NICHTKOMMUTATIVE ALGEBRA UND SYMMETRIE

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Darstellungen und Gruppenringe **4**
1.1 Darstellungen 4
1.2 Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring 11

2 Moduln über Mengen **17**
2.1 Begrifflichkeit der Mengenmoduln 17
2.2 Einfache Moduln und Kompositionsreihen 19
2.3 Halbeinfache Moduln 24
2.4 Halbeinfachkeit und externes Tensorieren 27
2.5 Mengenmoduln und Körpererweiterungen 31

3 Moduln über Ringen **32**
3.1 Einfache Moduln über Ringen 32
3.2 Endomorphismen einfacher Moduln 33
3.3 Dichtesatz und Anwendungen 35
3.4 Moduln über Tensorproduktalgebren 37
3.5 Halbeinfache Ringe 39
3.6 Spurkriterium für Halbeinfachkeit* 44
3.7 Erzeugende und Relationen für Ringalgebren** 48
3.8 Tensorkalkül für Darstellungen* 50
3.9 Vertwistete Monoidringe* 52

4 Darstellungstheorie endlicher Gruppen **55**
4.1 Halbeinfachkeit von Gruppenringen 55
4.2 Gruppenringe endlicher Gruppen 58
4.3 Orthogonalitätsrelationen 64
4.4 Charaktere und algebraische Zahlen* 69
4.5 Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten* 72
4.6 Ergänzungen zu Charakteren* 75

5 Darstellungen der symmetrischen Gruppen **77**
5.1 Einfache Darstellungen und Young-Diagramme 77
5.2 Der Robinson-Schensted-Algorithmus 89
5.3 Berechnung der Charaktere 89
5.4 Jucys-Murphy-Elemente 91

6 Verschiedene weiterführende Resultate **93**
6.1 Reeller, komplexer und quaternionaler Typ 93
6.2 Invariante Bilinearformen auf Darstellungen 97
6.3 Induktion und Koinduktion für Monoide 102

6.4 Clifford-Theorie . . . 106
6.5 Darstellungen endlicher Heisenberg-Gruppen* . . . 109

7 Abelsche Kategorien **110**
7.1 Projektive Decken . . . 110
7.2 Zerlegungen in unzerlegbare Objekte . . . 116
7.3 Blockzerlegung . . . 120
7.4 Grothendieck-Gruppen . . . 121
7.5 Morita-Äquivalenz . . . 123
7.6 Darstellungen von Köchern* . . . 125
7.7 Verschiedenes . . . 131

8 Danksagung **133**

9 Die Vorlesung Darstellungstheorie im SS 16 **134**

10 Nichtkommutative Algebra und Symmetrie SS 19 **137**

Literaturverzeichnis **140**

Indexvorwort **142**

Index **143**

1 Darstellungen und Gruppenringe

1.1 Darstellungen

Definition 1.1.1. Eine **Darstellung einer Gruppe** G **über einem Körper** k ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

1.1.2. Allgemeiner versteht man unter einer **Darstellung eines Monoids** G **über einem Ring** k ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Modul V und einem Monoidhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{End}_k(V)$.

1.1.3 (**Notationen**). Oft bezeichnen wir eine Darstellung abkürzend mit demselben Symbol wie den zugrundeliegenden Vektorraum oder Modul. Gegeben eine Darstellung V eines Monoids G bezeichnet dann ρ_V den zugehörigen Monoidhomomorphismus $\rho_V : G \to \mathrm{End}(V)$.

1.1.4. Ist unser Monoid G eine Gruppe, so landet jeder Monoidhomomorphismus $\rho_V : G \to \mathrm{End}(V)$ in der Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ der invertierbaren Elemente des Monoids der Endomorphismen von V und ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$. Eine Darstellung einer Gruppe „als Monoid" ist also dasselbe wie eine Darstellung einer Gruppe „als Gruppe".

1.1.5 (**Herkunft der Terminologie**). Im Fall des Vektorraums $V = k^n$ liefert lineare Algebra einen Ringisomorphismus $\mathrm{End}_k(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(n; k)$. Ist unsere Darstellung $\rho : G \to \mathrm{End}_k(V)$ dann auch noch injektiv, so „stellt ρ die abstrakte Gruppe G dar als eine konkrete Gruppe von Matrizen", daher die Bezeichnung als „Darstellung". Zum Beispiel könnte die zweielementige Gruppe dargestellt werden, indem man ihr nichttriviales Element als Punktspiegelung auf der Ebene operieren läßt, oder als Spiegelung an einer Achse in der Ebene, oder als Punktspiegelung auf dem Raum, oder als Spiegelung an einer Ebene im Raum, oder auch als Drehung mit dem Winkel $180°$ um eine Achse. Das Symbol ρ ist ein „rho", das Analogon für unser „r" im griechischen Alphabet. Es steht für „representation".

1.1.6 (**Geschichtliche Anmerkung**). Die Theorie der Darstellungen endlicher Gruppen durch komplexe Matrizen wurde parallel von Theodor Molien in Estland (April 1897), Georg Frobenius in Berlin (November 1897) und William Burnside in Greenwich (Januar 1898) entwickelt. Die wechselseitigen Beziehungen zwischen diesen Autoren wurden von Thomas Hawkins untersucht. Er kam zu dem Schluß, daß die beiden erstgenannten Autoren völlig unabhängig voneinander arbeiteten und daß Burnside's Arbeit sich auf noch frührere Arbeiten von Molien und Frobenius stützt.

1.1.7. Gegeben G ein Monoid und k ein Ring und V ein k-Modul induziert das Exponentialgesetz $\mathrm{Ens}(G, \mathrm{Ens}(V, V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(G \times V, V)$ eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Darstellungen} \\ G \to \mathrm{End}(V) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} G\text{-Operationen } G \times V \to V \\ \text{durch } k\text{-lineare Abbildungen} \end{array} \right\}$$

Hierbei verstehen wir unter einer „G-Operation durch k-lineare Abbildungen“ eine G-Operation $G \times V \to V$ mit der Eigenschaft, daß gilt $g(v + w) = gv + gw$ und $g(\lambda v) = \lambda(gv) \quad \forall g \in G$, $\lambda \in k$ und $v, w \in V$.

Beispiel 1.1.8. Jeder Vektorraum V wird eine Darstellung seiner Automorphismengruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ vermittels $\rho = \mathrm{id}$. Diese Darstellung heißt die **Standarddarstellung von** $\mathrm{GL}(V)$.

Beispiel 1.1.9. Gegeben ein Monoidhomomorphismus $\varphi : H \to G$ können wir jede Darstellung V von G zurückziehen zu einer Darstellung $\mathrm{res}_G^H V$ von H, indem wir von ρ_V zu $\rho_V \circ \varphi$ übergehen.

Beispiel 1.1.10. Sei k ein Ring. Jeder k-Modul V wird eine Darstellung eines beliebigen Monoids G vermittels der **trivialen Operation** $\rho(g) = \mathrm{id}_V \ \forall g \in G$. Der Modul $V = k$ mit der trivialen Operation heißt die **Einsdarstellung**.

Beispiel 1.1.11. Ist K/k eine Körpererweiterung, so ist K eine Darstellung über k der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Beispiel 1.1.12. Ist $G \times X \to X$ eine Operation eines Monoids G auf einer Menge X und k ein Ring, so wird der freie k-Modul kX über X mit der linear fortgesetzten Operation eine Darstellung des Monoids G über k. Darstellungen dieser Bauart nennt man im Fall einer Gruppe G **Permutationsdarstellungen**. Ebenso wird der Funktionenraum $\mathrm{Ens}(X, k)$ mit der Operation „durch Vorschalten“ eine Darstellung des opponierten Monoids G^{opp}.

Beispiel 1.1.13. Eine Darstellung (V, ρ) des Monoids $\mathbb{N}$ anzugeben bedeutet nach der universellen Eigenschaft von $(\mathbb{N}, 1)$ als „freies Monoid über der einelementigen Menge“ nichts anderes, als einen Endomorphismus $A \in \mathrm{End}(V)$ eines Moduls V anzugeben, nämlich dem Endomorphismus $A = \rho(1)$. Eine Darstellung (V, ρ) der Gruppe $\mathbb{Z}$ anzugeben bedeutet nach der universellen Eigenschaft von $(\mathbb{Z}, 1)$ als „freie Gruppe über der einelementigen Menge“ nichts anderes, als einen Automorphismus $A \in \mathrm{GL}(V)$ eines Moduls V anzugeben, nämlich den Automorphismus $A = \rho(1)$.

Beispiel 1.1.14 (**Darstellungen der zweielementigen Gruppe**). Sei ein Körper k gegeben. Wir untersuchen die endlichdimensionalen Darstellungen der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über k. Eine solche Darstellung (V, ρ) anzugeben bedeutet nach der universellen Eigenschaft von $\mathbb{Z}$ und der universellen Eigenschaft des Quotienten nichts anderes, als einen Automorphismus $A \in \mathrm{GL}(V)$ eines k-Vektorraums V anzugeben mit $A^2 = \mathrm{id}_V$, nämlich den Automorphismus $A = \rho(1)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

$\operatorname{char} k \neq 2$: In diesem Fall ist V die direkte Summe $V = V^+ \oplus V^-$ der Eigenräume von A zu den Eigenwerten ± 1, für alle $v \in V$ gilt nämlich

$$v = \frac{1}{2}(v + Av) + \frac{1}{2}(v - Av)$$

$\operatorname{char} k = 2$: In diesem Fall zerfällt das charakteristische Polynom von A bereits über k und hat nur den Eigenwert 1. In einer geeigneten Basis von V hat also A eine Matrix in Jordan'scher Normalform. Aus $A^2 = \mathrm{id}_V$ folgt dann, daß hier nur Jordanblöcke der Größen eins und zwei möglich sind.

Um die Analoga dieser Erkenntnisse für eine beliebige Gruppe, ja ein beliebiges Monoid G formulieren zu können, bauen wir zunächst unseren Begriffsapparat weiter aus.

Definition 1.1.15. Seien V, W Darstellungen eines Monoids G über einem festen Ring k. Ein **Homomorphismus von Darstellungen** ist eine k-lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(gv) = gf(v)$ für alle $v \in V$, $g \in G$. Wir notieren die Gruppe aller solchen Homomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{k,G}(V, W)$$

Ein **Isomorphismus von Darstellungen** ist ein bijektiver Homomorphismus. Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei Darstellungen V und W, so schreiben wir auch $V \cong W$ und sagen, die Darstellungen V und W seien **isomorph**.

Ergänzung 1.1.16. Steht der Formalismus der Kategorientheorie zur Verfügung, so kann man das alles auch sehr viel effizienter sagen: Die Kategorie der Darstellungen eines Monoids G über einem Ring k ist die Kategorie

$$\mathrm{Cat}([G], \mathrm{Mod}_k)$$

aller Funktoren der Einobjektkategorie zu G in die Kategorie der k-Moduln.

Definition 1.1.17. Gegeben Darstellungen V, W eines Monoids G über einem Ring k definieren wir ihre **direkte Summe** als den Modul $V \oplus W$ mit der Operation $g(v, w) = (gv, gw)$. Ähnlich definieren wir auch direkte Summen von endlich oder sogar unendlich vielen Darstellungen. Die direkte Summe von n Kopien einer Darstellung V kürzen wir ab mit V^n oder ausführlicher $V^{\oplus n}$. Für den Fall $n = 0$ vereinbaren wir $V^0 = 0$.

Beispiel 1.1.18. Sei wieder k ein Körper. In unserer neuen Terminologie können wir die obigen Erkenntnisse wie folgt zusammenfassen:

$\operatorname{char} k \neq 2$: Bezeichnet k_+ beziehungsweise k_- die Einsdarstellung beziehungsweise die nichttriviale eindimensionale Darstellung der Gruppe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so ist jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über k isomorph zu genau einer Darstellung der Gestalt $k_+^n \oplus k_-^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

$\operatorname{char} k = 2$: Bezeichnet k beziehungsweise P die Einsdarstellung beziehungsweise eine zweidimensionale Darstellung mit nichttrivialer Operation von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, bei der also das nichtneutrale Element durch einen Jordanblock der Größe zwei mit Eigenwert Eins operiert, so ist jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über k isomorph zu genau einer Darstellung der Gestalt $k^n \oplus P^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

Von den in 1.1.5 diskutierten Fällen wäre in dieser Notation die Punktspiegelung auf der Ebene $\mathbb{R}_-^2$, die Spiegelung an einer Achse $\mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_-$, die Punktspiegelung im Raum $\mathbb{R}_-^3$, die Spiegelung an einer Ebene $\mathbb{R}_+^2 \oplus \mathbb{R}_-$, und die Drehung mit dem Winkel $180°$ um eine Achse $\mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_-^2$.

Vorschau 1.1.19. In 1.2.10 diskutieren wir die Klassifikation aller Darstellungen der zweielementigen Gruppe über $\mathbb{Z}$, die als $\mathbb{Z}$-Moduln frei und endlich erzeugt sind. Sie zeigt, daß die Situation schnell komplizierter wird, wenn wir nicht mehr über Körpern arbeiten.

1.1.20. Wir wollen nun ähnliche Aussagen auch für allgemeinere Monoide formulieren und bauen dazu unseren Begriffsapparat noch weiter aus.

Definition 1.1.21. Seien G ein Monoid und k ein Ring.

1. Eine Teilmenge $W \subset V$ einer Darstellung V von G über k heißt eine **Unterdarstellung**, wenn W ein unter G stabiler k-Untermodul ist, in Formeln $g \in G, w \in W \Rightarrow gw \in W$;

2. Eine Darstellung V von G heißt oder **einfach** oder **irreduzibel**, wenn sie genau zwei Unterdarstellungen hat, als da heißt, wenn V nicht der Nullraum ist, aber 0 und V die einzigen Unterdarstellungen von V sind. Die Menge der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über k notiere ich

$$\operatorname{irr}(k, G)$$

3. Eine Darstellung V von G heißt **unzerlegbar**, wenn V nicht der Nullraum ist und es keine zwei von Null verschiedenen Unterdarstellungen $W_1, W_2 \subset V$ gibt mit $W_1 \oplus W_2 \xrightarrow{\sim} V$ unter dem von den Einbettungen induzierten Homomorphismus;

4. Ein Element $v \in V$ einer Darstellung von G heißt **zyklisch**, wenn V selbst die einzige Unterdarstellung von V ist, die das Element v enthält. Arbeiten wir über einem Körper, so heißt solch ein Element auch ein **zyklischer Vektor**. Eine Darstellung V von G heißt **zyklisch**, wenn sie ein zyklisches Element besitzt.

Beispiele 1.1.22. Jede eindimensionale Darstellung über einem Körper k ist einfach. In einer einfachen Darstellung ist jedes von Null verschiedene Element zyklisch. Unsere Darstellung P aus 1.1.18 ist zwar unzerlegbar und zyklisch, aber nicht einfach.

Proposition 1.1.23 (Schranke für die Zahl einfacher Darstellungen). *Ein endliches Monoid G hat über jedem Körper k bis auf Isomorphismus höchstens soviele einfache Darstellungen wie Elemente, in Formeln*

$$|\operatorname{irr}(k, G)| \leq |G|$$

Beweis als Vorschau. Zum Beweis der Proposition entwickeln wir im folgenden allgemeine Begriffe und Methoden, die Ihnen auch in anderen Kontexten ständig begegnen werden. Genauer können wir unsere Darstellungen mit 1.2.7 als Moduln über dem Monoidring kG auffassen. Die Proposition folgt dann aus dem Korollar 3.1.4 zum Satz von Jordan-Hölder für Moduln. □

Ergänzung 1.1.24 (**Eine Gruppe mit vielen unzerlegbaren Darstellungen**). Proposition 1.1.23 gilt nicht analog, wenn wir darin „einfach“ durch „unzerlegbar“ ersetzen: Bereits für die Klein'sche Vierergruppe gibt es über dem Körper mit zwei Elementen unzerlegbare Darstellungen beliebig großer Dimension. In der Tat ist der Gruppenring in dem Fall isomorph zu $\mathbb{F}_2[a, b]$ mit $a^2 = b^2 = 0$. Dann sind die Moduln $V := \mathbb{F}_2^{2n+1}$ mit $a : \mathrm{e}_{2i} \mapsto \mathrm{e}_{2i+1}$ und $b : \mathrm{e}_{2i} \mapsto \mathrm{e}_{2i-1}$ für $1 \leq i \leq n$ und $a, b : \mathrm{e}_{2i+1} \mapsto 0$ für $0 \leq i \leq n$. Dann gilt $\ker a = \ker b$ und wir können folglich $\phi : \operatorname{im} a \to V$ definieren durch $\phi : v \mapsto b(a^{-1}(v))$. Damit erhalten wir eine Filtrierung auf $\operatorname{im} a$ durch

$$\operatorname{im} a \supset \phi^{-1}(\operatorname{im} a) \supset \ldots \supset \phi^{-n}(\operatorname{im} a) = 0$$

mit eindimensionalen Subquotienten. Das aber zeigt, daß für jede Zerlegung unserer Darstellung in zwei direkte Summanden $V = U \oplus W$ für einen Summanden W gilt $\operatorname{im}(a|W) = 0$ und damit $W \subset \langle \mathrm{e}_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq n \rangle$. Es ist aber explizit klar, daß es einen derartigen Summanden nicht geben kann.

Beispiele 1.1.25 (**Schwingungen eines Methanmoleküls**). Ein Methanmolekül können wir uns als einen Tetraeder denken mit jeweils einem Wasserstoffatom an jeder der vier Ecken und einem Kohlenstoffatom in der Mitte. Wir denken uns im folgenden diese Atome durch eine Art Federn verbunden und beschreiben den Zustand unseres Moleküls durch eine Abbildung

$$\varphi : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{E}$$

in den Anschauungsraum, einen dreidimensionalen affinen euklidischen Raum $\mathbb{E}$, mit der Konvention, daß $\varphi(0)$ die Position des Kohlenstoffatoms angeben möge und die anderen $\varphi(i)$ die Positionen der vier Wasserstoffatome. Die Menge aller derartigen Abbildungen φ notieren wir M. In der in [AN2] 10.4.3 eingeführten Terminologie ist M der Konfigurationsraum eines mechanischen Systems. Das Vorschalten einer Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_4$, fortgesetzt auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ durch $0 \mapsto 0$, induziert eine Rechtsoperation von $\mathcal{S}_4$ auf M und a forteriori eine Rechtsoperation von $\mathcal{S}_4$ auf seinem Geschwindigkeitsphasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$, wie er in [AN2] 10.5.4 eingeführt wird. Andererseits operiert die Gruppe $\mathrm{O}_{\text{aff}}(\mathbb{E})$ der orthogonal-affinen Automorphismen des Anschauungsraums durch Nachschalten von links auf unserem Konfigurationsraum M und a forteriori auf seinem Geschwindigkeitsphasenraum $\mathrm{T}M\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$. Diese beiden Operationen kommutieren und liefern durch Übergang zur Linksoperation der inversen Permutation eine Operation von $\mathrm{O}_{\text{aff}}(\mathbb{E}) \times \mathcal{S}_4$ auf M und $\mathrm{T}M\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$. Offensichtlich sind sowohl die Potentialfunktion V als auch die Funktion der kinetischen Energie K invariant unter der Operation von $\mathrm{O}_{\text{aff}}(\mathbb{E}) \times \mathcal{S}_4$. Bei jedem Methanmolekül in Ruhe $p \in M \subset \mathrm{T}M\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$ verschwindet die kinetische Energie K und das Potential $V : M \to \langle \mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2\rangle$ nimmt ein lokales Minimum an. Die Isotropiegruppe von p ist in diesem Fall eine diagonal eingebettete Kopie von $\mathcal{S}_4$. Unter dem Isomorphismus $\mathrm{T}_p M \xrightarrow{\sim} M, \vec{v} \mapsto p + \vec{v}$ entspricht in diesem Fall die das Potential V bei p approximierende Quadrik bis auf eine additive Konstante einer energiewertigen homogenen quadratischen Form auf $\mathrm{T}_p M$ und die kinetische Energie einer energiewertigen positiv definiten homogenen quadratischen Form auf $\mathrm{T}_p M\langle 1/\,\mathrm{s}\rangle$ alias einer positiv definiten quadratischen Form auf $\mathrm{T}_p M$ mit Werten in $\langle \mathrm{gm}^2\rangle$. Beide Formen sind invariant unter $\mathcal{S}_4$, folglich sind auch die Eigenräume des quadratischen Anteils der potentiellen Energie in Bezug auf die durch die kinetische Energie gegebene euklidische Struktur nach [LA2] 2.2.9 stabil unter $\mathcal{S}_4$ und damit Darstellungen von $\mathcal{S}_4$. Die zugehörigen Eigenwerte sind „energiewertige inverse Flächen“ alias Elemente von $\langle \mathrm{s}^{-2}\rangle$ und beschreiben nach [AN2] 10.5.8 die Frequenzen der „kleinen Schwingungen“ unseres Moleküls. Die Symmetrien unseres Systems erzwingen Vielfachheiten von gewissen Eigenwerten. Gewisse Spektrallinien werden also in mehrere nah beieinander liegende Linien aufspalten, sobald man die Symmetrie bricht, etwa durch das Anlegen eines Magnetfeldes.

Übungen

Übung 1.1.26 (**Darstellungen in Charateristik p von p-Gruppen**). Gegeben eine Primzahl p besitzt jede p-Gruppe G über einem Körper der Charakteristik p bis auf Isomorphismus nur eine einzige einfache Darstellung, in Formeln

$$(|G| = p^n \text{ und } \operatorname{char} k = p) \;\Rightarrow\; |\operatorname{irr}(k, G)| = 1$$

Hinweis: Man beginne mit dem Fall zyklischer Gruppen und verwende dann Satz [AL] 1.3.8 über die Struktur von p-Gruppen.

Übung 1.1.27 (**Zurückziehen mit inneren Automorphismen**). Man zeige, daß wir beim Zurückziehen nach 1.1.9 einer Darstellung eines Monoids G mit einem inneren Automorphismus, also einem durch die Konjugation mit einem inveriertbaren Element gegebenen Automorphismus $G \to G$, eine zur ursprünglichen Darstellung isomorphe Darstellung erhalten.

Übung 1.1.28. Im Fall der Operation einer Gruppe G auf einer Menge X liefert die offensichtliche Einbettung $kX \hookrightarrow \operatorname{Ens}(X, k)$ einen Homomorphismus von Darstellungen, wenn man die Operation rechts mit dem durch das Invertieren gegebenen Isomorphismus $\operatorname{inv} : G \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{opp}}$ zu einer Operation von G zurückzieht.

Ergänzung 1.1.29. Stabilisiert eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ein Gitter alias den $\mathbb{Z}$-Spann einer Basis, so nennt man sie **kristallographisch**. Gleichbedeutend ist nach 1.1.30 die Forderung, daß sie bezüglich einer geeigneten Basis durch Matrizen mit rationalen Einträgen dargestellt wird.

Ergänzende Übung 1.1.30. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V über $\mathbb{Q}$ eines endlichen Monoids G gibt es stets eine **$\mathbb{Z}$-Form**, als da heißt, ein unter G stabiles Gitter $V_{\mathbb{Z}} \subset V$.

Übung 1.1.31. Gegeben eine Darstellung (V, ρ) einer Gruppe G über einem Körper k erhalten wir eine Darstellung (V^*, ρ^*) auf dem Dualraum durch die Vorschrift $\rho^*(g) := (\rho(g^{-1}))^\top$. Sie heißt die **kontragrediente Darstellung** zur Darstellung (V, ρ). Man zeige, daß eine endlichdimensionale Darstellung einfach ist genau dann, wenn die zugehörige kontragrediente Darstellung einfach ist. Man gebe ein Beispiel für eine eindimensionale Darstellung, die nicht zu ihrer kontragredienten Darstellung isomorph ist.

Übung 1.1.32. Die Dimension einer zyklischen und erst recht einer einfachen Darstellung eines Monoids über einem Körper ist beschränkt durch die Kardinalität des dargestellten Monoids.

Übung 1.1.33. Man zeige, daß die Quaternionen aufgefaßt als reeller Vektorraum eine einfache Darstellung der achtelementigen Quaternionengruppe aus [AL] 1.4.13 bilden.

Übung 1.1.34. Wieviele Unterdarstellungen hat die Darstellung $\mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_-$ der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Ist sie zyklisch? Was ist die Dimension des Raums der Homomorphismen von dieser Darstellung zu sich selber?

Übung 1.1.35. Man gebe alle Unterdarstellungen der Darstellung $\mathbb{R}_+^2 \oplus \mathbb{R}_-$ der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an. Ist diese Darstellung zyklisch? Was ist die Dimension des Raums der Homomorphismen von dieser Darstellung zu sich selber?

Übung 1.1.36. Man bestimme die Dimension des Raums der Homomorphismen von Darstellungen $(\mathbb{R}_+^n \oplus \mathbb{R}_-^m) \to (\mathbb{R}_+^a \oplus \mathbb{R}_-^b)$.

1.2 Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring

1.2.1. Gegeben ein Ring k und ein Monoid G erklären wir den **Monoidring**

$$kG$$

des Monoids G über k wie folgt: Als abelsche Gruppe ist kG wie in [LA1] 2.3.4 die Menge aller Abbildungen $f : G \to k$, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annehmen. So eine Abbildung schreiben wir als eine formale Linearkombination $\sum f(g)g$ von Elementen aus G mit Koeffizienten aus k. Die Multiplikation $*$ in kG, manchmal auch **Konvolution** oder **Faltung** genannt, erklären wir durch die Vorschrift

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) * \left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{x\in G}\left(\sum_{gh=x} a_g b_h\right) x$$

Die innere Summe rechts läuft dabei über alle Paare $(g,h) \in G \times G$ mit $gh = x$. Offensichtlich erhalten wir so einen Ring mitsamt einem Ringhomomorphismus $k \hookrightarrow kG$, $a \mapsto ae$ für $e \in G$ das neutrale Element und einem Monoidhomomorphismus $G \to kG$, $g \mapsto 1g$ in das multiplikative Monoid des Rings kG. Ist k ein Körper, so ist dieser Monoidhomomorphismus, wenn wir ihn als eine durch G indizierte Familie von Elementen von kG auffassen, offensichtlich eine Basis von kG über k. Für Ringe gilt dasselbe mit dem auf Moduln erweiterten Basisbegriff aus [KAG] 2.1.6. Wir schreiben meist kurz $ae = a$ und $1g = g$, auch wenn wir eigentlich Elemente des Monoidrings meinen, und notieren die Faltung oft ohne $*$ schlicht durch Hintereinanderschreiben. Ist unser Monoid eine Gruppe, so nennt man unseren Monoidring auch den **Gruppenring**.

1.2.2 (**Notationsvarianten für Monoidringe**). Häufig wird der Monoidring in der Literatur auch $k[G]$ notiert. Zu dem in diesem Text befolgten Notationsschema paßt diese Notation nicht, da ich mir ja in [AL] 3.5.1 vorgenommen hatte, eckige Klammern vorzugsweise für die Erzeugung als Ring „durch kommutierende

Erzeuger“ zu verwenden. Um dieser Kovention zu folgen, sollten wir hier besser $k\lfloor G \rfloor$ schreiben. Stattdessen benutze ich gerne die alternative Notation $k\langle G\rangle$. Als k-Modul ist der Monoidring in der Tat erzeugt, ja sogar frei erzeugt von G.

1.2.3 (**Exponentialnotation für Monoidringe**). Die eben eingeführte Notation für Monoidringe ist nur im Fall multiplikativ notierter Monoide praktisch. Im Fall additiv notierter Monoide ist bereits der Ausdruck $g + h$ zweideutig, es könnte damit entweder die Summe im Monoid $1(g + h)$ oder die Summe im Monoidring $1g + 1h$ gemeint sein. Aus diesem Grund schreibt man im Fall additiv notierter Monoide Elemente des Monoidrings lieber in der Form $\sum a_g \,\mathrm{e}^g$, wobei die Notation e^g rein formale Bedeutung hat. Dann gilt etwa im Monoidring $\mathrm{e}^{g+h} = \mathrm{e}^g\,\mathrm{e}^h \neq \mathrm{e}^g + \mathrm{e}^h$ und man kann wieder ganz intuitiv rechnen.

1.2.4 (**Der Polynomring als Monoidring**). Wir erhalten einen Isomorphismus $k\langle\mathbb{N}\rangle \xrightarrow{\sim} k[T]$ zwischen dem Monoidring des Monoids $\mathbb{N}$ über einem Ring k und dem Polynomring $k[T]$ mit Koeffizienten in k durch die Vorschrift $\sum a_n \,\mathrm{e}^n \mapsto \sum a_n T^n$. In diesem Fall ist die Exponentialnotation im Sinne von 1.2.3 auch ziemlich ungewöhnlich und lädt zu Mißverständnissen ein.

1.2.5 (**Der Ring der Laurentpolynome als Gruppenring**). Wir erhalten einen Isomorphismus $k\langle\mathbb{Z}\rangle \xrightarrow{\sim} k[T, T^{-1}]$ zwischen dem Gruppenring der Gruppe $\mathbb{Z}$ über einem Ring k und dem Ring $k[T, T^{-1}]$ der Laurentpolynome mit Koeffizienten in k durch die Vorschrift $\sum a_n \,\mathrm{e}^n \mapsto \sum a_n T^n$. Im Fall der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ ist die Exponentialnotation im Sinne von 1.2.3 auch ziemlich ungewöhnlich und lädt zu Mißverständnissen ein.

1.2.6 (**Dirac-Notation für Monoidringe**). Gegeben ein Kring k induziert jede Abbildung $X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ von Mengen eine k-multilineare Abbildung

$$kX_1 \times \ldots \times kX_n \to kY$$

in natürlicher Weise. Identifiziert man im Fall $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ die Elemente von kX als kompakt getragene endliche Maße auf dem diskreten Raum X, so kann unsere k-multilineare Abbildung als das Bildmaß des Produktmaßes beschrieben werden. Die Multiplikation des Monoidrings ergibt sich dann aus der Verknüpfung des zugrundeliegenden Monoids als das Bildmaß

$$\mu * \nu = \mathrm{mult}_*(\mu \boxtimes \nu)$$

des Produktmaßes unter der Verknüpfung $\mathrm{mult} : G \times G \to G$. Im Fall $n = 0$ wird jeder Abbildung $\{*\} \to Y$ aus dem leeren Produkt mit $* \mapsto y$ eine Abbildung $\{*\} \to kY$ zugeordnet und das Bild von $*$ entspricht dem Diracmaß δ_y, das dem Punkt y das Maß 1 gibt und allen anderen Punkten das Maß Null. Ich will, auch wenn k nicht $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist, Elemente von Monoidringen vorzugsweise als eine Art von Maßen auffassen und verwende auch in dieser Allgemeinheit die Notation $\delta_y \in kY$ entsprechend. Insbesondere ist für $e \in G$ das neutrale Element damit δ_e die Eins des Monoidrings. Mehr dazu wird in [TSK] 1.6.29 besprochen, wo wir auch die alternative Notation $\mathrm{Maß}_!(X; k) = kX$ einführen.

1.2.7 (**Darstellungen als Moduln über dem Monoidring**). Seien G ein Monoid und k ein Ring. Sei weiter M eine abelsche Gruppe. Das Einschränken einer Abbildung $kG \times M \to M$ zu Abbildungen $k \times M \to M$ und $G \times M \to M$ liefert dann die vertikale Bijektion im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c} kG\text{-Modulstrukturen} \\ kG \times M \to M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \end{array}\right\} & & \\
\downarrow\wr & & \\
\left\{\begin{array}{c} k\text{-Modulstrukturen} \\ k \times M \to M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \\ \text{zusammen mit } G\text{-Operation} \\ G \times M \to M \\ \text{durch } k\text{-lineare Abbildungen} \end{array}\right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{\begin{array}{c} k\text{-Modulstrukturen} \\ k \times M \to M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \\ \text{zusammen mit einem} \\ \text{Monoidhomomorphismus} \\ G \to \mathrm{End}_k(M) \end{array}\right\}
\end{array}$$

wobei die horizontale Bijektion wie so oft schon wieder einmal von unserer Bijektion $\mathrm{Ens}(G \times M, M) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Ens}(G, \mathrm{Ens}(M, M))$ aus [GR] 1.6.5 herkommt und $\mathrm{End}_k(M)$ das multiplikative Monoid des Rings $\mathrm{End}_k(M)$ aus [KAG] 1.3.4 meint. Des weiteren haben wir für je zwei Darstellungen V, W eines Monoids G über einem Ring k die Gleichheit

$$\mathrm{Hom}_{k,G}(V, W) = \mathrm{Hom}_{kG}(V, W)$$

von Homomorphismen von Darstellungen und Homomorphismen von Moduln. In diesem Sinne ist eine Darstellung eines Monoids G über k also „dasselbe“ wie ein kG-Modul. Wir werden einen guten Teil der Darstellungstheorie von Gruppen aus der Spezialisierung von Resultaten für Moduln über Ringen erhalten, die hinwiederum durch die Methoden der linearen Algebra für Moduln über Körpern alias Vektorräume motiviert werden.

1.2.8 (**Funktionen und Maße**). Gegeben ein Kring k und ein Monoid G mag man auch den Kring $\mathrm{Fun}(G; k) = \mathrm{Ens}(G, k)$ der Funktionen auf G betrachten. Er trägt natürliche Operationen von G von links und rechts durch $(yf)(x) := f(xy)$ und $(fy)(x) = f(yx)$. Ebenso trägt auch der Gruppenring $\mathrm{Maß}_!(G; k) = kG$ natürliche Operationen von G von links und rechts durch $y\mu := \delta_y * \mu$ und $\mu y := \mu * \delta_y$. Man mag nun versucht sein, mit der Einbettung von k-Moduln

$$\mathrm{Maß}_!(G; k) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(G; k)$$

zu arbeiten, die gegeben wird durch $\delta_x \mapsto [x]$ für $[x]$ die charakteristische Funktion der einelementigen Menge $\{x\}$. Das ist aber keine gute Idee, da diese Abbildung weder mit der Linksoperation noch mit der Rechtsoperation von G verträglich ist. Natürlich ist es vielmehr, $\mathrm{Fun}(G;k)$ als den Dualraum zu $\mathrm{Maß}_!(G;k)$ aufzufassen. Für die entsprechende Paarung

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{Maß}_!(G;k) \times \mathrm{Fun}(G;k) \to k$$

gilt dann auch in der Tat $\langle y\mu, f\rangle = \langle \mu, fy\rangle$ sowie $\langle \mu y, f\rangle = \langle \mu, yf\rangle$ für alle Maße μ, Funktionen f und Elemente $y \in G$. Ist G eine Gruppe, so ist zusätzlich die Abbildung

$$\mathrm{inz} : \mathrm{Maß}_!(G;k) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(G;k)$$

gegeben durch $\delta_x \mapsto [x^{-1}]$ verträglich mit den natürlichen G-Wirkungen von rechts und links. Die Abkürzung inz meint hier „durch das Zählmaß teilen und das Invertieren vorschalten“. Wir wollen stets $kG = \mathrm{Maß}_!(G;k)$ verstehen und selbst im Fall endlicher Gruppen oder Mengen der Versuchung widerstehen, diesen Raum leichtfertig mit $\mathrm{Ens}(G,k) = \mathrm{Fun}(G;k)$ zu identifizieren. Vernünftig ist auch im Fall endlicher Gruppen vielmehr eine Identifikation mit unserer Abbildung inz, die in diesem Fall sogar ein Isomorphismus ist.

1.2.9. Eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe nennen wir ein **Gitter**. In anderen Zusammenhängen versteht man unter einem „Gitter“ abweichend eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe X zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform $X \times X \to \mathbb{Z}$.

Proposition* 1.2.10 (Gitter mit Involution). *Jedes Gitter mit Involution (X, σ) ist isomorph als Darstellung der zweielementigen Gruppe über $\mathbb{Z}$ zu einer endlichen direkten Summe von Kopien von $(\mathbb{Z}, \mathrm{id})$, $(\mathbb{Z}, -\mathrm{id})$ und $(\mathbb{Z}^2, \tau)$ für τ die Vertauschung der beiden Einträge. Die Zahl der jeweiligen Summanden ist dabei wohlbestimmt.*

Beweis. Wir setzen $X^\pm := \{\lambda \in X \mid \sigma(\lambda) = \pm\lambda\}$. Die Existenz einer Zerlegung der beschriebenen Art ist klar im Fall $X = X^+ + X^-$. Gibt es dahingegen $\lambda \in X$ mit $\lambda \notin (X^+ + X^-)$, so haben wir $2\lambda = (\lambda + \sigma(\lambda)) + (\lambda - \sigma(\lambda))$, also $2\lambda = \mu^+ + \mu^-$ mit $\mu^\pm \in X^\pm \backslash 0$. Man überzeugt sich dann, daß

$$Z := \{\nu \in X \mid \exists m \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \text{ mit } m\nu \in \mathbb{Z}\mu^+ + \mathbb{Z}\mu^-\}$$

ein unter σ stabiles zu $(\mathbb{Z}^2, \tau)$ isomorphes Untergitter ist. In der Tat prüft man leicht $Z^+ + Z^- \supsetneq 2Z \supsetneq 2Z^+ + 2Z^-$ und ein zweidimensionaler $\mathbb{F}_2$-Vektorraum hat genau drei Geraden. Nach Konstruktion ist X/Z auch ein Gitter. Bilden wir zur kurzen exakten Sequenz $Z \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/Z$ durch Anwenden von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ , \mathbb{Z})$ die duale Sequenz, so erhalten wir als wieder eine kurze exakte Sequenz $(X/Z)^* \hookrightarrow$

$X^* \twoheadrightarrow Z^*$. Diese muß aber spalten als Sequenz von Moduln über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[\sigma]/\langle\sigma^2 - 1\rangle$, da Z^* ebenso wie Z frei zyklisch ist über dem Gruppenring alias isomorph zu unserem Ring als Modul über sich selber. Damit spaltet auch die ursprüngliche Sequenz und wir können den Beweis der Existenz einer Zerlegung der beschriebenen Art mit Induktion zu Ende bringen. Die Zahl der jeweiligen Summanden wird eindeutig festgelegt durch die Dimensionen der σ-Eigenräume in $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{Q})$ und die Dimension des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums $X/(X^+ + X^-)$. Daß dieser Quotient auch in der Tat ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ ist, folgt aus der Identität $2\lambda = (\lambda + \sigma(\lambda)) + (\lambda - \sigma(\lambda))$. □

Ergänzung 1.2.11. Meines Wissens ist derzeit (2020) nicht bekannt, ob der Gruppenring jeder torsionsfreien Gruppe über jedem kommutativen Integritätsbereich auch selbst ein Integritätsring ist. Im Fall von Koeffizienten in einem Körper ist das die sogenannte **Nullteilervermutung von Kaplansky**.

Übungen

Übung 1.2.12 (**Universelle Eigenschaft des Monoidrings**). Gegeben ein Ringhomomorphismus $\varphi : k \to R$ und ein Monoid G und Monoidhomomorphismus $\psi : G \to (R, \cdot)$ mit der Eigenschaft $\varphi(a)\psi(g) = \psi(g)\varphi(a)\ \forall a \in k$, $g \in G$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $kG \to R$, der φ und ψ fortsetzt.

Übung 1.2.13. Man zeige, daß es für jeden Ring k und $G = \{e, g\}$ eine zweielementige Gruppe genau einen Ringisomorphismus $k[X]/\langle X^2 - 1\rangle \xrightarrow{\sim} kG$ gibt mit $\bar{X} \mapsto g$. Man folgere aus dem abstrakten chinesischen Restsatz weiter für k einen Körper mit $\mathrm{char}\, k \neq 2$ einen Isomorphismus $k[X]/\langle X^2 - 1\rangle \xrightarrow{\sim} k \times k$.

Übung 1.2.14. Man zeige, daß der Gruppenring der Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ über einem Körper k isomorph ist zum Quotienten $k[X]/\langle X^n - 1\rangle$ des Polynomrings. Im Fall, daß $X^n - 1$ über k in Linearfaktoren zerfällt, zeige man weiter, daß die einfachen Darstellungen alle eindimensional sind und daß ihre Isomorphieklassen parametrisiert werden durch die Wurzeln dieses Polynoms. Unter der Annahme, daß zusätzlich das Bild von n in k nicht verschwindet, zeige man weiter, daß dieser Gruppenring auch isomorph ist zum Produkt $k \times \ldots \times k$ von n Kopien des Körpers k. Im Fall $k = \mathbb{C}$ liefert etwa die diskrete Fouriertransformation aus [AN3] **??** einen derartigen Isomorphismus.

Übung 1.2.15. Seien $G \supset N$ eine endliche Gruppe mit einer Untergruppe. Man zeige, daß N genau dann ein Normalteiler ist, wenn die die N-linksinvarianten Elemente $\mathbb{Z}[G]^N$ des Gruppenrings von G einen $\mathbb{Z}[G]$-Unterlinksmodul bilden.

Übung 1.2.16. Eine **Frobenius-Algebra** ist eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ derart, daß gilt $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$ für alle Elemente a, b, c unserer Ringalgebra.

Man zeige, daß der Gruppenring einer endlichen Gruppe G mit der Bilinearform $\langle h, f\rangle := [e](hf)$ eine Frobenius-Algebra ist. Hier meint $[e]$ das Auswerten am neutralen Element als Linearform auf dem Gruppenring.

2 Moduln über Mengen

2.1 Begrifflichkeit der Mengenmoduln

Definition 2.1.1. Sei Ω eine Menge. Ein **Ω-Mengenmodul** oder kurz **Ω-Modul** ist ein Paar (M, σ) bestehend aus einer abelschen Gruppe M und einer Abbildung

$$\sigma : \Omega \to \mathrm{Ab}(M)$$

von Ω in den Endomorphismenring der abelschen Gruppe M. Wir verwenden in diesem Kontext die Abkürzung $\omega m := (\sigma(\omega))(m)$.

Beispiel 2.1.2. Gegeben ein Körper k ist ein k-Vektorraum ein k-Mengenmodul mit zusätzlichen Eigenschaften. Ein $\emptyset$-Modul ist eine abelsche Gruppe.

Definition 2.1.3. Sei Ω eine Menge. Eine Abbildung $f : M \to N$ von Ω-Moduln heißt ein **Modulhomomorphismus**, wenn sie ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist und wenn zusätzlich gilt

$$f(\omega m) = \omega f(m) \quad \forall m \in M, \omega \in \Omega$$

und erhalten so die Kategorie $\Omega\text{-Mod} = \mathrm{Mod}_\Omega$ der Ω-Moduln.

Beispiel 2.1.4. Gegeben ein Körper k ist eine k-lineare Abbildung von k-Vektorräumen dasselbe wie k-Modulhomomorphismus der zugrundeliegenden Mengenmoduln. Ein Homomorphismus von $\emptyset$-Moduln ist schlicht ein Homomorphismus von abelschen Gruppen.

2.1.5. Gegeben ein Ring R gilt es zu unterscheiden wir zwischen unseren R-Moduln aus [KAG] 1.2.3, die wir ausführlicher **R-Ringmoduln** nennen, und den R-Mengenmoduln, die wir hier eingeführt haben. Die R-Ringmoduln bilden eine volle Unterkategorie der R-Mengenmoduln. Ich verwende für beide dieselbe Notation $R\text{-Mod} = \mathrm{Mod}_R$ in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Die R^{opp}-Ringmoduln bilden ebenfalls eine volle Unterkategorie der R-Mengenmoduln. Diese notiere ich vorzugsweise $\mathrm{Mod}\text{-}R = \mathrm{Mod}_{-R}$.

2.1.6. Gegeben ein Monoid G gilt es zu unterscheiden zwischen Darstellungen von G über $\mathbb{Z}$ im Sinne von 1.1.2, die wir auch ausführlicher **G-Monoidmoduln** nennen, und den G-Mengenmoduln, die wir hier eingeführt haben. Die G-Monoidmoduln bilden eine volle Unterkategorie der G-Mengenmoduln. Ich verwende für beide dieselbe Notation $G\text{-Mod} = \mathrm{Mod}_G$ in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist.

2.1.7. Eine Darstellung eines Monoids G über einem Ring k ist ein Modul über der Menge $k \sqcup G$ mit gewissen Zusatzeigenschaften. Ich notiere die Kategorie dieser Darstellungen

$$(G, k)\text{-Mod} = \mathrm{Mod}_{k,G}$$

Allgemein sollen durch Kommata getrennte Aufzählungen operierender Mengen bedeuten, daß die Operationen der Elemente der verschiedenen Mengen miteinander kommutieren sollen, und wenn in der Aufzählung Monoide oder Ringe auftreten, wird implizit gefordert, daß diese auch als Ringe beziehungsweise Monoide operieren, und zwar von links, wenn sie auf der linken Seite des Kürzels Mod stehen, und von rechts, wenn sie auf der rechten Seite stehen.

2.1.8. Man hätte fast Lust, im vorhergehenden Ab statt Mod zu schreiben, aber das habe ich mich nicht getraut.

2.1.9 (**Universelle Eigenschaft injektiver Modulhomomorphismen**). Injektive Modulhomomorphismen $i : U \hookrightarrow M$ haben die universelle Eigenschaft, daß für jeden Modulhomomorphismus $\varphi : X \to M$ mit $\varphi(X) \subset U$ die induzierte Abbildung $\varphi : X \to U$ auch ein Modulhomomorphismus ist.

Definition 2.1.10. Seien Ω eine Menge und M ein Ω-Modul. Eine Teilmenge $L \subset M$ heißt ein **Ω-Untermodul** oder ausführlicher **Untermengenmodul**, wenn sie eine abelsche Untergruppe ist und wenn zusätzlich gilt $l \in L, \omega \in \Omega \Rightarrow \omega l \in L$.

2.1.11. Eine Teilmenge eines Ω-Moduls ist genau dann ein Ω-Untermodul, wenn sie so mit der Struktur eines Ω-Moduls versehen werden kann, daß die Einbettung eine Modulhomomorphismus ist. Diese Modulstruktur ist dann eindeutig bestimmt.

Beispiel 2.1.12. Ein k-Untervektorraum eines k-Vektorraums V ist dasselbe wie ein k-Untermengenmodul von V. Der Kern und das Bild jedes Mengenmodulhomomorphismus ist ein Untermengenmodul.

2.1.13 (**Universelle Eigenschaft surjektiver Modulhomomorphismen**). Surjektive Modulhomomorphismen $p : M \twoheadrightarrow Q$ haben die universelle Eigenschaft, daß für jeden Modulhomomorphismus $\varphi : M \to Y$ mit $\ker p \subset \ker \varphi$ die induzierte Abbildung von abelschen Gruppen $\varphi : Q \to Y$ ein Modulhomomorphismus ist.

2.1.14. Seien Ω eine Menge, M ein Ω-Modul und $L \subset M$ ein Untermodul. So gibt es auf der Restklassengruppe M/L genau eine Struktur als Ω-Modul derart, daß die Projektion $M \twoheadrightarrow M/L$ ein Modulhomomorphismus ist. Wir nennen dann M/L den **Quotient von M nach L**.

Beispiel 2.1.15. Der Quotient eines Vektorraums nach einem Untervektorraum ist ein Beispiel für diese Konstruktion. In diesem Fall ist der Quotient stärker nicht nur ein Mengenmodul, sondern sogar wieder ein Vektorraum.

2.2 Einfache Moduln und Kompositionsreihen

Definition 2.2.1. Gegeben ein Modul M über einer Menge Ω definieren wir seine **Länge**

$$\mathrm{Länge}_\Omega(M) = \mathrm{Länge}(M) = \mathrm{l}_\Omega(M) = \mathrm{l}(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

als das Supremum über alle n derart, daß es in M eine echt absteigende Kette von Untermoduln gibt der Gestalt $M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \ldots \supsetneq M_0 = 0$, die also salopp gesprochen in n Schritten vom ganzen Modul zum Nullmodul führt.

Definition 2.2.2. Ein Modul heißt **einfach** oder gleichbedeutend **irreduzibel**, wenn er genau zwei Untermoduln hat, als da heißt, wenn er nicht Null ist, aber außer sich selbst und Null keine weiteren Untermoduln hat.

Beispiel 2.2.3. Offensichtlich hat ein Modul die Länge Null genau dann, wenn er der Nullmodul ist, und die Länge Eins genau dann, wenn er einfach ist.

Beispiel 2.2.4. Ein Vektorraum über einem Körper oder Schiefkörper k ist ein einfacher k-Modul genau dann, wenn er eindimensional ist. Ein $\emptyset$-Modul alias eine abelsche Gruppe ist einfach genau dann, wenn sie endlich ist von Primzahlordnung, also isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p.

Beispiel 2.2.5. Jeder Vektorraum ist einfach als Modul über seinem Endomorphismenring.

Beispiele 2.2.6. Alle einfachen Ringmoduln über einem Ring isomorph zu einem Quotienten des besagten Rings nach einem maximalen Linksideal. Ist der Ring kommutativ, so kann man besagtes Linksideal aus dem Modul zurückgewinnen als seinen Annullator. Genauer ist dann der Quotient unseres Rings nach unserem maximalen Ideal bereits ein Körper, vergleiche [KAG] 1.6.7, und unser einfacher Modul ist ein eindimensionaler Vektorraum über diesem Körper. Bei nichtkommutativen Ringen können Quotienten nach verschiedenen maximalen Linksidealen jedoch als Moduln durchaus isomorph sein: Man denke etwa an den Matrizenring $\mathrm{Mat}(r; k)$ mit Einträgen in einem Körper k und den einfachen Modul k^r dieses Rings: Hier sind ja die Annullatoren verschiedener von Null verschiedener Elemente im allgemeinen durchaus verschiedene Linksideale.

Beispiele 2.2.7. Der Hilbert'sche Nullstellensatz [KAG] 1.5.10 besagt, daß alle einfachen Ringmoduln über einem Polynomring in endlich vielen Variablen mit Koeffizienten in einem Körper endlichdimensional sind über besagtem Körper. Ist der Körper algebraisch abgeschlossen, so sind sie sogar eindimensional.

