnen, beachte man

$$\cot z = \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}} = \mathrm{i} + \frac{2\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}} = \mathrm{i} + \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1}$$

Die **Bernoulli-Zahlen** $\mathrm{B}_2, \mathrm{B}_4, \ldots$ sind nun definiert als die höheren Ableitungen von $z/(\mathrm{e}^z - 1)$ am Ursprung, in Formeln

$$\mathrm{B}_{2n} := \left. \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}} \right|_{z=0} \left(\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} \right)$$

Sie sind natürlich rational und lassen sich induktiv berechnen, indem man die wohlbekannte Taylorreihe von $(\mathrm{e}^z - 1)/z$ formal invertiert. Der Kotangens ist ungerade, so daß die höheren Ableitungen ungerader Ordnung bei Null verschwinden. Vermittels dieser Zahlen lassen sich dann die Werte der Riemann'schen ζ-Funktion an den positiven geraden ganzen Zahlen nach dem Vorhergehenden und elementarer Rechnung, die dem Leser zur Übung überlassen sei, ausdrücken in der Gestalt

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \mathrm{B}_{2n} \pi^{2n}$$

Vorschau 4.2.10. Will man Bernoulli-Zahlen für beliebige Indizes erklären, so setzt man besser

$$\mathrm{B}_k := \left. \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \right|_{z=0} \left(\frac{z}{1 - \mathrm{e}^{-z}} \right)$$

Diese Zahlen sind dann Null für ungerades $k > 1$ und stimmen mit unseren Bernoulli-Zahlen von oben überein für gerades k und haben den Vorteil, daß die Funktionalgleichung der Riemann'schen ζ-Funktion für sie die wunderbare Formel $\mathrm{B}_k = -k\zeta(1-k)$ liefert, die mit der gebührenden Vorsicht interpretiert sogar für $k = 0$ gilt.

4.2.1 Übungen

Übung 4.2.11 (**Alternierende Summe der** $(z-k)^{-1}$). Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Hinweis: Man addiere die alternierende und die nicht alternierende Summe.

Übung 4.2.12. Man zeige für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ die Relation

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (2k+1)^{-2n-1} \in \mathbb{Q}\pi^{2n+1}$$

Hinweis: Den Fall $n = 0$ hatten wir bereits in [AN1] 4.4.14 behandelt. Für den allgemeinen Fall leite man die Identität 4.2.11 ab und werte bei $z = 1/2$ aus. Speziell zeige man im Fall $n = 1$ die Formel

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}$$

4.3 Produktentwicklung des Sinus

Satz 4.3.1 (Produktentwicklung des Sinus). *Der Sinus läßt sich im Sinne der kompakten Konvergenz der partiellen Produkte darstellen als das unendliche Produkt*

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\pi k}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi k}\right)$$

Beweis. Nach 4.3.5 und 2.2.5 definiert die rechte Seite eine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Nullstellen an allen ganzzahligen Vielfachen von π und keinen weiteren Nullstellen. Ihr Quotient nach dem Sinus ist nach dem gleich anschließenden Lemma 4.3.6 also von der Gestalt $\exp(h(z))$ für $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann bilden wir auf beiden Seiten die logarithmische Ableitung im Sinne von 3.3.1. Sie vertauscht auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\pi$ mit dem Grenzübergang. Wir finden mit 4.2.5, daß h konstant ist. Teilen wir nun beide Seiten durch z und setzen $z = 0$, so erkennen wir, daß h sogar identisch verschwinden muß. □

4.3.2. Setzen wir hier speziell $z = \pi/2$, so ergibt sich die sogenannte **Wallis'sche Produktformel**

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}$$

Satz 4.3.3 (Produktentwicklung). *Seien X eine Menge und (f_ν) eine Folge komplexwertiger Funktionen auf X mit der Eigenschaft, daß die Folge der Partialsummen $\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(x) - 1|$ gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion konvergiert. So konvergiert auch die Folge der Partialprodukte $\prod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)$ gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion $X \to \mathbb{C}$, die wir*

$$x \mapsto \prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

notieren und deren Nullstellen genau die Stellen $x \in X$ sind, an denen einer der Faktoren verschwindet. Darüber hinaus ist der Grenzwert der Partialprodukte unter den gegebenen Voraussetzungen unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

4.3.4. Hat in dieser Situation keine der Funktionen f_ν eine Nullstelle, so konvergiert mit $\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(x) - 1|$ auch $\sum_{\nu=1}^{n} |(f_\nu(x))^{-1} - 1|$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion. In der Tat zeigt man für z hinreichend nah bei 1 leicht die Abschätzung $|z^{-1} - 1| \leq 2|z - 1|$. Hat keine der Funktionen f_ν eine Nullstelle, so können wir unseren Satz mithin auch auf die Funktionen f_ν^{-1} anwenden.

4.3.5. Ist X ein metrischer oder allgemeiner ein topologischer Raum und sind die f_ν stetig und konvergiert die Folge der Partialsummen $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x) - 1|$ kompakt gegen eine reelle Grenzfunktion, so konvergiert auch die Folge der Partialprodukte $\prod_{\nu=1}^n f_\nu(x)$ kompakt gegen eine komplexe Grenzfunktion. Um das zu zeigen, brauchen wir nur 4.3.3 auf die Einschränkungen unserer Funktionen auf Kompakta anzuwenden.

Beweis. Ableiten liefert für den Hauptzweig des Logarithmus die Formel

$$\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

Es gibt also $d \in (0,1)$ derart, daß aus $|z| < d$ folgt $|\log(1+z)| \le 3|z|/2$. Nun gibt es sicher ein N mit $\sum_{\nu=N}^\infty |f_\nu(x) - 1| \le d$ für alle $x \in X$, und für $\nu \ge N$ sind alle $\log(f_\nu(x))$ wohldefiniert und nach unserer Abschätzung und dem Majorantenkriterium muß auch die Folge der Funktionen $\sum_{\nu=N}^n \log(f_\nu(x))$ gleichmäßig konvergieren gegen eine betragsmäßig beschränkte Grenzfunktion $L : X \to \mathbb{C}$. Wenden wir $\exp$ an und beachten, daß $\exp$ auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$ gleichmäßig stetig ist, so folgt die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Produkte $\prod_{\nu=N}^n f_\nu(x)$ gegen eine beschränkte Funktion $X \to \mathbb{C}$ ohne Nullstelle, nämlich gegen $\exp \circ L$. Der Satz folgt, da wieder nach unserer Annahme die Faktoren mit $1 \le \nu < N$ und damit auch ihr Produkt betragsmäßig beschränkt sind und das Produkt mit ihnen deshalb nicht die gleichmäßige Konvergenz zerstören kann. Die Unabhängigkeit des unendlichen Produkts von der Reihenfolge der Faktoren folgt leicht aus dem Umordnungssatz für Reihen [AN1] 3.1.16. □

Lemma 4.3.6. *Gegeben $U \circledcirc \mathbb{C}$ wegweise einfach zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstelle gibt es $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \exp h(z)$ für alle $z \in U$.*

Beweis. Nach 1.5.12 hat die holomorphe Funktion $z \mapsto f'(z)/f(z)$ eine Stammfunktion $z \mapsto g(z)$ auf U. Ableiten zeigt, daß $z \mapsto \exp(g(z))/f(z)$ konstant ist. Wir können also $h(z) = c + g(z)$ nehmen für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{C}$. □

Vorschau 4.3.7. In der Topologie [TF] 3.5.10 können sie lernen, daß es allgemeiner für jeden einfach zusammenhängenden topologischen Raum U und jede stetige Abbildung $f : U \to \mathbb{C}^\times$ eine stetige Abbildung $h : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = \exp h(z) \quad \forall z \in U$. Daß für $U \circledcirc \mathbb{C}$ mit f auch h holomorph sein muß, folgt dann aus der lokalen Umkehrbarkeit von $\exp$. Diese Argumentation gefällt mir sehr viel besser als der vorhergehende Beweis.

Übungen

Übung 4.3.8. Für jede holomorphe Funktion f ohne Nullstellen mit wegweise einfach zusammenhängenden Definitionsbereich und jedes $n \geq 1$ gibt es eine holomorphe Funktion g mit demselben Definitionsbereich und mit der Eigenschaft $g(z)^n = f(z)$ für alle Punkte z aus dem Definitionsbereich.

4.4 Gammafunktion

Satz 4.4.1. *Es gibt genau eine meromorphe Funktion* $\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ *derart, daß für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re} z > 0$ *gilt*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1} \mathrm{d}t$$

Sie heißt die **Gammafunktion** *und hat die Werte* $\Gamma(n+1) = n!$ *für alle natürlichen Zahlen* $n \in \mathbb{N}$. *Im Körper der meromorphen Funktionen auf* $\mathbb{C}$ *gilt die* **Funktionalgleichung** $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. *Unsere Gammafunktion ist auf* $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$ *holomorph und hat für* $n \in \mathbb{N}$ *bei* $z = -n$ *jeweils eine einfache Polstelle mit* $(-1)^n/n!$ *als Residuum.*

4.4.2. Ich will zumindest zwei Gründe dafür angeben, warum diese Funktion von Bedeutung ist: Erstens tritt sie in der Funktionalgleichung der Riemann'schen ζ-Funktion 5.1.8 auf, und zweitens führt sie zu Abschätzungen von $n!$, die in der Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich sind.

