HALBEINFACHE LIE-ALGEBREN

Wolfgang Soergel

12. Juli 2017

Die ersten beiden Kapitel dieses Textes setzen ausschließlich Kenntnisse der linearen Algebra voraus, wie sie in den Grundvorlesungen [LA1] und [LA2] entwickelt wurden. Zur Motivation der grundlegenden Definitionen und Fragestellungen ist es jedoch wichtig, auch etwas über Lie-Gruppen zu wissen oder zu lernen, wie es etwa in [ML] dargestellt wird.

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Theorie von Lie-Algebren

1.1 Definitionen und Beispiele

1.1.1. Im folgenden stelle ich nur die formalen Grundlagen der Theorie zusammen. Für die Motivation verweise ich auf die Vorlesung über Lie-Theorie [ML] 1.3.

Definition 1.1.2. Eine **Lie-Algebra** über einem Körper k ist ein k-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mitsamt einer k-bilinearen Abbildung, der **Lie-Klammer**

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

derart, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Antisymmetrie: $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$;

Jacobi-Identität: $\big[x, [y, z]\big] + \big[z, [x, y]\big] + \big[y, [z, x]\big] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

1.1.3. Unsere Bedingung $[x, x] = 0 \quad \forall x$ impliziert, wie in [LA1] 6.3.2 ausgeführt, bereits die Identität $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y$. Im Fall eines Grundkörpers einer von zwei verschiedenen Charakteristik impliziert umgekehrt $[x, x] = -[x, x]$ auch $[x, x] = 0$.

1.1.4. Eine Lie-Algebra ist ein spezieller Typ von Algebra, benannt nach dem Mathematiker Sophus Lie (1842–1899). Ganz allgemein bezeichnet man wie in [LA2] 7.8.1 einen k-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$ als eine **k-Algebra** und versteht unter einem **Algebrenhomomorphismus** in eine weitere k-Algebra eine k-lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Gegeben zwei k-Algebren A, B bezeichnen wir mit $\mathrm{Alg}_k(A, B)$ die Menge der Algebrenhomomorphismen von A nach B. Sind A, B Liealgebren, so schreiben wir stattdessen auch $\mathrm{Lalg}_k(A, B)$. Das hat den Vorteil, uns daran zu erinnern, womit wir es zu tun haben. Andere Typen von Algebren werden für uns auch eine wichtige Rolle spielen. Ist die Verknüpfung einer Algebra assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Gibt es für diese Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation ein Ring ist. Ich schlage deshalb vor, derartige Algebren **Ringalgebren** und im Fall, daß sie auch noch kommutativ sind, **Kringalgebren** zu nennen. Unter einem **Homomorphismus von Ringalgebren** verstehen wir dann einen Algebrenhomomorphismus, der auch ein Ringhomomorphismus ist. Wir können diese Abbildungen sowohl charakterisieren als Algebrenhomomorphismen, die das Einselement auf das Einselement werfen, als auch als Ringhomomorphismen, die über dem Grundkörper linear sind. Wir vereinbaren für die Menge der Ringalgebrenhomomorphismen von einer k-Ringalgebra A in eine k-Ringalgebra B die Notation $\mathrm{Ralg}_k(A, B)$. Wenn man von einem Algebrenhomomorphismus zwischen zwei Ringalgebren spricht, so meint man fast immer einen Ringalgebrenhomomorphismus und hat nur vergessen, das explizit dazuzusagen.

1.1.5. Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ zwei Lie-Algebren. Ein **Lie-Algebren-Homomorphismus** $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ist nach dem Vorhergehenden insbesondere eine lineare Abbildung φ mit

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \;\; \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Beispiele 1.1.6. Der Polynomring $k[X_1, \ldots, X_n]$ ist eine assoziative, kommutative und unitäre k-Algebra, in unserer Terminologie also eine Kringalgebra. Ist V ein k-Vektorraum, so ist sein Endomorphismenring $A = \operatorname{End} V$ mit der Verknüpfung $(f, g) \mapsto f \circ g$ eine assoziative unitäre k-Algebra, in unserer Terminologie also eine Ringalgebra. Die quadratischen $(n \times n)$-Matrizen mit der Matrix-Multiplikation bilden für jedes $n \geq 0$ eine k-Ringalgebra $\mathrm{Mat}(n; k)$.

Definition 1.1.7. Gegeben Algebren $A_1, \ldots, A_n$ definiert man ihr **Produkt** als die Algebra $A_1 \times \ldots \times A_n$ mit der komponentweisen Verknüpfung. Jedes Produkt von Lie-Algebren ist wieder eine Lie-Algebra. Jedes Produkt von Ringalgebren ist wieder eine Ringalgebra.

Beispiele 1.1.8 (**Assoziative Algebren als Lie-Algebren**). Ist A eine assoziative Algebra unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$, so wird A eine Lie-Algebra

$$A_{\mathrm{L}}$$

unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$, wie man leicht nachrechnet. Man nennt deshalb die Lie-Klammer auch oft den **Kommutator**. Faßt man $\operatorname{End} V$ beziehungsweise $\mathrm{Mat}(n; k)$ in dieser Weise als Lie-Algebren auf, so bezeichnet man sie meist mit $\mathfrak{gl}(V)$ beziehungsweise $\mathfrak{gl}(n; k)$ für **general linear Lie algebra**.

Definition 1.1.9. Eine **Unteralgebra** einer Algebra A ist ein Untervektorraum $U \subset A$ derart, daß gilt $x, y \in U \Rightarrow x \cdot y \in U$ für die Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$ unserer Algebra.

1.1.10. Eine Unteralgebra einer Algebra ist mit der induzierten Verknüpfung selbst eine Algebra. Jeder Schnitt von Unteralgebren ist selbst eine Unteralgebra.

1.1.11 (**Unterringalgebren versus Unteralgebren**). Von einer Unterringalgebra einer Ringalgebra fordert man zusätzlich, daß sie die Eins der großen Ringalgebra enthält. Bei einer Ringalgebra ist also im allgemeinen nicht jede Unteralgebra auch eine Unterringalgebra. Zum Beispiel ist $k[X] \subset k[X, Y]$ ist eine Unterringalgebra und $Xk[X] \subset k[X, Y]$ nur eine Unteralgebra.

Beispiel 1.1.12. Gegeben eine quadratische Matrix A bezeichne $\operatorname{tr} A \in k$ ihre Spur [LA1] 3.5.16. Man definiert die **spezielle lineare Lie-Algebra** als

$$\mathfrak{sl}(n;k) := \{A \in \mathfrak{gl}(n;k) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$$

Dieser Raum ist in der Tat eine Unteralgebra, genauer eine Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{gl}(n;k)$, die Formel $\operatorname{tr}[x,y] = \operatorname{tr}(xy - yx) = 0$ gilt sogar für alle $x, y \in \mathfrak{gl}(n;k)$. Natürlich ist unser $\mathfrak{sl}(n;k)$ für $n \geq 2$ keine Unteralgebra der assoziativen Algebra $\operatorname{Mat}(n;k)$.

Beispiel 1.1.13. Sind V, W ein Vektorräume und ist $f : V \times V \to W$ eine bilineare Abbildung, so wird

$$\mathfrak{o}(V,f) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(xu,v) + f(u,xv) = 0 \quad \forall u,v \in V\}$$

eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, wie man leicht nachrechnet.

Beispiel 1.1.14. Ist speziell $V = k^{2n}$ und $f : V \times V \to k$ die Bilinearform, die gegeben wird durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit I der $(n \times n)$-Einheitsmatrix, so bezeichnet man $\mathfrak{o}(V,f)$ mit $\mathfrak{sp}(2n;k)$ und nennt das die **symplektische Lie-Algebra**. Jede nichtausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum hat in einer geeigneten Basis die obige Matrix, siehe [LA2] 2.5.2.

Beispiel 1.1.15. Ist $V = k^n$ und $f : V \times V \to k$ die Bilinearform gegeben durch die Einheitsmatrix, so bezeichnet man $\mathfrak{o}(V,f)$ mit $\mathfrak{so}(n;k)$ und nennt das die **orthogonale Lie-Algebra**. Diese Lie-Algebra besteht also genau aus allen schiefsymmetrischen Matrizen. Über $\mathbb{C}$ oder allgemeiner einem algebraisch abgeschlossenen Körper einer von 2 verschiedenen Charakteristik hat jede nichtausgeartete symmetrische Bilinearform in einer geeigneten Basis diese Matrix, siehe [LA2] 2.3.14. Für spätere Rechnungen ist jedoch eine andere Darstellung bequemer, in der die Bilinearform je nachdem ob n gerade oder ungerade ist gegeben wird durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.1.16. Die oberen Dreiecksmatrizen, die echten oberen Dreiecksmatrizen, und die Diagonalmatrizen bilden Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(n;k)$.

Beispiel 1.1.17. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **abelsch** genau dann, wenn all ihre Kommutatoren verschwinden, in Formeln $[x,y] = 0 \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}$. Jeder Vektorraum $\mathfrak{g}$ wird so eine Lie-Algebra. Die Diagonalmatrizen bilden eine abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n;k)$.

Definition 1.1.18. Wir nennen eine Lie-Algebra **irreduzibel** genau dann, wenn sie nicht Null ist und wenn zusätzlich jeder von Null verschiedene Lie-Algebren-Homomorphismus von besagter Lie-Algebra in eine weitere Lie-Algebra injektiv ist. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **einfach** genau dann, wenn sie irreduzibel ist, aber nicht abelsch.

1.1.19 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Lie-Algebra ist in anderen Worten irreduzibel genau dann, wenn sie keinen „echten Quotienten" im Sinne von 1.4.5 besitzt alias wenn das Nullideal ihr einziges „echtes Ideal" ist, und jede irreduzible Lie-Algebra ist entweder einfach oder aber abelsch und eindimensional. Die Terminologie „einfache Lie-Algebra" ist allgemein üblich, die Terminologie „irreduzible Lie-Algebra" jedoch nicht. Ein wichtiges Ziel der Vorlesung ist die gleich folgende Klassifikation der einfachen endlichdimensionalen komplexen Lie-Algebren.

Satz 1.1.20 (**Killing-Klassifikation**). *Jede einfache endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra ist isomorph zu genau einer der Lie-Algebren*

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C}) & n \geq 1 \\ \mathfrak{so}(2n+1;\mathbb{C}) & n \geq 2 \\ \mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C}) & n \geq 3 \\ \mathfrak{so}(2n;\mathbb{C}) & n \geq 4 \end{array}$$

oder einer der fünf Ausnahme-Algebren $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{g}_2$, die nicht so leicht explizit anzugeben sind. Umgekehrt sind auch alle hier aufgezählten Lie-Algebren einfach.

1.1.21. Der Beweis wird in 3.4.11 gegeben. Der Satz gilt mit demselben Beweis allgemeiner über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null, wie im übrigen auch alle anderen in dieser Vorlesung für komplexe Lie-Algebren formulierten Sätze.

1.1.22. Es wird erst später klar werden, warum wir die Lie-Algebren $\mathfrak{so}(n;\mathbb{C})$ in zwei Serien für gerades und ungerades n aufteilen. Die Lie-Algebren der ersten vier Serien heißen **klassisch**, die anderen fünf die **Ausnahme-Algebren**. Die Einschränkungen an n haben als Grund die sogenannten **Ausnahme-Isomorphismen** $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{sp}(4) \cong \mathfrak{so}(5)$, $\mathfrak{so}(2) \cong \mathbb{C}$ ist abelsch, $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$ ist auch nicht einfach, und $\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{sl}(4)$.

Ergänzung 1.1.23 (**Beziehung zu kompakten Lie-Gruppen**). Eine endlichdimensionale Lie-Algebra, die isomorph ist zu einem endlichen Produkt einfacher Lie-Algebren, heißt „halbeinfach". Das Bilden der komplexifizierten Lie-Algebra liefert nun eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{zusammenhängende} \\ \text{kompakte Lie-Gruppen} \\ \text{mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \text{halbeinfache} \\ \text{komplexe Lie-Algebren} \end{array} \right\} \\ \\ K & \mapsto & \operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} K \end{array}$$

Diese Aussage ergibt sich aus dem Zusammenspiel von [ML] 4.2.4, wonach kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum eineindeutig kompakten reellen Liealgebren entsprechen, und 3.5.20, wonach die kompakten reellen Liealgebren unter der durch Komplexifizierung gegebenen Abbildung eineindeutig den halbeinfachen komplexen Liealgebren entsprechen. Insbesondere ist die Killing-Klassifikation ein wesentlicher Schritt zur Klassifikation der zusammenhängenden kompakten Lie-Gruppen. Sie ist im übrigen auch ein wesentlicher Schritt zur Klassifikation der einfachen endlichen Gruppen.

1.1.24. Sei ganz allgemein F die Fundamentalmatrix einer Bilinearform f auf k^n, es gelte also $f(x,y) = x^\top F y$ wenn wir Elemente von k^n als Spaltenvektoren auffassen. So liegt $M \in \mathfrak{gl}(n;k)$ in $\mathfrak{so}(k^n, f)$ genau dann, wenn gilt $(Mx)^\top F y = -x^\top F(My)$ für alle x, y in k^n alias $M^\top F = -FM$.

Beispiel 1.1.25. Wir bestimmen die Dimension von $\mathfrak{sp}(2n;k)$. Hier nehmen wir $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in 1.1.24. Eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ liegt folglich in $\mathfrak{sp}(2n;k)$ genau dann, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Das können wir umschreiben zur Bedingung

$$\begin{pmatrix} C^\top & -A^\top \\ D^\top & -B^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}$$

Diese Bedingung hinwiederum ist äquivalent zu den Bedingungen $C^\top = C$, $B^\top = B$ und $-A^\top = D$. Die Dimension der symplektischen Lie-Algebra ist damit $\dim_k \mathfrak{sp}(2n;k) = n(n+1) + n^2 = 2n^2 + n$.

Ergänzung 1.1.26. Der Ausnahmeisomorphismus $\mathfrak{sl}(2) \cong \mathfrak{sp}(2)$ folgt aus der offensichtlichen Relation $\mathfrak{sl}(2) \supset \mathfrak{sp}(2)$ mit Dimensionsargumenten.

Ergänzung 1.1.27. Der Ausnahmeisomorphismus $\mathfrak{sl}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ ensteht durch explizite Rechnung in Koordinaten oder konzeptueller, wenn wir die adjungierte Darstellung der $\mathfrak{sl}(2)$ mit ihrer Killingform betrachten.

Ergänzung 1.1.28. Einen Isomorphismus $\mathfrak{sl}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$ kann man konstruieren wie folgt: Ist V ein vierdimensionaler Vektorraum, so ist $\bigwedge^2 V$ sechsdimensional und das Dachprodukt gefolgt von einem beliebigen Isomorphismus $\bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ definiert eine symmetrische nichtausgeartete Paarung $\bigwedge^2 V \times \bigwedge^2 V \to \mathbb{C}$. Die Operation von $\mathrm{SL}(V)$ auf $\bigwedge^2 V$ landet nun offensichtlich in den für die so konstruierte Bilinearform orthogonalen Selbstabbildungen von $\bigwedge^2 V$. Das Differential dieses Homomorphismus $\mathrm{SL}(4; \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(6; \mathbb{C})$ von Lie-Gruppen ist dann der gesuchte Isomorphismus von Liealgebren.

Ergänzung 1.1.29. Um einen Isomorphismus $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$ zu erhalten, betrachtet man in der Situation aus 1.1.28 zusätzlich auf V die nichtausgeartete symmetrische Bilinearform, deren Stabilisator eben gerade unser $\mathrm{O}(4)$ ist. Sie induziert Isomorphismen $V \xrightarrow{\sim} V^*$ und damit $\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2(V^*)$. Andererseits induziert unsere Paarung von oben auch einen bis auf einen Skalar wohlbestimmten Isomorphismus $\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^2 V)^*$. Verwenden wir nun noch die kanonische Identifikation $(\bigwedge^2 V)^* \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2(V^*)$ aus , so erhalten wir insgesamt einen bis auf einen Skalar eindeutig bestimmten Automorphismus von $\bigwedge^2 V$, der diesen Raum zerlegt in zwei dreidimensionale Teilräume, nämlich seine Eigenräume. Da alles so kanonisch ist, liefert diese Konstruktion einen Homomorphismus $\mathrm{O}(4; \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(3; \mathbb{C}) \times \mathrm{O}(3; \mathbb{C})$, dessen Differential dann mithilfe von 1.1.27 der gesuchte Isomorphismus ist. Arbeiten wir über $\mathbb{R}$ und wählen eine Orientierung auf V, so können wir sogar eine Identifikation $\bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ auszeichnen durch die Vorschrift, daß sie das geordnete Dachprodukt einer und jeder positiv orientierten Orthonormalbasis auf 1 werfen soll. In diesem Fall sind die fraglichen Eigenwerte ± 1 und unser Automorphismus ist der Hodge-$*$-Operator aus [AN3] **??**. Zum Beispiel erhält man als Basen der beiden Summanden in $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ die Ausdrücke $e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4$, $e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3$ und $e_1 \wedge e_3 \mp e_2 \wedge e_4$ für jeweils die obere bzw. untere Wahl des Vorzeichens für die beiden Summanden. Hier haben wir auf $\mathbb{C}^4$ die Bilinearform zugrundegelegt mit Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3, e_4, so daß also die Lie-Algebra schlicht aus allen schiefsymmetrischen Matrizen besteht, und dann kann man die Stabilität unserer beiden Summanden auch sehr explizit überprüfen.

Ergänzung 1.1.30. Um einen Isomorphismus $\mathfrak{sp}(4) \cong \mathfrak{so}(5)$ zu erhalten, betrachtet man in der Situation aus 1.1.28 zusätzlich auf V die nichtentartete schiefsymmetrische Bilinearform, deren Stabilisator eben gerade unser $\mathrm{Sp}(4; \mathbb{C})$ ist. Sie induziert eine Surjektion $\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, deren Kern ein fünfdimensionaler unter $\mathrm{Sp}(4; \mathbb{C})$ stabiler Teilraum ist, auf dem unsere symmetrische Bilinearform nicht ausartet. So erhalten wir einen Homomorphismus $\mathrm{Sp}(4; \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(5; \mathbb{C})$, dessen Differential der gesuchte Isomorphismus ist.

Definition 1.1.31. Gegeben eine nicht notwendig assoziative k-Algebra $(A, \cdot)$ heißt eine lineare Abbildung $\delta : A \to A$ eine **Derivation**, wenn sie die **Leibniz-**

Regel $\delta(a \cdot b) = (\delta a) \cdot b + a \cdot (\delta b) \quad \forall a, b \in A$ erfüllt. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Der}_k A \subset \operatorname{End}_k A$ den Untervektorraum der Derivationen von A.

Übungen

Übung 1.1.32. Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, so erhalten wir einen Homomorphismus von Lie-Algebren $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ vermittels der Vorschrift $(\operatorname{ad} x)(y) := [x, y]$.

Ergänzende Übung 1.1.33. Ein Element x einer endlichdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **regulär** genau dann, wenn gilt

$$\dim(\ker \operatorname{ad} x) \leq \dim(\ker \operatorname{ad} y) \quad \forall y \in \mathfrak{g}$$

Man zeige, daß die regulären Elemente einer reellen oder komplexen Liealgebra stets eine offene nichtleere Teilmenge bilden. Leser mit Grundkenntnissen in algebraischer Geometrie mögen auch zeigen, daß sie stets eine Zariski-offene Teilmenge bilden.

Übung 1.1.34. Man finde für die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ eine Basis e, h, f derart, daß gilt $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ und $[e, f] = h$. Man zeige, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ einfach ist.

Übung 1.1.35. Man zeige, daß die Derivationen einer Algebra A eine Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(A)$ der Endomorphismen des k-Vektorraums A bilden.

Übung 1.1.36. Seien k ein Körper, $(A, \cdot)$ eine nicht notwendige assoziative k-Algebra, $D : A \to A$ eine Derivation von A, und $A_\lambda := \operatorname{Hau}(D; \lambda)$ der Hauptraum von D zum Eigenwert λ. So gilt $A_\lambda \cdot A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$. Hinweis: Man kann bei [**?**] **??** spickeln.

Übung 1.1.37. Man zeige, daß es bis auf Isomorphismus genau zwei zweidimensionale komplexe Lie-Algebren gibt.

Übung 1.1.38. Gegeben eine assoziative Algebra A mit der zugehörigen Liealgebra A_{L} gilt stets $\operatorname{Der}(A) \subset \operatorname{Der}(A_{\mathrm{L}})$.

1.2 Darstellungen von Lie-Algebren

1.2.1. In diesem Abschnitt werden grundlegende Begriffsbildungen gegeben, die im Zusammenhang mit Matrix-Liegruppen in [ML] 2.1 ausführlicher motiviert werden.

Definition 1.2.2. Sei k ein Körper. Eine **Darstellung** einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über k ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Homomorphismus von Liealgebren $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Definition 1.2.3. Sei k ein Körper. Eine **Operation einer Liealgebra** $\mathfrak{g}$ über k auf einem k-Vektorraum V ist eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto xv$ mit der Eigenschaft

$$x(yv) - y(xv) = [x, y]v \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Wir werden in diesem Zusammenhang die Klammern oft weglassen und $x(yv)$ mit xyv abkürzen.

1.2.4 (**Darstellungen als Operationen**). Sei k ein Körper und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k und V ein k-Vektorraum. So induziert die Bijektion $\mathrm{Ens}(\mathfrak{g} \times V, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\mathfrak{g}, \mathrm{Ens}(V, V))$ aus dem Exponentialgesetz [GR] 2.3.33 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Operationen von } \mathfrak{g} \\ \text{auf dem Vektorraum } V \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Liealgebrenhomomorphismen} \\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \end{array} \right\}$$

Eine Operation ist also im wesentlichen dasselbe wie eine Darstellung. Ich verwende auch gleichbedeutend die Bezeichnung als $\mathfrak{g}$-Modul.

Beispiel 1.2.5. Sei V ein Vektorraum. Die offensichtliche Operation macht V zu einer Darstellung von $\mathfrak{gl}(V)$, der **Standarddarstellung** von $\mathfrak{gl}(V)$. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist sie im übrigen auch das Differential der offensichtlichen Darstellung der Matrix-Liegruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ durch Automorphismen von V.

Beispiel 1.2.6. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Die **triviale Operation** $xv = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ macht jeden Vektorraum V zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$. Den Grundkörper k versehen mit der trivialen Operation nennt man die **triviale Darstellung**, den Nullvektorraum versehen mit der trivialen Operation die **Nulldarstellung** unserer Liealgebra.

Definition 1.2.7. Für eine Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ setzen wir

$$V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \mid xv = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen die Elemente von $V^{\mathfrak{g}}$ die $\mathfrak{g}$-**invarianten Vektoren** von V.

Definition 1.2.8. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen zwei Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt ein **Homomorphismus von Darstellungen** genau dann, wenn gilt $\varphi(xv) = x\varphi(v) \quad \forall v \in V, x \in \mathfrak{g}$. Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen $\mathrm{Mod}^{\mathfrak{g}}(V, W)$ oder, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen,

$$\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(V, W)$$

Zwei Darstellungen heißen **isomorph** genau dann, wenn es zwischen ihnen einen Homomorphismus gibt, der ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

1.2.9. Die Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k bilden damit eine Kategorie. Wir verwenden für diese Kategorie die beiden Notationen

$$\mathfrak{g}\text{-Mod} = \mathrm{Mod}^{\mathfrak{g}}$$

Definition 1.2.10. Ein Untervektorraum U einer Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt eine **Unterdarstellung** genau dann wenn gilt $xv \in U \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in U$. Wir sagen in diesem Zusammenhang auch, U sei **stabil unter** $\mathfrak{g}$. Eine von ganz V verschiedene Unterdarstellung $U \subsetneq V$ heißt eine **echte Unterdarstellung** von V.

1.2.11. Gegeben eine Darstellung V sind natürlich ganz V und der Nullraum Unterdarstellungen. Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so ist das Bild einer Unterdarstellung von V eine Unterdarstellung von W und das Urbild einer Unterdarstellung von W eine Unterdarstellung von V. Insbesondere ist $\ker \varphi$ eine Unterdarstellung von V und $\operatorname{im} \varphi$ eine Unterdarstellung von W.

Definition 1.2.12. Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **einfach** oder gleichbedeutend **irreduzibel** genau dann, wenn sie nicht Null ist und ihre einzige echte Unterdarstellung die Nulldarstellung ist.

Satz 1.2.13 (Einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2; k)$). *Sei k ein Körper der Charakteristik Null.*

1. *Zu jeder positiven endlichen Dimension gibt es bis auf Isomorphismus genau eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ von besagter Dimension;*

2. *Ist e, h, f eine Basis von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ mit $[h, e] = 2e$ und $[h, f] = -2f$ und $[e, f] = h$, so zerfällt jede einfache Darstellung L der Dimension $m + 1$ unter h in eindimensionale Eigenräume*

   $$L = L_m \oplus L_{m-2} \oplus \ldots \oplus L_{2-m} \oplus L_{-m}$$

   zu den ganzzahligen Eigenwerten $m, m-2, \ldots, 2-m, -m$, und zusätzlich folgt aus $L_j \neq 0 \neq L_{j+2}$ bereits $f : L_{j+2} \xrightarrow{\sim} L_j$ sowie $e : L_j \xrightarrow{\sim} L_{j+2}$.

1.2.14. Die einfachen Darstellungen der Dimensionen 1, 2 und 3 sind die triviale Darstellung k, die Standarddarstellung k^2 und die „adjungierte Darstellung“, die wir in 1.1.32 eingeführt haben.

Ergänzung 1.2.15. In positiver Charakteristik sind die Verhältnisse komplizierter, da können die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen von der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ nicht mehr durch ihre Dimension klassifiziert werden.

Ergänzung 1.2.16. In [ML] 2.3.16 wird ein elementarer Beweis skizziert für die Tatsache, daß jede endlichdimensionale Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. In dieser Vorlesung wird das in größerer Allgemeinheit in 2.1.6 gezeigt.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers k und überlassen die Verallgemeinerung auf beliebige Grundkörper der Charakteristik Null dem Leser. Wir müssen (1) zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung konstruieren und (2) zeigen, daß je zwei einfache Darstellungen derselben endlichen Dimension isomorph sind. Wir beginnen mit (2). Die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ hat die Basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Lie-Klammern zwischen den Elementen dieser Basis sind $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$. Die Elemente e und f heißen manchmal auch **Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren** aus physikalischen Gründen, die hier nicht ausgeführt werden sollen. Sei nun $\rho : \mathfrak{sl}(2;k) \to \mathfrak{gl}(V)$ irgendeine Darstellung. Bezeichne $V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu)$ den Eigenraum von $\rho(h)$ zum Eigenwert $\mu \in k$. So gilt

$$eV_\mu \subset V_{\mu+2} \quad \text{und} \quad fV_\mu \subset V_{\mu-2},$$

denn aus $hv = \mu v$ folgt $hev = ehv + [h,e]v = e\mu v + 2ev = (\mu+2)ev$ und der zweite Fall folgt ähnlich aus $[h,f] = -2f$. Ist V endlichdimensional und $V \neq 0$, so gibt es sicher $\lambda \in k$ mit $V_\lambda \neq 0$ aber $V_{\lambda+2} = 0$. Für $v \in V_\lambda$ gilt dann $ev = 0$ und $hv = \lambda v$. Man prüft per Induktion, daß folgt

$$\begin{array}{rcll} hf^i v & = & (\lambda - 2i) f^i v & \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v & = & i(\lambda - i + 1) f^{i-1} v & \text{für alle } i \geq 1. \end{array}$$

Insbesondere ist der von den $f^i v$ mit $i \geq 0$ aufgespannte Teilraum eine Unterdarstellung. Ist V zusätzlich einfach und $v \neq 0$, so müssen die $f^i v$ demnach ganz V aufspannen. Gilt $f^i v \neq 0$, so sind v, $fv \ldots$, $f^i v$ Eigenvektoren von h zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und damit linear unabhängig. Da wir V endlichdimensional angenommen hatten, gibt es folglich $d \geq 1$ mit $f^d v = 0$. Wählen wir d kleinstmöglich, so ist $v, fv, \ldots, f^{d-1}v$ eine Basis von V, also $d = \dim V$. Weiter folgt aus $f^d v = 0$ auch $0 = ef^d v = d(\lambda - d + 1) f^{d-1} v$ und mithin $\lambda = d - 1$, da wir ja $d \neq 0$ und $f^{d-1} v \neq 0$ vorausgesetzt hatten. Damit haben wir gezeigt, daß je zwei einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;k)$ derselben endlichen Dimension d isomorph sind, da nämlich die Matrizen von $\rho(e)$, $\rho(f)$ und $\rho(h)$ in der Basis v, fv, $\ldots$, $f^{d-1}v$ nur von d abhängen. Um nun (1) die Existenz einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}(2;k)$ in jeder Dimension zu zeigen, brauchen wir nur zu prüfen, daß die im Eindeutigkeitsbeweis hergeleiteten Formeln in der Tat eine Darstellung liefern, d.h. daß für jedes d der Vektorraum mit der Basis $v_0, v_1, \ldots, v_{d-1}$ und der Operation gegeben durch $fv_i = v_{i+1}$ bzw. $fv_{d-1} = 0$, $ev_i = i(d-i)v_{i-1}$ bzw. $ev_0 = 0$ und $hv_i = (d-1-2i)v_i$ eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ ist. Diese Rechnung scheint mir jedoch unerfreulich und wenig nahrhaft. Etwas eleganter prüft man mithilfe der Produktregel für formale partielle Ableitungen leicht, daß die Abbildung $\rho : \mathfrak{sl}(2;k) \to \mathfrak{gl}(k[X,Y])$ gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} \rho(e) & = & X\partial_y \\ \rho(f) & = & Y\partial_x \\ \rho(h) & = & X\partial_x - Y\partial_y \end{array}$$

eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ ist. Diese Darstellung ist nicht einfach, die Polynome von festem Totalgrad m bilden vielmehr eine Unterdarstellung $L(m) = k[X,Y]^m$ der Dimension $d = m+1$ mit Basis $w_i = Y^i X^{m-i}$ für $i = 0, \ldots, m$. In dieser Basis wird die Operation von $\mathfrak{sl}(2;k)$ auf $\mathrm{L}(m)$ beschrieben durch die Formeln