Proposition 2.2.8. *Jeder von Null verschiedene endlich erzeugte Modul hat einen einfachen Quotienten.*

Beweis. Jedes endliche Erzeugendsystem können wir zu einem minimalen Erzeugendensystem verkleinern. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es dann für jeden Erzeuger einen Untermodul, der maximal ist mit der Eigenschaft, besagten Erzeuger nicht zu enthalten. So ein Untermodul aber muß alle anderen Erzeuger enthalten und ist mithin maximal unter allen echten Untermoduln. □

Lemma 2.2.9 (Homomorphismen von und zu einfachen Moduln). *Seien Ω eine Menge und E, F einfache Ω-Moduln und M ein beliebiger Ω-Modul. So gilt:*

1. *Jeder Homomorphismus $E \to M$ ist injektiv oder Null;*
2. *Jeder Homomorphismus $M \to F$ ist surjektiv oder Null;*
3. *Jeder Homomorphismus $E \to F$ ist bijektiv oder Null;*
4. *Der Endomorphismenring $\mathrm{End}_\Omega E$ ist ein Schiefkörper.*

Beweis. Der Kern $\ker(E \to M)$ und das Bild $\mathrm{im}(M \to F)$ sind Untermoduln von E beziehungsweise von F und sind folglich Null oder ganz E beziehungsweise ganz F. □

Definition 2.2.10. Seien Ω eine Menge und M ein Ω-Modul. Eine **Kompositionsreihe von** M ist eine endliche Kette von Untermoduln

$$M = M_r \supset M_{r-1} \supset \ldots \supset M_0 = 0$$

derart, daß M_i/M_{i-1} einfach ist für $r \geq i \geq 1$. Der Modul M_i/M_{i-1} heißt dann der **i-te Subquotient** unserer Kompositionsreihe. Gegeben ein Modul M über einer Menge Ω erklären wir seine **Kompositionslänge**

$$\lambda_\Omega(M) = \lambda(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

als die kleinstmögliche Länge einer Kompositionsreihe von M, wenn unser Modul eine Kompositionsreihe besitzt, und setzen andernfalls $\lambda(M) = \infty$.

Beispiel 2.2.11. Man überlegt sich leicht, daß die Länge und die Kompositionslänge eines Vektorraums beide mit seiner Dimension zusammenfallen. Der anschließende Satz besagt unter anderem, daß das auch für allgemeine Mengenmoduln immer gilt.

Beispiel 2.2.12. Man überlegt sich, daß ein $\emptyset$-Modul M alias eine abelsche Gruppe genau dann endliche Länge hat, wenn sie endlich ist, und daß ihre Kompositionslänge und Länge dann beide mit der Zahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Primfaktoren von $|M|$ zusammenfallen.

Satz 2.2.13 (Jordan-Hölder). *Für jeden Modul stimmen seine Länge und seine Kompositionslänge überein. Weiter haben je zwei Kompositionsreihen eines Moduls dieselbe Länge und bis auf Reihenfolge isomorphe Subquotienten.*

2.2.14. Sobald der Satz bewiesen ist, wird der Begriff der „Kompositionslänge“ überflüssig und wir sprechen nur noch von der „Länge“ eines Moduls.

2.2.15. In Formeln ausgedrückt besagt der zweite Teil unseres Satzes: Sind $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ und $M = N_s \supset \ldots \supset N_0 = 0$ zwei Kompositionsreihen eines Moduls M, so gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $N_i/N_{i-1} \cong M_{\sigma(i)}/M_{\sigma(i)-1}$ für alle i. Diese Subquotienten oder genauer ihre Isomorphieklassen heißen die **Kompositionsfaktoren** unseres Moduls endlicher Länge M und unser Satz sagt auch, daß jeder Kompositionsfaktor mit einer wohlbestimmten Vielfachheit auftritt. Gegeben ein einfacher Modul L notiert man die Vielfachheit von L als Kompositionsfaktor von M meist

$$[M : L]$$

Beispiel 2.2.16. Im Fall einer abelschen Gruppe M haben wir $[M : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})] = \max\{r \mid p^r \text{ teilt } |M|\}$.

Beweis. Die erste Aussage unseres Satzes behauptet in Formeln $\mathrm{l}(M) = \lambda(M)$. Offensichtlich ist a priori nur die Abschätzung $\mathrm{l}(M) \geq \lambda(M)$. Als nächstes zeigen wir nun, daß für jeden Modul M endlicher Kompositionslänge und jeden von Null verschiedenen Untermodul $0 \neq N \subset M$ gilt

$$\lambda(M/N) < \lambda(M)$$

Seien in der Tat $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ eine Kompositionsreihe von M und $N \subset M$ ein Untermodul. Wir betrachten den Quotienten $\bar{M} := M/N$ und die Bilder $\bar{M}_i$ der M_i in $\bar{M}$ und erhalten kurze exakte Sequenzen

$$(M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N) \hookrightarrow M_i/M_{i-1} \twoheadrightarrow \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$$

durch explizites Nachdenken: Geht ein Element $\overline{m + M_{i-1}}$ aus der Mitte rechts nach Null, landet es also in $\bar{M}_{i-1}$, so muß es aus $N + M_{i-1}$ stammen und sich folglich mit $m \in M_i \cap N$ darstellen lassen. Alternativ mag man das Neunerlemma [LA2] 4.7.5 auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
M_{i-1} \cap N & \hookrightarrow & M_i \cap N & \twoheadrightarrow & (M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M_{i-1} & \hookrightarrow & M_i & \twoheadrightarrow & M_i/M_{i-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{M}_{i-1} & \hookrightarrow & \bar{M}_i & \twoheadrightarrow & \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}
\end{array}$$

anwenden. Gilt zusätzlich $N \neq 0$, so kann nicht $M_i \cap N = M_{i-1} \cap N$ gelten für alle i. Zu jeder Kompositionsreihe von M haben wir also eine echt kürzere Kompositionsreihe von $\bar{M} = M/N$ konstruiert und erkennen damit, daß in der Tat aus $\lambda(M) < \infty$ und $N \neq 0$ folgt $\lambda(M/N) < \lambda(M)$. Man sieht so, daß die Länge einer beliebigen echt absteigenden Kette von Untermoduln eines Moduls endlicher Kompositionslänge M nach oben beschränkt ist durch eben diese Kompositionslänge $\lambda(M)$ und folgert sofort $\mathrm{l}(M) \leq \lambda(M)$. Im Fall $\lambda(M) = \infty$ ist das eh klar und so ergibt sich schließlich für jeden Modul M die Gleichheit

$$\mathrm{l}(M) = \lambda(M)$$

Daß je zwei Kompositionsreihen dieselbe Länge haben, folgt sofort. Ist weiter $N \subset M$ ein einfacher Untermodul, so gibt es oben genau einen Index j mit

$$M_j \cap N = N \text{ aber } M_{j-1} \cap N = 0$$

Für diesen Index haben wir $M_j/M_{j-1} \cong N$ und $\bar{M}_j/\bar{M}_{j-1} = 0$, wohingegen für die anderen Indizes $i \neq j$ gilt $M_i/M_{i-1} \cong \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$. Nun folgt der Rest des Satzes mit Induktion. □

Korollar 2.2.17 (Längenformel). *Gegeben $M \supset N$ ein Modul mit einem Untermodul gilt in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die Gleichheit* $\mathrm{l}(M) = \mathrm{l}(M/N) + \mathrm{l}(N)$.

Beweis. Für jeden Untermodul $N \subset M$ sind die Ungleichungen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{l}(M) & \geq & \mathrm{l}(M/N) + \mathrm{l}(N) \\ \lambda(M) & \leq & \lambda(M/N) + \lambda(N) \end{array}$$

offensichtlich. Da nach dem Satz 2.2.13 von Jordan-Hölder aber die Länge und die Kompositionslänge übereinstimmen, folgt die Behauptung. □

Ergänzung 2.2.18. Eine Variante zum hier gewählten Zugang zu Jordan-Hölder findet man in [JS06]: Man zeigt wie dort ausgeführt ohne große Schwierigkeiten, daß je zwei endliche Filtrierungen eines Moduls durch das Einfügen geeigneter weiterer Untermoduln so verfeinert werden können, daß die Subquotienten der beiden so enstehenden Filtrierungen bis auf Reihenfolge und Isomorphismen dieselben sind.

2.2.19. Der Schnitt über ein beliebiges System von Untermoduln eines Moduls ist wieder ein Untermodul. Gegeben ein Ω-Modul M und eine Teilmenge $T \subset M$ gibt es also einen kleinsten Untermodul $U \subset M$, der T umfaßt. Wir notieren ihn

$$\langle T \rangle_\Omega := U$$

und nennen ihn den **von T erzeugten Untermodul**. Er kann explizit beschrieben werden als die von allen $\omega_r \dots \omega_1 m$ für $r \geq 0$ und $\omega_i \in \Omega$ und $m \in M$ erzeugte abelsche Untergruppe. Ein Modul heißt **endlich erzeugt**, wenn er von einer endlichen Teilmenge erzeugt wird. Er heißt **zyklisch**, wenn er von einer einelementigen Teilmenge erzeugt wird.

Beispiel 2.2.20. Jeder Modul endlicher Länge ist endlich erzeugt. Um ein endliches Erzeugendensystem anzugeben, können wir etwa eine Kompositionsreihe $M = M_r \supset M_{r-1} \supset \dots \supset M_0 = 0$ wählen und Elemente $m_i \in M_i \backslash M_{i-1}$ und dann ist $\{m_1, \dots, m_r\}$ offensichtlich ein Erzeugendensystem. Jeder einfache Modul ist zyklisch und jedes von Null verschiedene Element ist darin ein Erzeuger.

Definition 2.2.21. Ein Modul heißt **noethersch** nach der Mathematikerin Emmy Noether, wenn jeder Untermodul endlich erzeugt ist.

2.2.22. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe alias jeder $\emptyset$-Modul ist noethersch nach [KAG] 1.4.10. Wir wiederholen den Beweis hier nicht.

2.2.23 (**Charakterisierungen noetherscher Moduln**). Die Vereinigung über ein nicht leeres total geordnetes System von Untermoduln eines Moduls ist wieder ein Untermodul. Die beiden alternativen Charakterisierungen noetherscher Moduln aus [KAG] 1.4.13 gelten mit demselben Beweis auch für Mengenmoduln. Ein Modul ist also noethersch genau dann, wenn jedes nichtleere System von Untermoduln ein maximales Element hat genau dann, wenn jede aufsteigende Folge von Untermoduln stagniert. Man sagt dann auch, unser Modul „erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung".

Definition 2.2.24. Ein Modul heißt **artinsch** nach dem Mathematiker Emil Artin, wenn jede absteigende Folge von Untermoduln stationär wird. Man sagt dann auch, unser Modul „erfüllt die absteigende Kettenbedingung".

Ergänzung 2.2.25. Auf Englisch spricht man von der **descending chain condition** oder kurz **dcc** oder auch von **artinian modules**. Darin liegt eine gewisse Ironie der Geschichte: Emil Artin war nämlich armenischen Ursprungs und seine Familie hatte ihren Familiennamen Artinian zu Artin eingedeutscht.

Beispiele 2.2.26. Der $\emptyset$-Modul $\mathbb{Z}$ besitzt keinen einfachen Untermodul. Der $\emptyset$-Modul $\mathbb{Q}$ besitzt als $\emptyset$-Modul weder einfache Untermoduln noch einfache Quotienten. Als $\mathbb{Q}$-Modul ist $\mathbb{Q}$ dahingegen einfach.

Übungen

Übung 2.2.27. Ein Modul, der sowohl artinsch als auch noethersch ist, ist von endlicher Länge. Hinweis: Man interessiere sich für maximale Untermoduln endlicher Länge.

Übung 2.2.28. Der Quotient eines Moduls nach einem maximalen echten Untermodul ist stets ein einfacher Modul.

Übung 2.2.29. Jeder endlich erzeugte und von Null verschiedene Modul besitzt einen einfachen Quotienten.

Ergänzende Übung 2.2.30. Man zeige, daß jeder Modul endlicher Länge artinsch ist. Ein Beispiel für einen artinschen $\emptyset$-Modul unendlicher Länge ist der Quotient $\mathbb{Z}[2^{-1}]/\mathbb{Z}$.

2.3 Halbeinfache Moduln

Definition 2.3.1. Ein Modul heißt **halbeinfach**, wenn er die Summe seiner einfachen Untermoduln ist.

2.3.2. Wir fordern bei der Definition nicht, daß unser Modul die direkte Summe seiner einfachen Untermoduln sein soll. Zum Beispiel ist jeder Vektorraum über einem Körper halbeinfach, er ist ja die Summe seiner eindimensionalen Teilräume, aber im Fall einer Dimension Zwei oder mehr natürlich nicht deren direkte Summe. Der Nullmodul ist stets halbeinfach als die Summe über die leere Familie seiner einfachen Untermoduln.

2.3.3. Zwei Untermoduln $U, D \subset M$ eines Moduls heißen **komplementär** und wir schreiben $M = U \oplus D$, wenn die Addition einen Isomorphismus $U \oplus D \xrightarrow{\sim} M$ liefert. Hinreichend und notwendig ist dafür, daß gilt $U \cap D = 0$ und $U + D = M$. Wir sagen in dem Fall auch, M sei die **direkte Summe** von U und D und D sei ein **Komplement** von U in M. Analoge Begriffsbildungen benutzen wir auch für beliebige Familien von Untermoduln eines Moduls.

Proposition 2.3.4 (Charakterisierung halbeinfacher Moduln). *Seien Ω eine Menge und M ein Ω-Modul. So sind gleichbedeutend:*

1. *M ist halbeinfach alias die Summe seiner einfachen Untermoduln;*

2. *M ist eine direkte Summe von einfachen Untermoduln;*

3. *Jeder Untermodul von M besitzt ein Komplement in M.*

Beweis. 2⇒1: Das ist klar.

1⇒3: Sei $M = \sum_{i \in I} M_i$ das Erzeugnis einer Familie von einfachen Untermoduln $M_i \subset M$ und sei $U \subset M$ der Untermodul, für den wir ein Komplement suchen. Gegeben $J \subset I$ setzen wir

$$M_J := \sum_{i \in J} M_i$$

Ist I endlich, so finden wir natürlich unter allen Teilmengen $J \subset I$ mit $M_J \cap U = 0$ eine bezüglich Inklusion maximale Teilmenge. Ist I unendlich, so folgt die Existenz eines solchen maximalen J mit dem Zorn'schen Lemma. In jedem Fall behaupten wir für solch ein maximales J, daß gilt $M_J \oplus U = M$. In der Tat, aus $M_J + U \neq M$ folgt, daß es ein $i \in I$ gibt mit $M_i \not\subset (M_J + U)$, also $M_i \cap (M_J + U) = 0$ da M_i einfach ist. Dann folgt aber $(M_i + M_J) \cap U = 0$ und J war nicht maximal.

3⇒2: Wir bemerken zunächst, daß sich die Eigenschaft 3 auf Untermoduln vererbt: Sind nämlich $U \subset N \subset M$ Untermoduln und ist V ein Komplement von U in M, so ist notwendig $V \cap N$ ein Komplement von U in N. Jetzt finden wir mithilfe des Zorn'schen Lemmas eine maximale Menge von einfachen Untermoduln derart, daß ihre Summe in M direkt ist. Wäre diese Summe S nicht ganz M, so fänden wir ein von Null verschiedenes Komplement D von S in M. In diesem Komplement D gäbe es einen von Null verschiedenen zyklischen Untermodul $Z \subset D$, und der hätte nach Übung 2.2.29 seinerseits einen einfachen Quotienten $Z \twoheadrightarrow Q$. Nun hat diese Surjektion einen Kern $K \subset Z$ und dieser Kern hat ein Komplement $E \subset Z$ und wegen $E \cong Q$ ist E einfach. Das aber steht im Widerspruch zur Maximalität von S. □

Ergänzung 2.3.5. Beim Nachweis der Implikation 1⇒3 im vorhergehenden Beweis hätten wir auch gleich mit der Familie aller einfachen Untermoduln arbeiten können. Ich hoffe jedoch, daß man anhand des oben gegebenen Arguments besser nachvollziehen kann, in welchen Fällen das Zorn'sche Lemma benötigt wird.

Korollar 2.3.6. *Jeder Quotient und jeder Untermodul eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.*

Beweis. Natürlich ist jeder Quotient eine Summe einfacher Untermoduln und ist damit halbeinfach nach 2.3.4. Weiter besitzt nach 2.3.4 jeder Untermodul ein Komplement und ist damit auch isomorph zu einem Quotienten unseres Moduls, nämlich zu dem Quotienten nach besagtem Komplement. Alternativ kann man sich daran erinnern, daß wir beim Beweis von 3⇒1 in 2.3.4 bereits gezeigt hatten, daß sich die Eigenschaft 3 auf Untermoduln vererbt. □

Definition 2.3.7. Seien Ω eine Menge und M ein Ω-Modul. Gegeben ein einfacher Ω-Modul E nennen wir die Summe aller zu E isomorphen Untermoduln von M den **E-isotypischen Anteil von** M und notieren diesen Untermodul

$$M_E \subset M$$

Satz 2.3.8 (**Zerlegung in isotypische Anteile**)**.** *Gegeben eine Menge Ω und ein Ω-Modul M liefert die Einbettung der isotypischen Anteile eine Einbettung ihrer* *direkten Summe*

$$\bigoplus_{E \in \operatorname{irr}(\Omega)} M_E \hookrightarrow M$$

mit der Notation $\operatorname{irr}(\Omega)$ *für die Menge der Isomorphieklassen einfacher* Ω*-Moduln.*

2.3.9. Das Bild dieser Einbettung ist offensichtlich der größte halbeinfache Untermodul von M. Er heißt der **Sockel** $\operatorname{soc} M$ von M. Insbesondere zerfällt jeder halbeinfache Modul in die direkte Summe seiner isotypischen Anteile, die in diesem Fall auch seine **isotypischen Komponenten** heißen.

Beweis. Daß das Bild unserer Abbildung der größte halbeinfache Untermodul ist, scheint mir klar. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß die Summe der isotypischen Komponenten direkt ist. Nach [KAG] 2.1.11 reicht es also zu zeigen, daß für alle E gilt

$$M_E \cap \sum_{F \neq E} M_F = 0$$

Dazu hinwiederum brauchen wir nur zu zeigen, daß jeder einfache Untermodul einer Summe von einfachen Untermoduln zu einem der Summanden isomorph ist. Da aber besagte Summe halbeinfach ist, ist unser einfacher Untermodul auch ein Quotient dieser Summe und damit notwendig auch ein Quotient eines Summanden und folglich isomorph zu diesem Summanden. □

Proposition 2.3.10 (Beschreibung isotypischer Komponenten). *Gegeben eine Menge* Ω *und ein einfacher* Ω*-Modul* E *bezeichne* $S := \operatorname{End}_\Omega E$ *seinen Endomorphismenschiefkörper. So liefert für jeden weiteren* Ω*-Modul* M *das Einsetzen einen Isomorphismus von* Ω*-Moduln*

$$\operatorname{Hom}_\Omega(E, M) \otimes_S E \xrightarrow{\sim} M_E$$

Beweis. Offensichtlich liefert die Einbettung unserer isotypischen Komponente einen Isomorphismus $\operatorname{Hom}_\Omega(E, M_E) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_\Omega(E, M)$. Wir dürfen also $M = M_E$ annehmen und dann auch, daß $M = \bigoplus_{i \in I} E$ eine direkte Summe von Kopien von E ist. Ein Homomorphismus $E \to \prod_{i \in I} E$ ist nun ein I-Tupel von Homomorphismen $E \to E$ und landet offensichtlich genau dann in $\bigoplus_{i \in I} E \subset \prod_{i \in I} E$, wenn in diesem Tupel von Homomorphismen fast alle Einträge die Nullabbildung sind. So sehen wir, daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \operatorname{Hom}_\Omega(E, E) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_\Omega(E, \bigoplus_{i \in I} E)$$

induziert. Da das Tensorprodukt mit direkten Summen vertauscht, folgt die Behauptung. □

2.4 Halbeinfachkeit und externes Tensorieren

Proposition 2.4.1 (Halbeinfache Moduln als Modulkategorie). *Gegeben eine Menge Ω und ein einfacher Ω-Modul E mit Endomorphismenschiefkörper $S := \mathrm{End}_\Omega E$ induziert das Darantensorieren eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\otimes_S E : \text{Mod-}\, S \xrightarrow{\approx} \Omega\text{-Mod}_{(E)}$$

zwischen der Kategorie der S-Rechtsmoduln und der Kategorie der Ω-Moduln M mit $M = M_E$.

2.4.2. Damit diese Aussage sinnvoll wird, muß man sich ein Universum dazudenken. Alternativ kann man sich die Aussage dahingehend präzisiert denken, daß mit dem im Beweis angegebenen adjungierten Funktor in die Gegenrichtung die Einheit ebenso wie die Koeinheit der Adjunktion aus Isomorphismen bestehen.

Beweis. Wir betrachten den rechtsadjungierten Funktor $\mathrm{Hom}_\Omega(E,\ )$ und wissen aus 2.3.10, daß die Koeinheit der Adjunktion für alle $M \in \Omega\text{-Mod}_{(E)}$ ein Isomorphismus $\mathrm{Hom}_\Omega(E, M) \otimes_S E \xrightarrow{\sim} M$ ist. Ebenso ist für jeden S-Rechtsmodul N die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $N \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Omega(E, N \otimes_S E)$, denn das gilt für $N = S$ und beide Seiten sind verträglich mit Koprodukten. Die Behauptung folgt. □

2.4.3 (**Äquivalenzen mit Operationen**). Gegeben eine Menge Ω und ein einfacher Ω-Modul E und $S := \mathrm{End}_\Omega E$ sein Endomorphismenschiefkörper und eine weitere Menge Θ liefert die Äquivalenz aus 2.4.1 offensichtlich auch eine Äquivalenz

$$\otimes_S E : \Theta\text{-}(\text{Mod-}\, S) \xrightarrow{\approx} \Theta\text{-}(\Omega\text{-Mod}_{(E)})$$

zwischen den Kategorien der jeweiligen Objekte mit Θ-Operation. Ist zusätzlich Θ ein Ring, so induziert sie auch eine Äquivalenz zwischen den jeweiligen Unterkategorien der Objekte, die sogar Ringmoduln sind in Bezug auf Θ.

Proposition 2.4.4 (Externe Tensorprodukte mit einfachen Moduln). *Gegeben eine Menge Ω, ein Kring k, ein einfacher Ω-k-Modul E mit Endomorphismenschiefkörper $S := \mathrm{End}_{\Omega,k} E$ und eine k-Ringalgebra B liefert das Tensorprodukt eine Äquivalenz*

$$\otimes_S E : \text{Mod-}(S \otimes_k B) \xrightarrow{\approx} \Omega\text{-Mod}_{(\mathrm{E})}\text{-}\, B$$

zur Kategorie derjenigen Ω-B-Moduln, deren Restriktion zu (Ω, k) isomorph ist zu einer Summe von Kopien von E.

2.4.5. Gegeben ein B-Rechtsmodul M ist insbesondere $E \otimes_k M$ einfach beziehungsweise halbeinfach als Ω-B-Modul genau dann, wenn $S \otimes_k M$ einfach beziehungsweise halbeinfach ist als $S \otimes_k B$-Rechtsmodul. Der Fall $S = k$ war Übung 3.1.11.

Beweis. Gegeben eine Menge Ω und ein Kring k und ein einfacher Ω-k-Modul E und $S := \mathrm{End}_{\Omega,k} E$ sein Endomorphismenschiefkörper mit dem offensichtlichen Ringhomomorphismus $k \to \mathrm{Z}(S)$ ist die Äquivalenz

$$\otimes_S E : \text{Mod-}\,S \stackrel{\approx}{\to} \Omega\,\text{-Mod-}_{(E)}\,k$$

von vorher offensichtlich verträglich mit den natürlichen k-Modulstrukturen auf den Morphismenräumen. Ist zusätzlich A eine k-Ringalgebra, so induziert unsere Äquivalenz folglich eine Äquivalenz zwischen den Kategorien der A-Moduln auf beiden Seiten, deren Objekte wir erklären als Paare (X, φ) aus einem Objekt X der jeweiligen Kategorie mit einem Homomorphismus $\varphi : A \to \mathrm{End}\, X$ von k-Ringalgebren. Wir notieren diese Äquivalenz

$$\otimes_S E : A\,\text{-}(\text{Mod-}\,S) \stackrel{\approx}{\to} A\,\text{-}(\Omega\,\text{-}\,k\,\text{-Mod}_{(E)})$$

Mit $B := A^{\mathrm{opp}}$ erhalten wir die Äquivalenz aus der Proposition. □

Korollar 2.4.6 (Skalarerweiterung bei einfachen Mengenmoduln). *Gegeben eine Körpererweiterung K/k und eine Menge Ω und ein einfacher (Ω, k)-Modul E mit Endomorphismenring k ist $K \otimes_k E$ ein einfacher (Ω, K)-Modul mit Endomorphismenring K.*

2.4.7 (**Tensorprodukte von Körpern und Schiefkörpern**). Die Resultate dieses Abschnitts liefern besonders interessante Aussagen, wenn man mehr über Tensorprodukte von Körpern und Schiefkörpern weiß. Ich zitiere hierzu insbesondere [AL] 6.1.2, daß und wie gegeben T/k eine Körpererweiterung und S/k eine endliche separable Körpererweiterung das Tensorprodukt $T \otimes_k S$ ein Produkt von endlich vielen endlichen separablen Körpererweiterungen von T ist. Weiter wird in 3.6.13 unter anderem gezeigt, daß in Charakteristik Null das Tensorprodukt über einem Körper k zweier Schiefkörper, die endlichdimensionale k-Ringalgebren sind, zumindest eine halbeinfache k-Ringalgebra ist, also ein endliches Produkt von Matrixringen über Schiefkörpern.

Satz 2.4.8 (Externes Tensorieren einfacher Moduln). *Gegeben ein Körper k und Mengen Ω, Θ und darüber einfache k-Mengenmoduln E, F mit Endomorphismenschiefkörpern S, T liefert das Tensorieren eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\otimes_{(T \otimes_k S)}(F \otimes_k E) : \text{Mod-}(T \otimes_k S) \stackrel{\approx}{\to} \text{Mod-}(\Theta, \Omega, k)_{(F,E)}$$

zur Kategorie aller k-Vektorräume mit kommutierenden Operationen von Θ und Ω derart, daß die Restriktion zu (k, Ω) beziehungsweise (k, Θ) isomorph ist zu einer Summe von Kopien von E beziehungsweise F.

Beweis. Wir arbeiten mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Mod}\text{-}(T \otimes_k S) \arrow[dl, "\approx"'] \arrow[dr, "\approx"] & \\
\mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, S)_{(F)} \arrow[rr, Rightarrow, "\sim"] \arrow[dr, "\approx"] & & \mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega)_{(E)} \arrow[dl, "\approx"'] \\
& \mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F,E)} \arrow[d, hook] & \\
& \mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega) &
\end{tikzcd}$$

Hier meint $\mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, S)_{(F)}$ die Kategorie derjenigen Θ-S-Rechtsmoduln, die als Θ-k-Moduln isomorph sind zu einer Summe von Kopien von F. Wir wissen bereits aus 2.4.4, daß $\otimes_T F$ eine Äquivalenz von Kategorien induziert wie der Pfeil oben links andeutet. Ebenso liefert $\otimes_S E$ die Äquivalenz oben rechts. Daß $\otimes_S E$ einen volltreuen Funktor von links nach ganz unten induziert, wissen wir bereits aus 2.4.1. Analog induziert $\otimes_T F$ einen volltreuen Funktor von rechts nach ganz unten und eine Isotransformation zwischen beiden verknüpften Funktoren von oben nach unten ist auch schnell angegeben. Nun ist T ein Schiefkörper und $\otimes_T F$ gefolgt vom Vergessen der Θ-Operation bildet offensichtlich $\mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega)_{(E)}$ nach $\mathrm{Mod}\text{-}(k, \Omega)_{(E)}$ ab. Dasselbe gilt auf der anderen Seite und so landen unsere unteren Funktoren in der Tat in $\mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F,E)}$ wie behauptet. Ausführlicher haben wir nach 2.4.1 eine Äquivalenz

$$\otimes_T F : \mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega) \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F)}$$

und offensichtlich bildet $\otimes_T F$ ein Objekt genau dann nach $\mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F,E)}$ ab, wenn es zu $\mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega)_{(E)}$ gehört. Folglich induziert unsere Äquivalenz auch eine Äquivalenz

$$\otimes_T F : \mathrm{Mod}\text{-}(T, \Omega)_{(E)} \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{Mod}\text{-}(\Theta, k, \Omega)_{(F,E)} \qquad \square$$

Korollar 2.4.9 (Externe Tensorprodukte einfacher Moduln). *Gegeben k ein Körper und Ω, Θ Mengen und E, F jeweils ein einfacher k-Mengenmodul und S, T deren Endomorphismenschiefkörper gilt:*

1. *Genau dann ist $F \otimes_k E$ einfach, wenn $S \otimes_k T$ ein Schiefkörper ist;*

2. *Genau dann ist $F \otimes_k E$ halbeinfach, wenn $S \otimes_k T$ ein halbeinfacher $S \otimes_k T$-Rechtsmodul ist.*

2.4.10. Das kann man auch bei Bourbaki [Bou12] nachlesen, der im wesentlichen denselben Beweis gibt, aber die Sprache der Kategorientheorie vermeidet.

Beweis. Wir erinnern unsere Äquivalenz 2.4.8. Nach diesem Satz ist $F \otimes_k E$ genau dann einfach, wenn $S \otimes_k T$ ein einfacher $S \otimes_k T$-Rechtsmodul ist, und genau dann halbeinfach, wenn $S \otimes_k T$ ein halbeinfacher $S \otimes_k T$-Rechtsmodul ist. □

Übungen

Übung 2.4.11. Gegeben $m \geq 1$ ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein halbeinfacher $\emptyset$-Modul alias eine halbeinfache abelsche Gruppe genau dann, wenn kein Primfaktor in m mehrfach vorkommt.

Übung 2.4.12. Ein $\mathbb{C}[X]$-Ringmodul M ist halbeinfach genau dann, wenn der durch Multiplikation mit X gegebene Endomorphismus des $\mathbb{C}$-Vektorraums M diagonalisierbar ist, als da heißt, wenn M eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Dasselbe gilt im Fall von $k[X]$-Ringmoduln für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k. Hinweis: [KAG] 4.7.27. Ist k ein vollkommener Körper und $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluß, so ist ein $k[X]$-Ringmodul halbeinfach genau dann, wenn der durch Erweiterung der Skalare entstehende $\bar{k}[X]$-Modul halbeinfach ist. Ist k nicht vollkommen, so gilt das nicht mehr.

Übung 2.4.13. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : M \to N$ von Ω-Moduln und E ein einfacher Ω-Modul bildet φ den entsprechenden isotypischen Anteil in den entsprechenden isotypischen Anteil ab, in Formeln $\varphi(M_E) \subset N_E$. Ist $U \subset M$ ein Untermodul, so haben wir sogar $U_E = U \cap M_E$.

Übung 2.4.14. Eine Sequenz $M' \to M \to M''$ von halbeinfachen Moduln ist exakt genau dann, wenn für alle einfachen Moduln die induzierte Sequenz $M'_E \to M_E \to M''_E$ exakt ist.

Übung 2.4.15. Man gebe eine halbeinfache abelsche Gruppe mit genau tausend Elementen an.

Übung 2.4.16. Man bestimme die isotypischen Komponenten der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

Übung 2.4.17. Man erkläre, inwiefern die Zerlegung eines halbeinfachen Moduls in isotypische Komponenten die Eigenraumzerlegung eines Vektorraums unter einem diagonalisierbaren Endomorphismus verallgemeinert. Hinweis: 2.4.12.

2.5 Mengenmoduln und Körpererweiterungen

Lemma 2.5.1 (Skalarerweiterung und Homomorphismen). *Seien Ω eine Menge und k ein Körper und K eine k-Ringalgebra. Seien Ω-k-Moduln M, N gegeben mit $\dim_k \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N) < \infty$. So ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus*

$$K \otimes_k \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{K,\Omega}(K \otimes_k M, K \otimes_k N)$$

2.5.2. Unter einer der Annahmen $\dim_k K < \infty$ oder $\dim_k M < \infty$ gilt das auch ohne unsere Zusatzannahme $\dim_k \operatorname{Hom} < \infty$, vergleiche [LA2] 6.1.42. Ich habe die Aussage in der hier gegebenen Allgemeinheit nicht in der Literatur gefunden.

Beweis. Die Erweiterung der Skalare liefert einen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M, K \otimes_k N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{K,\Omega}(K \otimes_k M, K \otimes_k N)$$

Sei $(\alpha_i)_{i \in I}$ eine k-Basis von K. Bezeichne $\alpha^i : K \to k$ die Koordinatenfunktionen unserer Basis und $\tilde{\alpha}^i \in \operatorname{Hom}_{\Omega,k}(K \otimes_k N, N)$ die davon induzierten Homomorphismen. Gegeben $\psi \in \operatorname{Hom}_{\Omega,k}(M, K \otimes_k N$ gilt dann

$$\tilde{\alpha}^i \circ \psi \in \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N)$$

Nun finden wir induktiv $v_1, \ldots, v_d \in M$ mit $d := \dim_k \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N)$ derart, daß für $\phi \in \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,N)$ aus $\phi(v_1) = \ldots = \phi(v_d) = 0$ folgt $\phi = 0$. Nun kann es aber für jedes j nur höchstens endlich viele i geben mit $(\tilde{\alpha}^i \circ \psi)(v_j) \neq 0$. Also kann es überhaupt nur höchstens endlich viele i geben mit $\tilde{\alpha}^i \circ \psi \neq 0$ und dann ist ψ das Bild von $\sum \alpha_i \otimes (\tilde{\alpha}^i \circ \psi)$ und unser Isomorphimus in spe ist schon mal surjektiv. Die Injektivität folgt aus [LA2] 6.1.48. □

Proposition 2.5.3 (Skalarerweiterung und einfache Moduln). *Seien Ω eine Menge und K/k eine Körpererweiterung und M ein einfacher Ω-k-Modul, der außer den Skalaren keine weiteren Endomorphismen hat, in Formeln*

$$\operatorname{End}_{k,\Omega}(M) = k \operatorname{id}$$

So ist auch $K \otimes_k M$ ein einfacher Ω-K-Modul mit $\operatorname{End}_{K,\Omega}(K \otimes_k M) = K \operatorname{id}$.

Beweis. Die letzte Aussage $\operatorname{End}_{K,\Omega}(K \otimes_k M) = K \operatorname{id}$ folgt sofort aus der Verträglichkeit von Homomorphismen und Skalarerweiterungen 2.5.1. Es gilt damit nur noch zu zeigen, daß $K \otimes_k M$ einfach ist. Zunächst einmal ist sicher $\operatorname{res}_K^k(K \otimes_k M)$ ein halbeinfacher Ω-k-Modul, ja eine direkte Summe von Kopien von M. Jede kurze exakte Sequenz $U \hookrightarrow K \otimes_k M \twoheadrightarrow Q$ induziert also eine kurze exakte Sequenz von K-Moduln

$$\operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,U) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M, K \otimes_k M) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_{k,\Omega}(M,Q)$$

Nun ist die Mitte eindimensional über K nach der bereits bewiesenen Teilaussage. Folglich steht rechts oder links eine Null und es folgt $U = 0$ oder $Q = 0$. □

3 Moduln über Ringen

3.1 Einfache Moduln über Ringen

3.1.1. Im folgenden verstehen wir unter Moduln a priori Ringmoduln.

Definition 3.1.2. Ein **Ring von endlicher Länge** ist ein Ring, der sowohl als Linksmodul als auch als Rechtsmodul über sich selber von endlicher Länge ist.

3.1.3 (**Zahl einfacher Ringmoduln**). Sei R ein Ring. Die Menge der Isomorphieklassen von einfachen R-Moduln notieren wir $\operatorname{irr}(R)$. Für jeden Ring folgt aus dem Satz von Jordan-Hölder in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die Abschätzung

$$|\operatorname{irr}(R)| \leq \operatorname{l}_R(R)$$

In der Tat ist jeder einfache R-Modul ein Quotient von R und tritt folglich in einer und jeder Kompositionsreihe von R als Subquotient auf.

Korollar 3.1.4 (Zahl einfacher Ringmoduln und Dimension). *Sei R ein Ring, der einen Körper k als Teilring hat. Ist R endlichdimensional als Linksmodul über k, so gibt es bis auf Isomorphismus höchstens $\dim_k R$ einfache R-Moduln, in Formeln gilt also*

$$|\operatorname{irr}(R)| \leq \dim_k R$$

Beweis. Offensichtlich gilt $|\operatorname{irr}(R)| \leq \operatorname{l}_R(R)$ und $\operatorname{l}_R(R) \leq \dim_k R$. □

Ergänzung 3.1.5. Jeder Ring, der als Linksmodul über sich selber artinsch ist, ist als Linksmodul über sich selber bereits von endlicher Länge. Solche Ringe heißen auch **linksartinsch**. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [JS06].

Übungen

Übung 3.1.6. Ist ein Ring einfach als Linksmodul über sich selbst, so ist unser Ring ein Schiefkörper.

Übung 3.1.7. In jedem Ring läßt sich auch jedes echte Linksideal vergrößern zu einem maximalen echten Linksideal. Genau dann ist ein Linksideal maximal, wenn der Quotient danach ein einfacher Modul ist. Jeder von Null verschiedene Modul über einem Ring besitzt einen einfachen Subquotienten. Insbesondere besitzt jeder von Null verschiedene Ring mindestens einen einfachen Modul. Hinweis: [KAG] 1.6.4.

Übung 3.1.8. Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist jeder einfache $k[X]$-Modul eindimensional und isomorph zu $k[X]/\langle X - \lambda \rangle$ für genau ein $\lambda \in k$.

Übung 3.1.9. Der einzige einfache Modul über dem Endomorphismenring eines endlichdimensionalen Vektorraums ist der besagte Vektorraum selber, bis auf Isomorphismus. Dasselbe gilt für endlichdimensionale Vektorräume über Schiefkörpern. Hinweis: Jordan-Hölder. Von einem höheren Standpunkt mag man das auch als Konsequenz der Morita-Äquivalenz [NAS] **??** verstehen.

Übung 3.1.10 (**Isotypische Komponenten als Ideale**). Ist R ein Ring und E ein einfacher R-Modul, so ist die E-isotypische Komponente R_E von R als R-Linksmodul ein beidseitiges Ideal von R. Ist F ein weiterer einfacher R-Modul mit $E \not\cong F$, so gilt für das Produkt der isotypischen Komponenten insbesondere $R_E R_F = 0$.

Ergänzende Übung 3.1.11 (**Tensorprodukte einfacher Moduln**). Gegeben Ringalgebren A, B über einem Körper k und ein einfacher A-Modul E mit Endomorphismenring $\operatorname{End}_A E = k \operatorname{id}_E$ liefert die Vorschrift $F \mapsto E \otimes_k F$ eine Bijektion

$$\operatorname{irr}(B) \xrightarrow{\sim} \{M \in \operatorname{irr}(A \otimes_k B) \mid \operatorname{Hom}_A(E, M) \neq 0\}$$

In der Tat liefert der Funktor $F \mapsto E \otimes_k F$ sogar eine Äquivalenz von Kategorien

$$\operatorname{Mod}_B \xrightarrow{\approx} \{M \in \operatorname{Mod}_{A \otimes_k B} \mid M = M_E\}$$

zwischen der Kategorie aller B-Moduln und der Kategorie aller der $(A \otimes_k B)$-Moduln, die als A-Moduln mit ihrer E-isotypischen Komponente zusammenfallen. Um das einzusehen, erinnere man die kanonische Beschreibung isotypischer Komponenten 2.3.10 und prüfe, daß die Vorschrift $M \mapsto \operatorname{Hom}_A(E, M)$ einen quasiinversen Funktor liefert. Das ist im wesentlichen der Fall $S = k$ von 2.4.4.

Ergänzung 3.1.12 (**Einfache Moduln über Tensorproduktalgebren**). Im allgemeinen wird es selbst im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers $k = \bar{k}$ für k-Ringalgebren A, B auch einfache Moduln über $A \otimes_k B$ geben, die weder als A-Moduln noch als B-Moduln einfache Untermoduln besitzen und die mithin nicht von der Gestalt $E \otimes_k F$ sind. Das einfachste Beispiel, das mir einfällt, arbeitet mit den Ringen von algebraischen Differentialoperatoren $A = B = \mathbb{C}\lfloor X, \partial \rfloor = A_1$, wie sie in [**?**] **??** folgende besprochen werden. Für die diagonale Einbettung $i : \Delta \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ liefert dann $i_+ \mathcal{O}(\Delta)$ nach dem Einbettungssatz von Kashiwara [**?**] **??** einen einfachen Modul über $A_2 \cong A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_1$, von dem man unschwer einsieht, daß er kein Tensorprodukt einfacher A_1-Moduln sein kann.

3.2 Endomorphismen einfacher Moduln

Satz 3.2.1. *Gegeben eine Ringalgebra R über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ und ein einfacher R-Modul E endlicher Dimension* $\dim_k E < \infty$ *liefert die offensichtliche Einbettung $\lambda \mapsto \lambda \operatorname{id}_E$ einen Isomorphismus*

$$k \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_R E$$

Beweis. Nach Annahme gilt $E \neq 0$. Jedes $\varphi \in \operatorname{Mod}_R E$ besitzt also einen Eigenwert, sagen wir λ, und der zugehörige Eigenraum ist offensichtlich ein von Null verschiedener R-Untermodul $\operatorname{Eig}(\varphi; \lambda) = \ker(\varphi - \lambda \operatorname{id})$. Wenn E einfach ist, muß dieser Untermodul schon ganz E sein und wir folgern $\varphi = \lambda \operatorname{id}_E$. □

Beispiel 3.2.2. Ist $k \subset L$ ein Körpererweiterung, so wird $E := L$ ein einfacher Modul über $R := L$. In diesem Fall haben wir offensichtlich $\operatorname{End}_R E = L$ und im allgemeinen kann natürlich $k \neq L$ gelten, aber eben nur dann, wenn entweder gilt $\dim_k L = \infty$ oder wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist.

Korollar 3.2.3 (Schur'sches Lemma). *Gegeben eine endlichdimensionale einfache Darstellung eines Monoids über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind die Skalare ihre einzigen Endomorphismen.*

Beweis. Eine einfache Darstellung ist nichts anderes als ein einfacher Modul über dem Monoidring. Die Behauptung folgt so aus 3.2.1. □

Korollar 3.2.4. *Jede endlichdimensionale einfache Darstellung eines kommutativen Monoids über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist eindimensional.*

Beweis. Jedes Element unseres Monoids operiert in diesem Fall durch einen Endomorphismus unserer Darstellung, also nach dem Lemma von Schur durch ein Vielfaches der Identität. Dann aber ist jeder Untervektorraum bereits eine Unterdarstellung und unsere Darstellung kann nur einfach sein, wenn sie eindimensional ist. □

3.2.5. Die nun folgende Verallgemeinerung von 3.2.1 ist für die Darstellungstheorie endlicher Gruppen ohne Bedeutung. Ihr Beweis benötigt stärkere Resultate der Mengenlehre.

Satz* 3.2.6. *Gegeben eine Ringalgebra R über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ und ein einfacher R-Modul E, dessen Dimension als k-Vektorraum echt kleiner ist als die Kardinalität von k, liefert die offensichtliche Einbettung $\lambda \mapsto \lambda \operatorname{id}_E$ einen Isomorphismus*

$$k \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_R E$$

3.2.7. Insbesondere besitzt eine einfache Darstellung eines Monoids über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, deren Dimension echt kleiner ist als die Kardinalität des Körpers, außer den Skalaren keine Endomorphismen. Wie zuvor folgt auch, daß eine einfache Darstellung eines kommutativen Monoids über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, deren Dimension echt kleiner ist als die Kardinalität des Körpers, eindimensional sein muß.

Ergänzung 3.2.8. Der Hilbert'sche Nullstellensatz [KAG] 1.5.10 oder auch [KAG] 1.6.9 liefert die verwandte Aussage, daß gegeben eine ringendliche Kringalgebra R über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ jeder einfache R-Modul eindimensional ist über k.

Beweis. Das Anwenden auf ein beliebiges von Null verschiedenes Element unseres einfachen R-Moduls E liefert natürlich eine Injektion $(\mathrm{End}_R E) \hookrightarrow E$. Die Dimension des Endomorphismenrings von E über k ist folglich höchstens so groß wie die Dimension von E über k. Wäre unser Endomorphismenring echt größer als k, so müßte er den Funktionenkörper $k(X)$ umfassen, in dem die Familie der $((X-\lambda)^{-1})_{\lambda \in k}$ etwa nach [LA1] 5.5.12 linear unabhängig ist über k. Das steht jedoch im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen an die Kardinalitäten. □

Übungen

Ergänzende Übung 3.2.9. Jede einfache Darstellung einer abelschen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, deren Dimension echt kleiner ist als die Kardinalität des Körpers, ist eindimensional.

Übung 3.2.10. Ist eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ein Schiefkörper, so fällt sie mit unserem algebraisch abgeschlossenen Körper zusammen.

3.3 Dichtesatz und Anwendungen

Satz 3.3.1 (Jacobson's Dichtesatz). *Gegeben ein Ring R und ein halbeinfacher R-Modul M ist das Bild des offensichtlichen Ringhomomorphismus*

$$R \to \mathrm{End}_{(\mathrm{End}_R M)} M$$

dicht in folgendem Sinne: Gegeben $f \in \mathrm{End}_{(\mathrm{End}_R M)} M$ und endlich viele Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$ existiert stets ein $x \in R$ mit $x m_i = f(m_i)$ für $1 \le i \le r$.

3.3.2. Jeder Modul ist nach [KAG] 1.3.12 auch ein Modul über seinem eigenen Endomorphismenring. Ist unser Modul der Ring R selber, so gilt nach [KAG] 2.3.14 sogar ohne alle weitere Voraussetzungen und für jeden beliebigen Ring R stets $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{(\mathrm{End}_R R)} R$ unter der offensichtlichen Abbildung.

3.3.3. Gegeben eine Menge E mit Verknüpfung alias ein Magma und eine Teilmenge $T \subset E$ erklärt man den **Kommutator von** T **in** E durch die Formel $T' := \{x \in E \mid xt = tx \quad \forall t \in T\}$. Der Kommutator T'' des Kommutators T' von T heißt dann der **Bikommutator von** T und umfaßt natürlich T selbst, in Formeln

$$T \subset T''$$

Unser Satz sagt in dieser Terminologie, daß gegeben ein halbeinfacher Modul M über einem Ring R das Bild $D \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$ von $R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$ in der oben ausgeführten Weise „dicht“ liegt in seinem Bikommutator $D'' \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$. Im übrigen fällt der „Trikommutator“ stets mit dem Kommutator zusammen, in Formeln

$$T''' = T'$$

In der Tat, $T'' \supset T$ impliziert $T''' \subset T'$ und $T''' \supset T'$ folgt durch Anwenden der Regel $S'' \supset S$ auf $S = T'$. Man mag das auch als Spezialfall unserer allgemeinen Erkenntnisse [KAG] 1.1.12 im Zusammenhang mit Inzidenzstrukturen auffassen, angewandt auf die Inzidenzstruktur $K \subset E \times E$ bestehend aus allen kommutierenden Paaren.

3.3.4. Hier ein Gegenbeispiel. Man betrachte den Ring $R \subset \mathrm{Mat}(2; k)$ der oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen in einem Körper k und seinen Modul $M := k^2$ der Spaltenvektoren. Der Kommutator $D' \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} k^2$ von $D = R \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} k^2$ besteht nur aus Skalaren $D' = k\,\mathrm{id} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} k^2$ und sein Bikommutator ist folglich der ganze Matrixring $D'' = \mathrm{Mat}(2; k) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} k^2$. Offensichtlich liegt also D nicht dicht in D''. Zum Glück ist hier auch M kein halbeinfacher R-Modul. Dies Beispiel zeigt jedoch, daß der Dichtesatz nicht ohne Voraussetzungen gilt.

3.3.5. Hier kommt ein weiteres Gegenbeispiel. Man betrachte den Ring der dualen Zahlen $D := \mathbb{Z}[\varepsilon]$ mit $\varepsilon^2 = 0$ und den injektiven Endomorphismus dieses Rings mit $\varepsilon \mapsto n\varepsilon$ für $n \geq 1$. Sein Bild ist ein Teilring $R \subset D$. Betrachten wir $M := D$ als R-Modul, so gilt der Dichtesatz nicht, wie der Leser zur Übung selbst prüfen mag.

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $r = 1$ und betrachten zu $m = m_1$ ein Komplement N des Untermoduls $Rm \subset M$, so daß also gilt

$$M = Rm \oplus N$$

Da die Projektion $\pi : M \twoheadrightarrow Rm \hookrightarrow M$ längs unserer Zerlegung in $\mathrm{End}_R M$ liegt, und da gilt $f \circ \pi = \pi \circ f$ nach Annahme, folgt $f(m) \in Rm$. Es gibt also in anderen Worten $x \in R$ mit $f(m) = xm$. Den allgemeinen Fall führen wir auf den Fall $r = 1$ zurück, indem wir das Element $(m_1, \ldots, m_r) \in M^{\oplus r}$ betrachten und die Abbildung $f \times \ldots \times f$. Sie entspricht unter dem Isomorphismus

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M^{\oplus r}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(r; \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M)$$

gegeben durch $\varphi \mapsto (\mathrm{pr}_j \circ \varphi \circ \mathrm{in}_i)_{ij}$ einer Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(f, \ldots, f)$ und kommutiert in der Tat mit allen Elementen von $\mathrm{End}_R(M^{\oplus r})$, da diese unter unserem Isomorphismus den Matrizen aus $\mathrm{Mat}(r; \mathrm{End}_R M)$ entsprechen. $\square$

Korollar 3.3.6 (Satz von Wedderburn). *Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A \subset \mathrm{Mat}(n; k)$ eine k-Unterringalgebra derart, daß k^n einfach ist als A-Modul, so gilt bereits $A = \mathrm{Mat}(n; k)$.*

3.3.7. Das Beispiel des Quaterionenschiefkörpers $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ mit seiner komplexen Vektorraumstruktur durch Multiplikation mit komplexen Skalaren von rechts und seiner offensichtlichen Struktur als Linksmodul über den Quaternionen $A = \mathbb{H}$ zeigt, daß das Korollar nicht für einen beliebigen Teilring gilt.

Beweis. Zunächst gilt $\mathrm{End}_A k^n = k$, da alle Eigenräume von Elementen $\varphi \in \mathrm{End}_A k^n$ in Bezug auf A Untermoduln sind und jeder Untermodul entweder Null ist oder ganz k^n. Dann folgt $A = \mathrm{End}_k k^n$ aus dem Dichtesatz 3.3.1. □

3.3.8. Man mag den Satz von Wedderburn auch koordinatenfrei formulieren: Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $A \subset \mathrm{End}_k V$ eine k-Unterringalgebra derart, daß V einfach ist als A-Modul, so gilt bereits $A = \mathrm{End}_k V$. In dieser Sprache läßt sich die Notwendigkeit der Bedingung $k = \bar{k}$ besonders gut einsehen: Sind $k \subset L$ Körper und betrachten wir den Teilring $L \subset \mathrm{End}_k L$, so ist ja L ein einfacher L-Modul, aber im Fall $k \neq L$ gilt $L \neq \mathrm{End}_k L$.