Beweis. Die obere Abschätzung des Absolutbetrags des Integranden durch t^{a-1} für $\operatorname{Re} z \geq a$ zeigt, daß die Folge der nach 1.2.21 holomorphen Funktion

$$F_n(z) = \int_{1/n}^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1} \mathrm{d}t$$

für $\operatorname{Re} z > 0$ kompakt konvergiert gegen eine nach 2.2.5 holomorphe Grenzfunktion auf der offenen rechten Halbebene. Die Abschätzung $\mathrm{e}^t\, t^{-a} \geq t^2/(a+2)!$ für $a \in \mathbb{N}$ und $t > 0$ liefert $|\,\mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}| \leq (a+2)!\; t^{-2}$ für $\operatorname{Re} z < a+1$ und zeigt, daß die Folge von holomorphen Funktionen

$$G_n(z) = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1} \mathrm{d}t$$

für $\operatorname{Re} z > 0$ kompakt konvergiert gegen eine holomorphe Grenzfunktion auf der offenen rechten Halbebene. In diesem Sinne definiert also das Integral aus dem

Satz eine holomorphe Funktion auf der offenen rechten Halbebene. Für $\operatorname{Re} z > 2$ erhalten wir mit partieller Integration sogar

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^z \mathrm{d}t = -\,\mathrm{e}^{-t}\, t^z|_0^\infty + z \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1} \mathrm{d}t = z\Gamma(z)$$

Hier habe ich darauf verzichtet, wirklich korrekt erst nach dem partiellen Integrieren den Grenzübergang zu vollziehen. Diese Formel können wir auch umschreiben zu $\Gamma(z-1) = \Gamma(z)/(z-1)$ und sie liefert uns dann eine meromorphe Fortsetzung unserer Gammafunktion erst auf die Halbebene $\operatorname{Re} z > -1$, dann auf die Halbebene $\operatorname{Re} z > -2$ und so nach und nach auf ganz $\mathbb{C}$. Offensichtlich gilt $\Gamma(1) = 1 = 0!$ und Iteration mit der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ liefert dann sofort $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Iteration der Funktionalgleichung liefert auch sofort $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\dots z\Gamma(z)$ alias

$$\Gamma(z) = (z+n)^{-1}(z+n-1)^{-1}\dots z^{-1}\Gamma(z+n+1)$$

was ein Produkt ist von $(z+n)^{-1}$ mit einer Funktion, die bei $z = -n$ holomorph ist und die dort den Wert $(-1)^n/n!$ annimmt. $\square$

Satz 4.4.3 (Gauss'sche Formel). *Auf dem Komplement der nichtpositiven ganzen Zahlen in der komplexen Zahlenebene gilt im Sinne kompakter Konvergenz*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Satz 4.4.4 (Produktentwicklung der Γ-Funktion). *Im Sinne der kompakten Konvergenz der Partialprodukte auf dem Komplement der nichtpositiven ganzen Zahlen gilt mit der Abkürzung* $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)$ *die Formel*

$$\Gamma(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \mathrm{e}^{z/k}$$

4.4.5. Um zu sehen, daß der Grenzwert γ existiert, interpretieren wir diese Folge als Eins plus die Differenz zwischen einer geeigneten Untersumme und dem Integral der Funktion $x \mapsto 1/x$ auf $[1, n]$. Diese Differenzen sind dann offensichtlich beschränkt durch Eins. So sehen wir auch $\gamma > 0$. Unser γ heißt die **Euler-Konstante** oder auch **Euler-Mascheroni-Konstante**.

Beweis der beiden Sätze. (1) Wir prüfen zunächst den ersten Satz im Fall $z > 1$. Man geht aus von der Identität

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \mathrm{d}t = \int_0^n \frac{n!\, t^{z+n-1} \mathrm{d}t}{n^n z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

die man durch partielle Integration leicht prüft. Es gilt damit nur noch zu zeigen, daß die linke Seite für $z > 1$ gegen $\Gamma(z)$ strebt. Man kann das mit elementaren Methoden unschwer sehen, vergleiche zum Beispiel [?]. Es folgt aber auch direkt aus dem Satz von Lebesgue über das Vertauschen von Integralen und punktweiser monotoner Konvergenz [AN3] 1.5.12, wenn wir für alle $t \in [0, n)$ die Abschätzungen

$$\left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}$$

nachweisen. Dazu nehmen wir auf beiden Seiten den Logarithmus und müssen zeigen, daß für $t \in [0, n)$ die Funktion $x \mapsto x \log(1 - \frac{t}{x})$ monoton wächst auf $[n, \infty)$. Ihre Ableitung ergibt sich zu

$$\log\left(1 - \frac{t}{x}\right) + \frac{t}{x}\left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-1}$$

und es reicht folglich zu zeigen, daß die Funktion $y \mapsto \log(1 - y) + y(1 - y)^{-1}$ nichtnegativ ist für $y \in [0, 1)$. Bei $y = 0$ nimmt diese Funktion jedoch den Wert Null an und ihre Ableitung

$$\frac{-1}{1-y} + \frac{(1-y) + y}{(1-y)^2} = \frac{y}{(1-y)^2}$$

wird auf $[0, 1)$ nicht negativ.

(2) Als nächstes prüfen wir, daß das unendliche Produkt aus dem zweiten Satz in den in 4.3.3 vorgegebenen Rahmen fällt, daß also die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\mathrm{e}^{-z/k} \left(1 + \frac{z}{k}\right)\right) - 1 \right|$$

kompakt konvergieren. Dazu beachten wir, daß nach der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion gilt

$$1 + t - \mathrm{e}^t = t^2 f(t)$$

für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wählen wir also ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$, so finden wir eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|1 + (z/k) - \mathrm{e}^{z/k}| \leq C/k^2$$

für alle $z \in K$ und alle natürlichen Zahlen $k \geq 1$, und für das Produkt der linken Seite mit $|\,\mathrm{e}^{-z/k}\,|$ gilt offensichtlich eine Abschätzung derselben Gestalt, nur möglicherweise mit größerem C. Nun zeigt 4.3.3, daß die Formel im Satz eine meromorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert mit einfachen Polstellen an allen nichtpositiven ganzen Zahlen und keinen weiteren Pol- oder Nullstellen.

(3) Als letztes prüfen wir, daß die Partialprodukte Γ_n in unserer Produktentwicklung im zweiten Satz bis auf einen kompakt gegen die konstante Funktion Eins konvergierenden Korrekturterm genau die Glieder unserer Funktionenfolge aus dem ersten Satz sind. Formen wir in der Tat die Partialprodukte etwas um, so ergibt sich

$$\begin{array}{rcl}\Gamma_n(z) & = & \mathrm{e}^{-\gamma z}\, z^{-1} \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{\nu+z}{\nu}\right)^{-1} \mathrm{e}^{z/\nu} \\ & = & \mathrm{e}^{-\gamma z} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \exp\left(\left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu}\right) z\right) \\ & = & \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \exp\left(\left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \log(n) - \gamma\right) z\right)\end{array}$$

Der letzte Faktor strebt nun für $n \to \infty$ kompakt gegen 1, womit beide Sätze bewiesen wären. □

4.4.6. Aus den Produktentwicklungen 4.4.4 und 4.3.1 folgt sofort die Gleichheit von meromorphen Funktionen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

und insbesondere die Identität $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Man nennt die erste Identität auch die **Spiegelungsformel**.

4.4.1 Übungen

Ergänzende Übung 4.4.7. Für komplexe $x, y \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil definiert man die **Euler'sche Betafunktion** als das Integral

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t$$

Man zeige die Identität $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$. Hinweis: Per definitionem gilt $\Gamma(x) = \int_0^\infty a^{x-1}\mathrm{e}^{-a}\mathrm{d}a$, $\Gamma(y) = \int_0^\infty b^{y-1}\mathrm{e}^{-b}\mathrm{d}b$, $\Gamma(x+y) = \int_0^\infty s^{x+y-1}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s$. Man zeige $B(x,y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$ mithilfe des Satzes von Fubini und der Substitution $s = a+b$, $t = a/(a+b)$.

Übung 4.4.8. Man zeige $\Gamma'(1) = \gamma$ mit der Euler-Konstante γ aus 4.4.4. Hinweis: Man mag von der Gauß'schen Formel 4.4.3 ausgehen.

Übung 4.4.9. Man zeige

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \log \Gamma(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(z+k)^2}$$

für $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ Hinweis: Man mag von der Produktentwicklung 4.4.4 ausgehen.

Übung 4.4.10. Man zeige die **Legendre'sche Verdopplungsformel**

$$\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma(z + (1/2))\, 2^{2z-1}/\sqrt{\pi}$$

Hinweis: Man mag von Übung 4.4.9 ausgehen um zu zeigen, daß die Funktion $\Gamma(z)\Gamma(z + (1/2))/\Gamma(2z)$ von $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \log$ zu Null gemacht wird, so daß der Logarithmus $\log(\Gamma(2z)/\Gamma(z)\Gamma(z + (1/2))) = az + b$ ein Polynom vom Grad Eins sein muß. Durch Einsetzen geeigneter Werte bestimmt man dann a und b.

4.5 Riemann'scher Abbildungssatz

Satz 4.5.1 (Riemann'scher Abbildungssatz). *Jede einfach zusammenhängende echte offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ läßt sich biholomorph mit der offenen Einheitskreisscheibe identifizieren.*

4.5.2. Die Bedingung, eine echte Teilmenge zu sein, schließt den Fall aus, daß unsere offene Teilmenge die ganze komplexe Zahlenebene ist. In der Tat ist diese nicht biholomorph zur offenen Einheitskreisscheibe, denn es gibt darauf keine nichtkonstanten beschränkten holomorphen Funktionen. Der Fall der leeren Menge wird durch die Bedingung ausgeschlossen, daß unsere Teilmenge einfach zusammenhängend sein soll.

Vorschau 4.5.3 (**Der große Riemann'sche Abbildungssatz**). Die tiefere Bedeutung des obigen Satzes wird erst klar im Lichte des sogenannten „großen Riemann'schen Abbildungssatzes“, der besagt, daß es bis auf biholomorphe Identifikationen genau drei einfach zusammenhängende „Riemann'sche Flächen“ gibt: Die Riemann'sche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ und die offene Einheitskreisscheibe E. Man findet einen Beweis zum Beispiel in [For77]. Auf ganz $\mathbb{C}$ gibt es im Gegensatz zur offenen Einheitskreisscheibe nach dem Satz von Liouville 2.1.6 keine nichtkonstante beschränkte holomorphe Funktion. Es ist also unmöglich, diese beiden Gebiete biholomorph miteinander zu identifizieren. Wir beginnen den Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes mit einigen allgemeinen Resultaten zu Folgen holomorpher Funktionen.