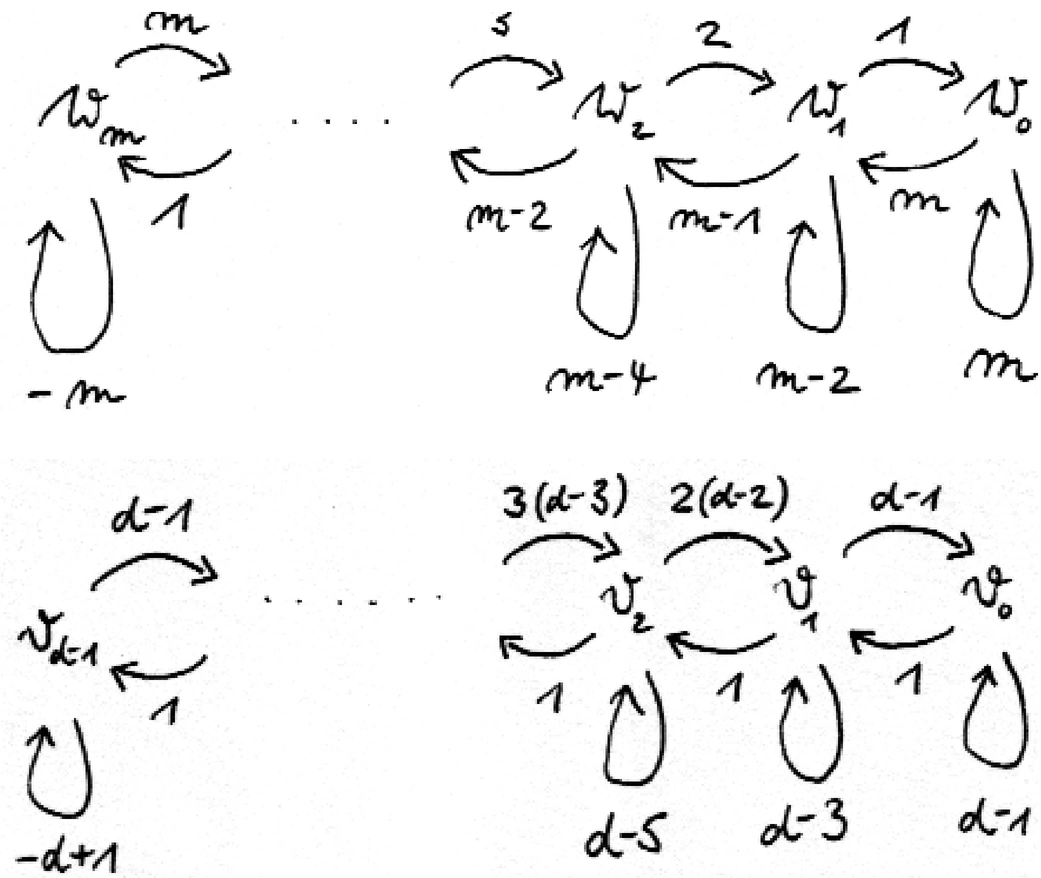
$$\begin{array}{rcl} ew_i & = & iw_{i-1} \\ fw_i & = & (m-i)w_{i+1} \\ hw_i & = & (m-2i)w_i \end{array}$$

wo wir $w_{-1} = w_{m+1} = 0$ verstehen. Die Darstellungen $\mathrm{L}(m)$ sind einfach, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung $0 \neq U \subset \mathrm{L}(m)$ enthält notwendig einen Eigenvektor zu h, also eines der w_i, und daraus folgt sofort $U = L(m)$. Damit haben wir nun auch in etwas übersichtlicherer Weise zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung gefunden. Die expliziten Formeln gefallen mir noch besser bei Parametrisierung der Basis nach den Eigenwerten von h. Setzen wir genauer $w_i = u_{m-2i}$, so erhalten wir für $\mathrm{L}(m)$ eine Basis bestehend aus $u_m, u_{m-2}, \ldots, u_{-m}$ und die Operation unserer Liealgebra wird gegeben durch die Formeln

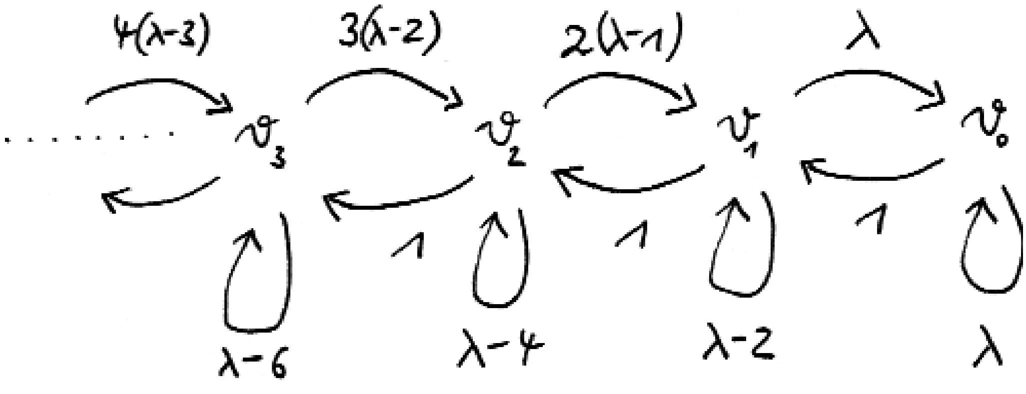
$$\begin{array}{rcl} eu_j & = & ((m-j)/2)u_{j+2} \\ fu_j & = & ((m+j)/2)u_{j-2} \\ hu_j & = & ju_j \end{array}$$

Der Satz folgt. □

Ergänzung 1.2.17. Unter welchen Bedingungen oder für welche Klassen von Darstellungen sind die einfachen Darstellungen eines Produkts zweier Liealgebren gerade die Tensorprodukte von einfachen Darstellungen der Faktoren? Im Fall endlichdimensionaler abelscher Liealgebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist das richtig und ist eine Variante des Hilbert'schen Nullstellensatzes. Im Fall endlichdimensionaler Darstellungen funktioniert wohl der Beweis für Gruppen aus [NAS] 2.2.3.



Die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;k)$ in zwei Basen. Die nach rechts weisenden Pfeile stellen jeweils die Operation von e dar, die nach links weisenden Pfeile die Operation von f und die Schlaufen die Operation von h.



Die Operation auf dem von den $v_i = f^i v$ aufgespannten Teilraum, in derselben Weise zu interpretieren wie die obenstehenden Darstellungen.

Übungen

Übung 1.2.18. Ist V eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2;k)$, so sind alle Eigenwerte von $h := \operatorname{diag}(1,-1)$ auf V ganze Zahlen, und ist weder Null noch Eins ein Eigenwert von h, so folgt bereits $V = 0$.

Übung 1.2.19. Man zeige: Ist $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2;k)$ mit $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$ und $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$, so gilt $[\tilde{e}, \tilde{f}] = c\tilde{h}$ für einen Skalar $c \neq 0$.

Übung 1.2.20 (**Quotientendarstellung**). Gegeben $U \subset V$ eine Darstellung einer Lie-Algebra mit einer Unterdarstellung gibt es genau eine Operation besagter Lie-Algebra auf dem Quotienten V/U derart, daß die kanonische Projektion $V \twoheadrightarrow V/U$ ein Homomorphismus von Darstellungen wird.

Übung 1.2.21. Sei k ein Körper. Man zeige: Für alle $n \geq 1$ bilden die homogenen Polynome vom Grad d eine Darstellung

$$k[X_1, \ldots, X_n]^{(d)}$$

der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n;k)$, wenn man die Standardmatrizen E_{ij} als die Differentialoperatoren $-X_j\partial_i$ wirken läßt, und für $\operatorname{char} k > d$ ist diese Darstellung irreduzibel. Im Fall $k = \mathbb{R}$ ist diese Darstellung im übrigen die Ableitung der offensichtlichen Darstellung von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]^{(d)} \subset \operatorname{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, wie in [ML] 2.3.19 ausgeführt wird.

1.3 Multimorphismen von Darstellungen*

1.3.1. Seien V, W zwei Darstellungen einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Durch die Vorschrift $x(v \otimes w) := xv \otimes w + v \otimes xw \quad \forall x \in \mathfrak{g}$ wird $V \otimes W$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$, der sogenannten **Tensor-Darstellung**. Man prüft das durch stures Nachrechnen.

1.3.2. Die Motivation für obige Definition der Tensordarstellung kommt aus der Darstellungstheorie der Liegruppen. In [ML] 2.1.14 finden wir, daß gegeben zwei endlichdimensionale stetige Darstellungen V, W einer Liegruppe G die abgeleitete Operation zur Tensordarstellung von G auf $V \otimes W$ mit $g(v \otimes w) := gv \otimes gw$ gerade gegeben wird durch die Formel $x(v \otimes w) = xv \otimes w + v \otimes xw$ für alle $x \in \operatorname{Lie} G$, so daß also mit unserer obigen Definition die abgeleitete Darstellung zu einem Tensorprodukt genau das Tensorprodukt der abgeleiteten Darstellungen ist.

1.3.3. Im folgenden besprechen die zugehörigen universellen Eigenschaften. Gegeben $r \geq 0$ und Darstellungen $W_1, \ldots, W_r, V$ einer Lielgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k verstehen wir unter einem **Multimorphismus von Darstellungen** eine multilineare Abbildung $f : W_1 \times \ldots \times W_r \to V$ mit

$$f(xw_1, w_2, \ldots, w_r) + \ldots + f(w_1, w_2, \ldots, xw_r) = xf(w_1, w_2, \ldots, w_r)$$

Im Fall $r = 0$ verstehen wir das speziell als die Forderung $xf(*) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Wir verwenden für die Gesamtheit aller derartigen Abbildungen wie in [LA2] 6.6.2 die beiden Notationen

$$\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(W_1 \curlywedge \ldots \curlywedge W_r, V) = \mathrm{Hom}_k^{(r)}(W_1 \times \ldots \times W_r, V)^{\mathfrak{g}}$$

Unsere Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen [LA2] 6.6.3 induziert eine Multiverknüpfung von Multimorphismen von Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Unsere universellen multilinearen Abbildungen

$$\tau : W_1 \times \ldots \times W_r \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_r$$

aus [LA2] 6.5.1 sind Multimorphismen für die $\mathfrak{g}$-Operation auf dem Tensorprodukt, die für $x \in \mathfrak{g}$ gegeben wird durch

$$x(w_1 \otimes \ldots \otimes w_r) := xw_1 \otimes \ldots \otimes w_r + \ldots + w_1 \otimes \ldots \otimes xw_r$$

im Fall $r \geq 1$ und durch die Nulloperation auf dem leeren Tensorprodukt k im Fall $r = 0$. Es ist dann klar, daß unsere Multimorphismen von Darstellungen τ in der Weise universell sind, daß das Vorschalten von τ für jede weitere Darstellung V eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(W_1 \otimes \ldots \otimes W_r, V) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(W_1 \curlywedge \ldots \curlywedge W_r, V)$$

liefert. Im Fall $r = 0$ spezialisiert das unter unseren ganzen Identifikationen zu der durch das Auswerten bei $1 \in k$ gegebenen Bijektion $\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(k, V) \stackrel{\sim}{\to} V^{\mathfrak{g}}$. Sind U, V, W Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über k und erklären wir eine Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ durch die Vorschrift durch die Vorschrift $(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ und $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, so induziert die offensichtliche Bijektion $\mathrm{Mod}_k(U \curlywedge V, W) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Mod}_k(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(U \curlywedge V, W) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$$

Die definitorische Gleichheit $\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(V, W) = \mathrm{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}$ von Homomorphismen von Darstellungen und $\mathfrak{g}$-Invarianten in der Darstellung auf dem Raum aller linearen Abbildungen kann man dann auch als die Verknüpfung von kanonischen Isomorphismen

$$\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(V, W) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(k \curlywedge V, W) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(k, \mathrm{Hom}_k(V, W)) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}$$

verstehen, von denen der Erste von [LA2] 6.6.4 herkommt und der Letzte von 1.3.3.

Vorschau 1.3.4 (**Darstellungen als Multikategorie**). In der in [TS] 5.4 eingeführten Terminologie kann man die vorhergehenden Bemerkungen dahingehend zusammenfassen, daß die Darstellungen einer Liealgebra zusammen mit unseren Multimorphismen von Darstellungen und deren Multiverknüpfungen eine Multikategorie $\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}$ bilden, die darstellbar ist im Sinne von [TS] 5.5.6 und die im Sinne von [TS] 5.5.17 internes Hom hat.

Übungen

Übung 1.3.5. Gegeben eine Darstellung V einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist die Operation $\mathfrak{g} \otimes V \to V$, $x \otimes v \mapsto xv$ ein Homomorphismus von Darstellungen. Weiter ist auch der Lie-Algebren-Homomorphismus $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k V$ ein Homomorphismus von Darstellungen, für die adjungierte Operation auf $\mathfrak{g}$ und die durch 1.3.3 erklärte Operation auf $\mathrm{End}_k V$.

Übung 1.3.6. Diejenigen Vektoren einer Darstellung V einer Lie-Algebra $\mathfrak{a}$, die in einem endlichdimensionalen $\mathfrak{a}$-stabilen Teilraum liegen, heißen auch die **$\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren** von V. Man zeige: Ist V eine Darstellung einer endlichdimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so bilden die $\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren von V einen $\mathfrak{g}$-stabilen Teilraum $V_{\mathfrak{a}} \subset V$. Statt $\mathfrak{g}$ endlichdimensional brauchen wir sogar schwächer nur annehmen, daß $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren besteht für die adjungierte Darstellung.

Übung 1.3.7. Sind U, V, W Darstellungen einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so sind die kanonischen Isomorphismen von Vektorräumen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \\ U \otimes (V \otimes W) & \stackrel{\sim}{\to} & (U \otimes V) \otimes W \end{array}$$

Isomorphismen von Darstellungen. Nimmt man im ersten Isomorphismus auf beiden Seiten die $\mathfrak{g}$-Invarianten, so folgen unmittelbar die „Adjunktionsisomorphismen“ $\mathrm{Mod}^{\mathfrak{g}}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Mod}^{\mathfrak{g}}(U \otimes V, W)$. Aus diesen Isomorphismen folgert man die Verträglichkeit der Liealgebrenoperation mit vielen anderen kanonischen Abbildungen. Zum Beispiel sind für U, V, W, X Darstellungen einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ die kanonischen Abbildungen „Verknüpfen von Abbildungen“ und „Tensorieren von Abbildungen“

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, W) & \to & \mathrm{Hom}(U, W) \\ \mathrm{Hom}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}(W, X) & \to & \mathrm{Hom}(U \otimes W, V \otimes X) \end{array}$$

stets Homomorphismen von Darstellungen.

Übung 1.3.8 (**Clebsch-Gordan**). Man zeige im Fall der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, daß die Darstellungen $\mathrm{L}(m) \otimes \mathrm{L}(n)$ und $\mathrm{Hom}(\mathrm{L}(m), \mathrm{L}(n))$ isomorph sind zu

$$\mathrm{L}(m+n) \oplus \mathrm{L}(m+n-2) \oplus \ldots \oplus \mathrm{L}(|m-n|)$$

Hinweis: Man betrachte die Dimensionen der h-Eigenräume.

Beispiel 1.3.9. Man kann $\mathrm{L}(2)$ erhalten, indem man von der Standarddarstellung $E = \mathbb{R}^3$ der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ ausgeht und diese ableitet und komplexifiziert zu einer Darstellung $E_{\mathbb{C}}$ der komplexifizierten Liealgebra $\mathfrak{so}(3;\mathbb{C})$, die ja bekanntlich isomorph ist zu $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Die vorherige Übung zusammen mit [ML] 2.2.3 sagt, daß die Räume von $\mathrm{SO}(3)$-Verflechtungsoperatoren $E_{\mathbb{C}} \otimes E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ und $E_{\mathbb{C}} \otimes E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ jeweils eindimensional sind. Daraus folgt leicht, daß auch die Räume von Verflechtungsoperatoren $E \otimes E \to E$ und $E \otimes E \to \mathbb{R}$ jeweils eindimensional sein müssen. In der Tat wissen wir aus [LA2] 1.9.6 und [LA2] 1.4.7, daß das Kreuzprodukt und das Skalarprodukt Erzeuger der jeweiligen Räume von Verflechtungsoperatoren sind.

Übung 1.3.10. Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ ein $\mathfrak{g}$-invarianter Tensor, so definiert Ω für beliebige Darstellungen M, N von $\mathfrak{g}$ einen Endomorphismus $\Omega \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(M \otimes N)$.

Ergänzende Übung 1.3.11. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Auf $\mathrm{End}\, V$ haben wir die Spurform $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy)$. Der in der vorherigen Übung 1.3.10 erklärte Operator $\Omega_V \in \mathrm{End}\, V \otimes \mathrm{End}\, V$ liefert als Endomorphismus von $V \otimes V$ gerade die Vertauschung der Tensorfaktoren.

Ergänzende Übung 1.3.12. Gegeben eine Darstellung V einer Lie-Algebra und $r \geq 0$ gibt es genau eine Operation der Lie-Algebra auf der äußeren Potenz $\bigwedge^r V$ derart, daß die Projektion $V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \bigwedge^r V$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist. Gegeben eine Darstellung V einer Lie-Algebra und $r \geq 0$ gibt es genau eine Operation der Lie-Algebra auf der symmetrischen Potenz $\mathrm{S}^r V$ derart, daß die Projektion $V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathrm{S}^r V$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist.

Übung 1.3.13. Gegeben $p, q \in \mathbb{N}$ setze man $\mathfrak{so}(p, q) := \mathfrak{o}(\mathbb{R}^{p+q}, J_{p,q})$ für die durch die Diagonalmatrix mit p Einsen und q Minus-Einsen gegebene Bilinearform $J_{p,q}$. Man konstruiere einen Isomorphismus

$$\mathfrak{so}(3, 1) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$$

von reellen Lie-Algebren. Hinweis: Man suche nicht nach einem Isomorphismus von reellen Vektorräumen $\mathbb{R}^{3+1} \cong \mathbb{C}^2$, der solch einen Isomorphismus von Lie-Algebren induzieren könnte, denn die Endomorphismenringe dieser Darstellungen sind verschieden. Stattdessen untersuche man die vierdimensionale reelle Darstellung $\ker\left(\bigwedge^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) \twoheadrightarrow \bigwedge^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)\right)$ von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ und die darauf durch $\wedge$ und eine von Null verschiedene reelle Volumenform gegebene Bilinearform.

1.4 Nilpotente und auflösbare Lie-Algebren

Satz 1.4.1 (Lie-Algebren aus nilpotenten Endomorphismen). *Seien V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper k und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Unteralgebra, die aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht. So gilt:*

1. *Ist $V \neq 0$, so gibt es in V einen Vektor $v \neq 0$ mit $\mathfrak{g}v = 0$;*

2. *Ist V endlichdimensional, so gibt es in V eine Fahne von Unterräumen $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$ mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, d$;*

3. *Ist V endlichdimensional, so besitzt V eine Basis, bezüglich derer die Matrizen aller Elemente unserer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ echte obere Dreiecksmatrizen sind.*

Beweis. 1. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Ist $x \in \operatorname{End}(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus von V, so ist auch $\operatorname{ad} x \in \operatorname{End}(\operatorname{End}(V)) = \operatorname{End}(\mathfrak{gl}(V))$ nilpotent. In der Tat ist $(\operatorname{ad} x)^n(y)$ für alle $y \in \mathfrak{gl}(V)$ eine Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt $x^i y x^{n-i}$. Aus $x^n = 0$ folgt also $(\operatorname{ad} x)^{2n} = 0$. Wir zeigen nun das Lemma durch Induktion über die Dimension von $\mathfrak{g}$. Sei $\dim \mathfrak{g} \geq 1$ und sei $L \subsetneq \mathfrak{g}$ maximal unter allen echten Unteralgebren. Unter der adjungierten Operation von L auf $\mathfrak{g}$ ist $L \subset \mathfrak{g}$ eine Unterdarstellung. Wir bilden die Quotientendarstellung $\mathfrak{g}/L$ und erhalten so einen Lie-Algebren-Homomorphismus $\overline{\operatorname{ad}} : L \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/L)$. Nach unserer Vorbemerkung besteht $\overline{\operatorname{ad}} L$ aus nilpotenten Endomorphismen von $\mathfrak{g}/L$, es gibt also nach Induktionsannahme ein $\bar{x} \in \mathfrak{g}/L$, $\bar{x} \neq 0$ mit $(\overline{\operatorname{ad}} L)(\bar{x}) = 0$, oder in anderen Worten ein $x \in \mathfrak{g} \backslash L$ mit $[L, x] \subset L$. Das bedeutet hinwiederum, daß $L + kx$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, die L echt umfaßt. Da L als maximal angenommen war, gilt notwendig $L + kx = \mathfrak{g}$. Nun betrachten wir $W := \{v \in V \mid Lv = 0\}$, benutzen die Induktionsannahme ein zweites Mal und folgern $W \neq 0$. Aus $[L, x] \subset L$ folgt weiter $xW \subset W$, und da x nach Annahme nilpotent ist, gibt es $v \in W$ mit $v \neq 0$ aber $xv = 0$ und damit $\mathfrak{g}v = 0$.

2. Sei allgemeiner $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung einer beliebigen Lie-Algebra durch nilpotente Endomorphismen. Wir zeigen durch Induktion über die Dimension von V, daß es eine Kette $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$ von Unterräumen gibt mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, d$. Im Fall $V = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ mit $\rho(\mathfrak{g})v = 0$. Wir setzen $V_1 = kv$ und betrachten die Quotientendarstellung $V' = V/V_1$ und die kanonische Projektion $\operatorname{can} : V \twoheadrightarrow V/V_1$. Mit Induktion finden wir dort eine Kette $0 = V_0' \subset V_1' \subset \ldots \subset V_{d-1}' = V'$ wie gewünscht. Dann setzen wir $V_i = \operatorname{can}^{-1}(V_{i-1}')$ für $i \geq 1$ und $V_0 = 0$ und sind fertig.

3. Das ist nur eine Formulierung von Teil 2 in Koordinaten. $\square$

Definition 1.4.2. Seien k ein Körper und A eine k-Algebra unter einer $(x, y) \mapsto x \cdot y$ notierten Verknüpfung. Ein **Ideal von** A ist ein Untervektorraum $I \subset A$ mit $A \cdot I \subset I$ und $I \cdot A \subset I$.

1.4.3. Jedes Ideal ist eine Unteralgebra. Null und A sind stets Ideale von A. Die Summe von Idealen ist ein Ideal. Der Schnitt von Idealen ist ein Ideal. Das von einer Teilmenge $T \subset A$ **erzeugte Ideal** ist definiert als das kleinste Ideal, das T enthält, also als der Schnitt aller Ideale, die T enthalten. Die Ideale in einem Produkt $A_1 \times \ldots \times A_n$ von Algebren sind genau die Produkte $I_1 \times \ldots \times I_n$ von Idealen der Faktoren.

1.4.4. Ein Ideal $I \subset A$ einer Ringalgebra mit $I \neq A$ ist keine Unterringalgebra, da in ihm das neutrale Element der Multiplikation, wenn es überhaupt eines geben sollte, jedenfalls nicht dasselbe ist wie in A.

Lemma 1.4.5 (**Quotienten von Algebren nach einem Ideal**). *1. Ist A eine Algebra und $I \subset A$ ein Ideal, so gibt es auf dem Quotientenvektorraum A/I genau eine bilineare Verknüpfung derart, daß die kanonische Projektion $\mathrm{can} : A \to A/I$ ein Homomorphismus von Algebren ist;*

2. Der Kern eines Algebrenhomomorphismus ist stets ein Ideal;

3. Ist $\varphi : A \to B$ ein Algebrenhomomorphismus und $I \subset A$ ein Ideal mit $\varphi(I) = 0$, so gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : A/I \to B$ mit $\tilde{\varphi} \circ \mathrm{can} = \varphi$.

Beweis. Standard. □

1.4.6. Die Ideale einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind genau die Unterdarstellungen der adjungierten Darstellung. Eine Lie-Algebra ist also irreduzibel genau dann, wenn ihre adjungierte Darstellung irreduzibel ist. Beim Begriff „einfach" passen die Definitionen leider nicht so gut zusammen.

1.4.7. Der Kern von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$ und heißt das **Zentrum** von $\mathfrak{g}$. Natürlich ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$.

Definition 1.4.8. Für zwei Untervektorräume U, V einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ bezeichne $[U, V] \subset \mathfrak{g}$ den Untervektorraum, der von allen Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U$, $y \in V$ aufgespannt wird.

1.4.9 (**Diskussion der Terminologie**). Diese Notation verletzt unsere allgemeinen Konventionen [GR] 3.1.3, nach denen $[U, V]$ eigentlich die Menge aller Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U$, $y \in V$ bezeichnen müßte. Für diese Menge brauchen wir jedoch in der Lietheorie keine eigene Notation, weshalb wir die allgemein vereinbarte Schreibweise $\langle [U, V] \rangle_k$ zu $[U, V]$ abkürzen.

1.4.10. Sind I, J Ideale einer Lie-Algebra, so ist auch $[I, J]$ ein Ideal, wie man nachrechnet unter Verwendung der Jacobi-Identität. Für jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist insbesondere $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ stets ein Ideal. Es heißt die **derivierte Lie-Algebra** und ist das kleinste Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ derart, daß der Quotient $\mathfrak{g}/I$ abelsch ist.

Definition 1.4.11. Man definiert für jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ induktiv zwei Folgen von Idealen wie folgt:

1. die **absteigende Zentralreihe** $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$;
2. die **abgeleitete Reihe** $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$.

Definition 1.4.12. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra.

1. $\mathfrak{g}$ heißt **nilpotent** genau dann, wenn gilt $\mathfrak{g}^i = 0$ für $i \gg 0$;
2. $\mathfrak{g}$ heißt **auflösbar** genau dann, wenn gilt $\mathfrak{g}^{(i)} = 0$ für $i \gg 0$.

1.4.13. Natürlich gilt $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$, jede nilpotente Lie-Algebra ist also auflösbar. Jede Unteralgebra und jeder Quotient einer nilpotenten bzw. auflösbaren Lie-Algebra ist nilpotent bzw. auflösbar. Ist genauer $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so erkennt man induktiv $\varphi(\mathfrak{g}^i) = (\varphi(\mathfrak{g}))^i$ und $\varphi(\mathfrak{g}^{(i)}) = (\varphi(\mathfrak{g}))^{(i)}$ für alle i.

1.4.14. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V ist jede Unteralgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, die aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht, bereits nilpotent als Lie-Algebra, da sie sich nämlich nach 1.4.1 identifizieren läßt mit einer Unteralgebra der Lie-Algebra der echten oberen $(d \times d)$-Dreiecksmatrizen für $d = \dim V$.

1.4.15 (**Herkunft der Terminologie**). Der Begriff „auflösbar“ kommt her von einem analogen Begriff für Gruppen, der hinwiederum seinen Ursprung in der Galoistheorie hat, genauer in der Frage nach der Auflösbarkeit von polynomialen Gleichungen durch „Ausdrücke in höheren Wurzeln“.

Definition 1.4.16. Ein Element x einer Lie-Algebra heißt **ad-nilpotent** genau dann, wenn $\operatorname{ad} x$ als Endomorphismus unserer Lie-Algebra nilpotent ist.

Satz 1.4.17 (von Engel). *Eine endlichdimensionale Lie-Algebra ist nilpotent genau dann, wenn jedes ihrer Elemente ad-nilpotent ist.*

Beweis. $\Rightarrow$ bleibt dem Leser überlassen. Wir zeigen $\Leftarrow$. Bezeichne $\mathfrak{g}$ unsere Lie-Algebra. Bemerkung 1.4.14 sagt uns schon mal, daß $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ eine nilpotente Lie-Algebra ist. Dann folgern wir $0 = (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^i = \operatorname{ad}(\mathfrak{g}^i) \;\Rightarrow\; \mathfrak{g}^i \subset \ker(\operatorname{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \;\Rightarrow\; \mathfrak{g}^{i+1} = 0$. □

Übungen

Übung 1.4.18. Das Urbild eines Ideals unter einem Algebrenhomomorphismus ist wieder ein Ideal. Das Bild eines Ideal unter einem *surjektiven* Algebrenhomomorphismus ist wieder ein Ideal.

Übung 1.4.19. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über einem Körper k. Eine Linearform auf $\mathfrak{g}$, die ein Homomorphismus in die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(1; k)$ ist, heißt auch ein **Charakter von** $\mathfrak{g}$. Man zeige, daß genau die Linearformen Charaktere sind, die auf der derivierten Lie-Algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ verschwinden.

Übung 1.4.20. Die echten oberen Dreiecksmatrizen bilden eine nilpotente Lie-Algebra, die oberen Dreiecksmatrizen eine auflösbare Lie-Algebra.

Übung 1.4.21. Sei V eine zweidimensionale Darstellung einer nilpotenten Liealgebra und $U \subset V$ eine eindimensionale Unterdarstellung. Man zeige: Sind U und V/U als Darstellungen nicht isomorph, so ist V isomorph zu $U \oplus V/U$. Hinweis: Man überlege sich, daß eine nilpotente Liealgebra von oberen (2×2)-Dreiecksmatrizen bereits abelsch sein muß.

Übung 1.4.22. Sei A eine assoziative Algebra. Man zeige für alle $x, y \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ die Formel $(\operatorname{ad} x)^n(y) = \sum_i \binom{n}{i}(-1)^{n-i}x^i y x^{n-i}$.

Übung 1.4.23. (1) Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ von Lie-Algebren ist $\mathfrak{g}$ auflösbar genau dann, wenn $\ker \varphi$ und $\operatorname{im} \varphi$ auflösbar sind. (2) Sind I, J zwei auflösbare Ideale in einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist auch ihre Summe $I + J \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal. Man betrachte dazu zum Beispiel die Surjektion $I + J \twoheadrightarrow (I + J)/J$. (3) Ist $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra, so gibt es in $\mathfrak{g}$ ein größtes auflösbares Ideal, das **Radikal** $\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ von $\mathfrak{g}$.

Übung 1.4.24. $(\operatorname{char} k = 0)$. Man zeige, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n; k)$ einfach ist. Hinweis: Besteht ein Ideal von $\mathfrak{gl}(n; k)$ nicht aus Diagonalmatrizen, so umfaßt es $\mathfrak{sl}(n; k)$. In der Tat muß es sicher ein E_{ij} mit $i \neq j$ enthalten, wie man erkennt durch Anwenden der $\operatorname{ad}(E_{kk})$. Dann enthält es auch $[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$ und dann alle $E_{ik} = [E_{ii} - E_{jj}, E_{ik}]$ für $k \neq i, j$ sowie alle E_{kj} für $k \neq i, j$. Dann enthält es aber in derselben Weise auch alle E_{kl} für $k \neq l$ und alle $E_{kk} - E_{ll}$. Man zeige, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ in Charakteristik 2 dahingegen nicht einfach ist.