Vorschau 3.3.9. Aus dem Satz von Wedderburn folgt insbesondere, daß für jede einfache Darstellung V eines endlichen Monoids G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k gilt $(\dim_k V)^2 \leq |G|$. Stärkere Aussagen in dieser Richtung werden wir in 4.2.9 kennenlernen. Über allgemeineren Körpern gilt diese Abschätzung im allgemeinen nicht mehr, wie 1.1.33 zeigt.

3.4 Moduln über Tensorproduktalgebren

3.4.1. Gegeben Ringalgebren A, B über einem Kring k und Moduln M über A und N über B können wir $M \otimes_k N$ zu einem Modul über der Ringalgebra $A \otimes_k B$ machen, indem wir setzen $(a \otimes b)(m \otimes n) = am \otimes bn$. Ich schlage für diesen Modul die Notation

$$M \boxtimes N = M \boxtimes_k N$$

vor und nenne ihn das **äußere Produkt** der oder **Boxprodukt** von M und N.

3.4.2. Gegeben eine Ringalgebra A über einem Körper k bezeichne

$$\mathrm{irrf}_k(A)$$

die Menge aller Isomorphieklassen einfacher und über k endlichdimensionaler A-Moduln. Der Buchstabe f steht hier für „finite“ oder „fini“. Die für einen deutschen Text naheliegende Notation irre hätte zu merkwürdig ausgesehen.

Satz 3.4.3 (Einfache Moduln über Tensorproduktalgebren). *Gegeben Ringalgebren A, B über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ induziert das Boxprodukt eine Bijektion*

$$(\operatorname{irrf}_k A) \times (\operatorname{irrf}_k B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{irrf}_k(A \otimes_k B)$$

Beispiel 3.4.4. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so ist das im allgemeinen falsch. Zum Beipiel ist $\mathbb{C}$ ein einfacher Modul über der $\mathbb{R}$-Ringalgebra $\mathbb{C}$, aber $\mathbb{C} \boxtimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist kein einfacher Modul über der $\mathbb{R}$-Ringalgebra $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, denn der Kern der durch die Multiplikation gegebenen Surjektion $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ ist ein von Null verschiedener echter Untermodul.

3.4.5. Etwas stärkere und allgemeinere Aussagen mögen Sie bereits als Übung 3.1.11 gezeigt haben. Noch allgemeinere Aussagen werden in 2.4.8 und 2.4.9 gezeigt. Ein Gegenbeispiel im Fall unendlicher Dimension wird in 3.1.12 gegeben.

Beweis. Gegeben $E \in A\text{-Mod}$ und $F \in B\text{-Mod}$ einfach und endlichdimensional über k ist auch $E \boxtimes F \in (A \otimes B)\text{-Mod}$ einfach, da nach dem Satz von Wedderburn 3.3.6 die Operationen Surjektionen $A \twoheadrightarrow \operatorname{End}_k E$ und $B \twoheadrightarrow \operatorname{End}_k F$ liefern und damit auch eine Surjektion von $A \otimes B \twoheadrightarrow \operatorname{End}_k(E \otimes F)$. Die im Satz angegebene Abbildung ist also sinnvoll definiert. Ist T ein über k endlichdimensionaler $A \otimes B$-Modul, so besitzt T als A-Modul einen einfachen Untermodul $E \subset T$. Die offensichtliche Abbildung $E \boxtimes \operatorname{Hom}_A(E, T) \to T$ ist dann nach 3.4.6 ein injektiver $(A \otimes B)$-Homomorphismus für die Operation durch Nachschalten von B auf dem Hom-Raum. Ist T einfach, so muß diese Abbildung auch surjektiv sein und der Hom-Raum muß ein einfacher B-Modul F sein. Die im Satz angegebene Abbildung ist also surjektiv. Den Nachweis ihrer Injektivität kann der Leser ohne Mühe aus dem Nachweis der Surjektivität extrahieren. □

Lemma 3.4.6. *Gegeben k ein Körper und A eine k-Ringalgebra und M ein A-Modul und E ein einfacher A-Modul mit Endomorphismenring $\operatorname{End}_A E = k \operatorname{id}_E$ induziert das Auswerten eine Inklusion*

$$E \otimes_k \operatorname{Hom}_A(E, M) \hookrightarrow M$$

Beweis. Eventuell haben Sie bereits eine stärkere Aussage als Übung 2.3.10 gezeigt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß M eine Summe und dann auch eine direkte Summe ist von zu E isomorphen Untermoduln ist, und in diesem Fall ist das Lemma explizit klar. □

Definition 3.4.7. Seien A, B Ringe und M ein Modul über $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$. Man nennt (A, B) ein **duales Paar vermittels** M, wenn die offensichtlichen Abbildungen Surjektionen $B \twoheadrightarrow \operatorname{End}_A M$ sowie $A \twoheadrightarrow \operatorname{End}_B M$ liefern.

Proposition* 3.4.8 (Zerlegung unter dualen Paaren). *Sind zwei Ringalgebren A, B über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k ein duales Paar vermittels eines über k endlichdimensionalen $(A \otimes_k B)$-Moduls M, und ist M halbeinfach als A-Modul, so gibt es einfache und paarweise nicht isomorphe A-Moduln $E_1, \ldots, E_r$ sowie einfache und paarweise nicht isomorphe B-Moduln $F_1, \ldots, F_r$ derart, daß M unter $A \otimes_k B$ zerfällt als*

$$M \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} E_\nu \boxtimes_k F_\nu$$

Beweis. Mit 3.4.6 finden wir schon einmal eine derartige Zerlegung mit allen E_ν einfach und paarweise nicht isomorph. Dann liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $\prod_{\nu=1}^{r} \mathrm{End}_k F_\nu \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_A M$. Folglich sind die F_ν einfache Moduln für $\mathrm{End}_A M$ und damit nach Annahme für B. Damit ist M auch als B-Modul halbeinfach. Lassen wir nun dasselbe Argument andersherum laufen, so folgt zusätzlich, daß die F_ν paarweise nicht isomorph sind. □

3.5 Halbeinfache Ringe

Definition 3.5.1. Ein Ring heißt **halbeinfach**, wenn er halbeinfach ist als Linksmodul über sich selber.

3.5.2. Aus dem Satz über die Struktur halbeinfacher Ringe 3.5.4 wird folgen, daß ein Ring halbeinfach ist genau dann, wenn der opponierte Ring halbeinfach ist. In Teilen der Literatur wird aus mir unerfindlichen Gründen von einem halbeinfachen Ring zusätzlich gefordert, daß er nicht der Nullring sein darf. Der Gruppenring einer endlichen Gruppe über einem Körper oder sogar Schiefkörper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt, ist halbeinfach nach dem Satz von Maschke 4.1.1.

Ergänzung 3.5.3 (**Terminologisches**). Unter einem **einfachen Ring** verstehen wir einen Ring, der nicht Null ist und außer Null und dem ganzen Ring keine weiteren zweiseitigen Ideale besitzt. Diese Terminologie ist mit der eben in 2.3.1 eingeführten Terminologie nicht gut verträglich, da einfache Ringe keineswegs halbeinfach als Linksmodul über sich selber zu sein brauchen. Ein einfacher Ring R ist vielmehr einfach als Modul über dem Produktring $R \times R^{\mathrm{opp}}$, dessen Operation auf R dabei durch simultane Links- und Rechtsmultiplikation zu verstehen ist. Zum Beispiel erhält man einen einfachen Ring, wenn man in $\mathrm{End}(\mathbb{C}[X])$ den Teilring betrachet, der von den Multiplikationen mit Polynomen und der Operation ∂ des Ableitens erzeugt wird. Er wird $\mathbb{C}\lfloor X, \partial \rfloor$ notiert, heißt die „Algebra der algebraischen Differentialoperatoren auf $\mathbb{C}$“ oder auch „Weyl-Algebra in einer Veränderlichen“, und wir zeigen in [?] **??**, daß er einfach ist. Als weiteres Beispiel erhält man auch einen einfachen Ring, wenn man den Quotienten des Endomorphismenrings eines Vektorraums abzählbarer Dimension nach dem Ideal aller Endomorphismen endlichen Ranges betrachtet, wie der Leser zur Übung selbst prüfen mag. Dieser Ring E ist jedoch als Linksmodul über sich selber mit denselben Argumenten wie in [KAG] 2.1.9 isomorph zu $E^{\oplus 2}$, folglich kann er nach 3.5.4 nicht halbeinfach sein. In der Literatur wird auch oft unter einem „einfachen Ring" das verstanden, was in der hier gewählten Terminologie als ein „halbeinfacher einfacher Ring" zu bezeichnen ist.

Satz 3.5.4 (**Struktur halbeinfacher Ringe**). *1. Der Ring $\operatorname{End}_D L$ der Endomorphismen eines endlich erzeugten Moduls L über einem Schiefkörper D ist stets halbeinfach. Unter der zusätzlichen Annahme $L \neq 0$ ist er auch einfach und hat L als einzigen einfachen Modul bis auf Isomorphismus;*

2. *Jedes endliche Produkt von halbeinfachen Ringen ist halbeinfach;*

3. *Jeder halbeinfache Ring besitzt bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache Moduln und ist selbst eine direkte Summe von endlich vielen einfachen Links-Untermoduln alias Linksidealen;*

4. *Der opponierte Ring eines halbeinfachen Rings ist stets auch wieder halbeinfach;*

5. *Jeder einfache Modul über einem halbeinfachen Ring ist endlichdimensional als Modul über seinem Endomorphismenschiefkörper;*

6. *Ist $L_1, \ldots, L_r$ ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen von einfachen Moduln eines halbeinfachen Rings R und sind $D_i := \operatorname{End}_R L_i$ deren Endomorphismenschiefkörper, so liefert die offensichtliche Abbildung einen Ringisomorphismus*

$$R \xrightarrow{\sim} (\operatorname{End}_{D_1} L_1) \times \ldots \times (\operatorname{End}_{D_r} L_r)$$

3.5.5. Man mag zur Übung zeigen, daß die Faktoren rechts unter unserem Isomorphismus den isotypischen Komponenten des R-Moduls R entsprechen.

3.5.6 (**Halbeinfache endlichdimensionale Ringalgebren**). Eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper ist insbesondere genau dann halbeinfach, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von Matrixringen in endlichdimensionalen Schiefkörpern über besagtem Körper. Eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist damit genau dann halbeinfach, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von Matrixringen über besagtem Körper.

Beispiel 3.5.7 (**Halbeinfache endlichdimensionale reelle Ringalgebren**). Wir wissen aus [AL] 3.12.2, daß es bis auf Isomorphismus nur drei endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Ringalgebren gibt, die Schiefkörper sind, nämlich $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ und den Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen. Jede halbeinfache endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Ringalgebra ist also isomorph zu einem endlichen Produkt von Matrizenringen in diesen drei $\mathbb{R}$-Ringalgebren. Ein typisches Beispiel für eine endlichdimensionale halbeinfache $\mathbb{R}$-Ringalgebra wäre etwa

$$\mathrm{Mat}(2; \mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(7; \mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}(2; \mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}(5; \mathbb{H})$$

Beweis. 1. Gegeben ein Schiefkörper D und $n \geq 1$ ist der Matrizenring $\mathrm{Mat}(n; D)$ einfach und halbeinfach. In der Tat sieht man leicht ein, daß das von einer beliebigen von Null verschiedenen Matrix erzeugte zweiseitige Ideal bereits der ganze Matrizenring sein muß und daß der Linksmodul D^n der Spaltenvektoren ein einfacher Modul über unserem Matrizenring ist. Der Matrizenring $\mathrm{Mat}(n; D)$ ist nun als Linksmodul über sich selber isomorph zur direkten Summe von n Kopien dieses einfachen Moduls, etwa den Untermoduln aller Matrizen, bei denen höchstens eine vorgegebene Spalte von Null verschieden ist. Folglich ist er auch halbeinfach. Da jeder einfache Modul eines Rings ein Quotient des Rings selber sein muß, zeigt die Zerlegung in isotypische Komponenten 2.3.8, daß D^n im Fall eines Schiefkörpers D bis auf Isomorphismus der einzige einfache Modul von $\mathrm{Mat}(n; D)$ ist.

2. Das ist klar.

3. Jeder halbeinfache Ring zerfällt in eine direkte Summe von einfachen Untermoduln. Seine Eins muß dabei wie jedes Element bereits in einer Summe von endlich vielen dieser einfachen Untermoduln liegen, und diese Summe ist dann notwendig bereits der ganze Ring. Da jeder einfache Modul Quotient unseres Rings ist und damit in einer isotypischen Zerlegung unseres Rings auftreten muß, besitzt unser Ring bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache Moduln.

4. Ist $L_1, \ldots, L_r$ ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen einfacher Moduln und m_i deren jeweilige Vielfachheit im R-Modul R, so haben wir also einen Isomorphismus von R-Linksmoduln $R \cong L_1^{m_1} \oplus \ldots \oplus L_r^{m_r}$. Sind $D_i = \mathrm{End}_R L_i$ die Endomorphismenringe unserer einfachen Moduln, so erhalten wir nach [KAG] 2.3.14 und [KAG] 2.1.17 Ringisomorphismen

$$R^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_R R \xleftarrow{\sim} \mathrm{Mat}(m_1; D_1) \times \ldots \times \mathrm{Mat}(m_r; D_r)$$

Das Transponieren von Matrizen liefert dann auch einen Ringisomorphismus

$$R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}(m_1; D_1^{\mathrm{opp}}) \times \ldots \times \mathrm{Mat}(m_r; D_r^{\mathrm{opp}})$$

Jeder halbeinfache Ring ist also isomorph zu einem endlichen Produkt von Ringen endlicher quadratischer Matrizen mit Einträgen in Schiefkörpern. Umgekehrt folgt aus 1 und 2, daß alle Ringe dieser Gestalt halbeinfach sind. Insbesondere ist der opponierte Ring eines halbeinfachen Rings stets wieder halbeinfach.

5. Nach dem Vorhergehenden wissen wir bereits, daß gegeben ein Schiefkörper D und eine natürliche Zahl $m \geq 1$ jeder einfache Modul über dem Matrizenring $\mathrm{Mat}(m; D)$ isomorph ist zum Modul D^m der Spaltenmatrizen und jeder einfache Rechtsmodul isomorph zum Modul D^m der Zeilenmatrizen, dessen Endomorphismenring hinwiederum D selber ist, nun aber durch Linksmultiplikation wirkend.

6. Sicher liefert die offensichtliche Abbildung einen injektiven Homomorphismus

$$R \hookrightarrow (\mathrm{End}_{D_1} L_1) \times \ldots \times (\mathrm{End}_{D_r} L_r)$$

Teil 5 zusammen mit dem Dichtesatz zeigt, daß er ein Isomorphismus sein muß. Im Rückblick folgern wir zusätzlich $m_i = \dim_{D_i} L_i$. In Worten stimmt also die Multiplizität eines einfachen Linksideals in R überein mit seiner Dimension über dem jeweiligen Endomorphismenschiefkörper. □

Übungen

Übung 3.5.8. Man zeige, daß jeder Linksmodul über einem halbeinfachen Ring halbeinfach ist.

Übung 3.5.9. Besitzt ein Ring einen endlich erzeugten halbeinfachen Modul mit verschwindendem Annulator, so ist er halbeinfach.

Ergänzende Übung 3.5.10. Besitzt ein einfacher Ring ein Linksideal, das als Linksmodul einfach ist, so muß unser Ring keineswegs halbeinfach sein: Der Endomorphismenring jedes Vektorraums unendlicher Dimension ist ein Gegenbeispiel.

Übung 3.5.11. Gegeben ein Modul über einem Schiefkörper sind die einzigen zentralen Idempotenten seines Endomorphismenrings die Null und die Identität.

Übung 3.5.12. Gegeben ein Schiefkörper D und ein zentraler Unterkörper $k \subset D$ und ein endlich erzeugter D-Modul L ist jeder k-lineare Ringautomorphismus $\varphi : \mathrm{End}_D(L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_D(L)$ die Konjugation mit einer Einheit $g \in (\mathrm{End}_k L)^\times$. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $L \neq 0$ annehmen. Der mit φ zurückgezogene $\mathrm{End}_D(L)$-Modul L ist dann ebenfalls einfach als $\mathrm{End}_D(L)$-Modul und folglich isomorph zu L über k.

Übung 3.5.13. Gegeben ein endlich erzeugter halbeinfacher Modul M über einem Ring R zeige man, daß sein Endomorphismenring $\mathrm{End}_R M$ halbeinfach ist, daß die R-isotypischen Komponenten von M mit den $\mathrm{End}_R M$-isotypischen Komponenten von M zusammenfallen, und daß jeder einfache Modul von $\mathrm{End}_R M$

isomorph ist zu einem Untermodul von M. Wir erhalten mithin eine Injektion $\mathrm{irr}(\mathrm{End}_R M) \hookrightarrow \mathrm{irr}(R)$, deren Bild aus allen Isomorphieklassen von einfachen R-Moduln besteht, die in M vorkommen.

Übung 3.5.14. Ein zentrales Idempotentes $z \in R$ eines Rings heißt **primitiv**, wenn es nicht Null ist und es keine von Null verschiedenen zentralen Idempotenten z_1, z_2 gibt mit $z_1 + z_2 = z$ aber $z_1 z_2 = 0$. Man zeige: Gegeben von Null verschiedene Vektorräume $L_1, \ldots, L_r$ über Schiefkörpern $D_1 \ldots, D_r$ sind die primitiven zentralen Idempotenten des Produktrings

$$R := (\mathrm{End}_{D_1} L_1) \times \ldots \times (\mathrm{End}_{D_r} L_r)$$

genau die Tupel mit der Identität an einer Stelle und sonst nur Nullen. Insbesondere ist in einem halbeinfachen Ring stets die Eins die Summe der primitiven zentralen Idempotenten.

Übung 3.5.15. Selbst in einem kommutativen aber nicht halbeinfachen Ring muß im allgemeinen die Eins keineswegs die Summe der primitiven zentralen Idempotenten sein. Man gebe ein Gegenbeispiel.

Übung 3.5.16. Jeder Ring $\mathrm{Mat}(n; D)$ von endlichen quadratischen Matrizen mit Koeffizienten in einem Schiefkörper D und $n \geq 1$ ist einfach, und jeder halbeinfache einfache Ring ist isomorph zu einem derartigen Matrizenring für genau ein n und einen bis auf Isomorphismus wohlbestimmten Schiefkörper D, seinen **Goldie-Schiefkörper**. Das fragliche n heißt dann der **Goldie-Rang** unseres halbeinfachen einfachen Rings.

Übung 3.5.17. Gegeben ein Schiefkörper D und ein endlich erzeugter D-Modul V und ein Endomorphismus $a \in E := \mathrm{End}_D V$ sind gleichbedeutend:

1. Das von a erzeugte Linksideal Ea ist ein einfacher E-Modul;
2. Das von a erzeugte Rechtsideal aE ist ein einfacher E-Rechtsmodul;
3. Unser Endomorphismus a hat den Rang Eins alias $aV \cong D$ als D-Modul;
4. Unser D-Modul V besitzt eine Basis derart, daß die Matrix von a in Bezug auf diese Basis genau einen von Null verschiedenen Eintrag hat.

Hinweis: Sind zwei Spalten unserer Matrix a linear unabhängig, so hätte Ea eine zu große Dimension. Dann beachte man, daß Zeilenrang gleich Spaltenrang auch für Matrizen mit Einträgen in Schiefkörpern gilt.

3.6 Spurkriterium für Halbeinfachkeit*

3.6.1. Sei R ein Ring. Der Schnitt $\mathrm{J}(R) = \mathrm{Jac}(R)$ aller Annullatoren einfacher R-Moduln heißt das **Jacobson-Radikal von** R.

3.6.2. Das Jacobsonradikal von R ist auch der Schnitt aller Annulatoren einfacher R-Rechtsmoduln, in Formeln gilt also $\mathrm{J}(R) = \mathrm{J}(R^{\mathrm{opp}})$. Um das einzusehen bemerkt man zunächst

$$\mathrm{J}(R) = \{x \in R \mid 1 - rx \text{ besitzt für alle } r \in R \text{ ein Linksinverses}\}.$$

In der Tat finden wir für $x \notin \mathrm{J}(R)$ einen einfachen R-Modul E und $e \in E$ mit $xe \neq 0$ und insbesondere $e \neq 0$ und dann ein $r \in R$ mit $rxe = e$ alias $(1-rx)e = 0$ und dann kann $(1-rx)$ kein Linksinverses haben. Gibt es umgekehrt $r \in R$ so daß $(1 - rx)$ kein Linksinverses hat, so liegt es in einem maximalen Linksideal, annulliert also einen einfachen R-Linksmodul E und dann kann rx und a forteriori x nicht zum Annulator von E gehören. Nun folgern wir stärker

$$\mathrm{J}(R) = \{x \in R \mid 1 - rxs \text{ ist für alle } r, s \in R \text{ invertierbar}\}.$$

Die Inklusion $\supset$ ist hier eh klar. Andererseits impliziert $x \in \mathrm{J}(R)$ bereits $xs \in \mathrm{J}(R)$ für alle $s \in R$ und es gibt folglich u mit $u(1-rxs) = 1$ alias $1 + urxs = u$. Andererseits gibt es dann auch v mit $v(1 + urxs) = 1 = vu$. Aus $vu = 1$ und $ua = 1$ folgt aber direkt $v = a$ und so die Invertierbarkeit von a.

Proposition 3.6.3 (Lemma von Nakayama). *Gegeben ein Ring R und ein endlich erzeugter R-Modul M mit $\mathrm{J}(R)M = M$ gilt $M = 0$.*

3.6.4. Im Fall kommutativer Ringe kann man nach Matsumura eine stärkere Aussage [KAG] 4.6.2 sogar ohne Verwendung des Zorn'schen Lemmas zeigen, die man dann auch das „Lemma von Nakayama“ nennt. Wenn ich die Unterscheidung betonen will, nenne ich sie das **kommutative Nakayamalemma** und nenne die hier bewiesene Aussage 3.6.3 das **nichtkommutative Nakayamalemma**.

Beweis. Wäre $M \neq 0$, so gäbe es nach 2.2.8 einen Untermodul $N \subset M$ mit M/N einfach und folglich $\mathrm{J}(R)(M/N) = 0$ alias $\mathrm{J}(R)M \subset N$ und a forteriori $\mathrm{J}(R)M \neq M$. □

3.6.5 (**Jacobsonradikal eines Rings endlicher Länge**). Sei R ein Ring, der von endlicher Länge ist als Linksmodul über sich selber. So ist $\mathrm{J}(R)$ offensichtlich ein nilpotentes zweiseitiges Ideal, in Formeln $\mathrm{J}(R)^n = 0$ für $n \gg 0$, ja für $n \geq l_R(R)$. Umgekehrt muß jedes Linksideal J, das aus nilpotenten Elementen besteht, jeden einfachen Modul annullieren, denn aus $JL \neq 0$ folgt erst die Existenz von $x \in J$ und $m \in L$ mit $xm \neq 0$ und dann die Existenz von $r \in R$ mit $(rx)m = m$ im Widerspruch zu $(rx) \in J$. Mithin ist in diesem Fall $\mathrm{J}(R)$ daß größte Linksideal von R, das aus nilpotenten Elementen besteht.

3.6.6 (**Ringe endlicher Länge mit Jacobsonradikal Null**). Ein Ring R, der von endlicher Länge ist als Linksmodul über sich selber und dessen Jacobsonradikal verschwindet, muß halbeinfach sein. In der Tat findet man dann Elemente einfacher Moduln $m_1 \in L_1, \ldots, m_t \in L_t$ derart, daß das Daranmultiplizieren an $(m_1, \ldots, m_t) \in L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ eine Injektion $R \hookrightarrow L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ induziert, und dann ist R nach 2.3.6 halbeinfach als Untermodul eines halbeinfachen Moduls.

3.6.7 (**Die Spurform und ihre Eigenschaften**). Sei k ein Körper. Auf jeder endlichdimensionalen k-Algebra A können wir die Linearform

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Tr}: & A & \to & k \\ & a & \mapsto & \mathrm{tr}((a\cdot)|A) \end{array}$$

betrachten und die **Spurform** $A \times A \mapsto k$ erklären durch

$$(a, b)_{\mathrm{tr}} := \mathrm{tr}\,\big((a\cdot) \circ (b\cdot)|A\big)$$

Man prüft leicht $(a, b)_{\mathrm{tr}} = (b, a)_{\mathrm{tr}}$. Ist unsere Algebra assoziativ, so haben wir $(a, b)_{\mathrm{tr}} = \mathrm{Tr}(ab)$ und $(ax, b)_{\mathrm{tr}} = (a, xb)_{\mathrm{tr}}$ für alle $a, b, x \in A$. Daraus folgt, daß das Radikal J der Spurform einer assoziativen Algebra stets ein zweiseitiges Ideal ist. Da die Spur nilpotenter Endomorphismen Null ist und da das Jacobsonradikal einer endlichdimensionalen Ringalgebra nach 3.6.5 aus nilpotenten Elementen besteht, muß im Fall einer endlichdimensionalen Ringalgebra A das Jacobsonradikal $\mathrm{J}(A)$ stets im Radikal der Spurform enthalten sein, in Formeln $\mathrm{J}(A) \subset J$. Insbesondere ist jede endlichdimensionale Ringalgebra mit nichtausgearteter Spurform nach 3.6.6 halbeinfach. In Charakteristik Null gilt nach 3.6.12 sogar die Umkehrung.

Vorschau 3.6.8. Im Fall endlichdimensionaler Liealgebren spezialisiert unsere Spurform zur sogenannten Killingform [HL] 1.6.7.

Vorschau 3.6.9. Etwas allgemeiner gelingt die Definition von Spurform und Spur auch noch für Ringalgebren über allgemeineren Kringen k, die endlich erzeugt und projektiv sind als k-Moduln. Wir diskutieren das in [**?**] **??**.

Ergänzung 3.6.10. Auf jeder endlichdimensionalen Algebra A über einem Körper k könnten wir zusätzlich zur Linearform $\mathrm{Tr} : a \mapsto \mathrm{tr}((a\cdot) : A \to A)$ a priori auch noch die Linearform $a \mapsto \mathrm{tr}((\cdot a) : A \to A)$ betrachten und so eine Variante der Spurform erhalten. Ich kenne jedoch keinen Fall, in dem man mit dieser Variante einen Zusatznutzen erzielen könnte.

Beispiel 3.6.11. Sei k ein Körper. Auf der k-Algebra $A = \mathrm{Mat}(n; k)$ wird die Spur nach [LA1] 2.6.18 beschrieben durch die Formel $\mathrm{Tr}(M) = n\,\mathrm{tr}(M)$ für die übliche Spur $\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}(n; k) \to k$ aus der linearen Algebra.

Proposition 3.6.12 (Spurkriterium für Halbeinfachkeit). *Eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper der Charakteristik Null ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Spurform nichtausgeartet ist.*

3.6.13. Insbesondere ist eine halbeinfache endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper der Charakteristik Null halbeinfach genau dann, wenn sie unter einer und jeder Körpererweiterung des Grundkörpers halbeinfach wird. In Formeln ist also A halbeinfach genau dann, wenn $K \otimes_k A$ halbeinfach ist für K/k eine beliebige Körpererweiterung und $\operatorname{char} k = 0$. Ebenso folgt, daß gegeben zwei halbeinfache endlichdimensionale Ringalgebren A, B über einem Körper k der Charakteristik Null auch die Ringalgebra $A \otimes_k B$ halbeinfach ist, denn Orthogonalbasen der jeweiligen Algebren bezüglich der Spurform liefern unmittelbar eine Orthogonalbasis ihres Tensorprodukts. Ein Gegenbeispiel in positiver Charakteristik gibt [AL] 6.1.1, wo wir eine endliche Körpererweiterung L/K angeben derart, daß der Ring $L \otimes_K L$ von Null verschiedene nilpotente Elemente hat.

Beweis. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß jede halbeinfache Ringalgebra endlicher Dimension über einem Körper der Charakteristik Null eine nichtausgeartete Spurform hat. Nach [AL] 2.9.26 ist aber ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper der Charakteristik Null nilpotent genau dann, wenn die Spuren aller seiner echten Potenzen verschwinden. Man zeigt damit leicht, daß unser Radikal J der Spurform im Fall der Charakteristik Null das größte Linksideal ist, das aus nilpotenten Elementen besteht, also nach 3.6.5 das Jacobsonradikal. Ist das aber Null, so ist unsere Ringalgebra halbeinfach nach 3.6.6. □

3.6.14 (**Einfache Moduln und Erweiterung des Grundkörpers**). Seien k ein Körper und A eine Ringalgebra über k und L ein einfacher A-Modul. Gegeben eine Körpererweiterung K/k muß $L_K := L \otimes_k K$ kein einfacher, ja noch nicht einmal ein halbeinfacher Modul über $A_K := A \otimes_k K$ sein, wie das Beispiel [AL] 6.1.1 zeigt. Ist jedoch L endlichdimensional über k, so ist das Bild $B \subset \operatorname{End}_k L$ von A halbeinfach nach 3.5.9 und sind wir zusätzlich in Charakteristik Null, so ist auch B_K halbeinfach nach 3.6.13 und damit ist L_K halbeinfach als B_K-Modul und a forteriori als A_K-Modul.

3.6.15 (**Einfache Moduln und Galoiserweiterungen**). Seien A eine Ringalgebra über einem Körper k und K/k eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ. Sei weiter L ein einfacher A-Modul derart, daß L_K ein halbeinfacher A_K-Modul ist. So ist operiert Γ durch k-lineare Ringautomorphismen auf A_K und für $\gamma \in \Gamma$ ist $\operatorname{id} \otimes \gamma^{-1} : L_K \xrightarrow{\sim} L_K$ ein Isomorphismus

$$\operatorname{res}^{\gamma} L_K \xrightarrow{\sim} L_K$$

zwischen dem mit $\mathrm{id}\otimes\gamma : A_K \to A_K$ restringierten A_K-Modul L_K und L_K selbst. Ist der einfache A_K-Modul E ein direkter Summand von L_K, so ist folglich auch $\mathrm{res}^\gamma E$ ein direkter Summand von L_K und kommt mit derselben Vielfachkeit vor wie E. Darüberhinaus müssen alle einfachen Summanden des A_K-Moduls L_K gewisse $\mathrm{res}^\gamma E$ für unser festes E sein, da die Summe aller zugehörigen isotypischen Komponenten von L_K ein Γ-stabiler A_K-Untermodul ist, der nach [AL] 6.4.7 durch Erweiterung der Skalare aus einem A-Untermodul von L hervorgehen muß. Als A_K-Modul besitzt L_K mithin eine Zerlegung der Gestalt

$$L_K \cong E_1^{\oplus n} \oplus E_2^{\oplus n} \oplus \ldots \oplus E_r^{\oplus n}$$

mit $n, r \geq 1$ und einfachen A_K-Moduln E_i derart, daß es für beliebige i, j mindestens ein Element γ der Galoisgruppe gibt mit $E_i \cong \mathrm{res}^\gamma E_j$. Nehmen wir nun zusätzlich $\dim_k L < \infty$ an, so ist L auch endlichdimensional über seinem Endomorphismenschiefkörper $D := \mathrm{End}_A L$ und für $m := \dim_D L$ und $d := \dim_k D$ finden wir $dm = \dim_k L$ sowie $\mathrm{End}_D L \cong \mathrm{Mat}(m; D)^{\mathrm{opp}}$. Für $D_i := \mathrm{End}_{A_K} E_i$ der Endomorphismenschiefkörper von E_i finden wir durch Erweiterung der Skalare weiter

$$\begin{aligned} D_K \cong \mathrm{End}_{A_K} L_K &\cong \mathrm{End}_{A_K} E_1^{\oplus n} \times \ldots \times \mathrm{End}_{A_K} E_r^{\oplus n} \\ &\cong \mathrm{Mat}(n; D_1) \times \ldots \times \mathrm{Mat}(n; D_r) \end{aligned}$$

Sicher haben alle D_i dieselbe K-Dimension $d_1 := \dim_K D_1$ und damit gilt dann $d = \dim_K D_K = rn^2 d_1$ sowie $m = (\dim_k L)/rn^2 d_1$.

3.6.16 (**Jacobsonradikal und Erweiterung der Skalare**). Ist k ein Körper der Charakteristik Null und A eine endlichdimensionale k-Ringalgebra, so vertauscht das Bilden des Jacobson-Radikals mit beliebigen Körpererweiterungen, das Produkt induziert also genauer einen Isomorphismus

$$\mathrm{J}(A) \otimes_k K \xrightarrow{\sim} \mathrm{J}(A \otimes_k K)$$

In der Tat ist $\mathrm{J}(A)$ ein nilpotentes zweiseitiges Ideal und folglich ist auch $\mathrm{J}(A) \otimes_k K$ ein nilpotentes zweiseitiges Ideal in $A \otimes_k K$ und folglich enthalten im Jacobson-Radikal $\mathrm{J}(A \otimes_k K)$. Andererseits ist $A/\mathrm{J}(A)$ halbeinfach und nach 3.6.13 ist damit auch $(A/\mathrm{J}(A)) \otimes_k K$ halbeinfach und die Behauptung folgt.

3.6.17. Seien k ein Körper der Charakteristik Null und A eine endlichdimensionale k-Ringalgebra derart, daß $A/\mathrm{J}(A) = D_1 \times \ldots \times D_r$ ein Produkt von Schiefkörpern ist. Die einfachen A-Moduln sind also gewisse $L_1, \ldots, L_r$ und deren Endomorphismenschiefkörper sind die D_i und sind $P_i \twoheadrightarrow L_i$ projektive Decken der L_i, so gibt es einen nicht eindeutigen Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} P_1 \oplus \ldots \oplus P_r$ von A-Moduln, der hinwiederum einen Isomorphismus

$$A^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_A(P_1 \oplus \ldots \oplus P_r)$$

induziert. Unter Erweiterung der Skalare, angegeutet durch einen Querstrich, wird er ein Isomorphismus

$$\bar{A}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\bar{A}}(\bar{P}_1 \oplus \ldots \oplus \bar{P}_r)$$

und $\bar{P} \twoheadrightarrow \bar{L}$ ist auch eine projektive Decke. Im Fall einer Galoiserweiterung wissen wir aus 3.6.15, daß $\bar{L}$ über $\bar{A}$ eine Zerlegung der Gestalt

$$\bar{L} \xrightarrow{\sim} E_1^{\oplus n} \oplus E_2^{\oplus n} \oplus \ldots \oplus E_d^{\oplus n}$$

hat mit $n, d \geq 1$ und einfachen $\bar{A}$-Moduln E_i derart, daß es für beliebige i, j mindestens ein Element γ der Galoisgruppe gibt mit $E_i \cong \mathrm{res}^\gamma E_j$. Wir finden eine endliche Galoiserweiterung derart, daß alle E_i den Körper K als Endomorphismenring haben. Dann finden wir auch einen Lift zu einem Isomorphismus von $\bar{A}$-Moduln

$$\bar{P} \xrightarrow{\sim} Q_1^{\oplus n} \oplus Q_2^{\oplus n} \oplus \ldots \oplus Q_d^{\oplus n}$$

mit $Q_i \twoheadrightarrow E_i$ jeweils einer projektiven Decke, und auch der ist unkanonisch.

Übungen

Übung 3.6.18. Gegeben $A \supset I$ eine endlichdimensionale Algebra mit einem Ideal stimmt die Spurform von I, aufgefaßt als eigenständige Algebra, überein mit der Einschränkung der Spurform von A auf I.

Übung 3.6.19. Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten k-Vektorraums alias **Supervektorraums** $V = V_0 \oplus V_1$ erklärt man die **Superspur** $\mathrm{str} : \mathrm{End}(V) \to k$ in hoffentlich selbsterklärender Notation durch die Formel

$$\mathrm{str}(A) := \mathrm{tr}(A_0^0) - \mathrm{tr}(A_1^1)$$

Man zeige, daß auch eine endlichdimensionale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte k-Ringalgebra A mit nichtausgearteter Superspurform $(a, b) \mapsto \mathrm{str}(ab : A \to A)$ halbeinfach ist als Ring. Hinweis: Man kopiere das Argument aus 3.6.7. Im übrigen ist die Superspurform nicht symmetrisch, sondern „supersymmetrisch“. Für ein systematisches Verständnis dieser Vorzeichen mag man mit der „Multikategorie der Supervektorräume“ [TS] **??** arbeiten.

3.7 Erzeugende und Relationen für Ringalgebren**

3.7.1. Gegeben ein Kring k und eine Menge I definiert man die **freie k-Ringalgebra** $\mathrm{Ralg}_k^{\nwarrow} I$ über I als den Monoidring über k nach 1.2.5 des freien Monoids über I nach [TF] 2.5.2, in Formeln

$$\mathrm{Ralg}_k^{\nwarrow} I := k\langle \mathrm{Mon}^{\nwarrow} I \rangle$$

Salopp gesprochen kann man diese freie Ringalgebra verstehen als einen „Polynomring in den nicht-kommutierenden Variablen $(X_i)_{i\in I}$“. Wir notieren sie auch

$$k\lfloor' X_1, X_2, \ldots, X_n\rfloor = k\lfloor X_1, X_2, \ldots, X_n\rfloor$$

im Fall endlich vieler Variablen oder $k\lfloor' X_i | i \in I\rfloor = k\lfloor'_{!} I\rfloor$ im allgemeinen. Die unfertigen Klammern sollen andeuten, daß nichtkommutierende Variablen gemeint sind. Das „Freiheitsstrichlein“ bedeutet wie in [KAG] **??** vereinbart die Freiheit der Erzeuger. Die kanonische Einbettung $\mathrm{can} : I \to \operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I$ hat dann die universelle Eigenschaft, daß für jede weitere k-Ringalgebra B das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\operatorname{Ralg}_k(\operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I, B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(I, B)$$

zwischen Homomorphismen von k-Ringalgebren und Abbildungen von Mengen induziert. Jede Abbildung von der Menge I in eine k-Ringalgebra B faktorisiert also eindeutig über einen Homomorphismus von k-Ringalgebren $\operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I \to B$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I \arrow[d, dashed, "\tilde\varphi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

3.7.2. Gegeben ein Kring k, eine Menge I und eine Teilmenge $R \subset \operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I$ der freien k-Ringalgebra über I bezeichnen wir den Quotienten

$$(\operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I)/\langle R\rangle$$

nach dem von R erzeugten Ideal auch als die **von der Menge I mit den Relationen R erzeugte k-Ringalgebra**. In der Literatur spricht man meist etwas unscharf von der „von der Menge I mit den Relationen R erzeugten k-Algebra“. Oft schreibt man Relationen auch in der Form $a = b$ mit Elementen $a, b \in \operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I$. Damit ist gemeint, daß die Differenz $a - b$ unserer beiden Elemente zu R gehören soll.

Beispiel 3.7.3. Ist k ein Körper und $B \subset V$ eine Basis eines k-Vektorraums V, so kann die äußere Algebra $\bigwedge V$ von V aus [LA2] 7.9.6 beschrieben werden als die von der Menge B mit den Relationen $b^2 = 0$ erzeugte k-Ringalgebra. Genauer induziert die Abbildung $B \to \bigwedge V$, $b \mapsto b \in \bigwedge^1 V$ einen Isomomorphismus von k-Ringalgebren

$$(\operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} B)/\langle b^2 \mid b \in B\rangle \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$$

Beispiel 3.7.4. Der Polynomring über einem Kring k in Variablen $X_1, \ldots, X_n$ ist die von den Variablen X_i mit den Relationen $X_i X_j = X_j X_i$ erzeugte k-Ringalgebra.

Übungen

Übung 3.7.5. Gegeben eine Menge I und ein Körper k ist unser Monoidring $k\langle \mathrm{Mon}^{\backslash} I\rangle$ zum freien Monoid $\mathrm{Mon}^{\backslash} I$ über I aus [TF] 2.5.2 isomorph zur Tensoralgebra $\mathrm{T}(k\langle I\rangle)$ über dem freien Vektorraum über I im Sinne von [LA2] 7.9.7. Genauer haben die offensichtlichen Abbildungen $I \to k\langle \mathrm{Mon}^{\backslash} I\rangle$ und $I \to \mathrm{T}(k\langle I\rangle)$ beide dieselbe universelle Eigenschaft: Für jede k-Ringalgebra A induziert ihr Vorschalten Bijektionen

$$\mathrm{Ralg}_k(k\langle \mathrm{Mon}^{\backslash} I\rangle, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, A) \quad \text{und} \quad \mathrm{Ralg}_k(\mathrm{T}(k\langle I\rangle), A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, A)$$

Übung 3.7.6 (**Freier Ring über einer Menge unter einem gegebenen Ring**). Gegeben ein Ring R mag man die Kategorie Ring^R der „Ringe unter R“ betrachten. Objekte sind Ringe A mit einem ausgezeichneten Ringhomomorphismus $R \to A$. Auch für diese Kategorie hat das Bilden der zugrundeliegenden Menge $\mathrm{Ring}^R \to \mathrm{Ens}$ einen Linksadjungierten. Ein mögliche Konstruktion dieses Linksadjungierten besteht darin, für jedes Wort in I der Länge l die $(l+1)$-te Tensorpotenz von R über $\mathbb{Z}$ zu betrachten und die direkte Summe aller dieser Tensorpotenzen zu bilden, in Formeln die abelsche Gruppe

$$R|I\rfloor := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)\in I^n} R^{\otimes(n+1)}$$

Als Produkt zweier Tensoren erklärt man das Zusammentensorieren über R in der Tensorpotenz zum verknüpften Wort. Mit dem Ringhomomorphismus $R \to R|I\rfloor$ gegeben durch Interpretation eines Ringelements als Tensor zu $n = 0$ und der Abbildung $I \to R|I\rfloor$ gegeben durch $i \mapsto (1\otimes 1)$ im Summanden zum Index $i \in I$ hat dann $R|I\rfloor$ die gewünschte universelle Eigenschaft. Ein Tensor $r_1 \otimes r_2 \otimes \ldots \otimes r_{n+1}$ zum Index $(i_1, \ldots, i_n)$ ist dann in $R|I\rfloor$ das Produkt $r_1 i_1 r_2 \ldots i_n r_{n+1}$, wobei wir genau genommen unter den Faktoren die Bilder der r_ν und i_ν in $R|I\rfloor$ verstehen. Die Notation $R|I\rfloor$ soll andeuten, daß im Gegensatz zu $R\lfloor I\rfloor$ die Variablen noch nicht einmal mit den Ringelementen kommutieren müssen.

3.8 Tensorkalkül für Darstellungen*

3.8.1. Für manche Allgemeinheiten erweist es sich als sinnvoll, die noch allgemeinere Situation eines Moduls V über einem Ring k mitsamt einer Abbildung $\rho : \Omega \to \mathrm{End}_k(V)$ einer beliebigen Menge Ω in seinen Endomorphismenring zu betrachten. Solch ein Paar (V, ρ) heißt eine **Darstellung der Menge Ω über dem Ring k**. Man überlegt sich leicht, daß das dasselbe ist wie eine Darstellung über k des freien Monoids $\mathrm{Mon}^{\backslash}\,\Omega$ über der Menge Ω.

3.8.2. Die Darstellungstheorie von Gruppen, Monoiden oder Mengen ist zum Teil das Studium der Moduln über speziellen Ringen, eben den entsprechenden Gruppenringen, Monoidringen oder Monoidringen des freien Monoids über einer gegebenen Menge. Die Begriffe einfach, halbeinfach, isotypische Komponente, isotypische Zerlegung, Länge und viele mehr bleiben so auch für Darstellungen von Gruppen, Monoiden und sogar Mengen sinnvoll. Zusätzlich können wir für Darstellungen von Monoiden über kommutativen Ringen jedoch multilineare Abbildungen erklären und erhalten so die viel reichhaltigere Struktur einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen, ja im Fall einer Gruppe sogar mit Multihom. Das soll im folgenden ausgeführt werden.

3.8.3. Gegeben $r \geq 0$ und Darstellungen $W_1, \ldots, W_r, V$ eines Monoids oder gar einer Menge G über einem Kring k verstehen wir unter einer **Verschmelzung von Darstellungen** eine multilineare Abbildung $\varphi : W_1 \times \ldots \times W_r \to V$, die G-äquivariant ist in dem Sinne, daß gilt $\varphi(gw_1, \ldots, gw_r) = g\varphi(w_1, \ldots, w_r)$ für alle $w_i \in W_i$ und $g \in G$. Wir verwenden für die Gesamtheit aller derartigen Abbildungen wie in [LA2] 6.2.2 die beiden Notationen

$$\mathrm{Mod}_{k,G}(W_1 \curlyvee \ldots \curlyvee W_r, V) = \mathrm{Hom}^{(r)}_{k,G}(W_1 \times \ldots \times W_r, V)$$

Insbesondere liefert im Fall $r = 0$ das Auswerten auf dem einzigen Punkt $*$ des leeren Produkts eine Bijektion $\mathrm{Mod}_{k,G}(\curlyvee, V) = \mathrm{Hom}_{k,G}(*, V) \xrightarrow{\sim} V^G$ alias eine Bijektion zwischen den Mengen der G-äquivarianten 0-linearen Abbildungen in eine Darstellung und der Menge der G-invarianten Vektoren unserer Darstellung. Unsere Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen [LA2] 6.2.3 induziert eine Multiverknüpfung von Verschmelzungen von Darstellungen. Unsere universellen Verschmelzungen

$$\tau : W_1 \times \ldots \times W_r \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_r$$

aus [LA2] 6.1.1 im Fall eines Körpers k und aus [TS] **??** im Allgemeinen werden G-äquivariant mit derjenigen G-Operation auf dem Tensorprodukt, die für $g \in G$ gegeben wird durch $g(w_1 \otimes \ldots \otimes w_r) := gw_1 \otimes \ldots \otimes gw_r$ im Fall $r \geq 1$ und durch die triviale Operation auf dem leeren Tensorprodukt k im Fall $r = 0$. Es ist dann klar, daß diese Verschmelzungen von Darstellungen τ in das Tensorprodukt in der Weise universell sind, daß das Vorschalten von τ für jede weitere Darstellung V eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_{k,G}(W_1 \otimes \ldots \otimes W_r, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,G}(W_1 \curlyvee \ldots \curlyvee W_r, V)$$

liefert. Im Fall $r = 0$ spezialisiert das unter unseren ganzen Identifikationen zu der durch das Auswerten bei $1 \in k$ gegebenen Bijektion $\mathrm{Mod}_{k,G}(k, V) \xrightarrow{\sim} V^G$. In anderen Worten ist unsere Einsdarstellung k versehen mit der durch $* \mapsto 1$ erklärten Leerverschmelzung das Einsobjekt unserer Schmelzkategorie.

3.8.4 (**Internes Hom von Gruppendarstellungen**). Seien k ein Kring und G eine Gruppe und U, V, W Darstellungen von G über k. Erklären wir eine Operation von G auf $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ durch die Vorschrift $gf := \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$ für $g \in G$ und $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, so induziert die offensichtliche Bijektion $\mathrm{Mod}_k(U \curlyvee V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_k(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_{k,G}(U \curlyvee V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,G}(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$$

Die definitorische Gleichheit $\mathrm{Mod}_{k,G}(V, W) = \mathrm{Hom}_k(V, W)^G$ von Homomorphismen von Darstellungen und G-Invarianten in der Darstellung auf dem Raum aller linearen Abbildungen kann man dann auch als die Verknüpfung von kanonischen Isomorphismen

$$\mathrm{Mod}_{k,G}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,G}(k, \mathrm{Hom}_k(V, W)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, W)^G$$

verstehen, von denen der Erste von [LA2] 6.2.4 herkommt und der Letzte von 3.8.3.

Vorschau 3.8.5 (**Darstellungen als Schmelzkategorie**). In der in [TS] **??** eingeführten Terminologie kann man die vorhergehenden Bemerkungen dahingehend zusammenfassen, daß die Darstellungen eines Monoids, ja einer Menge G über einem Kring k eine Schmelzkategorie $\mathrm{Mod}_{k,G}$ mit stabil universellen Verschmelzungen bilden. Ist unser Monoid G eine Gruppe, so hat unsere Schmelzkategorie zusätzlich internes Hom im Sinne von [TS] **??**. Die definitorische Gleichheit $\mathrm{Mod}_{k,G}(V, W) = \mathrm{Hom}_k(V, W)^G$ wird dann ein Spezialfall der natürlichen Bijektion $\mathcal{M}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\curlywedge, V \Rrightarrow W)$ aus [TS] **??** zwischen Einsverschmelzungen und Leerverschmelzungen in das interne Hom-Objekt.

3.9 Vertwistete Monoidringe*

3.9.1. Seien A ein Ring und G ein Monoid, das durch Ringhomomorphismen auf A operiert. Formal nehmen wir also an, daß wir einen Monoidhomomorphismus $\sigma : G \to \mathrm{Ring}(A)$ ausgezeichnet haben. Unter diesen Annahmen erklären wir die Kategorie

$$\mathrm{Mod}_{A,\sigma,G} = A\text{-}\mathrm{Mod}^G = A\text{-}\mathrm{Mod}^{(G,\sigma)}$$

der **G-äquivarianten A-Moduln** als die Kategorie aller Paare (M, τ), die bestehen aus einem A-Modul M und einer G-Operation $\tau : G \to \mathrm{Ab}(M)$ auf der abelschen Gruppe M mit der Eigenschaft, daß die Multiplikation mit Skalaren eine G-äquivariante Abbildung

$$A \times M \to M$$

ist. In Formeln fordern wir also ${}^x(am) = {}^x a\, {}^x m$ für alle $x \in G$, $a \in A$ und $m \in M$ und verwenden dabei die Notationen ${}^x a := (\sigma(x))(a)$ und ${}^x m := (\tau(x))(m)$.

Ergänzung 3.9.2 (**Äquivariante Moduln als Schmelzkategorie**). Gegeben ein Kring A mit der Operation eines Monoids G erhalten wir auf diese Weise sogar eine Schmelzkategorie im Sinne von [TSK] 1.3.2 mit multilinearen G-äquivarianten Abildungen als Verschmelzungen. Der mit dieser Begrifflichkeit vertraute Leser wird unschwer zeigen können, daß diese Schmelzkategorie stabil universelle Verschmelzungen hat und, wenn G eine Gruppe ist, sogar internes Hom.

Beispiel 3.9.3. Ist K ein Körper und $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(K)$ eine endliche Untergruppe seiner Automorphismengruppe und $k := K^\Gamma$ deren Fixkörper, so liefert das Bilden der Γ-Invarianten eine Äquivalenz von Schmelzkategorien

$$K\text{-}\mathrm{Mod}^\Gamma \overset{\approx}{\to} k\text{-}\mathrm{Mod}$$

Das ist im wesentlichen die Aussage von Hilbert's Satz 90 aus [AL] 6.4.4 und gilt immer noch nach [AL] 6.4.4 sogar stärker für beliebige Galoiserweiterungen K/k mit Galoisgruppe Γ, wenn wir die Galoisgruppe mit ihrer Krulltopologie versehen und nur solche äquivarianten Moduln M betrachten, für die die Operation $\Gamma \times M \to M$ stetig ist in Bezug auf die Krulltopologie auf Γ und die diskrete Topologie auf M.