Satz 4.5.4 (Montel). *Jede lokal betragsmäßig simultan beschränkte Folge von holomorphen Funktionen auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.*

4.5.5. Seien $U \Subset \mathbb{C}$ unsere offene Teilmenge der Zahlenebene und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge. Wir nennen unsere Folge **betragsmäßig simultan beschränkt** genau dann, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f_n(x)| \leq R$ für alle $x \in U$

und alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen unsere Folge **lokal betragsmäßig simultan beschränkt** genau dann, wenn jeder Punkt von U eine Umgebung besitzt derart, daß die durch Restriktion entstehende Folge von Funktionen auf besagter Umgebung betragsmäßig simultan beschränkt ist.

Vorschau 4.5.6 (**Bezug zum Satz von Arzela-Ascoli**). Man kann diesen Satz verstehen als ein Korollar des Satzes von Arzela-Ascoli [TM] 2.10.4, wenn man beachtet, daß für jede Folge von holomorphen Funktionen mit lokal betragsmäßig simultan beschränktem Wertebereich auch ihre Ableitungen nach der Formel aus dem Beweis von 2.1.5 lokal simultan beschränkt sind. Wir geben hier jedoch einen eigenständigen Beweis, der im wesentlichen der Beweis von Arzela-Ascoli mit einigen in unserem Spezialfall möglichen Vereinfachungen ist.

Beweis. Wir wählen eine dichte Folge $p_0, p_1, \ldots$ im gemeinsamen Definitionsbereich U der Funktionen f_n unserer Folge. Mit Heine-Borel [AN1] 7.1.9 finden wir eine Teilfolge f_n^0, die bei p_0 punktweise konvergiert. Von dieser finden wir eine Teilfolge f_n^1, die auch bei p_1 punktweise konvergiert. Von dieser hinwiederum finden wir eine Teilfolge f_n^2, die auch bei p_2 punktweise konvergiert. So machen wir immer weiter. Die „diagonale“ Folge f_n^n konvergiert dann punktweise an allen p_i und ist damit kompakt konvergent nach Lemma 4.5.7, das wir im Anschluß beweisen. □

Lemma 4.5.7. *Eine lokal simultan betragsmäßig beschränkte Folge von holomorphen Funktionen, die an allen Punkten einer dichten Teilmenge ihres gemeinsamen Definitionsbereichs punktweise konvergiert, konvergiert bereits kompakt auf dem gesamten Definitionsbereich.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß unsere Folge f_n auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe K aus dem gemeinsamen Definitionsbereich gleichmäßig konvergiert. Nun kann jede solche abgeschlossene Kreisscheibe vergrößert werden zu einer echt größeren abgeschlossenen Kreisscheibe L aus dem gemeinsamen Definitionsbereich, und mit der Integralformel für die Ableitung aus dem Beweis von 2.1.5 folgt aus der simultanen Beschränktheit der Funktionen unserer Folge auf dem Rand dieser größeren Kreisscheibe L die simultane Beschränktheit ihrer Ableitungen auf unserer ursprünglichen Kreisscheibe K, sagen wir durch eine Konstante $c > 0$. Aus dem Mittelwertsatz [AN1] 8.2.9 folgt nun $|f_n(x) - f_n(y)| \leq c|x - y|$ für alle $x, y \in K$. Wählen wir für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E = E_\varepsilon \subset K$ unserer dichten Teilmenge derart, daß die Kreisscheiben um $x \in E$ mit Radius $c^{-1}\varepsilon$ bereits K überdecken, so folgt aus $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in E$ bereits $|f_n(y) - f_m(y)| \leq 3\varepsilon \ \forall y \in K$. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also $N \in \mathbb{N}$ mit $N \leq m \leq n \Rightarrow |f_n(y) - f_m(y)| \leq 3\varepsilon \ \forall y \in K$. □

Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes 4.5.1. Sei $G \Subset \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende echte offene Teilmenge. Wir gehen in drei Schritten vor.

(1) Wir zeigen zunächst, daß es eine holomorphe Injektion von G in eine Kreisscheibe von endlichem Radius gibt. In der Tat sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \notin G$. Nach 4.3.6 gibt es dann auf G einen Zweig des Logarithmus, in Formeln $g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $z = \exp(g(z)) \quad \forall z \in G$. Das Bild von g ist offen und enthält folglich eine offene Kreisscheibe D. Dann hat es aber notwendig leeren Schnitt mit der um $2\pi\mathrm{i}$ verschobenen Kreisscheibe $2\pi\mathrm{i} + D$. Ist w das Zentrum dieser verschobenen Kreisscheibe und wenden wir nach g noch die Abbildung $z \mapsto (z-w)^{-1}$ an, so wird in der Tat G in eine Kreisscheibe von endlichem Radius eingebettet.

(2) Nach dem ersten Schritt können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser Bereich G den Nullpunkt enthält und in der offenen Einheitskreisscheibe E enthalten ist. Wir behaupten nun, daß es unter allen holomorphen Injektionen $f : G \to E$ mit $f(0) = 0$ eine gibt, für die $|f'(0)|$ maximal wird. In der Tat umfaßt G eine Kreisscheibe $\mathrm{B}(0; \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$, woraus folgt, daß für holomorphe Abbildungen $f : G \to E$ die Ableitung am Nullpunkt, nach der Formel aus dem Beweis von 2.1.5 gegeben durch

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z^2} \mathrm{d}z$$

betragsmäßig beschränkt ist durch ε^{-1}. Also gibt es ein Supremum S der Menge der möglichen $|f'(0)|$ und eine Folge von holomorphen Injektionen $f_n : G \to E$ derart, daß $|f_n'(0)|$ gegen dieses Supremum strebt. Nach dem Satz von Montel 4.5.4 dürfen wir sogar annehmen, daß diese Folge kompakt konvergiert. Die Grenzfunktion f ist dann nach 2.2.5 wieder holomorph mit $|f'(0)| = S$. Sie ist auch injektiv nach dem Korollar 4.5.9, das wir im Anschluß beweisen, und landet nicht nur in der abgeschlossenen, sondern sogar in der offenen Einheitskreisscheibe nach dem Satz über die Gebietstreue 2.4.6. Also haben wir eine holomorphe Injektion $f : G \to E$ gefunden mit $f(0) = 0$, für die die Ableitung $|f'(0)|$ den unter diesen Einschränkungen größtmöglichen Wert annimmt.

(3) Jetzt gilt es noch zu zeigen, daß die im vorherigen Schritt konstruierte Abbildung f surjektiv auf die ganze Einheitskreisscheibe geht. Dazu führen wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch, indem wir zu jeder nicht surjektiven holomorphen Injektion $f : G \hookrightarrow E$ mit $f(0) = 0$ eine weitere konstruieren, deren Ableitung im Ursprung betragsmäßig noch größer ist. Sei also $p \in E \backslash f(G)$. Wir finden $h_1 : E \xrightarrow{\sim} E$ biholomorph mit $h_1(p) = 0$. Nach 4.3.8 gibt es dann eine Wurzel von $h_1 \circ f$, als da heißt eine Funktion g mit $q \circ g = h_1 \circ f$ für $q : z \mapsto z^2$ das Quadrieren. Schließlich finden wir dann noch $h_2 : E \xrightarrow{\sim} E$ biholomorph mit $h_2(g(0)) = 0$. Wir behaupten nun, daß $F = h_2 \circ g$ eine größere Ableitung im Ursprung hat als f. Um das zu sehen, beachten wir $q \circ h_2^{-1} \circ F = h_1 \circ f$ alias $(h_1^{-1} \circ q \circ h_2^{-1}) \circ F = f$. Nun ist aber der Ausdruck in Klammern eine biholo-

morphe nicht invertierbare Abbildung $E \to E$, die den Ursprung festhält. Ihre Ableitung im Ursprung ist nach 2.4.11 also betragsmäßig echt kleiner als Eins, und mit der Kettenregel folgt $|F'(0)| > |f'(0)|$. $\square$

Satz 4.5.8 (**Nullstellenanzahl von Grenzfunktionen**). *Sei auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen gegeben. Haben alle Funktionen unserer Folge mit Vielfachheiten gerechnet höchstens N Nullstellen und ist unsere Grenzfunktion nicht die Nullfunktion, so hat auch unsere Grenzfunktion mit Vielfachheiten gerechnet höchstens N Nullstellen.*

Beweis. Seien $f_n : U \to \mathbb{C}$ unsere Funktionen und $f : U \to \mathbb{C}$ ihre Grenzfunktion. Sind $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Nullstellen von f, so können wir paarweise disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben $K_1, \ldots, K_r \subset U$ wählen so, daß p_s jeweils die einzige Nullstelle von f aus K_s ist. Sicher verschwinden nur endlich viele der f_n auf dem Rand irgend einer unserer Kreisscheiben. Wegen der kompakten Konvergenz der Ableitungen nach 2.2.5 haben wir also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \vec{K}_s} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \vec{K}_s} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$$

Das aber besagt nach Satz 3.3.2 über das Zählen von Null- und Polstellen, daß für hinreichend großes n die Funktion f_n mit Vielfachkeiten gerechnet ebensoviele Nullstellen in der Kreisscheibe K_s hat wie die Grenzfunktion f. $\square$

Korollar 4.5.9. *Ist $U \Subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, so ist die Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge injektiver holomorpher Funktionen auf U entweder injektiv oder konstant.*

Beweis. Die Herleitung aus 4.5.8 bleibe dem Leser überlassen. $\square$

Übungen

Übung 4.5.10. Man zeige, daß der Satz über die Nullstellenanzahl von Grenzfunktionen analog auch gilt, wenn wir die Vielfachheiten nicht beachten: Ist auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen gegeben, und haben alle Funktionen unserer Folge höchstens N Nullstellen, und ist unsere Grenzfunktion nicht die Nullfunktion, so hat auch unsere Grenzfunktion höchstens N Nullstellen.