Übung 1.4.25. Für jede Lie-Algebra L und jedes Element $x \in L$ ist $\operatorname{ad} x$ eine Derivation von L und die Menge $\operatorname{ad}(L) \subset \operatorname{Der}_k L$ ist ein Lie-Ideal. Genauer gilt sogar $[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(\delta x) \quad \forall \delta \in \operatorname{Der}_k L, x \in L$.

1.5 Der Satz von Lie

Satz 1.5.1 (von Lie, abstrakte Form). *Jede einfache endlichdimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Liealgebra ist eindimensional.*

Satz 1.5.2 (von Lie, konkrete Form). *Ist V ein von Null verschiedener endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine auflösbare Unteralgebra, so gibt es einen simultanen Eigenvektor v für alle Endomorphismen aus $\mathfrak{g}$, in Formeln ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $\mathfrak{g}v \subset \mathbb{C}v$.*

1.5.3. Beide Sätze gelten mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null. In von Null verschiedener Charakteristik sind sie jedoch im allgemeinen falsch. Zum Beispiel ist die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2)$ in Charakteristik Zwei auflösbar, ja sogar nilpotent, und dennoch ist ihre Standarddarstellung k^2 einfach. Des weiteren ist die Bedingung endlicher Dimension wichtig: So bilden etwa das Ableiten ∂, der Multiplikationsoperator $(X\cdot)$ und die Identität id eine Basis einer auflösbaren Unter-Liealgebra von $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}[X])$ und der Polynomring $\mathbb{C}[X]$ ist eine einfache Darstellung dieser dreidimensionalen auflösbaren Liealgebra. Für eine endlichdimensionale komplexe abelsche Liealgebra dahingegen ist jede einfache Darstellung bereits endlichdimensional und damit eindimensional: Diese Aussage ist eng verwandt zum Hilbert'schen Nullstellensatz und folgt etwa aus [KAG] 1.10.8.

Beweis. Die beiden Sätze sind sicher äquivalent. Wir zeigen hier die konkrete Form und führen den Beweis durch Induktion über $\dim \mathfrak{g}$. Der Fall $\dim \mathfrak{g} = 0$ ist klar. Gilt $\dim \mathfrak{g} > 0$, so gibt es in $\mathfrak{g}$ ein Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ der Kodimension 1: In der Tat ist $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ eine abelsche Lie-Algebra, jeder Teilraum darin ist also ein Ideal. Aus $\dim \mathfrak{g} > 0$ und $\mathfrak{g}$ auflösbar folgt aber $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, folglich gibt es in $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ einen Teilraum der Kodimension 1 und das Urbild in $\mathfrak{g}$ eines solchen Teilraums ist dann unser gesuchtes Ideal I. Nach Induktionsnahme finden wir $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $Iv \subset \mathbb{C}v$. Man sieht leicht, daß die Funktion $\lambda : I \to \mathbb{C}$ gegeben durch $xv = \lambda(x)v$ linear sein muß. Wir betrachten den zugehörigen simultanen Eigenraum $V_\lambda = \{w \in V \mid xw = \lambda(x)w \quad \forall x \in I\}$, der v enthält und deshalb von Null verschieden ist. Nach dem anschließenden allgemeinen Lemma 1.5.4 gilt $\mathfrak{g}V_\lambda \subset V_\lambda$. Jetzt wählen wir $y \in \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} = I + \mathbb{C}y$. Jeder Eigenvektor v von y in V_λ muß dann simultaner Eigenvektor aller Endomorphismen aus $\mathfrak{g}$ sein. □

Lemma 1.5.4. $(\mathrm{char}\, k = 0)$ *Seien V eine endlichdimensionale Darstellung einer k-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal. So ist für alle Linearformen $\lambda \in I^*$ der simultane Eigenraum $V_\lambda := \{w \in V \mid xw = \lambda(x)w \quad \forall x \in I\}$ eine Unterdarstellung.*

Ergänzung 1.5.5. Das gilt mit demselben Beweis auch über einem beliebigen Grundkörper k einer Charakteristik $\mathrm{char}\, k > \dim V$. Ein Gegenbeispiel ist die Standarddarstellung k^2 der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ in Charakteristik Zwei mit dem Ideal der oberen Dreiecksmatrizen.

Beweis. In Formeln gilt es zu zeigen, daß gilt $xyw = \lambda(x)(yw) \quad \forall x \in I, y \in \mathfrak{g}$, $w \in V_\lambda$. Sicher gilt stets

$$\begin{array}{rcl} xyw & = & yxw + [x, y]w \\ & = & y(\lambda(x)w) + \lambda([x, y])w \\ & = & \lambda(x)(yw) + \lambda([x, y])w \end{array}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir aus $V_\lambda \neq 0$ folgern können, daß gilt $\lambda([x, y]) = 0 \ \forall x \in I, y \in \mathfrak{g}$. Gegeben $y \in \mathfrak{g}$ und $w \in V_\lambda$ nicht Null sei dazu $n \geq 0$ die größte Zahl derart, daß die Vektoren $w, yw, y^2w, \ldots, y^n w$ linear unabhängig sind. Sei W der von $w, yw, \ldots, y^n w$ aufgespannte Teilraum von V. Sicher ist W stabil unter y. Außerdem ist W auch stabil unter I, genauer zeigt man durch Induktion über i aus $xy^i w = y(xy^{i-1}w) + [x, y]y^{i-1}w$ für $x \in I$, daß alle $W_i = \operatorname{span}(w, yw, \ldots, y^i w)$ unter I stabil sind. Dann folgert man aus derselben Formel mit einer nochmaligen Induktion für $x \in I$ sogar

$$xy^i w \in y^i xw + W_{i-1}$$

Für alle $x \in I$ ist also die Matrix von $x : W \to W$ in der Basis der $y^i w$ eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einträgen $\lambda(x)$ auf der Diagonalen und hat folglich die Spur $\operatorname{tr}(x|_W) = (\dim W)\lambda(x)$. Wenden wir diese Erkenntnis an auf $[x, y]$ und erinnern, daß die Spur des Kommutators von zwei linearen Selbstabbildungen eines endlichdimensionalen Raums wie etwa unseres Raums W stets verschwindet, so folgt $(\dim W)\lambda([x, y]) = \operatorname{tr}([x, y]|_W) = 0$. Da nach unseren Annahmen W nicht der Nullraum ist, folgt $\lambda([x, y]) = 0$ für alle $x \in I$. □

Korollar 1.5.6 (Darstellungen auflösbarer Lie-Algebren). *Sei V eine endlichdimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. So gilt:*

1. *Es gibt in V eine Kette $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$ von Unterdarstellungen mit $\dim V_i = i$;*

2. *Es gibt eine Basis von V, bezüglich derer die Matrizen von Elementen aus $\mathfrak{g}$ alle obere Dreiecksmatrizen sind.*

Ergänzung 1.5.7. Das gilt mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null.

Beweis. Man argumentiert ausgehend vom Satz von Lie 1.5.2 analog wie für die Aussagen 2 und 3 von Satz 1.4.1 über Lie-Algebren aus nilpotenten Endomorphismen. □

Korollar 1.5.8. *Die derivierte Lie-Algebra einer endlichdimensionalen auflösbaren komplexen Lie-Algebra ist nilpotent.*

Ergänzung 1.5.9. Das gilt allgemeiner über jedem Grundkörper der Charakteristik Null, von dem man sich durch Erweiterung der Skalare leicht in den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers retten kann, in dem dann wieder der hier gegebene Beweis funktioniert.

Beweis. Sei $\mathfrak{g}$ unsere auflösbare Lie-Algebra. Nach dem vorhergehenden Korollar besteht bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ die Unteralgebra $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ aus oberen Dreiecksmatrizen, mithin besteht $[\operatorname{ad}\mathfrak{g}, \operatorname{ad}\mathfrak{g}] = \operatorname{ad}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ aus echten oberen Dreiecksmatrizen und ist nilpotent. Da der Kern von $\operatorname{ad} : [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ im Zentrum von $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ liegt, ist damit auch $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ selbst nilpotent. □

Übungen

Übung 1.5.10 (**Darstellungen von nilpotenten Liealgebren**). Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$. Man zeige: Jede endlichdimensionale Darstellung einer nilpotenten Liealgebra über k zerfällt in die direkte Summe der simultanen Haupträume aller von der Operation herkommenden Endomorphismen. Hinweis: Man kombiniere das Korollar 1.5.6 zum Satz von Lie und 1.4.21, um jeden simultanen Hauptraum als Unterdarstellung zu entlarven und zu zeigen, daß deren Dimensionen sich zur Dimension der ganzen Darstellung aufaddieren. Die fraglichen simultanen Eigenwerte sind dann Linearformen auf unserer Liealgebra und heißen die **Gewichte** unserer Darstellung, die zugehörigen simultanen Eigenräume nennen wir die **Gewichtsräume**, und die zugehörigen simultanen Haupträume die **verallgemeinerten Gewichtsräume**.

Ergänzende Übung 1.5.11. Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jeder Vektor in einer endlichdimensionalen Unterdarstellung liegt. Man zeige, daß auch jede lokal endliche Darstellung einer nilpotenten Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ in die direkte Summe ihrer verallgemeinerten Gewichtsräume zerfällt.

Übung 1.5.12. Diese Übung dient nur der Auffrischung Ihrer Kenntnisse in linearer Algebra. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus und seien $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ dessen Eigenwerte. Man zeige, daß für jeden Untervektorraum $W \subset V$ mit $f(W) \subset W$ gilt

$$W = (W \cap \operatorname{Hau}(f|V;\lambda)) \oplus (W \cap \operatorname{Hau}(f|V;\mu)) \oplus \ldots \oplus (W \cap \operatorname{Hau}(f|V;\nu))$$

Man formuliere auch die Verallgemeinerung auf den Fall eines lokal endlichen Endomorphismus f eines beliebigen Vektorraums V.

1.6 Das Auflösbarkeitskriterium von Cartan

Satz 1.6.1 (Auflösbarkeitskriterium von Cartan). *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unteralgebra. Genau dann ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, wenn gilt* $\operatorname{tr}(xy) = 0 \;\; \forall x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$.

1.6.2. Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so liegt es nach Korollar 1.5.6 zum Satz von Lie bei geeigneter Basiswahl bereits in den oberen Dreiecksmatrizen. Das zeigt die eine Richtung. Der Beweis der anderen Richtung braucht einige Vorbereitungen und wird erst am Ende dieses Abschnitts direkt vor 1.6.7 gegeben.

Ergänzung 1.6.3. Das Auflösbarkeitskriterium gilt allgemeiner auch über jedem Grundkörper der Charakteristik Null: Durch Erweiterung der Skalare kann man sich leicht in den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers der Charakteristik Null retten, in dem dann wieder der hier gegebene Beweis funktioniert.

Lemma 1.6.4. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Ist $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ die Jordan-Zerlegung von $x \in \operatorname{End} V$, so ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}) + \operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}})$ die Jordan-Zerlegung von $\operatorname{ad} x \in \operatorname{End}(\mathfrak{gl}(V))$. In Formeln gilt also*

$$\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}) = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{s}} \quad \textit{und} \quad \operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}}) = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{n}}$$

Beweis. Sicher gilt $[\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}, \operatorname{ad} x_{\mathrm{n}}] = \operatorname{ad}[x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}}] = 0$. Außerdem ist $\operatorname{ad} x_{\mathrm{n}}$ nilpotent nach dem Beginn des Beweises von 1.4.1. Wir müssen damit nur noch zeigen, daß $\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}$ diagonalisierbar ist. Aber identifizieren wir $\operatorname{End} V$ mit einer Algebra von quadratischen Matrizen vermittels einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ aus Eigenvektoren von x_{s}, sagen wir $x_{\mathrm{s}} v_i = \lambda_i v_i$, so werden die Standardmatrizen E_{ij} mit einer Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte Eigenvektoren zu $\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}$, genauer gilt $(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}})(E_{ij}) = (\lambda_j - \lambda_i) E_{ij}$. Folglich ist mit x_{s} auch $\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}$ diagonalisierbar. □

Lemma 1.6.5. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Seien zwei Teilräume seines Endomorphismenraums $\operatorname{End} V \supset B \supset A$ gegeben und sei $T := \{x \in \operatorname{End} V \mid (\operatorname{ad} x)(B) \subset A\}$. Erfüllt ein $x \in T$ die Bedingung $\operatorname{tr}(xz) = 0$ für alle $z \in T$, so ist x nilpotent.*

1.6.6. Der Beweis des Auflösbarkeitskriteriums beruht auf diesem technischen Lemma. Ich gebe für dies Lemma zwei Beweise. Der erste ist zwar etwas schneller, hinterläßt aber bei mir einen schalen Nachgeschmack, da er nicht für einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k der Charakteristik Null funktioniert. Deshalb die Alternative.

Beweis. Sei $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ die Jordan-Zerlegung von x. So ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_{\mathrm{s}} + \operatorname{ad} x_{\mathrm{n}}$ die Jordan-Zerlegung von $\operatorname{ad} x$ und aus $(\operatorname{ad} x)(B) \subset A$ folgt mit der Funktorialität der Jordanzerlegung [LA2] 3.3.6, vergleiche auch [LA2] 3.3.11, die Inklusion $(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}})B \subset A$. In anderen Worten liegen alle Eigenräume von $(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}) : B \to B$ zu von Null verschiedenen Eigenwerten bereits in A.

Rest des Beweises im komplexen Fall. Wählen wir nun in V eine Basis aus Eigenvektoren von x_{s} und definieren $z \in \operatorname{End} V$ durch die Bedingung, daß seine Matrix in dieser Basis komplex konjugiert ist zur Matrix von x_{s}, so haben wir

$\mathrm{Eig}(\mathrm{ad}\, z; \lambda) = \mathrm{Eig}(\mathrm{ad}\, x_{\mathrm{s}}; \bar{\lambda})$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und mithin auch $(\mathrm{ad}\, z)(B) \subset A$. Aus $\mathrm{tr}(xz) = 0$ folgt dann aber sofort $x_{\mathrm{s}} = 0$. $\square$

Rest des Beweises im Allgemeinen. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von x_{s}, sagen wir $x_{\mathrm{s}} v_i = \lambda_i v_i$ für geeignete $\lambda_i \in k$. Sei $E \subset k$ der von den λ_i aufgespannte $\mathbb{Q}$-Untervektorraum. Es gilt zu zeigen $E = 0$. Sei sonst $f : E \to \mathbb{Q}$ eine nicht-verschwindende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. Wir betrachten den Endomorphismus z von V, der definiert wird durch $zv_i = f(\lambda_i) v_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Zunächst zeigen wir $z \in T$. Natürlich haben wir

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{ad}\, z)(E_{ij}) & = & (f(\lambda_i) - f(\lambda_j)) E_{ij} \\ & = & f(\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \end{array}$$

für alle i und j, also $\mathrm{Eig}(\mathrm{ad}\, z; \mu) = \bigoplus_{f(\lambda)=\mu} \mathrm{Eig}(\mathrm{ad}\, x_{\mathrm{s}}; \lambda)$ und insbesondere $(\mathrm{ad}\, z)(B) \subset A$. Nun ist offensichtlich $\mathrm{tr}(xz) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\lambda_i)$. Aus der Annahme $\mathrm{tr}(xz) = 0$ folgt mithin $f(\mathrm{tr}(xz)) = \sum_{i=0}^{n} f(\lambda_i)^2 = 0$ und damit $f(\lambda_i) = 0 \quad \forall i$ im Widerspruch zu unserer Annahme $f \neq 0$. $\square$

Beweis des Cartan'schen Auflösbarkeitskriteriums. Wir zeigen nun die schwierige Implikation aus dem Cartan'schen Auflösbarkeitskriterium 1.6.1. Es reicht zu zeigen, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Mit 1.4.1 reicht es sogar zu zeigen, daß alle Elemente $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent sind als Endomorphismen von V. Nach Lemma 1.6.5 müssen wir dazu nur zeigen, daß gilt $\mathrm{tr}(xz) = 0$ für alle $z \in \mathrm{End}\, V$ mit $[z, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Schreiben wir aber $x = \sum [c_i, d_i]$, so ist

$$\mathrm{tr}(xz) = \sum \mathrm{tr}([c_i, d_i] z) = \sum \mathrm{tr}(c_i [d_i, z]) = 0$$

nach Annahme, da ja gilt $c_i \in \mathfrak{g}$ und $[d_i, z] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ für alle i. Hier haben wir verwendet, daß für drei Endomorphismen x, y, z eines endlichdimensionalen Vektorraums stets gilt $\mathrm{tr}(xyz) = \mathrm{tr}(zxy) = \mathrm{tr}(yzx)$, also $\mathrm{tr}([x, y]z) = \mathrm{tr}(x[y, z])$. $\square$

Definition 1.6.7. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra über einem Körper k. Die **Killingform von** $\mathfrak{g}$ ist die Bilinearform $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ auf unserer Lie-Algebra, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$\kappa(x, y) := \mathrm{tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y))$$

1.6.8. Sicher ist κ symmetrisch, $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$. Weiter gilt offensichtlich $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$. Letztere Eigenschaft ist so wichtig, daß sie einen eigenen Namen hat.

Definition 1.6.9. Eine Bilinearform $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ auf einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **invariant** genau dann, wenn gilt $b([x, y], z) = b(x, [y, z]) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Ergänzung 1.6.10. Man nennt diese Eigenschaft manchmal auch die „Assoziativität“ von b. Sie hat jedoch nur oberflächlich mit Assoziativität im üblichen Sinne zu tun. Vielmehr werden wir später sehen, daß unsere Eigenschaft bedeutet, daß das Element $b \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^*$ invariant ist unter der natürlichen Operation der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf diesem Raum.

Korollar 1.6.11 (Auflösbarkeitskriterium). *Eine endlichdimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper der Charakteristik Null ist auflösbar genau dann, wenn für die Killing-Form gilt $\mathfrak{g} \perp [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ alias $\kappa(x, [y, z]) = 0\ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Das Cartan-Kriterium 1.6.1 zeigt, daß unsere Bedingung gleichbedeutend ist zur Auflösbarkeit von $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$. Die kurze exakte Sequenz $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \operatorname{ad} \mathfrak{g}$ zeigt dann, daß sie auch gleichbedeutend ist zur Auflösbarkeit von $\mathfrak{g}$. □

Übungen

Übung 1.6.12. Man zeige: Die Killingform einer endlichdimensionalen nilpotenten Liealgebra ist Null.

1.7 Reduktive und halbeinfache Lie-Algebren

1.7.1. Ich erinnere daran, daß nach 1.1.18 eine Liealgebra irreduzibel heißt, wenn sie genau zwei Ideale besitzt, nämlich sich selber und Null, und einfach, wenn sie außerdem nicht abelsch ist.

Definition 1.7.2. Eine Lie-Algebra heißt **halbeinfach**, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von endlichdimensionalen einfachen Lie-Algebren. Eine Lie-Algebra heißt **reduktiv**, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von endlichdimensionalen irreduziblen Lie-Algebren.

1.7.3 (**Diskussion der Terminologie**). In diesem Text wie im überwiegenden Teil der Literatur werden halbeinfache oder reduktive Lie-Algebren nur über Körpern der Charakteristik Null betrachtet. Wenn Sie diese Bedingung irgendwo vermissen, habe ich vermutlich nur versäumt, sie explizit dazuzuschreiben. Da wir bei einer halbeinfachen Liealgebra zusätzlich fordern, daß sie endlichdimensional sein soll, ist in unserer Terminologie nicht jede einfache Liealgebra halbeinfach. In diesem Licht ist die Terminologie unschön, aber so hat sie sich nun einmal eingebürgert.

Beispiele 1.7.4. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = 0$ ist halbeinfach. Eine von Null verschiedene abelsche Lie-Algebra ist jedoch nicht halbeinfach, sondern nur reduktiv. Erste substanzielle Beispiele liefert 2.1.14.

Definition 1.7.5. Eine Darstellung heißt wie in [NAS] 1.6.2 **halbeinfach**, wenn sie eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen ist, wenn also für besagte Darstellung V in Formeln gilt $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ mit $V_i \subset V$ einfachen Unterdarstellungen. Die Nulldarstellung $V = 0$ ist insbesondere halbeinfach als die „leere Summe“.

Ergänzung 1.7.6. Ganz genauso wie in [NAS] 1.6 für Moduln über Ringen zeigt man, daß für eine Darstellung V gleichbedeutend sind: (1) V ist halbeinfach, (2) V ist eine (nicht notwendig direkte) Summe von einfachen Unterdarstellungen, und (3) jede Unterdarstellung von V besitzt ein Komplement. Ebenso zeigt man auch, daß jede Unterdarstellung und jeder Quotient einer halbeinfachen Darstellung halbeinfach sind. All das wird der Leser im endlichdimensionalen Fall unschwer als Übung selbst zeigen können. Im allgemeinen Fall benötigt man jedoch zusätzliche Ideen und kommt nicht ohne das Zorn'sche Lemma aus.

Beispiel 1.7.7. Die Darstellung $\mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$, $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ der abelschen Lie-Algebra $\mathbb{C}$ ist nicht halbeinfach. Ganz allgemein ist für einen k-Vektorraum V und $a \in \operatorname{End}(V)$ die Darstellung $k \to \mathfrak{gl}(V)$, $1 \mapsto a$ der abelschen Lie-Algebra k halbeinfach genau dann, wenn a diagonalisierbar ist über dem algebraischen Abschluß $\bar{k}$, wenn also a halbeinfach ist im Sinne von [LA2] 3.3.3.

Ergänzung 1.7.8. Per definitionem ist eine Lie-Algebra reduktiv genau dann, wenn ihre adjungierte Darstellung halbeinfach ist im Sinne von 1.7.5 alias die Summe ihrer einfachen Unterdarstellungen. Insbesondere ist die Liealgebra einer kompakten Liegruppe stets reduktiv nach [ML] 2.4.10 und [ML] 2.2.13.

Satz 1.7.9 (Charakterisierung halbeinfacher Lie-Algebren). *Für eine endlichdimensionale Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik Null sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Lie-Algebra besitzt kein von Null verschiedenes abelsches Ideal;*
2. *Unsere Lie-Algebra besitzt kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal;*
3. *Unsere Lie-Algebra ist halbeinfach, also isomorph zu einem Produkt von einfachen Lie-Algebren;*
4. *Unsere Lie-Algebra ist die direkte Summe ihrer einfachen Ideale;*
5. *Unsere Lie-Algebra hat eine nicht ausgeartete Killingform, d.h. die Killingform induziert einen Isomorphismus unserer Lie-Algebra mit ihrem Dualraum.*

1.7.10. Gegeben eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und Unteralgebren $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ sagen wir, die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ **zerfalle in das Produkt der** $\mathfrak{g}_i$ und schreiben

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n$$

genau dann, wenn die durch die Addition gegebene Abbildung von der rechten Seite in die linke Seite ein Isomorphismus von Liealgebren ist. Gleichbedeutend dazu ist, daß alle $\mathfrak{g}_i$ Ideale von $\mathfrak{g}$ sind und unsere Abbildung von der rechten Seite in die linke Seite ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Bezeichnen etwa $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{gl}(n)$ die oberen Dreiecksmatrizen und $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{gl}(n)$ die echten unteren Dreiecksmatrizen, so hätten wir eine Zerlegung $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}$ als Vektorräume, aber das wäre keine Zerlegung in ein Produkt von Liealgebren. Wir schicken dem Beweis des Satzes eine Ergänzung zur Killingform voraus.

Lemma 1.7.11 (Restriktion der Killingform auf ein Ideal). *Die Killingform eines Ideals einer endlichdimensionalen Lie-Algebra stimmt stets überein mit der Einschränkung der Killingform der ganzen Lie-Algebra auf besagtes Ideal.*

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und $I \subset \mathfrak{g}$ unser Ideal, so behauptet dies Lemma die Formel

$$\kappa_I = \kappa_{\mathfrak{g}}|_I$$

Sind ganz allgemein $I \subset \mathfrak{g}$ Vektorräume und ist $a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine lineare Abbildung mit $a(\mathfrak{g}) \subset I$, so gilt $\operatorname{tr}(a) = \operatorname{tr}(a|_I)$ für $a|_I$ die Einschränkung $a|_I : I \to I$ von a auf I. Das Lemma ergibt sich mit $a = (\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)$ für $x, y \in I$. □

Beweis von 1.7.9. $2 \Rightarrow 5$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra. Das Radikal der Killingform $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}}$ bezeichnen wir mit

$$\operatorname{rad} \kappa = \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

Da κ invariant ist, muß $\operatorname{rad} \kappa \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal sein. Offensichtlich verschwindet κ auf $\operatorname{rad} \kappa$. Mit 1.7.11 folgt, daß die Killingform von $\operatorname{rad} \kappa$ verschwindet, nach dem Auflösbarkeitskriterium 1.6.11 ist damit $\operatorname{rad} \kappa$ auflösbar. Gibt es also kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal, so folgt $\operatorname{rad} \kappa = 0$ und die Killingform ist nicht ausgeartet.

$5 \Rightarrow 1$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra. Gegeben ein abelsches Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ gilt $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))^2 = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in I$. Folglich ist $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$ nilpotent, also $\kappa(x, y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in I$. Damit gilt $I \subset \operatorname{rad} \kappa$.

$2 \Rightarrow 4$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra ohne von Null verschiedene auflösbare Ideale. Ist $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal, so ist auch $I^\perp = \{y \in \mathfrak{g} \mid \kappa(y, I) = 0\}$ ein Ideal, da die Killingform invariant ist. Auf dem Ideal $I \cap I^\perp$ verschwindet nun die

Killingform, mithin ist dies Ideal nach dem Auflösbarkeitskriterium 1.6.11 auflösbar. Aus unserer Annahme folgt so $I \cap I^\perp = 0$ und dann erst recht $[I, I^\perp] = 0$. Mit Dimensionsbetrachtungen folgt dann sogar $I \oplus I^\perp = \mathfrak{g}$. Jedes Ideal von I bzw. $I^\perp$ ist damit ein Ideal von $\mathfrak{g}$, also besitzen auch I und $I^\perp$ keine von Null verschiedenen auflösbaren Ideale. Mit Induktion sehen wir so, daß sich $\mathfrak{g}$ schreiben läßt als $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \ldots \oplus I_r$, wobei die I_ν einfache Ideale von $\mathfrak{g}$ sind. Ist nun $I \subset \mathfrak{g}$ ein weiteres einfaches Ideal, so folgt $I = [I, \mathfrak{g}] = [I, I_1] \oplus \ldots \oplus [I, I_r]$ und damit $I = [I, I_\nu] = I_\nu$ für ein ν.

$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 1$ bieten keine Schwierigkeiten. □

Übungen

Übung 1.7.12. Gegeben eine reduktive Liealgebra sind die isotypischen Komponenten im Sinne von [NAS] 1.6.8 ihrer adjungierten Darstellung genau die einfachen Ideale sowie, als isotypische Komponente zur trivialen eindimensionalen Darstellung, das Zentrum. Jede reduktive Liealgebra zerfällt mithin in die Summe ihrer einfachen Ideale und ihres Zentrums. Des weiteren ist jedes Ideal einer reduktiven Liealgebra die direkte Summe eines Teils der einfachen Ideale mit einem Untervektorraum des Zentrums. Im endlichdimensionalen Fall können diese Aussagen auch ohne Rückgriff auf die allgemeine Theorie leicht bewiesen werden, wie in der folgenden Übung angedeutet wird.

Übung 1.7.13. Gegeben paarweise verschiedene einfache Ideale $I_1, \ldots, I_r$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ sowie ein abelsches Ideal $A \subset \mathfrak{g}$ zeige man, daß die Addition eine Injektion $I_1 \oplus \ldots \oplus I_r \oplus A \hookrightarrow \mathfrak{g}$ induziert. Des weiteren zeige man unter der zusätzlichen Annahme $I_1 \oplus \ldots \oplus I_r \oplus A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$, daß jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ die Summe eines Teils der I_ν mit einem Untervektorraum von A ist.

Übung 1.7.14. Eine endlichdimensionale Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik Null ist halbeinfach genau dann, wenn sie kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal besitzt.

Ergänzung 1.7.15. Eine endlichdimensionale Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik Null ist reduktiv genau dann, wenn jedes auflösbare Ideal bereits in ihrem Zentrum liegt. Das werden Sie als Übung 2.1.18 aus dem Satz von Weyl folgern.

Übung 1.7.16. Jedes Ideal einer halbeinfachen Lie-Algebra ist eine Summe von einfachen Idealen. Jeder Quotient einer halbeinfachen Lie-Algebra ist eine halbeinfache Lie-Algebra.

Übung 1.7.17. Jede halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ihre eigene derivierte Lie-Algebra, in Formeln $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Übung 1.7.18. Jede reduktive Lie-Algebra läßt sich auf genau eine Weise zerlegen in das Produkt einer halbeinfachen Lie-Algebra und einer abelschen Lie-Algebra, nämlich als $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times \mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z}$ dem Zentrum von $\mathfrak{g}$.

2 Komplexe halbeinfache Liealgebren

In diesem Abschnitt sind halbeinfache Liealgebren stets als endlichdimensional über einem Körper der Charakteristik Null zu verstehen. Wir notieren ihn $\mathbb{C}$ und nennen ihn den Körper der komplexen Zahlen, aber alle Argumente funktionieren genauso im allgemeinen.

2.1 Der Satz von Weyl

2.1.1. Für zwei Darstellungen V, W einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Hom}^{\mathfrak{g}}(V, W) = \operatorname{Mod}^{\mathfrak{g}}(V, W)$ den Raum aller Homomorphismen von Darstellungen und mit $\operatorname{End}^{\mathfrak{g}}(V) = \operatorname{Hom}^{\mathfrak{g}}(V, V)$ den Raum aller Endomorphismen der Darstellung V.

Lemma 2.1.2 (Lemma von Schur). *Die einzigen Endomorphismen einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung einer komplexen Liealgebra sind die Multiplikationen mit Skalaren. Ist $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und L unsere einfache endlichdimensionale Darstellung, so gilt demnach in Formeln*

$$\operatorname{End}^{\mathfrak{g}} L = \mathbb{C} \operatorname{id}_L$$

Ergänzung 2.1.3. Das Lemma gilt mit demselben Beweis über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper.