3.9.4. Operiert ein Monoid G auf einem Ring A, geben wir also einen Monoidhomomorphismus $\sigma : G \to \mathrm{Ring}(A)$ vor, so bilden wir den **vertwisteten Monoidring**

$$A^{\rtimes}\langle G\rangle = A^{\sigma}\langle G\rangle = A^{\sigma}\langle^{\prime}_{!} G\rangle$$

Als additive Gruppe nehmen wir dem üblichen Monoidring. Er besteht mithin aus allen Abbildungen $G \to A$ mit endlichem Träger oder besser kompakt getragenen Maßen, die wir schreiben als formale Linearkombinationen $\sum_y a_y y$ mit $a_y \neq 0$ für höchstens endlich viele $y \in G$. Um die Multiplikation zu erklären, vereinbaren wir für die Operation unseres Monoids die Notation ${}^{x}a := (\sigma(x))(a)$ und erklären die Multiplikation durch die Vorschrift $(ax)(by) := (a\,{}^{x}b)(xy)$ für $a, b \in A$ und $x, y \in G$. Es ist leicht zu sehen, daß wir einen Isomorphismus von Kategorien

$$A^{\rtimes}\langle G\rangle\text{-}\mathrm{Mod} \overset{\sim}{\to} A\text{-}\mathrm{Mod}^{(G,\sigma)}$$

zwischen der Kategorie der Moduln über dem vertwisteten Monoidring und der Kategorie der G-äquivarianten A-Moduln erhalten, indem wir die Operation von $A^{\rtimes}\langle G\rangle$ einschränken zu Operationen von A und von G.

Beispiel 3.9.5. In [AL] 6.1.3 erklären wir für jede endliche Galoiserweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ einen Isomorphismus von k-Ringalgebren

$$K^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle \overset{\sim}{\to} \mathrm{End}_k K$$

In [KAG] 2.3.17 diskutieren wir eine Äquivalenz $k\text{-}\mathrm{Mod} \overset{\approx}{\to} \mathrm{Mat}(n; k)\text{-}\mathrm{Mod}$ von Kategorien, die in unserer Situation und in koordinatenfreier Schreibweise zu einer Äquivalenz $k\text{-Mod} \stackrel{\approx}{\to} (\mathrm{End}_k K)\text{-Mod}$ mit $M \mapsto K \otimes_k M$ spezialisiert. Unsere Äquivalenzen aus 3.9.3 und 3.9.4 fügen sich in diesem Fall zusammen zu einem bis auf eine natürliche Isotransformation kommutativen Viereck

$$\begin{tikzcd}
K\text{-Mod}^{\Gamma} \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\wr"] & k\text{-Mod} \arrow[d, "\wr\wr"] \arrow[ld, Rightarrow, "\sim"'] \\
K^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle\text{-Mod} \arrow[r, "\sim"] & (\mathrm{End}_k K)\text{-Mod}
\end{tikzcd}$$

aus Isomorphismen und Äquivalenzen von Kategorien. Die fragliche Isotransformation bilden dabei die durch Multiplikation gegebenen Isomorphismen $K \otimes_k M^{\Gamma} \stackrel{\sim}{\to} M$.

3.9.6 (**Diskussion der Terminologie**). Viele Autoren bezeichnen unseren vertwisteten Gruppenring als **Smashprodukt** und notieren ihn $A\#\mathbb{Z}[G]$.

Übungen

3.9.7. Man schreibe Beweise zu den in diesem Abschnitt aufgestellten Behauptungen aus.

4 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

4.1 Halbeinfachkeit von Gruppenringen

Satz 4.1.1 (von Maschke). *Ist G eine endliche Gruppe und k ein Körper mit $|G|k \neq 0$, so ist jede Darstellung von G über k eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen.*

4.1.2. Insbesondere ist unter den Annahmen des Satzes von Maschke der Gruppenring halbeinfach. Die Bedingung $|G|k \neq 0$ bedeutet ausformuliert, daß die Charakteristik von k nicht die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Wir sprechen dann auch vom Fall **nichtteilender Charakteristik**.

4.1.3. Im Fall der einelementigen Gruppe stimmt das schon mal: Jeder Vektorraum ist eine direkte Summe von eindimensionalen Teilräumen. Eine Darstellung, die eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist, nennt man **halbeinfach** oder **vollständig reduzibel**. Gleichbedeutend ist, daß sie einem halbeinfachen Modul über dem Gruppenring entspricht. Unser Satz gilt mit demselben Beweis auch für einen Schiefkörper k. Beispiel 1.1.18 zeigt, daß er im allgemeinen nicht mehr gilt, wenn die Charakteristik die Gruppenordnung teilt.

Beweis für endlichdimensionale Darstellungen über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. In diesen Fällen benutzen wir:

Lemma 4.1.4. *Gegeben eine Darstellung V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ der endlichen Gruppe G gibt es auf V ein G-invariantes Skalarprodukt.*

Beweis. Ist $b : V \times V \to \mathbb{C}$ irgendein Skalarprodukt, so liefert die Formel

$$(v, w) = \sum_{g \in G} b(gv, gw)$$

ein **G-invariantes Skalarprodukt**, als da heißt, ein Skalarprodukt mit der Eigenschaft $(gv, gw) = (v, w)\ \forall g \in G$. □

Ist nun $W \subset V$ eine endlichdimensionale Unterdarstellung, so ist auch ihr orthogonales Komplement $W^{\perp} \subset V$ unter einem invarianten Skalarprodukt eine Unterdarstellung und wir haben $V = W \oplus W^{\perp}$ nach [LA2] 1.3.18. Induktiv zeigt man so, daß jede endlichdimensionale Darstellung V in eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen zerfällt. □

Beweis im allgemeinen. Wir müssen nur zeigen, daß es für jede Unterdarstellung $W \subset V$ einer endlichdimensionalen Darstellung V von G ein Komplement gibt, als da heißt eine Unterdarstellung $D \subset V$ mit $V = W \oplus D$. Dann sind wir fertig mit vollständiger Induktion über die Dimension im endlichdimensionalen

Fall und mit der entsprechenden Charakterisierung 2.3.4 halbeinfacher Moduln im allgemeinen. Ist nun $i : W \hookrightarrow V$ eine Unterdarstellung, so finden wir nach [LA1] 2.10.2 eine k-lineare Abbildung $\pi : V \to W$ mit $\pi \circ i = \mathrm{id}_W$. Die lineare Abbildung

$$\psi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1}$$

in $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist dann sogar ein Homomorphismus von Darstellungen $\psi : V \to W$ mit $\psi \circ i = \mathrm{id}_W$. Ihr Kern $\ker \psi$ ist folglich eine Unterdarstellung von V mit $V = W \oplus \ker \psi$. □

4.1.5. Ich will den vorhergehenden Beweis nocheinmal von einem anderen Standpunkt aus diskutieren und dazu neue Konzepte einführen, die uns auch an anderer Stelle noch nützlich sein werden.

Definition 4.1.6. Sind V, W Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper k, so machen wir den Raum $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ aller k-linearen Abbildungen von V nach W selbst zu einer Darstellung vermittels der Vorschrift $(gf)(v) = g(f(g^{-1}v))$ oder, anders geschrieben,

$$gf = g \circ f \circ g^{-1}$$

Wir nennen diese Operation der Gruppe auf dem Hom-Raum die **Operation durch Konjugation**.

4.1.7. Man sieht sofort, daß die Invarianten im Raum aller linearen Abbildungen von einer Darstellung V in eine Darstellung W unter der Operation durch Konjugation genau die Homomorphismen von Darstellungen sind, in Formeln

$$\mathrm{Hom}_k(V, W)^G = \mathrm{Hom}_{kG}(V, W)$$

Im vorhergehenden Beweis haben wir schlicht über die Bahn von π im Hom-Raum gemittelt und so einen G-invarianten Homomorphismus von Vektorräumen alias einen Homomorphismus von Darstellungen erhalten. Analoga dieser Konstruktionen gibt es in jeder Schmelzkategorie, vergleiche 3.8.4.

Ergänzung 4.1.8. Ist noch allgemeiner V eine Darstellung einer Gruppe G und W eine Darstellung einer Gruppe H, so erhalten wir eine natürliche Operation von $G \times H$ auf $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ durch die Vorschrift

$$(g, h)f = \rho_W(h) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) = h \circ f \circ g^{-1}$$

Unsere Definition ergibt sich im Fall $H = G$ durch Einschränken der $(G \times G)$-Operation auf dem Hom-Raum vermittels der diagonalen Einbettung $G \hookrightarrow G \times G$, $g \mapsto (g, g)$. Wir nennen sie präziser die Operation durch Konjugation auf dem Hom-Raum, um sie zu unterscheiden von der **Operation durch Nachschalten** $g : f \mapsto \rho_W(g) \circ f$ und der **Operation durch Vorschalten** $g : f \mapsto f \circ \rho_V(g^{-1})$.

4.1.9 (**Zerlegung in isotypische Anteile**). Seien G eine endliche Gruppe, k ein Körper nichtteilender Charakteristik, M eine Darstellung von G und $\mathrm{irr}_k(G)$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher kG-Moduln. So liefert die Einbettung der isotypischen Anteile nach 2.3.8 einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{E \in \mathrm{irr}_k(G)} M_E \xrightarrow{\sim} M$$

Ergänzung 4.1.10. Gegeben ein komplexer Vektorraum V operiert die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ auf $V^{\otimes n}$ durch die Permutation von Tensoren. Die Zerlegung in isotypische Komponenten

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{irr}\, \mathcal{S}_n} (V^{\otimes n})_\lambda$$

ist dann sogar eine Zerlegung in Unterdarstellungen von $\mathrm{GL}(V)$. Ist W ein weiterer komplexer Vektorraum, so liefert das Tensorieren beider Zerlegungen eine Zerlegung

$$(V \otimes W)^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda, \mu \in \mathrm{irr}\, \mathcal{S}_n} (V^{\otimes n})_\lambda \otimes (W^{\otimes n})_\mu$$

in eine Summe von unter $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ stabilen Teilräumen. Betrachten wir auf beiden Seiten nur die unter $\mathcal{S}_n$ alternierenden Tensoren, so erhalten wir mit dem ersten Isomorphismus nach [LA2] 6.5.12 eine Zerlegung der äußeren Potenzen

$$\bigwedge^n (V \otimes W) \xleftarrow{\sim} (V \otimes W)^{\otimes n}_{\mathrm{sgn}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{irr}\, \mathcal{S}_n} (V^{\otimes n})_\lambda \otimes (W^{\otimes n})_{\lambda \otimes \mathrm{sgn}}$$

Diese Zerlegung heißt auch die **Binet-Cauchy-Identität**. Sie kann mithilfe unserer Erkenntnisse 5.1.2 über einfache Darstellungen von symmetrischen Gruppen auch noch konkreter ausgeschrieben werden.

4.1.1 Übungen

Übung 4.1.11. Ist G eine endliche Gruppe und k ein Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung teilt, so besitzt die Unterdarstellung der konstanten Funktionen im Gruppenring kein G-invariantes Komplement. Hinweis: Der zu solch einer Zerlegung gehörige Projektor wäre nach [KAG] 1.3.6 die Rechtsmultiplikation mit einem Element a des Gruppenrings, das einerseits einer von Null verschiedenen konstanten Funktion entsprechen müßte und andererseits der Formel $a^2 = a$ zu genügen hätte. Für die konstante Funktion $a \in kG$ mit dem einzigen Funktionswert $c \in k$ gilt jedoch $a^2 = |G|ca$.

4.2 Gruppenringe endlicher Gruppen

4.2.1. Gegeben eine endliche Gruppe G nennen wir einen Körper k einen **Spaltungskörper für** G, wenn alle einfachen Darstellungen von G über k außer Skalaren keine weiteren Endomorphismen haben. Nach dem Dichtesatz ist dazu gleichbedeutend, daß der Gruppenring surjektiv auf den Ring der k-linearen Endomorphismen jeder einfachen Darstellung abbildet. Nach dem Schur'schen Lemma ist jeder algebraisch abgeschlossene Körper ein Spaltungskörper. Da Ringe von quadratischen Matrizen unter Körpererweiterung Ringe von quadratischen Matrizen bleiben, ist jede Erweiterung eines Spaltungskörpers auch selbst ein Spaltungskörper. Offensichtlich besitzt jeder Körper eine endliche Erweiterung zu einem Spaltungskörper, indem wir etwa alle Matrixeinträge von Repräsentanten der einfachen Darstellungen über dem algebraischen Abschluß adjungieren.

4.2.2. Ich erinnere daran, daß wir uns in 1.2.8 vorgenommen hatten, auch auf einer endlichen Gruppe G sorgfältig zwischen Funktionen und Maßen aus $kG = \operatorname{Maß}_!(G)$ zu unterscheiden. Ich notiere $\zeta \in \operatorname{Maß}_!(G)$ das Zählmaß, so daß die Verknüpfung

$$\operatorname{Fun}(G) \xrightarrow{\circ \operatorname{inv}} \operatorname{Fun}(G) \xrightarrow{\cdot \zeta} \operatorname{Maß}_!(G)$$

ein mit den natürlichen Operationen von $G \times G^{\operatorname{opp}}$ verträglicher Isomorphismus ist. Er ist die Umkehrabbildung des in 1.2.8 betrachtenen Homomorphismus inz, den wir sogar für nicht notwendig endliche Gruppen erklärt hatten.

Satz 4.2.3 (**Fouriertransformation für endliche Gruppen**). *Seien G eine endliche Gruppe, k ein Spaltungskörper und $L_1, \ldots, L_r$ die einfachen Darstellungen von G über k bis auf Isomorphismus.*

1. *Im Fall nichtteilender Charakteristik liefert die Operation einen Ringisomorphismus*

$$\rho : kG \quad \tilde{\to} \quad (\operatorname{End}_k L_1) \times \ldots \times (\operatorname{End}_k L_r)$$

2. *Unter der Umkehrabbildung wird $A \in \operatorname{End}_k L$ für $L = L_i$ abgebildet auf $(\dim L)(c_A \circ \operatorname{inv})\zeta/|G| \in kG$ mit $c_A : g \mapsto \operatorname{tr}\big(\rho_L(g)A|L\big)$;*

3. *Teilt die Charakteristik die Gruppenordnung, so ist ρ zumindest noch ein surjektiver Ringhomomorphismus.*

4.2.4. Der Gruppenring einer endlichen Gruppe über einem Spaltungskörper einer die Gruppenordnung nichtteilenden Charakteristik ist also in Worten isomorph vermittels der durch die Operation gegebenen Abbildung zum Produkt der Endomorphismenringe der einfachen Darstellungen. Insbesondere ist er isomorph zu einem Produkt von Matrixringen. Gegeben $B \in \mathrm{Mat}(d; k)$ und E_{ij} eine Basismatrix finden wir $\mathrm{tr}(BE_{ij}) = B_{ji}$. Aus diesem Grund heißt unsere Funktion c_A aus Teil 2 ein **Matrixkoeffizient der Darstellung** L.

Beweis. Der kG-Modul $L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$ hat nach dem Schur'schen Lemma 3.2.1 den Endomorphismenring $k \times \ldots \times k$. Die Surjektivität folgt damit aus dem Dichtesatz 3.3.1, angewandt auf den kG-Modul $L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$ mit seinem Endomorphismenring $k \times \ldots \times k$, formal unter Verwendung der offensichtlichen Übung [KAG] 1.3.17. Um die Injektivität zu zeigen bemerken wir, daß ja im Fall nichtteilender Charakteristik nach Maschke kG selbst eine Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. Liegt also ein Element $a \in kG$ im Kern unserer Abbildung, so ist die Linksmultiplikation mit a die Nullabbildung auf kG und es folgt $a = 0$. Im Fall nichtteilender Charakteristik folgt das auch unmittelbar aus der Halbeinfachheit des Gruppenrings nach Maschke und der Strukturtheorie halbeinfacher Ringe 3.5.4. Diese Argumentation hat den Vorteil, ohne den Dichtesatz auszukommen. Um die Umkehrabbildung zu bestimmen, beachten wir, daß alle Multiplikationen mit vom neutralen Element verschiedenen Gruppenelementen spurfreie Endomorphismen des Gruppenrings liefern, wohingegen die Multiplikation mit dem neutralen Element alias die Identität auf dem Gruppenring die Spur $|G|$ hat. Für $c = \sum c(x)\delta_x \in kG$ folgt die Identität

$$|G|c(g^{-1}) = \mathrm{tr}\left((\delta_g c\cdot)|kG\right)$$

Sie gilt speziell auch für das Element $c_A \in kG$ mit $\rho : c_A \mapsto A$ für $A \in \mathrm{End}(L)$ und ein festes $L = L_i$. Berechnen wir nun für dieses Element dieselbe Spur auch auf der anderen Seite unseres Fourierisomorphismus, so erhalten wir die Identität

$$|G|c_A(g^{-1}) = \mathrm{tr}((\rho_L(g)A\cdot)|\mathrm{End}_k L)$$

Gegeben eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}(d; k)$ haben wir aber offensichtlich

$$\mathrm{tr}\left((M\cdot)|\,\mathrm{Mat}(d; k)\right) = d\,\mathrm{tr}(M)$$

Es folgt $|G|c_A(g^{-1}) = (\dim L)\,\mathrm{tr}\left(\rho_L(g)A|L\right)$ und die Behauptung. □

Ergänzung 4.2.5 (**Isotypische Komponenten von links und rechts**). Im Fall nichtteilender Charakteristik zeigt der Satz, daß für jede einfache Darstellung L einer endlichen Gruppe G die L-isotypische Komponente des Gruppenrings kG in seiner Eigenschaft als Linksmodul zusammenfällt mit der L^*-isotypischen Komponente des Gruppenrings kG in seiner Eigenschaft als Rechtsmodul, für die hoffentlich offensichtliche Struktur als Rechtsmodul auf dem Dualraum L^*. Das zeigen wir in 4.5.9 allgemeiner für jede endlichdimensionale einfache Darstellung L einer beliebigen Gruppe G über einem beliebigen Körper k.

Ergänzung 4.2.6 (**Bezug zur Fouriertransformation der Analysis**). Ist G eine endliche und kommutative Gruppe, so ist jede einfache komplexe Darstellung von G eindimensional und die Isomorphieklassen komplexer einfacher Darstellungen von G entsprechen eineindeutig den Gruppenhomomorphismen $G \to \mathbb{C}^\times$. Unser Isomorphismus aus dem Satz entspricht dann der kanonischen Fouriertransformation

$$\mathrm{M}(G) \to \mathrm{Ens}(\hat{G}, \mathbb{C})$$

von komplexen Maßen auf G zu Funktionen auf $\hat{G}$, die wir in [AN3] 3.4.1 im allgemeineren Fall einer Fouriergruppe eingeführt hatten. Daß wir in unserem Satz einen Ringhomomorphismus erhalten, verallgemeinert sich in diesem Fall zu Proposition [AN3] 3.5.12 aus der Fouriertheorie, nach der unter der Fouriertransformation die Faltung zweier Maße in das punktweise Produkt ihrer Fouriertransformierten übergeht.

Beispiel 4.2.7 (**Fouriertransformation für zyklische Gruppen**). Ist $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zyklisch, so finden wir unsere diskrete Fouriertransformation bereits im chinesischen Restsatz wieder, wie im folgenden Diagramm ausgeführt wird, das wir im Anschluß diskutieren, vergleiche auch 1.2.14.

$$\begin{tikzcd}
k[X] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
k[X]/\langle X^n - 1\rangle \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & & kG \arrow[d, "\wr"] \\
\prod_{\{\zeta \mid \zeta^n = 1\}} k[X]/\langle X - \zeta\rangle \arrow[rr, "\sim"] & & \prod_{L \in \operatorname{irr}_k G} \operatorname{End}_k L \\
& \underbrace{k \times \ldots \times k}_{n \text{ Faktoren}} \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft des Polynomrings liefert sicher einen Homomorphismus von k-Kringen $k[X] \to kG$ mit $X \mapsto \mathrm{e}^{\bar{1}}$ in der Notation 1.2.3. Sicher liegt $X^n - 1$ im Kern und die universelle Eigenschaft des Restklassenrings induziert so die obere Horizontale unseres Diagramms. Die Basis $X^0, X^1, \ldots, X^{n-1}$ des Restklassenrings geht dabei in die Standardbasis des Gruppenrings über, so daß unsere obere Horizontale ein Isomorphismus sein muß. Ist $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und $\operatorname{char} k$ kein Teiler von n, so hat $X^n - 1$ nach [AL] 3.9.7 genau n paarweise verschiedene Nullstellen $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ in k und die Faktorisierung $X^n - 1 = (X - \zeta_1) \ldots (X - \zeta_n)$ zusammen mit dem chinesischen Restsatz [AL] 2.3.4 liefert den Isomorphismus in der linken Vertikale. Die rechte Vertikale ist dahingegen unsere Fouriertransformation 4.2.3. Da nun nach 3.2.4 jede einfache Darstellung unserer abelschen Gruppe G über k eindimensional ist, entsprechen diese einfachen Darstellungen eineindeutig den Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to k^\times$ alias nach [LA2] 4.2.18 den n-ten Einheitswurzeln $\zeta_1, \ldots \zeta_n$. Die Kommutativität unseres Diagramms folgt aus den Definitionen. In diesem Sinne reduziert sich unser Satz 4.2.3 über die diskrete Fouriertransformation also im Fall zyklischer Gruppen auf einen Spezialfall des chinesischen Restsatzes.

4.2.8. Der erste Teil in unserem Satz gilt analog für jede endlichdimensionale halbeinfache Ringalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Die Fouriertransformation im Fall endlicher zyklischer Gruppen läuft meist unter der Bezeichnung **diskrete Fouriertransformation**.

Korollar 4.2.9. *Gegeben G eine endliche Gruppe, k ein Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik und $L_1, \ldots, L_r$ die einfachen Darstellungen von G über k bis auf Isomorphismus gilt*

$$|G| = (\dim L_1)^2 + \ldots + (\dim L_r)^2$$

Lassen wir die Einschränkung an die Charakteristik fallen, so gilt zumindest noch die Abschätzung $\leq$.

Beweis. Offensichtlich mit dem Isomorphismus 4.2.3 der diskreten Fouriertransformation. □

Korollar 4.2.10. *Gegeben eine endliche Gruppe G und ein Spaltungskörper k nichtteilender Charakteristik gibt es bis auf Isomorphismus genausoviele einfache Darstellungen unserer Gruppe über besagtem Körper wie Konjugationsklassen in unserer Gruppe, in Formeln*

$$|\operatorname{irr}_k(G)| = |G/\operatorname{int}(G)|$$

Beweis. Das Zentrum eines Gruppenrings kG besteht offensichtlich genau aus den Funktionen $G \to k$, die mit allen Gruppenelementen kommutieren, und damit aus den Funktionen, die konstant sind auf Konjugationsklassen. Man nennt sie **Klassenfunktionen**. Das Zentrum der anderen Seite in Satz 4.2.3 ist aber nach den beiden anschließenden Übungen 4.2.23 und 4.2.24 offensichtlich isomorph als k-Vektorraum zu einem Produkt von r Kopien des Grundkörpers $k \times \ldots \times k$. □

Korollar 4.2.11 (Dimension einfacher Darstellungen und Charakteristik). *Ist k ein Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik für eine endliche Gruppe G, so teilt die Charakeristik auch keine der Dimensionen der einfachen Darstellungen von G über k.*

Beweis. Das folgt sofort aus unserer expliziten Beschreibung der inversen Abbildung zur diskreten Fouriertransformation. □

4.2.12. Seien G eine endliche Gruppe und k ein Spaltungskörper nichtteilender Charateristik. Sei L eine einfache Darstellung von G. Nach unserer Fouriertransformation 4.2.3 gibt es genau ein Element $\mathrm{e}_L \in kG$ derart, daß e_L durch die Identität auf L operiert und durch Null auf jeder einfachen Darstellung M von G, die nicht isomorph ist zu L, in Formeln

$$(\mathrm{e}_L \cdot : M \to M) = \begin{cases} \mathrm{id} : M \to M & \text{falls } M \cong L; \\ 0 : M \to M & \text{falls } M \text{ einfach, } M \not\cong L. \end{cases}$$

Dies Element e_L nennen wir den **Projektor** zu L. Die Summe all dieser Projektoren ist per definitionem die Eins des Gruppenrings.

Beispiel 4.2.13. Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat über jedem Körper k der Charakteristik ungleich Zwei die beiden einfachen Darstellungen k_+ und k_-. Die zugehörigen Projektoren sind $\mathrm{e}_{k_+} = (\delta_{\bar{0}} + \delta_{\bar{1}})/2$ und $\mathrm{e}_{k_-} = (\delta_{\bar{0}} - \delta_{\bar{1}})/2$.

Beispiel 4.2.14. Der Projektor zur Einsdarstellung k hat stets die Gestalt $\mathrm{e}_k = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \delta_g$. In der Tat operiert dieses Element des Gruppenrings auf der Einsdarstellung als die Identität und auf allen anderen einfachen Darstellungen als Null, da diese außer der Null keinen unter G invarianten Vektor besitzen können.

Ergänzung 4.2.15. Die Projektoren zu den einfachen einfachen Darstellungen einer endlichen Gruppe G im Fall nichtteilender Charakteristik lassen sich im Gruppenring kG auch allein aus der Ringstruktur heraus beschreiben als die „primitiven zentralen Idempotenten" im Sinne von 3.5.14.

Definition 4.2.16. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V einer Gruppe G über einem Körper k definiert man ihren **Charakter** $\chi_V : G \to k$ durch die Vorschrift

$$\chi_V(g) := \mathrm{tr}(g|V)$$

4.2.17. Ich bestehe darauf, daß dieser Charakter eine Funktion $\chi_V \in \mathrm{Fun}(G; k)$ auf unserer Gruppe ist und nicht ein Element des Gruppenrings $kG = \mathrm{Maß}_!(G; k)$.

4.2.18. Da nach [LA1] 2.6.16 konjugierte Matrizen dieselbe Spur haben, sind Charaktere stets Klassenfunktionen. Die Dimension einer Darstellung ist offensichtlich gerade der Wert ihres Charakters beim neutralen Element $e \in G$, in Formeln

$$(\dim_k V)_k = \chi_V(e)$$

Hier meinen wir links das Bild der Dimension unter dem eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to k$. Die Charaktere der einfachen Darstellungen heißen die **einfachen Charaktere** oder auch abkürzend die **Charaktere** unserer

Gruppe. Im Fall komplexer Darstellungen einer abelschen Gruppe sind das genau die Gruppenhomomorphismen $G \to \mathbb{C}^\times$, weshalb unsere Terminologie hier mit der in [AN3] 2.7.8 eingeführten Terminologie verträglich ist.

Korollar 4.2.19 (Charakter-Projektor-Formel). *Für jede endliche Gruppe G und jeden Spaltungskörper k nichtteilender Charakteristik liefert der Charakter einer einfachen Darstellung L ihren Projektor vermittels der Identität*

$$\mathrm{e}_L = \frac{\dim L}{|G|}(\chi_L \circ \mathrm{inv})\zeta$$

Beispiel 4.2.20. Der Charakter der Einsdarstellung ist die konstante Funktion Eins auf unserer Gruppe. Den zugehörigen Projektor kennen wir bereits aus 4.2.14 und das paßt.

Beweis. Wir müssen nur unsere allgemeine Formel für die Umkehrabbildung zur diskreten Fouriertransformation aus 4.2.3 auf den Fall des Identitätsendomorphismus einer einfachen Darstellung anwenden. □

Korollar* 4.2.21. *Seien G eine endliche Gruppe, k ein Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik und $a \in kG$ ein Element des Gruppenrings. Ist das von a erzeugte Linksideal $L := kGa$ eine einfache Darstellung von G, so gilt $\dim_k(aL) = 1$ und $aM = 0$ für alle einfachen Darstellungen M mit $M \not\cong L$.*

4.2.22. Sind wir in der Situation unseres Satzes 3.4.8 zu dualen Paaren und gilt $L \cong E_\nu$, so erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus $aM \xrightarrow{\sim} F_\nu$ von Darstellungen von H.

Beweis. Unter der diskreten Fouriertransformation kann a nur in $\mathrm{End}_k L$ einen von Null verschiedenen Anteil haben, da es zur L-isotypischen Komponente gehört. Wenden wir auf diesen Anteil unsere Übung 3.5.17 an, so sehen wir, daß er ein Endomorphismus vom Rang Eins sein muß. Das Korollar folgt. □

Übungen

Übung 4.2.23. Das Zentrum des Endomorphismenrings eines Vektorraums besteht genau aus allen Multiplikationen mit Skalaren aus dem Körper.

Übung 4.2.24. Das Zentrum eines Produkts von Ringen ist das Produkt ihrer Zentren.

Ergänzende Übung 4.2.25. Gegeben eine endliche Gruppe und ein Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik zeige man: Genau dann ist die Gruppe kommutativ, wenn alle ihre einfachen Darstellungen über besagtem Körper eindimensional sind.

Übung 4.2.26. Man zeige, daß jede nichtkommutative Gruppe der Ordnung Acht über $\mathbb{C}$ bis auf Isomorphismus genau vier eindimensionale Darstellungen und genau eine einfache zweidimensionale Darstellung und keine weiteren einfachen Darstellungen hat. Man bestimme sie im Fall der Bierdeckelgruppe und im Fall der Quaternionengruppe.

Übung 4.2.27. Die Quaternionengruppe $Q := \{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ im Quaternionenring aus [AL] 1.4.13 hat über $\mathbb{R}$ bis auf Isomorphismus vier eindimensionale Darstellungen und nur noch eine weitere einfache Darstellung, nämlich die offensichtliche Darstellung $\mathbb{H}$. Die Strukturtheorie halbeinfacher Ringe 3.5.4 liefert so einen Isomorphismus

$$\mathbb{R}Q \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}$$

Analoges gilt über $\mathbb{Q}$. Hinweis: Man untersuche den Quotienten $Q/\{\pm 1\}$.

4.3 Orthogonalitätsrelationen

Satz 4.3.1 (Orthonormalität einfacher Charaktere). *Gegeben eine endliche Gruppe G und ein Spaltungskörper k nichtteilender Charakteristik bilden die einfachen Charaktere eine Orthonormalbasis des Raums der Klassenfunktionen in Bezug auf die symmetrische Bilinearform $(\varphi, \psi) := |G|^{-1} \sum \varphi(g^{-1})\psi(g)$.*

Beweis. Bezeichne $\hat{G}$ die Menge der Isomorphieklassen von einfachen Darstellungen über k. Wir können unseren Satz 4.2.3 über die diskrete Fouriertransformation ausschreiben zur Aussage, daß im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Maß}_!(G; k) \arrow[r, "\rho", "\sim"'] & \prod_{L \in \hat{G}} \mathrm{End}_k L \arrow[d, "\wr"', "\cdot\, \mathrm{diag}(\dim L)"] \\
\mathrm{Fun}(G; k) \arrow[u, "|G|^{-1}\zeta\cdot(\circ\, \mathrm{inv})", "\wr"'] & \prod_{L \in \hat{G}} \mathrm{End}_k L \arrow[l, "c"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

mit derjenigen Abbildung als unterer Horizontale, unter der ein Endomorphismus $A \in \mathrm{End}_k L$ auf die Funktion $c_A : g \mapsto \mathrm{tr}\,\big(\rho_L(g)A|L\big)$ abgebildet wird, das einmal im Kreis herumgehen an jeder Stelle die Identität liefert. Die Spurform 3.6.7 auf $\mathrm{Maß}_!(G)$ wird gegeben durch $(\varphi, \psi)_{\mathrm{tr}} = \mathrm{Tr}(\varphi\psi) = |G| \sum \varphi[g^{-1}]\psi[g]$ mit eckigen Klammern um die Punkte, auf deren durch die eckigen Klammern notierten charakteristischen Funktionen die jeweiligen Maße ausgewertet werden. Diese Spurform entspricht unter der oberen Horizontale der Spurform auf unserem Produkt von Endomorphismenringen

$$((A_L), (B_L))_{\mathrm{tr}} = \mathrm{Tr}((A_L)(B_L)) = \sum_{L \in \hat{G}} (\dim L)\, \mathrm{tr}(A_L B_L | L)$$

Unter der unteren Horizontale entspricht mithin die Bilinearform

$$(\varphi, \psi) := |G|^{-1} \sum \varphi(g)\psi(g^{-1})$$

auf $\operatorname{Fun}(G)$ der Bilinearform $((A_L),(B_L)) := \sum_{L\in\hat{G}}(\dim L)^{-1}\operatorname{tr}(A_L B_L|L)$ auf dem Produkt von Endomorphismenringen. So erhalten wir insbesondere für einfache Darstellungen $M, L \in \hat{G}$ die Orthonormalitätsrelation $(\chi_L, \chi_M) = \delta_{L,M}$. Ein Dimensionsvergleich zeigt den Rest. □

4.3.2 (**Dimension des Endomorphismenrings einer Darstellung**). Gegeben eine endliche Gruppe G und eine endlichdimensionale Darstellung L über einem Körper k nichtteilender Charakteristik liefern unsere Orthonormalitätsrelationen 4.3.1 für die k-Dimension ihres Endomorphismenrings die Formel

$$\dim_k(\operatorname{End}_{kG} L) = (\chi_L, \chi_L)$$

Hierfür müssen wir noch nicht einmal annehmen, daß k ein Spaltungskörper ist, da wir uns durch Erweiterung der Skalare auf diesen Fall zurückziehen können.

Korollar 4.3.3 (Orthonormalität komplexer einfacher Charaktere). *Gegeben eine endliche Gruppe G bilden die komplexen einfachen Charaktere eine Orthonormalbasis des Raums der komplexen Klassenfunktionen in Bezug auf das* **Standardskalarprodukt** $\langle\varphi, \psi\rangle := |G|^{-1}\sum \overline{\varphi(g)}\psi(g)$.

Beweis. Das folgt sofort aus 4.3.1, wenn man bemerkt, daß alle Eigenwerte von $\rho_L(g)$ Einheitswurzeln sind, so daß gilt

$$\chi_L(g^{-1}) = \operatorname{tr}(\rho_L(g)^{-1}) = \overline{\operatorname{tr}(\rho_L(g))} = \overline{\chi_L(g)}$$ □

4.3.4 (**Berechnung von Multiplizitäten**). Gegeben eine endlichdimensionale komplexe Darstellung V einer endlichen Gruppe über einem können wir also die Vielfachheit, mit der eine vorgegebene einfache Darstellung L in einer Zerlegung unserer Darstellung V als direkte Summe einfacher Darstellungen auftritt, berechnen als den Wert

$$[V : L] = \langle\chi_L, \chi_V\rangle$$

unseres Skalarprodukts auf den Charakteren.

4.3.5. Wir können die Orthonormalität einfacher komplexer Charaktere auch direkter einsehen, indem wir das Argument von oben etwas umschreiben. Gegeben eine endliche Gruppe G betrachten wir dazu das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Maß}_!(G;\mathbb{C}) \arrow[r, "\rho", "\sim"'] & \prod_{L\in\hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[d, "\cdot\operatorname{diag}(\dim L)", "\wr"'] \\
\operatorname{Fun}(G;\mathbb{C})^{\leftrightarrow} \arrow[u, "|G|^{-1}\zeta\cdot", "\wr"'] & \prod_{L\in\hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[l, "c^*", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

mit der unteren Horizontale abgewandelt zu $A \mapsto c_A^*$ mit $c_A^* : g \mapsto \operatorname{tr}\big(\rho_L(g)^* A : L \to L\big)$, wobei das Sternchen oben den Adjungierten in Bezug auf ein und jedes G-invariante Skalarprodukt auf L bezeichnet. Der obere Index $\leftrightarrow$ erinnert uns daran, daß wir die „vertauschte“ G-Operation auf dem Funktionenraum betrachten müssen, wenn wir erreichen wollen, daß unser Diagramm aus äquivarianten Abbildungen besteht. Wegen $(\rho_L(g^{-1})) = (\rho_L(g)^{-1}) = (\rho_L(g)^*)$ kommutiert auch dieses Diagramm. Wird unter der oberen Horizontale $g \in G \subset \mathbb{C}G$ auf das Tupel von Endomorphismen $(\rho_L(g))$ abgebildet, so geht g^{-1} auf das Tupel $(\rho_L(g^{-1})) = (\rho_L(g)^{-1}) = (\rho_L(g)^*)$ der adjungierten Endomorphismen. Die Abbildung $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ mit $\varphi \mapsto \varphi^* := \overline{\operatorname{inv}_* \varphi}$ entspricht unter ρ also dem komponentenweise Adjungieren, das wir auch mit einem Stern notieren. Jetzt erinnere ich aus 3.6.7 die Spur $\operatorname{Tr}(a) := \operatorname{Tr}\big((a\cdot) : A \to A\big)$ einer endlichdimensionalen Algebra und die Formeln $\operatorname{Tr}(\varphi) = |G|\varphi[e]$ für den Gruppenring einer endlichen Gruppe sowie $\operatorname{Tr}(A) = d\operatorname{tr}(A)$ für die Ringalgebra der $(d \times d)$-Matrizen. Indem wir die offensichtliche Identität

$$\operatorname{Tr}(\varphi^*\psi) = \operatorname{Tr}(\rho(\varphi^*\psi)) = \operatorname{Tr}(\rho(\varphi^*)\rho(\psi)) = \operatorname{Tr}(\rho(\varphi)^*\rho(\psi))$$

ausschreiben, erhalten wir die **Skalarproduktverträglichkeit der Fouriertransformation**

$$|G| \sum_{g \in G} \overline{\varphi[g]}\ \psi[g] = \sum_{L \in \hat{G}} (\dim_{\mathbb{C}} L) \operatorname{tr}\big(\rho_L(\varphi)^* \rho_L(\psi)\big)$$

für $\rho_L(\varphi)^* \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ der zu $\rho_L(\varphi)$ adjungierte Endomorphismus in Bezug auf ein und jedes G-invariante Skalarprodukt auf L. Das liefert einen weiteren Beweis für die Orthonormalität der einfachen Charaktere. Um die Analogie zur Inversionsformel der Fouriertheorie [AN3] 3.7.21 herauszuarbeiten, betrachten wir schließlich auch noch die Erweiterung unseres Diagramms zum Sechseck

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}G \arrow[r, "\rho", "\sim"'] & \prod_{L \in \hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[dr, "\cdot\operatorname{diag}(\sqrt{\dim L})", "\sim"'] & \\
\mathbb{C}G \arrow[ur, "|G|^{-1/2}\cdot", "\sim"'] & & & \prod_{L \in \hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[dl, "\sim", "\cdot\operatorname{diag}(\sqrt{\dim L})"'] \\
& \mathbb{C}G \arrow[ul, "\sim", "|G|^{-1/2}\cdot"'] & \prod_{L \in \hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[l, "c^*"', "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

und verwenden dabei die eigentlich „falsche“ Identifikation des Gruppenrings mit dem Raum der Funktionen auf unserer Gruppe, in Formeln die Identifikation $\operatorname{Fun}(G;\mathbb{C})^{\leftrightarrow} \xrightarrow{\sim} \text{Maß}_!(G;\mathbb{C})$ mit $[g] \mapsto \delta_g$. Betrachten wir nun in der mittleren Horizontale auf beiden Seiten die Skalarprodukte, die gegeben werden durch

$\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)}\psi(g)$ auf dem Gruppenring und $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(A^*B)$ auf dem Produkt der Endomorphismenringe, für $A, B \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ und A^* die adjungierte Abbildung zu A in Bezug auf ein und jedes G-invariante Skalarprodukt auf L, so bedeutet unsere Skalarproduktverträglichkeit, daß die Morphismen unseres Diagramms zueinander inverse unitäre Isomorphismen zwischen beiden Räumen auf der mittleren Horizontale induzieren. Ein Analogon für kompakte Hausdorffgruppen diskutieren wir in [TM] 4.9.8.

Proposition 4.3.6 (Orthonormalität komplexer Matrixkoeffizienten). *Bilden gewisse $\rho_L : G \to \mathrm{U}(d_L)$ ein Repräsentantensystem für die einfachen unitären Darstellungen einer endlichen Gruppe G, so bilden die renormalisierten Matrixkoeffizienten $\sqrt{\dim_L}\,(\rho_L)_{ij}$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Fun}(G;\mathbb{C})$ in Bezug auf das Standardskalarprodukt $\langle\varphi,\psi\rangle := |G|^{-1}\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)}\psi(g)$.*

Beweis. Die Matrizen E_{ij} bilden eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Mat}(d;\mathbb{C})$ für das durch $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B)$ gegebene Skalarprodukt. Schieben wir diese Orthonormalbasis in unserem Sechseck nach links unten, so ergibt sich die Behauptung. □

4.3.7. Aus der Orthonormalität komplexer Matrixkoeffizienten 4.3.6 und der Erkenntnis $\chi_L = \sum_{i=1}^{\dim L}(\rho_L)_{ii}$ folgt auch ein weiteres Mal die Orthonormalität der einfachen Charaktere in Bezug auf das Standardskalarprodukt.

4.3.8. Die wesentlichen Informationen über die komplexen Darstellungen einer endlichen Gruppe werden meist in Form einer **Charaktertafel** dargeboten: Die Spalten solch einer Tafel sind indiziert durch Repräsentanten der Konjugationsklassen, die Zeilen durch die einfache Darstellungen bis auf Isomorphismus, und in der Tafel stehen die Werte des Charakters der entsprechenden einfachen Darstellung auf Elementen der entsprechenden Konjugationsklasse. Über den Konjugationsklassen wird meist in einer eigenen Zeile ihre Kardinalität angegeben, damit auch das Skalarprodukt auf dem Raum Klassenfunktionen aus der Tafel hervorgeht.

Beispiel 4.3.9. Die einfachen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ sind die Einsdarstellung eins, die Signumsdarstellung sgn und die Darstellung spieg als zweidimensionale Spiegelungsgruppe, bei der die drei ungeraden Permutationen operieren als Spiegelungen an drei Geraden durch den Ursprung, die paarweise den Winkel $60°$ einschließen. Zeichnen wir zwei ungerade Permutationen $s, t \in \mathcal{S}_3$ aus, so können wir die Elemente von $\mathcal{S}_3$ aufzählen als $\mathcal{S}_3 = \{e, s, t, sts, ts, st\}$ und die Charaktertafel hat die Gestalt

	e	s, t, sts	ts, st
eins	1	1	1
sgn	1	-1	1
spieg	2	0	-1

Um die unterste Zeile zu prüfen bemerkt man, daß jede ebene lineare Spiegelung Spur Null hat, jede ebene Drehung um $120°$ jedoch Spur $\zeta + \bar{\zeta} = -1$ für ζ eine primitive dritte Einheitswurzel.

4.3.10 (**Orthogonalitätsrelationen in der Charaktertafel**). Seien G eine endliche Gruppe und $\chi_1, \ldots, \chi_r$ die einfachen komplexen Charaktere von G. Bilden $x_1, \ldots, x_r$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen und bezeichnet $\hat{x} \subset G$ die Konjugationsklasse von $x \in G$, so lauten die Orthogonalitätsrelationen

$$\delta_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_k |\hat{x}_k| \, \overline{\chi_i(x_k)} \chi_j(x_k)$$

Wegen der Bahnformel $|\hat{x}_k| \cdot |\operatorname{Z}_G(x_k)| = |G|$ ist also die Matrix mit den Einträgen $|\operatorname{Z}_G(x_k)|^{-1/2} \chi_i(x_k)$ unitär. Dasselbe gilt a forteriori für ihre transponierte Matrix und zeigt

$$\delta_{ij} |\operatorname{Z}_G(x_i)| = \sum_k \overline{\chi_k(x_i)} \chi_k(x_j)$$

Insbesondere können wir also aus der Charaktertafel auch die Gruppenordnung $|G| = |\operatorname{Z}_G(e)|$ und die Ordnungen der Konjugationsklassen $|\hat{x}_k| = |G| / |\operatorname{Z}_G(x_k)|$ ablesen. Wenn wir mithin die Spalten durch die einfachen Darstellungen indizieren, so sind die Spaltenvektoren paarweise orthogonal und ihre quadrierte Länge ist die Kardinalität des Zentralisators der jeweiligen Konjugationsklasse.

Übungen

Übung 4.3.11 (**Charaktere von Permutationsdarstellungen**). Gegeben eine Gruppe G und eine endliche G-Menge X und ein Körper k zeige man für den Charakter der zugehörigen Permutationsdarstellung $V := \operatorname{Ens}(X, k)$ nach 1.1.12 die Formel

$$\chi_V(g) = |X^g|$$

In Worten ist also der Wert des Charakters bei g die als Element von k zu verstehende Zahl der Fixpunkte von g in X.

Übung 4.3.12. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe nennen wir die Darstellung $V^* = \operatorname{Hom}(V, k)$ auch die **kontragradiente Darstellung**. Man zeige, daß der Charakter der kontragredienten Darstellung gegeben wird durch die Formel $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$. Weiter zeige man $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

Übung 4.3.13. Gegeben eine endliche Gruppe G und eine komplexe Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(L)$ von G folgt aus $|\chi_L(g)| = \chi(e)$ bereits, daß $\rho(g)$ ein Vielfaches der Identität ist. Hinweis: $\rho(g)$ ist diagonalisierbar und alle seine Eigenwerte sind Einheitswurzeln.

4.4 Charaktere und algebraische Zahlen*

4.4.1. In diesem Abschnitt werden verschiedene weiterführende Aussagen der Charaktertheorie diskutiert, deren Beweise grundlegende Kenntnisse der kommutativen Algebra benötigen.

Satz 4.4.2 (Dimensionen einfacher Darstellungen). *Gegeben ein Spaltungskörper der Charakteristik Null und eine endliche Gruppe ist die Dimension jeder einfachen Darstellung unserer Gruppe über dem gegebenen Körper ein Teiler der Gruppenordnung.*

Beweis. Seien k unser Körper, G unsere endliche Gruppe und L unsere einfache Darstellung. Wir gehen aus von der Gleichung $\mathrm{e}_L * \mathrm{e}_L = \mathrm{e}_L$ im Gruppenring. Mit der Charakter-Projektor-Formel 4.2.19 folgt mit ζ dem Zählmaß

$$\chi_L\zeta * \chi_L\zeta = \frac{|G|}{\dim L}\chi_L\zeta$$

Per definitionem ist $\chi_L(g)$ die Summe der Eigenwerte von $g : L \to L$. Wegen $g^n = 1$ für $n = |G|$ sind diese Eigenwerte n-te Einheitswurzeln. Ist also $\beta \in k$ eine primitive n-te Einheitswurzel, so nehmen alle Charaktere Werte in $\mathbb{Z}[\beta]$ an. Bezeichnet $I \subset \mathbb{Z}[\beta]$ das von den Werten des Charakters χ_L erzeugte Ideal, so folgern wir im Körper k die Inklusionsrelation

$$I \supset \frac{|G|}{\dim L} I$$

Nun ist $\mathbb{Z}[\beta]$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, erzeugt etwa von den Potenzen $1, \beta, \beta^2, \dots \beta^{n-1}$. Foglich ist mit [LA2] 4.4.1 auch I eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Zusätzlich ist I offensichtlich torsionsfrei und mit [LA2] 4.4.12 dann sogar frei über $\mathbb{Z}$, in Formeln $I \cong \mathbb{Z}^r$ für geeignetes $r \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Erkenntnis $I \neq 0$ impliziert unsere Inklusion oben nun $(|G|/\dim L) \in \mathbb{Z}$ wie gewünscht. □

Satz* 4.4.3. *Die Dimensionen der einfachen Darstellungen einer endlichen Gruppe G bilden über jedem Spaltungskörper nichtteilender Charakteristik dieselbe Multimenge.*

4.4.4. Am Schluß des Beweises dieses Satzes zeigen wir unter den Annahmen das Satzes zusätzlich, daß salopp gesprochen auch „die einfachen Charaktere nicht vom Grundkörper abhängen“. Diese Idee muß man jedoch erst noch zu einer präzisen Aussage machen, denn es ist a priori nicht klar, wie man Funktionen mit Werten in verschiedenen Körpern überhaupt sollte vergleichen können.

4.4.5. Für diesen Satz brauchen wir etwas mehr Kenntnisse in kommutativer Algebra und insbesondere den Begriff [KAG] **??** eines projektiven Moduls und den Begriff [KAG] **??** des Ranges eines endlich erzeugten projektiven Moduls über einem Integritätsbereich.

Beweis. Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen oder allgemeiner irgendein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Die Charakter-Projektor-Formel 4.2.19 zusammen mit elementaren Erkenntnissen aus dem vorhergehenden Beweis von Satz 4.4.2 über die Dimension einfacher Darstellungen zeigt, daß die Projektoren $\mathrm{e}_i \in \mathbb{C}G$ zu den einfachen Darstellungen mit der Notation $n := |G|$ für die Gruppenordnung Koeffizienten im Teilring $R := \mathbb{Z}[\sqrt[n]{1}, n^{-1}] \subset \mathbb{C}$ haben. Wenn wir diese Projektoren für alle einfachen Darstellungen aufaddieren, gilt offensichtlich $\mathrm{e}_1 + \ldots + \mathrm{e}_r = 1$. Andererseits haben wir $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j = \delta_{ij}\mathrm{e}_i$. Wir folgern eine Zerlegung des Gruppenrings RG der Gestalt

$$RG = \mathrm{e}_1 RG \oplus \ldots \oplus \mathrm{e}_r RG$$

Hier ist klar, daß $\mathrm{e}_i RG$ ein projektiver R-Modul sein muß und daß dieser projektive R-Modul im Sinne von [KAG] **??** den Rang $\mathrm{rg}_R(\mathrm{e}_i RG) = (\dim_{\mathbb{C}} L_i)^2$ haben muß. Für jeden Körper k nichtteilender Charakteristik, in dem es eine n-te Einheitswurzel der Ordnung n gibt, also eine Nullstelle des n-ten Kreisteilungspolynoms $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$, finden wir nun einen Ringhomomorphismus $R \to k$, da nämlich R durch formales Invertieren des Elements n aus dem Restklassenring $\mathbb{Z}[X]/\langle \Phi_n(X) \rangle$ entsteht. Die Bilder der Projektoren e_i unter dem induzierten Ringhomomorphismus $RG \to kG$ sind dann offensichtlich paarweise orthogonale Idempotente $\bar{\mathrm{e}}_i \in kG$ mit der Summe Eins, also $\bar{\mathrm{e}}_1 + \ldots + \bar{\mathrm{e}}_r = 1$ und $\bar{\mathrm{e}}_i \bar{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij}\bar{\mathrm{e}}_i$. Weiter gilt offensichtlich

$$\dim_k(\bar{\mathrm{e}}_i kG) = \mathrm{rg}_R(\mathrm{e}_i RG) = (\dim_{\mathbb{C}} L_i)^2$$

Weil wir aber bereits wissen, daß es über k nicht mehr einfache Darstellungen geben kann als über $\mathbb{C}$, nämlich höchstens soviele wie Konjugationsklassen in unserer Gruppe, sind die $\bar{\mathrm{e}}_i$ notwendig die Projektoren zu den einfachen Darstellungen von G über k. Die Charakter-Projektor-Formel 4.2.19 zeigt nun sogar, daß wir die einfachen Charaktere von G über k erhalten, indem wir von den einfachen Charakteren von G über $\mathbb{C}$ ausgehen, beachten, daß sie Werte in R annehmen müssen, und dann die so erhaltenen Abbildungen $\chi_i : G \to R$ noch mit einem fest gewählten Ringhomomorphismus $R \to k$ verknüpfen. $\square$

4.4.6. Man beachte, daß die im vorhergehenden Beweis konstruierte Identifikation $\mathrm{irr}_{\mathbb{C}}(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{irr}_k(G)$ von der Wahl eines Ringhomomorphismus $R \to k$ entscheidend abhängt. Man kann das bereits am Beispiel der zyklischen Gruppen gut erkennen.