5 Erste Anwendungen in der Zahlentheorie*

5.1 Verteilung von Primzahlen

Satz 5.1.1 (Primzahlsatz). *Bezeichnet $\pi(x)$ für jede reelle Zahl x die Zahl der Primzahlen $\leq x$, so gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1$$

5.1.2. Das Symbol $\log$ ist hier wie immer in diesem Text zu interpretieren als der natürliche Logarithmus alias die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp$. Etwas vage gesagt ist für großes x also die Wahrscheinlichkeit, daß eine natürliche Zahl $\leq x$ prim ist, in etwa $1/\log(x)$. Die Konvergenz ist jedoch sehr langsam: Bei $x = 100000$ finden wir als Wert etwa $1{,}1$ und bei $x = 10^9$ als Wert etwa $1{,}05$. Der Beweis wird uns diesen ganzen Abschnitt beschäftigen und wird erst ganz am Ende gegeben. Im Grundgedanken zeigen wir den Primzahlsatz, indem wir einen „Taubersatz" anwenden auf die logarithmische Ableitung der Riemann'schen ζ-Funktion, geteilt durch z und bereinigt um den Hauptteil dieses Quotienten bei $z = 1$.

Definition 5.1.3. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 1$ definieren wir den Wert der **Riemann'schen ζ-Funktion** an der Stelle z durch die absolut konvergente Reihe

$$\zeta(z) := \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^z}$$

5.1.4. Mit [AN1] 4.8.22 sieht man leicht, daß die Partialsummen dieser Reihe für jedes $\alpha > 1$ auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) \geq \alpha$ gleichmäßig konvergieren. Folglich definiert unsere Reihe eine holomorphe Funktion auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Satz 5.1.5 (Produktentwicklung der ζ-Funktion). *Bezeichnet $P \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen, so gilt*

$$\zeta(z) = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

im Sinne der kompakten Konvergenz der partiellen Produkte auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 1$*, unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.*

5.1.6. Diese Produktentwicklung geht auf Euler zurück und ihre Faktoren heißen danach die **Euler-Faktoren**. Diese Terminologie verallgemeinert man dann auf allgemeinere ζ-Funktionen und sogenannte „L-Reihen", die uns später begegnen werden.

Beweis. Unsere allgemeinen Überlegungen 4.3.4 zeigen, daß das Produkt auf der rechten Seite auf $\mathrm{Re}(z) > 1$ kompakt konvergiert. Nun können wir für $\mathrm{Re}(z) > 1$ ja die Faktoren in eine geometrische Reihe entwickeln in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots$$

Wählen wir $E \subset P$ endlich und bezeichnen mit $\mathbb{N}(E)$ die Menge aller natürlichen Zahlen ≥ 1, deren sämtliche Primfaktoren zu E gehören, so erhalten wir mit [AN1] 3.2.12 für die Partialprodukte die Darstellung

$$\prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}(E)} \frac{1}{k^z}$$

Betrachten wir auf beiden Seiten jeweils die Menge $E = E_n$ der ersten n Primzahlen und lassen n gegen unendlich streben, so konvergiert die rechte Seite gegen $\zeta(z)$ nach dem Satz über dominierte Konvergenz [AN3] 1.6.9, der im vorliegenden Spezialfall im Wesentlichen auch bereits als Übung [AN1] 3.1.28 behandelt wurde. □

Lemma 5.1.7 (Fortsetzbarkeit der Riemann'schen ζ-Funktion). *Die Riemann'sche ζ-Funktion läßt sich zu einer meromorphen Funktion auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$ fortsetzen, und diese Fortsetzung ist holomorph mit Ausnahme der Stelle $z = 1$, an der sie einen einfachen Pol mit dem Residuum Eins hat.*

Vorschau 5.1.8. Die Riemann'sche ζ-Funktion läßt sich sogar zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen und die mit dieser Fortsetzung und der Γ-Funktion aus 4.4.1 erklärte meromorphe Funktion $\Lambda(z) := \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$ erfüllt die **Funktionalgleichung** $\Lambda(z) = \Lambda(1 - z)$ alias ist punktsymmetrisch um den Punkt $1/2$, in Formeln $\Lambda((1/2) + z) = \Lambda((1/2) - z)$. Des weiteren hat Λ nur bei 0 und 1 Polstellen. Anders gesagt unter Verwendung der Verdopplungsformel 4.4.10 gilt $\zeta(1 - z) = (2/(2\pi)^z)\cos(\pi z/2)\Gamma(z)\zeta(z)$. Das alles zeigen wir hier jedoch nicht.

Beweis. Für $\mathrm{Re}(z) > 1$ gilt

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^z} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z}\right) \mathrm{d}x$$

Die Partialsummen dieser Reihe jedoch bilden eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$, da wir die Summanden für $\mathrm{Re}(z) > 0$ abschätzen können durch

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z}\right) \mathrm{d}x \right| = \left| z \int_n^{n+1} \left(\int_n^x \frac{\mathrm{d}u}{u^{z+1}}\right) \mathrm{d}x \right| \leq \frac{|z|}{n^{\mathrm{Re}(z)+1}}$$ □

Lemma 5.1.9 (Nullstellen der Riemann'schen ζ-Funktion). *Die Riemann'sche ζ-Funktion hat keine Nullstellen z mit Realteil* $\mathrm{Re}(z) \geq 1$.

Ergänzung 5.1.10. Die **Riemann'sche Vermutung** besagt sehr viel stärker, daß die Riemann'sche ζ-Funktion sogar keine Nullstellen mit Realteil $> 1/2$ haben sollte. Mit der Funktionalgleichung 5.1.8 und den Eigenschaften der Γ-Funktion folgt daraus sofort, daß außer den „trivialen" Nullstellen bei den negativen geraden ganzen Zahlen alle Nullstellen der ζ-Funktion auf der Gerade $\mathrm{Re}(z) = 1/2$ liegen müßten. Diese Vermutung ist eine der berühmtesten und wichtigsten offenen Fragen der Mathematik.

5.1.11. Den folgenden Beweis und insbesondere sein Ende verstehe ich leider nur oberflächlich. Ich kann insbesondere kein Prinzip erkennen, das einen auf diese Idee hätte führen sollen.

Ergänzung 5.1.12. Der Integrallogarithmus wird definiert durch die Formel

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(t)}$$

Er sollte für $x \to \infty$ die Primzahlfunktion $\pi(x)$ noch sehr viel besser approximieren als $\frac{x}{\log x}$. Man kann sogar zeigen, daß die Riemann'sche Vermutung äquivalent ist zur Aussage, daß es eine Konstante C gibt mit

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \leq C\sqrt{x}\log(x)$$

für hinreichend großes x, vergleiche etwa [Bru01]. Die Verträglichkeit dieser Vermutung mit dem Primzahlsatz zeigt Übung [AN1] 4.7.6. Wie bereits erwähnt finden wir bei $x = 100000$ als Wert von $\pi(x)\log(x)/x$ ungefähr $1{,}1$ und bei $x = 10^9$ ungefähr $1{,}05$. Die entsprechenden Werte von $\pi(x)/\mathrm{Li}(x)$ sind dahingegen ungefähr $0{,}991$ und $0{,}99997$.

Beweis. Für Realteil $\mathrm{Re}(z) > 1$ folgt das mit 4.3.4 aus der Produktentwicklung. Um auch Nullstellen mit Realteil Eins auszuschließen, reicht es zu zeigen, daß die logarithmische Ableitung der ζ-Funktion außer bei $z = 1$ keine Polstellen auf der Geraden $\mathrm{Re}(z) = 1$ hat. Für $\mathrm{Re}(z) > 1$ erhalten wir aus der Produktentwicklung für die logarithmische Ableitung der ζ-Funktion die Darstellung

$$\frac{\mathrm{dlog}\,\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{p\in P} \frac{\log p}{p^z - 1}$$

Nun unterscheidet sich die rechte Seite von der einfacher handhabbaren Funktion

$$\Phi(z) := \sum_{p\in P} \frac{\log p}{p^z}$$

nur um das Vorzeichen und um die Reihe

$$\sum_{p\in P} \frac{\log p}{p^z - 1} - \sum_{p\in P} \frac{\log p}{p^z} = \sum_{p\in P} \frac{\log p}{p^z(p^z - 1)}$$

Diese Reihe konvergiert offensichtlich sogar auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$ kompakt gegen eine holomorphe Funktion. Mit der logarithmischen Ableitung der ζ-Funktion hat also auch unsere Funktion Φ eine meromorphe Fortsetzung auf die Halbebene $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$ ohne Pole höherer Ordnung und mit einfachen Polen, die eben bei $z = 1$ und an den Nullstellen von ζ liegen und deren Residuum an jeder Nullstelle der ζ-Funktion aufgrund des Vorzeichenwechsels das Negative der Nullstellenordnung ist bzw. eine Eins am einfachen Pol der ζ-Funktion bei $z = 1$. Nun beachte man für alle $\alpha > 0$ und $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(p^{\mathrm{i}\alpha/2} + p^{-\mathrm{i}\alpha/2}\right)^4 =\;& \Phi(1+\varepsilon+2\mathrm{i}\alpha) + 4\Phi(1+\varepsilon+\mathrm{i}\alpha) \\ & +6\Phi(1+\varepsilon) \\ & +4\Phi(1+\varepsilon-\mathrm{i}\alpha) + \Phi(1+\varepsilon-2\mathrm{i}\alpha) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $\varepsilon > 0$, lassen ε von oben gegen Null streben und beachten $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$, so erhalten wir für μ bzw. ν die Nullstellenordnungen von ζ an den Stellen $1+\mathrm{i}\alpha$ bzw. $1+2\mathrm{i}\alpha$ die Abschätzung $0 \leq 6-2\nu-8\mu$. Daraus folgt dann sofort, daß die ζ-Funktion auch keine Nullstellen mit Realteil Eins haben kann. □

5.1.13. Gegeben $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte meßbare Funktion erklärt man eine holomorphe Funktion F auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$, ihre **Laplace-Transformierte**, durch die Vorschrift

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

Daß diese Funktion tatsächlich holomorph ist, wird der Leser als Übung leicht zeigen können. Die Laplace-Transformation wird allgemeiner für Borel-Maße auf $\mathbb{R}_{>0}$ erklärt, die für $t \to \infty$ so langsam dichter werden, daß ihre Transformierte noch auf einer Halbebene der Form $\mathrm{Re}(z) > a$ definiert ist. Sie ist bei der Lösung von Differentialgleichungen oft hilfreich, da sie diese in algebraische Gleichungen umwandelt.