Beweis. Sei $\varphi \in \operatorname{End} L$ ein Endomorphismus des Vektorraums L. Da eine einfache Darstellung per definitionem nicht Null ist, hat φ mindestens einen Eigenwert λ. Aus $\varphi \in \operatorname{End}^{\mathfrak{g}} L$ folgt zusätzlich, daß der zugehörige Eigenraum L_λ eine Unterdarstellung von L ist. Falls L einfach ist, folgt sofort $L_\lambda = L$ und damit erhalten wir dann wie gewünscht $\varphi = \lambda \operatorname{id}$. □

Ergänzung 2.1.4. Die Folgerung des Lemmas gilt auch, wenn wir statt $\dim L < \infty$ voraussetzen, daß L abzählbare Dimension hat. Um das zu sehen beachte man, daß dann $E = \operatorname{End}^{\mathfrak{g}} L$ ein Schiefkörper abzählbarer Dimension über $\mathbb{C}$ ist. Der einzige derartige Schiefkörper ist aber $\mathbb{C}$ selber, denn gäbe es $\varphi \in E \backslash \mathbb{C}$, so könnte φ nicht algebraisch sein über $\mathbb{C}$, also hätten wir eine Einbettung $\mathbb{C}(X) \hookrightarrow E$, $X \mapsto \varphi$ des Körpers der gebrochen rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$ nach E. Da aber $\mathbb{C}(X)$ überabzählbare Dimension hat über $\mathbb{C}$, die $(X - \lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ sind nämlich linear unabhängig über $\mathbb{C}$, kann das nicht sein. Die Folgerung des Lemmas gilt des weiteren auch, wenn wir unsere Liealgebra endlichdimensional annehmen und mit Koeffizienten in einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper arbeiten, vergleiche 2.7.1.

2.1.5. Das Lemma gilt nicht, wenn wir $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzen. Ein Gegenbeispiel ist die einfache Darstellung von $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ im reellen Vektorraum $L = \mathbb{C}$, bei der $\lambda \in \mathfrak{g}$

auf L operiert als die Multiplikation mit $\lambda\,\mathrm{i}$. Wir haben nämlich in diesem Fall $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}} L = \mathbb{C}\,\mathrm{id} \neq \mathbb{R}\,\mathrm{id}$.

Satz 2.1.6 (von Weyl). *Jede endlichdimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Liealgebra ist halbeinfach.*

2.1.7. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird erst zu Ende dieses Abschnitts gegeben. Der Spezialfall $\mathfrak{sl}(2;k)$ wurde bereits in [ML] 2.3.16 sozusagen „zu Fuß“ behandelt. Wir zeigen die Aussage allgemeiner über jedem Grundkörper der Charakteristik Null. Die Liealgebra darf als halbeinfach angenommen werden, da wir sie ja ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch ihr Bild im Endomorphismenring der fraglichen Darstellung ersetzen dürfen.

2.1.8 (**Verallgemeinerte Casimir-Operatoren**). Seien $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra und $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ eine nichtausgeartete invariante Bilinearform. Für jede Darstellung V von $\mathfrak{g}$ definieren wir dann eine lineare Abbildung

$$C_b = C_b^V : V \to V$$

wie folgt: Wir wählen eine Basis $x_1, \ldots, x_{\mathrm{n}}$ von $\mathfrak{g}$, bezeichnen mit $x^1, \ldots, x^n$ die bezüglich b duale Basis, charakterisiert durch $b(x_i, x^j) = \delta_{ij}$, und setzen

$$C_b(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i x^i v$$

Die Abbildung C_b hängt nicht von der Wahl der Basis unserer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ab, aber das wird im Folgenden nicht verwendet und der Beweis bleibt dem Leser überlassen.

Lemma 2.1.9. *Die Abbildung C_b vertauscht mit der Operation von $\mathfrak{g}$, in Formeln gilt also $C_b \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V$.*

Beweis. Das kann man in Koordinaten nachrechnen wie folgt: Entwickeln wir für $y \in \mathfrak{g}$ die Kommutatoren mit Elementen unserer Basen in der Form $[x_i, y] = \sum a_{ij} x_j$ und $[y, x^j] = \sum b_{ji} x^i$, so folgt aus der Invarianz unserer Bilinearform $b([x_i, y], x^j) = b(x_i, [y, x^j])$ sofort $a_{ij} = b_{ji}$ und damit

$$\begin{array}{rcl} yC_b(v) - C_b(yv) & = & \sum [y, x_i] x^i v + \sum x_i [y, x^i] v \\ & = & \sum -a_{ij} x_j x^i v + \sum b_{ij} x_i x^j v \\ & = & 0 \end{array}$$ □

Koordinatenfreier Beweis zum Casimir-Operator. Wir können den Casimir-Operator C_b zu einer invarianten nicht ausgearteten Bilinearform b auf unserer Liealgebra auch schreiben als die Verknüpfung von Homomorphismen von Darstellungen

$$V \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \otimes V \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes V \to V$$

wo die einzelnen Abbildungen wie folgt erklärt sind: Die erste Abbildung wird induziert von $k \to \mathrm{End}_k(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$, $1 \mapsto \mathrm{id} \mapsto \sum x_i \otimes x_i^*$, falls $x_1^*, \ldots, x_n^*$ die duale Basis ist zu einer Basis $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathfrak{g}$. Die zweite Abbildung wird induziert von der inversen Abbildung zu $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, $y \mapsto b(\ ,y)$, $x^i \mapsto x_i^*$. Da unsere Bilinearform invariant ist, muß diese Abbildung auch ein Homomorphismus von Darstellungen sein. Die dritte Abbildung entsteht durch zweimaliges Anwenden der Operation $\mathfrak{g} \otimes V \to V$, $x \otimes v \mapsto xv$. Als Verknüpfung von Homomorphismen von Darstellungen muß dann auch C_b ein Homomorphismus von Darstellungen sein. □

Lemma 2.1.10. 1. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra, so ist $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy)$ eine nichtausgeartete invariante symmetrische Bilinearform $b = b_V$ auf $\mathfrak{g}$;*

2. *Für die zugehörige Abbildung $C = C_b^V$ gilt $\mathrm{tr}\, C = \dim \mathfrak{g}$.*

Beweis. Sicher ist unsere Bilinarform symmetrisch und invariant, insbesondere ist ihr Radikal ein Ideal. Nach dem Cartan-Kriterium 1.6.1 ist ihr Radikal sogar ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$, also Null. Teil 2 folgt sofort aus den Definitionen. □

Lemma 2.1.11. *Für jede endlichdimensionale Darstellung V einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ gilt $V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V$.*

2.1.12. Mit $\mathfrak{g}V$ meinen wir hier den von allen Xv mit $X \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ erzeugten Teilraum.

Ergänzung 2.1.13. Dies Lemma gilt allgemeiner über jedem Grundkörper der Charakteristik Null: Durch Erweiterung der Skalare kann man sich leicht in den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers retten, in dem dann wieder der hier gegebene Beweis funktioniert.

Beweis. Durch Induktion über $\dim V$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V \neq V^{\mathfrak{g}}$. Betrachten wir den zu unserer Darstellung gehörigen Liealgebren-Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, so ist also $\rho(\mathfrak{g}) \neq 0$. Wir betrachten nun die zur halbeinfachen Unteralgebra $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ gehörige Abbildung $C : V \to V$ wie in Lemma 2.1.10. Natürlich zerfällt V in eine direkte Summe von Haupträumen unter C, und wegen $C \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V$ sind alle Haupträume von C Unterdarstellungen. Hätte C mehr als einen Eigenwert auf V, so könnten wir V als direkte Summe von zwei Unterdarstellungen echt kleinerer Dimension schreiben und wären fertig mit Induktion. Wir dürfen also annehmen, daß C nur einen Eigenwert hat, und da gilt $\mathrm{tr}(C) = \dim \rho(\mathfrak{g}) \neq 0$ nach Lemma 2.1.10, kann dieser Eigenwert nicht Null sein. Also gilt $V = CV$ und $V^{\mathfrak{g}} = 0$ und a forteriori $V = \mathfrak{g}V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V$. □

Beweis des Satzes von Weyl 2.1.6. Es gilt zu zeigen: Jede endlichdimensionale Darstellung V einer halbeinfachen Liealgebra ist halbeinfach. Ist $U \subset V$ eine Unterdarstellung, so liefert die Restriktion von Abbildungen eine Surjektion $\operatorname{Hom}(V, U) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(U, U)$ von Darstellungen. Nach Lemma 2.1.11 induziert diese Surjektion eine Surjektion auf den invarianten Vektoren $\operatorname{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(U, U)^{\mathfrak{g}}$. Für jedes Urbild $f \in \operatorname{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}}$ von $\mathrm{id}_U \in \operatorname{Hom}(U, U)^{\mathfrak{g}}$ gilt dann $V = U \oplus \ker f$. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis. □

Satz 2.1.14 (Kriterium für Halbeinfachkeit). *1. Besitzt eine komplexe Liealgebra eine treue einfache endlichdimensionale Darstellung, so ist unsere Liealgebra reduktiv und ihr Zentrum ist höchstens eindimensional;*

2. Operiert außerdem unsere Liealgebra auf besagter Darstellung nur durch Endomorphismen der Spur Null, so ist unsere Liealgebra halbeinfach.

2.1.15. Insbesondere ist $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ reduktiv und $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ halbeinfach. Wollen wir nur den zweiten Teil des Satzes zeigen, so können wir im Beweis sogar I abelsch annehmen und so ohne den Satz von Lie auskommen. Der Satz gilt mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null.

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung reduktiver Liealgebren aus Übung 2.1.18 und müssen also zeigen, daß jedes auflösbare Ideal bereits im Zentrum liegt. Sei dazu $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und $I \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal und V unsere einfache treue Darstellung. Nach dem Satz von Lie 1.5.2 gibt es $v \in V$, $v \neq 0$ mit $Iv \subset \mathbb{C}v$. Natürlich finden wir $\lambda \in I^*$ mit $Xv = \lambda(X)v \quad \forall X \in I$. Nach 1.5.4 ist dann V_λ eine Unterdarstellung von V, und da sie nicht null ist, folgt $V = V_\lambda$. Das Bild eines auflösbaren Ideals $I \subset \mathfrak{g}$ unter einer einfachen Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$ in einem endlichdimensionalen Raum V liegt also stets in der Menge aller Vielfachen der Einheitsmatrix. Ist unsere Darstellung auch noch treu, so folgt $\dim I \leq 1$ und $[I, \mathfrak{g}] = 0$ und im Fall $\operatorname{tr}(\rho(I)|V) = 0$ sogar $I = 0$. □

Übungen

Übung 2.1.16. Für V eine Darstellung einer halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ versteht man unter „dem" **Casimir-Operator**. meist unser $C_\kappa : V \to V$ aus 2.1.8 für κ die Killingform. Man zeige als Übung, daß der Casimir-Operator der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ in einer Basis e, h, f wie in 1.1.34 gegeben wird durch den Ausdruck $(ef+fe)/4+h^2/8 = fe/2+h(h+2)/8$. Auf der $(n+1)$-dimensionalen einfachen Darstellung operiert er durch den Skalar $n(n+2)/8$, wie man auf den extremen Gewichtsräumen leicht nachrechnet.

Übung 2.1.17. Der Casimir-Operator einer endlichdimensionalen halbeinfachen Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null operiert als die Identität auf der adjungierten Darstellung.

Übung 2.1.18. Eine endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null ist reduktiv genau dann, wenn jedes auflösbare Ideal bereits in ihrem Zentrum liegt. Hinweis: 1.7.14.

2.2 Jordan-Zerlegung in halbeinfachen Liealgebren

2.2.1. In diesem Abschnitt wird die Jordan-Zerlegung in halbeinfachen Liealgebren eingeführt. Gilt es Verwechslungen zu vermeiden, so nennen wir sie die „absolute Jordan-Zerlegung“ im Gegensatz zur „konkreten Jordan-Zerlegung“ von Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume, wie wir sie in [LA2] 3.3.1 betrachtet hatten. Im folgenden bezeichnet $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ stets diese konkrete Jordan-Zerlegung von $x \in \operatorname{End} V$.

Satz 2.2.2 (Jordan-Zerlegung in halbeinfachen Liealgebren). *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra.*

1. *Jedes $x \in \mathfrak{g}$ besitzt genau eine Zerlegung $x = s + n$ mit $\operatorname{ad}(s)$ diagonalisierbar, $\operatorname{ad}(n)$ nilpotent und $[s, n] = 0$. Diese Zerlegung nennen wir im folgenden die* **absolute Jordan-Zerlegung von x in $\mathfrak{g}$***;*

2. *Ist $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung und $x = s + n$ die absolute Jordan-Zerlegung von x in $\mathfrak{g}$, so ist $\rho(x) = \rho(s)+\rho(n)$ die konkrete Jordan-Zerlegung von $\rho(x)$ in $\operatorname{End} V$. In Formeln gilt also $\rho(s) = \rho(x)_{\mathrm{s}}$ und $\rho(n) = \rho(x)_{\mathrm{n}}$;*

3. *Ist $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in eine weitere halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}'$ und $x = s + n$ die absolute Jordan-Zerlegung von x in $\mathfrak{g}$, so ist $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ die absolute Jordan-Zerlegung von $\phi(x)$ in $\mathfrak{g}'$.*

2.2.3. Teil 2 des vorhergehenden Satzes besagt, daß die absolute und die konkrete Jordan-Zerlegung in allen Zweifelsfällen übereinstimmen. Sobald der Satz bewiesen ist, dürfen wir es uns also erlauben, ohne weitere Spezifizierung einfach von der **Jordan-Zerlegung** zu reden. Im folgenden Beweis sind die Begriffe „halbeinfach“ und „nilpotent“ und „halbeinfacher Anteil“ und „nilpotenter Anteil“ stets im konkreten Sinne zu verstehen, also im Sinne von Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume. Ihre auf Elemente abstrakter Liealgebren übertragene Bedeutung wird erst im Anschluß eingeführt. Dem eigentlichen Beweis des Satzes schicken wir zwei Lemmata voraus.

Lemma 2.2.4. *Jedes halbeinfache Ideal einer endlichdimensionalen komplexen Liealgebra besitzt ein Vektorraumkomplement, das auch ein Ideal ist.*

2.2.5. Unter einem halbeinfachen Ideal einer Liealgebra verstehen wir hierbei ein Ideal, das als Liealgebra halbeinfach ist.

Beweis. Sei D unsere Liealgebra und $\mathfrak{g} \subset D$ unser halbeinfaches Ideal. Wir betrachten bezüglich der Killing-Form κ von D das orthogonale Komplement I von $\mathfrak{g}$, d.h. den Kern der Abbildung $D \to \mathfrak{g}^*, x \mapsto \kappa(x,\ )$. So ist $I \subset D$ ein Ideal und die Killing-Form von D verschwindet identisch auf $\mathfrak{g} \cap I$. Da $\mathfrak{g} \cap I$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist, muß es nach 1.7.16 halbeinfach sein und mit 1.7.9 folgt $\mathfrak{g} \cap I = 0$. Dann erhalten wir jedoch mit Dimensionsbetrachtungen sofort $D = \mathfrak{g} \oplus I$. $\square$

Lemma 2.2.6. *Seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra. Ist $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ die konkrete Jordan-Zerlegung eines Elements $x \in \mathfrak{g}$, so haben wir $x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}} \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Wir betrachten in $\mathfrak{gl}(V)$ den Teilraum $D = \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{Es gilt } [y, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ und für jede $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung $W \subset V$ haben wir $yW \subset W$ sowie $\operatorname{tr}(y|_W) = 0\}$. Nach Lemma 1.6.4 über die Jordan-Zerlegung von $\operatorname{ad} x$ und der Funktorialität der Jordanzerlegung [LA2] 3.3.7 folgt aus $y \in D$ schon $y_{\mathrm{s}}, y_{\mathrm{n}} \in D$. Es reicht also, $D = \mathfrak{g}$ zu zeigen. Offensichtlich ist D eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Wegen $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und da die Spur eines Kommutators stets verschwindet gilt $\mathfrak{g} \subset D$, und wegen der ersten Bedingung an Elemente von D ist $\mathfrak{g} \subset D$ sogar ein Ideal. Nach 2.2.4 finden wir dann ein Ideal $I \subset D$ mit $D = \mathfrak{g} \oplus I$ und insbesondere $[\mathfrak{g}, I] = 0$. Also operiert $y \in I$ auf jeder $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung $W \subset V$ durch einen $\mathfrak{g}$-Endomorphismus. Für W einfach ist also $y|_W$ ein Skalar, und mit $\operatorname{tr}(y|_W) = 0$ folgt $y|_W = 0$. Da V nach dem Satz von Weyl 2.1.6 direkte Summe einfacher $\mathfrak{g}$-Unterdarstellungen ist, folgt weiter $y = 0$, mithin $I = 0$ und $D = \mathfrak{g}$. $\square$

Beweis von 2.2.2. 1. Man betrachte die konkrete Jordan-Zerlegung $\operatorname{ad} x = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{s}} + (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{n}}$ von $\operatorname{ad} x$ in $\operatorname{End} \mathfrak{g}$. Nach Lemma 2.2.6 angewandt auf $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ gibt es $s, n \in \mathfrak{g}$ mit $\operatorname{ad} s = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{s}}$, $\operatorname{ad} n = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{n}}$. Das liefert die Existenz einer absoluten Jordan-Zerlegung $x = s + n$. Ist andererseits $x = s + n$ eine absolute Jordan-Zerlegung von x in $\mathfrak{g}$, so ist notwendig $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} s + \operatorname{ad} n$ die konkrete Jordan-Zerlegung von $\operatorname{ad} x$ in $\operatorname{End} \mathfrak{g}$. Das zeigt die Eindeutigkeit.

2. Sei $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung. Sicher kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x"] & \rho(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\operatorname{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} \rho(x)"] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}} \rho(x)"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, two heads] & \rho(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & \mathfrak{gl}(V) \end{tikzcd}$$

mit der Abkürzung $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}}$. Nach der Funktorialität der konkreten Jordan-Zerlegung [LA2] 3.3.6 bleibt dies Diagramm kommutativ, wenn wir von allen Vertikalen den halbeinfachen Anteil nehmen im Sinne der konkreten Jordan-Zerlegung. Ebenso bleibt es natürlich kommutativ, wenn wir überall statt x unser s aus seiner absoluten Jordan-Zerlegung $x = s + n$ einsetzen. Die beiden so entstehenden Diagramme haben per definitionem dieselbe linke Vertikale $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x)_{\mathrm{s}} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, s$ und damit auch dieselbe mittlere Vertikale. Das liefert die erste Gleichung einer Gleichungskette

$$\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\, \rho(s) = (\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\, \rho(x))_{\mathrm{s}} = \mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x)_{\mathrm{s}})$$

Deren zweite Gleichung folgt daraus, daß ja der halbeinfache Anteil der rechten Vertikale unseres Diagramms nach unseren allgemeinen Überlegungen in 1.6.4 gegeben wird durch $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}}\, \rho(x))_{\mathrm{s}} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}}(\rho(x)_{\mathrm{s}})$, woraus ja durch Einschränkung unter unserer zweiten horizontalen Injektion folgt $(\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\, \rho(x))_{\mathrm{s}} = \mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x)_{\mathrm{s}})$. Da schließlich $\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} : \rho(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\rho(\mathfrak{g}))$ eine Injektion ist, folgt aus unserer Gleichungskette dann wie gewünscht $\rho(s) = \rho(x)_{\mathrm{s}}$.

3. Sei $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von halbeinfachen Liealgebren und sei $x \in \mathfrak{g}$ gegeben mit Jordan-Zerlegung $x = s + n$. Betrachten wir die adjungierte Darstellung $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$ von $\mathfrak{g}'$, so folgt aus 2 angewandt auf $\rho = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} \circ \phi$ schon $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}\, \phi(s)$ halbeinfach sowie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}\, \phi(n)$ nilpotent. Die anderen Bedingungen $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ und $[\phi(s), \phi(n)] = 0$ für die Jordan-Zerlegung sind aber offensichtlich ebenfalls erfüllt. □

Definition 2.2.7. Ein Element x einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **ad-halbeinfach** beziehungsweise **ad-nilpotent** genau dann, wenn $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{End}\, \mathfrak{g}$ halbeinfach beziehungsweise nilpotent ist. Bei halbeinfachen Liealgebren nennen wir diese Elemente auch oft kürzer nur **halbeinfach** beziehungsweise **nilpotent**. Bei der Jordan-Zerlegung $x = s + n$ nennt man s beziehungsweise n den **halbeinfachen Anteil** beziehungsweise den **nilpotenten Anteil** von x.

2.2.8. Wie man schon im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ sieht, sind „die meisten“ Elemente einer halbeinfachen Liealgebra halbeinfach. Die nilpotenten Elemente ihrerseits bilden eine abgeschlossene Teilmenge hoher Kodimension, den sogenannten **nilpotenten Kegel**. Wir werden die äußerst interessante Geometrie des nilpotenten Kegels später noch ausführlich studieren.

Vorschau 2.2.9. An der Geometrie der adjungierten Bahnen im nilpotenten Kegel wird noch geforscht.

Übungen

Übung 2.2.10. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra. Gegeben kommutierende Elemente $x, y \in \mathfrak{g}$ mit $[x, y] = 0$ gilt $(x + y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} + y_{\mathrm{s}}$ und $(x + y)_{\mathrm{n}} =$

$x_{\mathrm{n}} + y_{\mathrm{n}}$.

Übung 2.2.11. Man zeige, daß jede halbeinfache komplexe Liealgebra auch reguläre halbeinfache Elemente besitzt. Hinweis: 1.1.33. Leser mit Grundkenntnissen in algebraischer Geometrie zeigen das allgemeiner über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null.

2.3 Wurzelraumzerlegung

2.3.1. Ich erinnere die simultane Eigenraumzerlegung aus [LA2] 7.7.10. Sei V ein Vektorraum und $T \subset \operatorname{End} V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum seines Endomorphismenraums, der aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Abbildungen besteht. So besitzt V unter T eine „simultane Eigenraumzerlegung“

$$V = \bigoplus_{\lambda \in T^*} V_\lambda$$

in die „simultanen Eigenräume“ $V_\lambda := \{v \in V \mid xv = \lambda(x)v \ \forall x \in T\}$. Diese Aussage gilt offensichtlich analog, wenn wir allgemeiner eine lineare Abbildung $T \to \operatorname{End} V$ betrachten, deren Bild die entsprechenden Eigenschaften hat. Die Menge $\mathrm{P}(V) := \{\lambda \in T^* \mid V_\lambda \neq 0\}$ heißt dann die Menge der **Gewichte** (französisch **poids**) **von** V und V_λ heißt der **Gewichtsraum zu** λ.

Beispiel 2.3.2. Wir betrachten in der Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n;k)$ die Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ aller Diagonalmatrizen. So ist das Bild von $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{h} \to \operatorname{End} \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Endomorphismen von $\mathfrak{g}$ und simultane Diagonalisierbarkeit 2.3.1 liefert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda \quad \text{mit } \mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \lambda(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

Für $h = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n)$ in $\mathfrak{h}$ und E_{ij} die Standardmatrix mit einer 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und Nullen sonst haben wir offensichtlich $[h, E_{ij}] = (h_i - h_j)E_{ij}$. Erklären wir also $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ als diejenige Linearform, die einer Diagonalmatrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so ergibt sich

$$[h, E_{ij}] = \big((\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h)\big) E_{ij}$$

und damit $\mathrm{P}(\mathfrak{g}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ als Menge von Gewichten. Wir haben also $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und unter der Annahme $\operatorname{char} k \neq 2$ sind die anderen Gewichtsräume die Geraden kE_{ij} mit $i \neq j$. In Charakteristik zwei sind dahingegen die anderen Gewichtsräume die zweidimensionalen Unterräume mit Basis E_{ij}, E_{ji} für $i < j$.

Definition 2.3.3. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt eine **Cartan'sche Unteralgebra** genau dann, wenn $\mathfrak{h}$ abelsch ist und nur aus halbeinfachen Elementen von $\mathfrak{g}$ besteht und maximal ist bezüglich Inklusion unter allen Unteralgebren von $\mathfrak{g}$, die diese beiden Eigenschaften haben.

Beispiel 2.3.4. In der Liealgebra $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ bilden die Diagonalmatrizen eine Cartan'sche Unteralgebra.

Ergänzung 2.3.5. Im Fall einer halbeinfachen komplexen Liealgebra ist eine Cartan'sche Unteralgebra eine „algebraische Version" des Begriffs eines maximalen Torus im Fall einer algebraischen Gruppe, vergleiche 2.6.7, oder einer kompakten Liegruppe, vergleiche [ML] 5.1.10.

Ergänzung 2.3.6. Im allgemeinen versteht man unter einer Cartan'schen Unteralgebra einer beliebigen endlichdimensionalen Liealgebra eine nilpotente Unteralgebra, die ihr eigener „Normalisator" ist. Mehr dazu wird in 2.5 diskutiert.

Ergänzung 2.3.7. Eine Liealgebra, die nur aus ad-halbeinfachen Elementen besteht, ist stets abelsch: Sonst gäbe es nämlich x mit $\mathrm{ad}\, x \neq 0$, also gäbe es $y \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, x)(y) = \lambda y$, es folgte $(\mathrm{ad}\, y)(x) \neq 0$ aber $(\mathrm{ad}\, y)^2(x) = 0$, und dann könnte y nicht ad-halbeinfach sein.

Definition 2.3.8 (Wurzelraumzerlegung). Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra. Wir benutzen die in unserer Theorie übliche Notation $\lambda(h) = \langle \lambda, h \rangle$ für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $h \in \mathfrak{h}$. Nach 2.3.1 gilt $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda$ mit $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \lambda, h \rangle x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Wir setzen

$$R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0 \text{ und } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\} = \mathrm{P}(\mathfrak{g}) \backslash 0$$

und haben also eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

Die endliche Teilmenge $R \subset \mathfrak{h}^*$ heißt das **Wurzelsystem** (französisch **système de racines**, englisch **root system**) von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$, seine Elemente heißen die **Wurzeln**, und die simultanen Eigenräume $\mathfrak{g}_\alpha$ heißen die **Wurzelräume**.

2.3.9. Insbesondere ist hier $\mathfrak{g}_0$ genau der Zentralisator $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0 \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$ unserer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$.

Ergänzung 2.3.10. Die Terminologie rührt daher, daß die Eigenwerte eines Endomorphismus die Wurzeln seines charakteristischen Polynoms sind.

Beispiel 2.3.11 (**Das Wurzelsystem im Typ A_n**). Ist $\mathfrak{g}$ die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Unteralgebra aller Diagonalmatrizen mit Spur Null und bezeichnet weiter $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Linearform, die einer Diagonalmatrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so haben wir $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$ und $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}E_{ij}$ für $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Man beachte jedoch, daß die $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ nicht linear unabhängig sind in $\mathfrak{h}^*$, denn die Cartan'sche $\mathfrak{h}$ besteht ja nur aus Diagonalmatrizen mit Spur Null und hat mithin die Dimension $\dim \mathfrak{h} = n - 1$.

Satz 2.3.12 (über die Wurzelraumzerlegung). *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ verwenden wir wie zuvor für den zugehörigen Gewichtsraum die Notation $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \lambda, h \rangle x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$. So gilt:*

1. *Unsere Cartan'sche ist ihr eigener Zentralisator, in Formeln $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$;*
2. *Alle Wurzelräume sind eindimensional und es gibt sogar für jede Wurzel $\alpha \in R$ einen injektiven Homomorphismus $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ von Liealgebren mit*
$$\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{-\alpha} \text{ und } \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h};$$
3. *Das Negative einer Wurzel ist stets eine Wurzel, aber kein anderes Vielfaches einer Wurzel ist wieder eine Wurzel. In Formeln gilt für jede Wurzel $\alpha \in R$ demnach $\mathbb{C}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$;*
4. *Für je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

2.3.13. Wir zeigen die verschiedenen Teile dieses Satzes der Reihe nach, unterbrochen durch einige Lemmata. Teil 4 wird im Beweis von 2.3.17 mit erledigt.

Lemma 2.3.14.
1. *Es gilt $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$;*
2. *Für die die Killing-Form κ von $\mathfrak{g}$ gilt $\kappa(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = 0$ falls $\lambda \neq -\mu$;*
3. *Die Einschränkung der Killingform κ auf $\mathfrak{g}_0$ ist nicht ausgeartet.*

Beweis. Aus $[h, x] = \lambda(h)x$ und $[h, y] = \mu(h)y$ folgt mit der Jacobi-Identität $[h, [x, y]] = (\lambda(h) + \mu(h))[x, y]$. Das zeigt Teil 1. Aus $x \in \mathfrak{g}_\lambda$, $y \in \mathfrak{g}_\mu$ folgt für jedes $\nu \in \mathfrak{h}^*$ nach dem ersten Teil $((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y))(\mathfrak{g}_\nu) \subset \mathfrak{g}_{\nu+\lambda+\mu}$. Falls $\lambda + \mu \neq 0$ ist also $((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y))$ nilpotent und es folgt $\mathrm{tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)) = \kappa(x, y) = 0$ und damit Teil 2. Für $z \in \mathfrak{g}_0$ gilt schließlich schon mal $\kappa(z, \mathfrak{g}_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in R$ nach Teil 2. Gilt auch noch $\kappa(z, \mathfrak{g}_0) = 0$, so folgt $\kappa(z, \mathfrak{g}) = 0$ und damit $z = 0$ nach 1.7.9. $\square$

Beweis von 2.3.12.1. Sei $x \in \mathfrak{g}_0$ und sei $x = s + n$ seine Jordan-Zerlegung in $\mathfrak{g}$. Da nach der Funktorialität der Jordan-Zerlegung [LA2] 3.3.6 auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} s = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)_{\mathrm{s}}$ und $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} n = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)_{\mathrm{n}}$ auf $\mathfrak{h}$ verschwinden, enthält $\mathfrak{g}_0$ mit x auch die halbeinfachen und nilpotenten Anteile s und n von x. Aufgrund der Maximalität von $\mathfrak{h}$ und da die Summe zweier kommutierender halbeinfacher Elemente auch selbst wieder halbeinfach ist, liegt der halbeinfache Anteil s jedes Elements x aus dem Zentralisator $\mathfrak{g}_0$ von $\mathfrak{h}$ sogar schon selbst in $\mathfrak{h}$. Damit ist $\mathfrak{g}_0$ nilpotent, denn für jedes $x \in \mathfrak{g}_0$ ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} n : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ nilpotent auf $\mathfrak{g}_0$ und wir können den Satz von Engel 1.4.17 auf die Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ anwenden. Mit dem Satz von Lie oder genauer seinem Korollar 1.5.6 folgt, daß in einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ alle $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ für $x \in \mathfrak{g}_0$ durch obere Dreiecksmatrizen gegeben werden. Ist nun $z \in \mathfrak{g}_0$ gegeben mit $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} z$ nilpotent, so muß $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} z$ in dieser Basis sogar eine echte obere Dreiecksmatrix sein. Es folgt $\kappa(z, \mathfrak{g}_0) = 0$ und damit $z = 0$ nach Lemma 2.3.14. Also besteht $\mathfrak{g}_0$ aus $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-halbeinfachen Elementen, und wir wissen ja bereits seit dem Anfang des Beweises, daß alle $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-halbeinfachen Elemente von $\mathfrak{g}_0$ bereits in $\mathfrak{h}$ liegen. □

Lemma 2.3.15. *Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ und α verschwindet nicht auf der Gerade $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$.*

Beweis. Seien $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $h \in \mathfrak{h}$. So gilt

$$\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \alpha(h)\kappa(x, y)$$

oder anders ausgedrückt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]^\perp \supset \ker \alpha$, wo das orthogonale Komplement bezüglich der Restriktion der Killing-Form auf $\mathfrak{h}$ zu verstehen ist. Da diese Restriktion nach 2.3.14 nicht ausgeartet ist, folgt $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \leq 1$. Können wir zusätzlich zeigen, daß es $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ gibt mit $\alpha([x, y]) \neq 0$, so sind wir fertig. Andernfalls aber würden x, y und $[x, y]$ stets eine nilpotente, mithin auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ aufspannen. In einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ würden nach dem Satz von Lie 1.5.6 also $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ und $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} y$, durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt, ja sogar durch echte obere Dreiecksmatrizen, da sie nilpotent sind. Es folgte $\kappa(x, y) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ im Widerspruch zu 2.3.14. □

Definition 2.3.16. Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Wir definieren für jede Wurzel $\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die **Kowurzel**

$$\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$$

durch die Bedingungen $\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.