4.4.7. Für den Rest dieses Abschnitts setzen wir Kenntnisse über ganze Kringerweiterungen im Umfang von [KAG] 5.1 voraus. Wir müssen wissen, daß die über $\mathbb{Z}$ ganzen komplexen Zahlen einen Teilring von $\mathbb{C}$ bilden, der alle Einheitswurzeln enthält und dessen Schnitt mit $\mathbb{Q}$ schlicht $\mathbb{Z}$ selber ist. Weiter müssen wir wissen, daß jeder Teilring von $\mathbb{C}$, der als additive abelsche Gruppe endlich erzeugt ist, bereits aus über $\mathbb{Z}$ ganzen Zahlen besteht.

Satz 4.4.8 (**Ganzheitseigenschaften von Charakteren**). *Gegeben eine endliche Gruppe G ist für jeden einfachen komplexen Charakter χ von G und jedes Element $g \in G$ mit Konjugationsklasse $\hat{g}$ der Quotient $\chi(g)|\hat{g}|/\chi(e)$ ganz über $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Die Projektoren $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_r$ zu den einfachen komplexen Darstellungen bilden eine Basis des Zentrums des Gruppenrings $Z := \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$. Entwickeln wir $z \in Z$ als $z = \sum_{i=1}^r \omega_i(z)\mathrm{e}_i$, so sind die ω_i Ringhomomorphismen $\omega_i : Z \to \mathbb{C}$. Bezeichnet $\hat{g}$ die Konjugationsklasse von $g \in G$ und $[\hat{g}]$ ihre Indikatorfunktion und ζ das Zählmaß, so erzeugen die Maße $[\hat{g}]\zeta$ einen Teilring $Z_{\mathbb{Z}} \subset Z$. Sein Bild $\omega_i(Z_{\mathbb{Z}}) \subset \mathbb{C}$ ist dann ein Teilring, der modulendlich ist über $\mathbb{Z}$ und der damit nach [KAG] 5.1.5 aus über $\mathbb{Z}$ ganzen Elementen von $\mathbb{C}$ bestehen muß. Insbesondere sind die $\omega_i([\hat{g}]\zeta)$ stets ganz über $\mathbb{Z}$. Nun finden wir aber

$$\omega_i(z)\mathrm{e}_i = z\mathrm{e}_i$$

und auf einer einfachen Darstellung L mit $\mathrm{e}_i = \mathrm{id} : L \to L$ operiert die linke Seite durch einen Endomorphismus der Spur $\omega_i(z) \dim L = \omega_i(z)\chi_L(e)$. Im Fall $z = [\hat{g}]\zeta$ operiert aber die rechte Seite durch einen Endomorphismus der Spur $\chi_L(g)|\hat{g}|$ und es folgt $\omega_i([\hat{g}]\zeta) = \chi_L(g)|\hat{g}|/\chi_L(e)$ und so die Behauptung. □

Satz 4.4.9 (**Notwendige Nullstellen von Charakteren**). *Gegeben eine endliche Gruppe G und eine einfache komplexe Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(L)$ und ein Element $g \in G$, dessen Konjugationsklasse $\hat{g}$ eine zu $\chi_L(e) = \dim_{\mathbb{C}} L$ teilerfremde Kardinalität hat, gilt $\rho(g) \in \mathbb{C}^\times \mathrm{id}_L$ oder $\chi_L(g) = 0$.*

Beweis. Wir setzen $\chi := \chi_L$ schreiben $1 = a\chi(e) + b|\hat{g}|$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Teilen wir diese Gleichung durch $\chi(e)$ und multiplizieren sie mit $\chi(g)$, so folgt aus 4.4.8, daß $\alpha := \chi(g)/\chi(e)$ ganz ist über $\mathbb{Z}$. Nun ist aber $\chi(g)$ eine Summe von $\chi(e)$ Einheitswurzeln und es folgt $|\alpha| = |\chi(g)/\chi(e)| \leq 1$. Sicher liegt $\chi(g)$ in einem Unterkörper $K \subset \mathbb{C}$, der endlich und Galois ist über $\mathbb{Q}$, und für $\gamma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ finden wir ebenso $|\alpha^\gamma| \leq 1$. Das Produkt aller α^γ liegt dann in $\mathbb{Q}$ und ist ganz über $\mathbb{Z}$, liegt also in $\mathbb{Z}$, und muß also Null sein, wenn es nicht den Betrag Eins hat. Wenn es aber den Betrag Eins hat, so müssen alle Eigenwerte von $\rho(g)$ dieselbe Einheitswurzel gewesen sein. □

Satz 4.4.10. *Hat eine endliche Gruppe G eine Konjugationsklasse, deren Kardinalität eine echte Primzahlpotenz ist, so ist unsere Gruppe nicht einfach.*

4.4.11. Unter einer echten Primzahlpotenz verstehen wir hier wie immer eine Primzahl hoch einer positiven Zahl.

Beweis. Seien p eine Primzahl und $g \in G$ mit $|\hat{g}| = p^l > 1$. Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(L)$ eine einfache Darstellung von G mit Charakter χ. Aus $p \nmid \chi(e)$ folgt mit 4.4.9 schon mal $\rho(g) \in \mathbb{C}^\times \operatorname{id}_L$ oder $\chi(g) = 0$. Im ersten Fall liegt g im Normalteiler $\rho^{-1}(\mathbb{C}^\times \operatorname{id}_L)$, der damit die ganze Gruppe sein muß, so daß wir eine eindimensionale Darstellung vor uns haben. Diese muß notwendig trivial sein, wenn G einfach sein will. Wenn also G einfach ist, so folgt $\chi(g) = 0$ für jeden nichttrivialen einfachen Charakter χ mit $p \nmid \chi(e)$. In $\mathrm{Fun}(G;\mathbb{C})$ gilt jedoch $|G|[e] = \sum_\chi \chi(e)\chi$ mit der Summe über alle einfachen Charaktere, und das Auswerten bei g liefert

$$0 = 1 + \sum_{p|\chi(e)} \chi(e)\chi(g)$$

mit dem ersten Summanden für den trivialen Charakter. Das aber impliziert, daß $1/p$ ganz ist über $\mathbb{Z}$, und dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Satz 4.4.12 (p-q-Satz von Burnside). *Eine Gruppe, deren Kardinalität nur durch höchstens zwei Primzahlen teilbar ist, ist stets auflösbar.*

4.4.13. Jede Gruppe mit 30 Elementen ist auflösbar nach Übung [AL] 1.4.23. Jede Gruppe mit weniger als 60 Elementen ist mithin auflösbar.

Beweis. Seien sonst $p \neq q$ Primzahlen und G eine Gruppe mit $|G| = p^a q^b$ und $a \geq 1$. Wir wählen eine p-Sylow $P \subset G$. Nach [AL] 1.3.6 finden wir ein nichttriviales Element $g \neq 1$ im Zentrum von P. Dann gilt $\mathrm{Z}_G(g) \supset P$ und folglich ist die Kardinalität $|\hat{g}|$ der Konjugationsklasse $\hat{g}$ von g eine q-Potenz. Im Fall $|\hat{g}| > 1$ ist G nicht einfach nach 4.4.10 und wir kommen mit vollständiger Induktion zum Ziel. Im Fall $|\hat{g}| = 1$ hat G nichttriviales Zentrum und wir kommen auch mit vollständiger Induktion zum Ziel. □

4.5 Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten*

4.5.1. In diesem Abschnitt erklären wir, warum in Gruppenringen über einem beliebigen Körper und jede endlichdimensionale einfache Darstellung E die E-isotypische Komponente des Gruppenrings zusammenfällt mit der E^*-isotypischen Komponente des Gruppenrings als Rechtsmodul über sich selber, vergleiche

4.5.9. Weiter erklären wir, warum im Gruppenring einer endlichen Gruppe über einem beliebigen Körper das Produkt von Matrixkoeffizienten zu nichtisomorphen einfachen Darstellungen stets verschwindet.

4.5.2. Gegeben ein Kring k und ein k-Modul V bezeichnen wir im folgenden den dualen k-Modul als $V^* := \operatorname{Hom}_k(V, k)$.

4.5.3 (**Matrixkoeffizientenabbildung eines Moduls einer Ringalgebra**). Gegeben ein Kring k und eine k-Ringalgebra A und ein A-Modul V bezeichne $S := (\operatorname{End}_A V)^{\mathrm{opp}}$ den Opponierten des Endomorphismenrings von V. Dann ist, wie man leicht nachrechnet, die Abbildung

$$\kappa : V \otimes_S V^* \to A^*$$

gegeben durch $\kappa : v \otimes \varphi \mapsto c_{\varphi,v}$ mit $c_{\varphi,v}(a) := \varphi(av)$ ein Homomorphismus von A-Bimoduln. Wir nennen sie die **Matrixkoeffizientenabbildung**.

4.5.4. Ist V eine Darstellung einer Menge G über einem Kring k, so erklärt man für $v \in V$ und $\varphi \in V^*$ den **Matrixkoeffizienten** $c_{\varphi,v} : G \to k$ durch die Vorschrift

$$c_{\varphi,v}(g) := \varphi(gv)$$

Ist G ein Monoid und fassen wir V als Modul über dem Monoidring $A := kG$ auf, so entspricht dies $c_{\varphi,v} \in \operatorname{Ens}(G, k)$ dem zuvor definierten $c_{\varphi,v} \in A^*$ unter der durch die Restriktion auf $G \subset kG$ gegebenen Bijektion $A^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(G, k)$.

Satz 4.5.5 (Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten). *Seien k ein Kring, A eine k-Ringalgebra, E ein einfacher A-Modul und $S := (\operatorname{End}_A E)^{\mathrm{opp}}$ der Opponierte des Endomorphismenschiefkörpers von E. So induziert die Matrixkoeffizientenabbildung einen Isomorphismus von A-Bimoduln*

$$\kappa : E \otimes_S E^* \xrightarrow{\sim} A^*_E$$

von $E \otimes_S E^*$ mit der E-isotypischen Komponente A^*_E des A-Linksmoduls A^*.

4.5.6. Insbesondere erzeugen im Fall eines einfachen A-Moduls E seine Matrixkoeffizienten die E-isotypische Komponente A^*_E des A-Linksmoduls A^* als abelsche Gruppe. Über einem Körper k folgt auch, daß von Null verschiedene Matrixkoeffizienten zu paarweise nichtisomorphen einfachen A-Moduln linear unabhängig sind.

4.5.7. Ist k ein Körper und A eine k-Ringalgebra und E ein endlichdimensionaler einfacher A-Modul, so finden wir, indem wir unseren Satz auf den A^{opp}-Modul E^* anwenden, daß das Bild der zugehörigen Matrixkoeffizientenabbildung sowohl die E-isotypische Komponente von A^* als A-Linksmodul ist als auch die E^*-isotypische Komponente von A^* als A-Rechtsmodul. Insbesondere stimmen in dieser Situation diese beiden isotypischen Komponenten überein. Notieren wir $\operatorname{Iso}_R(M; E) := M_E$ die E-isotypische Komponente eines R-Moduls M in Bezug auf einen einfachen R-Modul E und $\operatorname{Iso}_{-R}(N; F)$ die F-isotypische Komponente eines R-Rechtsmoduls N in Bezug auf einen einfachen R-Rechtsmodul F, so haben wir also in Formeln

$$\operatorname{Iso}_A(A^*; E) = \operatorname{Iso}_{-A}(A^*; E^*)$$

4.5.8. Ich bin nicht vollständig glücklich damit, daß in unserer Notation die isotypische Komponente für die Linksmodulstruktur durch einen Index von rechts angedeutet wird, aber es schien mir auch wieder übertrieben, die allgemeine Notation am Fall der Bimoduln auszurichten.

Beweis. Die kanonische Beschreibung isotypischer Komponenten aus 2.3.10 liefert einen Isomorphismus

$$\kappa : E \otimes_S \operatorname{Hom}_A(E, A^*) \xrightarrow{\sim} A^*_E$$

Gegeben ein A-Modul N und ein A-Rechtsmodul M induzieren weiter die offensichtlichen Isomorphismen $\operatorname{Hom}_k(N, M^*) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_k N)^*$ aus [KAG] 2.8.13 Isomorphismen $\operatorname{Hom}_A(N, M^*) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A N)^*$. Genauer können liefern die üblichen Formeln natürliche Bijektionen beider Seiten mit der Menge der A-balancierten k-bilinearen Abbildungen $M \times N \to k$. Wenden wir das auf $N = E$ und $M = A$ an, so folgt unser Satz. □

4.5.9 (**Isotypische Komponenten von Gruppenringen**). Ist k ein Körper und A eine k-Ringalgebra und E ein endlichdimensionaler einfacher A-Modul und gibt es eine Einbettung

$$A \hookrightarrow A^*$$

von A-Bimoduln, so stimmen nach 2.4.13 und 4.5.7 die E-isotypische Komponente von A als A-Linksmodul und die E^*-isotypische Komponente von A als A-Rechtsmodul überein. Eine typische Anwendung ist der Fall eines Gruppenrings kG, in dem die Abbildung $kG \hookrightarrow (kG)^*$, unter der jedem Gruppenelement das „Bestimmen des Koeffizienten seines Inversen“ zugeordnet wird, ein Homomorphismus von Bimoduln ist.

4.5.10 (**Verschwinden von Produkten von Matrixkoeffizienten**). Gegeben eine endliche Gruppe und ein Körper haben Matrixkoeffizienten zu nichtisomorphen einfachen Darstellungen im Gruppenring das Produkt Null. In der Tat gehören unsere Matrixkoeffizienten nach 4.5.9 dann zu verschiedenen isotypischen Komponenten des Gruppenrings, und diese isotypischen Komponenten sind ja nach 3.1.10 Ideale des Gruppenrings.

Ergänzung 4.5.11. Gegeben ein Körper k und eine k-Ringalgebra A und ein einfacher A-Modul E unendlicher Dimension wird E^* im allgemeinen nicht einfach sein. Hat zum Beispiel A abzählbare Dimension, so gilt dasselbe für jeden einfachen A-Modul, aber der Dualraum eines einfachen unendlichdimensionalen A-Moduls hat notwendig eine überabzählbare Dimension. Auch der Sockel des Dualen eines einfachen A-Moduls kann bereits überabzählbare Dimension haben. Ein explizites Beispiel in der Lie-Theorie ist ein einfacher Vermamodul, dessen Dualraum überabzählbar viele paarweise nicht isomorphe einfache Whittakermoduln enthält.

4.6 Ergänzungen zu Charakteren*

4.6.1. Auch bei endlichdimensionalen Darstellungen nicht notwendig endlicher Gruppen über nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körpern beliebiger Charakteristik bestimmt der Charakter die weitgehend Darstellung. In diesem Abschnitt werden verschiedene Aussagen in dieser Richtung besprochen.

4.6.2 (**Kriterien für von Null verschiedenen Charakter**). Gegeben eine endlichdimensionale einfache Darstellung V einer Gruppe über einem Körper der Charakeristik Null oder einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist ihr Charakter nicht die Nullfunktion. Im ersten Fall ist bereits der Wert am neutralen Element nicht Null, im zweiten Fall folgt es unschwer aus dem Satz von Wedderburn 3.3.6. Ich erwarte, daß das allgemeiner für vollkommene Körper gilt, und muß mal in Bourbaki nachschlagen. Für allgemeine Körper gilt es nicht, wie das folgende Beispiel 4.6.3 zeigt.

Beispiel 4.6.3. Gegeben eine endliche inseparable Körpererweiterung L/K ist L eine einfache Darstellung über K der multiplikativen Gruppe $L^\times$, deren Charakter nach [KAG] 8.3.7 die Nullfunktion ist.

Ergänzung 4.6.4. Eine einfache Darstellung einer Gruppe wird bereits durch die Angabe einer beliebigen von Null verschiedenen Linearkombination ihrer Matrixkoeffizienten bis auf Isomorphismus eindeutig festgelegt. In der Tat liegt nach 4.5.5 jeder Matrixkoeffizient in derjenigen isotypischen Komponente des Raums der Funktionen auf unserer Gruppe, der zu besagter einfacher Darstellung gehört. Insbesondere wird eine endlichdimensionale einfache Darstellung durch ihren Charakter bis auf Isomorphismus eindeutig festgelegt, sofern dieser nicht die Nullfunktion ist.

Satz 4.6.5 (**Charakterisierung durch Charaktere**). *1. Endlichdimensionale Darstellungen einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null sind isomorph genau dann, wenn sie denselben Charakter haben.*

2. *Endlichdimensionale Darstellungen einer beliebigen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null haben dieselben Kompositionsfaktoren mit denselben Vielfachheiten genau dann, wenn sie denselben Charakter haben.*

Beweis. Nach dem Satz von Maschke 4.1.1 sind Darstellungen einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null halbeinfach. Es reicht also, die zweite Aussage zu zeigen. Sind aber L_i diejenigen paarweise nichtisomorphen einfachen Darstellungen, die als Kompositionsfaktoren in unserer Darstellung M auftreten, und ist $m(i)$ die Vielfachheit des Auftretens von L_i und bezeichnet χ_i den Charakter von L_i, so gilt

$$\chi_M = \sum_{i=1}^{r} m(i)\chi_i$$

Da aber die χ_i in verschiedenen isotypischen Komponenten des Gruppenrings liegen und nicht Null sind, sind sie linear unabhängig. Da wir in Charakteristik Null arbeiten, können wir somit die Multiplizitäten $m(i)$ am Charakter χ_M von M ablesen. $\square$

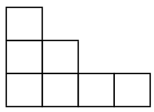
5 Darstellungen der symmetrischen Gruppen

5.1 Einfache Darstellungen und Young-Diagramme

5.1.1. Wir stellen zunächst die beiden Hauptsätze vor, die wir beweisen wollen. Unter einem **Young-Diagramm** verstehen wir wie in [AL] 1.5.3 eine endliche Teilmenge $Y \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$((i,j) \in Y \text{ und } i' \leq i \text{ und } j' \leq j) \quad \Rightarrow \quad (i',j') \in Y$$

Die Elemente von Y nennen wir die „Kästchen" unseres Youngdiagramms und stellen uns ein Element (i,j) vor als das Kästchen auf einem Rechenpapier, bei dem die Koordinaten der linken unteren Ecke gerade (i,j) sind. Zum Beispiel stellt das Bild



das Youngdiagramm $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0),(3,0)\}$ dar. In der Praxis denke ich selber bei Youngdiagrammen stets an Bilder dieser Art.

Satz 5.1.2 (Einfache Darstellungen der symmetrischen Gruppen). *1. Gegeben ein Youngdiagramm Y besitzt die Gruppe $\mathcal{S}_Y := \operatorname{Ens}^\times Y$ aller Permutationen von Y bis auf Isomorphismus genau eine einfache komplexe Darstellung $L(Y)$ mit der Eigenschaft, daß darin sowohl die Einsdarstellung des Spaltenstabilisators von Y als auch die Signumsdarstellung des Zeilenstabilisators von Y vorkommen;*

2. *Gegeben $n \geq 0$ erhalten wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_n & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{irr} \mathbb{C}\mathcal{S}_n \\ Y & \mapsto & L(Y) \end{array}$$

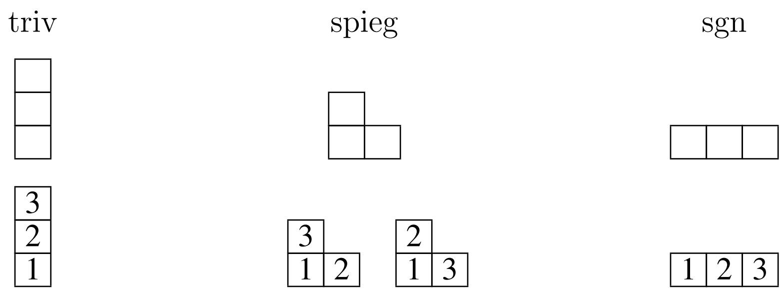
zwischen der Menge $\mathcal{Y}_n$ aller Youngdiagramme mit n Kästchen und der Menge aller Isomorphieklassen von einfachen komplexen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$, indem wir für jedes Youngdiagramm Y mit n Kästchen eine Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} \{1,\ldots,n\}$ wählen, dadurch $\mathcal{S}_Y$ mit $\mathcal{S}_n$ identifizieren, und unsere einfache Darstellung $L(Y)$ aus Teil 1 mit dieser Identifikation als Darstellung von $\mathcal{S}_n$ auffassen.

5.1.3. Nach 1.1.9 hängt die so erhaltene Darstellung $L(Y)$ der Gruppe $\mathcal{S}_n$ bis auf Isomorphismus nicht von der Wahl der Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} \{1,\ldots,n\}$ ab.

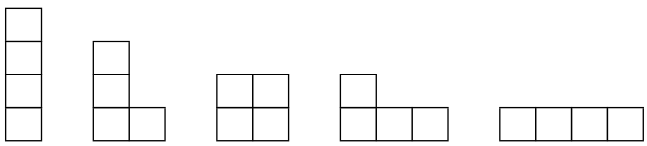
Definition 5.1.4. Gegeben ein Youngdiagramm Y mit n Kästchen ist ein **Tableau der Gestalt** Y eine Bijektion $T : Y \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$. Wir veranschaulichen uns solch ein Tableau, indem wir in jedes Kästchen unseres Youngdiagramms den Wert schreiben, den T dort annimmt. Ein **Standardtableau** ist ein Tableau, dessen Einträge in allen Zeilen und Spalten monoton wachsen.

Satz 5.1.5 (Dimensionen der einfachen Darstellungen). *Für jedes Youngdiagramm Y stimmt die Dimension der zugehörigen einfachen komplexen Darstellung $L(Y)$ von $\mathcal{S}_n$ überein mit der Zahl der Standardtableaus der Gestalt Y.*

Beispiel 5.1.6. Im Fall der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ haben wir drei Young-Diagramme mit drei Kästchen. Sie entsprechen den drei einfachen Darstellungen nach 4.3.9. Die Spiegelungsdarstellung ist zweidimensional, was der Tatsache entspricht, daß es für das fragliche Youngdiagramm zwei Standardtableaus gibt.

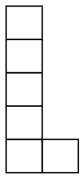


Beispiel 5.1.7. Im Fall der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$ haben wir fünf Young-Diagramme mit vier Kästchen



Sie entsprechen einfachen Darstellungen wie folgt: Ganz links steht die Einsdarstellung, ganz rechts die Signumsdarstellung, in der Mitte die zweidimensionale einfache Darstellung von $\mathcal{S}_3$ zurückgezogen mit dem Gruppenhomomorphismus $\mathcal{S}_4 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3$, dessen Kern die Doppeltranspositionen zusammen mit dem neutralen Element bilden. Die restlichen beiden Darstellungen sind rechts die dreidimensionale Darstellung auf dem Umgebungsraum des Tetraeders, die von den Permutationen seiner Ecken induziert wird, und links ihr Tensorprodukt mit der Vorzeichendarstellung.

Beispiel 5.1.8. Die Permutationsdarstellung von $\mathcal{S}_n$ auf $\mathbb{C}^n$ zerfällt für $n \geq 2$ in zwei einfache Darstellungen, nämlich die Gerade $\langle (1, 1, \ldots, 1) \rangle$ und ihr orthogonales Komplement unter dem Standard-Skalarprodukt. Daß dieses Komplement einfach ist, erkennt man zum Beispiel, indem man nachrechnet, daß der Endomorphismenring unserer Permutationsdarstellung zweidimensional ist: Genauer besteht er aus allen Matrizen, bei denen alle Einträge auf der Diagonalen übereinstimmen und alle Einträge außerhalb der Diagonale ebenfalls übereinstimmen. Das Youngtableau für den nichttrivialen Summanden hat im Fall $n = 6$ die Gestalt



und hat auch für allgemeines n nur zwei Spalten, von denen die Zweite aus einem einzigen Kästchen besteht. In der Tat kommt in unserem orthogonalen Komplement die Einsdarstellung von $\mathcal{S}_{n-1} \subset \mathcal{S}_n$ vor als die Gerade $\langle(1, 1, \ldots, 1 - n)\rangle$ und die Signumsdarstellung von $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_n$ als die Gerade $\langle(1, -1, 0, \ldots 0)\rangle$.

5.1.9. Ist R ein Ring und $e \in R$ idempotent und M ein R-Modul, so induziert das Auswerten bei e offensichtlich eine Bijektion $\operatorname{Hom}_R(Re, M) \xrightarrow{\sim} eM$. Das mögen Sie auch bereits als Übung [KAG] 1.3.13 ausgeführt haben. Man mag auch direkt bemerken, daß der Annullator von e das Linksideal $R(1 - e)$ ist.

Beweis von 5.1.2. Wir betrachten im Gruppenring $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$ die beiden Idempotenten

$$E_Y = |S|^{-1} \sum_{g \in S} g \quad \text{und} \quad A_Y = |Z|^{-1} \sum_{h \in Z} \operatorname{sgn}(h)\, h$$

Diese Idempotenten sind genau die Projektoren zur Einsdarstellung von S und zur Signumsdarstellung von Z. Die beiden von diesen Idempotenten erzeugten Linksideale des Gruppenrings $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$ notieren wir $M(Y) := (\mathbb{C}\mathcal{S}_Y)E_Y$ und $N(Y) := (\mathbb{C}\mathcal{S}_Y)A_Y$. Der mit Induktion von Darstellungen 6.3.2 vertraute Leser wird sie nebenbei bemerkt leicht identifizieren können mit den induzierten Darstellungen zur Einsdarstellung des Spaltenstabilisators beziehungsweise der Signumsdarstellung des Zeilenstabilisators. In einer Darstellung L von $\mathcal{S}_Y$ kommt nach 5.1.9 die Einsdarstellung des Spaltenstabilisators vor genau dann, wenn gilt $E_Y L \neq 0$ alias $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(M(Y), L) \neq 0$. Ebenso kommt die Signumsdarstellung des Zeilenstabilisators vor genau dann, wenn gilt $A_Y L \neq 0$ alias $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(N(Y), L) \neq 0$ und wegen der Halbeinfachkeit gleichbedeutend $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(L, N(Y)) \neq 0$. Jede einfache Darstellung L von $\mathcal{S}_Y$ mit beiden Eigenschaften ist also das Bild eines Homomorphismus von Darstellungen $M(Y) \to N(Y)$, und Teil 1 folgt leicht, wenn wir zeigen können, daß gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(M(Y), N(Y)) = 1 \tag{$*$}$$

In der Tat ist dann unser L notwendig das Bild eines und jedes von Null verschiedenen derartigen Homomorphismus. Nehmen wir speziell den durch Rechtsmultiplikation mit A_Y gegebenen Homomorphismus und beachten die im folgenden gezeigte Formel $E_Y A_Y \neq 0$, so ergibt sich für diese durch Y bestimmte einfache Darstellung $L \cong L(Y)$ sogar die explizite Formel

$$L(Y) \cong (\mathbb{C}\mathcal{S}_Y)E_Y A_Y$$

In anderen Worten kann $L(Y)$ also beschrieben werden als das vom sogenannten **Young-Symmetrisator** $E_Y A_Y$ im Gruppenring erzeugte Linksideal. Um nun zu zeigen, daß der Raum der Homomorphismen $M(Y) \to N(Y)$ eindimensional ist, schreiben wir diese Behauptung zunächst mithilfe unserer Vorbemerkung 5.1.9 und den Definitionen um zur Behauptung

$$\dim_{\mathbb{C}} E_Y(\mathbb{C}\mathcal{S}_Y)A_Y = 1$$

Nun gilt ja offensichtlich $S \cap Z = 1$, also $E_Y A_Y \neq 0$, und für alle $x \in SZ$ gilt $E_Y x A_Y = \pm E_Y A_Y$. Es reicht also, wenn wir zusätzlich für alle $x \notin SZ$ zeigen $E_Y x A_Y = 0$ oder gleichbedeutend $x^{-1}E_Y x A_Y = 0$. Nun haben wir natürlich

$$|S|x^{-1}E_Y x = \sum_{g \in x^{-1}Sx} g$$

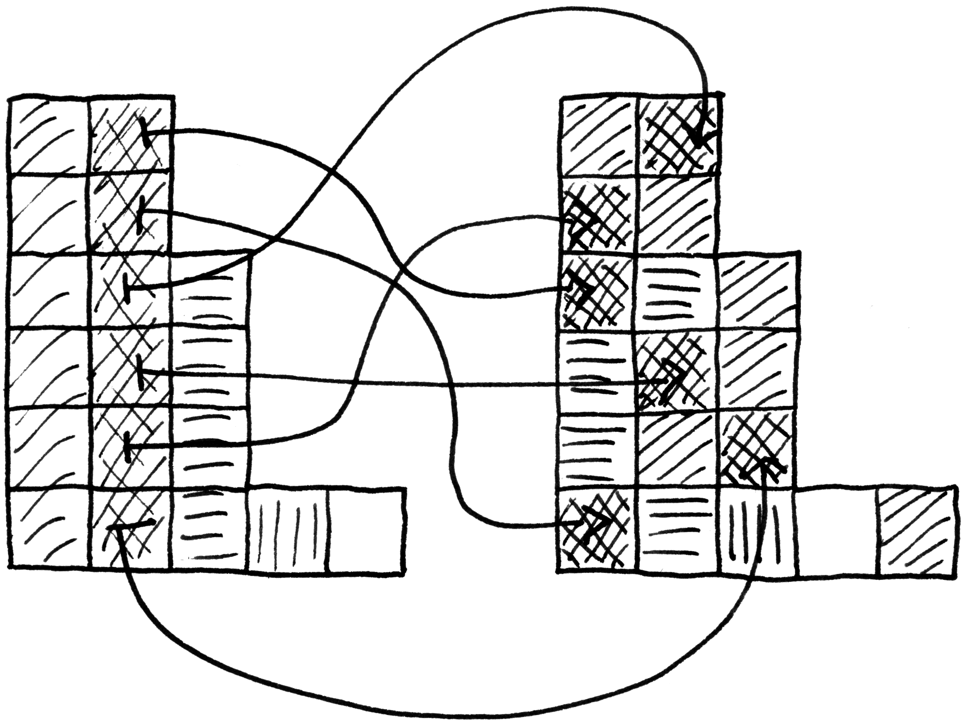
Bezeichnet $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots$ die Partition des Youngdiagramms Y in seine Spalten, so ist $x^{-1}Sx$ gerade die Gruppe aller derjenigen Permutationen von Y, die jedes Stück der Partition

$$Y = x^{-1}Y_1 \cup x^{-1}Y_2 \cup \ldots$$

unserer Kästchenmenge Y stabilisieren. Trifft nun jede transformierte Spalte $x^{-1}Y_i$ jede Zeile unseres Youngdiagramms in höchstens einem Element, so scheint es mir offensichtlich, daß es ein y im Zeilenstabilisator Z geben muß mit $yx^{-1}Y_i = Y_i$ für alle i, woraus sofort folgt $x \in SZ$. Im Fall $x \notin SZ$ gibt es folglich eine transformierte Spalte $x^{-1}Y_i$, die mit einer Zeile von Y mindestens zwei Elemente gemeinsam hat. Die Vertauschung dieser beiden Elemente ist dann eine Transposition $t \in x^{-1}Sx \cap Z$, und deren Existenz zeigt $E_Y x A_Y = 0$, da dann ja gilt

$$(x^{-1}E_Y x) \in \mathbb{C}\mathcal{S}_Y(t+1) \quad \text{und} \quad A_Y \in (t-1)\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$$

Damit wissen wir, daß die Darstellungen $L(Y)$ einfach sind. Da es offensichtlich ebensoviele Young-Diagramme mit n Kästchen gibt wie Partitionen der Zahl n wie nach [AL] 1.5.6 Konjugationsklassen in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$, ist der erste Satz bewiesen, sobald wir zeigen, daß die Darstellungen $L(Y)$ paarweise nicht isomorph sind. Um das zu zeigen, führen wir auf der Menge $\mathcal{Y}_n$ aller Youngdiagramme mit n Kästchen eine Teilordnung ein.



Eine Permutation der Kästchen eines Youngdiagramms, bei der das Bild jeder Spalte höchstens ein Kästchen in jeder Zeile hat, kann durch Nachschalten eines Elements des Zeilenstabilisators in den Spaltenstabilisator geschoben werden. Das Bild deutet solch eine Permutation an, die Wirkung der Permutation auf die Kästchen der zweiten Spalte habe ich durch Pfeile angedeutet, bei den anderen Kästchen rechts ist nur an der Textur zu sehen, aus welcher Spalte sie kommen.

Definition 5.1.10. Ein Youngdiagramm heißt kleinergleich einem anderen in der **Dominanz-Teilordnung** genau dann, wenn es für jedes $s \in \mathbb{N}$ in den ersten s Spalten insgesamt höchstens ebensoviele Kästchen besitzt wie das andere. Wir notieren diese Teilordnung $Y \leq Y'$.

Fortführung des Beweises. Wählen wir irgendeine Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$, identifizieren mit ihrer Hilfe $\mathcal{S}_Y$ mit $\mathcal{S}_n$ und fassen mithilfe dieser Identifikation die Darstellungen $M(Y)$ und $N(Y)$ von $\mathcal{S}_Y$ als Darstellungen von $\mathcal{S}_n$ auf, so erhalten wir nach 1.1.9 bis auf Isomorphismus wohldefinierte Darstellungen von $\mathcal{S}_n$. Für je zwei Diagramme $Y, Y' \in \mathcal{Y}_n$ behaupten wir nun

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_n}(M(Y), N(Y')) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Y \leq Y'$$

Sobald das gezeigt ist, sind wir fertig, denn dann folgt aus $L(Y) \cong L(Y')$ sofort $Y \leq Y' \leq Y$ und damit $Y = Y'$. Seien also Bijektionen $\varphi : Y \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$ und $\varphi' : Y' \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$ beliebig gewählt. Die von φ induzierte Identifikation $\mathcal{S}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$ hat die Gestalt $x \mapsto \varphi x \varphi^{-1}$, und den zugehörigen Isomorphismus von Gruppenringen notieren wir analog $C \mapsto \varphi C \varphi^{-1}$. Mit denselben Argumenten wie zuvor gilt es in diesen Notationen zu zeigen

$$Y \not\leq Y' \quad \Rightarrow \quad (\varphi E_Y \varphi^{-1})(\mathbb{C}\mathcal{S}_n)(\varphi' A_{Y'} \varphi'^{-1}) = 0$$

Es reicht dazu, für jede Bijektion $\psi : Y' \xrightarrow{\sim} Y$ zu zeigen

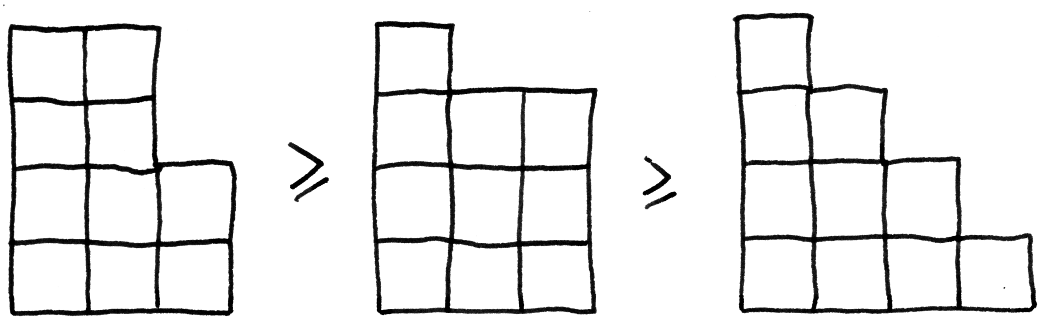
$$Y \not\leq Y' \quad \Rightarrow \quad E_Y \psi A_{Y'} = 0$$

Wie zuvor reicht es dafür weiter zu zeigen, daß für $Y \not\leq Y'$ unter jeder Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} Y'$ aus mindestens einer Spalte von Y mindestens zwei Kästchen in derselben Zeile von Y' landen. In der Yat gibt es dann ja ein s derart, daß Y mehr Kästchen in den ersten s Spalten stehen hat als Y'. Dann können wir diese Kästchen jedoch nicht so mit Kästchen von Y' identifizieren, daß wir in jeder Zeile von Y' höchstens s Kästchen erwischen. Also erwischen wir in mindestens einer Zeile von Y' mindestens $s + 1$ Kästchen, und von denen müssen dann mindestens zwei aus derselben Spalte von Y kommen. □

Beweis von 5.1.5. Gegeben ein Youngdiagramm Y operiert die Gruppe $\mathcal{S}_Y$ aller Permutationen der Kästchen frei und transitiv von rechts auf der Menge $\mathcal{B}_Y := \operatorname{Ens}^\times(Y, \{1, \ldots, n\})$ aller Tableaus der Gestalt Y vermittels der Vorschrift $T^\sigma = T \circ \sigma$ für

$$T : Y \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \ldots, n\}$$

ein Tableau und $\sigma : Y \xrightarrow{\sim} Y$ eine Permutation. Als $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$-Rechtsmodul ist also $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$ isomorph zum freien $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}\mathcal{B}_Y$ über der Menge aller Tableaus der Gestalt Y mit seiner hoffentlich offensichtlichen Rechtsoperation von $\mathbb{C}\mathcal{S}_Y$.



Beispiel zur Dominanzteilordnung. Stellen wir uns ein Youngdiagramm als eine Geröllhalde von Kästchen vor, so sind in unserer Dominanzteilordnung genau diejenigen Partitionen kleiner, die entstehen, wenn in unserer Geröllhalde ein oder mehrere Kästchen weiter nach unten purzeln.

Bezeichne nun $\mathcal{D}_Y \subset \mathcal{B}_Y$ die Menge aller Standardtableaus der Gestalt Y. Ich behaupte, daß die Einschränkung res einer formalen Summe auf die Teilmenge aller Standardtableaus eine Surjektion

$$\operatorname{res} : (\mathbb{C}\mathcal{B}_Y)E_Y A_Y \twoheadrightarrow \mathbb{C}\mathcal{D}_Y$$

induziert. In der Tat, wenden wir auf ein Standardtableau φ der Gestalt Y von rechts alle Elemente von SZ an, als da heißt eine beliebige Vertauschung der Einträge jeder Spalte gefolgt von einer beliebigen Vertauschung der Einträge jeder Zeile, so erhalten wir zwar eventuell außer φ selbst noch weitere Standardtableaus, aber für diese ist offensichtlich die Folge der Zeilensummen lexikographisch größer als bei unserem Ausgangstableau. Gegeben $\varphi \in \mathcal{D}_Y \subset \mathbb{C}\mathcal{B}_Y$ ein Standardtableau gilt für unsere Einschränkung res auf die Teilmenge aller Standardtableaus demnach

$$\operatorname{res}(\varphi E_Y A_Y) \in |S|^{-1}|Z|^{-1}\varphi + \sum_{\varphi<\psi} \mathbb{C}\psi$$

wobei die Notation $\varphi < \psi$ rechts andeuten soll, daß nur über Standardtableaus ψ mit einer lexikographisch größeren Folge von Zeilensummen summiert wird. So ergibt sich die behauptete Surjektivität. Es folgt, daß die Zahl der Standardtableaus eine untere Schranke für die Dimension von $(\mathbb{C}\mathcal{B}_Y)E_Y A_Y$ und damit auch eine untere Schranke für die Dimension der einfachen Darstellung $L(Y)$ ist. Daß die Zahl der Standardtableaus sogar mit dieser Dimension übereinstimmt, folgt dann aus der durch 5.2.1 bewiesenen Formel mit der aus 4.2.9 spezialisierten allgemeinen Erkenntnis

$$\sum_{Y \in \mathcal{Y}_n} (\dim_{\mathbb{C}} L(Y))^2 = |\mathcal{S}_n| \qquad \square$$

Ergänzung 5.1.11. Das Bilden der Umkehrabbildung liefert eine Bijektion zwischen unserer Menge $\mathcal{B}_Y := \operatorname{Ens}^\times(Y, \{1, \ldots, n\})$ und der Menge der Bijektionen in der Gegenrichtung $\operatorname{Ens}^\times(\{1, \ldots, n\}, Y)$. Oft wird in der Literatur letzere Menge als Menge der Tableaus bezeichnet. Diese trägt dann in natürlicher Weise eine Linksoperation von $\mathcal{S}_Y$ und eine Rechtsoperation von $\mathcal{S}_n$.

Ergänzung 5.1.12. Gegeben ein Youngdiagramm Y trägt die Menge $\mathcal{B}_Y$ aller Tableaus der Gestalt Y auch eine Linksoperation der $\mathcal{S}_n$ „durch Nachschalten“, die mit der Rechtsoperation von $\mathcal{S}_Y$ „durch Vorschalten“ kommutiert. Unsere Räume $(\mathbb{C}\mathcal{B}_Y)E_Y A_Y$ für die verschiedenen Young-Diagramme werden mit dieser Operation von $\mathcal{S}_n$ nach dem vorhergehenden genau die einfachen Darstellungen von $\mathcal{S}_n$. Die Argumente von eben zeigen, daß die $\psi E_Y A_Y$ für $\psi \in \mathcal{D}_Y$ Standardtableaus eine Basis dieser einfachen Darstellung bilden. Dasselbe gilt für die um die

Nenner bereinigten sogenannten **Specht-Vektoren**

$$v(\psi) := \psi|Z||S|E_Y A_Y = \psi\left(\sum_{g\in S} g\right)\left(\sum_{h\in Z}\operatorname{sgn}(h)h\right)$$

Sie sind in Worten formale Linearkombinationen von Tableaus, die zu jedem Standardtableau ψ der Gestalt Y gebildet werden, indem man erst seine Varianten mit in jeder Spalte beliebig permutierten Einträgen betrachtet, und dann deren Varianten mit in jeder Zeile beliebig permutierten Einträgen, und alle diese Tableaus aufsummiert, jeweils gewichtet mit dem Signum der letzteren Permutation.

Ergänzung 5.1.13. Seien k ein beliebiger Ring und Y ein Youngdiagramm mit n Kästchen und $\mathcal{B}_Y := \operatorname{Ens}^\times(Y, \{1, \ldots, n\})$ die Menge der Y-Tableaus. Seien weiter $Z, S \subset \operatorname{Ens}^\times(Y)$ der Zeilenstabilisator und der Spaltenstabilisator. Zum freien k-Modul $k\mathcal{B}_Y$ betrachtet man in der modularen Darstellungstheorie meist den Raum der sogenannten „Z-Koinvarianten“, also den Quotienten $(k\mathcal{B}_Y)_Z$ nach dem von allen $a(z-1)$ für $a \in k\mathcal{B}_Y$ und $z \in Z$ erzeugten k-Untermodul. Eine k-Basis dieses Quotienten von $k\mathcal{B}_Y$ bildet die Menge der Bilder der Tableaus. Man nennt diese Bilder auch **Tabloide** und notiert sie als Tableaus ohne senkrechte Striche, um anzudeuten, daß es auf die Reihenfolge der Einträge in den Zeilen nun nicht mehr ankommen soll. Das Tabloid alias die Nebenklasse eines Tableaus T notiert man $[T]$. Die Elemente des Raums der Koinvarianten faßt man als formale Linearkombinationen von Tabloiden auf und nennt sie **Polytabloide**. Dann betrachtet man den Raum der spaltenalternierenden Elemente $(k\mathcal{B}_Y)^{S\text{-sgn}}$ und das Bild der Verknüpfung

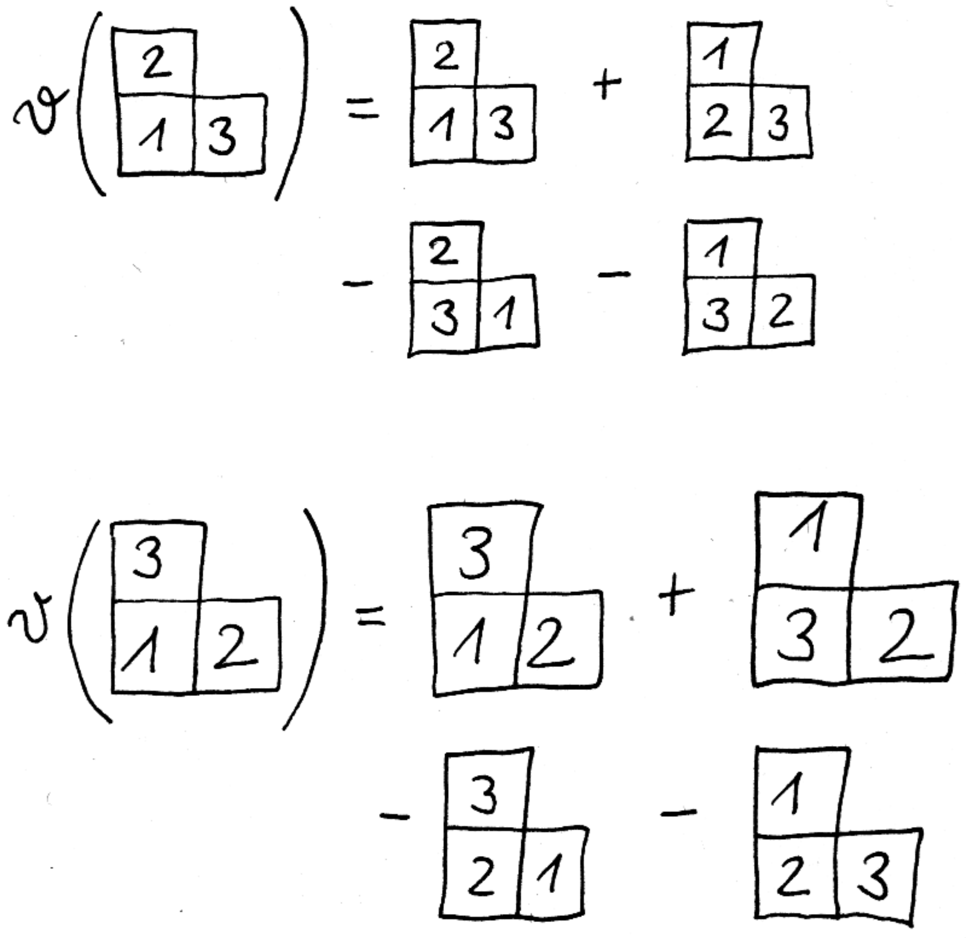
$$(k\mathcal{B}_Y)^{S\text{-sgn}} \hookrightarrow k\mathcal{B}_Y \twoheadrightarrow (k\mathcal{B}_Y)_Z$$

der offensichtlichen Homomorphismen von $\mathcal{S}_n$-Darstellungen. Dieses Bild wird $L(Y)$ notiert und heißt der **Specht-Modul**. Natürlich ist

$$(k\mathcal{B}_Y)^{S\text{-sgn}} = k\mathcal{B}_Y\left(\sum_{h\in S}\operatorname{sgn}(h)h\right)$$

ein zyklischer $k\mathcal{S}_n$-Modul und für jedes Tableau $T \in \mathcal{B}_Y$ ist $T\left(\sum_{h\in S}\operatorname{sgn}(h)h\right)$ ein Erzeuger. Das Bild dieses Erzeugers im Raum $(k\mathcal{B}_Y)_Z$ der Koinvarianten notieren wir $[\![T]\!]$ und nennen es das zu T gehörige Polytabloid. Die Polytabloide $[\![T]\!]$ für $T \in \mathcal{B}_Y$ erzeugen also den Spechtmodul zum Youngdiagramm Y als k-Modul und jedes Polytabloid $[\![T]\!]$ erzeugt den Spechtmodul $L(Y)$ als $k\mathcal{S}_n$-Modul.

Ergänzung 5.1.14. Operiert ein Monoid G auf einer Menge X und ist k ein Kring, so wird der freie k-Modul kX in offensichtlicher Weise eine Darstellung von G.



Die beiden Specht-Vektoren zu den beiden Standardtableaus einer gewissen vorgegebenen Gestalt mit drei Kästchen. Das Mitteln über die Bilder unter dem Spaltenstabilisator $Z \subset \mathcal{S}_Y$ liefert in obigem Bild die Zeilensummen, das Mitteln mit Vorzeichen über den Zeilenstabilisator dann die alternierenden Spaltensummen unter jedem Eintrag.

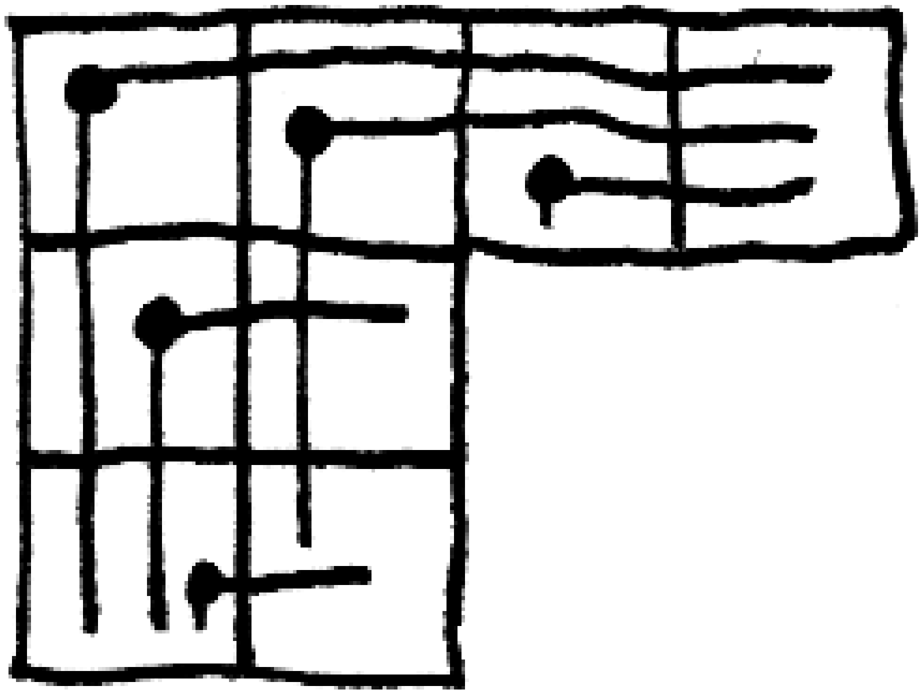


Illustration der Hakenlängenformel. Eingezeichnet sind alle Haken mit mehr als nur einem Kästchen. Die zu diesem Young-Diagramm gehörige einfache Darstellung hat danach die Dimension

$$\frac{8!}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 2 = 112$$

Weiter erhalten wir eine G-invariante symmetrische bilineare Abbildung $kX \times kX \to k$ durch die Vorschrift $(x, y) \mapsto \delta_{xy}$ für $x, y \in X$. Die Basis der Tabloide liefert so eine symmetrische invariante Bilinearform auf $(k\mathcal{B}_Y)_Z$.