Satz 5.1.14 (Taubersatz von Newman). *Ist $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ beschränkt und meßbar und läßt sich die Laplace-Transformierte F von f holomorph auf eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ fortsetzen, so gilt für den Wert bei Null dieser Ausdehnung die Formel*

$$F(0) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

Ergänzung 5.1.15. Statt der Meßbarkeit von f ist für unsere Anwendung die elementarere Bedingung ausreichend, daß f stetig sein soll auf dem Komplement des Bildes einer streng monoton wachsenden Folge. Die Bezeichnung als „Taubersatz" kommt her von der vagen Analogie zum ursprünglichen Satz von Tauber, den wir in [AN1] 5.4.4 diskutieren.

Beweis. Für $T \in [0, \infty)$ und $z \in \mathbb{C}$ setzen wir $F_T(z) = \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, \mathrm{d}t$. Diese Funktionen sind natürlich holomorph. Betrachten wir nun $R > 0$ und wählen $\delta > 0$ so klein, daß F sich holomorph fortsetzen läßt auf eine offene Menge, die

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R,\ \operatorname{Re} z \geq -\delta\}$$

umfaßt. Ist γ der Randweg dieses Gebiets, so liefert der Integralsatz von Cauchy

$$F(0) - F_T(0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma (F(z) - F_T(z))\, \mathrm{e}^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

Das Hinzufügen der beiden hinteren Faktoren ist ein Kunstgriff, dessen Herkunft ich nicht verstehe. Wir schätzen nun unser Wegintegral ab. Auf dem offenen Halbkreis $|z| = R, \operatorname{Re} z > 0$, ja sogar auch der ganzen offenen Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$, finden wir unter der Annahme $|f(t)| \leq B$ für alle t die Schranke

$$|F(z) - F_T(z)| = \left| \int_T^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{zt}\, \mathrm{d}t \right| \leq B \int_T^\infty |\,\mathrm{e}^{-zt}\,|\, \mathrm{d}t = \frac{B\, \mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} z)T}}{\operatorname{Re} z}$$

Da für $|w| = 1$ stets gilt $|1 + w^2| = |w^{-1} + w| = 2|\operatorname{Re} w|$, erhalten wir auf der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 0$ für den Betrag der hinteren Faktoren

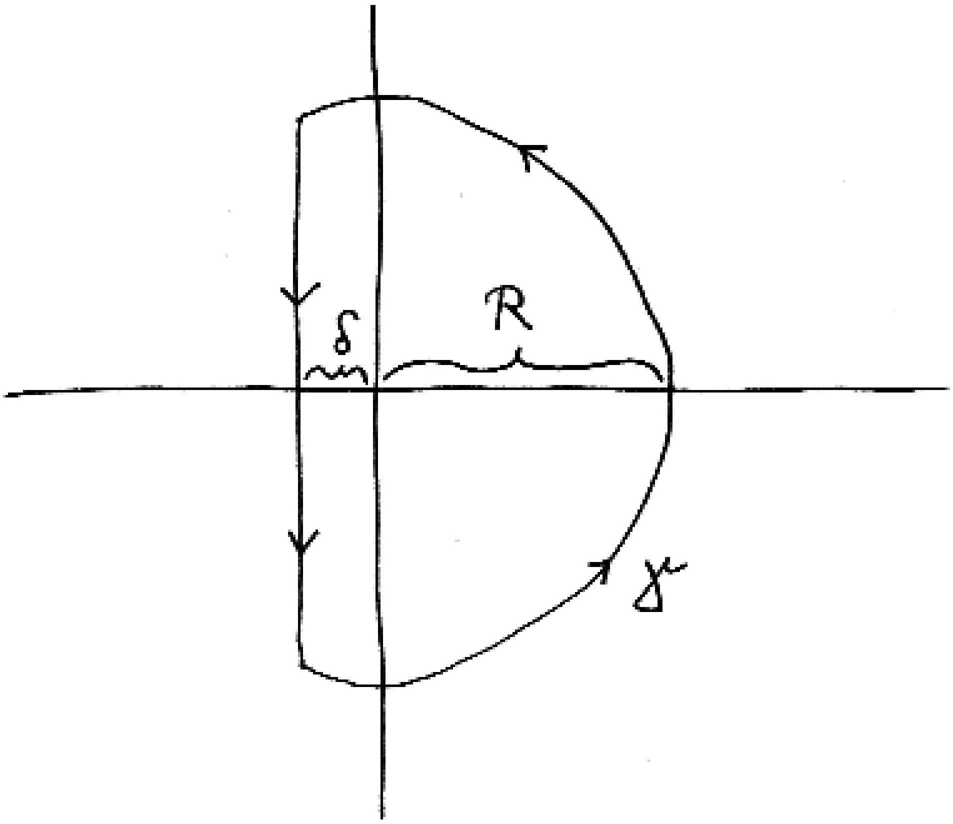
$$\left| \mathrm{e}^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \quad = \quad \mathrm{e}^{(\operatorname{Re} z)T} \quad \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R^2}$$

Das Integral über den Teil unseres Weges mit Realteil größergleich Null ist also betragsmäßig beschränkt durch $2\pi B/R$. Das Integral über den Teil des Weges γ in der Halbebene $\operatorname{Re} z \leq 0$ schätzen wir für F und für F_T separat ab. Da F_T holomorph ist auf ganz $\mathbb{C}$, können wir ebensogut das Integral über den Halbkreis $|z| = R, \operatorname{Re} z \leq 0$ berechnen. Für $\operatorname{Re} z < 0$ finden wir

$$|F_T(z)| \quad = \quad \left| \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, \mathrm{d}t \right| \quad \leq \quad B \int_0^T |\,\mathrm{e}^{-zt}\,| \mathrm{d}t \quad \leq \quad \frac{\mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} z)T}}{-\operatorname{Re} z}$$

und mit derselben Abschätzung wie zuvor ist dieser Anteil des Integrals betragsmäßig beschränkt durch $2\pi B/R$. Das Integral über

$$F(z)\, \mathrm{e}^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}$$



Der Integralweg aus dem Beweis des Taubersatzes von Newman über den Teil unseres Weges γ, der in der Halbebene $\mathrm{Re}(z) \leq 0$ verläuft, strebt nun aber offensichtlich gegen Null für $T \to \infty$, da die Funktionenfolge e^{zn} auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) < 0$ kompakt gegen die Nullfunktion konvergiert und simultan beschränkt ist auf der abgeschlossenen Halbebene $\mathrm{Re}(z) \leq 0$. Damit folgt, daß es für jedes $R > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $T(R, \varepsilon)$ gibt mit

$$T \leq T(R, \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |F(0) - F_T(0)| \; \leq \; \frac{2B}{R} + \varepsilon \qquad \square$$

5.1.16. Das folgende Lemma liefert in der uns interessierenden Anwendung des Taubersatzes die Beschränktheit der zu transformierenden Funktion.

Lemma 5.1.17. *Für die Funktion $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ mit $x \in \mathbb{R}$ und der Summe wie immer nur über Primzahlen p gibt es eine Konstante C mit $\vartheta(x) \leq Cx \quad \forall x \in [0, \infty)$.*

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} \geq \binom{2n}{n} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p = \mathrm{e}^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)}$$

und damit $\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq 2n(\log 2)$. Gegeben $x \geq 0$ finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $2n \leq x < 2n + 2$ und folglich $\vartheta(2n) \leq \vartheta(x) \leq \vartheta(2n) + \log(2n+1)$ und $\vartheta(n) = \vartheta(x/2)$. Daraus folgt aber leicht

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - \vartheta(x/2) &\leq \vartheta(2n) - \vartheta(n) + \log(2n+1) \\ &\leq 2n(\log 2) + \log(2n+1) \\ &\leq x(\log 2) + \log(x+1) \\ &\leq x((\log 2) + 1) \end{aligned}$$

und schließlich durch Aufsummieren $\vartheta(x) \leq 2x(\log(2) + 1)$. $\square$

Lemma 5.1.18. *Sei $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ wie im vorhergehenden Lemma. So existiert in $\mathbb{R}$ der Grenzwert*

$$\lim_{T \to \infty} \int_1^T \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} \mathrm{d}x$$