Beweis von 2.3.12.2&3. Aus der Definition folgt sofort $(-\alpha)^\vee = -\alpha^\vee$. Natürlich finden wir stets $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x, y] = \alpha^\vee$, und dann gilt $[\alpha^\vee, x] = 2x$ und

$[\alpha^\vee, y] = -2y$, da ja ganz allgemein gilt $[h, x] = \alpha(h)x$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ und ähnlich für y. Somit spannen $x, \alpha^\vee, y$ eine zu $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ isomorphe Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha$ von $\mathfrak{g}$ auf, ja es gibt einen Isomorphismus von Liealgebren $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\alpha$ mit

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x, \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto y \quad \text{und } \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \alpha^\vee.$$

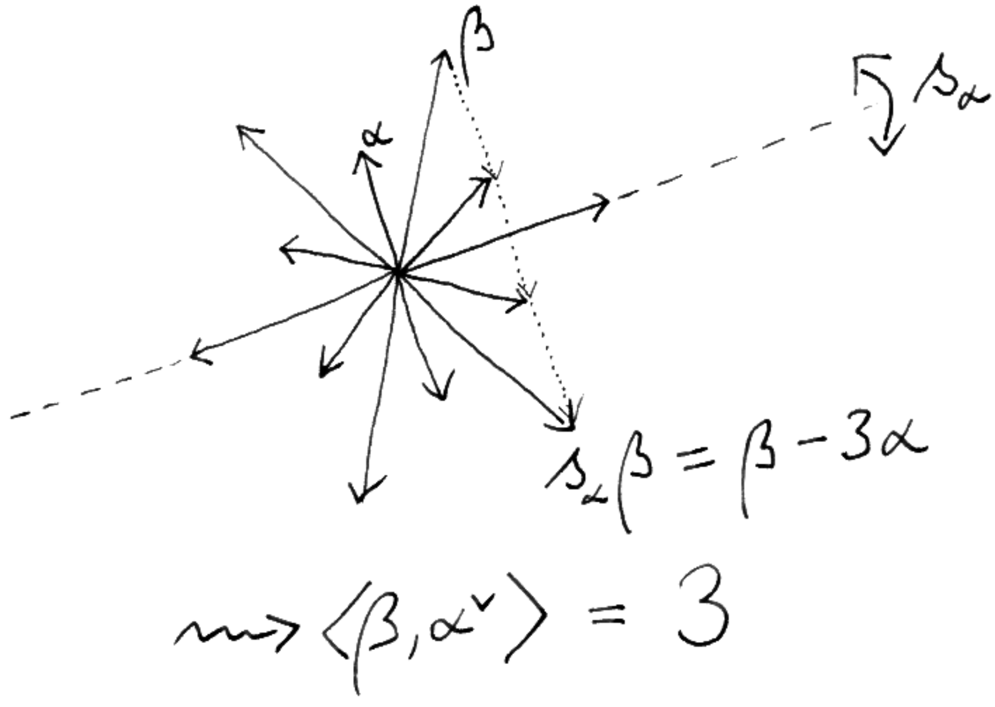
Vermittels $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}$ wird $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}^\alpha$. Nach der Definition von $\alpha^\vee$ ist $\mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \bigoplus_{t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$ darin eine Unterdarstellung, und diese zerfällt nach dem Satz von Weyl 2.1.6 in $\mathfrak{g}^\alpha$ und ein Komplement V. Da $\alpha^\vee$ auf $V \subset \bigoplus_{t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$ durch eine invertierbare Abbildung operiert, da in anderen Worten der Null-Eigenraum von $\alpha^\vee$ in V verschwindet, folgt mit unserem Satz 1.2.13 über einfache Darstellungen der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ aus $V \neq 0$ schon, daß der Eins-Eigenraum von $\alpha^\vee$ nicht verschwindet, in Formeln $\mathfrak{g}_{\alpha/2} \neq 0$ alias $\alpha/2 \in R$. Für alle Wurzeln α mit der Eigenschaft $\alpha/2 \notin R$ gelten also 2 und 3, und damit gelten sie notwendig für alle Wurzeln. □

Satz 2.3.17 (Eigenschaften des Wurzelsystems). *Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra und $R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem. Für jede Wurzel α bezeichne $\alpha^\vee$ die zugehörige Kowurzel.*

1. *Für alle $\alpha, \beta \in R$ gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$;*
2. *Die Menge R aller Wurzeln spannt $\mathfrak{h}^*$ auf.*

2.3.18. Die Abbildung $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ mit $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$, die in Teil 1 implizit vorkommt, hält die Hyperebene der auf $\alpha^\vee$ verschwindenden Linearformen punktweise fest und bildet α auf $-\alpha$ an. Ganz allgemein heißt ein selbstinverser Endomorphimus eines Vektorraums, dessen Fixpunktmenge eine Hyperebene ist, im Fall eines Grundkörpers einer von Zwei verschiedenen Charakteristik eine **Spiegelung**. Die Fixpunktmenge heißt dann die **Spiegelhyperebene** oder auch kurz und nicht ganz korrekt **Spiegelebene**. Unsere Spiegelung s_α heißt die **Wurzelspiegelung zur Wurzel** α.

Beweis. 1. Wir betrachten für jede von α linear unabhängige Wurzel $\beta \neq \pm\alpha$ den Teilraum $T := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + i\alpha}$ von $\mathfrak{g}$. Er ist eine $\mathfrak{g}^\alpha$-Unterdarstellung von $\mathfrak{g}$, alle Eigenräume $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ von $\alpha^\vee$ sind höchstens eindimensional nach 2.3.12.2, und $\alpha^\vee$ operiert auf $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ durch den Eigenwert $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle + 2i$. Aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}^\alpha$ wissen wir nach 1.2.13 aber schon, daß $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ alias $\alpha^\vee$ auf einer endlichdimensionalen Darstellung nur ganzzahlige Eigenwerte haben kann und daß mit n auch $-n$ ein Eigenwert sein muß. Insbesondere ist $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ ganzzahlig und der Eigenwert $-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ kommt auch vor, d.h. der Wurzelraum $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ mit $i = -\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ ist nicht Null.



Die Wurzelspiegelung zu einer Wurzel

Eingeschobener Beweis von 2.3.12.4. Da alle Eigenräume von $\alpha^\vee$ in unserem T von eben eindimensional sind und da die Eigenwerte entweder alle gerade oder alle ungerade sind, muß T sogar eine einfache Darstellung von $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ sein. Aus unserer expliziten Beschreibung dieser einfachen Darstellungen in 1.2.13 folgt dann $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ falls gilt $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$ und damit 2.3.12.4.

2. Es reicht zu zeigen, daß gilt $\bigcap_{\alpha \in R} \ker \alpha = 0$. Sei also $h \in \mathfrak{h}$ gegeben mit $\alpha(h) = 0 \quad \forall \alpha \in R$. So gilt $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ für alle $\alpha \in R$, und da eh gilt $[h, \mathfrak{h}] = 0$, ergibt sich $h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ und damit $h = 0$, da das Zentrum einer halbeinfachen Liealgebra Null ist. □

2.3.19. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik Null. Eine Teilmenge $R \subset V$ heißt wie in [SPW] 2.1.1 ein **abstraktes Wurzelsystem** oder präziser ein **abstraktes reduziertes Wurzelsystem** und kurz **Wurzelsystem**, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Menge R ist endlich, erzeugt V, und enthält nicht den Nullvektor;
2. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gibt es eine lineare Abbildung $s : V \to V$ mit $s(\alpha) = -\alpha$, $s(R) \subset R$ und $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha \quad \forall \beta \in R$;
3. Außer ihrem Negativen ist kein Vielfaches einer Wurzel wieder eine Wurzel, für jedes $\alpha \in R$ gilt also $k\alpha \cap R \subset \{\alpha, -\alpha\}$.

Unter einem **Isomorphismus von Wurzelsystemen** versteht man einen Isomorphismus der zugehörigen Vektorräume, der eine Bijektion zwischen den Mengen der jeweiligen Wurzeln induziert. Die Abbildung s in Teil 2 ist wohldefiniert, denn ist t eine weitere Möglichkeit, so folgt $(ts - \mathrm{id})^2 = 0$ und damit ist ts unipotent. Andererseits aber permutiert ts die Wurzeln und hat folglich endliche Ordnung, und beides zusammen zeigt $ts = \mathrm{id}$ und speziell $s^2 = \mathrm{id}$ und dann $s = t$. Wir setzen $s = s_\alpha$ und nennen es die **Wurzelspiegelung zu** α. Die von den Wurzelspiegelungen erzeugte Untergruppe $W \subset \mathrm{GL}(V)$ heißt die **Weylgruppe** unseres Wurzelsystems.

2.3.20. Die Wurzeln einer halbeinfachen komplexen Liealgebra bezüglich einer Cartan'schen bilden stets ein abstraktes Wurzelsystem im Sinne von 2.3.19 im Dualraum der besagten Cartan'schen: Als die in der Definition geforderten linearen Abbildungen können wir nach 2.3.17 die Wurzelspiegelungen $s : \beta \mapsto \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$ nehmen. Unsere dritte Forderung in der Definition eines Wurzelsystems ist gerade 2.3.12.3.

Satz 2.3.21 (Klassifikation der halbeinfachen Liealgebren). *Ordnen wir jeder komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ den Dualraum einer Cartan'schen $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$*

mitsamt dem zugehörigen Wurzelsystem $\mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ *zu, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe} \\ \textit{halbeinfache Liealgebren} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe} \\ \textit{abstrakte Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{g} \mapsto \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$$

2.3.22. Der Beweis wird uns eine Weile beschäftigen. Zunächst zeigen wir in 2.4.5, daß die Abbildung im Satz insoweit wohldefiniert ist, als je zwei Cartan'sche zu isomorphen Wurzelsystemen führen. Die Injektivität und Surjektivität werden erst in 3.4.11 als Korollar von 3.4.4 gezeigt werden.

2.3.23. Derselbe Satz gilt mit demselben Beweis, wenn wir statt über den komplexen Zahlen über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null arbeiten.

Übungen

Übung 2.3.24. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Man zeige: Die Kowurzeln $\alpha^\vee$ spannen $\mathfrak{h}$ auf. Bezeichnet $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ den von den Kowurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}$, so gilt $\dim_\mathbb{Q} \mathfrak{h}_\mathbb{Q} = \dim_\mathbb{C} \mathfrak{h}$. Bezeichnet $(\mathfrak{h}^*)_\mathbb{Q}$ den von den Wurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}^*$, so gilt $\dim_\mathbb{Q}(\mathfrak{h}^*)_\mathbb{Q} = \dim_\mathbb{C} \mathfrak{h}^*$ und das Einschränken identifiziert $(\mathfrak{h}^*)_\mathbb{Q}$ mit dem Dualraum $(\mathfrak{h}_\mathbb{Q})^*$ von $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$, so daß wir ohne Mehrdeutigkeiten fürchten zu müssen schlicht $\mathfrak{h}^*_\mathbb{Q}$ schreiben dürfen. Hinweis: 2.3.27.

Übung 2.3.25 (**Rationalität und Positivität der Killingform**). Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Bezeichne $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ den von allen Kowurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}$. Man zeige, daß für $h, t \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ gilt $\kappa(h,t) \in \mathbb{Q}$ und daß κ positiv definit ist auf $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$, also $\kappa(h,h) \leq 0 \Rightarrow h = 0$. Einen alternativen Beweis der Positivität im Fall der komplexifizierten Liealgebra einer kompakten Liegruppe mit der komplexifizierten Liealgebra eines maximalen Torus als Cartan'scher findet man in [ML] 5.5.19.

Ergänzung 2.3.26. Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ eine Wurzel. Für $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ folgt aus dem Beginn des Beweises von 2.3.15 leicht $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee)/2$. Da hier die rechte Seite positiv und rational ist nach 2.3.25, gilt für beliebige $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ immer noch $[x,y] \in \kappa(x,y)\mathbb{Q}_{>0}\alpha^\vee$.

Übung 2.3.27. Seien $k \subset K$ Körper. Sei V ein K-Vektorraum, $R \subset V$ ein endliches Erzeugendensystem von V und $L \subset V^*$ ein endliches Erzeugendensystem seines Dualraums. Gilt $\langle \lambda, \alpha \rangle \in k$ für alle $\lambda \in L$ und $\alpha \in R$, so haben wir $\dim_k \langle R \rangle_k = \dim_K V = \dim_k \langle L \rangle_k$ für die Erzeugnisse von R bzw. L über k und die Einschränkung identifiziert $\langle L \rangle_k$ mit dem Dualraum von $\langle R \rangle_k$.

Übung 2.3.28. Die bezüglich Inklusion maximalen auflösbaren Unteralgebren einer Liealgebra heißen ihre **Borel'schen Unteralgebren** oder **Borel'schen**. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem. Man zeige, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Systeme } R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ von} \\ \text{positiven Wurzeln} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Borelsche Unteralgebren,} \\ \text{die } \mathfrak{h} \text{ umfassen} \end{array} \right\}$$

erhalten durch die Vorschrift $R^+ \mapsto \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Übung 2.3.29 (**Wurzelketten**). Sei $R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem einer komplexen halbeinfachen Liealgebra. Man zeige: Für Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ ist $\{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in R\}$ ein Intervall in $\mathbb{Z}$.

Übung 2.3.30 (**Das Wurzelsystem im Typ** C_n). Die Liealgebra $\mathfrak{sp}(2n; \mathbb{C})$ besteht nach 1.1.25 aus allen Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A^\top = -D$, $B^\top = B$ und $C^\top = C$. Darin bilden die Diagonalmatrixen $\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$ eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die einer Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\} \backslash 0$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^\top = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} + E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B.

Übung 2.3.31 (**Das Wurzelsystem im Typ** D_n). Die Liealgebra $\mathfrak{so}(2n; \mathbb{C})$ aus 1.1.15 besteht aus allen Blockmatrizen derselben Gestalt wie in der vorhergehenden Übung mit $A^\top = -D$, $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$. Darin bilden die Diagonalmatrixen $\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$ eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die einer Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^\top = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} - E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B.

Übung 2.3.32 (**Das Wurzelsystem im Typ** B_n). Die Liealgebra $\mathfrak{so}(2n+1; \mathbb{C})$ aus 1.1.15 besteht aus allen Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} a & u & v \\ w & A & B \\ s & C & D \end{pmatrix}$$

mit $a = 0$, $u^\top = -s$, $v^\top = -w$, $A^\top = -D$, $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$ bilden die Diagonalmatrizen $\operatorname{diag}(0, h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$. Erklären wir Linearformen $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ durch die Vorschrift, daß sie einer Matrix ihren $(i+1)$-ten Diagonaleintrag zuordnen, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Ergänzende Übung 2.3.33 (**Unterliealgebren zu Unterwurzelsystemen**). Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem und $R' \subset R$ eine Teilmenge, die in ihrem Erzeugnis selbst ein Wurzelsystem ist und die Eigenschaft hat, daß die Summe von zwei Wurzeln aus R', wenn sie denn in R liegt, bereits in R' liegen muß. So ist $\mathfrak{g}' := \sum_{\alpha \in R'} (\mathfrak{g}_\alpha + \mathbb{C}\alpha^\vee)$ eine halbeinfache Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit Cartan'scher $\mathfrak{h}' := \sum_{\alpha \in R'} \mathbb{C}\alpha^\vee$ und die Restriktion von Linearformen auf $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ induziert eine Bijektion $R' \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$. Hinweis: Man zerlege R' mit [SPW] 2.2.14 in unzerlegbare Wurzelsysteme und zeige mithilfe der Existenz höchster Wurzeln [SPW] 2.4.2 und von Wurzelwegen dorthin im Sinne von [SPW] 2.3.9, daß unzerlegbare Wurzelsysteme einfache Liealgebren liefern.

2.4 Konjugiertheit von Cartan'schen

Definition 2.4.1. Ein Endomorphismus δ einer abelschen Gruppe V heißt **lokal nilpotent** genau dann, wenn es für jedes $v \in V$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\delta^N v = 0$. Ist V ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, so definieren wir für $\delta : V \to V$ linear lokal nilpotent eine lineare Abbildung $\exp\delta : V \to V$ durch die Exponentialreihe

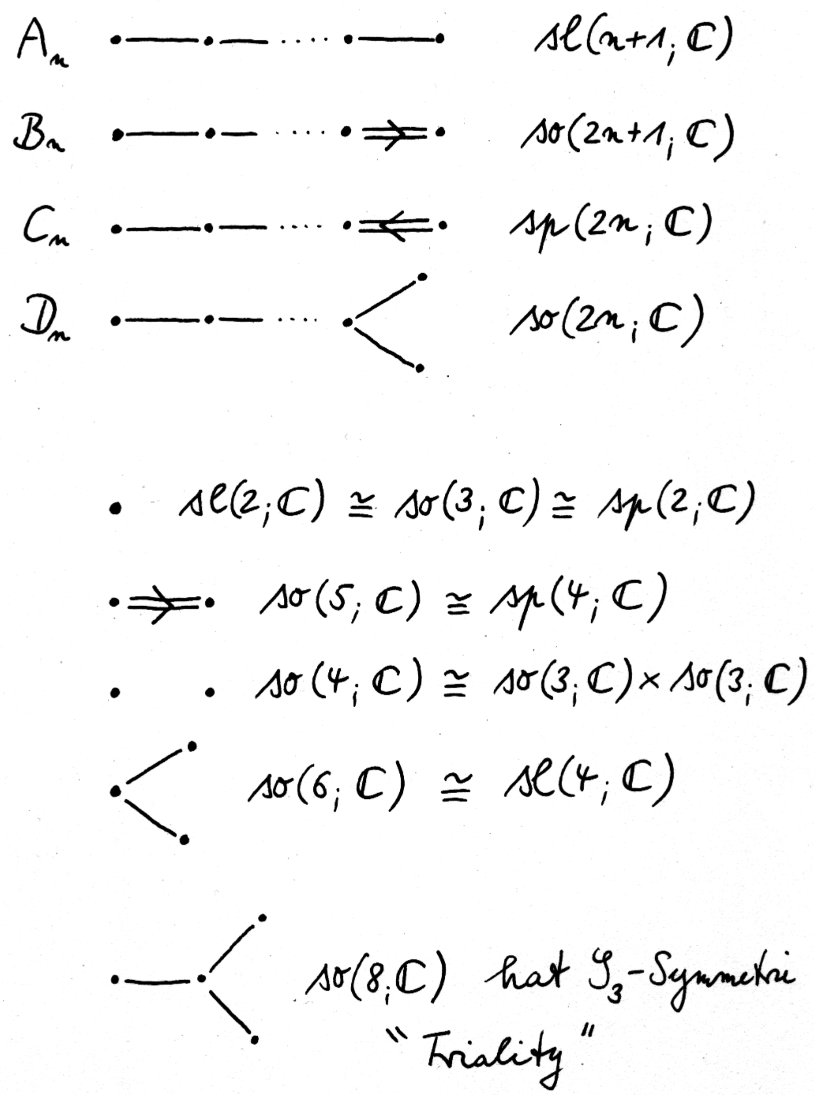
$$(\exp\delta)(v) := \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^n v}{n!} = v + \delta v + \frac{\delta^2 v}{2} + \frac{\delta^3 v}{3!} + \ldots$$

Lemma 2.4.2 (Exponential lokal nilpotenter Endomorphismen). *Seien Vektorräume V, W über einem Körper der Charakteristik Null gegeben.*

1. *Für $0 \in \operatorname{End} V$ haben wir stets $\exp(0) = \mathrm{id}$. Sind weiter δ und δ' kommutierende lokal nilpotente Endomorphismen von V, so ist auch $\delta + \delta'$ lokal nilpotent und es gilt $\exp(\delta + \delta') = (\exp\delta) \circ (\exp\delta')$. Insbesondere gilt dann $\exp(-\delta) = (\exp\delta)^{-1}$;*

2. *Ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & W \arrow[d, "\delta'"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$



Hier wurde jeder halbeinfachen Liealgebra ein Wurzelsystem zugeordnet, wenn auch die Bijektivität auf Isomorphieklassen dieser Zuordnung 2.3.21 noch nicht fertig bewiesen ist. In [SPW] 2.3.6 wird andererseits eine Bijektion auf Isomorphieklassen zwischen Wurzelsystemen und sogenannten Dynkindiagrammen konstruiert. Obiges Bild stellt die Verknüpfung dieser beidem Bijektionen im Spezialfall der klassischen Liealgebren dar und zeigt, wie naheliegend in diesem Rahmen unsere Ausnahme-Isomorphismen sind. Unter „triality“ versteht man eine Operation der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ auf der Liealgebra $\mathfrak{so}(8; \mathbb{C})$. Sie wird erst im Rahmen der Konstruktion der Liealgebra zu einem Wurzelsystem durch Erzeuger und Relationen 3.4.4 offensichtlich werden.

mit lokal nilpotenten Vertikalen bleibt kommutativ, wenn wir auf beide Vertikalen $\exp$ *anwenden. Insbesondere haben wir für* f *invertierbar die Identität* $\exp(f\delta f^{-1}) = f(\exp\delta)f^{-1}$*;*

3. *Ist* $\delta : V \to V$ *nilpotent, so ist auch die zugehörige transponierte Abbildung* $\delta^\top : V^* \to V^*$ *nilpotent und es gilt* $\exp(\delta^\top) = (\exp\delta)^\top$.

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen. Man benutze für die erste Aussage die Identität $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$ im Ring der formalen Potenzreihen in zwei Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Man beachte auch, daß die letzte Aussage für nur lokal nilpotentes δ nicht mehr gilt. □

Lemma 2.4.3 (Exponential lokal nilpotenter Derivationen). *Gegeben ein Körper* k *der Charakteristik Null, eine* k*-Algebra* A *und eine lokal nilpotente Derivation* $\delta : A \to A$ *von* A *ist* $\exp(\delta)$ *ein Algebrenautomorphismus von* A.

2.4.4. Gegeben ein ad-nilpotentes Element x einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null ist insbesondere $\exp(\operatorname{ad} x)$ stets ein Liealgebren-Automorphismus.

Beweis mit Tensorprodukt. Bezeichne $m : A \otimes A \to A$ die Multiplikation in unserer Algebra. Ist δ eine Derivation, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ {\scriptstyle \delta\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ A\otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

Ist δ lokal nilpotent, so auch $\delta\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\delta$. Unser Diagramm kommutiert dann auch noch, wenn wir $\exp$ auf beide vertikalen Abbildungen anwenden. Da $\delta\otimes\mathrm{id}$ und $\mathrm{id}\otimes\delta$ kommutieren, folgt $\exp(\delta\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\delta) = \exp(\delta\otimes\mathrm{id})\circ\exp(\mathrm{id}\otimes\delta) = \exp\delta\otimes\exp\delta$. □

Beweis ohne Tensorprodukt. Aus $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ folgt induktiv wie beim Beweis der binomischen Formel erst $\delta^n(ab) = \sum_i \binom{n}{i}\delta^i(a)\delta^{n-i}(b)$ und dann

$$(\exp\delta)(ab) = \sum_{i,j}\frac{\delta^i(a)}{i!}\frac{\delta^j(b)}{j!} = (\exp\delta)(a)(\exp\delta)(b)$$ □

Satz 2.4.5 (Konjugiertheit von Cartan'schen). *Gegeben eine halbeinfache komplexe Liealgebra* $\mathfrak{g}$ *mit zwei Cartan'schen* $\mathfrak{h}, \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ *gibt es stets einen Automorphismus* $\sigma \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ *mit* $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$.

Ergänzung 2.4.6. Der Beweis zeigt sogar, daß je zwei Cartan'sche konjugiert sind unter der Untergruppe $G \subset \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ in der Automorphismengruppe unserer Liealgebra, die von den $\exp(\operatorname{ad} x)$ mit $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent erzeugt wird.

2.4.7. Wir geben für diesen Satz zwei Beweise. Der Erste funktioniert über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null, setzt aber Kenntnisse in algebraischer Geometrie voraus. Der Zweite funktioniert funktioniert nur über dem Körper der komplexen Zahlen und ist weniger übersichtlich, benötigt aber weniger Vorkenntnisse. Ein noch allgemeinerer Satz über Cartan'schen in beliebigen endlichdimensionalen Liealgebren wird in 2.5.6 bewiesen.

Beweis mit algebraischer Geometrie. Das Komplement der Kerne aller Wurzeln in einer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ heißt der „reguläre Anteil" der besagten Cartan'schen und wird notiert als

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} := \mathfrak{h} \backslash \bigcup_{\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \ker \alpha$$

Sicher ist $\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ Zariski-offen in $\mathfrak{h}$. Offensichtlich gilt $\mathfrak{h} = \ker(\operatorname{ad} h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g})$ für alle $h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccl} \mathfrak{g}_\alpha \times \ldots \times \mathfrak{g}_\beta \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, \ldots, y, h) & \mapsto & \exp(\operatorname{ad} x) \ldots \exp(\operatorname{ad} y) h \end{array}$$

mit dem Produkt über alle Wurzeln in einer beliebigen, aber für die Dauer dieses Beweises fest gewählten Reihenfolge hat nun surjektives, ja bijektives Differential an allen Tupeln der Gestalt $(0, \ldots, 0, h)$. Nach dem differentiellen Dominanzkriterium, das wir im 2.4.8 in der hier benötigten Form zitieren, umfaßt folglich das Bild unserer Abbildung eine Zariski-offene nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{g}$. Analoges gilt für unsere zweite Cartan'sche $\mathfrak{k}$. Folglich treffen sich die zugehörigen Bilder und wir finden $h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}, k \in \mathfrak{k}_{\mathrm{reg}}$ und $\sigma, \tau \in G$ mit $\sigma(h) = \tau(k)$ alias $\tau^{-1}\sigma : h \mapsto k$. Daraus folgt aber sofort $(\tau^{-1}\sigma)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$. □

Beweis im Komplexen ohne algebraische Geometrie. Sei $\mathfrak{g}$ unsere halbeinfache komplexe Liealgebra und

$$r := \min\{\dim_{\mathbb{C}}(\ker(\operatorname{ad} x)) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

Nach Übung [AN2] 5.5.19 zu Nullstellen polynomialer Funktionen und [LA1] 6.4.13 ist $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim_{\mathbb{C}}(\ker(\operatorname{ad} x)) = r\}$ offen und dicht in $\mathfrak{g}$, diesmal für die analytische Topologie. Wie bei unserem ersten Beweis sehen wir, diesmal mit dem Umkehrsatz [AN2] 3.1.2, daß andererseits für jede Cartan'sche $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Menge $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ offen ist in $\mathfrak{g}$. Mithin trifft $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ eine Konjugierte jeder Cartan'schen und damit dann auch jede Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Es folgt sofort $r = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$. Nun ist das charakteristische Polynom $\chi(\operatorname{ad} x) \in \mathbb{C}[T]$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ durch T^r teilbar. Die Diskriminante D nach [AL] 2.9.14 des Quotienten $\chi(\operatorname{ad} x)/T^{r-1}$ ist dann eine polynomiale Funktion auf $\mathfrak{g}$, die bei $h \in \mathfrak{h}$ genau dann von Null verschieden ist, wenn die Werte der Wurzeln $\alpha(h)$ für $\alpha \in R$ paarweise verschieden und alle nicht Null sind. Diese Funktion D ist also nicht identisch Null auf $\mathfrak{g}$. Andererseits folgt aus $D(x) \neq 0$ schon $x = x_{\mathrm{s}}$, denn die Eigenräume von x_{s} zu von Null verschiedenen Eigenwerten sind für derartige x eindimensional und aus $x \neq x_{\mathrm{s}}$ folgte $\ker(\operatorname{ad} x) \subsetneq (\ker(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}))$ im Widerspruch zu $\dim(\ker(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}})) = r$. Das Komplement der Nullstellenmenge von D ist demnach die Vereinigung über alle Cartan'schen $\mathfrak{h}$ der Mengen

$$\mathfrak{h}^{\mathrm{pv}}_{\mathrm{reg}} := \{h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} \mid \text{Die Werte der Wurzeln auf } h \text{ sind paarweise verschieden}\}$$

Derselbe Beweis wie zuvor zeigt nun, daß auch $G\mathfrak{h}^{\mathrm{pv}}_{\mathrm{reg}}$ stets offen ist in $\mathfrak{g}$. Gegeben zwei Cartan'sche $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ mit $G\mathfrak{h}^{\mathrm{pv}}_{\mathrm{reg}} \cap G\mathfrak{k}^{\mathrm{pv}}_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ folgern wir jedoch wie bei unserem ersten Beweis, daß es $\sigma \in G$ gibt mit $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ und daß insbesondere gilt $G\mathfrak{h}^{\mathrm{pv}}_{\mathrm{reg}} = G\mathfrak{k}^{\mathrm{pv}}_{\mathrm{reg}}$. Mithin zerfällt $\{x \in \mathfrak{g} \mid D(x) \neq 0\}$ als die disjunkte Vereinigung der offenen Teilmengen $G\mathfrak{h}^{\mathrm{pv}}_{\mathrm{reg}}$, wenn wir $\mathfrak{h}$ über ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von Cartan'schen laufen lassen Da aber das Komplement der Nullstellenmenge von D nach [AN2] 5.5.19 zusammenhängend ist, kann es nur eine derartige Konjugationsklasse geben. □

2.4.8. Sei $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ eine polynomiale Abbildung. Ist das Differential $\mathrm{d}_p \varphi$ an mindestens einer Stelle $p \in \mathbb{C}^n$ surjektiv, so umfaßt das Bild jeder nichtleeren Zariski-offenen Menge in $\mathbb{C}^n$ eine nichtleere Zariski-offene Menge in $\mathbb{C}^m$. Das ist ein Spezialfall des differentiellen Dominanzkriteriums [KAG] 4.4.15 und wird hier nicht bewiesen.