Ergänzung 5.1.15. Eine besonders schöne Formel für die Dimension der einfachen Darstellung $L(Y)$ einer symmetrischen Gruppe ist die **Hakenlängenformel**

$$\dim_{\mathbb{C}} L(Y) = \frac{|Y|!}{\prod_{(i,j)\in Y}(\text{Hakenlänge von } (i,j))}$$

Die **Hakenlänge** eines Kästchens $(i, j) \in Y$ ist dabei erklärt als die Zahl aller $(a, b) \in Y$ mit $a = i, b \geq j$ oder $b = j, a \geq i$. Ich gebe hierfür keinen Beweis.

5.1.16. Über die Darstellungen der symmetrischen Gruppen ist noch sehr viel mehr bekannt, siehe zum Beispiel [Sag00, Jam78, JK81, FH91]. Was die Darstellungen über Körpern positiver Charakteristik angeht, ist aber auch noch vieles offen. Selbst die Dimensionen der meisten einfachen Darstellungen sind in diesem Fall noch nicht bekannt.

Vorschau 5.1.17 (**Gelfand-Modell für symmetrische Gruppen**). Sei $I \subset \mathcal{S}_n$ die Menge aller Idinvolutionen in der symmetrischen Gruppe. Auf der Menge I operiert die symmetrische Gruppe durch Konjugation. Es gibt nun ein äquivariantes Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf I derart, daß seine globalen Schnitte isomorph sind zur direkten Summe aller einfachen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$, in Formeln

$$\bigoplus_{Y \in \mathcal{Y}_n} L(Y) \cong \Gamma(I; \mathcal{L})$$

Das Geradenbündel kann hierbei dadurch charakterisiert werden, daß für eine Idinvolution τ die Operation der Standgruppe von τ auf der Faser $\mathcal{L}_\tau$ durch den Charakter geschieht, der durch das Signum der Operation der Elemente der Standgruppe auf der Fixpunktmenge $\{1, \ldots, n\}^\tau$ von τ gegeben wird.

Übungen

Übung 5.1.18. Man zeige, daß das Tensorieren mit der Vorzeichendarstellung dem Übergang zur dualen Partition alias zum an der Hauptdiagonale gespiegelten Youngdiagramm entspricht, in Formeln $L(Y) \otimes \operatorname{sgn} \cong L(\tau Y)$ für τ die Vertauschung der beiden Koordinaten.

Übung 5.1.19. Man zeige in der Notation [KAG] 4.7.13 die beiden Implikationen $[M(Y) : L(Y')] \neq 0 \Rightarrow Y \leq Y'$ und $[N(Y) : L(Y')] \neq 0 \Rightarrow Y \geq Y'$, die beschreiben, welche einfachen Darstellungen als Kompositionsfaktoren von $M(Y)$ und $N(Y)$ auftreten können. Darüberhinaus zeige man

$$[M(Y) : L(Y)] = [N(Y) : L(Y)] = 1$$

5.2 Der Robinson-Schensted-Algorithmus

5.2.1. Wir erhalten eine Bijektion zwischen der Menge aller Permutationen σ von $\{1, \ldots, n\}$ und der Menge aller Paare von Standardtableaus mit jeweils n Kästchen und gleicher Gestalt, d.h. gleichem zugrundeliegendem Young-Diagramm vermittels des sogenannten **Robinson-Schensted-Algorithmus** wie folgt: Zunächst stellen wir unsere Zahlen in der durch σ gegebenen Reihenfolge auf als $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Dann lassen wir sie „ein Young-Haus bauen und bewohnen“ nach den folgenden Regeln: Im i-ten Schritt geht die Zahl $\sigma(i)$ von links nach rechts durch die erste Etage des Young-Hauses, wie es bis dahin bereits konstruiert ist. Ist sie größer als alle Bewohnerinnen der ersten Etage, baut sie am Ende der ersten Etage ein Kästchen an und zieht dort ein. Sonst verdrängt sie die erste Bewohnerin der ersten Etage, die größer ist als sie selber, und diese versucht es in der zweiten Etage. Ist sie größer als alle Bewohnerinnen der zweiten Etage, so baut sie sich am Ende der zweiten Etage ein Kästchen an und zieht dort ein. Sonst verdrängt sie in der zweiten Etage die erste Bewohnerin, die größer ist als sie selber, und diese versucht es in der dritten Etage etc. Der i-te Schritt ist fertig, wenn die Zahlen $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)$ alle wieder in einem Kästchen wohnen. So entsteht, wie man sich unschwer überlegt, ein Standardtableau $L(\sigma)$. Die Reihenfolge, in der die Kästchen angebaut werden, erinnern wir in einem zweiten Standardtableau $R(\sigma)$ derselben Gestalt, bei dem in demjenigen Kästchen die Zahl i steht, das im i-ten Schritt angebaut wurde. Daß wir auf diese Weise in der Tat eine Bijektion zwischen der Menge aller Permutationen und der Menge aller Paare von Standardtableaus gleicher Gestalt erhalten, kann der Leser hoffentlich ohne allzu große Schwierigkeiten selbst einsehen. In jedem Fall denke ich, daß es noch schwieriger wäre, einen in Worten aufgeschriebenen Beweis nachzuvollziehen.

Beispiel 5.2.2. Es sei $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(5)$ die Folge $3, 1, 5, 4, 2$. Wir erhalten der Reihe nach

$$
\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{}\\\hline 1 & 5\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{}\\\hline 1 & 3\\\hline\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 5\\\hline 1 & 4\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4\\\hline 1 & 3\\\hline\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 5 & \multicolumn{1}{c}{}\\\hline 3 & 4\\\hline 1 & 2\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 5 & \multicolumn{1}{c}{}\\\hline 2 & 4\\\hline 1 & 3\\\hline\end{array}
$$

Das Paar von Standardtableaus ganz am Ende der Zeile ist dann dasjenige, das der Robinson-Schensted-Algorithmus unserer Permutation σ zuordnet.

5.3 Berechnung der Charaktere

5.3.1. Aus dem Beweis von Satz 5.1.2 wissen wir insbesondere, daß für je zwei Young-Diagramme $Y, Y' \in \mathcal{Y}_n$ gilt

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_n}(M(Y), N(Y')) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Y \leq Y'$$

Zusätzlich wissen wir aus demselben Beweis $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_Y}(M(Y), N(Y)) = 1$. Es ist nun für das folgende bequemer, mit Partitionen natürlicher Zahlen im Sinne von [AL] 1.5.1 zu arbeiten. Gegeben eine Partition $\lambda \in \mathcal{P}_n$ alias eine absteigende Folge $\lambda(1) \geq \lambda(2) \geq \ldots \geq \lambda(r) > 0 = 0 = 0 \ldots$ natürlicher Zahlen mit Summe n bilden wir in hoffentlich offensichtlicher Weise die Untergruppe $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda(1)} \times \ldots \times S_{\lambda(r)} \subset \mathcal{S}_n$ der symmetrischen Gruppe und schreiben

$$M(\lambda) = (\mathbb{C}\mathcal{S}_n)E_\lambda$$

mit $E_\lambda = |\mathcal{S}_\lambda|^{-1} \sum_{g \in \mathcal{S}_\lambda} g$ für die Darstellung, die wir später auch als die induzierte der Einsdarstellung $M(\lambda) = \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n} \mathbb{C}$ verstehen werden. Wie in [AL] 1.5.4 erklärt liefert das Bilden der Spaltenlängen eine Bijektion $s : \mathcal{Y}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_n$ und für $\lambda = s(Y)$ haben wir per definitionem $M(\lambda) = M(Y)$. Ebenso setzen wir dann $L(\lambda) = L(Y)$ und übertragen die Dominanzteilordnung 5.1.10 vermittels s von Young-Tableaus auf Partitionen. Notieren wir nun die Charaktere der induzierten Darstellung $M(\lambda)$ und der einfachen Darstellung $L(\lambda)$ als

$$\chi_{M(\lambda)} = \psi_\lambda \quad \text{und} \quad \chi_{L(\lambda)} = \chi_\lambda$$

so liefern unsere obigen Formeln

$$\psi_\lambda = \chi_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} a_{\lambda,\mu} \chi_\mu$$

mit natürlichen Zahlen $a_{\lambda,\mu}$.Wir können also die Charaktere χ_λ der einfachen Darstellungen erhalten, indem wir auf die Basis der ψ_λ mit einer Anordnung, in der die ψ_λ zu größeren Indizes zuerst kommen, das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren anwenden.

5.3.2. Wie zu Beginn des Beweises von 5.1.2 liefert das Auswerten auf dem Idempotenten Isomorphismen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{S}_n}((\mathbb{C}\mathcal{S}_n)E_\lambda, (\mathbb{C}\mathcal{S}_n)E_\mu) \xrightarrow{\sim} E_\lambda(\mathbb{C}\mathcal{S}_n)E_\mu$ und für das Skalarprodukt der zugehörigen Charaktere folgt sofort

$$(\psi_\lambda, \psi_\mu) = |\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S} / \mathcal{S}_\mu|$$

Um die Kardinalität dieser Menge von Doppelnebenklassen zu berechnen, beachten wir die Bahnformel $|Gx| \cdot |G_x| = |G|$ und folgern für jede endliche Menge X mit der Operation einer endlichen Gruppe G die Formel

$$|G \backslash X| = \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{x \in X} \frac{|G_x|}{|G|}$$

Ist speziell $X = \mathcal{S}_n$ und $G = \mathcal{S}_\lambda \times \mathcal{S}_\mu$, so spezialisiert unsere Formel zur Identität

$$|\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_\mu| = \frac{1}{|\mathcal{S}_\lambda| \cdot |\mathcal{S}_\mu|} \sum_{x \in \mathcal{S}_n} |x \mathcal{S}_\lambda x^{-1} \cap \mathcal{S}_\mu|$$

Untersuchen wir hier die Schnitte für jede Konjugationsklasse $\mathcal{C}_\nu \subset \mathcal{S}_n$ separat und beachten für den Zentralisator Z_ν eines Elements der Konjugationsklasse $\mathcal{C}_\nu$ die Bahnformel $|\mathcal{C}_\nu| \cdot |Z_\nu| = |\mathcal{S}_n|$, so ergibt sich

$$|\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_\mu| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{|\mathcal{S}_\lambda| \cdot |\mathcal{S}_\mu|} \sum_\nu \frac{|\mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{C}_\nu| \cdot |\mathcal{S}_\mu \cap \mathcal{C}_\nu|}{|\mathcal{C}_\nu|}$$

5.3.3. Für die Gruppe $\mathcal{S}_4$ haben wir zum Beispiel die Partitionen $\lambda = (4), (3,1)$, (2^2), $(2,1^2)$, (1^4) in abkürzender Notation, wo die Hochzahlen Vielfachheiten meinen, so daß etwa $((2,1^2)$ ein Kürzel wäre für die Partition $4 = 2+1+1$. Wir erhalten $|\mathcal{S}_\lambda| = 24, 6, 4, 2, 1$ und $|\mathcal{C}_\lambda| = 6, 8, 3, 6, 1$. Die Kardinalitäten der Schnitte $|\mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{C}_\nu|$ werden gegeben durch den Eintrag in der Spalte unter λ und der Zeile neben ν in der Tafel

	4	$3,1$	2^2	$2,1^2$	1^4
4	6	0	0	0	0
$3,1$	8	2	0	0	0
2^2	3	0	1	0	0
$2,1^2$	6	3	2	1	0
1^4	1	1	1	1	1

Die Matrix der (ψ_λ, ψ_μ) ergibt sich dann zu

	4	$3,1$	2^2	$2\,,1^2$	1^4
4	1	1	1	1	1
$3,1$	1	2	2	3	4
2^2	1	2	3	4	6
$2\,,1^2$	1	3	4	7	12
1^4	1	4	6	12	24

Damit ergibt sich schließlich die Zerlegung unserer induzierten Darstellungen in einfache Darstellungen zu

$$\begin{aligned}
\psi_{(4)} &= \chi_{(4)} \\
\psi_{(3,1)} &= \chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \\
\psi_{(2^2)} &= \chi_{(2^2)} + \chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \\
\psi_{(2,1^2)} &= \chi_{(2,1^2)} + \chi_{(2^2)} + 2\chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \\
\psi_{(1^4)} &= \chi_{(1^4)} + 3\chi_{(2,1^2)} + 2\chi_{(2^2)} + 3\chi_{(3,1)} + \chi_{(4)}
\end{aligned}$$

5.4 Jucys-Murphy-Elemente

Definition 5.4.1. Das j-te **Jucys-Murphy-Element** ξ_j im Gruppenring $\mathbb{Z}\mathcal{S}_n$ der n-ten symmetrischen Gruppe ist die Summe aller Transpositionen von j mit kleineren Elementen, in Formeln

$$\xi_j = \sum_{1 \leq i < j} (i, j)$$

5.4.2 (**Die Jucys-Murphy-Elemente kommutieren paarweise**). Per definitionem ist $\xi_1 = 0$. Offensichtlich kommutiert das j-te Jucys-Murphy-Element mit allen Elementen aus $\mathcal{S}_n$, die sowohl j als auch die Teilmenge $\{1, \ldots, j-1\}$ festhalten. Insbesondere kommutieren die Jucys-Murphy-Elemente untereinander.

Lemma 5.4.3. *Die elementarsymmetrischen Funktionen in den Jucys-Murphy-Elementen ξ_j liegen im Zentrum des Gruppenrings $\mathbb{Z}\mathcal{S}_n$.*

Beispiel 5.4.4. Die Summe $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ ist die Summe aller Transpositionen und folglich zentral.

Beweis. Wir betrachten im Polynomring über dem Gruppenring $(\mathbb{Z}\mathcal{S}_n)[X]$ das Produkt

$$(X + \xi_1)(X + \xi_2) \ldots (X + \xi_n)$$

Es reicht zu zeigen, daß es mit allen Transpositionen $s_j := (j, j+1)$ benachbarter Elemente kommutiert. Dazu reicht es zu zeigen, daß s_j mit

$$(X + \xi_j)(X + \xi_{j+1})$$

kommutiert, also mit $\xi_j + \xi_{j+1}$ und $\xi_j \xi_{j+1}$. Wir finden ohne große Mühe

$$\begin{array}{rcl} s_j \xi_j s_j & = & \xi_{j+1} - s_j \\ s_j \xi_{j+1} s_j & = & \xi_j + s_j \end{array}$$

und müssen also nur noch prüfen, daß gilt $\xi_j \xi_{j+1} = (\xi_{j+1} - s_j)(\xi_j + s_j)$ alias $s_j \xi_j + 1 = \xi_{j+1} s_j$. Hier aber rechnen wir ohne Schwierigkeiten aus, daß beide Seiten beschrieben werden können als eine Summe der Identität mit Dreizykeln, genauer durch den Ausdruck

$$1 + \sum_{1 \leq i < j} (i, j+1, j) \qquad \square$$

6 Verschiedene weiterführende Resultate

6.1 Reeller, komplexer und quaternionaler Typ

6.1.1. Wir erinnern an die Körper beziehungsweise Schiefkörper $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ der reellen Zahlen, komplexen Zahlen und Quaternionen $\mathbb{H}$ aus [LA1] 5.6.4 und bezeichnen Darstellungen einer Gruppe G über den jeweiligen Ringen als reelle, komplexe und quaternionale Darstellungen. Die Restriktion der Skalare macht in offensichtlicher Weise aus quaternionalen Darstellungen komplexe Darstellungen und aus komplexen Darstellungen reelle Darstellungen. Umgekehrt macht die Erweiterung der Skalare aus reellen Darstellungen komplexe Darstellungen und aus komplexen Darstellungen quaternionale Darstellungen. In Formeln meint man etwa für V eine komplexe Darstellung mit der durch Erweiterung der Skalare gegebene quaternionale Darstellung die quaternionale Darstellung $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V$.

Definition 6.1.2. 1. Eine reelle Darstellung heißt:

   (a) von **quaternionalem Typ**, wenn sie durch Restriktion der Skalare aus einer quaternionalen Darstellung entsteht;

   (b) von **komplexem Typ**, wenn sie durch Restriktion der Skalare zwar nicht aus einer quaternionalen, aber doch immerhin aus einer komplexen Darstellung entsteht;

   (c) von **reellem Typ** sonst.

2. Eine komplexe Darstellung heißt:

   (a) von **reellem Typ**, wenn sie isomorph ist zu einer Darstellung, die durch Erweiterung der Skalare aus einer reellen Darstellung entsteht;

   (b) von **quaternionalem Typ**, wenn sie durch Restriktion der Skalare aus einer quaternionalen Darstellung entsteht;

   (c) von **komplexem Typ** sonst.

3. Eine quaternionale Darstellung heißt:

   (a) von **reellem Typ**, wenn sie isomorph ist zu einer Darstellung, die durch Erweiterung der Skalare aus einer reellen Darstellung entsteht;

   (b) von **komplexem Typ**, wenn sie zwar nicht von reellem Typ ist, aber isomorph ist zu einer Darstellung, die durch Erweiterung der Skalare aus einer komplexen Darstellung entsteht;

   (c) von **quaternionalem Typ** sonst.

6.1.3 (**Typen reeller Darstellungen und ihre Endomorphismen**). Gegeben eine einfache reelle Darstellung höchstens abzählbarer Dimension ist ihr Endomorphismenring nach [AL] 3.12.3 als $\mathbb{R}$-Ringalgebra isomorph zu genau einem der Ringe $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Offensichtlich können wir den Typ unserer Darstellung in diesem Fall an ihrem Endomorphismenring ablesen.

6.1.4 (**Typen quaternionaler Darstellungen und ihre Endomorphismen**). Gegeben eine einfache quaternionale Darstellung höchstens abzählbarer Dimension ist ihr Endomorphismenring nach [AL] 3.12.2 als $\mathbb{R}$-Ringalgebra isomorph zu genau einem der Ringe $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Wieder können wir den Typ unserer Darstellung an ihrem Endomorphismenring ablesen, aber diesmal ist die Beziehung umgekehrt, der Endomorphismenring $\mathbb{R}$ zeigt quaternionalen Typ an, der Endomorphismenring $\mathbb{C}$ komplexen Typ und der Endomorphismenring $\mathbb{H}$ reellen Typ. In der Tat liefert die Rechtsmultiplikation auf dem ersten Tensorfaktor für jede reelle Darstellung V von G einen $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{H}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{H},G}(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} V)$, und ist umgekehrt eine quaternionale Darstellung W von G mit einem $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{H}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{H},G}(W)$ gegeben, so können wir W als Modul über $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\mathrm{opp}}$ mit G-Operation auffassen, nach 6.1.10 also als Modul über $\mathrm{End}_{-\mathbb{R}} \mathbb{H}$ mit G-Operation und nach [KAG] 2.3.17 entsteht W dann durch Erweiterung der Skalare $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}}$ aus einer reellen Darstellung von G. Ähnlich liefert die Rechtsmultiplikation auf dem ersten Tensorfaktor für jede komplexe Darstellung V von G einen $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{H}}^{G}(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V)$. Ist umgekehrt eine quaternionale Darstellung W von G mit einem $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{H}}^{G}(W)$ gegeben, so können wir W als Modul über $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{\mathrm{opp}}$ mit G-Operation auffassen, nach Übung 6.1.10 also als Modul über $\mathrm{End}_{-\mathbb{C}} \mathbb{H}$ mit G-Operation und nach [KAG] 2.3.17 entsteht W dann durch Erweiterung der Skalare $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}}$ aus einer komplexen Darstellung von G.

6.1.5. Auch einfache komplexe Darstellungen höchstens abzählbarer Dimension haben einen wohlbestimmten Typ, können also nicht gleichzeitig durch Skalarerweiterung aus einer reellen Darstellung und durch Restriktion aus einer quaternionalen Darstellung hervorgehen. Um das zu sehen, holen wir etwas weiter aus, um diese Behauptung dann schließlich in 6.1.8 sogar etwas allgemeiner zu zeigen für beliebige komplexe Darstellungen mit Endomorphismenring $\mathbb{C}$.

6.1.6. Zu jedem komplexen Vektorraum V bilden wir wie in [LA2] 1.12.33 den komplex konjugierten Vektorraum $\overline{V}$, indem wir dieselbe unterliegende additive Gruppe nehmen, die Operation von $a \in \mathbb{C}$ auf $v \in V$ jedoch ändern zu einer Operation $a \cdot v$, die mit der ursprünglichen Operation av verknüpft ist durch die Formel $a \cdot v = \bar{a}v$. Es ist in diesem Zusammenhang praktisch, für jedes Element $v \in V$ dasselbe Element in seiner Eigenschaft als Element des komplex konjugierten Vektorraums $\bar{v} \in \overline{V}$ zu notieren, so daß wir unseren Punkt für die neue

Operation der Skalare gleich wieder weglassen können und unsere zweite Formel besonders suggestiv in der Form $\bar{a}\bar{v} = \overline{av}$ geschrieben werden kann. Ist V eine komplexe Darstellung einer Gruppe G, so ist $\overline{V}$ mit derselben Operation von G auch eine komplexe Darstellung, die **komplex konjugierte Darstellung**.

Proposition 6.1.7 (Typ komplexer Darstellung und Endomorphismen). *Sei V eine komplexe Darstellung einer Gruppe G.*

1. *Genau dann ist V die Komplexifizierung einer reellen Darstellung von G, wenn es einen Isomorphismus von Darstellungen $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ gibt mit $J^2 = \mathrm{id}_V$;*

2. *Genau dann ist V die Restriktion einer quaternionalen Darstellung von G, wenn es einen Isomorphismus von Darstellungen $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ gibt mit $J^2 = -\mathrm{id}_V$.*

Beweis. Im ersten Fall ist V isomorph zur Komplexifizierung der reellen Unterdarstellung V^J der J-Invarianten, vergleiche auch [ML] 2.2.13. Im zweiten Fall können wir V zu einem $\mathbb{H}$-Rechtsmodul machen, indem wir als Rechtsmultiplikation mit $\mathrm{j} \in \mathbb{H}$ unser J nehmen. Der Rest des Beweises sei dem Leser überlassen. □

Korollar 6.1.8 (Typen einfacher komplexer Darstellungen). *Sei V eine komplexe Darstellung einer Gruppe G, deren einzige Endomorphismen die Skalare sind, in Formeln $\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}^{G} V = \mathbb{C}$. So sind wir in genau einem der folgenden drei Fälle:*

1. *Die Darstellung V ist von reellem Typ, als da heißt, sie entsteht aus einer reellen Darstellung W durch Komplexifizierung;*

2. *Die Darstellung V ist von quaternionalem Typ, als da heißt, sie entsteht aus einer quaternionalen Darstellung V über $\mathbb{H}$ durch Restriktion der Skalare;*

3. *Die Darstellung V ist nicht isomorph zu ihrer komplex konjugierten Darstellung $\overline{V}$.*

6.1.9. Per definitionem heißt eine komplexe Darstellung von komplexem Typ, wenn sie weder von reellem noch von quaternionalem Typ ist. Das Korollar impliziert, daß diese Eigenschaft für komplexe Darstellungen mit Endomorphismenring $\mathbb{C}$ gleichbedeutend ist zur Eigenschaft, nicht isomorph zu sein zu ihrer konjugierten Darstellung.

Beweis. Sind wir in einem der ersten beiden Fälle, so sind wir nach 6.1.7 nicht im dritten Fall. Sind wir umgekehrt nicht im dritten Fall, so gibt es einen Isomorphismus $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$. Per definitionem gilt

$$Jav = a \cdot Jv = \bar{a}Jv \quad \forall a \in \mathbb{C}, v \in V$$

Unser J liefert auch einen Isomorphismus $\bar{J} : \overline{V} \xrightarrow{\sim} V$, für den wir der Klarheit halber manchmal die alternative Bezeichnung $\bar{J}$ verwenden, obwohl es sich rein mengentheoretisch um dieselbe Abbildung handelt. Nach Annahme gilt auch $\bar{J}J = a\,\mathrm{id}_V$ für geeignetes $a \in \mathbb{C}^\times$, und da $\bar{J}J = J^2$ kommutiert mit J, haben wir nach der vorhergehenden Rechnung hier sogar $a \in \mathbb{R}^\times$. Aus unseren Voraussetzungen folgt nun auch $\dim \mathrm{Hom}^G(V, \overline{V}) = 1$. Ändern wir J ab um einen Skalar $z \in \mathbb{C}^\times$, so ändert sich $\bar{J}J$ um den Skalar $|z|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Also gilt für alle $J : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ entweder $J^2 = a\,\mathrm{id}_V$ mit $a > 0$ oder $J^2 = a\,\mathrm{id}_V$ mit $a < 0$. Im ersten Fall finden wir leicht ein J mit $J^2 = \mathrm{id}_V$ und nach 6.1.7 ist unsere Darstellung die Komplexifizierung einer reellen Darstellung. Im zweiten Fall finden wir ebensoleicht ein J mit $J^2 = -\mathrm{id}_V$ und nach 6.1.7 ist unsere Darstellung die Restriktion einer quaternionalen Darstellung. □

Übungen

Übung 6.1.10. Die Abbildung $q \otimes w \mapsto (u \mapsto quw)$ induziert einen Ringisomorphismus $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$. Dieselbe Abbildung induziert einen Ringisomorphismus $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{-\mathbb{C}}(\mathbb{H})$.

Übung 6.1.11. Gegeben eine endlichdimensionale komplexe Darstellung V einer endlichen Gruppe G ist die komplex konjugierte Darstellung stets isomorph zur kontragredienten Darstellung, in Formeln $\overline{V} \cong V^*$. Hinweis: 4.1.4.

Übung 6.1.12. Gegeben eine Gruppe G bezeichne $\mathrm{irra}_{\mathbb{K}}\, G$ die Menge der Isomorphieklassen einfacher Darsellungen von G über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ von höchstens abzählbarer Dimension und

$$\mathrm{irra}_{\mathbb{K}}\, G = \mathrm{irra}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{K}}\, G \;\sqcup\; \mathrm{irra}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{K}}\, G \;\sqcup\; \mathrm{irra}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{K}}\, G$$

die Zerlegung nach reellem, komplexem und quaternionalem Typ. So liefern die offensichtlichen durch Restriktion beziehungsweise Erweiterung der Skalare gegebenen Abbildungen Bijektionen

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{irra}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}}\, G & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{irra}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}\, G & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{irra}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}\, G \\
\mathrm{irra}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{H}}\, G & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{irra}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}}\, G & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{irra}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}}\, G \\
\mathrm{irra}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{H}}\, G & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{irra}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}\, G/_{(V \sim \overline{V})} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{irra}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\, G
\end{array}$$

In der Mitte der untersten Zeile ist hier der Quotient nach der Äquivalenzrelation gemeint, unter der eine Darstellung und ihre komplex konjugierte Darstellung identifiziert werden. Dabei bestehen im übrigen nach 6.1.8 alle Äquivalenzklassen aus genau zwei Elementen. Hinweis: Um zu zeigen, daß einfache Darstellungen jeweils einfach bleiben, beachte man, daß Erweiterung der Skalare gefolgt von Restriktion der Skalare jede reelle Darstellung V zu $V \oplus V$ macht und jede komplexe Darstellung V zu $V \oplus \overline{V}$. Für die Wohldefiniertheit der Abbildung unten links muß der Leser zunächst $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{V}$ zeigen. Die Surjektivität aller Abbildungen folgt aus den Definitionen. Für die Injektivität etwa der ersten Abbildung oben links beachte man $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V \cong V \oplus V$ für jede quaternionale Darstellung V. Die Injektivität der anderen Pfeile zeigt man ähnlich.

6.2 Invariante Bilinearformen auf Darstellungen

Proposition 6.2.1. *Seien G eine Gruppe und V eine endlichdimensionale einfache Darstellung von G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit* $\operatorname{char} k \neq 2$. *So sind wir in genau einem der folgenden drei Fälle:*

1. *Es gibt auf V eine von Null verschiedene symmetrische G-invariante Bilinearform. Diese ist dann nichtausgeartet und bis auf einen Skalar eindeutig bestimmt;*

2. *Es gibt auf V eine von Null verschiedene symplektische G-invariante Bilinearform. Diese ist dann nichtausgeartet und bis auf einen Skalar eindeutig bestimmt;*

3. *Es gibt auf V keine von Null verschiedene G-invariante Bilinearform.*

Beweis. Nach dem Schur'schen Lemma haben wir $\dim \operatorname{Hom}_k^G(V, V^*) \leq 1$ und jeder von Null verschiedene Homomorphismus ist ein Isomorphismus. Da unsere Identifikation $\operatorname{Hom}(V, V^*) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Bil}(V)$ aus 6.2.13 verträglich ist mit der Operation von G, folgt auch für den Raum der invarianten Bilinearformen

$$\dim_k \operatorname{Bil}(V)^G \leq 1$$

und jede von Null verschiedene invariante Bilinearform ist nichtausgeartet. Ist unser Raum von Bilinearformen eindimensional, so operiert schließlich unsere durch das Vertauschen der Argumente definierte Selbstinverse aus 6.2.14 darauf entweder als die Identität oder als die Multiplikation mit (-1). □

6.2.2. Im allgemeinen definiert man $\mathrm{S}^2 V$ als den Quotienten von $V \otimes V$ nach allen $v \otimes w - w \otimes v$ und $\bigwedge^2 V$ als den Quotienten von $V \otimes V$ nach allen $v \otimes v$. Ist unsere

Charakteristik nicht Zwei, so geht der Unterraum der Invarianten unter der Vertauschung der Faktoren unter der Projektion isomorph nach S^2V der Unterraum der Schiefinvarianten isomorph nach $\bigwedge^2 V$, aber in Charakteristik zwei ist beides nicht mehr richtig. Für endlichdimensionales V haben wir stets $\mathrm{Bil}(V) = V^* \otimes V^*$ in kanonischer Weise.

Lemma 6.2.3. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $g : V \to V$ eine lineare Abbildung, so haben wir*

$$\mathrm{tr}(g^2|V) = \mathrm{tr}(g|\mathrm{S}^2V) - \mathrm{tr}(g|\textstyle\bigwedge^2 V)$$

Beweis. Ist g diagonalisierbar und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so ist $(v_i v_j)_{i \leq j}$ eine Basis aus Eigenvektoren in S^2V und $(v_i \wedge v_j)_{i<j}$ eine Basis von Eigenvektoren von $\bigwedge^2 V$ und unsere Behauptung reduziert sich auf die offensichtliche Identität

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i \leq j} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

Im allgemeinen ist g jedenfalls trigonalisierbar über einer geeigneten Erweiterung des Grundkörpers, und dann greift dasselbe Argument. □

Proposition 6.2.4. *Gegeben eine einfache Darstellung V einer endlichen Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik gilt*

$$|G|^{-1} \sum \chi_V(g^2) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } V \textit{ eine symmetrische Form besitzt;} \\ 0 & \textit{falls } V \textit{ keine Form besitzt;} \\ -1 & \textit{falls } V \textit{ eine symplektische Form besitzt.} \end{cases}$$

Mit der Abkürzung „Form“ sind dabei jeweils von Null verschiedene G-invariante Bilinearformen gemeint, die dann, wie bereits gezeigt, notwendig nichtausgeartet sind.

Beweis. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik zerfällt der Raum der Bilinearformen $\mathrm{Bil}(V)$ in die Teilräume

$$\mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Sym}(V) \oplus \mathrm{Alt}(V)$$

der symmetrischen beziehungsweise alternierenden Bilinearformen. Ist V eine Darstellung einer Gruppe G, so notieren wir die entsprechende Darstellung

$$B = S \oplus A$$

Die entsprechenden kanonischen Identifikationen definieren Isomorphismen von Darstellungen $\mathrm{S}^2V^* \xrightarrow{\sim} S$ und $\bigwedge^2 V^* \xrightarrow{\sim} A$ und mit Lemma 6.2.3 erhalten wir

$$\chi_V(g^2) = \chi_S(g^{-1}) - \chi_A(g^{-1})$$

Nun gilt ja $(\chi_S, \chi_{\mathrm{triv}}) = 1$ beziehungsweise $(\chi_A, \chi_{\mathrm{triv}}) = 1$ in Bezug auf unsere symmetrische Bilinearform aus **??** genau dann, wenn es auf V bis auf Skalar genau eine nichtausgeartete symmetrische beziehungsweise symplektische Form gibt. Die Proposition folgt. □

Definition 6.2.5. Eine **quaternionale Sesquilinearform** auf einem quaternionalen Vektorraum alias $\mathbb{H}$-Rechtsmodul V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{H}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ derart, daß für alle $v, w, v', w' \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{H}$ gilt:

1. $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle,\ \langle v\lambda, w\rangle = \bar{\lambda}\langle v, w\rangle$;
2. $\langle v, w + w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle,\ \langle v, w\mu\rangle = \langle v, w\rangle\mu$.

Sie heißt **hermitesch**, wenn zusätzlich gilt

3. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$,

und ein **Skalarprodukt** oder genauer ein **quaternionales Skalarprodukt**, wenn außerdem noch gilt

4. $\langle v, v\rangle \leq 0 \Rightarrow v = 0$.

Beispiel 6.2.6. Auf dem $\mathbb{H}^n$ erhalten wir ein quaternionales Skalarprodukt durch die Vorschrift $\langle v, w\rangle = \bar{v}_1 w_1 + \ldots + \bar{v}_n w_n$.

6.2.7 (**Existenz invarianter quaternionaler Skalarprodukte**). Auf jeder endlichdimensionalen quaternionalen Darstellung einer endlichen Gruppe existiert ein invariantes quaternionales Skalarprodukt. Man zeigt das wie im reellen oder komplexen Fall durch das Mitteln eines beliebigen Skalarprodukts.

6.2.8. Jedes $q \in \mathbb{H}$ läßt sich eindeutig schreiben als $q = z + \mathrm{j}w$ mit $z, w \in \mathbb{C}$. Ich nenne dann w den j-**Teil** von q und schreibe $w = \mathrm{jot}(q)$. Man prüft leicht $\mathrm{jot}(zq) = \bar{z}\,\mathrm{jot}(q)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{jot}(\bar{q}) = -\mathrm{jot}(q)$. Man rechnet mühelos nach, daß gegeben ein Skalarprodukt auf einem quaternionalen Vektorraum sein j-Teil $(v, w) \mapsto \mathrm{jot}\langle v, w\rangle$ komplex-bilinear und symplektisch ist.

Satz 6.2.9 (**Formen und Typen einfacher komplexer Darstellungen**). *Seien G eine endliche Gruppe und V eine einfache komplexe Darstellung von G.*

1. *Genau dann ist V von reellem Typ, wenn es auf V eine nichtausgeartete symmetrische G-invariante Bilinearform gibt;*

2. *Genau dann ist V quaternionalem Typ, wenn es auf V eine nichtausgeartete symplektische G-invariante Bilinearform gibt;*

3. *Genau dann ist V von komplexem Typ, wenn V nicht isomorph ist zu seiner eigenen kontragredienten Darstellung, $V \not\cong V^*$.*

6.2.10. Ich zeige zu Ende dieses Abschnitts als 6.2.12 auch noch eine Variante dieser Proposition im Fall nicht notwendig einfacher Darstellungen. Dann schließen sich die Fälle jedoch nicht mehr gegenseitig aus.

Beweis. 1. Ist unsere Darstellung die Komplexifizierung einer Darstellung über $\mathbb{R}$, so erhalten wir durch Komplexifizieren eines invarianten Skalarprodukts auf besagter Darstellung über $\mathbb{R}$ eine invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf unserer komplexen Darstellung. Ist umgekehrt eine invariante symmetrische Bilinearform $(v, w) \mapsto s(v, w)$ gegeben, so wählen wir zusätzlich ein invariantes Skalarprodukt $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ und betrachten die Komposition J der von unserer Bilinearform und unserem Skalarprodukt induzierten Isomorphismen

$$V \stackrel{\sim}{\to} V^* \stackrel{\sim}{\to} \overline{V}$$

Per definitionem gilt $(v, w) = \langle v, Jw\rangle \; \forall v, w \in V$ und folglich

$$\langle v, J^2 w\rangle = (v, Jw) = (Jw, v) = \langle Jw, Jv\rangle$$

und wir erkennen, daß J^2 selbstadjungiert ist und nur positive Eigenwerte hat. Aus dem Schur'schen Lemma folgt $J^2 = a \,\mathrm{id}_V$ mit $a > 0$. Mit 6.1.7 folgt dann leicht, daß unsere Darstellung die Komplexifizierung einer Darstellung über $\mathbb{R}$ ist.

2. Ist unsere Darstellung die Restriktion einer Darstellung über $\mathbb{H}$, so ist der j-Teil im Sinne von 6.2.8 eines invarianten quaternionalen Skalarprodukts im Sinne von 6.2.5, das es nach 6.2.7 stets gibt, eine invariante nichtausgeartete symplektische Bilinearform auf unserer komplexen Darstellung. Ist umgekehrt eine invariante symplektische Bilinearform gegeben, so liefert unsere Konstruktion wieder ein komplex-schieflineares J, für das J^2 selbstadjungiert ist und diesmal nur negative Eigenwerte hat. Aus dem Schur'schen Lemma folgt dann $J^2 = a \,\mathrm{id}_V$ mit $a < 0$ und aus 6.1.7 folgt so, daß unsere Darstellung die Restriktion einer quaternionalen Darstellung ist.

3. Das ist klar nach 6.1.11. □

Korollar 6.2.11. *Gegeben eine einfache komplexe Darstellung V einer endlichen Gruppe G gilt*

$$|G|^{-1} \sum \chi_V(g^2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } V \text{ von reellem Typ ist;} \\ 0 & \text{falls } V \text{ von komplexem Typ ist;} \\ -1 & \text{falls } V \text{ von quaternionalem Typ ist.} \end{cases}$$

Beweis. Das folgt sofort, wenn man 6.2.4 mit 6.2.1 kombiniert. □

Proposition 6.2.12 (Formen und Typen komplexer Darstellungen). *Seien G eine endliche Gruppe und V eine endlichdimensionale komplexe Darstellung von G. So gilt:*

1. *Genau dann ist V isomorph zur Komplexifizierung einer reellen Darstellung von G, wenn es auf V eine invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform gibt;*

2. *Genau dann ist V isomorph zur Restriktion einer quaternionalen Darstellung von G, wenn es auf V eine invariante nichtausgeartete symplektische Bilinearform gibt.*

Beweis. Die Hinrichtung geht genauso wie im Beweis von 6.2.1. Für die Rückrichtung wählen wir wie im Beweis von 6.2.1 auf unserer Darstellung ein invariantes Skalarprodukt und finden wieder einen schieflinearen Automorphismus J unserer Darstellung derart, daß J^2 selbstadjungiert ist und nur positive beziehungsweise negative Eigenwerte hat. Ändern wir dann J auf den Eigenräumen von J^2 durch einen geeigneten Skalar ab, so können wir $J^2 = \mathrm{id}$ beziehungsweise $J^2 = -\mathrm{id}$ erreichen. □

Übungen

Übung 6.2.13. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(V, V^*) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Bil}(V)$$

zwischen dem Raum der Homomorphismen von V in seinen Dualraum und dem Raum der Bilinearformen auf V, indem wir jedem Homomorphismus $\varphi : V \to V^*$ die Bilinearform $\hat{\varphi}$ zuordnen, die gegeben wird durch $\hat{\varphi}(v, w) = (\varphi(v))(w)$. Wir kennen diese Bijektion bereits aus [AN2] 8.3.13, wo wir ihre Inverse $g \mapsto \mathrm{can}_g$ notiert hatten.

Übung 6.2.14. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k haben wir auf dem Raum $\mathrm{Bil}(V)$ der Bilinearformen eine natürliche selbstinverse Abbildung, das „Vertauschen der Argumente". Ihr Eigenraum zum Eigenwert 1 besteht genau aus allen symmetrischen Bilinearformen, ihr Eigenraum zum Eigenwert (-1) aus allen symplektischen alias alternierenden Bilinearformen, und Fall $\mathrm{char}\, k \neq 2$ ist $\mathrm{Bil}(V)$ die direkte Summe dieser Eigenräume.

Übung 6.2.15 (**Eindeutigkeit invarianter Sesquilinearformen**). Je zwei invariante Sesquilinearformen auf einer irreduziblen endlichdimensionalen komplexen

Darstellung eines Monoids unterscheiden sich höchstens um einen Skalar. Hinweis: Man beachte für einen komplexen Vektorraum mit der Notation $\mathrm{Ses}(V)$ für die Menge der Sesquilinearformen $s : V \times V \to \mathbb{C}$ die Identifikation

$$\mathrm{Ses}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\overline{V}, V^*)$$

mit $s \mapsto f_s$ und f_s gegeben durch $f_s(\bar{v}) : w \mapsto s(v, w)$ mit $\overline{V}$ dem komplex konjugierten Vektorraum nach [LA2] 1.12.33.

Übung 6.2.16 (**Eindeutigkeit invarianter Skalarprodukte**). Gegeben ein invariantes Skalarprodukt auf einer irreduziblen endlichdimensionalen reellen Darstellung eines Monoids ist jede weitere invariante symmetrische Bilinearform ein Vielfaches. Hinweis: Hauptachsentransformation [LA2] **??**.

Übung 6.2.17 (**Eindeutigkeit quaternionaler invarianter Skalarprodukte**). Gegeben ein invariantes quaternionales Skalarprodukt auf einer irreduziblen endlichdimensionalen quaternionalen Darstellung eines Monoids G ist jede weitere invariante hermitesche quaternionale Sesquilinearform ein reelles Vielfaches. Hinweis: Unsere Formen werden durch ihren Realteil festgelegt und der ist ein invariantes Skalarprodukt beziehungsweise eine invariante symmetrische Bilinearform einer einfachen reellen Darstellung des Monoids $G \times \{\pm i, \pm j, \pm k, \pm 1\}$.

6.3 Induktion und Koinduktion für Monoide

6.3.1. Ich erinnere an das Konzept adjungierter Funktoren, das in [TF] 4.3 diskutiert wird.

Satz 6.3.2 (**Adjungierte von Restriktionen**). *Sei $\varphi : H \to G$ ein Monoidhomomorphismus. Das Restringieren von Darstellungen alias der Funktor $\mathrm{res}_G^H : G\text{-Mod} \to H\text{-Mod}$ besitzt einen Rechtsadjungierten ind_H^G und einen Linksadjungierten prod_H^G.*

6.3.3. Ist $\varphi : H \hookrightarrow G$ die Einbettung eines Untermonoids, so nennt man ind_H^G meist die **Induktion** und prod_H^G manchmal die **Koinduktion**. Im Fall $G = 1$ benutzt man die Bezeichnungen $\mathrm{ind}_H^1 M = M^H$ sowie $\mathrm{prod}_H^1 M = M_H$ und nennt diese abelschen Gruppen die **H-Invarianten** und die **H-Koinvarianten** von M. Explizit haben wir in diesem Fall $M^H = \{m \in M \mid hm = m\ \forall h \in H\}$ und $M_H = M/\langle hm - m \mid m \in M, h \in H\rangle$. Ist allgemeiner φ eine Surjektion $\varphi : H \twoheadrightarrow G$ und K ihr Kern, so sind für $M \in H\text{-Mod}$ die Räume M^K und M_K der Invarianten und Koinvarianten in natürlicher Weise Darstellungen von G und wir erhalten natürliche Isomorphismen $\mathrm{prod}_H^G M \xrightarrow{\sim} M_K$ und $\mathrm{ind}_H^G M \xrightarrow{\sim} M^K$.

6.3.4. Gegeben Darstellungen $M \in H\text{-Mod}$ und $N \in G\text{-Mod}$ bezeichnet man als **Frobenius-Reziprozität** die kanonischen Isomorphismen

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}^H(\operatorname{res}_G^H N, M) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}^G(N, \operatorname{ind}_G^H M) \\ \operatorname{Hom}^H(M, \operatorname{res}_G^H N) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}^G(\operatorname{prod}_H^G M, N) \end{aligned}$$

Aus der Transitivität der Restriktionen folgt auch in diesem Kontext sofort die Transitivität von Induktion und Koinduktion.

Beweis. Wir geben verschiedene Beweise, um diese zentralen Konstruktionen unter verschiedenen Blickwinkeln zu beleuchten.

1. Für jeden Ringhomomorphismus $A \to B$ hat die Restriktion $B\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$ den Rechtsadjungierten $M \mapsto \operatorname{Hom}_A(B, M)$ und den Linksadjungierten $M \mapsto B \otimes_A M$, siehe [KAG] 2.8.5 und [KAG] 2.8.7. Identifizieren wir $H\text{-Mod} = \mathbb{Z}H\text{-Mod}$ und $G\text{-Mod} = \mathbb{Z}G\text{-Mod}$ und spezialisieren zum von φ induzierten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}H \to \mathbb{Z}G$, so erhalten wir eine erste Beschreibung unserer adjungierten Funktoren als

$$\operatorname{ind}_H^G M = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M) \quad \text{und} \quad \operatorname{prod}_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$$

2. Alternativ können wir die induzierte Darstellung konstruieren als

$$\operatorname{ind}_H^G M = \{f : G \to M \mid f(hx) = hf(x) \quad \forall h \in H, x \in G\}$$

mit der G-Operation gegeben durch $(gf)(x) = f(xg)$ für alle $x, g \in G$. Die Identifikation mit $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$ geschieht durch die Einschränkung eines derartigen Homomorphismus auf die Teilmenge $G \subset \mathbb{Z}G$.

3. Die folgende Konstruktion induzierter und koinduzierter Darstellungen scheint mir am anschaulichsten, sie funktioniert jedoch nur für Gruppen $H \subset G$. Wir betrachten dazu das sogenannte balancierte Produkt $G \times_{/H} M$, das definiert ist als der Raum der H-Bahnen in $G \times M$ unter der Operation $h(g, m) = (gh^{-1}, hm)$, und die Menge aller Schnitte beziehungsweise aller Schnitte mit endlichem Träger der Projektion $\pi : G \times_{/H} M \twoheadrightarrow G/H$, also

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_H^G M &= \{s : G/H \to G \times_{/H} M \mid \pi \circ s = \mathrm{id}\} \\ \operatorname{prod}_H^G M &= \{s : G/H \to G \times_{/H} M \mid \pi \circ s = \mathrm{id},\ |\operatorname{supp} s| < \infty\} \end{aligned}$$

Die Fasern von π sind hier abelsche Gruppen in natürlicher Weise, π ist G-äquivariant für die offensichtliche G-Operation von links auf beiden Räumen, und die Operation von G induziert Gruppenhomomorphismen zwischen den Fasern von π. Damit erhalten wir eine Operation von G auf unseren Mengen von Schnitten durch

„Verschieben“, $(gs)(x) = g(s(g^{-1}x))$, und das ist unsere dritte Konstruktion. Um sie im Fall der induzierten Darstellung mit der vorherigen Konstruktion zu identifizieren, bilden wir zu einer Abbildung $f : G \to M$ die Abbildung $\tilde{f} : G \to G \times M$, $x \mapsto (x, f(x^{-1}))$ und beachten, daß sie für unsere speziellen f absteigt zu einem Schnitt $s : G/H \to G \times_{/H} M$, falls $H \subset G$ eine Einbettung ist. Im Fall der koinduzierten Darstellung ordnen wir einem Tensor $g \otimes m \in \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ den Schnitt s zu mit $s(gH) = \overline{(g, m)}$. Insbesondere gibt es im Fall $H \subset G$ stets eine natürliche Einbettung $\operatorname{prod}_H^G M \subset \operatorname{ind}_H^G M$ und unter der Zusatzannahme $|G/H| < \infty$ ist diese Einbettung sogar ein Isomorphismus. □

Vorschau 6.3.5. Ist $H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus mit endlichem Kern, so gibt es besondere interessante Transformationen $\operatorname{prod}_H^G \to \operatorname{ind}_H^G$. Speziell ist für H eine endliche Gruppe und G trivial die Multiplikation mit $N_H := \sum_{h \in H} h$ solch eine Transformation von den Koinvarianten zu den Invarianten, und für $H \subset G$ eine Einbettung von Gruppen wird eine derartige Transformation im vorhergehenden dritten Beweis von 6.3.2 mit konstruiert. In **??** wird skizziert, wie sie sich als Spezialfall allgemeinerer Konstruktionen verstehen lassen sollten.

6.3.6. Sei $\varphi : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus und k ein Körper und bezeichne $d : H\text{-}\mathrm{Mod}_k \to H\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}}$ das Bilden der kontragredienten Darstellung. So induziert die offensichtliche Isotransformation

$$\begin{tikzcd}
G\text{-}\mathrm{Mod}_k \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{res}_G^H"'] & G\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}} \arrow[d, "(\mathrm{res}_G^H)^{\mathrm{opp}}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\
H\text{-}\mathrm{Mod}_k \arrow[r, "d"] & H\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}}
\end{tikzcd}$$

durch Übergang zu den Rechtsadjungierten eine Isotransformation

$$\begin{tikzcd}
G\text{-}\mathrm{Mod}_k & G\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}} \arrow[l, "d^{\mathrm{opp}}"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\
H\text{-}\mathrm{Mod}_k \arrow[u, "\mathrm{ind}_H^G"] & H\text{-}\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}} \arrow[l, "d^{\mathrm{opp}}"'] \arrow[u, "(\mathrm{prod}_H^G)^{\mathrm{opp}}"']
\end{tikzcd}$$

Wir haben also kürzer geschrieben stets natürliche Isomorphismen

$$\operatorname{ind}_H^G(dM) \xrightarrow{\sim} d(\operatorname{prod}_H^G M)$$

Wenden wir sie auf $M = dN$ an und schalten $N \to ddN$ davor, so ergeben sich natürliche Homomorphismen $\operatorname{ind}_H^G(N) \to d(\operatorname{prod}_H^G dN)$. Dualisieren wir sie, so erhalten wir natürliche Homomorphismen $\operatorname{prod}_H^G M \to d(\operatorname{ind}_H^G(dM))$.