Beweis. Für $\mathrm{Re}(z) > 1$ können wir die Funktion $\Phi(z)$ aus dem vorhergehenden Beweis darstellen in der Gestalt

$$\Phi(z) = \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z} = z \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}} \mathrm{d}x = z \int_0^\infty \vartheta(\mathrm{e}^t) \, \mathrm{e}^{zt} \, \mathrm{d}t$$

wobei wir uns das mittlere Integral für die zweite Gleichheit als die konvergente Reihe $\sum_{p\in P} z\int_p^\infty \frac{\log p}{x^{z+1}}\mathrm{d}x$ geschrieben denken. Wären wir etwas gebildeter und wüßten, daß die Laplace-Transformation Konvolutionen in Produkte verwandelt, so könnten wir auch von der offensichtlichen Darstellung von $\Phi(z)$ als Laplace-Transformierte eines diskreten Maßes und von $1/z$ als Laplace-Transformierte der konstanten Funktion 1 ausgehen und so die inverse Laplace-Transformierte von $\Phi(z)/z$ finden. Substituieren wir $z+1$ für z, so ergibt sich für $\mathrm{Re}(z) > 0$ die Gleichung

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} = \int_0^\infty \vartheta(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

und weiter

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \int_0^\infty (\vartheta(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{-t} - 1)\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

Auf der linken Seite steht aber eine Funktion, die sich nach unseren Erkenntnissen im Beweis von 5.1.9 holomorph auf eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ fortsetzen läßt. Auf der rechten Seite ist $(\vartheta(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{-t} - 1)$ für $t \in [0,\infty)$ betragsmäßig beschränkt nach 5.1.17. Also existiert nach dem Taubersatz 5.1.14 der Grenzwert $\lim_{T\to\infty} \int_0^T \vartheta(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{-t} - 1\ \mathrm{d}t$ und ist eine reelle Zahl. Substituieren wir nun wieder $x = \mathrm{e}^t$, so folgt das Lemma. □

Lemma 5.1.19. *Sei $\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p$ wie im vorhergehenden Lemma. So gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \vartheta(x)/x = 1$$

Beweis. Gäbe es für $\lambda > 1$ beliebig große x mit $\vartheta(x) \geq \lambda x$, so hätten wir für alle solchen x die Abschätzung

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\mathrm{d}t \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - s}{s^2}\mathrm{d}s = C(\lambda) > 0$$

im Widerspruch zur Konvergenz des fraglichen Integrals nach 5.1.18. Gäbe es für $\lambda < 1$ beliegig große x mit $\vartheta(x) \leq \lambda x$, so fänden wir ähnlich für alle derartigen x die Abschätzung

$$\int_{\lambda x}^{x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\mathrm{d}t \leq \int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - s}{s^2}\mathrm{d}s = c(\lambda) < 0$$

im Widerspruch zur Konvergenz des fraglichen Integrals nach 5.1.18. □

Beweis des Primzahlsatzes 5.1.1. Sicher haben wir stets

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p \leq \sum_{p\leq x} \log x = \pi(x)\log(x)$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ haben wir aber auch

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &\geq \textstyle\sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leq x}\log p\\ &\geq \textstyle\sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leq x}(1-\varepsilon)\log x\\ &\geq (1-\varepsilon)\log(x)(\pi(x)-\pi(x^{1-\varepsilon}))\\ &\geq (1-\varepsilon)\log(x)(\pi(x)-x^{1-\varepsilon})\end{aligned}$$

Teilen wir durch x, so ergibt sich mit 5.1.19 daraus für alle $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log(x)}{x} \geq 1 \quad \geq \limsup_{x\to\infty}(1-\varepsilon)\frac{\pi(x)\log(x)}{x} \qquad \square$$

5.1.20. Bezeichnet man für reelles x mit $\pi_2(x)$ die Zahl der **Primzahlzwillinge** unter x, also die Zahl derjenigen Primzahlen $p \leq x$, für die $p-2$ auch prim ist, so besteht die Vermutung

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi_2(x)(\log(x))^2}{x} = c$$

für eine reelle Konstante $c > 0$, die genauer gegeben sein sollte durch das unendliche über alle Primzahlen p zu verstehende Produkt $c = 2\prod_p(1-(p-1)^{-2})$. Bisher (2005) weiss man jedoch noch nicht einmal, ob es überhaupt unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Quellen 5.1.21. Die Darstellung in diesem Abschnitt hält sich eng an Zagier's Artikel im American Mathematical Monthly [Zag97], wo man auch zusätzliche Quellenangaben und interessante historische Anmerkungen finden kann. Eine stärker auf allgemeinen Methoden der Funktionalanalysis basierende Darstellung findet man zum Beispiel in Rudin's Funktionalanalysis [Rud73] als Anwendung anderer Tauber-Sätze. Ein guter Zugang zu modernen Entwicklungen in der analytischen Zahlentheorie scheint mir [Kow04].

5.2 Primzahlen in Restklassen

Satz 5.2.1 (Primzahlen in Restklassen). *Gegeben zwei teilerfremde natürliche Zahlen gibt es stets unendlich viele Primzahlen, die bei Teilung durch die Größere als Rest die Kleinere lassen.*

5.2.2. Zum Beispiel gibt es unendlich viele Primzahlen, deren Dezimaldarstellung mit der Ziffer 3 endet. Der Beweis des Satzes wird erst ganz zu Ende dieses Abschnitts gegeben und stützt sich auf den Satz 5.2.7 über die meromorphen Fortsetzungen der sogenannten L-Reihen, die wir gleich einführen werden, sowie auf elementare Charaktertheorie, die wir im Anschluß besprechen. Den Beweis von 5.2.7 holen wir dann im anschließenden Abschnitt 5.3 über Dirichlet-Reihen nach.

5.2.3. Wir erinnern daran, daß man zu jedem Ring R seine Einheitengruppe $R^\times$ bilden kann. Für $m \in \mathbb{Z}$ erinnern wir weiter an den Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\bar{k} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ seine Restklasse.

Definition 5.2.4. Gegeben $m \in \mathbb{Z}\backslash 0$ und $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Gruppenhomomorphismus definiert man eine holomorphe Funktion auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 1$ durch die sogenannte L**-Reihe**

$$\mathrm{L}(z,\chi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^z}$$

mit der Konvention $\chi(k) = \chi(\bar{k})$ für $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ und $\chi(k) = 0$ sonst. Die Konvergenz der Reihe für $\mathrm{Re}(z) > 1$ ist unproblematisch, da unser Gruppenhomomorphismus notwendig in den Einheitswurzeln landet.

Ergänzung 5.2.5. Sei $m \in \mathbb{Z}\backslash 0$ gegeben. Eine Abbildung $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt ein **Dirichlet-Charakter modulo** m, wenn es einen Gruppenhomomorphismus $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ gibt mit $\chi(k) = \chi(\bar{k})$ für k teilerfremd zu m und $\chi(k) = 0$ sonst. Das Symbol L in obiger Definition mag auf Dirichlet's Vornamen Lejeune zurückzuführen sein.

Lemma 5.2.6 (Produktdarstellung von L**-Reihen).** *Sei $m \in \mathbb{Z}\backslash 0$ gegeben und sei χ ein Dirichlet-Charakter modulon m. Die L-Reihe $\mathrm{L}(z,\chi)$ besitzt für $\mathrm{Re}(z) > 1$ auch die Darstellung als Produkt*

$$\mathrm{L}(z,\chi) = \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1}$$

im Sinne der kompakten Konvergenz der Teilprodukte unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Das Produkt ist hier zu bilden über alle Primzahlen, die m nicht teilen.

Beweis. Man beachte $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$. Mit dieser Erkenntnis kann der Beweis ebenso geführt werden wie im Fall der Riemann'schen ζ-Funktion in 5.1.5. □

Satz 5.2.7 (Fortsetzbarkeit von L**-Reihen).** *Alle L-Reihen $\mathrm{L}(z,\chi)$ lassen sich meromorph auf die Halbebene $\mathrm{Re}\, z > 0$ fortsetzen. Ist χ nicht der konstante Charakter, so ist diese Fortsetzung holomorph und hat keine Nullstelle bei $z = 1$. Ist χ der konstante Charakter, so hat diese Fortsetzung einen einfachen Pol bei Eins, der dann aber auch ihr einziger Pol ist.*

Beweis. Im Fall des konstanten Charakters zeigt die Produktentwicklung, daß unsere L-Reihe aus der Riemann'schen ζ-Funktion entsteht durch das Wegteilen der Euler-Faktoren zu allen Primteilern von m. In diesem Fall folgt damit unsere Behauptung aus der entsprechenden Aussage für die Riemann'sche ζ-Funktion 5.1.7. Den Beweis im Fall allgemeiner L-Reihen verschieben wir auf das Ende des anschließenden Abschnitts 5.3. □

Vorschau 5.2.8. Unsere Dirichlet-Reihen lassen sich sogar meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen und erfüllen bemerkenswerte Funktionalgleichungen. Das soll aber hier nicht weiter ausgeführt werden.

Definition 5.2.9. Gegeben eine Gruppe G notieren wir $\mathfrak{X}(G) := \operatorname{Grp}(G, \mathbb{C}^\times)$ die Menge aller Gruppenhomomorphismen von G nach $\mathbb{C}^\times$. Sie heißen die **Charaktere** oder genauer die **multiplikativen komplexen Charaktere** unserer Gruppe G. Die Charaktere bilden eine Untergruppe von $\operatorname{Ens}(G, \mathbb{C}^\times)$ und jeder Gruppenhomomorphismus $G \to H$ liefert durch Vorschalten einen Gruppenhomomorphismus $\mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(G)$ in der Gegenrichtung auf ihren Charaktergruppen.

Lemma 5.2.10. *Für jede endliche abelsche Gruppe G und jeden Charakter $\chi \in \mathfrak{X}(G)$ gilt*

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \chi \text{ ist konstant;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Im Fall des konstanten Charakters ist das eh klar. In jedem Fall gilt für jedes Element $g_1 \in G$ natürlich

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_1 g) = \chi(g_1) \sum_{g \in G} \chi(g)$$

Ist nun der Charakter χ nicht konstant, so gibt es ein $g_1 \in G$ mit $\chi(g_1) \neq 1$ und das Lemma folgt auch in diesem Fall. □

Übung 5.2.11. Das Auswerten an der Restklasse der Eins definiert einen Isomorphismus zwischen der Charaktergruppe der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ und der Gruppe der d-ten Einheitswurzeln $\mathfrak{X}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mu_d$, $\chi \mapsto \chi(\bar{1})$.