Übungen

Ergänzende Übung 2.4.9 (**Reguläre Elemente in Cartan'schen**). Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem. Man zeige, daß die Elemente von $\mathfrak{h}$, die im Sinne von 1.1.33 regulär sind in $\mathfrak{g}$, genau die Elemente von $\mathfrak{h}$ sind, auf denen keine Wurzel verschwindet. Hinweis: 2.2.11. Man zeige weiter, daß die regulären halbeinfachen Elemente eine Zariski-offene Teilmenge von $\mathfrak{g}$ bilden.

2.5 Cartan'sche in allgemeinen Liealgebren**

2.5.1. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine Liealgebra mit einer Unteralgebra. Der **Normalisator von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$** ist die Unteralgebra

$$\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$$

Natürlich ist der Normalisator wieder eine Unteralgebra und per definitionem ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal in $\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Genauer ist der Normalisator von $\mathfrak{h}$ die größte Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{h}$ als Ideal umfaßt.

Definition 2.5.2. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heißt eine **Cartan'sche**, wenn sie nilpotent und selbstnormalisierend alias ihr eigener Normalisator ist.

Ergänzung 2.5.3 (**Cartan'sche und Erweiterungen des Grundkörpers**). Beide Eigenschaften nilpotent und selbstnormalisierend gelten genau dann, wenn sie nach einer beliebigen festen Erweiterung des Grundkörpers gelten. Ist also $k \subset K$ eine Körpererweiterung und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum, so ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche genau dann, wenn $\mathfrak{h} \otimes_k K \subset \mathfrak{g} \otimes_k K$ eine Cartan'sche ist.

2.5.4. Sei $\mathfrak{g}$ endlichdimensionale Liealgebra. Wir setzen

$$r = \operatorname{rang}(\mathfrak{g}) := \min\{\dim \ker(\operatorname{ad} x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen diese Zahl der **Rang** unserer Liealgebra. Die Elemente $x \in \mathfrak{g}$, an denen das Minimum angenommen wird, heißen seit 1.1.33 **regulär**. Die regulären Elemente bilden stets eine Zariski-offene Teilmenge $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \circeq \mathfrak{g}$.

2.5.5. Sei $\mathfrak{g}$ endlichdimensionale Liealgebra. Wir setzen

$$s = s(\mathfrak{g}) := \min\{\dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

Diejenigen Elemente $x \in \mathfrak{g}$, an denen das Minimum angenommen wird, heißen **generisch**. Die generischen Elemente bilden stets eine Zariski-offene Teilmenge $\mathfrak{g}_{\mathrm{gen}} \circeq \mathfrak{g}$. Sie bilden sogar das Komplement der Nullstellenmenge einer von Null verschiedenen polynomialen Funktion, nämlich derjenigen Funktion, die jedem $x \in \mathfrak{g}$ den Koeffizienten von T^s des charakteristischen Polynoms von $\operatorname{ad} x$ zuordnet.

Satz 2.5.6 (Existenz und Eindeutigkeit von Cartan'schen). *1. Jede endlichdimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper der Charakteristik Null besitzt Cartan'sche Unteralgebren, und diese sind genau die Haupträume zum Eigenwert Null* $\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0)$ *für generische $x \in \mathfrak{g}$;*

2. In einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null sind je zwei Cartan'sche konjugiert unter ihrer Automorphismengruppe, ja unter der von den $\exp(\operatorname{ad} c)$ *für Elemente c mit nilpotentem* $\operatorname{ad} c$ *erzeugten Untergruppe G der Automorphismengruppe.*

Beweis. 1. Wir kürzen $\mathrm{Hau}(\mathrm{ad}\, x; \lambda) =: \mathfrak{g}_\lambda^x$ ab und zeigen zunächst, daß im Fall eines Grundkörpers k der Charakteristik Null der Hauptraum zum Eigenwert Null $\mathfrak{g}_0^x$ für jedes generische Element x eine Cartan'sche ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir uns auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers k zurückziehen. Für alle λ, μ gilt nach 1.1.36 sicher $[\mathfrak{g}_\lambda^x, \mathfrak{g}_\mu^x] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}^x$. Also ist unser Hauptraum zum Eigenwert Null eine Unteralgebra. Sein Normalisator muß auch in Haupträume unter $\mathrm{ad}\, x$ zerfallen und besteht offensichtlich nur aus $\mathfrak{g}_0^x$ selber. Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{g}_0^x$ auch noch eine nilpotente Liealgebra ist. Sei nämlich $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_0^x$ unter allen nilpotenten Unteralgebren, die x enthalten, eine Unteralgebra maximal möglicher Dimension. So verfeinert die simultane Hauptraumzerlegung zu $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{n}$ aus 1.5.10 die Hauptraumzerlegung von $\mathrm{ad}\, x$. Hätten wir dabei

$$\mathrm{Hau}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{n}; 0) \subsetneq \mathfrak{g}_0^x$$

und wären $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathfrak{n}^*$ die von Null verschiedenen simultanen Eigenwerte alias Gewichte von $\mathfrak{g}$ unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{n}$, so fänden wir $y \in \mathfrak{n}$ mit $\lambda_1(y) \neq 0, \ldots, \lambda_r(y) \neq 0$ und es folgte

$$\dim \mathrm{Hau}(\mathrm{ad}\, y; 0) < \dim \mathrm{Hau}(\mathrm{ad}\, x; 0)$$

im Widerspruch zu unserer Annahme x generisch. Mithin operiert $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen auf $\mathfrak{g}_0^x/\mathfrak{n}$. Ist dieser Raum nicht Null, so gibt es nach Satz 1.4.1 über Liealgebren aus nilpotenten Endomorphismen ein Element $z \in \mathfrak{g}_0^x$ mit $z \notin \mathfrak{n}$ aber $[z, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$. Also ist $\mathfrak{m} := kz + \mathfrak{n}$ eine auflösbare Liealgebra. Seien nun $\mu_0, \ldots, \mu_t \in \mathfrak{m}^*$ die Charaktere der einfachen Subquotienten von $\mathfrak{g}$ als Darstellung der auflösbaren Liealgebra $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_0^x$. Wir listen sie nicht mit ihrer Vielfachheit, die μ_j seien also paarweise verschieden. Wegen $[z, z] = 0$ kommt der Nullcharakter vor, wir dürfen also $\mu_0 = 0$ annehmen. Sicher gibt es $y \in \mathfrak{m}$ mit $\mu_1(y) \neq 0, \ldots, \mu_t(y) \neq 0$. Wegen $x \in \mathfrak{m}$ hat $\mathrm{ad}\, y$ dann keinen Eigenwert Null auf $\mathfrak{g}_\lambda^x$ für $\lambda \neq 0$. Hätte es also einen Eigenwert ungleich Null auf $\mathfrak{g}_0^x$, so gälte $\dim \mathrm{Hau}(\mathrm{ad}\, y; 0) < \dim \mathrm{Hau}(\mathrm{ad}\, x; 0)$ im Widerspruch zu unserer Annahme x generisch. Mithin ist auch $\mathfrak{m}$ eine nilpotente Liealgebra, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{n}$. Die verbleibende Aussage von Teil 1, daß umgekehrt auch jede Cartan'sche ein Hauptraum der beschriebenen Art ist, wird erst im Anschluß an den Beweis von Teil 2 gezeigt.

2. Sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Sicher zerfällt $\mathfrak{g}$ unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{h}$ in simultane Eigenräume. Seien $\alpha, \ldots, \beta \in \mathfrak{h}^*$ die von Null verschiedenen simultanen Eigenwerte. Wir setzen

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{gen}} := \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha(h) \neq 0, \ldots, \beta(h) \neq 0\}$$

Sicher ist das eine Zariski-offene nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{h}$ und für alle $h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{gen}}$

gilt $\mathfrak{g}_0^h = \mathfrak{h}$. Jetzt betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_\alpha \times \ldots \times \mathfrak{g}_\beta \times \mathfrak{h}_{\text{gen}} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, \ldots, y, h) & \mapsto & \exp(\operatorname{ad} x) \ldots \exp(\operatorname{ad} y) h \end{array}$$

mit dem Produkt über alle von Null verschiedenen Eigenwerte in einer beliebigen, aber für diesen Beweis fest gewählten Reihenfolge. Sie hat surjektives, ja bijektives Differential an allen Tupeln der Gestalt $(0, \ldots, 0, h)$. Nach dem differentiellen Dominanzkriterium [KAG] 4.4.15 umfaßt folglich das Bild unserer Abbildung eine Zariski-offene nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{g}$. Da die Dimension des $(\operatorname{ad} z)$-Hauptraums zum Eigenwert Null für alle Elemente z dieser Teilmenge dieselbe sein muß, besteht sie notwendig aus generischen Elementen. Insbesondere besteht $\mathfrak{h}_{\text{gen}}$ aus generischen Elementen. Ist $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ eine weitere Cartan'sche, so folgt ebenso, daß $G\mathfrak{k}_{\text{gen}}$ Zariski-offen ist. Folglich haben $G\mathfrak{k}_{\text{gen}}$ und $G\mathfrak{h}_{\text{gen}}$ nichtleeren Schnitt. Mithin gibt es $h \in \mathfrak{h}_{\text{gen}}$ und $\sigma \in G$ mit $gh \in \mathfrak{k}_{\text{gen}}$. Dann folgt aber $\sigma(\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} h; 0)) = (\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} \sigma(h); 0))$ alias $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$.

Nun können wir auch den Beweis von Teil 1 zu Ende bringen: Jede Cartan'sche $\mathfrak{h}$ besitzt nämlich generische Elemente x, wie man durch Übergang zu einem algebraischen Abschluß und Herunterschneiden auf die ursprüngliche Cartan'sche nunmehr leicht einsieht. Dann aber gilt notwendig $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0^x$. □

2.6 Bezug zu algebraischen Gruppen*

2.6.1. Gegeben eine Liealgebra L heißen ihre Derivationen der Gestalt $\operatorname{ad}(x)$ auch ihre **inneren Derivationen**. Sie sind infinitesimale Analoga der inneren Automorphismen einer Gruppe und bilden stets ein Ideal in der Liealgebra aller Derivationen von L.

Proposition 2.6.2 (Innere Derivationen halbeinfacher Liealgebren). *Ist L eine halbeinfache Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null, so ist $\operatorname{ad} : L \to \operatorname{Der}_k L$ ein Isomorphismus von Liealgebren.*

Beweis. Das einzige Problem ist nachzuweisen, daß diese Abbildung surjektiv ist. Da $L \cong \operatorname{ad} L$ halbeinfach ist, kann die Restriktion der Killingform κ_D von $D := \operatorname{Der}_k L$ auf $\operatorname{ad} L$ nicht entarten. Ist also $I \subset D$ das orthogonale Komplement von $\operatorname{ad} L$ unter der Killingform κ_D, so gilt $I \cap \operatorname{ad} L = 0$ und folglich $D = I \oplus \operatorname{ad} L$ mit Dimensionsbetrachtungen. Da nach 1.4.25 beide Summanden Ideale sind, folgt $[I, \operatorname{ad} L] = 0$, also $[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(\delta x) = 0\ \forall \delta \in I$, $x \in L$, also $\delta x = 0\ \forall \delta \in I, x \in L$ und damit $I = 0$ wie gewünscht. □

Satz 2.6.3 (Adjungierte Gruppe einer halbeinfachen Liealgebra). *Gegeben eine halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper* *der Charakteristik Null ist die Einskomponente ihrer Automorphismengruppe*

$$(\operatorname{Aut}\mathfrak{g})^\circ \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

die eindeutig bestimmte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe mit Liealgebra $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. *Sie wird erzeugt von den Automorphismen* $\exp(\operatorname{ad} x)$ *mit nilpotenten* $x \in \mathfrak{g}$.

2.6.4. Gegeben eine halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null heißt die Einskomponente $(\operatorname{Aut}\mathfrak{g})^\circ$ ihrer Automorphismengruppe auch die **adjungierte Gruppe**. Im Allgemeinen definiert man die „adjungierte Gruppe" einer Liealgebra als die größte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, deren Liealgebra in $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ enthalten ist.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar nach [**?**] **??**, da wir ja in Charakteristik Null sind. Nach [**?**] **??** und 2.6.2 gilt weiter sicher $\operatorname{Lie}(\operatorname{Aut}\mathfrak{g}) \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g} = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. Andererseits erzeugen die Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x)$ mit nilpotenten $x \in \mathfrak{g}$ aber nach dem Satz [**?**] **??** über irreduzibles Erzeugen eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, die nach 2.3.15 und 2.3.24 bereits die richtige Liealgebra haben muß. $\square$

Beispiel 2.6.5. Sei k ein Körper der Charakteristik Null. Gegeben $x \in \mathfrak{gl}(n;k)$ können wir schreiben $\operatorname{ad} x = (x\cdot) - (\cdot x)$, und da die Linksmultiplikation kommutiert mit der Rechtsmultiplikation, folgt für nilpotentes x und beliebiges y sofort

$$(\exp(\operatorname{ad} x))(y) = (\exp x) y (\exp x)^{-1}$$

Man überlegt sich nun ohne große Schwierigkeiten, daß die $\exp x$ für $x \in \mathfrak{sl}(n;k)$ nilpotent die Gruppe $\mathrm{SL}(n;k) \subset \mathrm{GL}(n;k)$ erzeugen, ja diese Gruppe wird sogar schon erzeugt von allen $\exp(aE_{ij})$ mit $a \in k$ und $i \neq j$. Die adjungierte Gruppe der Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n;k)$ ist mithin das Bild des Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Ad} : \mathrm{SL}(n;k) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{sl}(n;k))$, der einer Matrix $A \in \mathrm{SL}(n;k)$ die Konjugation mit A zuordnet, d.h. die Abbildung $\mathrm{Ad}(A) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $y \mapsto AyA^{-1}$.

Ergänzung 2.6.6 (**Halbeinfachkeit von Gruppen und ihren Liealgebren**). Die adjungierte Gruppe einer halbeinfachen Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null ist halbeinfach im Sinne von [**?**] **??**. In der Tat hätte sie sonst einen nichttrivialen zusammenhängenden abelschen Normalteiler, und dessen Liealgebra wäre nach [**?**] **??** ein nichttriviales abelsches Ideal von $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Wir folgern, daß jede affine algebraische Gruppe G mit halbeinfacher Liealgebra $\mathfrak{g}$ bereits selbst halbeinfach sein muß, denn ihre adjungierte Darstellung induziert einen Homomorphismus $\mathrm{Ad} : G \to \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, dessen Differential beim neutralen Element bijektiv ist.

Ergänzung 2.6.7 (**Maximale Tori und Cartan'sche Unteralgebren**). Gegeben eine halbeinfache affine algebraische Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null induziert das Bilden der Liealgebra eine Bijektion

$$\{\text{Maximale Tori in } G\} \stackrel{\sim}{\to} \{\text{Cartan'sche in } \operatorname{Lie} G\}$$

In der Tat besteht die Liealgebra eines maximalen Torus sich aus halbeinfachen und paarweise kommutierenden Elementen und ist ihr eigener Zentralisator, also maximal mit diesen Eigenschaften. Unsere Abbildung landet also schon mal, wo sie soll. Da beide Seiten aus einer einzigen G-Bahn bestehen, muß sie surjektiv sein. Da schließlich in Charakteristik Null zusammenhängenden Untergruppen nach [**?**] **??** bereits durch ihre Liealgebra eindeutig bestimmt werden, folgt auch die Injetivität.

Ergänzung 2.6.8. Gegeben $G \supset T$ eine halbeinfache affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null mit einem maximalen Torus und $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ ihre Liealgebren induziert die adjungierte Darstellung $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ einen Isomorphismus auf den Weylgruppen $\mathrm{W}(G,T) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{W}(\mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$, wie man etwa aus [AAG] 4.10.9 leicht folgert.

Satz 2.6.9 (Darstellungen reduktiver Gruppen). $(k = \bar{k})$. *Jede rationale Darstellung einer reduktiven algebraischen Gruppe in Charakteristik Null ist halbeinfach.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall, daß unsere Gruppe zusammenhängend ist. Dann wird sie erzeugt von ihrem Zentrum, einer diagonalisierbaren Gruppe, und ihrer derivierten Gruppe, einer halbeinfachen Gruppe. Unter dem Zentrum zerfällt unsere Darstellung in simultane Eigenräume, die ihrerseits unter der derivierten Gruppe stabil sind. Es reicht also, den Fall einer halbeinfachen Gruppe zu betrachten. Nun sind aber nach [**?**] **??** die Unterdarstellungen unter der Gruppe dieselben wie die Unterdarstellungen unter ihrer Liealgebra, diese Liealgebra ist halbeinfach nach 2.6.6, und dann sind auch ihre endlichdimensionalen Darstellungen halbeinfach nach dem Satz von Weyl 2.1.6. Ist unsere Gruppe G reduktiv aber nicht zusammenhängend, so finden wir zunächst nach dem bereits behandelten Fall in jeder endlichdimensionalen Darstellung V genau ein unter der Einskomponente $E := G^\circ$ stabiles Komplement des Teilraums V^E der E-Invarianten. Diese Zerlegung ist notwendig G-stabil, und in V^E finden wir nach dem Satz von Maschke [NAS] 2.3.1 angewandt auf die endliche Gruppe G/E auch ein G-stabiles Komplement des Teilraums V^G der G-Invarianten. Nun können wir argumentieren wie bei der Herleitung des Satzes von Weyl in 2.1.11. □

Korollar 2.6.10 (Peter-Weyl für reduktive Gruppen). $(k = \bar{k})$. *Gegeben eine reduktive algebraische Gruppe G in Charakteristik Null induzieren die Matrixkoeffizientenabbildungen einen Isomorphismus von Darstellungen*

$$\bigoplus_{L \in \operatorname{irr}(G)} L \otimes L^* \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(G)$$

von $G \times G^{\mathrm{opp}}$ mit der über alle irreduziblen rationalen Darstellungen von G bis auf Isomorphie zu bildenden direkten Summe.

Beweis. Gegeben ein beliebiges algebraisches Monoid G und rationale Darstellungen V, W von G liefert das Auswerten einen Homomorphismus

$$V \otimes_k \operatorname{Hom}_k(V, W)^G \to W$$

von Darstellungen, wobei auf dem Tensorprodukt die G-Operation gemeint ist, die nur den ersten Faktor bewegt. Ist $V = L$ irreduzibel, so ist dieser Homomorphismus eine Injektion nach dem Schur'schen Lemma und ihr Bild ist genau die L-isotypische Komponente von W. Nehmen wir speziell $W = \mathcal{O}(G)$ mit der G-Operation durch $(gf)(x) := f(xg)$ für $x \in G$, so ist unser Homomorphismus äquivariant für die Rechtsoperation gegeben durch $(fg)(x) := f(gx)$ auf $\mathcal{O}(G)$ und durch die davon abgeleitete Rechtsoperation auf unserem Tensorprodukt, die nur den zweiten Tensor bewegt. Schließlich beachte man, daß das Nachschalten des Auswertens beim neutralen Element einen mit den G-Rechtsoperationen verträglichen Isomorphismus $L^* \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Hom}_k(L, \mathcal{O}(G))^G$ induziert. □

Übungen

Übung 2.6.11. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem Körper der Charakteristik Null erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathfrak{sl}(V) \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Der}(\operatorname{End}(V))$$

vermittels der Abbildungsvorschrift $X \mapsto \operatorname{ad}(X)$. Hinweis: 2.6.2 und 1.1.38. Diese Aussage kann auch als infinitesimale Version von [ML] 4.5.8 verstanden und davon ausgehend bewiesen werden. Die Umkehrabbildung kann man erhalten, indem man $\lambda \in V^*$ und $w \in V$ beliebig wählt mit $\lambda(w) = 1$. Gegeben $v \in V$ betrachtet man dann den Endomorphismus $v \otimes \lambda$ vom Rang höchstens Eins und findet $(X(v \otimes \lambda))(w) = (X - \lambda(Xw)\operatorname{id})(v)$. Somit ist X schlicht der spurfreie Anteil der linearen Abbildung $v \mapsto (X(v \otimes \lambda))(w)$ von V in sich selber. In Matrizen ausgedrückt bedeutet das, daß man X auf eine Matrix mit nur der ersten Spalte ungleich Null anwendet und die erste Spalte der so entstehenden Matrix betrachtet. Der spurfreie Anteil dieser linearen Abbildung ist dann genau wieder unser X.

2.7 Lemma von Schur für Liealgebren*

Satz 2.7.1 (Lemma von Schur). *Der Endomorphismenring einer irreduziblen Darstellung einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besteht nur aus den skalaren Vielfachen der Identität.*

2.7.2. Ist unser Körper überabzählbar, insbesondere also im Fall der komplexen Zahlen, kann man das direkt und einfacher aus [NAS] 2.1.6 folgern. Man erhält dann die Aussage sogar noch allgemeiner für Liealgebren abzählbarer Dimension, vergleiche 2.1.4. Die hier als Satz 2.7.1 formulierte Version wird auch als **Lemma von Quillen** zitiert.

Beweis. Sei $k = \bar{k}$ unser algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und V unsere irreduzible Darstellung. Gegeben ein Endomorphismus unserer Darstellung $a \in \operatorname{End}_k^{\mathfrak{g}} V$ gilt es zu zeigen $a \in k \operatorname{id}_V$. Da wir k algebraisch abgeschlossen angenommen hatten, reicht es zu zeigen, daß a algebraisch ist über k. Nun können wir V nach **??** zu einem Modul über $k[X] \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ machen, indem wir X als a operieren lassen. Gegeben ein von Null verschiedener Vektor $v \in V$ betrachten wir die Filtrierung von V durch die

$$V^{\leq r} := \left(k[X] \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\leq r}\right) v$$

Offensichtlich ist dann der assoziierte graduierte Vektorraum $\operatorname{gr} V$ ein zyklischer graduierter Modul über dem Ring $R := k[X] \otimes_k \mathrm{S}(\mathfrak{g})$, versehen mit der Graduierung, bei der $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ die übliche Graduierung trägt, $k[X]$ aber ganz im Grad Null konzentriert ist. In anderen Worten ist $\operatorname{gr} V$ ein Quotient unseres Rings nach einem geeigneten homogenen Ideal I. Nun wissen wir nach [KAG] 5.2.22, daß der Ring R/I eine endliche Filtrierung durch homogene Ideale besitzt, deren Subquotienten jeweils bis auf Verschieben der Graduierung isomorph sind zu gewissen $R/\mathfrak{p}_i$ für homogene Primideale $\mathfrak{p}_i \subset R$. Gehen wir zu einem geometrischen Bild über, so entsprechen die Primideale $\mathfrak{p}_i \subset R$ irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen

$$Y_i \mathrel{\not\!\!\triangleleft} \operatorname{Max} R \xrightarrow{\sim} k \times \mathfrak{g}^*$$

Die Projektion jeder dieser irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen auf die erste Koordinate besteht nun entweder nur aus einem Punkt, oder aber sie ist dicht. Ist $f \in k[X]$ ein von Null verschiedenes Polynom, das an allen Stellen verschwindet, an denen eines unserer Y_i in der Faser enthalten ist, so operiert $k[X, f^{-1}]$ torsionsfrei auf allen Lokalisierungen $(R/\mathfrak{p}_i)_f$. Damit sind unsere $(R/\mathfrak{p}_i)_f$ sogar freie $k[X, f^{-1}]$-Moduln, da ihre homogenen Komponenten jeweils endlich erzeugt sind über dem Hauptidealring $k[X, f^{-1}]$. Dann ist auch $(\operatorname{gr} V)_f = (R/I)_f$ ein freier $k[X, f^{-1}]$-Modul und damit schließlich sogar auf V_f. Würde nun f nicht durch Null auf V operieren, so müßte es auf dieser einfachen Darstellung durch einen

Automorphismus operieren und wir hätten $V_f = V$ und das wäre ein von Null verschiedener freier Modul über $k[X, f^{-1}]$ im Widerspruch dazu, daß alle Elemente dieses Rings durch Automorphismen auf der einfachen Darstellung V operieren müssen. Folglich operiert f durch Null auf V, als da heißt, es gilt $f(a) = 0$ und a ist algebraisch über k. $\square$

3 Konstruktion der halbeinfachen Liealgebren

3.1 Freie Liealgebren

3.1.1. Wir notieren die Kategorie der Lie-Algebren über einem Körper k als Lalg_k.

Definition 3.1.2. Gegeben eine Menge I und ein Körper k definiert man eine **freie k-Liealgebra über** I als ein Paar (L, can) bestehend aus einer k-Liealgebra L und einer Abbildung $\mathrm{can} : I \to L$ derart, daß für jede k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Lalg}_k(L, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, \mathfrak{g})$$

zwischen Homomorphismen von Liealgebren und Abbildungen von Mengen induziert. Diese Bedingung nennt man auch die **universelle Eigenschaft** der freien k-Liealgebra über I.

3.1.3 (**Eindeutigkeit freier Liealgebren**). Sind $\mathrm{can} : I \to L$ und $\mathrm{can}' : I \to L'$ zwei freie Liealgebren über derselben Menge I, so gibt es genau einen Liealgebren-Homomorphismus $\varphi : L \to L'$ mit $\varphi \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}'$, und der ist ein Isomorphismus, was ich anhand des folgenden Diagramms erklären will.

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
L' \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}=\varphi\psi"'] & L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}=\psi\varphi"'] & L' \arrow[r, "\psi"] & L
\end{tikzcd}$$

In der Tat gibt es ja nach universellen Eigenschaften von $\mathrm{can}' : I \to L'$ auch genau einen Liealgebren-Homomorphismus $\psi : L' \to L$ mit $\psi \circ \mathrm{can}' = \mathrm{can}$. Weiter gibt es aus demselben Grund auch genau einen Liealgebren-Homomorphismus $\zeta : L \to L$ mit $\zeta \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}$. Da sowohl $\zeta = \mathrm{id}$ als auch $\zeta = \psi\varphi$ diese Eigenschaft haben, folgt $\mathrm{id} = \psi\varphi$. Analog folgt auch $\mathrm{id} = \varphi\psi$, so daß φ und ψ zueinander invers sein müssen.

Proposition 3.1.4. *Gegeben ein Körper k und eine Menge I existiert stets eine freie k-Liealgebra über I.*

3.1.5. Wir notieren im Sinne unserer allgemeinen Konventionen [TF] 4.8.8 die freie k Liealgebra über einer Menge I als

$$\mathrm{Lalg}_k^{\uparrow} I$$

3.1.6. Wir geben zwei Beweise für diese Aussage. Der Erste geht „über unnötig viele Pässe, aber auf bekannten Wegen“. Besonders unschön an diesem ersten Beweis ist, daß er den Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt benötigt, dessen Beweis ja beim besten Willen kein Selbstläufer war. Der zweite Beweis ist recht direkt, benutzt aber Argumente, die Ihnen weniger vertraut sein mögen und die erst im anschließenden Abschnitt ausgeführt werden.

Erster Beweis. Wir betrachten den „Polynomring über k in durch I indizierten nicht-kommutierenden Variablen X_i für $i \in I$“ wie in [NAS] 1.10.1 oder auch im zweiten Beweis von **??**, in unseren verschiedenen Notationen also die k-Ringalgebra

$$k\lfloor{}'X_i \mid i \in I\rfloor = k\lfloor{}'_{!}I\rfloor = \operatorname{Ralg}_k^{\uparrow} I = k\langle \operatorname{Mon}^{\uparrow} I\rangle$$

Dann betrachten wir darin die von besagten Variablen erzeugte Unter-Liealgebra

$$L \subset (\operatorname{Ralg}_k^{\uparrow} I)_{\mathrm{L}}$$

Um zu sehen, daß sie die geforderte universelle Eigenschaft hat, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ens}(I, \mathfrak{g}) \arrow[r] & \operatorname{Ens}(I, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \\
\operatorname{Lalg}_k(L, \mathfrak{g}) \arrow[u, hook] & \operatorname{Ralg}_k(\operatorname{Ralg}_k^{\uparrow} I, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Es gilt zu zeigen, daß die linke Vertikale ein Isomorphismus ist. Dazu konstruieren wir eine rechtsinverse Abbildung. Sicher induziert für $\varphi : I \to \mathfrak{g}$ der zugehörige Homomorphismus von Ringalgebren $\tilde{\varphi} : \operatorname{Ralg}_k^{\uparrow} I \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ einen Homomorphismus von Lie-Algebren $\hat{\varphi} : L \to \mathfrak{g}$, denn nach Poincaré-Birkhoff-Witt **??** ist die kanonische Abbildung eine Injektion $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Die Zuordnung $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ist dann offensichtlich die gesuchte Rechtsinverse unserer linken Vertikale. □

Zweiter Beweis. Eine alternative und in meinen Augen natürlichere Konstruktion geht aus von der „freien Algebra $\operatorname{Alg}_k^{\uparrow} I$ über der Menge I“, wie sie in 3.3.9 konstruiert wird, einer Art „Polynomring über k in nicht-kommutierenden nicht-assoziativen durch $i \in I$ indizierten Variablen ohne Konstanten“. Wir notieren ihre Verknüpfung $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Teilen wir das zweiseitige Ideal R heraus, das von allen Elementen $(a \cdot a)$ und $(a \cdot (b \cdot c)) + (b \cdot (c \cdot a)) + (c \cdot (a \cdot b))$ mit $a, b, a \in A$ erzeugt wird, so ergibt sich offensichtlich eine Liealgebra. Daß das die gesuchte freie Liealgebra über I ist, will ich anhand des folgenden Diagramms erläutern.