Satz 6.3.7 (Mackey). *Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H, L und sei A eine Darstellung von H. Sei $X \subset G$ ein Repräsentantensystem für die L-H-Doppelnebenklassen. Gegeben $x \in X$ setzen wir $U_x = xHx^{-1} \cap L$ und betrachten die Einbettung $U_x \hookrightarrow H$, $u \mapsto x^{-1}ux$. So haben wir kanonische Isomorphismen*

$$\operatorname{res}_G^L \left(\operatorname{prod}_H^G A\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in X} \operatorname{prod}_{U_x}^L \left(\operatorname{res}_H^{U_x} A\right)$$

$$\operatorname{res}_G^L \left(\operatorname{ind}_H^G A\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} \operatorname{ind}_{U_x}^L \left(\operatorname{res}_H^{U_x} A\right)$$

Beweis. Wir zeigen nur den ersten Isomorphismus, der Zweite ergibt sich analog. Auf der linken Seite steht $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A$. Nun zerfällt $\mathbb{Z}G$ als $\mathbb{Z}L$-$\mathbb{Z}H$-Bimodul offensichtlich in $\mathbb{Z}G = \bigoplus_Q \mathbb{Z}Q$, wo Q über die L-H-Doppelnebenklassen in G läuft. Wählen wir $x \in Q$, so liefert weiter die Vorschrift $f \otimes g \mapsto fxg$ einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}L$-$\mathbb{Z}H$-Bimoduln $\mathbb{Z}L \otimes_{\mathbb{Z}U_x} \mathbb{Z}H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}Q$. Damit ist der Satz klar. □

Bemerkung 6.3.8. Ist im vorhergehenden Satz speziell $H = L$ ein Normalteiler von G, so haben wir $X = G/H$ und die Summanden beziehungsweise Faktoren auf der rechten Seite unserer Formeln sind schlicht die H-Moduln A^x, die man erhält, wenn man die Operation von H auf A mit der Konjugation durch $x \in G$ vertwistet.

Korollar 6.3.9. *Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H, L und seien $A \in H\text{-Mod}$, $B \in L\text{-Mod}$ Darstellungen. Sei $X \subset G$ ein Repräsentantensystem für die L-H-Doppelnebenklassen in G. Für $x \in X$ setzen wir $U_x = xHx^{-1} \cap L$ und betrachten die Einbettung $U_x \hookrightarrow H$, $u \mapsto x^{-1}ux$. So haben wir einen kanonischen Isomorphismus*

$$\operatorname{Hom}^G(\operatorname{prod}_H^G A, \operatorname{ind}_L^G B) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}^{U_x}(\operatorname{res}_H^{U_x} A, \operatorname{res}_L^{U_x} B)$$

Beweis. Klar mit dem vorhergehenden Satz von Mackey 6.3.7 und den Adjunktionen $(\operatorname{prod}, \operatorname{res})$ sowie $(\operatorname{res}, \operatorname{ind})$. □

Ergänzung 6.3.10. Vertauschen wir die Rollen von H und L, so haben wir mit demselben Beweis auch einen kanonischen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}^G(\operatorname{prod}_L^G B, \operatorname{ind}_H^G A) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}^{U_x}(\operatorname{res}_L^{U_x} B, \operatorname{res}_H^{U_x} A)$$

Übungen

Übung 6.3.11. Gegeben endliche Gruppen $H \subset G$ und ein Körper k der Charakteristik Null können wir die koinduzierte Darstellung der Einsdarstellung von H auch beschreiben als

$$\operatorname{prod}_H^G k \cong (kG)\left(\sum_{h \in H} h\right)$$

Dieselbe Formel gilt, wenn nur H endlich ist.

Übung 6.3.12 (**Charaktere induzierter Darstellungen**). Gegeben $H \subset G$ endliche Gruppen und V eine endlichdimensionale komplexe Darstellung von H gilt für den Charakter der induzierten Darstellung $W := \operatorname{ind}_H^G V$ die Formel

$$\chi_W(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{\chi}_V(xgx^{-1})$$

mit $\dot{\chi}_V : G \to \mathbb{C}$ der Ausdehnung von $\chi_V : H \to \mathbb{C}$ durch Null. Bilden alternativ $x_1, \ldots, x_r$ ein Repräsentantensystem für die Rechtsnebenklassen von H in G, also $G = \bigsqcup_{i=1}^r x_i H$, so gilt auch

$$\chi_W(g) = \sum_{i=1}^r \dot{\chi}_V(x_i g x_i^{-1})$$

In diesem Sinne ist es sinnvoll, jeder Klassenfunktion $\chi : H \to \mathbb{C}$ die **induzierte Klassenfunktion** $\chi : H \to \mathbb{C}$ durch ebendiese Formel zuzuordnen. Für die Standardskalarprodukte auf den Räumen der Klassenfunktionen sind damit das Restringieren und das Induzieren von Klassenfunktionen adjungierte lineare Abbildungen

$$\mathcal{C}(H) \underset{\operatorname{res}_G^H}{\overset{\operatorname{ind}_H^G}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}(G)$$

im Sinne von [LA2] 1.12.5. Daher rührt vermutlich die Terminologie der „adjungierten Funktoren“.

6.4 Clifford-Theorie

6.4.1. Gegeben eine Gruppe H und ein Körper k bezeichne im folgenden

$$\hat{H} := \operatorname{irr}_k H$$

die Menge der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Gruppe H über dem Körper k. Gegeben eine Darstellung V von H und $\chi \in \hat{H}$ bezeichne $V_\chi \subset V$ den zugehörigen **isotypischen Anteil** alias die Summe aller Bilder von Verflechtungsoperatoren von unserer einfachen Darstellung nach V.

6.4.2. Gegeben $G \supset N$ eine Gruppe mit einem Normalteiler induziert die Operation von G auf N durch Konjugation eine Operation der Gruppe G auf der Menge $\hat{N}$. Die Standgruppe von $\chi \in \hat{N}$ notieren wir G_χ. Nach 1.1.9 gilt stets $G_\chi \supset N$.

Satz 6.4.3 (Einfache Darstellungen und Normalteiler). *Gegeben k ein Körper und $G \supset N$ eine Gruppe mit Normalteiler liefert die Abbildung, die einer einfachen Darstellung $V \in \hat{G}$ die Menge aller Paare (χ, V_χ) mit $\chi \in \hat{N}$ und V_χ der zugehörigen N-isotypischen Komponente zuordnet und daraus alle Paare (χ, V_χ) mit $V_\chi = 0$ wegläßt, eine Bijektion*

$$\hat{G} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Par}(G, N)/G$$

zwischen der Menge der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G und der Menge aller G-Bahnen auf der G-Menge $\operatorname{Par}(G, N)$ aller Paare

$$\operatorname{Par}(G, N) := \{(\chi, W) \mid \chi \in \hat{N},\ W \in \hat{G}_\chi \text{ mit } W_\chi = W\}$$

unter der offensichtlichen G-Operation. Die inverse Abbildung wird gegeben durch $[(\chi, W)] \mapsto \operatorname{prod}_{G_\chi}^G W$.

Beweis. Sei V eine Darstellung von G. Die Operation von G auf N induziert eine Operation von G auf $\hat{N}$ und für alle $g \in G$ gilt offensichtlich $g : V_\chi \to V_{g\chi}$. Weiter ist die Summe der isotypischen Komponenten stets direkt nach [NAS] 2.3.8. Folglich bilden für jede G-Bahn $B \subset \hat{N}$ die zugehörigen isotypischen Komponenten eine G-Unterdarstellung

$$V_B := \bigoplus_{\chi \in B} V_\chi$$

von V. Ist V einfach, so muß es demnach genau eine Bahn $G\chi = B = B(V)$ geben mit $V = V_B$. Wir schreiben $kG\text{-Mod}_B$ für die Kategorie aller G-Moduln V mit $V = V_B$ und behaupten für alle $\chi \in \hat{N}$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} kG\text{-Mod}_{G\chi} & \xrightarrow{\approx} & kG_\chi\text{-Mod}_\chi \\ V & \mapsto & V_\chi \end{array}$$

In der Tat können wir den Funktor $R : kG\text{-Mod} \to kG_\chi\text{-Mod}_\chi$ gegeben durch $R : V \mapsto V_\chi$ schreiben als die Restriktion gefolgt vom Bilden des besagten N-isotypischen Anteils. Wir erhalten dazu einen Linksadjungierten durch die Vorschrift

$$L : W \mapsto \operatorname{prod}_{G_\chi}^G(W)$$

Wegen $g : V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{g\chi}$ ist klar, daß L bereits in $kG\text{-Mod}_{G\chi}$ landet. Aus demselben Grund induziert die kanonische Abbildung $W \to \operatorname{prod}_{G_\chi}^G(W)$ einen Isomorphismus auf die χ-isotypische Komponente der rechten Seite, als da heißt, die Adjunktion induziert einen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} RLW$. Es bleibt nur zu zeigen, daß auch umgekehrt die Adjunktion einen Isomorphismus $LRV \xrightarrow{\sim} V$ induziert, daß also für $V \in kG\text{-Mod}_{G\chi}$ die von der Adjunktion alias Frobenius-Reziprozität 6.3.4 herkommende Abbildung ein Isomorphismus

$$\operatorname{prod}_{G_\chi}^G V_\chi \xrightarrow{\sim} V$$

ist. In der Tat induziert nun unsere Abbildung einen Isomorphismus auf den χ-isotypischen Komponenten. Damit haben sowohl Kern als auch Kokern unseres Isomorphismus in spe höchstens von Null verschiedene isotypische Komponenten an Stellen $\psi \in G\chi$. Andererseits aber haben sowohl Kern als auch Kokern Komponente Null bei χ und folglich auch Komponenten Null bei allen $\psi \in G\chi$. Der Satz folgt. □

6.4.4. Gegeben $H \ltimes N$ ein semidirektes Produkt zweier Gruppen induziert die Operation von H auf N eine Operation der Gruppe H auf der Menge $\hat{N}$. Die Standgruppe von $\chi \in \hat{N}$ notieren wir H_χ.

Korollar 6.4.5 (Darstellungen semidirekter Produkte). *Gegeben ein semidirektes Produkt $H \ltimes N$ einer endlichen Gruppe H mit einer abelschen Gruppe N liefert die Abbildung $V \mapsto \{(\chi, V_\chi) \mid \chi \in \operatorname{irrf}_{\mathbb{C}} N$ mit $V_\chi \neq 0\}$ eine Bijektion*

$$\operatorname{irrf}_{\mathbb{C}}(H \ltimes N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Par}/H$$

zwischen der Menge der Isomorphieklassen komplexer einfacher Darstellungen von $H \ltimes N$ und der Menge der H-Bahnen auf der Parametermenge Par *aller Paare* $\operatorname{Par} := \{(\chi, W) \mid \chi \in \operatorname{irrf}_{\mathbb{C}} N,\ W \in \operatorname{irrf}_{\mathbb{C}} H_\chi\}$ *mit der offensichtlichen H-Operation.*

6.4.6. Statt $\mathbb{C}$ dürfen wir hier allgemeiner einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper nehmen. Der Beweis bleibt derselbe.

Beweis. Das folgt durch Spezialisierung aus Clifford-Theorie 6.4.3. Genauer induziert die dort gegebene Bijektion unter der Annahme $|G/N| < \infty$ eine Bijektion zwischen endlichdimensionalen Einfachen auf beiden Seiten. Nehmen wir zusätzlich den Grundkörper k algebraisch abgeschlossen und N abelsch an, so sind die einfachen endlichdimensionalen k-Darstellungen eindimensional und die Restriktion liefert für alle derartigen χ eine Äquivalenz von Kategorien

$$k(H_\chi \ltimes N)\text{-Mod}_\chi \xrightarrow{\approx} kH_\chi\text{-Mod}$$

So folgt dann das Korollar. □

Übungen

Übung 6.4.7. Man entwickle die Charaktertafeln der Diedergruppen aus [LA2] 5.4.2. Wieviele einfache Darstellungen haben diese Gruppen? Was sind deren Dimensionen?

6.5 Darstellungen endlicher Heisenberg-Gruppen*

6.5.1. Allgemein erklärt man für jede abelsche Gruppe V mit einer alternierenden bilinearen Abbildung $\omega : V \times V \to A$ in eine weitere abelsche Gruppe A die zugehörige **Heisenberg-Gruppe**

$$\mathrm{Heis}(V, \omega) := V \times A$$

mit der Verknüpfung $(v, \alpha)(w, \beta) := (v + w, \alpha + \beta + \omega(v, w))$. Das Zentrum dieser Gruppe ist die Menge aller (v, α) mit $2\omega(v, w) = 0$ für alle $w \in V$.

6.5.2 (**Einfache Darstellungen der endlichen Heisenberggruppen**). Wir untersuchen nun einfache komplexe Darstellungen der Heisenberggruppe G im Fall eines endlichdimensionalen symplektischen Vektorraums V über einem endlichen Körper $k = \mathbb{F}_q$. Das Zentrum operiert auf jeder einfachen Darstellung durch einen multiplikativen Charakter. Ist dieser Charakter der triviale Charakter, so kommt unsere Darstellung durch Rückzug von einer einfachen Darstellung der additiven Gruppe V her und wir erhalten so $q^{2n} = |V|$ paarweise nichtisomorphe eindimensionale Darstellungen. Ist dieser Charakter $\chi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ nicht der triviale Charakter, so betrachten wir irgendeinen Lagrange'schen Teilraum $L \subset V$ und den trivial fortgesetzten Charakter $\tilde{\chi} : L \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ mit $\tilde{\chi}(v, \alpha) = \chi(\alpha)$ und induzieren $\mathbb{C}_{\tilde{\chi}}$ zu einer Darstellung V_χ unserer Heisenberggruppe. Für $2n = \dim V$ erhalten wir dann eine q^n-dimensionale Darstellung der Heisenberggruppe, auf der das Zentrum immer noch durch denselben multiplikativen Charakter χ operiert. Diese induzierten Darstellungen sind jedoch alle einfach, denn $L \times \mathbb{F}_q$ ist ein Normalteiler und die Bahn von $\tilde{\chi}$ unter Konjugation hat genau q^n Elemente: Es gilt nämlich

$$(w, 0)(v, \beta)(w, 0)^{-1} = (v, \beta + 2\omega(w, v))$$

Folglich ist für jede Linearform $\lambda \in L^*$ der Charakter $(v, \alpha) \mapsto \chi(2\lambda(v) + \alpha)$ konjugiert zu $\tilde{\chi}$. Wegen $(q - 1)(q^n)^2 + (q^n)^2 = |G|$ müssen das bereits alle einfachen Darstellungen gewesen sein.

7 Abelsche Kategorien

7.1 Projektive Decken

7.1.1. Unter einer **abelschen Kategorie** darf und sollte der mit der abstrakten Definition [TG] 2.5.4 nicht vertraute Leser stets eine **eingebettete abelsche Kategorie** verstehen, als da heißt eine volle Unterkategorie der Kategorie aller Moduln über einem fest vorgegebenen Ring, die stabil ist unter dem Bilden von Subquotienten und endlichen direkten Summen. Die Begriffe **Epimorphismus** oder kurz **epi** und **Monomorphismus** oder kurz **mono** aus der allgemeinen Begriffswelt abelscher Kategorien spezialisieren dann zu surjektiven beziehungsweise injektiven Modulhomomorphismen.

Beispiele 7.1.2. Ist A ein Ring, so ist die Kategorie aller A-Moduln oder genauer aller A-Moduln in einem vorgegebenen Universum eine abelsche Kategorie. Sind $A \supset B$ Ringe, so ist die Kategorie aller A-Moduln, die halbeinfach sind über B, eine abelsche Kategorie. Dasselbe gilt für die Kategorie aller A-Moduln, die über B halbeinfach und von endlicher Länge sind.

Definition 7.1.3. Ein Objekt einer abelschen Kategorie heißt **einfach**, wenn es nicht null ist und jeder Morphismus zu unserem Objekt entweder epi oder null ist. Gleichbedeutend können wir dual auch fordern, daß unser Objekt nicht null ist und jeder Morphismus aus unserem Objekt entweder mono oder null ist.

7.1.4. Der Satz von Jordan-Hölder [KAG] 4.7.12 gilt a forteriori auch für jede eingebettete abelsche Kategorie. Nach Übung [TG] 2.5.26 gilt er sogar für jede abelsche Kategorie.

Definition 7.1.5. Ein Objekt M einer Kategorie heißt **unzerlegbar**, wenn M nicht final ist und es keine zwei nicht finalen Objekte W_1, W_2 gibt mit $M \cong W_1 \times W_2$.

Beispiel 7.1.6. Die unzerlegbaren Ojekte in der Kategorie der Darstellungen eines Monoids über einem vorgegebenen Ring k sind genau unsere unzerlegbaren Darstellungen im Sinne von 1.1.21.

Definition 7.1.7. Ein Objekt P einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **projektiv**, wenn der Funktor $\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ exakt ist. Ein Objekt I einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **injektiv**, wenn der Funktor $\mathcal{A}(\ , I) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ exakt ist.

7.1.8. Projektive Moduln werden in [TS] 5.6.10 folgende diskutiert, injektive Moduln in [TS] 6.6.1 folgende.

Vorschau 7.1.9. Der Rahmen abstrakter abelscher Kategorien hat den Vorteil, daß die opponierte Kategorie einer abelschen Kategorie stets wieder abelsch ist. Die projektiven Objekte einer abelschen Kategorie sind dann genau die injektiven Objekte der opponierten Kategorie.

Definition 7.1.10. Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt.

1. Ein Morphismus $\eta : P \twoheadrightarrow A$ heißt ein **wesentlicher Epimorphismus**, wenn er ein Epimorphismus ist und wenn für beliebige Morphismen $f : Q \to P$ gilt: ($\eta \circ f$ epi) $\Rightarrow$ (f epi). Gleichbedeutend ist die Forderung, daß zwar P selbst surjektiv auf A geht, daß aber kein echtes Unterobjekt von P surjektiv auf A geht;

2. Eine **projektive Decke** des Objekts A ist ein Paar (P, η) bestehend aus einem projektiven Objekt $P \in \mathcal{A}$ und einem wesentlichen Epimorphismus $\eta : P \twoheadrightarrow A$.

Dual erklärt man **wesentliche Monomorphismen** und **injektive Hüllen**.

Beispiel 7.1.11 (**Wesentliche Monomorphismen von Moduln**). Ein Untermodul $M \subset I$ ist genau dann wesentlich, wenn er mit jedem weiteren von Null verschiedenen Untermodul $U \subset I$ mindestens ein von Null verschiedenes Element gemeinsam hat, wenn also jedes von Null verschiedene Element von I durch Davormultiplizieren eines Ringelements zu einem von Null verschiedenen Element von M gemacht werden kann. In 7.1.28 zeigen wir, daß jeder Modul eine bis auf nichteindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte injektive Hülle besitzt. Dahingegen muß, wie in 7.1.19 erklärt wird, keineswegs jeder Modul eine projektive Decke besitzen.

Beispiel 7.1.12 (**Wesentliche Epimorphismen von Moduln**). Ist $\mathcal{A}$ eine Kategorie von Moduln, die mit einem Modul auch alle seine Untermoduln enthält, so ist ein Epimorphismus $P \twoheadrightarrow M$ wesentlich genau dann, wenn beliebige Urbilder der Elemente eines Erzeugendensystems von M bereits P erzeugen. Zum Beispiel ist das Auswerten bei $t = 0$ ein wesentlicher Epimorphismus $\mathbb{C}[\![t]\!] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ von Moduln über dem Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[\![t]\!]$. Dahingegen ist das Auswerten bei $t = 0$ kein wesentlicher Epimorphismus $\mathbb{C}[t] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ von $\mathbb{C}[t]$-Moduln.

Beispiel 7.1.13. Ist R ein lokaler Kring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so ist nach dem Lemma von Nakayama [KAG] 4.6.12 oder auch 3.6.3 für jeden endlich erzeugten R-Modul M die kanonische Surjektion $M \twoheadrightarrow M/\mathfrak{m}M$ ein wesentlicher Epimorphismus von R-Moduln.

Proposition 7.1.14 (**Eindeutigkeit projektiver Decken**). *Sind $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt und (P, η) sowie (P', η') projektive Decken von A, so gibt es einen Homomorphismus $i : P \to P'$ mit $\eta = \eta' \circ i$ und jeder solche Homomorphismus ist ein Isomorphismus*

$$i : P \xrightarrow{\sim} P'$$

7.1.15. Dual sind auch injektive Hüllen, wenn sie denn existieren, eindeutig bis auf nichteindeutigen Isomorphismus. Wie bereits angekündigt zeigen wir in 7.1.28, daß injektive Hüllen im Fall von Modulkategorien stets existieren.

Beispiel 7.1.16 (**Injektive Hülle des trivialen $\mathbb{C}[t]$-Moduls $\mathbb{C}$**). Die offensichtliche Einbettung $\mathbb{C}[t]/t\mathbb{C}[t] \hookrightarrow \mathbb{C}[t,t^{-1}]/t\mathbb{C}[t]$ ist ein wesentlicher Monomorphismus von $\mathbb{C}[t]$-Moduln. Als Abbildung von Vektorräumen kann sie identifiziert werden mit der Einbettung $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}[t^{-1}]$. Aus [TS] 6.6.7 wissen wir zusätzlich, daß dieser $\mathbb{C}[t]$-Modul injektiv ist. Damit haben wir die injektive Hülle des trivialen $\mathbb{C}[t]$-Moduls $\mathbb{C}$ gefunden.

Beweis. Der besseren Übersichtlichkeit halber stelle ich die Objekte und Morphismen der Proposition nocheinmal graphisch dar. Die Proposition behauptet die Existenz eines Isomorphismus i im Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, dashed, "i"] \arrow[dr, "\eta"'] & & P' \arrow[dl, "\eta'"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Da η' ein Epimorphismus ist und P projektiv, gibt es $i : P \to P'$ mit $\eta' \circ i = \eta$. Da η ein Epimorphismus ist und η' wesentlich, ist i ein Epimorphismus. Da P' projektiv ist, muß i spalten. Bezeichnet $i' : P' \to P$ eine Spaltung, also $i \circ i' = \mathrm{id}$, so haben wir offensichtlich $\eta \circ i' = \eta'$. Da η wesentlich ist, muß mithin auch i' ein Epimorphismus sein. Damit sind i und i' zueinander inverse Isomorphismen. □

7.1.17. Im Allgemeinen ist der Isomorphismus $i : P \xrightarrow{\sim} P'$ aus Proposition 7.1.14 keineswegs eindeutig bestimmt. Motiviert durch die Proposition erlauben wir uns dennoch den bestimmten Artikel und sprechen von *der* projektiven Decke eines Objekts in einer abelschen Kategorie, wenn eine solche existiert. Manchmal meinen wir damit auch nur das Objekt P statt dem Paar (P, η).

Lemma 7.1.18. *Ist L ein einfaches Objekt in einer abelschen Kategorie und $P \twoheadrightarrow L$ ein wesentlicher Epimorphismus, so ist P unzerlegbar. Insbesondere ist die projektive Decke eines einfachen Objekts stets unzerlegbar.*

Beweis. Ist $P' \oplus P'' \xrightarrow{\sim} P$ eine Zerlegung, so haben wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P' \twoheadrightarrow L$ und damit $P' \twoheadrightarrow P$, also $P'' = 0$. □

Beispiel 7.1.19 (**Der triviale $\mathbb{C}[t]$-Modul $\mathbb{C}$ besitzt keine projektive Decke**). Die offensichtliche Surjektion $\mathbb{C}[t] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[t]/t\mathbb{C}[t] = \mathbb{C}$ ist kein wesentlicher Epimorphismus von $\mathbb{C}[t]$-Moduln. Gäbe es eine projektive Decke $P \twoheadrightarrow \mathbb{C}$, so müßte P also ein echter direkter Summand von $\mathbb{C}[t]$ sein. Der $\mathbb{C}[t]$-Modul $\mathbb{C}[t]$ ist aber unzerlegbar.

Proposition 7.1.20 (Fitting-Zerlegung). *Gegeben ein Objekt M endlicher Länge in einer abelschen Kategorie und ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(M)$ hängen für hinreichend großes $n \gg 0$ die Unterobjekte $\ker f^n$ und $\operatorname{im} f^n$ nicht von n ab und ihre Einbettungen liefern eine Zerlegung*

$$(\ker f^n) \oplus (\operatorname{im} f^n) \xrightarrow{\sim} M$$

Beispiel 7.1.21. Im Fall eines Endomorphismus f eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist die Fittingzerlegung die Zerlegung in den Hauptraum zum Eigenwert Null und die direkte Summe der übrigen Haupträume.

Beweis. Für beliebige Morphismen h nach M und g von M erhalten wir in offensichtlicher Weise ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{im} h \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ \operatorname{im}(g \circ h) \arrow[r, hook] & \operatorname{im} g \end{tikzcd}$$

mit vertikalen Epimorphismen induziert von g und horizontalen Monomorphismen gegeben durch die offensichtlichen Einbettungen. Ist f ein Endomorphismus von M und hat M endliche Länge, so haben auch die Bilder aller f^n endliche Länge nach 7.1.4 und diese Längen bilden eine monoton fallende Folge. Mithin gibt es eine Stelle n, ab der diese Längen konstant werden. Nun erinnern wir daran, daß Monomorphismen und ebenso Epimorphismen zwischen Objekten gleicher endlicher Länge notwendig Isomorphismen sein müssen. Nehmen wir in unserem Diagramm $h = g = f^n$, so erhalten wir demnach ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} \operatorname{im} f^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\wr"'] & M \arrow[d] \\ \operatorname{im} f^{2n} \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{im} f^n \end{tikzcd}$$

mit durch f^n induzierten Vertikalen, das offensichtlich eine Spaltung s unserer Surjektion $f^n : M \twoheadrightarrow \operatorname{im} f^n$ mit Bild $\operatorname{im} s = \operatorname{im} f^n$ liefert. $\square$

Proposition 7.1.22 (Einfache Quotienten unzerlegbarer Projektiver). *Gegeben ein unzerlegbares projektives Objekt P endlicher Länge in einer abelschen Kategorie und Epimorphismen auf einfache Objekte $a : P \twoheadrightarrow L$ sowie $b : P \twoheadrightarrow M$ existiert genau ein Isomorphismus $i : L \xrightarrow{\sim} M$ mit $b = i \circ a$.*

Beweis. Sei $i : K \hookrightarrow P$ der Kern von a. Gilt $bi \neq 0$, so ist bi ein Epimorphismus und es gibt folglich $\alpha : P \to K$ mit $bi\alpha = b : P \twoheadrightarrow M$. Dann kann $i\alpha$ nicht nilpotent sein und muß aufgrund der Fittingzerlegung ein Isomorphismus sein im Widerspruch dazu, daß i kein Epimorphismus ist. Es folgt $bi = 0$ und damit induziert a einen Epi und a forteriori einen Isomorphisms $i : L \xrightarrow{\sim} M$. □

7.1.23. Gegeben ein wesentlicher Epimorphismus $P \twoheadrightarrow L$ auf ein einfaches Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ besteht der Kern der durch Nachschalten der Projektion gegebenen Abbildung $\mathcal{A}(P, P) \to \mathcal{A}(P, L)$ aus allen Nichtepimorphismen. Ist P projektiv von endlicher Länge, so induziert das Vorschalten des besagten Epimorphismus nach 7.1.22 weiter eine Bijektion $\mathcal{A}(L, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(P, L)$.

Proposition 7.1.24 (Kriterium für projektive Decken). *Ist P ein projektives Objekt endlicher Länge einer abelschen Kategorie und $\eta : P \twoheadrightarrow M$ ein Epimorphismus derart, daß kein echter direkter Summand von P surjektiv auf M geht, so ist unser Epimorphismus eine projektive Decke.*

7.1.25. Die Bedingung, daß P endliche Länge hat, ist hierbei wesentlich. In der Tat geben wir in 7.1.19 einen Epimorphismus eines unzerlegbaren projektiven $\mathbb{C}[T]$-Moduls auf eine einfachen $\mathbb{C}[T]$-Modul an, der keine projektive Decke ist.

Beweis. Ist $f : U \to P$ ein Morphismus mit $\eta \circ f$ epi, so finden wir wegen der Projektivität von P einen Morphismus $s : P \to U$ mit $(\eta \circ f) \circ s = \eta$. Betrachten wir nun die Fittingzerlegung von P für $(f \circ s)$, so ist für hinreichend großes n das Bild von $(f \circ s)^n$ ein Summand von P, der auch schon surjektiv auf M geht. Solch ein Summand muß aber nach Annahme P selbst sein und es folgt f epi, als da heißt, η ist wesentlich wie gewünscht. □

Definition 7.1.26. Eine abelsche Kategorie, in der jedes Objekt endliche Länge hat, nennen wir eine **längenendliche Kategorie**.

Satz 7.1.27 (Unzerlegbare Projektive in längenendlichen Kategorien). *In einer längenendlichen Kategorie mit genügend projektiven Objekten besitzt jedes Objekt eine projektive Decke, je zwei einfache Quotienten eines unzerlegbaren projektiven Objekts sind isomorph, und wir erhalten so zueinander inverse Bijektionen*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache Objekte,} \\ \textit{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} & \overset{\sim}{\leftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Unzerlegbare projektive Objekte,} \\ \textit{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ \\ L & \mapsto & (\textit{die projektive Decke von } L) \\ (\textit{der einfache Quotient von } P) & \leftarrow\!\shortmid & P \end{array}$$

Beweis. Nach Annahme ist jedes einfache Objekt Quotient eines Projektiven und dann auch eines unzerlegbaren Projektiven und der muß nach 7.1.24, da er nach Annahme endliche Länge hat, seine projektive Decke sein. Umgekehrt kann ein unzerlegbares projektives Objekt endlicher Länge nach 7.1.22 bis auf Isomorphismus nur einen einfachen Quotienten haben. □

Satz* 7.1.28 (Injektive Hüllen). *Jeder Modul über einem Ring besitzt eine injektive Hülle und diese ist eindeutig bis auf nichteindeutigen Isomorphismus.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus 7.1.14, angewandt auf die opponierte Kategorie zur Kategorie der Moduln über unserem Ring. Um die Existenz zu zeigen, erinnern wir zunächst aus [TG] 3.2.12, daß wir jeden Modul M in einen injektiven Modul I einbetten können. Dann finden wir mit dem Zorn'schen Lemma unter allen Untermoduln $U \subset I$ mit $M \subset U \subset I$ und M wesentlich in U einen maximalen Untermodul $J = U_{\max}$. Weiter finden wir mit dem Zorn'schen Lemma in I auch einen Untermodul $V_{\max}$, der maximal ist unter allen Untermoduln, die $U_{\max}$ nur in Null treffen. Dann ist $U_{\max} \hookrightarrow I/V_{\max}$ auch ein essentieller Monomorphismus. Nun können wir die Einbettung $U_{\max} \hookrightarrow I$ zu einem Homomorphismus $I/V_{\max} \to I$ fortsetzen, dessen Bild auch essentiell über $U_{\max}$ sein muß und folglich mit $U_{\max}$ zusammenfällt. Mithin spaltet $U_{\max} \hookrightarrow I/V_{\max}$ und dann spaltet auch $U_{\max} \hookrightarrow I$ und $U_{\max}$ ist injektiv. □

Vorschau 7.1.29. Wir zeigen in [TG] 3.4.2, daß gegeben ein Körper K die Einbettung $K \hookrightarrow K[T_1^{-1}, \ldots, T_r^{-1}]$ eine injektive Hülle des Augmentationsmoduls K über dem Polynomring $K[T_1, \ldots, T_r]$ ist.

Übungen

Ergänzende Übung 7.1.30. Sei M ein Objekt einer abelschen Kategorie und f ein Endomorphismus von M. Man zeige: Ist M **artinsch**, wird also jede absteigende Folge von Unterobjekten von M stationär, so gilt immer noch $M = \ker f^n + \operatorname{im} f^n$ für $n \gg 0$. Ist M **noethersch**, wird also jede aufsteigende Folge von Unterobjekten von M stationär, so gilt immer noch $0 = \ker f^n \cap \operatorname{im} f^n$ für $n \gg 0$.

Übung 7.1.31. Jeder von Null verschiedene Quotient eines unzerlegbaren projektiven Objekts endlicher Länge ist unzerlegbar.

Übung 7.1.32. Ein Objekt einer abelschen Kategorie heißt **halbeinfach**, wenn es isomorph ist zu einem Koprodukt einfacher Objekte. Man erinnere den Begriff eines Unterobjekts und zeige, daß jedes Objekt M endlicher Länge in einer abelschen Kategorie ein größtes halbeinfaches Unterobjekt besitzt. Es heißt der **Sockel von** M und wird notiert als

$$\operatorname{soc}(M)$$

Jeder Quotient und jedes Unterobjekt eines halbeinfachen Objekts endlicher Länge sind halbeinfach. Wenn man sich nicht auf Objekte endlicher Länge beschränkt, gelten analoge Aussagen, aber man muß dabei mehr Sorgfalt in Fragen der Mengenlehre walten lassen.

7.2 Zerlegungen in unzerlegbare Objekte

Lemma 7.2.1. *Jeder noethersche und ebenso jeder artinsche Modul läßt sich schreiben als eine endliche direkte Summe unzerlegbarer Untermoduln.*

Beweis. Nur für diesen Beweis bezeichne $\mathcal{Z}$ das System aller derjenigen Untermoduln unseres Moduls M, die sich als eine endliche direkte Summe unzerlegbarer Untermoduln schreiben lassen. Ist nun $M = M_0 \oplus N_0$ eine Zerlegung mit $M_0 \notin \mathcal{Z}$, so finden wir auch eine Zerlegung $M = M_1 \oplus N_1$ mit $M_1 \notin \mathcal{Z}$ und $M_1 \subsetneq M_0$ und $N_1 \supsetneq N_0$. In der Tat gilt nach Annahme $M_0 \notin \mathcal{Z}$, also ist M_0 weder Null noch unzerlegbar. Unser Modul M_0 läßt sich demnach nichttrivial zerlegen als $M_0 = M_0' \oplus M_0''$. Aus $M_0 \notin \mathcal{Z}$ folgt dann $M_0' \notin \mathcal{Z}$ oder $M_0'' \notin \mathcal{Z}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $M_0' \notin \mathcal{Z}$ annehmen. Dann erhalten wir für M die Zerlegungen

$$M = M_0 \oplus N_0 = M_0' \oplus M_0'' \oplus N_0 = M_1 \oplus N_1$$

mit $M_1 := M_0' \notin \mathcal{Z}$ und $M_1 \subsetneq M_0$ und $N_1 := M_0'' \oplus N_0 \supsetneq N_0$. Jede Zerlegung $M = M_0 \oplus N_0$ mit $M_0 \notin \mathcal{Z}$ führt in dieser Weise zu einer nicht stagnierenden aufstegenden Kette von Untermoduln $N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots$ und damit zum Widerspruch zur Annahme M noethersch sowie zu einer nicht stagnierenden absteigenden Kette von Untermoduln $M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots$ und damit zum Widerspruch zur Annahme M artinsch. Gälte aber $M \notin \mathcal{Z}$, so hätte es die Zerlegung $M = M \oplus 0 = M_0 \oplus N_0$ mit $M_0 \notin \mathcal{Z}$. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Proposition 7.2.2 (Endomorphismen unzerlegbarer Objekte). *Gegeben ein unzerlegbares Objekt M endlicher Länge in einer abelschen Kategorie ist jeder Endomorphismus von M entweder ein Automorphismus oder nilpotent. Die nilpotenten Elemente von* $\operatorname{End} M$ *bilden ein Ideal* $\mathfrak{m}$ *des Endomorphismenrings und der Restklassenring ist ein Schiefkörper* $(\operatorname{End} M)/\mathfrak{m}$.

Beweis. Hätten wir einen Endomorphismus, der weder nilpotent noch ein Automorphismus ist, so wäre die zugehörige Fitting-Zerlegung 7.1.20 eine nichttriviale Zerlegung unseres Objekts. Das zeigt die erste Behauptung. Insbesondere ist das Produkt von einem beliebigen Endomorphismus mit einem Nilpotenten in beiden möglichen Reihenfolgen stets wieder nilpotent, da es ja nicht epi beziehungsweise mono und damit kein Automorphismus sein kann. Es ist weiter klar, daß für N nilpotent $1-N$ ein Isomorphismus ist mit Inversem $1+N+N^2+\ldots$. Folglich ist auch allgemeiner die Summe eines Automorphismus u mit einem nilpotenten Endomorphismus N ein Automorphismus, da sie sich ja als $(u+N) = u(1-(-u)^{-1}N)$ schreiben läßt und $(-u)^{-1}N$ nilpotent sein muß nach unserer Vorüberlegung. Damit ist dann aber notwendig die Summe von zwei Nilpotenten wieder nilpotent und diese bilden ein Ideal. Es folgt, daß der Restklassenring ein Schiefkörper sein muß. □

7.2.3. Ein Ring heißt **lokal**, wenn seine Nichteinheiten ein Ideal bilden. Dies Ideal ist dann natürlich das größte echte Ideal unseres Rings. Der Nullring ist nicht lokal, denn die leere Menge ist kein Ideal. In einem lokalen Ring ist die Summe aus einer Nichteinheit und einer Einheit offensichtlich stets eine Einheit.

7.2.4 (**Lokalität von Endomorphismenringen**). Insbesondere ist also der Endomorphismenring eines unzerlegbaren Objekts endlicher Länge aus einer abelschen Kategorie stets lokal, als da heißt, seine Nichteinheiten bilden ein Ideal. Umgekehrt ist ein Objekt mit lokalem Endomorphismenring stets unzerlegbar, denn ist ein Objekt Null, so auch sein Endomorphismenring, und ist ein Objekt die Summe von zwei von Null verschiedenen Unterobjekten, so sind die Projektoren auf diese Unterobjekte zwei Nichteinheiten des Endomorphismenrings, deren Summe eine Einheit ist.

Proposition 7.2.5 (Lemma von Nakayama für lokale Ringe). *Seien $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Sind $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen, so erzeugen die m_i bereits M selbst. Inbesondere gilt*

$$M = \mathfrak{m}M \quad \Rightarrow \quad M = 0$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis der zweiten Aussage. Sei dazu $e_1, \ldots, e_n$ ein unverkürzbares endliches Erzeugendensystem von M. Aus $M = \mathfrak{m}M$ und $n \geq 1$ folgt, daß es $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{m}$ gibt mit $e_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$. Daraus folgt weiter $(1 - a_1)e_1 = a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$. Da $(1 - a_1)$ invertierbar ist, war unser Erzeugendensystem nicht unverkürzbar und dieser Widerspruch zeigt $M = 0$. Für den allgemeinen Fall bezeichne $N \subset M$ den von $m_1, \ldots, m_r$ erzeugten Untermodul. Es folgt erst $N + \mathfrak{m}M = M$ und dann $\mathfrak{m}M \twoheadrightarrow M/N$ und schließlich $\mathfrak{m}(M/N) = M/N$ und so $M/N = 0$ alias $M = N$. □

7.2.6 (**Lokale Ringe endlicher Linkslänge**). Hat ein lokaler Ring $(A, \mathfrak{m})$ endliche Länge als Modul über sich selber, so ist sein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ nilpotent. In der Tat sind dann alle Potenzen $\mathfrak{m}^r$ endlich erzeugte A-Moduln und aus $\mathfrak{m}^r \neq 0$ folgt $\mathfrak{m}^r \supsetneq \mathfrak{m}^{r+1}$ mit Nakayama 7.2.5. Da nach Annahme jede absteigende Folge von Linksidealen stagniert, muß es ein n geben mit $\mathfrak{m}^n = 0$.

Ergänzung 7.2.7. Man kann zeigen, daß ein Ring genau dann endliche Linkslänge hat, wenn er artinsch ist als Linksmodul über sich selber. Einen Beweis findet man in [JS06].

Proposition 7.2.8 (Lokalitätskriterium). *Ein Ring E endlicher Linkslänge mit genau zwei Idempotenten ist lokal mit nilpotentem maximalen Ideal.*

Beweis. Die Multiplikation von rechts liefert für jeden Ring E einen Isomorphismus $E^{\mathrm{opp}} \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{End}_E E$ und unser E ist nach Annahme ein unzerlegbarer E-Modul endlicher Länge. Also ist E^{opp} lokal nach 7.2.4 und dann ist offensichtlich auch E lokal. Nach 7.2.6 ist unter diesen Voraussetzungen aber auch das maximale Ideal von E nilpotent. □

Proposition 7.2.9 (**Struktur von Endomorphismenringen**). *Seien $M_1, \ldots, M_n$ unzerlegbare Objekte einer abelschen Kategorie mit Endomorphismenringen von endlicher Linkslänge. So gilt:*

1. *Im Endomorphismenring $R := \mathrm{End}(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n)$ ihrer direkten Summe bilden die Matrizen aus Nichtisomorphismen ein nilpotentes Ideal J;*

2. *Sind die M_i paarweise nicht isomorph und $\mathfrak{m}_i \subset \mathrm{End}(M_i)$ die Ideale der Nichtautomorphismen, so induziert die diagonale Einbettung $\mathrm{End}(M_1) \times \ldots \times \mathrm{End}(M_n) \hookrightarrow R$ einen Isomorphismus*
$$\mathrm{End}(M_1)/\mathfrak{m}_1 \times \ldots \times \mathrm{End}(M_n)/\mathfrak{m}_n \stackrel{\sim}{\to} R/J$$

3. *Sind die M_i paarweise nicht isomorph und bezeichnet $K_i := \mathrm{End}(M_i)/\mathfrak{m}_i$ den nach 7.2.2 zugehörigen Schiefkörper und betrachten wir allgemeiner $R := \mathrm{End}(M_1^{\oplus r_1} \oplus \ldots \oplus M_n^{\oplus r_n})$, so induziert die diagonale Einbettung $\mathrm{End}(M_1^{\oplus r_1}) \times \ldots \times \mathrm{End}(M_n^{\oplus r_n}) \hookrightarrow R$ einen Isomorphismus*
$$\mathrm{Mat}(r_1; K_1) \times \ldots \times \mathrm{Mat}(r_n; K_n) \stackrel{\sim}{\to} R/J$$

7.2.10 (**Struktur von Ringen endlicher Linkslänge**). Gegeben ein Ring E endlicher Linkslänge zeigt der durch Multiplikation von rechts gegebene Isomorphismus $E^{\mathrm{opp}} \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{End}_E E$, daß wir unsere Proposition auf E^{opp} anwenden können mit $E = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ einer Zerlegung des E-Moduls E in unzerlegbare Summanden. Insbesondere hat E^{opp} und damit auch E selbst ein maximales nilpotentes Ideal und der zugehörige Restklassenring ist halbeinfach. In diesem Fall bilden die endlich erzeugten E-Moduln eine längenendliche Kategorie und die M_i sind deren unzerlegbare Projektive, die in der Zerlegung von E mit gewissen positiven Vielfachheiten auftauchen können.

7.2.11. In den Notationen der Proposition ist J das Jacobsonradikal von R und die K_i beziehungsweise die $K_i^{r_i}$ bilden ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher R-Moduln.

Ergänzung 7.2.12. In [KAG] 2.8.4 konstruieren wir ganz allgemein eine Äquivalenz zwischen den Modulkategorien unserer Endomorphismenringe aus Teil 2 und Teil 3, die sich ihrerseits als ein Spezialfall der sogenannten „Morita-Äquivalenz“ erhalten läßt.

Beweis. Wir identifizieren Endomorphismen f der direkten Summe mit Matrizen (f_{ij}) von Homomorphismen. Sind keine der Einträge f_{ij} Isomorphismen, so liegen alle Produkte $f_{ri}f_{ik}\dots f_{lr}$ von Matrixeinträgen mit einer Kette von Indizes, die bei r beginnt und bei r endet, im nach 7.2.8 nilpotenten Ideal $\mathfrak{m}_r \subset \operatorname{End} M_r$ der Nichtautomorphismen, denn wäre so eine Verknüpfung ein Automorphismus von M_r, so müßte f_{lr} eine spaltende Einbettung sein. Für $l := \max(\text{Länge}\, M_r)$ kommt in jeder Kette von Indizes der Länge nl mindestens ein Index l-mal vor. Es folgt $J^{nl} = 0$. Die weiteren Behauptungen der Proposition folgen daraus unmittelbar. □

Beispiel 7.2.13. Der Endomorphismenring der abelschen Gruppe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ ist isomorph zum Teilring von $\operatorname{Mat}(2; \mathbb{Q})$ aller Matrizen A mit Einträgen $A_{11} \in \mathbb{Z}$ und $A_{21} = 0$. Er ist von endlicher Rechtslänge, aber nicht von endlicher Linkslänge.

7.2.14. Gegeben ein projektives Objekt P endlicher Länge in einer abelschen Kategorie hat sein Endomorphismenring $\operatorname{End} P$ endliche Rechtslänge. Ein Beweis wird im Beweis von 7.5.3 gegeben.

Satz 7.2.15 (**Krull-Schmidt**). *Ist M ein Modul endlicher Länge über einem Ring und sind $M \cong M_1 \oplus \ldots \oplus M_r$ sowie $M \cong N_1 \oplus \ldots \oplus N_s$ zwei Zerlegungen von M in eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln, so gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ für $1 \leq i \leq r$.*

Satz 7.2.16 (**Allgemeiner Krull-Schmidt**). *Ist M ein Objekt einer additiven Kategorie und sind $M \cong M_1 \oplus \ldots \oplus M_r$ sowie $M \cong N_1 \oplus \ldots \oplus N_s$ zwei Zerlegungen von M in eine direkte Summe von unzerlegbaren Objekten derart, daß alle M_i einen lokalen Endomorphismenring haben, so gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ für $1 \leq i \leq r$.*

7.2.17. Die zweite Variante ist in verschiedener Hinsicht allgemeiner: Erstens verallgemeinern wir von Modulkategorien auf beliebige additive Kategorien, und zweitens fordern wir nur die Lokalität der Endomorphismenringe der M_i. Das folgt in abelschen Kategorien unter der Voraussetzung endlicher Länge nach 7.2.2 aus der Unzerlegbarkeit.

7.2.18 (**Diskussion der Terminologie**). Für diese Sätze ist auch die Bezeichnung „Krull-Remak-Schmidt“ gebräuchlich, die sich jedoch inhaltlich schwer rechtfertigen läßt.

Beispiel 7.2.19 (**Ein nicht in Unzerlegbare zerlegbarer Modul**). Ist V ein Vektorraum unendlicher Dimension, so ist sein Endomorphismenring E als Linksmodul über sich selber keine direkte Summe von unzerlegbaren Untermoduln. In der Tat erhalten wir eine Bijektion zwischen Untervektorräumen $W \subset V$ und direkten Summanden $F \subset E$ vermittels der Vorschrift $W \mapsto \operatorname{Hom}(W, V)$, und die unzerlegbaren direkten Summanden von E entsprechen so genau den Geraden in V. Die Summe aller unzerlegbaren direkten Summanden von E liefert aber nicht ganz E, sondern nur den Untermodul aller Endomorphismen von endlichem Rang. Im Übrigen gilt auch $E \cong E^n$ als E-Linksmodul für alle $n \geq 1$.

Ergänzung 7.2.20. Man beachte, daß durchaus auch unter anderen Voraussetzungen die Eindeutigkeit einer Zerlegung in Unzerlegbare im Sinne des Satzes von Krull-Schmidt gezeigt werden kann: Insbesondere erwähne ich die Wohlbestimmtheit des Ranges für freie Moduln über von Null verschiedenen kommutativen Ringen [KAG] 2.3.10, die im Fall eines unzerlegbaren Ringes eine analoge Aussage liefert, und die Klassifikation endlich erzeugter Moduln über Hauptidealringen [KAG] 2.4.8.

Beweis. Wir schreiben die Identität auf M als Matrix (f_{ij}) mit $f_{ij} : M_j \to N_i$ und ebenso als Matrix (g_{ji}) mit $g_{ji} : N_i \to M_j$. Im Endomorphismenring von M_1 gilt dann

$$\mathrm{id} = g_{11}f_{11} + g_{12}f_{21} + \ldots + g_{1s}f_{s1}$$

Wegen der Lokalität des Endomorphismenrings von M_1 muß hier einer der Summanden eine Einheit sein, sagen wir der Erste. Dann ist aber f_{11} eine spaltende Injektion und wegen der Unzerlegbarkeit von N_1 ein Isomorphismus. Durch geeignete Spaltenumformungen können wir nun alle anderen Einträge in der ersten Zeile der Matrix der (f_{ij}) zum Verschwinden bringen und durch geeignete Zeilenumformungen alle anderen Einträge in der ersten Spalte. Das bedeutet in anderen Worten: Bewegen wir die Zerlegung von M in die M_j mit einem geeigneten Automorphismus von M, so können wir erreichen, daß gilt $M_1 = N_1$ und $M_2 \oplus \ldots \oplus M_r = N_2 \oplus \ldots \oplus N_s$. Von da aus kommen wir dann mit einer offensichtlichen Induktion ans Ziel. □

Übungen

Übung 7.2.21. Jede endlichdimensionale Ringalgebra A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist als A-Linksmodul isomorph zur direkten Summe

$$A \cong \bigoplus_{L \in \operatorname{irr}(A\text{-Mod})} (P_L)^{\oplus \dim L}$$

der projektiven Decken P_L ihrer einfachen Moduln L, genommen jeweils mit der Vielfachheit $\dim_k L$.

7.3 Blockzerlegung

7.3.1. Gegeben Kategorien $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ definieren wir ihr **Produkt** als diejenige Kategorie $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$, deren Objekte Tupel von Objekten aus den jeweiligen Kategorien sind und deren Morphismen entsprechend Tupel von Morphismen sind, mit der offensichtlichen Verknüpfung. Darin betrachten wir die volle Unterkategorie $\bigoplus \mathcal{A}_i \subset \prod \mathcal{A}_i$ bestehend aus allen Tupeln von Objekten, die nur an endlich vielen Stellen nicht ein Nullobjekt alias initial und final sind. Wir nennen diese Kategorie die **direkte Summe** der Kategorien $\mathcal{A}_i$. Sind schließlich alle $\mathcal{A}_i$ volle Unterkategorien einer festen Kategorie $\mathcal{A}$ mit endlichen Koprodukten, so schreiben wir kurz

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

für die Aussage, daß der durch das Bilden von Koprodukten gegebene Funktor von rechts nach links eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Übungen

Übung 7.3.2 (**Blockzerlegung längenendlicher Kategorien**). Seien $\mathcal{A}$ eine längenendliche Kategorie und $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\operatorname{irr}\mathcal{A}$, die erzeugt wird von der Relation, für die gilt $L \sim N$ genau dann, wenn es nichtspaltende Erweiterungen $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow L$ von L durch N gibt. Betrachten wir für jede Teilmenge $\Omega \subset \operatorname{irr} \mathcal{A}$ die Unterkategorie $\mathcal{A}_\Omega$ aller Objekte, deren sämtliche einfachen Subquotienten zu Ω gehören, so haben wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\bigoplus_{\Omega \in \operatorname{irr}\mathcal{A}/\sim} \mathcal{A}_\Omega \stackrel{\approx}{\to} \mathcal{A}$$

mit der direkten Summe über alle Äquivalenzklassen Ω in $\operatorname{irr}\mathcal{A}$. Diese Summanden $\mathcal{A}_\Omega$ können ihrerseits nicht weiter als direkte Summen zerlegt werden und heißen die **Blöcke von** $\mathcal{A}$.