Proposition 5.2.12. *Gegeben endliche abelsche Gruppen $H \subset G$ läßt sich jeder Charakter von H zu einem Charakter von G fortsetzen.*

Ergänzung 5.2.13. Die Proposition gilt auch ohne die Voraussetzung der Endlichkeit. Das zeigt man, indem man im folgenden Beweis mit dem Zorn'schen Lemma argumentiert. In der Sprache der „exakten Sequenzen" besagt die Proposition, daß für jede kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$ auch die induzierte Sequenz auf den Charaktergruppen eine kurze exakte Sequenz $\mathfrak{X}(G'') \hookrightarrow \mathfrak{X}(G) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(G')$ ist. In der Sprache der homologischen Algebra besagt sie, daß die abelsche Gruppe $\mathbb{C}^\times$ injektiv ist, vergleiche [TS] 6.6.5.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß G erzeugt wird von H und einem einzigen weiteren Element g. Ist $n \geq 1$ kleinstmöglich mit $g^n \in H$, so hat jedes Element von G eine eindeutige Darstellung der Gestalt $g^\nu h$ mit $0 \leq \nu < n$ und $h \in H$. Wählen wir eine n-te Wurzel w von $\chi(g^n)$, so können wir unseren Charakter fortsetzen zu einem Charakter $\tilde{\chi} : G \to \mathbb{C}^\times$ durch die Vorschrift $\tilde{\chi}(g^\nu h) = w^\nu \chi(h)$. □

Lemma 5.2.14. *Für jede endliche abelsche Gruppe G und jedes Element $g \in G$ gilt*

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} \chi(g) = \begin{cases} |G| & g = 1; \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Ergänzung 5.2.15. Man kann leicht zeigen, daß für jede endliche abelsche Gruppe die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$ liefert. Damit kann man das Lemma auch aus 5.2.10 folgern. Mir schien jedoch das direkte Argument übersichtlicher.

Beweis. Der Fall $g = 1$ ist eh klar. Schreiben wir die Verknüpfung von Charakteren multiplikativ, also $(\chi\chi_1)(g) = \chi(g)\chi_1(g)$, so gilt für jedes $g \in G$ die Formel

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} \chi(g) = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} (\chi_1\chi)(g) = \chi_1(g) \sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} \chi(g)$$

Im Fall $g \neq 1$ gibt es nun nach 5.2.12 und 5.2.11 einen Charakter χ_1 mit $\chi_1(g) \neq 1$. Das Lemma folgt. □

Beweis von 5.2.1. Wir leiten nun den Satz über Primzahlen in Restklassen aus dem Satz 5.2.7 über Fortsetzungen von L-Reihen her, dessen Beweis noch aussteht. Die logarithmischen Ableitungen unserer L-Reihen werden nach einfacher Rechnung für $\operatorname{Re}(z) > 1$ gegeben durch die kompakt konvergenten Reihen

$$\frac{\operatorname{dlog} \mathrm{L}(z, \chi)}{\mathrm{d}z} = -\sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p) \log(p)}{p^z - \chi(p)}$$

Die durch die Reihen auf der rechten Seite auf $\operatorname{Re}(z) > 1$ definierten holomorphen Funktionen sind nach 5.2.7 beschränkt auf dem reellen Intervall $(1, 2)$, wenn χ nicht konstant ist, und unbeschränkt auf $(1, 2)$ für den konstanten Charakter. Dasselbe gilt für die holomorphen Funktionen, die durch die Ausdrücke

$$-\sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p) \log(p)}{p^z}$$

gegeben werden, denn deren Differenz zu den zuvor betrachteten logarithmischen Ableitungen wird gegeben durch die Reihen $\sum_{p\nmid m} \frac{\chi(p)^2\log(p)}{p^z(p^z-\chi(p))}$, die sogar auf der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 1/2$ holomorphe Funktionen definieren. Die Charaktertheorie aus 5.2.14 liefert uns nun, daß gegeben eine endliche abelsche Gruppe G und darin ein Element $g \in G$ die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(h) = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} \chi(g^{-1})\chi(h)$$

bei $h = g$ den Wert $|G|$ annimmt und sonst den Wert Null. Wenden wir das an auf $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ und kürzen $\mathfrak{X}((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times) = \mathfrak{X}$ ab, so erhalten wir für jede feste prime Restklasse r und alle $\chi \in \mathfrak{X}$ komplexe Zahlen $a_\chi = (\chi(\bar{r})|G|)^{-1}$ von Betrag $|G|^{-1}$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}} a_\chi\chi(n) = \begin{cases} 1 & \bar{n} = \bar{r}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt für $\mathrm{Re}(z) > 1$ die Identität

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}} a_\chi \sum_{p\nmid m} \frac{\chi(p)\log(p)}{p^z} = \sum_{p\equiv r(\operatorname{mod} m)} \frac{\log p}{p^z}$$

Links steht hier eine auf dem reellen Intervall $(1, 2)$ unbeschränkte Funktion, da nach 5.2.7 für alle nichtkonstanten Charaktere die L-Reihe holomorph ist ohne Nullstelle bei Eins, für den konstanten Charakter jedoch meromorph mit einem Pol bei Eins. Rechts steht folglich auch eine auf auf dem reellen Intervall $(1, 2)$ unbeschränkte Funktion und insbesondere eine unendliche Summe. □

Ergänzung 5.2.16. Ein Dirichlet-Charakter modulo m ist natürlich auch ein Dirichlet-Charakter modulo mn für jedes $n \geq 1$. Gegeben ein Dirichlet-Charakter $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt das kleinste positive m derart, daß er von einem Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ herkommt, der **Führer** des besagten Dirichlet-Charakters. Wir sagen dann auch, χ sei ein **primitiver Dirichlet-Charakter modulo** m.

5.3 Dirichlet-Reihen

5.3.1. Gegeben ein Zweig des Logarithmus $\log$ auf einer Teilmenge U der komplexen Zahlenebene erklären wir für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Abbildung $U \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x^\lambda$ durch die Vorschrift $x^\lambda = \exp(\lambda \log x)$. Gegeben zwei Folgen a_k und $\lambda(k)$ von komplexen Zahlen können wir auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ mithilfe unseres Hauptzweiges des Logarithmus die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda(k)}$$

bilden. Wir zeigen im Folgenden, daß sie sich für streng monoton gegen unendlich strebende Folgen reeller Zahlen $\lambda(k) \in \mathbb{R}$ sehr ähnlich verhält wie eine Potenzreihe. Genauer folgt aus der Konvergenz an einer Stelle x_0 die kompakte Konvergenz auf dem Schnitt der offenen Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < |x_0|\}$ mit unserer geschlitzten Ebene. Darüber hinaus ist dieser „Konvergenzradius" derselbe für jede andersartig geschlitzte Ebene und jeden Zweig des Logarithmus auf einem derartigen Gebiet. Um diese Mehrdeutigkeiten aufzulösen, substituiert man sinnvoll gleich $x = \mathrm{e}^{-z}$ und erhält so eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \,\mathrm{e}^{-\lambda(k)z}$$

Reihen dieser Gestalt mit komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und streng monoton gegen unendlich strebenden $\lambda(k) \in \mathbb{R}$ heißen **Dirichlet-Reihen**. Zum Beispiel wird die Riemann'sche ζ-Funktion durch die über $k \geq 1$ zu summierende Dirichlet-Reihe mit $a_k = 1$ für alle k und $\lambda(k) = \log(k)$ gegeben. Man kann die durch eine Dirichlet-Reihe erklärte Funktion im Übrigen auch auffassen als die Laplace-Transformierte im Sinne von 5.1.13 des diskreten komplexen Maßes, das jedem Punkt $\lambda(k)$ die Masse a_k zuweist. Wir formulieren und beweisen die bisher behaupteten Aussagen nun als eigenständigen Satz.

Satz 5.3.2 (Konvergenzbereiche von Dirichlet-Reihen). *Konvergiert eine Dirichlet-Reihe an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie auch für alle komplexen Zahlen z mit größerem Realteil $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ und die Konvergenz ist für beliebiges $r \geq 0$ gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Winkelsegment $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \operatorname{Re}(z - z_0)\}$.*

5.3.3. Insbesondere ist der Konvergenzbereich einer Dirichlet-Reihe also im wesentlichen eine Halbebene, wobei man über die Konvergenz auf der Randgeraden jedoch im allgemeinen keine Aussagen machen kann. Im Unterschied zu Potenzreihen kann es durchaus vorkommen, daß eine Dirichlet-Reihe auf einem Teil ihrer Konvergenz-Halbebene nicht absolut konvergiert. Zum Beispiel zeigen wir im folgenden, daß unsere L-Reihen zu nichtkonstantem Charakter für $\operatorname{Re}(z) > 0$ konvergieren, aber man sieht sehr leicht, daß diese Konvergenz nur für $\operatorname{Re}(z) > 1$ absolut ist.