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\mathrm{can}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathrm{Alg}_k^{\uparrow} I \arrow[rr, dashed, "\hat{\varphi}"] \arrow[dr] & & \mathfrak{g} \\ & (\mathrm{Alg}_k^{\uparrow} I/R) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Sei also $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Zunächst läßt sich jede Abbildung $\varphi : I \to \mathfrak{g}$ auf genau eine Weise zu einem Algebrenhomomorphismus $\hat{\varphi} : \mathrm{Alg}_k^{\uparrow} I \to \mathfrak{g}$ fortsetzen aufgrund der universellen Eigenschaft der freien Algebra. Für diese Fortsetzung gilt nun $\hat{\varphi}(R) = 0$, da $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra ist. Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten faktorisiert sie damit in eindeutiger Weise über den Quotienten nach R und wir erhalten das gesuchte $\tilde{\varphi}$. □

Ergänzung 3.1.7. Gegeben eine angeordnete Menge I versteht man unter einem **Lyndon-Wort im Alphabet I der Länge n** ein n-Tupel von Elementen von I derart, daß für jede Trennung unseres Wortes in zwei Teilwörter der erste Teil lexikographisch echt kleiner ist als der zweite Teil. Man kann zeigen, daß die "von hinten beginnend zusammengeklammerten Lyndonwörter" eine Basis der freien Liealgebra über I bilden.

3.2 Die Hausdorff-Formel*

3.2.1. Sei A eine $\mathbb{Q}$-Ringalgebra und $N_A \subset A$ die Menge ihrer nilpotenten Elemente. So liefern die Exponentialreihe und die Reihe von $\log(1+x)$ zueinander inverse Bijektionen

$$N_A \underset{\log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} 1 + N_A$$

Ist weiter $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Ringalgebren, so kommutieren die Diagramme

$$\begin{tikzcd} N_A \arrow[r, "\exp", "\sim"'] \arrow[d, "\varphi"'] & 1 + N_A \arrow[r, "\log", "\sim"'] \arrow[d, "\varphi"] & N_A \arrow[d, "\varphi"] \\ N_B \arrow[r, "\exp", "\sim"'] & 1 + N_B \arrow[r, "\log", "\sim"'] & N_B \end{tikzcd}$$

Sind schließlich Nilpotente $u, v \in N_A$ gegeben mit $uv = vu$, so gelten die Formeln $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$ und $\log((1+u)(1+v)) = \log(1+u) + \log(1+v)$. All das folgt, indem man Identitäten aus der Analysis in Identitäten für formale Potenzreihen übersetzt, vergleiche [AN1] 5.3.9 und [AN2] 2.3.12.

Definition 3.2.2. Sei k ein Körper. Unter einem **Lie-artigen Polynom** in Variablen $X_1, \ldots, X_r$ mit Koeffizienten in k verstehen wir ein Element der in der freien k-Ringalgebra $k\lfloor' X_1, \ldots, X_r\rfloor$ von den Variablen erzeugten Unterliealgebra. Die unfertigen Klammern deuten hier an, daß nicht-kommutierende Variablen gemeint sind.

Ergänzung 3.2.3. Sei k ein Körper. Ein Element der freien k-Liealgebra mit Erzeugern $X_1, \ldots, X_r$ nach 3.1.2 nennen wir auch ein **Lie-Polynom** in den Variablen $X_1, \ldots, X_r$ mit Koeffizienten in k. Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt **??** zeigt, daß der offensichtliche Liealgebrenhomomorphismus von der Liealgebra der Lie-Polynome in die Liealgebra der Lie-artigen Polynome ein Isomorphismus ist, vergleiche **??**. Dasselbe gilt mit **??** sogar über einem beliebigen Kring k. All das ist aber für uns in diesem Zusammenhang unerheblich.

3.2.4. Gegeben ein nichtnegativ graduierter Ring $A = \bigoplus_{i\geq 0} A^i$ denken wir uns im folgenden die Teilmenge $A^{\leq n} \subset A$ stets mit der Ringstruktur versehen, für die die offensichtliche Surjektion $A \twoheadrightarrow A^{\leq n}$ ein Ringhomomorphismus ist.

Satz 3.2.5. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\log((\exp X)(\exp Y)) \in \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor^{\leq n}$ ein Lie-artiges Polynom.*

3.2.6. Der homogene Anteil vom Grad n des Lie-artigen Polynoms aus 3.2.5 heißt das **n-te Hausdorff-Polynom** h_n. Zur Übung prüfe man die Formeln

$$\begin{array}{rcl} h_1(X,Y) & = & X+Y \\ h_2(X,Y) & = & [X,Y]/2 \\ h_3(X,Y) & = & [[X,Y],Y]/12 + [[Y,X],X]/12 \end{array}$$

Offensichtlich gilt sogar $h_n \in \mathbb{Z}[(n!)^{-1}]\lfloor X, Y\rfloor$. Andererseits ist nach **??** die Einbettung $\operatorname{Lalg}_k^{\uparrow} I \to \operatorname{Ralg}_k^{\uparrow} I$ für $I = \{X, Y\}$ und $k \subset \mathbb{Q}$ ein Teilring spaltend als Einbettung von k-Moduln, und offensichtlich wird sie unter der Erweiterung der Skalare zu $\mathbb{Q}$ zur entsprechenden Einbettung über $\mathbb{Q}$. Zusammen zeigt das $\operatorname{Lalg}_{\mathbb{Q}}^{\uparrow} I \cap \operatorname{Ralg}_k^{\uparrow} I = \operatorname{Lalg}_k^{\uparrow} I$. Mithin kann h_n auch als Liepolynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}[(n!)^{-1}]$ geschrieben werden.

Beweis. Wir betrachten den Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Ringalgebren

$$\Delta : \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor \to \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor$$

mit $X \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X$ und $Y \mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y$. Nach dem Satz von Friedrichs **??** ist $a \in \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor$ genau dann ein Lie-artiges Polynom, wenn gilt $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Nun ist Δ homogen vom Grad Null. Für den induzierten Homomorphismus

$$\bar{\Delta} : \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor^{\leq n} \to (\mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y\rfloor)^{\leq n}$$

haben wir folglich dasselbe: $a \in \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n}$ ist genau dann ein Lie-artiges Polynom, wenn gilt $\bar{\Delta}(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Es gilt also, für $a = \log((\exp X)(\exp Y))$ diese Bedingung zu prüfen. Das Queren steht im folgenden für die Restklasse in $(\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor)^{\leq n}$ eines Elements von $\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n}$. Jetzt rechnen wir einfach

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} a &= \bar{\Delta} \log(\exp X \exp Y) \\
&= \log(\exp \bar{\Delta}(X) \exp \bar{\Delta}(Y)) \\
&= \log((\overline{\exp X \otimes \exp X})(\overline{\exp Y \otimes \exp Y})) \\
&= \overline{\log(\exp X \exp Y \otimes \exp X \exp Y)} \\
&= \overline{\log((\exp X \exp Y) \otimes 1)} + \overline{\log(1 \otimes (\exp X \exp Y))} \\
&= (\log(\exp X \exp Y)) \otimes 1 + 1 \otimes (\log(\exp X \exp Y)) \\
&= a \otimes 1 + 1 \otimes a
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis fertig. □

3.3 Freie Algebren*

3.3.1. Ich erinnere daran, daß wir nach [GR] 3.3.2 unter einem Magma eine Menge mit einer Verknüpfung verstehen, von der weiter keine zusätzlichen Eigenschaften gefordert werden.

Definition 3.3.2. Gegeben eine Menge I verstehen wir unter einem **freien Magma über** I ein Paar (M, can) bestehend aus einem Magma M und einer Abbildung $\mathrm{can} : I \to M$ derart, dass für jedes weitere Magma N das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Mag}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, N)$$

zwischen Morphismen von Magmas und Abbildungen von Mengen induziert.

Satz 3.3.3. *Über jeder Menge I existiert ein freies Magma* (M, can).

3.3.4. Mit denselben Argumenten wie in 3.1.3 ist eine freies Magma über einer Menge im wesentlichen eindeutig bestimmt, wenn es denn existiert. Wir gönnen ihm deshalb den bestimmten Artikel und sprechen von dem freien Magma über einer gegebenen Menge. Wir notieren Mag die Kategorie der Magmas und folgerichtig $\mathrm{Mag}^{\uparrow} I$ das freie Magma über einer Menge I.

3.3.5. Das freie Magma über einer Menge mit einm Element hatten wir bereits in [GR] 3.3.18 ansatzweise diskutiert, mit $\mathbb{M}$ bezeichnet, und in Beziehung zu den sogenannten Catalan-Zahlen gesetzt.

Beweis. Wir betrachten die disjunkte Vereinigung $I \sqcup \{\rangle, \langle\}$ der Menge I mit der Menge bestehend aus zwei weiteren Symbolen $\langle$ und $\rangle$ und bilden über dieser Vereinigung wie in [TF] **??** das freie Monoid

$$\mathrm{Mon}^{\uparrow}(I \sqcup \{\rangle, \langle\})$$

alias die Menge aller Wörter einer Länge ≥ 0 in diesen Buchstaben mit dem Hintereinanderschreiben als Verknüpfung. Auf dieser Menge von Wörtern erklären wir eine neue, nun nicht mehr assoziative Verknüpfung durch die Vorschrift

$$(a, b) \mapsto \langle ab \rangle$$

mit der Notation ab für das Hintereinanderschreiben. Schließlich betrachten wir die kleinste unter unserer neuen Verknüpfung abgeschlossene Teilmenge M, die alle nur aus genau einem Buchstaben bestehenden Wörter enthält. Ein Element dieser Teilmenge M wäre etwa das Wort $\langle\langle x \langle yz \rangle\rangle w \rangle$ für beliebige $x, y, z, w \in I$. Als kanonische Abbildung betrachten wir die Abbildung $\mathrm{can} : I \to M$, die jedem Element $x \in I$ das Wort mit dem einzigen Buchstaben x zuordnet. Es ist nun leicht einzusehen, dass $\mathrm{can} : I \to M$ die von einem freien Magma geforderte Eigenschaft besitzt. □

3.3.6. Ich erinnere daran, daß wir für einen Körper k unter einer k-Algebra einen k-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ verstehen, von der weiter keine zusätzlichen Eigenschaften gefordert werden.

Definition 3.3.7. Gegeben eine Menge I und ein Körper k verstehen wir unter einer **freien k-Algebra über I** ein Paar (A, can) bestehend aus einer k-Algebra A und einer Abbildung $\mathrm{can} : I \to A$ derart, daß für jede weitere k-Algebra B das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Alg}_k(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, B)$$

induziert zwischen Homomorphismen von k-Algebren und Abbildungen von Mengen.

3.3.8. Sei k ein Körper. Mit denselben Argumenten wie in 3.1.3 ist eine freie k-Algebra über einer Menge im wesentlichen eindeutig bestimmt. Wir gönnen ihr deshalb den bestimmten Artikel und sprechen von der freien k-Algebra über einer gegebenen Menge. Wir notieren Alg_k die Kategorie der k-Algebren und folgerichtig $\mathrm{Alg}_k^{\uparrow} I$ die freie k-Algebra über einer Menge I.

Satz 3.3.9. *Gegeben eine Menge I und ein Körper k existiert stets eine freie k-Algebra A über I.*

3.3.10. Wir notieren die Kategorie der Algebren über einem Körper k als Alg_k und notieren dann im Sinne unserer allgemeinen Konventionen [TF] 4.8.8 die freie k-Algebra über einer Menge I als

$$\mathrm{Alg}_k^{\uparrow} I$$

3.3.11. Salopp gesprochen kann die freie k-Algebra über einer Menge I beschrieben werden als „der Polynomring über k in nicht-kommutierenden nicht-assoziativen durch $i \in I$ indizierten Variablen, ohne Konstanten". Bei „nicht-assoziativen Variablen" soll man sich denken, daß hier in Monomen stets „alle Klammern zu setzen sind". Da aber derartiges Geschwafel nicht als Definition durchgehen kann, erkläre ich die Konstruktion auch noch auf einem etwas formaleren Weg.

Beweis. Wir konstruieren A als den freien k-Vektorraum über dem freien Magma über I, in Formeln

$$A := k\langle \mathrm{Mag}^{\uparrow} I\rangle = \mathrm{Mod}_k^{\uparrow}(\mathrm{Mag}^{\uparrow} I)$$

Die Verknüpfung auf A erklären wir durch bilineare Fortsetzung der Verknüpfung auf dem freien Magma. Der Nachweis, daß die so konstruierte Algebra die geforderte Eigenschaft besitzt, kann dem Leser überlassen bleiben. □

3.4 Präsentation halbeinfacher Liealgebren

3.4.1. Für das folgendende brauchen wir den Begriff der **Basis** eines Wurzelsystems $R \subset V$. Man versteht darunter eine Teilmenge $\Pi \subset R$, die eine Basis von V ist und die Eigenschaft hat, daß jede Wurzel in dieser Basis entweder eine Linearkombination mit nichtnegativen Koeffizienten oder eine Linearkombination mit nichtpositiven Koeffizienten ist. In [SPW] 2.2.9 zeigen wir, daß jedes Wurzelsystem eine Basis besitzt und daß je zwei Basen durch ein Element der Weylgruppe unseres Wurzelsystems ineinander überführt werden können.

3.4.2. Gegeben ein Körper k und eine Menge I und eine Teilmenge $T \subset \mathrm{Lalg}_k^{\uparrow} I$ der freien k-Liealgebra über I verstehen wir unter der **Liealgebra mit Erzeugern** I **und Relationen** T den Quotienten $(\mathrm{Lalg}_k^{\uparrow} I)/\langle T\rangle_{\mathrm{L}}$ der freien Liealgebra über k nach dem von T erzeugten Lie-Ideal, für das ich die Notation $\langle T\rangle_{\mathrm{L}}$ vorschlage.

3.4.3. Gegeben ein Körper k und eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ und eine Teilmenge $I \subset \mathfrak{g}$ sowie eine Teilmenge $T \subset \mathrm{Lalg}_k^{\uparrow} I$ der freien k-Liealgebra über I sagen wir, die **Liealgebra** $\mathfrak{g}$ **werde präsentiert durch die Erzeuger** I **mit den Relationen** T, wenn der durch die Einbettung $I \hookrightarrow \mathfrak{g}$ induzierte Homomorphismus $\mathrm{Lalg}_k^{\uparrow} I \to \mathfrak{g}$ über den Quotienten nach dem von T erzeugten Ideal $\langle T\rangle_{\mathrm{L}}$ faktorisiert vermittels eines Isomorphismus

$$(\mathrm{Lalg}_k^{\uparrow} I)/\langle T\rangle_{\mathrm{L}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$$

Satz 3.4.4 (Präsentation durch Erzeugende und Relationen). *1. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und $\Pi \subset R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ eine Basis des zugehörigen Wurzelsystems. Wählen wir für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ einen Erzeuger $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ des Wurzelraums, so gibt es Elemente $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ und diese Elemente mitsamt den $h_\alpha := \alpha^\vee$ erfüllen die Relationen*

$$\begin{array}{rcl}
[x_\alpha, y_\alpha] & = & h_\alpha \quad \forall \alpha; \\
[x_\alpha, y_\beta] & = & 0 \quad \textit{falls } \alpha \neq \beta; \\
[h_\alpha, h_\beta] & = & 0 \quad \forall \alpha, \beta; \\
[h_\alpha, x_\beta] & = & \quad \langle \beta, \alpha^\vee \rangle x_\beta \quad \forall \alpha, \beta; \\
[h_\alpha, y_\beta] & = & -\langle \beta, \alpha^\vee \rangle y_\beta \quad \forall \alpha, \beta; \\
(\operatorname{ad} x_\alpha)^{1-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}(x_\beta) & = & 0 \quad \textit{falls } \alpha \neq \beta; \\
(\operatorname{ad} y_\alpha)^{1-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}(y_\beta) & = & 0 \quad \textit{falls } \alpha \neq \beta.
\end{array}$$

Genauer wird die Liealgebra $\mathfrak{g}$ sogar präsentiert durch die so gewählten Erzeuger $(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ mit den angegebenen Relationen.

2. *Gegeben $R \supset \Pi$ ein Wurzelsystem mit einer Basis ist die komplexe Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{R,\Pi}$ erzeugt von den Symbolen $(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ mit den obigen Relationen eine halbeinfache Liealgebra. Die Bilder der Erzeuger h_α bilden darin die Basis einer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ und es gibt einen Isomorphismus von Wurzelsystemen $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ mit $\beta \mapsto (h_\alpha \mapsto \langle \beta, \alpha^\vee \rangle)$.*

3.4.5. Zwei einfache Wurzeln $\alpha, \beta \in \Pi$ stehen stets in einem stumpfen Winkel zueinander, die $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ in unserem Satz sind also stets nichtpositive ganze Zahlen. In der Tat wäre sonst $s_\alpha \beta = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$ eine Wurzel, bei deren Darstellung in besagter Basis positive und negtive Koeffizienten vorkommen, und das stünde im Widerspruch zu unserer Definition einer Basis.

3.4.6. Daß wir zu unseren Erzeugern die h_α mit hinzunehmen, hat nur den Grund, daß die Relationen dann übersichtlicher geschrieben werden können. Der Satz geht auf Serre zurück. Die obigen Relationen, insbesondere die letzten beiden, werden oft als **Serre-Relationen** bezeichnet.

3.4.7. Der zweite Teil des Satzes gilt mit demselben Beweis allgemeiner für die über einem beliebigen Körper k der Charakteristik Null von besagten Erzeugern und Relationen erzeugte Liealgebra.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis des ersten Teils. Daß wir zu jedem x_α ein zugehöriges y_α finden können, folgt aus unserer Definition von $\alpha^\vee$ in 2.3.16 als spezieller Erzeuger des nach 2.3.15 eindimensionalen Raums $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Daß für diese Elemente x_α, y_α und $h_\alpha := \alpha^\vee$ alle Relationen aus unserem Satz erfüllt sind, ergibt sich unmittelbar daraus, daß für einfache Wurzeln α, β weder $\alpha - \beta$ noch $s_\alpha(\beta) + \alpha$ Wurzeln sind, wobei letztere Erkenntnis durch Anwenden von s_α aus ersterer Erkenntnis folgt. Mit unserer Notation aus Teil 2 gibt es also schon mal einen Homomorphismus

$$\mathfrak{g}_{R,\Pi} \to \mathfrak{g}$$

Wir müssen nun noch zeigen, daß er ein Isomorphismus ist. Zunächst zeigen wir nur, daß er surjektiv ist, daß also unsere halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ erzeugt wird von den Wurzelräumen zu den einfachen Wurzeln und ihren Negativen. Dazu erinnern wir aus 2.3.12.4, daß für je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Weiter erinnern wir aus [SPW] 2.3.9, daß jede positive Wurzel aus einer einfachen Wurzel erreicht werden kann durch eine Folge von Wurzeln, bei der jedes Glied aus dem Vorhergehenden durch die Addition einer einfachen Wurzel hervorgeht. Zusammen zeigt das, daß unsere Abbildung eine Surjektion $\mathfrak{g}_{R,\Pi} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ sein muß. Können wir Teil 2 zeigen, so muß diese Surjektion offensichtlich ein Isomorphismus sein. Also machen wir uns nun an den Beweis von Teil 2. Er ist etwas umständlich und wird in mehrere Teilschritte zerlegt.

1. Gegeben eine Halbgruppe Γ versteht man unter einer Γ-Graduierung einer Algebra A eine Zerlegung als direkte Summe $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ derart, daß die Verknüpfung $A_\gamma \times A_\mu$ nach $A_{\gamma+\mu}$ abbildet. Beide Konstruktionen der freien Liealgebra über einer Menge I zeigen, daß diese eine eindeutig bestimmte Graduierung durch die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\langle I \rangle$ besitzt, für die der Erzeuger x_i jeweils den Grad i hat. Durch Vergröberung dieser Graduierung erhalten wir eine Graduierung der freien Liealgebra in Erzeugern $(x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ nach dem Wurzelgitter $\langle R \rangle$ mit x_α homogen vom Grad α, y_α homogen vom Grad $-\alpha$ und h_α homogen vom Grad 0.

2. Wir untersuchen nun zunächst die Liealgebra $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{R,\Pi}$ mit denselben Erzeugern aber nur den ersten fünf Relationen. Alle unsere Relationen sind homogen für unsere $\langle R \rangle$-Graduierung, folglich induziert sie eine $\langle R \rangle$-Graduierung auf dem Quotienten $\tilde{\mathfrak{g}}_{R,\Pi}$.

3. Wir zeigen nun, daß die Bilder $\{\tilde{x}_\alpha, \tilde{h}_\alpha, \tilde{y}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ unserer Erzeuger in $\tilde{\mathfrak{g}}$ linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir die freie k-Ringalgebra T mit Erzeugern $(\hat{y}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ alias den „nichtkommutativen Polynomring in diesen Variablen“. Er besitzt eine natürliche $\langle R \rangle$-Graduierung $T = \bigoplus T_\lambda$ mit $\hat{y}_\alpha$ homogen vom Grad $(-\alpha)$. Nun machen wir T zu einer Darstellung von $\tilde{\mathfrak{g}}$ wie folgt:

$\tilde{h}_\alpha$ operiere auf T_λ durch den Skalar $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$;

$\tilde{y}_\alpha$ operiere auf T durch Multiplikation von links mit $\hat{y}_\alpha$;

$\tilde{x}_\alpha$ mache die $1 \in T$ zu Null. Seine Operation auf einem beliebigen anderen Monom $\hat{y}_\beta w$ mit einem beliebigen Monom w sei induktiv erklärt durch die

Formel $\tilde{x}_\alpha(\hat{y}_\beta w) = \delta_{\alpha\beta}\tilde{h}_\alpha w + \tilde{y}_\beta(\tilde{x}_\alpha w)$. Es ist leicht zu sehen, daß wir so in der Tat eine Darstellung T von $\tilde{\mathfrak{g}}$ erhalten.

Da die $\tilde{h}_\alpha$ durch linear unabhängige Endomorphismen auf T operieren, müssen sie bereits in $\tilde{\mathfrak{g}}$ linear unabhängig gewesen sein. Da die $\tilde{y}_\alpha$ auf T nicht durch Null operieren, müssen sie bereits in $\tilde{\mathfrak{g}}$ von Null verschieden sein. Dasselbe gilt für die $\tilde{x}_\alpha$. Die lineare Unabhängigkeit der Menge $\{\tilde{x}_\alpha, \tilde{h}_\alpha, \tilde{y}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ folgt dann aus der $\langle R\rangle$-Graduierung.

4. Bezeichnet X, H, Y die von den $\tilde{x}_\alpha$, bzw. den $\tilde{h}_\alpha$, bzw. den $\tilde{y}_\alpha$ in $\tilde{\mathfrak{g}}$ erzeugten Unteralgebren, so gilt

$$\tilde{\mathfrak{g}} = X \oplus H \oplus Y$$

In der Tat ist der Untervektorraum $X + H + Y$ offensichtlich stabil ist unter allen $\operatorname{ad}\tilde{x}_\alpha$, $\operatorname{ad}\tilde{y}_\alpha$ und $\operatorname{ad}\tilde{h}_\alpha$ und ist mithin eine Unteralgebra, die die Erzeuger enthält. Um zu sehen, daß unsere Summe direkt ist, reicht es zu bemerken, daß X nur homogene Komponenten zu Graden aus $|\Pi\rangle\backslash 0$ hat, Y zu Graden aus $|-\Pi\rangle\backslash 0$, und H zum Grad Null. Insbesondere bilden also die $\tilde{h}_\alpha$ für $\alpha \in \Pi$ eine Basis von H.

5. Gegeben $\alpha \neq \beta$ setzen wir nun

$$\begin{array}{lcl} \tilde{x}_{\alpha\beta} & := & (\operatorname{ad}\tilde{x}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}\tilde{x}_\beta \\ \tilde{y}_{\alpha\beta} & := & (\operatorname{ad}\tilde{y}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}\tilde{y}_\beta \end{array}$$

und behaupten in $\tilde{\mathfrak{g}}$ die Identität $[\tilde{x}_\gamma, \tilde{y}_{\alpha\beta}] = 0$ für alle γ. Hier sind verschiedene Fälle getrennt zu betrachten. Im Fall $\gamma \neq \alpha$ vertauscht $(\operatorname{ad}\tilde{x}_\gamma)$ mit $(\operatorname{ad}\tilde{y}_\alpha)$. Ist außerdem $\gamma \neq \beta$, so folgt die Behauptung aus $[\tilde{x}_\gamma, \tilde{y}_\beta] = 0$. Ist $\gamma = \beta$, so rechnen wir

$$[\tilde{x}_\beta, \tilde{x}_{\alpha\beta}] = (\operatorname{ad}\tilde{y}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}[\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta] = (\operatorname{ad}\tilde{y}_\alpha)^{-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}(\langle\alpha, \beta^\vee\rangle\tilde{y}_\alpha)$$

und das ist Null im Fall $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 0$ und auch Null im Fall $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle \neq 0$, da dann notwendig auch gilt $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle \neq 0$. Ist schließlich $\gamma = \alpha$, so rechnen wir

$$[\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_{\beta\alpha}] = (\operatorname{ad}\tilde{x}_\alpha)(\operatorname{ad}\tilde{y}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}(\tilde{y}_\beta)$$

Nun aber gilt $(\operatorname{ad}\tilde{x}_\alpha)(\tilde{y}_\beta) = 0$ und $(\operatorname{ad}\tilde{h}_\alpha)(\tilde{y}_\beta) = -\langle\beta, \alpha^\vee\rangle\tilde{y}_\beta$ und folglich ist die von $\tilde{y}_\beta$ erzeugte Unterdarstellung unter der adjungierten Darstellung von $\langle\tilde{x}_\alpha, \tilde{h}_\alpha, \tilde{y}_\alpha\rangle \cong \mathrm{sl}(2; \mathbb{C})$ auf $\tilde{\mathfrak{g}}$ ein höchster Gewichtsmodul mit höchstem Gewichtsvektor $\tilde{y}_\beta$. Damit folgt unsere Behauptung in diesem Fall aus unserer Kenntnis der Struktur dieser Darstellungen der $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$. Analog folgt $[\tilde{y}_\gamma, \tilde{x}_{\alpha\beta}] = 0$ für alle γ.

6. Sei nun $K \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ das von allen $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ und $\tilde{y}_{\alpha\beta}$ erzeugte Ideal, so daß nach unseren Definitionen gilt $\mathfrak{g}_{R,\Pi} = \tilde{\mathfrak{g}}/K$. Wir behaupten zunächst, daß das von den $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ in der Unteralgebra X erzeugte Ideal $I \subset X$ bereits ein Ideal von $\tilde{\mathfrak{g}}$ ist. In der Tat

ist es stabil unter allen $(\operatorname{ad}\tilde{h}_\gamma)$ und nach dem Vorhergehenden auch unter allen $(\operatorname{ad}\tilde{y}_\gamma)$. Ebenso ist das von allen $\tilde{y}_{\alpha\beta}$ in Y erzeugte Ideal $J \subset Y$ bereits ein Ideal von $\tilde{\mathfrak{g}}$. Daraus folgt unmittelbar $K = I + J$ und $\mathfrak{g} = X/I \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus Y/J$.

7. Es ist nach dem Vorhergehenden klar, daß die Familie $\{\bar{x}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \bar{y}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ der Bilder unserer Erzeuger in $\mathfrak{g}$ auch linear unabhängig ist. Weiter sind $\operatorname{ad}\bar{x}_\alpha$ und $\operatorname{ad}\bar{y}_\alpha$ lokal nilpotente Endomorphismen von $\mathfrak{g}$, denn diejenigen Elemente, auf denen eine Potenz von $\operatorname{ad}\bar{x}_\alpha$ verschwindet, bilden eine Unteralgebra, die alle Erzeuger $x_\beta, y_\beta, h_\beta$ enthält, und für $\operatorname{ad}\bar{y}_\alpha$ desgleichen. Für jede Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha = \langle \bar{x}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \bar{y}_\alpha \rangle \cong \mathfrak{sl}_2$ ist also $\mathfrak{g}$ die Vereinigung seiner endlichdimensionalen $(\operatorname{ad}\mathfrak{g}^\alpha)$-stabilen Teilräume.

8. Da $\mathfrak{g}$ die Vereinigung seiner endlichdimensionalen $(\operatorname{ad}\mathfrak{g}^\alpha)$-stabilen Teilräume ist, muß für alle $\lambda \in \langle R \rangle$ mit $n := \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$ die adjungierte Operation von $\bar{y}_\alpha$ einen Isomorphismus $(\operatorname{ad}\bar{y}_\alpha)^n : \mathfrak{g}_\lambda \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{g}_{\lambda - n\alpha}$ liefern. Wegen $\lambda - n\alpha = s_\alpha(\lambda)$ folgt $\dim \mathfrak{g}_\lambda = \dim \mathfrak{g}_{w\lambda}$ für jedes $\lambda \in \langle R \rangle$ und jedes Element $w \in W$ der Weylgruppe unseres Wurzelsystems. Insbesondere folgt $\dim \mathfrak{g}_\gamma = 1$ für alle $\gamma \in R$, da für $\alpha \in \Pi$ ja $\mathfrak{g}_\alpha$ das Erzeugnis von $\bar{x}_\alpha$ sein muß.

9. Nun soll gezeigt werden, daß gilt $\mathfrak{g}_\lambda = 0$ für $\lambda \notin R \sqcup \{0\}$. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle. Sei zunächst $\lambda = n\gamma$ ein Vielfaches einer Wurzel $\gamma \in R$ mit $n \geq 2$. Wäre $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$, so hätten wir auch $\mathfrak{g}_{n\alpha} \neq 0$ für eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$. Die Darstellungstheorie von $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$ liefert dann aber $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$ im Widerspruch zu dem, was wir bereits wissen. Ist andererseits λ kein ganzzahliges Vielfaches einer Wurzel, so zeigt das folgende Lemma 3.4.8, daß notwendig gilt $\mathfrak{g}_\lambda = 0$. Wir haben also

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\gamma \in R} \mathfrak{g}_\gamma$$

und die $\bar{h}_\alpha$ für einfache Wurzeln $\alpha \in \Pi$ bilden eine Basis von $\mathfrak{g}_0$.

10. Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist. Jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ ist ja stabil unter $(\operatorname{ad}\mathfrak{g}_0)$, also die direkte Summe seiner homogenen Anteile. Jetzt sagt uns die Darstellungstheorie von $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$, daß für alle $\alpha \in \Pi$ und $\gamma \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_{\gamma+\alpha}$ falls $\gamma + \alpha \in R$ und $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_{\gamma-\alpha}$ falls $\gamma - \alpha \in R$. Umfaßt ein Ideal einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_\gamma$ für $\gamma \in R^+$, so umfaßt es mithin nach [SPW] 2.3.9 auch einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_\alpha$ für eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$. Umfaßt ein Ideal einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_\gamma$ für $\gamma \in R^-$, so zeigen wir analog, daß es auch einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ umfaßt für $\alpha \in \Pi$ eine einfache Wurzel. Umfaßte ein Ideal I keinen Wurzelraum, so läge es in $\mathfrak{g}_0$, und wäre es nicht Null, so gäbe es $\alpha \in \Pi$ mit $\alpha(I) \neq 0$ und folglich umfaßte I doch einen Wurzelraum, nämlich $\mathfrak{g}_\alpha = [I, \mathfrak{g}_\alpha]$. Mithin umfaßt jedes Ideal, das nicht Null ist, für mindestens eine einfache Wurzel α entweder $\mathfrak{g}_\alpha$ oder $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Dann aber umfaßt es offensichtlich auch $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$ und kann nicht abelsch sein. Folglich ist unsere Liealgebra $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

11. Es ist nun offensichtlich, daß $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}_0$ eine Cartan'sche von $\mathfrak{g}$ ist und daß wir einen Isomorphismus von Wurzelsystemen

$$R \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

erhalten durch die Vorschrift $\alpha \mapsto (\bar{h}_\beta \mapsto \langle \alpha, \beta^\vee \rangle)$. □

Lemma 3.4.8. *Seien $R \subset V$ ein Wurzelsystem, $R^+ \subset R$ ein System positiver Wurzeln und W die Weylgruppe. Jedes Element des Wurzelgitters $\lambda \in \langle R \rangle$ mit $W\lambda \subset |R^+\rangle \cup |-R^+\rangle$ ist ein ganzzahliges Vielfaches einer Wurzel.*

Beweis. Ist λ kein ganzzahliges Vielfaches einer Wurzel, so gibt es $h \in \langle R \rangle^*_{\mathbb{Q}}$ mit $\langle \lambda, h \rangle = 0$ aber $\langle \alpha, h \rangle \neq 0$ für jede Wurzel $\alpha \in R$. Dann finden wir sicher $w \in W$ mit $\langle \alpha, wh \rangle > 0$ für alle $\alpha \in R^+$. Aus $\langle w\lambda, wh \rangle = 0$ folgt nun, daß in der Darstellung $w\lambda = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ von $w\lambda$ als Linearkombination einfacher Wurzeln negative und positive Koeffizienten vorkommen müssen. □

Satz 3.4.9 (Klassifikation der halbeinfachen Liealgebren). *Ordnen wir jeder komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ den Dualraum einer Cartan'schen $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ zu mitsamt dem zugehörigen Wurzelsystem $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe} \\ \textit{halbeinfache Liealgebren} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{abstrakte} \\ \textit{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$
$$\mathfrak{g} \mapsto \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$$

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 3.4.4 über die Präsentation halbeinfacher Liealgebren. □

3.4.10. Dasselbe folgt mit demselben Beweis über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null. Die Klassifikation abstrakter Wurzelsysteme wird in [SPW] 2.3.8 besprochen.

Satz 3.4.11 (Klassifikation der einfachen Liealgebren). *Ordnen wir jeder komplexen einfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ den Dualraum einer Cartan'schen $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ zu mitsamt dem zugehörigen Wurzelsystem $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe} \\ \textit{einfache Liealgebren} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe unzerlegbare} \\ \textit{abstrakte Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$
$$\mathfrak{g} \mapsto \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$$

3.4.12. Dasselbe folgt mit demselben Beweis über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null.

3.4.13. Die Killing-Klassifikation 1.1.20 folgt unmittelbar aus dem Zusammenspiel dieses Satzes mit der Klassifikation unzerlegbarer Wurzelsysteme in [SPW] 2.3.6.

Beweis. Hier muß über 3.4.11 hinaus nur noch gezeigt werden, daß eine halbeinfache komplexe Liealgebra genau dann einfach ist, wenn ihr Wurzelsystem unzerlegbar ist. Nun, jede Zerlegung des Wurzelsystems führt offensichtlich zu einer Zerlegung der zugehörigen Liealgebra in eine direkte Summe von Idealen. Umgekehrt führt jede Zerlegung einer halbeinfachen Liealgebra in eine direkte Summe von Idealen offensichtlich zu einer Zerlegung ihres Wurzelsystems. □

Bemerkung 3.4.14. Jede einfache endlichdimensionale komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist auch als reelle Liealgebra einfach. In der Tat, ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein reelles Ideal, so sind $\mathfrak{a} \cap \mathrm{i}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + \mathrm{i}\mathfrak{a}$ komplexe Ideale, sind also jeweils Null oder ganz $\mathfrak{g}$. Aus $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$ folgt damit sofort $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathrm{i}\mathfrak{a}$. Insbesondere wäre $\mathfrak{a}$ eine einfache reelle Liealgebra. Dann aber müßte $\mathfrak{a}$ trivial operieren auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, Widerspruch.

Übungen

Übung 3.4.15 (**Invarianten in einfachen Liealgebren**). Gegeben (R, Π) ein irreduzibles Wurzelsystem mit einer Basis operiert die Gruppe S aller Automorphismen von R, die unsere Basis stabilisieren, offensichtlich auf der einfachen Liealgebra $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{R,\Pi}$. Im folgenden bezeichnen wir einfache Lie-Algebren durch das Symbol ihres Wurzelsystems. Man zeige $\mathrm{E}_6^{\mathcal{S}_2} \cong \mathrm{F}_4$ und $\mathrm{D}_4^{\mathcal{S}_3} \cong \mathrm{G}_2$ und $\mathrm{D}_n^{\mathcal{S}_2} \cong \mathrm{B}_{n-1}$ für $n \geq 4$ und $\mathrm{A}_{2n-1}^{\mathcal{S}_2} \cong \mathrm{C}_n$ für $n \geq 2$. Hinweis: Seien α, β die beiden Wurzeln nach der Verzweigung am Ende in Typ D_n. So liefert $s_\alpha s_\beta$ eine Spiegelung zu einer einfachen Wurzel in $\mathrm{D}_n^{\mathcal{S}_2}$. Hinweis: Man suche eine Wurzelraumzerlegung für die Invarianten in der Cartan'schen.

Übung 3.4.16 (**Deligne's exzeptionelle Serie**). Es gibt Inklusionen von halbeinfachen Liealgebren $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_2 \subset \mathrm{G}_2 \subset \mathrm{D}_4 \subset \mathrm{F}_4 \subset \mathrm{E}_6 \subset \mathrm{E}_7 \subset \mathrm{E}_8$. Man könnte zwischen $\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{D}_4$ noch $\mathfrak{so}(7)$ alias B_3 einfügen, vergleiche **??**. Der Punkt ist aber, daß es so wie sie dasteht viele über unsere Serie homogene Formeln gibt.

3.5 Reelle halbeinfache Liealgebren*

Definition 3.5.1. Eine **reelle Form eines komplexen Vektorraums** V ist ein reeller Untervektorraum $V_\mathbb{R} \subset V$ derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V_\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} V$ liefert. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß $V_\mathbb{R}$ ganz V als $\mathbb{C}$-Vektorraum erzeugt und daß jede über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Teilmenge unseres Untervektorraums $V_\mathbb{R}$ auch über $\mathbb{C}$ linear unabhängig ist in ganz V.

3.5.2 (**Reelle Formen und schieflineare Involutionen**). Gegeben ein komplexer Vektorraum V erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{reelle Formen} \\ V_{\mathbb{R}} \subset V \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \theta : V \to V \end{array} \right\}$$

wie folgt: Jeder reellen Form $V_{\mathbb{R}} \subset V$ ordnen wir diejenige schieflineare Involution zu, die durch die Vorschrift $\theta : a \otimes v \mapsto \bar{a} \otimes v \quad \forall a \in \mathbb{C}, v \in V_{\mathbb{R}}$ gegeben ist, und umgekehrt jeder schieflinearen Involution $\theta : V \to V$ ihre Fixpunktmenge $V_{\mathbb{R}} := V^{\theta}$.

Definition 3.5.3. Wenn für zwei reelle Formen eines komplexen Vektorraums die zugehörigen schieflinearen Involutionen kommutieren, sagen wir auch kurz, die **Formen kommutieren**.

3.5.4 (**Kommutierende reelle Formen und reelle Involutionen**). Gegeben ein komplexer Vektorraum V mit einer reellen Form $V_{\mathbb{R}} \subset V$ und zugehöriger schieflinearer Involution $\theta : V \to V$ erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}\text{-lineare Involutionen} \\ \sigma : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \gamma : V \to V \text{ mit } \theta\gamma = \gamma\theta \end{array} \right\}$$

wie folgt: Jedem σ werde die schieflineare Involution $a \otimes v \mapsto \bar{a} \otimes \sigma(v)$ zugeordnet und jedem γ seine Restriktion auf $V^{\theta} = V_{\mathbb{R}}$.

Definition 3.5.5. Seien $V \supset V_{\mathbb{R}}$ ein komplexer Vektorraum mit einer reellen Form. Ein komplexer Untervektorraum $W \subset V$ heißt **definiert über** $\mathbb{R}$ genau dann, wenn es einen reellen Untervektorraum $W_{\mathbb{R}} \subset V_{\mathbb{R}}$ gibt derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} \stackrel{\sim}{\to} W$ liefert.

3.5.6. Seien $V \supset V_{\mathbb{R}}$ ein komplexer Vektorraum mit einer reellen Form und sei $\theta : V \to V$ die zugehörige schieflineare Involution. Offensichtlich ist ein komplexer Teilraum $W \subset V$ genau dann definiert über $\mathbb{R}$, wenn er unter θ stabil ist, wenn also in Formeln gilt $\theta(W) \subset W$ oder gleichbedeutend $\theta(W) = W$.

Definition 3.5.7. Eine **reelle Form einer $\mathbb{C}$-Algebra** A ist eine reelle Form $A_{\mathbb{R}} \subset A$ des Vektorraums A, die gleichzeitig eine reelle Unteralgebra von A ist. Gegeben eine $\mathbb{C}$-Algebra A liefern die Bijektionen aus 3.5.2 auch zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{reelle Formen} \\ A_{\mathbb{R}} \subset A \\ \text{der Algebra } A \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \theta : A \to A \\ \text{der Algebra } A \end{array} \right\}$$

Hier fordern wir von Involutionen einer Algebra zusätzlich, daß sie mit der Verknüpfung in unserer Algebra verträglich sein sollen.

Definition 3.5.8. Sei $\mathfrak{g}_0$ eine halbeinfache reelle Liealgebra. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ heißt eine **spaltende Cartan'sche** genau dann, wenn für alle $H \in \mathfrak{h}_0$ die Abbildung $\mathrm{ad}(H) : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ diagonalisierbar ist. Eine halbeinfache reelle Liealgebra heißt **spaltend** genau dann, wenn sie eine spaltende Cartan'sche besitzt.

3.5.9. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ einer halbeinfachen reellen Liealgebra ist genau dann spaltend, wenn mit den Notationen $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0$ und $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$ alle Wurzeln des Wurzelsystems $\mathrm{R}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ auf $\mathfrak{h}_0$ reelle Werte annehmen.

3.5.10. Eine reelle Liealgebra heißt **kompakt**, wenn sie endlichdimensional ist mit negativ definiter Killing-Form. Die Herkunft dieser Terminologie wird in [ML] 4.2.4 erklärt: Dort zeigen wir, daß die kompakten Liealgebren genau die Liealgebren kompakter Liegruppen mit endlichem Zentrum sind. Nach 1.7.9 ist jede kompakte reelle Liealgebra halbeinfach, denn ihre Killingform ist per definitionem nicht ausgeartet.

Proposition 3.5.11 (**Spezielle reelle Formen halbeinfacher Lie-Algebren**). *Jede halbeinfache komplexe Liealgebra besitzt eine spaltende reelle Form und eine kompakte reelle Form.*

Beweis. Die Existenz spaltender reeller Formen folgt aus der Beschreibung durch Erzeuger und Relationen 3.4.4 und 3.4.7. Um die Existenz kompakter reeller Formen zu zeigen, müssen wir mehr arbeiten. Gegeben ein Wurzelsystem mit Basis $R \supset \Pi$ gibt es, wie die Beschreibung durch Erzeuger und Relationen 3.4.4 zeigt, genau einen Automorphismus der zugehörigen halbeinfachen komplexen Liealgebra

$$\tau : \mathfrak{g}_{R,\Pi} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{R,\Pi}$$

mit $\tau : h_\alpha \mapsto -h_\alpha$ und $\tau : x_\alpha \mapsto -y_\alpha$ und $\tau : y_\alpha \mapsto -x_\alpha$ in den dortigen Notationen. Er heißt die **Chevalley-Involution** und stabilisiert die reelle Unterliealgebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{R,\Pi}$, die von den $(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ erzeugt wird. Die Einbettung dieser reellen Unteralgebra induziert nun offensichtlich einen Isomorphismus von komplexen Liealgebren

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$$

Durch Transport von $\theta : a \otimes v \mapsto \bar{a} \otimes v$ erhalten wir eine schieflineare Involution θ auf $\mathfrak{g}$, die mit unserer Chevalley-Involution τ kommutiert. Per definitionem entspricht θ der reellen Form $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ von $\mathfrak{g}$. Dann aber entspricht $\theta\tau = \tau\theta$ auch einer reellen Form $\mathfrak{g}^{\tau\theta} =: \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$. Wir zeigen nun, daß die Killingform von $\mathfrak{k}$ negativ definit ist. Nach 2.3.25 ist sie schon mal negativ definit auf $\mathfrak{h}^{\theta\tau} = \langle \mathrm{i}h_\alpha \mid \alpha \in \Pi\rangle_{\mathbb{R}}$. Da nach 2.3.26 und in der dortigen Notation für alle einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ gilt $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{Q}_{>0}$ und da eh gilt $\kappa(x_\alpha, x_\alpha) = 0 = \kappa(y_\alpha, y_\alpha)$, ist die Killingform auch für alle einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ negativ definit auf $(\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})^{\theta\tau} =$

$\langle x_\alpha - y_\alpha, \mathrm{i}x_\alpha + \mathrm{i}y_\alpha\rangle_\mathbb{R}$. Kennen wir bereits die Existenz einer Chevalley-Basis 3.5.12, so können wir dasselbe Argument ebenso für die Wurzelräume zu nicht notwendig einfachen Wurzeln verwenden und sind fertig. Alternativ können wir auch wie folgt argumentieren: Anhand der Wirkung von $\theta\tau$ auf $\mathfrak{h}$ sieht man leicht, daß $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})$ für jede Wurzel γ unter $\theta\tau$ stabil ist. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Killingform für jede Wurzel $\gamma \in R$ negativ definit ist auf $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})^{\theta\tau}$. Dazu erinneren wir aus [AN1] 9.2.34 die elementare Identität

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sie impliziert für die adjungierte Darstellung der Liegruppe $\mathrm{SU}(2)$ die Formel

$$\exp\left(\mathrm{ad}\begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da es nun einen Homomorphismus von Lie-Algebren $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}$ gibt mit $e \mapsto x_\alpha$, $h \mapsto h_\alpha$ und $f \mapsto y_\alpha$, folgern wir für alle einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ unmittelbar

$$\exp(\mathrm{ad}(\tfrac{\pi}{2}(x_\alpha - y_\alpha))) : h_\alpha \mapsto -h_\alpha$$

Offensichtlich ist dieser Automorphismus von $\mathfrak{g}$ auch die Identität auf $\ker\alpha \subset \mathfrak{h}$. Mithin stabilisiert unser Automorphismus die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ und operiert dort wie die Wurzelspiegelung s_α der Weylgruppe. Das zeigt, daß unser Automorphismus $\mathfrak{g}_\gamma$ in $\mathfrak{g}_{s_\alpha\gamma}$ überführt. Andererseits ist $\frac{\pi}{2}(x_\alpha - y_\alpha)$ invariant unter $\theta\tau$ und unser Automorphismus identifiziert folglich $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})^{\theta\tau}$ mit $(\mathfrak{g}_{s_\alpha\gamma} \oplus \mathfrak{g}_{-s_\alpha\gamma})^{\theta\tau}$. Da die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe erzeugen und da die Weylgruppenbahn jeder Wurzel mindestens eine einfache Wurzel enthält, muß die Killingform damit negativ definit sein auf $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})^{\theta\tau}$ für jede Wurzel $\gamma \in R$ und die Existenz einer kompakten reellen Form ist gezeigt. □

Ergänzung 3.5.12 (**Chevalley-Basis**). Gegeben $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein involutiver Automorphismus mit $\tau(h) = -h$ für alle $h \in \mathfrak{h}$, zum Beispiel unsere Chevalley-Involution aus dem Beweis von 3.5.11, prüft man leicht, daß man jeder Wurzel $\gamma \in R$ einen Wurzelvektor $x_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$ so zuordnen kann, daß für alle Wurzeln gilt $\tau(x_\gamma) = -x_{-\gamma}$ und $[x_\gamma, x_{-\gamma}] = \gamma^\vee$. Weiter prüft man leicht, daß diese Wahl durch τ eindeutig bestimmt wird bis auf Vorzeichen: Genauer gibt es für jede weitere Wahl x'_γ eine Abbildung $s : R \to \{1, -1\}$ mit $x'_\gamma = s(\gamma)x_\gamma$ und $s(\gamma) = s(-\gamma)$ für alle $\gamma \in R$. Wir behaupten nun, daß mit so gewählten Wurzelvektoren für beliebige Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt

$$[x_\alpha, x_\beta] \in \mathbb{Z}x_{\alpha+\beta}$$

Ergänzen wir also unsere Wurzelvektoren durch Kowurzeln zu einer Basis von $\mathfrak{g}$, so sind alle die Koeffizienten ganzzahlig, die wir brauchen, um die Lieklammer zweier Basiselemente als Linearkombination unserer Basiselemente auszudrücken. Um unsere Behauptung zu zeigen, setzen wir $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha,\beta} x_{\alpha+\beta}$ für beliebige Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$. Die Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ liefert

$$N_{-\alpha,\alpha+\beta} N_{\alpha,\beta} = (q+1)p$$

für p, q definiert durch die Eigenschaft, daß die α-Wurzelkette durch β genau von $\beta - q\alpha$ bis $\beta + p\alpha$ reicht. Man sieht das besonders gut an der Realisierung der einfachen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ durch homogene Polynome in zwei Variablen aus dem Beweis des Klassifikationssatzes 1.2.13. Bis hierher haben wir nur verwendet, daß $(x_\alpha, \alpha^\vee, x_{-\alpha})$ die Relationen der Standarbasis von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ erfüllen. In unserer Situation gilt nun weiter die höchst absonderliche Formel

$$\frac{\|\alpha+\beta\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{q+1}{p}$$

für ein beliebiges weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{Q}$-Spann des Wurzelgitters. Ich kenne dafür keinen besseren Beweis als das Durchgehen aller Wurzelsysteme vom Rang zwei mit der Formel $\|\gamma\|^2/\|\beta\|^2 = \langle\gamma, \beta^\vee\rangle / \langle\beta, \gamma^\vee\rangle$ aus [SPW] 2.1.16. Mit der Invarianz $\kappa([x_\alpha, x_\beta], x_{-\alpha-\beta}) = -\kappa(x_\beta, [x_\alpha, x_{-\alpha-\beta}])$ der Killingform und der Identität $\kappa(\gamma^\vee, \gamma^\vee) = 1/\|\gamma\|^2$ für ein geeignetes weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{Q}$-Spann des Wurzelgitters ergibt sich weiter sofort

$$\frac{N_{\alpha,\beta}}{\|\alpha+\beta\|^2} = -\frac{N_{\alpha,-\alpha-\beta}}{\|\beta\|^2}$$

Zusammen liefern die drei letzten herausgehobenen Formeln unschwer die Identität $N_{\alpha,-\alpha-\beta} N_{-\alpha,\alpha+\beta} = -p^2$. Wenden wir nun unsere Annahme $\tau(x_\gamma) = -x_{-\gamma}$ an, so folgt leicht $N_{\alpha,-\alpha-\beta} = -N_{-\alpha,\alpha+\beta} = \pm p$ und $N_{\alpha,\beta} = \pm(q+1)$ und das sind ganze Zahlen.

Definition 3.5.13. Eine Involution ϑ einer reellen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ heißt eine **Cartan-Involution**, wenn die Fixpunktmenge der schieflinearen Involution $\vartheta_c := \vartheta \otimes c : \mathfrak{g}_0 \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \to \mathfrak{g}_0 \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ eine kompakte Liealgebra ist.

Beispiel 3.5.14. Unsere Chevalley-Involution aus dem Beweis der Existenz kompakter reeller Formen 3.5.11 ist, wenn wir sie auf die spaltende reelle Form $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ von ebendort einschränken, eine Cartan-Involution der halbeinfachen reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

3.5.15 (**Definitheitskriterium für Cartan-Involutionen**). Man überlegt sich leicht, daß eine Involution ϑ einer reellen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ genau dann eine

Cartan-Involution ist, wenn die Bilinearform

$$\kappa_\vartheta(x, y) := \kappa(x, \vartheta y)$$

negativ definit ist. In der Tat ist κ_ϑ symmetrisch und ist genau dann negativ definit, wenn die Sesquilinearform $(x, y) \mapsto \kappa(x, \vartheta_c y)$ negativ definit ist auf $\mathfrak{g}_0 \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$, und das ist genau dann der Fall, wenn die Killingform negativ definit ist auf der Fixpunktmenge von ϑ_c. Wir verwenden hier die Notation κ sowohl für die Killingform der komplexen Liealgebra $\mathfrak{g}_0 \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ als auch für die Killingformen ihrer reellen Formen, was aber wegen [LA2] 6.4.30 unproblematisch ist.

Satz 3.5.16 (Cartan-Involution und andere Involutionen). *Gegeben eine reelle halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ mit einer Cartan-Involution ϑ und einer weiteren Involution σ gibt es ein Element der Einskomponente der Automorphismengruppe $\varphi \in (\operatorname{Aut} \mathfrak{g}_0)^\circ$ derart, daß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ mit σ kommutiert.*

Beweis. Man prüft leicht, daß $\sigma\vartheta$ stets selbstadjungiert ist für die Bilinearform κ_ϑ aus 3.5.15. Insbesondere ist $\sigma\vartheta$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten nach dem Spektralsatz [LA2] 1.13.15. Die zugehörige Eigenraumzerlegung muß eine $\mathbb{R}^\times$-Graduierung der Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ sein. Also ist $\rho := (\sigma\vartheta)^2$ ein diagonalisierbarer Automorphismus von $\mathfrak{g}_0$ mit positiven Eigenwerten. Dasselbe folgt für alle ρ^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$, das ja dieselben Eigenräume hat, wobei sich die Eigenwerte nur um den festen Automorphismus $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$ von $\mathbb{R}_{>0}$ unterscheiden. Weiter kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_0 \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "(\sigma\vartheta)^{-1}"'] & \mathfrak{g}_0 \arrow[d, "\sigma\vartheta"] \\
\mathfrak{g}_0 \arrow[r, "\vartheta"] & \mathfrak{g}_0
\end{tikzcd}$$

und insbesondere gilt $\rho\vartheta = \vartheta\rho^{-1}$. Dasselbe folgt wieder für alle ρ^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir behaupten nun für $\alpha = 1/4$ die Identität

$$(\rho^\alpha\vartheta\rho^{-\alpha})\sigma = \sigma(\rho^\alpha\vartheta\rho^{-\alpha})$$

In der Tat gelangen wir durch $\rho^\alpha\vartheta = \vartheta\rho^{-\alpha}$ rasch zur äquivalenten Gleichung

$$\rho^{2\alpha}\vartheta\sigma = \sigma\vartheta\rho^{-2\alpha}$$

Da nun $\sigma\vartheta$ mit ρ und dann auch mit allen Potenzen von ρ kommutiert, gelangen wir weiter zur äquivalenten Gleichung $\rho^{4\alpha}\vartheta\sigma = \sigma\vartheta$, die sofort aus den Definitionen folgt. □

Satz 3.5.17 (Cartan-Involutionen, Existenz und Eindeutigkeit). *Jede halbeinfache reelle Liealgebra besitzt eine Cartan-Involution und je zwei Cartan-Involutionen sind zueinander konjugiert unter einem Automorphismus aus der Einskomponente der Automorphismengruppe unserer Liealgebra.*

Beweis. Jede halbeinfache komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ besitzt nach 3.5.11 eine schieflineare Involution $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ mit einer kompakten Liealgebra von Fixpunkten $\mathfrak{g}^\vartheta$. Dann ist aber ϑ notwendig eine Cartan-Involution der Reellifizierung $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ von $\mathfrak{g}$, wie man an der Formel $\kappa_{\mathfrak{g}^\mathbb{R}} = 2 \operatorname{Re} \kappa_\mathfrak{g}$ für die Killingform der Reellifizierung erkennt, die ihrerseits aus [LA1] 3.5.17 folgt. Ist σ eine weitere Involution von $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$, so gibt es nach 3.5.16 angewandt auf $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ einen Automorphismus $\varphi \in (\operatorname{Aut} \mathfrak{g}^\mathbb{R})^\circ$ derart, daß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ mit σ kommutiert. Nun sind $(\operatorname{Aut} \mathfrak{g}^\mathbb{R})^\circ$ und $(\operatorname{Aut} \mathfrak{g})^\circ$ beide die eindeutig bestimmte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}^\mathbb{R})$ mit Liealgebra $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$, folglich stimmen diese beiden Gruppen überein. Also ist $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ auch eine schieflineare Involution von $\mathfrak{g}$ mit einer kompakten Liealgebra von Fixpunkten. Ist nun speziell $\mathfrak{g}_0$ eine halbeinfache reelle Liealgebra und $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ ihre Komplexifizierung und $\sigma = \operatorname{id} \otimes c$ die zugehörige schieflineare Involution, so muß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ eine Cartan-Involution auf der reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{g}^\sigma$ induzieren. Das zeigt die Existenz. Gegeben zwei Cartan-Involutionen auf derselben reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ gibt es wieder nach 3.5.16 ein Element der Einskomponente der Automorphismengruppe $\varphi \in (\operatorname{Aut} \mathfrak{g}_0)^\circ$ derart, daß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ mit σ kommutiert. Nach dem anschließenden Lemma 3.5.18 sind aber kommutierende Cartan-Involutionen gleich. □

Lemma 3.5.18 (**Kommutierende Cartan-Involutionen**). *Zwei miteinander kommutierende Cartan-Involutionen auf ein und derselben halbeinfachen reellen Liealgebra sind gleich.*

Beweis. Seien $\vartheta, \theta : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ unsere beiden Cartan-Involutionen. Wir betrachten die simultane Eigenraumzerlegung. Wären unsere Involutionen verschieden, so gäbe es $X \in \mathfrak{g}_0$ mit $X \neq 0$ und $\theta X = -\vartheta X$. Es folgte $\kappa(X, \theta X) = -\kappa(X, \vartheta X)$, und hier könnten nicht beide Seiten negativ sein. Widerspruch! □

Korollar 3.5.19 (**Konjugiertheit kompakter reeller Formen**). *Je zwei kompakte reelle Formen einer halbeinfachen komplexen Liealgebra sind konjugiert unter der adjungierten Gruppe unserer komplexen Liealgebra.*

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine schieflineare Involution mit kompakter Fixpunktliealgebra $\mathfrak{g}^\vartheta$, so ist wie im Beweis von 3.5.17 ϑ eine Cartan-Involution der Reellifizierung $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ von $\mathfrak{g}$. Wieder nach dem Beweis von 3.5.17 fällt die Einskomponente der Automorphismengruppe unserer komplexen Liealgebra mit der Einskomponente der Automorphismengruppe ihrer Reellifizierung zusammen, und unter dieser Gruppe sind nach 3.5.17 je zwei Cartan-Involution der Reellifizierung und damit auch je zwei kompakte reelle Formen unserer Liealgebra zueinander konjugiert. □

3.5.20 (**Kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum**). Zusammenfassend erhalten wir Bijektionen zwischen Isomorphieklassen

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{c} \text{zusammenhängende kompakte} \\ \text{Liegruppen mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \text{kompakte} \\ \text{Liealgebren} \end{array} \right\} \\
 & & \downarrow \wr \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{abstrakte} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\leftarrow} & \left\{ \begin{array}{c} \text{halbeinfache} \\ \text{komplexe Liealgebren} \end{array} \right\}
\end{array}$$

Hier ist die obere Horizontale das Bilden der Liealgebra [ML] 4.2.4, die rechte Vertikale die Komplexifizierung, die eine nach 3.5.11 surjektive und nach 3.5.19 injektive Abbildung zwischen den durch den vertikalen Pfeil verbundenen Mengen liefert, und die untere Horizontale die Teilaussage 3.4.9 aus dem Beweis der Killing-Klassifikation. Der Weg von kompakten Liealgebren direkt zu Wurzelsystemen ist sogar noch etwas einfacher, weil in kompakten Liealgebren die Cartan'schen genau die maximalen abelschen Unteralgebren sind. Der Leser mag zur Übung prüfen, daß die Verknüpfung unserer Bijektionen beschrieben werden kann als die Zuordnung, die jeder kompakten Liegruppe K mit trivialem Zentrum das durch Wahl eines maximalem Torus T bestimmte und bis auf Isomorphismus dann doch davon unabhängige Wurzelsystem $\mathrm{R}(K, T) \subset \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ aus [ML] 5.5.1 zuordnet, das wir mithilfe des kanonischen Isomorphismus $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \stackrel{\sim}{\to} (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, T)^*$ auch als Teilmenge des Dualraums der komplexifizierten Liealgebra des maximalen Torus auffassen können.

Ergänzung 3.5.21. Die zusammenhängende kompakte Liegruppe vom Typ G_2 ist die Automorphismengruppe der nicht-assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra der sogenannten Oktaven aus [AL] 3.12.4. Ich habe das allerdings nie selber nachgerechnet.

Literatur

[AAG]

[AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie*;.

[AN1] *Skriptum Analysis 1*;.

[AN2] *Skriptum Analysis 2*;.

[AN3] *Skriptum Analysis 3*;.

[GR] *Skriptum Grundlagen*;.

[KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie*;.

[LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*;.

[LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*;.

[ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen*;.

[NAS] *Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie*;.

[SPW] *Skriptum Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*;.

[TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*;.

[TS] *Skriptum Singuläre Homologie*;.

Index