Beweis. Dieser Beweis verallgemeinert den Beweis des abelschen Grenzwertsatzes [AN1] 5.4.2. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \,\mathrm{e}^{-\lambda(k)z}$ unsere Dirichlet-Reihe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $z_0 = 0$ annehmen. Wir kürzen $\mathrm{e}^{-\lambda(k)z} = b_k$ ab und schreiben die Differenzen von Partialsummen unserer Reihe in der Gestalt

$$\begin{array}{rcrl} \sum_{k=n}^m a_k \,\mathrm{e}^{-\lambda(k)z} & = & \sum_{k=n}^m a_k b_k & \\ & = & (b_n - b_{n+1}) & a_n \\ & & + \;(b_{n+1} - b_{n+2}) & (a_n + a_{n+1}) \\ & & + \;(b_{n+2} - b_{n+3}) & (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\ & & \dots & \dots \\ & & + \;(b_{m-1} - b_m) & (a_n + \dots\dots\dots + a_{m-1}) \\ & & + \;b_m & (a_n + \dots\dots\dots + a_{m-1} + a_m) \end{array}$$

Jetzt beachte man für $x = \operatorname{Re} z > 0$ die Abschätzung

$$\begin{array}{rcl} \left|\mathrm{e}^{-\lambda(n)z} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)z}\right| & = & \left| z \int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} \mathrm{e}^{-tz}\,\mathrm{d}z \right| \\ & \leq & |z| \int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x \\ & \leq & \frac{|z|}{x}\left(\mathrm{e}^{-\lambda(n)x} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}\right) \end{array}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir wegen der Konvergenz bei $z = 0$ sicher ein N derart, daß für alle ν, μ mit $N \leq \nu \leq \mu$ gilt $|a_\nu + \ldots + a_\mu| \leq \varepsilon$. Für alle z mit $0 < x = \operatorname{Re}(z)$ folgt dann für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \,\mathrm{e}^{-\lambda(k)z} \right| \leq \frac{|z|}{x}\left(\mathrm{e}^{-\lambda(n)x} - \mathrm{e}^{-\lambda(m)x}\right)\varepsilon + \mathrm{e}^{-\lambda(m)x}\,\varepsilon$$

Für $z = 0$ wird derselbe Ausdruck schlicht durch ε selbst abgeschätzt, und zusammen ergibt sich daraus die behauptete gleichmäßige Konvergenz auf Bereichen $0 \leq |z| \leq rx$ für jede feste Steigung r der den Winkel nach oben begrenzenden Geraden sogar dann, wenn die $\lambda(k)$ nur monoton wachsen und nicht notwendig gegen ∞ streben. □

Proposition 5.3.4 (Hinreichende Bedingung für Konvergenz). *Sind bei einer Dirichlet-Reihe* $\sum_{k=0}^\infty a_k \,\mathrm{e}^{-\lambda(k)z}$ *die Summen* $\sum_{k=n}^m a_k$ *simultan betragsmäßig beschränkt, so konvergiert die Reihe auf der Halbebene* $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Beweis. Ist B unsere simultane Schranke, so erhalten wir wie im vorhergehenden Beweis für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) = x > 0$ dieselbe Abschätzung mit B statt ε und damit die Konvergenz. □

5.3.5. Mit dieser Proposition und 5.2.10 folgt sofort, daß die L-Reihen für nichtkonstante Dirichlet-Charaktere χ sogar auf der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 0$ konvergieren. Das liefert ihre in 5.2.7 behauptete Fortsetzbarkeit zu holomorphen Funktionen auf dieser Halbebene. Der Satz über die Fortsetzungen 5.2.7 ist damit bewiesen bis auf die Behauptung, daß diese holomorphen Fortsetzungen bei Eins nicht verschwinden.

Satz 5.3.6 (Konvergenzbereiche im Fall positiver Koeffizienten). *Konvergiert eine Dirichlet-Reihe* $\sum a_k \,\mathrm{e}^{-\lambda(k)z}$ *mit positiven Koeffizienten* $a_k > 0$ *auf der Halbebene* $\mathrm{Re}(z) > r$ *und läßt sich die so erklärte Funktion holomorph auf eine Umgebung von* r *fortsetzen, so konvergiert unsere Reihe sogar auf einer echt größeren Halbebene* $\mathrm{Re}(z) > r - \varepsilon$ *für ein* $\varepsilon > 0$.

5.3.7. Dieser Satz ist eine Variante unserer Erkenntnis 2.2.7, daß eine holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe auch auf der ganzen offenen Kreisscheibe durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Im allgemeinen kann sich zwar die durch eine Dirichlet-Reihe auf einer geeigneten Halbebene definierte Funktion durchaus holomorph auf eine größere Halbebene fortsetzen lassen, ohne daß die Reihe dort konvergieren müßte. Unter der zusätzlichen Annahme positiver Koeffizienten muß jedoch dann dort auch die Reihe konvergieren.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $r = 0$ und alle $\lambda(k) \geq 0$. Nach Annahme finden wir $\varepsilon > 0$ derart, daß die durch unsere Dirichlet-Reihe definierte Funktion f sich holomorph auf eine offene Umgebung der Kreisscheibe $|z-1| \leq 1+\varepsilon$ fortsetzen läßt. Die Taylorentwicklung liefert dann

$$f(-\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!}(-1-\varepsilon)^{\nu}$$

im Sinne absoluter Konvergenz. Die fraglichen Ableitungen hinwiederum ergeben sich zu

$$f^{(\nu)}(1) = \sum a_k(-\lambda(k))^{\nu}\,\mathrm{e}^{-\lambda(k)}$$

auch im Sinne absoluter Konvergenz, da alle Terme dasselbe Vorzeichen haben. Folglich gilt

$$\sum_{k,\nu} \frac{1}{\nu!} a_n (1+\varepsilon)^{\nu}(\lambda(k))^{\nu}\,\mathrm{e}^{-\lambda(k)} < \infty$$

und nach Zusammenfassen der Summen über ν in Exponentialreihen ergibt sich

$$\sum_k a_k \,\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\lambda(k)}\,\mathrm{e}^{-\lambda(k)} = \sum_k a_k\,\mathrm{e}^{\lambda(k)\varepsilon} < \infty$$

alias die Konvergenz der Dirichlet-Reihe bei $z = -\varepsilon$. $\square$

Beweis von 5.2.7. Daß die L-Reihe zum konstanten Charakter eine meromorphe Fortsetzung hat wie behauptet, ergibt sich wie bereits bemerkt aus der entsprechenden Aussage 5.1.7 für die Riemann'sche ζ-Funktion, die ja bis auf endlich viele Faktoren durch dasselbe Eulerprodukt dargestellt wird. Daß die anderen L-Reihen holomorphe Fortsetzungen haben, haben wir schon in 5.3.5 bemerkt. Um schließlich zu zeigen, daß die anderen Reihen keine Nullstellen bei $z = 1$ haben, reicht es zu zeigen, daß das Produkt

$$\zeta_m(z) = \prod_{\chi} \mathrm{L}(z, \chi)$$

einen Pol hat bei $z = 1$. Dieses Produkt ist nun für $\mathrm{Re}(z) > 1$ natürlich das Produkt über alle zu m teilerfremden Primzahlen $p \nmid m$ der endlichen Produkte

$$\prod_{\chi} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1}$$

Nun beachten wir im Polynomring $\mathbb{C}[T]$ die Zerlegung

$$(T^g - 1) = \prod_{\xi^g = 1} (T - \xi)$$

Bezeichnet $\varphi = \varphi(m) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times|$ die Ordnung unserer Gruppe und $g(p)$ die Ordnung des Elements $\bar{p}$ in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ und $f(p)$ die Kardinalität der Restklassengruppe nach seinem Erzeugnis $\langle \bar{p} \rangle$, so daß also gilt $\varphi = f(p)g(p)$, so finden wir

$$\prod_{\chi} (T - \chi(p)) = (T^{g(p)} - 1)^{f(p)}$$

Indem wir auf beiden Seiten T^φ wegteilen und $T = p^z$ einsetzen ergibt sich

$$\prod_{\chi} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p^{g(p)z}}\right)^{-f(p)}$$

Multiplizieren wir alle diese Produkte für $p \nmid m$, so erhalten wir offensichtlich für $\mathrm{Re}(z) > 1$ eine Darstellung von $\zeta_m(z)$ durch eine Dirichlet-Reihe der Gestalt

$$\zeta_m(z) = \sum_{k \geq 1} a_k k^{-z}$$

mit $a_k \in \mathbb{N}$. Hätte die Funktion $\zeta_m(z)$ keinen Pol bei $z = 1$, so wäre sie holomorph für $\mathrm{Re}(z) > 0$ und nach 5.3.6 müßte dann auch ihre Dirichlet-Reihe konvergieren für alle z mit $\mathrm{Re}(z) > 0$. Nun ist der p-Faktor von ζ_m jedoch $(1 + p^{-g(p)z} + p^{-2g(p)z} + \ldots)^{f(p)}$ und hat dieselben oder größere Koeffizienten vor den entsprechenden p-Potenzen wie die Reihe

$$(1 + p^{-\varphi z} + p^{-2\varphi z} + \ldots)$$

mit φ wie oben. Die Dirichlet-Reihe von $\zeta_m(z)$ hat also dieselben oder größere Koeffizienten wie die Reihe

$$\sum_{(n,m)=1} n^{-\varphi z}$$

und diese Reihe divergiert für $z = \varphi^{-1}$ selbst dann, wenn wir nur über prime n summieren. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. $\square$

Quellen 5.3.8. Serre, Cours d'Arithmetique [**?**].

6 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Frau Sandrine Gümbel, Herr Christian Rein, . . .

Literatur

[AN1] *Skriptum Analysis 1*;.

[AN2] *Skriptum Analysis 2*;.

[AN3] *Skriptum Analysis 3*;.

[Bru01] Jan Hendrik Bruinier, *Primzahlen, Teilersummen und die Riemannsche Vermutung*, Math. Semesterberichte **48** (2001), 79–92.

[For77] Otto Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Heidelberger Taschenbücher, Band 184.

[KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie*;.

[Kow04] Emmanuel Kowalski, *Un cours de théorie analytique des nombres*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 13, Société Mathématique de France, 2004.

[LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*;.

[LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*;.

[ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen*;.

[Rud73] Walter Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*;.

[TG] *Skriptum Garbenkohomologie*;.

[TM] *Skriptum Topologie und kompakte Gruppen*;.

[TS] *Skriptum Singuläre Homologie*;.

[Zag97] D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 8, 705– 708.

Index