7.4 Grothendieck-Gruppen

Definition 7.4.1. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, so erklären wir die **Grothendieckgruppe** $[\mathcal{A}]$ von $\mathcal{A}$ als die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ über den Objekten modulo den Relationen $A = A' + A''$ wann immer es in $\mathcal{A}$ eine kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ gibt, in Formeln

$$[\mathcal{A}] = \mathbb{Z}\mathcal{A}/\langle A - A' - A'' \mid \text{Es gibt eine kurze exakte Sequenz } A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A'' \rangle$$

Jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ liefert ein Element $[A] \in [\mathcal{A}]$.

7.4.2. Ist G eine abelsche Gruppe und $\lambda : \mathcal{A} \to G$ eine beliebige **additive Abbildung**, was bedeuten soll, daß gilt $\lambda(A) = \lambda(A') + \lambda(A'')$ für jede kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\lambda} : [\mathcal{A}] \to G$ mit $\tilde{\lambda}[A] = \lambda(A)$.

Lemma 7.4.3. *Für jede längenendliche Kategorie bilden die Isomorphieklassen einfacher Objekte eine Basis ihrer Grothendieckgruppe.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ unsere längenendliche Kategorie. Gegeben ein Objekt $M \in \mathcal{A}$ mit Filtrierung $M = M_n \supset M_{n-1} \supset \ldots \supset M_0 = 0$ erhalten wir in der Grothendieckgruppe induktiv

$$[M_j] = \sum_{i=1}^{j} [M_i/M_{i-1}]$$

Das zeigt schon einmal, daß die einfachen Isomorphieklassen die Grothendieckgruppe erzeugen. Gegeben $L \in \operatorname{irr} \mathcal{A}$ ist andererseits die Abbildung $\mathcal{A} \to \mathbb{Z}$, die jedem Objekt A die Vielfachheit von L in einer und damit nach 7.1.4 jeder Kompositionsreihe von A zuordnet, eine additive Abbildung. Das zeigt die lineare Unabhängigkeit Isomorphieklassen einfacher Objekte in der Grothendieckgruppe. □

7.4.4. Ist A ein Objekt endlicher Länge in einer abelschen Kategorie und benutzen wir die Notation $[A : L] \in \mathbb{N}$ für die Vielfachheit von $L \in \operatorname{irr} \mathcal{A}$ in einer Kompositionsreihe von A, so gilt natürlich in der Grothendieckgruppe der besagten abelschen Kategorie die Gleichung

$$[A] = \sum_{L \in \operatorname{irr} \mathcal{A}} [A : L]\, [L]$$

Haben wir irgendeine Menge von Objekten $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ derart, daß die Klassen $[B]$ mit $B \in \mathcal{B}$ eine Basis der Grothendieckgruppe $[\mathcal{A}]$ bilden, so dehnen wir unsere Notation aus und definieren $[A : B] = [A : B]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{Z}$ durch die Gleichung

$$[A] = \sum_{B \in \mathcal{B}} [A : B]\, [B]$$

Besitzt A eine $\mathcal{B}$-Fahne, womit eine endliche Filtrierung gemeint sei, deren sukzessive Subquotienten alle isomorph sind zu gewissen Objekten von $\mathcal{B}$, so zählt $[A : B]$ diejenigen Subquotienten, die isomorph sind zu einem festen $B \in \mathcal{B}$.

Übungen

Übung 7.4.5. Jeder Funktor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von abelschen Kategorien, der kurze exakte Sequenzen zu kurzen exakten Sequenzen macht, induziert auf den Grothendieckgruppen einen Gruppenhomomorphismus $T = [T] : [\mathcal{A}] \to [\mathcal{B}]$.

7.5 Morita-Äquivalenz

7.5.1. Ein Objekt P einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ein **Separator**, wenn es für je zwei verschiedene Morphismen $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $h : P \to X$ gibt mit $fh \neq gh$. In anderen Worten bedeutet das, daß der Funktor $\mathcal{C}(P, \ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}\text{-}\mathcal{C}(P)$ von $\mathcal{C}$ in die Rechtsmengen über dem Endomorphismenmonoid von P treu ist.

7.5.2 (**Projektive Separatoren in längenendlichen Kategorien**). In einer längenendlichen Kategorie ist ein projektives Objekt P genau dann ein Separator, wenn es jedes einfache Objekt zum Quotienten hat. In der Tat folgt daraus induktiv, daß jedes Objekt ein Quotient einer endlichen direkten Summe von Kopien von P ist.

Satz 7.5.3 (**Abstrakte Morita-Äquivalenz**). *Seien $\mathcal{A}$ eine längenendliche Kategorie und $P \in \mathcal{A}$ ein projektiver Separator. So induziert der Funktor der Homomorphismen von P eine Äquivalenz von $\mathcal{A}$ mit der Kategorie aller endlich erzeugten Rechtsmoduln über dem Endomorphismenring von P, in Formeln*

$$\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{Modf}\text{-}\mathcal{A}(P)$$

Ergänzung 7.5.4. Dieser Satz ist ein nach meinem Geschmack besonders attraktiver Vertreter einer ganzen Familie von Sätzen, die auf verschiedene Weisen die Erkenntnis präzisieren, daß „abstrakte abelsche Kategorien im wesentlichen dasselbe sind wie Kategorien von Moduln über Ringen“. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch, wenn wir $\mathcal{A}$ schwächer nur noethersch annehmen. Der Endomorphismenring unseres projektiven Objekts muß dann bereits rechtsnoethersch sein, da wir die Unterobjekte von P beschreiben können als Äquivalenzklassen in der Menge aller Morphismen $P^{\oplus n} \to P$ für $n \in \mathbb{N}$ mit der durch das „gegenseitig übereinander faktorisieren“ erklärten Äquivalenzrelation. Die Anordnung auf der Menge der Unterobjekte entspricht dann der Teilordnung des „Faktorisierens“. In derselben Weise können wir die angeordnete Menge der endlich erzeugten Rechtsideale von $E := \mathcal{A}(P)$ beschreiben, die folglich zur Menge der Unterobjekte von P ordnungsisomorph ist. Das aber zeigt dann, daß E rechtsnoethersch sein muß.

Vorschau 7.5.5. Ist $\mathcal{A}$ eine beliebige abelsche Kategorie und P ein projektives Objekt endlicher Länge, so betrachten wir die Serre-Unterkategorie $\mathcal{K} := \{M \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A}(P, M) = 0\}$ und finden in **??**, daß $\mathcal{A}(P, \ )$ eine Äquivalenz von der Kategorie der Objekte endlicher Länge im Quotienten $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ mit der Kategorie $\mathrm{Modf}\text{-}\mathcal{A}(P)$ der endlich erzeugten Rechtsmoduln über dem Endomorphismenring von P induziert. Dasselbe gilt hoffentlich mit demselben Beweis, wenn P noethersch ist und wir die noetherschen Objekte von $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ betrachten.

Beweis. Für ein beliebiges Objekt P einer beliebigen abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ mit Endomorphismenring $E = \mathcal{A}(P)$ haben wir einen Funktor

$$H = \mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}\text{-}E$$

Er bildet das Objekt P auf seinen Endomorphismenring E ab. Der durch Linksmultiplikation gegebene Ringisomorphismus $E \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{-E} E$ zeigt, daß unser Funktor eine Äquivalenz $\langle P \rangle_{\oplus} \xrightarrow{\approx} \langle E \rangle_{\oplus}$ induziert zwischen der vollen Unterkategorie aller zu endlichen direkten Summen von Kopien von P isomorphen Objekte von $\mathcal{A}$ und der vollen Unterkategorie aller zu endlichen direkten Summen von Kopien von E isomorphen Objekte von $\mathrm{Mod}\text{-}E$. Ist P projektiv, so ist unser Funktor $\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}\text{-}E$ zusätzlich exakt und macht einfache Objekte aus $\mathcal{A}$ zu einfachen E-Moduln oder zu Null, denn für je zwei Surjektionen a, b von P auf ein- und dasselbe einfache Objekt gibt es $r \in E$ mit $ar = b$. Ist zusätzlich P von endlicher Länge, so ist folglich auch sein Endomorphismenring E von endlicher Länge als E-Rechtsmodul. Ist $\mathcal{A}$ eine längenendliche Kategorie, so liefert sicher jedes projektive Objekt $P \in \mathcal{A}$ einen exakten Funktor

$$\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Modf}\text{-}E$$

Wir müssen noch zeigen, daß dieser Funktor sogar eine Surjektion auf Isomorphieklassen liefert und daß er volltreu ist. Da aber E unter unseren Voraussetzungen insbesondere rechtsnoethersch ist, besitzt jeder endlich erzeugte E-Rechtsmodul M eine Auflösung der Gestalt $E^n \to E^m \twoheadrightarrow M$ und wir folgern $M \cong H(\mathrm{coker}(P^n \to P^m))$, als da heißt H liefert eine Surjektion auf Isomorphieklassen. Ist zusätzlich jedes einfache Objekt ein Quotient von P, so finden wir für jedes $B \in \mathcal{A}$ eine rechtsexakte Sequenz der Gestalt $P^n \to P^m \twoheadrightarrow B$. Sie bleibt rechtsexakt unter H. Für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ betrachten wir dann das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}(P^n, A) & \leftarrow & \mathcal{A}(P^m, A) & \hookleftarrow & \mathcal{A}(B, A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{-E}(HP^n, HA) & \leftarrow & \mathrm{Hom}_{-E}(HP^m, HA) & \hookleftarrow & \mathrm{Hom}_{-E}(HB, HA)
\end{array}$$

mit exakten Zeilen. Die beiden linken vertikalen Isomorphismen müssen dann rechts einen vertikalen Isomorphismus zwischen den Kernen der linken Horizontalen induzieren. Das zeigt, daß H volltreu ist. □

Beispiel 7.5.6. Ist $\mathcal{A}$ die Kategorie aller endlichdimensionalen Vektorräume über einem Körper k und $P = k^n$ der Vektorraum der Zeilenmatrizen mit der natürlichen Rechtsoperation des Matrizenrings $\mathrm{Mat}(n; k)$, so spezialisiert unser Satz zu einer Äquivalenz $k\text{-Modf} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mat}(n; k)\text{-Modf}$. Das ist hinwiederum ein Spezialfall einer sehr allgemeinen Aussage [KAG] 2.3.17, die ihrerseits nicht mehr aus unserem Satz folgt: Für jeden Ring R liefert der Funktor $\mathrm{Mod}_R(R^n, \ )$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$R\text{-Mod} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mat}(n; R)\text{-Mod}$$

7.6 Darstellungen von Köchern*

7.6.1. Wir erinnern die Terminologie der Köcher aus [LA2] 7.6.2. Ein **Köcher** (englisch **quiver**, französisch **carquois**) ist ein Datum $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ bestehend aus zwei Mengen P, E und zwei Abbildungen $a, e : P \to E$. Wir nennen die Elemente von P die **Pfeile** des Köchers und die Elemente von E seine **Ecken** oder auch **Punkte**. Für einen Pfeil $\vec{p} \in P$ nennen wir $a(\vec{p})$ seinen **Anfangspunkt** und $e(\vec{p})$ seinen **Endpunkt**. Ein **Morphismus** F von unserem Köcher in einen weiteren Köcher (P', E', a', e') ist ein Paar bestehend aus einer Abbildung $F : P \to P'$ auf den Pfeilen und einer Abbildung $F : E \to E'$ auf den Ecken derart, daß gilt $Fa = a'F$ und $Fe = e'F$. Wir erhalten so die Kategorie aller Köcher

$$\mathrm{Car}$$

Ähnlich wie bei Kategorien schreiben wir gerne abkürzend $\mathcal{K}$ für die Eckenmenge eines Köchers $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ und $\mathcal{K}(x, y)$ für die Menge der Pfeile mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.

Definition 7.6.2. Eine **Darstellung eines Köchers** $\mathcal{K}$ über einem Körper k ist ein Köchermorphismus $V : \mathcal{K} \to \mathrm{Mod}_k$. Ein **Morphismus** von Darstellungen von Köchern ist eine Transformation zwischen Köchermorphismen.

7.6.3. Die Darstellungen eines Köchers über einem Körper k bilden mit der offensichtlichen k-Struktur eine abelsche k-Kategorie. Die Kategorie der Darstellungen eines Köchers $\mathcal{K}$ über einem Körper k kann besonders konzise beschrieben werden als die Kategorie $\mathrm{Car}(\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$. Etwas ausführlicher ist eine Darstellung eines Köchers (P, E, a, e) über einem Körper k eine Zuordnung V, die jeder Ecke $q \in E$ einen k-Vektorraum V_q zuordnet und jedem Pfeil $p \in P$ eine k-lineare Abbildung

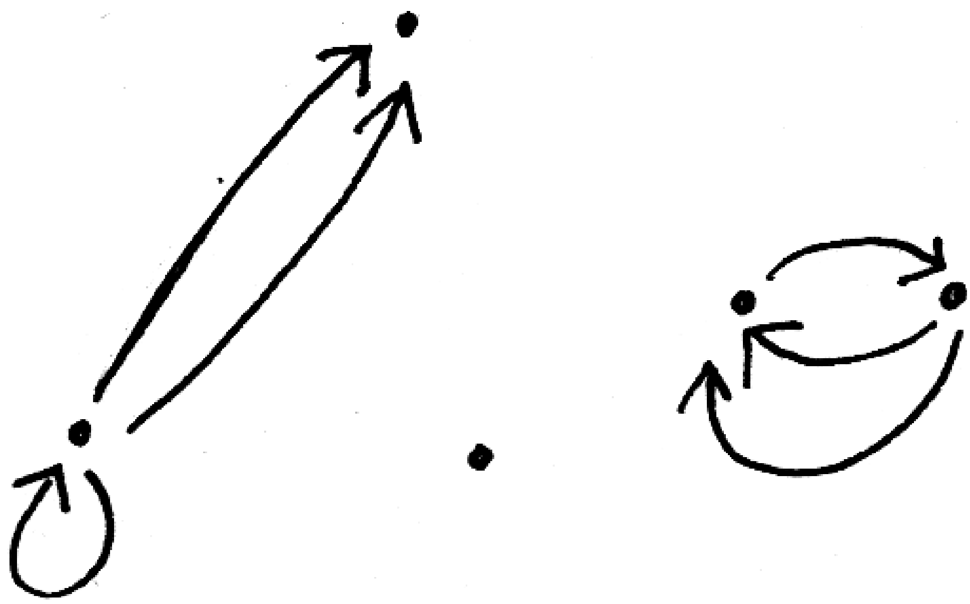
$$V(p) : V_{a(p)} \to V_{e(p)}$$

Gegeben zwei Darstellungen V, W unseres Köchers über einem Körper k ist weiter ein Morphismus von Darstellungen $\varphi : V \to W$ eine Familie von k-linearen Abbildungen $\varphi_q : V_q \to W_q$ für $q \in E$ derart, daß für alle Pfeile $p \in P$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_{a(p)} & \xrightarrow{V(p)} & V_{e(p)} \\ \varphi_{a(p)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{e(p)} \\ W_{a(p)} & \xrightarrow{W(p)} & W_{e(p)} \end{array}$$

7.6.4. Nach [TD] 1.1.5 liefert das Vorschalten des kanonischen Köchermorphismus $\varepsilon : \mathcal{K} \to \tilde{\mathcal{K}}$ von einem Köcher in seine Pfadkategorie für jeden Körper k einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Cat}(\tilde{\mathcal{K}}, \mathrm{Mod}_k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Car}(\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$$



Ein Köcher mit 5 Ecken und 6 Pfeilen.

Eine Darstellung eines Köchers $\mathcal{K}$ ist also salopp gesprochen dasselbe wie ein Funktor $\tilde{\mathcal{K}} \to \mathrm{Mod}_k$.

7.6.5. Besitzt ein Köcher $\mathcal{K}$ nur endlich viele Punkte, so bilden wir dazu zu jedem Körper k eine k-Ringalgebra, seine **Wegealgebra**

$$W = \mathrm{W}_k(\mathcal{K})$$

Als zugrundeliegenden k-Vektorraum nehmen wir den freien k-Vektorraum über der Menge $\bigsqcup_{x,y \in E} \tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ aller Wege unseres Köchers. Darin erklären wir das Produkt $w \circ v$ zweier Wege als das Aneinanderhängen, wenn w da anfängt wo v aufhört, und setzen sonst schlicht $w \circ v = 0$. Die Multiplikation in der Wegealgebra schließlich erklären wir durch lineare Fortsetzung. Der Weg der Länge Null an einem Punkt x ist die Identität id_x des Objekts x in der Pfadkategorie und wir notieren ihn $e_x \in W$ als Element der Wegealgebra. Das Einselement der Wegealgebra ist der Ausdruck $1_W = \sum_{x \in E} e_x$ und die e_x sind paarweise orthogonale Idempotente. Wir erhalten in diesem Fall eine Äquivalenz

$$\mathrm{Mod}_W \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{Car}(\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$$

zwischen der Kategorie der Moduln über der Wegealgebra und der Kategorie der Darstellungen des Köchers, indem wir einem W-Modul M den Köchermorphismus zuordnen, der jeden Punkt $x \in E$ auf den k-Vektorraum $e_x M$ wirft und jeden Pfeil p von x zu einer weiteren Ecke y auf das Daranmultiplizieren des entsprechenden Elements der Wegealgebra, einer k-linearen Abbildung $e_x M \to e_y M$.

Definition 7.6.6. Eine **k-lineare Relation** in einem Köcher $\mathcal{K}$ ist eine formale Linearkombination von Wegen mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt, in Formeln ein Element von $k\tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ für feste Ecken $x, y \in E$.

Definition 7.6.7. Eine **Darstellung eines Köchers mit Relationen** $(\mathcal{K}, R)$ ist eine Darstellung derart, daß „alle Relationen erfüllt sind“, daß also alle Relationen die Nullabbildung vom Vektorraum des Anfangspunkts der jeweiligen Relation in den Vektorraum ihres Endpunkts liefern. In unserer Notation meint R eine Menge von Relationen.

7.6.8. Die Kategorie aller Darstellungen eines Köchers mit Relationen $(\mathcal{K}, R)$ ist abelsch. Besitzt der Köcher nur endlich viele Ecken, so ist sie äquivalent zur Kategorie aller Moduln über dem Quotienten der $\mathrm{W}(\mathcal{K})/\langle R \rangle$ der Wegealgebra nach dem von den Relationen erzeugten beidseitigen Ideal.

Definition 7.6.9. Wir nennen einen Köcher mit Relationen **nilpotent**, wenn es ein n gibt derart, daß alle Wege der Länge n zu dem von den Relationen erzeugten beidseitigen Ideal der Wegealgebra gehören.

Definition 7.6.10. Wir nennen einen Köcher mit Relationen **reduziert**, wenn in den Relationen keine Wege der Längen Null oder Eins mit von Null verschiedenen Koeffizienten vorkommen.

Satz 7.6.11 (Köcher für längenendliche k-Kategorien). *Seien k ein Körper und $\mathcal{A}$ eine längenendliche k-Kategorie mit endlich vielen einfachen Isomorphieklassen, genügend Projektiven und mit der Eigenschaft, daß der Endomorphismenring jedes einfachen Objekts eindimensional ist über k. So gilt:*

1. *Unsere Kategorie $\mathcal{A}$ ist äquivalent als k-Kategorie zur Kategorie der endlichdimensionalen Darstellungen eines endlichen reduzierten nilpotenten Köchers mit Relationen;*

2. *Jede derartige Äquivalenz liefert eine Bijektion zwischen den Ecken des Köchers und den einfachen Isomorphieklassen unserer Kategorie und für $L, M \in \operatorname{irr} \mathcal{A}$ eine durch die Menge der Pfeile von L nach M indizierte k-Basis von $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(L, M)$.*

7.6.12. Der Satz gilt insbesondere für die Kategorie der endlichdimensionalen Moduln über einer endlichdimensionalen Ringalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.

7.6.13. Der fragliche Köcher wird zwar durch unsere längenendliche k-Kategorie $\mathcal{A}$ eindeutig festgelegt, keineswegs aber die Relationen. Der Beweis wird zeigen, daß auch jede Wahl von durch die Pfeile des Köchers indizierten Basen der jeweiligen Erweiterungsgruppen von einer Äquivalenz herkommt.

Beweis. Sei $L_1, \ldots, L_r$ ein Repräsentantensystem der einfachen Isomorphieklassen. Bezeichne $P_i \twoheadrightarrow L_i$ die jeweiligen projektiven Decken nach 7.1.27 und $P = \bigoplus P_i$ ihre Summe. Dieses Objekt ist ein projektiver Separator und nach 7.5.3 liefert das Bilden der von P ausgehenden Morphismen eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \stackrel{\approx}{\to} \text{Modf-}\,\mathcal{A}(P)$$

Um die Arbeit mit Rechtsmoduln zu vermeiden, setzen wir $A := \mathcal{A}(P)^{\text{opp}}$. Die Projektoren $e_i := \operatorname{pr}_i^\circ$ auf die Summanden bilden in A eine Familie von paarweise orthogonalen Idempotenten mit Summe $1 = \sum e_i$. Bezeichne $J \subset A$ das Jacobsonradikal. Nach 7.2.9 und 7.1.23 bilden die $\bar{e}_i$ eine k-Basis von A/J und liefern so einen Isomorphismus von k-Ringalgebren

$$ke_1 \times \ldots \times ke_r \stackrel{\sim}{\to} A/J$$

Weiter liefert Übung [TG] 3.2.39 für einen beliebigen Ring A mit einem zweiseitigen Ideal J einen Isomorphismus $\operatorname{Hom}_{A/J}(J/\langle J^2 \rangle, A/J) \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Ext}^1_A(A/J, A/J)$ von A/J-Bimoduln und damit in unserem Fall Isomorphismen

$$e_i(J/\langle J^2 \rangle)e_j \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Ext}^1_A(L_j, L_i)^*$$

von k-Vektorräumen. Da A eine endlichdimensionale k-Ringalgebra ist, stimmen die Ext^1-Gruppen in der Kategorie aller A-Moduln und in der Kategorie aller endlichdimensionalen A-Moduln überein und sind damit nach unserer Äquivalenz von Kategorien auch isomorph zu den entsprechenden Ext^1-Gruppen in $\mathcal{A}$. Nach 7.2.9 ist in unserem Fall weiter J ein nilpotentes Ideal, mithin wird A als k-Ringalgebra erzeugt von den e_i für $1 \leq i \leq r$ und Repräsentanten in $e_i J e_j$ von je einer Basis der k-Vektorräume $e_i(J/\langle J^2\rangle)e_j$ für $1 \leq i, j \leq r$. In anderen Worten haben wir so A beschrieben als die Köcheralgebra eines endlichen reduzierten nilpotenten Köchers mit Relationen und Teil 1 ist bewiesen. Um Teil 2 zu zeigen, müssen wir nur prüfen, daß in der Kategorie der endlichdimensionalen Darstellungen eines endlichen reduzierten nilpotenten Köchers mit Relationen die Darstellungen mit k an einer Ecken und Null an allen anderen Ecken und Nullabbildungen für alle Pfeile eine Repräsentantensystem der einfachen Darstellungen bilden und daß die durch „ein Pfeil wird die Identität, die anderen werden zu Null" gegebenen Erweiterungen zwischen derartigen einfachen Darstellungen eine Basis der entsprechenden Erweiterungsräume liefern. Das mag dem Leser überlassen bleiben. □

7.6.14. Seien k ein Körper und A eine endlichdimensionale Ringalgebra über k und $J \subset A$ das Jacobsonradikal. Ist A/J separabel über k, das gilt zum Beispiel stets für k von der Charakteristik Null, so gibt es nach dem Spaltungssatz von Wedderburn [TG] 3.3.9 eine Unterringalgebra $S \subset A$ mit $A = S \oplus J$ als k-Vektorraum. Des weiteren ist dann, das ist gerade die Definition der Separabilität, der Ring $S \otimes_k S^{\mathrm{opp}}$ halbeinfach. Insbesondere finden wir einen S-Unterbimodul $I \subset J$ mit $I \xrightarrow{\sim} J/J^2$ und nach 7.2.9 liefert die Multiplikation eine Surjektion

$$\mathrm{T}_S I \twoheadrightarrow A$$

der freien Tensoralgebra des S-Bimoduls I auf A. Nach Annahme ist der Kern dieser Surjektion enthalten im Ideal $\mathrm{T}_S^{\geq 2} I$ der Tensoren vom Grad mindestens zwei. Da wir endliche Dimension angenommen hatten, umfaßt er $\mathrm{T}_S^{\geq n} I$ für $n \gg 0$. Unsere Isomorphismen $\mathrm{Hom}_{A/J}(J/\langle J^2\rangle, A/J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^1(A/J, A/J)$ gelten weiter und übersetzen sich in Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_S(I, S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^1(S, S)$$

Beide Seiten sind S-Bimoduln vermittels der Rechtsoperation von S auf S und I und darunter, das habe ich nun schnell geraten, sind unsere Abbildungen Bimodulisomorphismen. Will man also Erweiterungen einfacher A-Moduln L, M verstehen, so gilt es, Idempotente $e_L, e_M \in S$ zu wählen mit $L \cong Se_L$ und $M \cong Se_M$ und dann erhalten wir

$$\mathrm{Hom}_S(Ie_L, Se_M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^1(L, M)$$

Ziehe ich mich nun weiter zurück auf $\operatorname{char} k = 0$, so ist für beliebige endlichdimensionale S-Moduln P, Q die Abbildung „verknüpfe und nimm die k-Spur“ eine nicht ausgeartete Paarung

$$\operatorname{Hom}_S(P, Q) \times \operatorname{Hom}_S(Q, P) \to k$$

Speziell liefert sie einen Isomorphismus $\operatorname{Hom}_S(Ie_L, Se_M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_S(Se_M, Ie_L)^*$ in den k-Dualraum. Nach 5.1.9 liefert andererseits das Auswerten auf dem Idempotenten e_M einen Isomorphismus $\operatorname{Hom}_S(Se_M, Ie_L) \xrightarrow{\sim} e_M Ie_L$ und so erhalten wir schließlich zumindest in Charakteristik Null einen wohlbestimmten Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$(e_M Ie_L)^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^1_A(L, M)$$

7.6.15 (**Endlichdimensionale Ringalgebren und Köcher**). Für jede endlichdimensionale Ringalgebra B über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist $B\text{-Modf}$ eine längenendliche k-lineare Kategorie mit genug Projektiven und nach dem Schur'schen Lemma ist auch der Endomorphismenring jedes einfachen Moduls k-eindimensional. Wir finden nach 7.6.11 also einen endlichen reduzierten nilpotenten Köcher mit Relationen $(\mathcal{K}, R)$ und eine Äquivalenz von Kategorien

$$B\text{-Modf} \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{W}(\mathcal{K})/\langle R\rangle\text{-Modf}$$

Unter dieser Äquivalenz entspricht der projektive Separator B links einem projektiven Separator rechts, sagen wir

$$B \mapsto P_1^{\oplus m(1)} \oplus \ldots \oplus P_r^{\oplus m(r)}$$

für Vielfachheiten $m(1), \ldots, m(r) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. So finden wir für $A := \mathrm{W}(\mathcal{K})/\langle R\rangle$ die Algebra unseres Köchers mit Relationen Isomorphismen von k-Algebren

$$\begin{array}{lclcl} B^{\mathrm{opp}} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{End}_B(B) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{End}_A(P_1^{\oplus m(1)} \oplus \ldots \oplus P_r^{\oplus m(r)}) \\ A^{\mathrm{opp}} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{End}_A(A) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{End}_A(P_1 \oplus \ldots \oplus P_r) \end{array}$$

Die $m(i)$ sind dann die Dimensionen der einfachen B-Moduln und das Tensorieren mit dem A-B-Bimodul

$$\operatorname{Hom}(P_1^{\oplus m(1)} \oplus \ldots \oplus P_r^{\oplus m(r)}, P_1 \oplus \ldots \oplus P_r)$$

induziert eine Äquivalenz von Kategorien $B\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} A\text{-Mod}$ und analog konstruiert man eine quasiinverse Äquivalenz.

Proposition 7.6.16 (Standardauflösung). *Gegeben ein Körper k und ein Köcher $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ mit endlich vielen Ecken und Köcheralgebra A und ein Modul $M \in A\text{-Mod}$ über der Köcheralgebra erhalten wir eine kurze exakte Sequenz*

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{\vec{p}\in P} A\,\mathrm{id}_{a(\vec{p})} \otimes_k \mathrm{id}_{e(\vec{p})} M & \hookrightarrow & \bigoplus_{z\in E} A\,\mathrm{id}_z \otimes_k \mathrm{id}_z M & \twoheadrightarrow & M \\ a \otimes m & \mapsto & a\vec{p} \otimes m - a \otimes \vec{p}m & & \\ & & a \otimes m & \mapsto & am \end{array}$$

Beweis. Daß die Verknüpfung verschwindet, scheint mir evident. Um die Exaktheit zu zeigen, erklären wir eine Filtrierung $0 \subset A^{\leq 0} \subset A^{\leq 1} \subset \ldots$ auf A nach der Weglänge. Filtrieren wir M durch $0 = M^{\leq -1} \subset M^{\leq 0} = M$, so erhalten wir eine Filtrierung unseres Komplexes durch Unterkomplexe

$$\bigoplus_{\vec{p}\in P} A^{\leq \nu - 1}\,\mathrm{id}_{a(\vec{p})} \otimes \mathrm{id}_{e(\vec{p})} M \to \bigoplus_{z\in E} A^{\leq \nu}\,\mathrm{id}_z \otimes \mathrm{id}_z M \to M^{\leq \nu}$$

Nach [KAG] 7.1.16 reicht es zu zeigen, daß die Sequenz der assoziierten graduierten Vektorräume exakt ist. Im Grad Null gibt es da nur die beiden hinteren Terme und einen Isomorphismus zwischen diesen, und in höheren Graden gilt dasselbe für die beiden vorderen Terme. □

Übungen

Übung 7.6.17. Man finde einen Isomorphismus zwischen der Ringalgebra der unteren $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen und der Wegealgebra des Köchers mit Eckenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$ und Pfeilmenge $\{(i, i+1) \mid 1 \leq i < n\}$.

7.7 Verschiedenes

Satz 7.7.1 (Jacobson-Morozov). *Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt und $N : X \to X$ ein nilpotenter Endomorphismus von X. So besitzt X genau eine endliche Filtrierung $(X^{\geq r})_{r\in\mathbb{Z}}$ derart, daß für alle r gilt $N(X^{\geq r}) \subset X^{\geq r+2}$ und für alle $r \in \mathbb{N}$ zusätzlich*

$$N^r : X^{\geq -r}/X^{\geq -r+1} \stackrel{\sim}{\to} X^{\geq r}/X^{\geq r+1}$$

7.7.2. Unter einer **endlichen Filtrierung** verstehen wir hier wie in [KAG] 7.1.3 eine von Null kommende und voll endende Filtrierung.

Beweis. Gegeben $r \in \mathbb{N}$ mit $N^r = 0$ liefern unsere Annahmen offensichtlich $\ldots = X^{\geq -r-1} = X^{\geq -r} = X^{\geq -r+1}$ und ebenso $X^{\geq r} = X^{\geq r+1} = X^{\geq r+2} = \ldots$ Wenn unsere Filtrierung voll endet, so folgt $X = X^{\geq -r+1}$, und wenn unsere

Filtrierung von Null kommt, so folgt $X^{\geq r} = 0$. Gilt $r = 0$, so folgt $X = 0$ und die Behauptung ist klar. Gilt $r \geq 1$, so folgt $X^{\geq r-1} = \operatorname{im} N^{r-1}$ und $X^{\geq -r+2} = \ker N^{r-1}$ und im Fall $r = 1$ erhalten wir $X^{\geq 0} = X$ und $X^{\geq 1} = 0$ und die Behauptung ist wieder klar. Im Fall $r \geq 2$ schließlich gilt $\operatorname{im} N^{r-1} \subset \ker N^{r-1}$ und wir können zu $Y := \ker N^{r-1} / \operatorname{im} N^{r-1}$ übergehen und per Induktion darauf eine eindeutig bestimmte Filtrierung mit den gewünschten Eigenschaften finden. Die Urbilder in $\ker N^{r-1}$ dieser Filtrierung auf Y ergänzt um $X^{\geq -r+1} = X$ und $X^{\geq r} = 0$ bilden dann eine Filtrierung auf X mit den gewünschten Eigenschaften. Deren Eindeutigkeit folgt leicht mit derselben Induktion. $\square$

8 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Frau Noemi Joosten, Frau Natascha Moser, Frau Bettina Eiche, Leonardo Patimo, Salomon Brugger, . . .

9 Die Vorlesung Darstellungstheorie im SS 16

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

19.4 Beginn der Darstellungstheorie endlicher Gruppen nach [NAS] 1.1, aber nicht Darstellungen als Multikategorie [NAS] 3.8.3. Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring [NAS] 1.2, aber nicht freie abelsche Gruppen mit Involution [NAS] 1.2.10.

22.4 Satz von Jordan-Hölder für Moduln [NAS] 2.2.13. Halbeinfache Moduln [NAS] 2.3. Isotypische Anteile [NAS] 2.3.8 und Sockel. Dichtesatz von Jacobson [NAS] 3.3.1.

26.4 Lemma von Schur [NAS] 3.2.1. Nicht Darstellungen von Produkten. Satz von Maschke [NAS] 4.1.1. Diskrete Fouriertransformation [NAS] 4.2.3. Spuren in Algebren [NAS] **??**. Charaktere und Charakter-Projektor-Formel [NAS] 4.2.19.

28.4 Orthogonalitätsrelationen für Charaktere [NAS] **??**, [NAS] **??**, [NAS] 4.3.10 und Matrixkoeffizienten [NAS] **??**. Dimension einfacher Darstellungen [NAS] 4.4.2. Inverse Fouriertransformation und Matrixkoeffizienten [NAS] **??**.

3.5 Einfache Darstellungen von Produkten [NAS] 3.4.3. Haar'sche Maße als Radonmaße auf lokal kompakten Hausdorffgruppen [TM] 4.3.3 ohne Beweis. Charaktere der einfachen endlichdimensionalen stetigen Darstellungen Orthonormalsystem in den Klassenfunktionen, mit dichtem Erzeugnis in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz [TM] 4.9.15, beides noch ohne Beweis.

10.5 Orthogonalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten [TM] **??** und Charaktere [TM] 4.9.15 auf kompakten Hausdorffgruppen.

12.5 Untergruppen als Untermannigfaltigkeiten [ML] 1.2.3. Deren Tangentialraum und die Exponentialabbildung [ML] 1.2.11. Beispiele $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Angefangen mit dem Kommutator auf dem Tangentialraum.

24.5 Lie-Algebra einer Matrix-Liegruppe [ML] 1.3. Adjungierte Darstellung [ML] 1.3.3. Lie-Algebren von Schnitten. Einparameteruntergruppen [ML] 1.4.3, [ML] 1.4.5. Homomorphismen von Matrix-Liegruppen [ML] 1.4.10. Noch nicht gezeigt, daß das Differential mit der Lieklammer verträglich ist.

31.5 Verträglichkeit von Differential und Lie-Klammer. Ableiten von Darstellungen. Ableiten der adjungierten Darstellung. Verflechtungsoperatoren für

Liegruppen und Liealgebren. Unterdarstellungen für Liegruppen und Liealgebren. Einfache Darstellungen von Liegruppen und Liealgebren.

2.6 Einfache Darstellungen von $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SO}(3)$ und $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ nach [ML] 2.3.2, [ML] 2.3.5, [ML] 2.3.9. Klassifikation der kompakten zusammenhängenden Liegruppen nach [ML] 5.5.3 ohne Beweis. Beispiele niedrigen Ranges, noch nicht $\mathrm{U}(n)$.

7.6 Ausführlich $\mathrm{U}(n)$ besprochen, mit maximalen Tori, Weylgruppe, Wurzelsystem, nach [ML] 5.5.2 und [ML] 5.5.6. Geometrie endlicher Spiegelungsgruppen nach [SPW] 1.6.1, insbesondere frei transitive Operation auf der Menge der Alkoven und erzeugt von Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven. Klassifikation einfacher Darstellungen durch höchstes Gewicht begonnen.

9.6 Klassifikation durch das höchste Gewicht [ML] 5.8.5, Surjektivität steht noch aus. Weyl'sche Integrationsformel [ML] 5.10.1 ohne Beweis.

14.6 Weyl'sche Formeln bewiesen bis auf Dimensionsformel und Integrationsformel. Klassifikation durch das höchste Gewicht beendet.

16.6 Dimensionsformel und Integrationsformel bewiesen.

21.6 Einfache, einfache, halbeinfache, reduktive Liealgebren [HL] 1.1.18. Liealgebren kompakter Liegruppen reduktiv. Universelle einhüllende Algebra [?] **??**.

23.6 Struktur halbeinfacher komplexer Lie-Algebren. Cartan'sche und ihr Bezug zu maximalen Tori, Wurzelsystem, Wurzelraumzerlegung, Weylgruppe. Verma-Moduln, speziell im Fall $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Frei über $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$. Noch nicht: Eindeutiger einfacher Quotient, universelle Eigenschaft.

28.6 Eindeutiger einfacher Quotient, universelle Eigenschaft von Verma-Moduln. Kostant'sche Partitionsfunktion. Endlichdimensionale Darstellungen. Casimir-Operator begonnen.

30.6 Casimir-Operator, Kostant'sche Charakterformel [?] **??**, Weyl'sche Charakterformel nocheinmal bewiesen.

5.7 Vermamoduln und Hauptseriendarstellungen. Harish-Chandra-Isomorphismus, noch ohne Injektivität und Surjektivität. Chevalley-Isomorphismus noch ohne Beweis, aber Beispiel $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$.

7.7 Herleitung des Chevalley-Isomorphismus und des Harish-Chandra-Isomorphismus.

12.7 Zentrale Charaktere, einfache Verma-Moduln, Kategorie $\mathcal{O}$. Noch nicht den interessanten Fall von Beispiel $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ behandelt.

14.7 Hauptblock von $\mathcal{O}$ im Fall $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ als Darstellungen von Köcher. Blockzerlegung von $\mathcal{O}$. Projektive Vermamoduln, Existenz von genug Projektiven mit Vermafahne.

19.7 Verschiebungsfunktoren, deren Effekt auf Vermamoduln, Äquivalenz durch Verschiebung.

21.7 BGG-Reziprozität, Verschiebung durch die Wand, Multiplizitäten in Vermamoduln im Hauptblock von $\mathfrak{sl}(3;\mathbb{C})$, Hecke-Algebra der symmetrischen Gruppe, Kazhdan-Lusztig-Vermutung.

10 Nichtkommutative Algebra und Symmetrie SS 19

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

23.4 Beginn der Darstellungstheorie endlicher Gruppen nach [NAS] 1.1, aber nicht Darstellungen als Multikategorie [NAS] 3.8.3. Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring [NAS] 1.2, aber nicht freie abelsche Gruppen mit Involution [NAS] 1.2.10. Einfache Moduln über Ringen [NAS] 2.2.9.

25.4 Satz von Jordan-Hölder für Moduln [NAS] 2.2.13. Charakterisierung halbeinfacher Moduln [NAS] 2.3.4.

30.4 Isotypische Anteile [NAS] 2.3.8 und Sockel. Dichtesatz von Jacobson [NAS] 3.3.1. Struktur halbeinfacher Ringe [NAS] 3.5.4.

2.5 Lemma von Schur. Satz von Maschke. Einfache Darstellungen von Produkten versprochen. Nach der Pause Tensorprodukte diskutiert.

7.5 Einfache Darstellungen von Produkten. Diskrete Fouriertransformation mit Korollaren. Spur auf Algebren. Projektoren, aber noch nicht Charakter-Projektor-Formel.

9.5 Charaktere. Charakter-Projektor-Formel 4.2.19. Orthonormalität einfacher Charaktere 4.3.1 und 4.3.3. Charaktertafel und Orthogonalitätsrelationen darin 4.3.10. Die Dimensionen einfacher Darstellungen teilen die Gruppenordnung 4.4.2. Noch nicht Unabhängigkeit von der Charakteristik 4.4.3.

14.5 Unabhängigkeit von der Charakteristik 4.4.3. War wohl zu schwer, da brauchte man zu viel kommutative Algebra. Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten. War wohl zu allgemein. Die inverse Fouriertransformation habe ich angefangen. Nächstes Mal fertig machen.

16.5 Inverse Fouriertransformation, mittlerweile auch 4.2.3. Orthonormalbasis des komplexen Gruppenrings durch Matrixkoeffizienten 4.3.6. Darstellungen der symmetrischen Gruppe angefangen.

21.5 Darstellungen der symmetrischen Gruppe besprochen. Robinson-Schensted-Algorithmus. Obere Abschätzung der Dimensionen der einfachen Darstellungen nicht ausgeführt.

23.5 Haar'sches Maß ohne Beweis. Darstellende Funktionen. Invariantes Skalarprodukt. Hauptsatz der Fouriertheorie auf kompakten Hausdorffgruppen, noch ohne Beweis.

28.5 Beweise zum Hauptsatz der Fouriertheorie auf kompakten Hausdorffgruppen [TM] 4.9.5. Das habe ich danach nocheinmal gründlich überarbeitet.

4.6 Leonardo vertritt mich und diskutiert die Beziehungen zwischen reellen, komplexen und quaternionalen Darstellungen.

6.6 Leonardo vertritt mich und diskutiert die Beziehungen zwischen reellen, komplexen und quaternionalen Darstellungen.

18.6 Klassifikation der einfachen Darstellungen der $\mathrm{SO}(3)$ nach [ML] 1.1.17 als Fernziel deklariert. Tangentialraum und Exponentialabbildung nach [ML] 1.2.3 besprochen und versprochen, das nächste Mal wieder zur Algebra zurückzukommen.

25.6 Tangentialraum bei der Eins an Matrixliegruppe stabil unter dem Kommutator. Lie-Algebren. Gruppenwege in Matrixliegruppen. Stetige Homomorphismen von Matrixliegruppen glatt. Darstellungen von zusammenhängenden Matrixliegruppen und ihren Liealgebren.

27.6 Einfache Darstellungen von $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{SO}(3)$ und $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Einfache Darstellungen von $\mathrm{SU}(n)$ versprochen.

2.7 Sätze von Engel [HL] 1.4.1, [HL] 1.4.18 und Lie [HL] 1.5.2. Klassifikation durch das höchste Gewicht versprochen.

4.7 Auflösbarkeitskriterium von Cartan [HL] 1.6.1 und [HL] 1.6.12. Charakterisierung halbeinfacher Liealgebren [HL] 1.7.9.

9.7 Satz von Weyl [HL] 2.1.6. Jordan-Zerlegung nur bis [HL] 2.2.10, eigentlicher Beweis steht noch aus.

11.7 Jordanzerlegung fertig. Wurzelraumzerlegung begonnen. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ gezeigt, Rest noch nicht.

16.7 Wurzelraumzerlegung fertig. Klassifikation halbeinfacher Liealgebren durch Wurzelsysteme besprochen. Klassifikation durch das höchste Gewicht noch ohne Beweis.

18.7 Klassifikation durch das höchste Gewicht: Wohldefiniertheit der Abbildung bewiesen und deren Injektivität. Struktur der dominanten Gewichte. Surjektivität im Fall der speziellen linearen Liealgebra.

23.7 Einhüllende Algebra. Poincaré-Birkhoff-Witt ohne Beweis, nur Skizze. Verma-Moduln und ihre eindeutig bestimmten einfachen Quotienten. Noch nicht gezeigt, daß diese für dominante Gewichte endlichdimensional sind. Weyl'sche Dimensionsformel angegeben und Beweis versprochen.

25.7 Beweis der Klassifikation durch das höchste Gewicht zu Ende gebracht. Weyl'sche Charakterformel angegeben und für $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ geprüft. Ausblick auf Kazhdan-Lusztig-Vermutung und deren Beweis. Bezug zum unitären Dual und dessen Bedeutung in der Physik angerissen.

Literatur

[AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.

[AN2] Skriptum Analysis 2. Wolfgang Soergel.

[AN3] Skriptum Analysis 3. Wolfgang Soergel.

[Bou12] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples.* Berlin: Springer, 2nd revised ed. of the 1958 original edition, 2012. doi:10.1007/978-3-540-35316-4.

[FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Springer, 1991.

[GR] Skriptum Grundlagen. Wolfgang Soergel.

[HL] Skriptum halbeinfache Lie-Algebren. Wolfgang Soergel.

[Jam78] G. D. James. *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, volume 682 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1978.

[JK81] Gordon James and Adalbert Kerber. *The Representation Theory of the Symmetric Group*, volume 16 of *Encyclopedia*. Addison-Wesley, 1981.

[JS06] Jens Carsten Jantzen and Joachim Schwermer. *Algebra*. Springer, 2006.

[KAG] Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie. Wolfgang Soergel.

[LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.

[LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.

[ML] Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen. Wolfgang Soergel.

[NAS] Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie. Wolfgang Soergel.

[Sag00] Bruce E. Sagan. *The Symmetric Group*. Springer, 2000.

[SPW] Skriptum Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme. Wolfgang Soergel.

[TD] Skriptum Derivierte Kategorien und Funktoren. Wolfgang Soergel.

[TF] Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie. Wolfgang Soergel.

[TG] Skriptum Garbenkohomologie. Wolfgang Soergel.

[TM] Skriptum Topologie und kompakte Gruppen. Wolfgang Soergel.

[TS] Skriptum Singuläre Homologie. Wolfgang Soergel.

[TSK] Skriptum Kategorielle Produktstrukturen. Wolfgang Soergel.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das $\cup$ dem Buchstaben u oder das $\subset$ dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

$[M : L]$ Vielfachheit, 21
$k[G]$ Monoidring, 11
$R\lfloor I\rfloor$ freier Ring, 50
$\overline{V}$ konjugierter Vektorraum, 94
$*$ Faltung
  in Gruppenring, 11
$\boxtimes$ äußeres Produkt
  von Moduln, 37

additiv
  Abbildung, 121
äußeres Produkt
  von Moduln, 37
Algebra
  Erzeuger und Relationen, 49
Anfangspunkt, von Pfeil in Köcher, 125
artinsch
  Modul, 23
  Objekt, 115

Bikommutator, 35
Binet-Cauchy-Identität, 57
Block
  einer längenendlichen Kategorie, 121
Boxprodukt
  von Moduln, 37

Car, 125
carquois, 125
Charakter
  einer Darstellung, **62**
  einfacher, 62
Charakter-Projektor-Formel, 63
Charaktertafel, 67
χ_V Charakter von V, 62

Darstellung
  einer Menge, 50
  einfache, 7
  irreduzible, 7
  komplex konjugierte, 95
  kontragradiente, von Gruppe, 68
  unzerlegbare, 7
  von Gruppe, 4
  von Köcher, 125
  von Köcher mit Relationen, 127
  von Monoid, 4
  zyklische, 8
dcc, 23
descending chain condition, 23
Dichtesatz
  von Jacobson, 35
Dichtesatz von Jacobson, 35
direkte Summe, 6, 24, 121
Dominanz-Teilordnung, 82
duales Paar, 38

Ecke
  von Köcher, 125
einfach
  Charakter, 62
  Darstellung, Gruppe, 7
  Modul, 19
  Objekt, 110
  Ring, 39
Einsdarstellung, 5
Element
  zyklisches, 8
Endpunkt, von Pfeil in Köcher, 125

Faltung
  Multiplikation eines Monoidrings, 11
Filtrierung
  endliche, 131
Fitting-Zerlegung

in abelschen Kategorien, 113
Fouriertransformation
diskrete, 61
Frobenius-Algebra, 15
Frobenius-Reziprozität
bei Gruppen, 103

Gitter, 14
Goldie-Rang, 43
Goldie-Schiefkörper, 43
Grothendieckgruppe, 121
Gruppenring, 11

Hakenlänge, 88
Hakenlängenformel, 88
halbeinfach
in abelscher Kategorie, 115
Modul, 24
Ring, 39
Heisenberg-Gruppe, 109
hermitesch
quaternional, 99
Homomorphismus
von Darstellungen, 6
Hülle
injektive, 111, 115

Idempotentes
zentrales primitives, 43
Induktion
von Darstellungen, 102
von Klassenfunktionen, 106
induziert
Darstellung, 102
Klassenfunktion, 106
injektiv
Objekt, 110
innerer Automorphismus
eines Monoids, 10
Invarianten
von Gruppe, 102
inz, 14
$\mathrm{irr}(k, G)$ irreduzible Darstellungen, 7
irra einfache Darstellungen höchstens abzählbarer Dimension, 96
irreduzibel
Darstellung, Gruppe, 7
Modul, 19
$\mathrm{irrf}_k(A)$ einfache endlichdimensionale Moduln, 37
isomorph
Darstellungen, 6
Isomorphismus
von Darstellungen, 6
isotypisch
Anteil, 25
isotypische Komponente, 26
isotypischer Anteil, 106

$\mathrm{J}(R)$ Jacobson-Radikal, 44
$\mathrm{Jac}(R)$ Jacobson-Radikal, 44
Jacobson's Dichtesatz, 35
Jacobson-Morozov, 131
Jacobson-Radikal, 44
Jordan-Hölder
für Moduln, 21
Jucys-Murphy-Element, 91

Kaplansky
Nullteilervermutung, 15
Klassenfunktion, 61
Köcher, 125
Darstellung von, 125
Koinduktion
von Darstellungen, 102
Koinvarianten
von Gruppe, 102
Kommutator
einer Teilmenge, 35
Komplement, 24
komplementär, 24
komplexer Typ, 93
Kompositionsfaktor

von Modul, 21
Kompositionslänge, 20
Kompositionsreihe
eines Moduls, 20
konjugiert
Darstellung
komplexe, 95
Vektorraum, komplexer, 94
kontragredient
Darstellung von Gruppe, 10
Konvolution
Multiplikation eines Monoidrings, 11
kristallographisch, 10
Krull-Schmidt, 119

$\mathrm{l}(M)$ Länge von M, 19
$\mathrm{Länge}(M)$ Länge von M, 19
Länge
eines Moduls, 19
längenendlich
abelsche Kategorie, 114
linksartinsch
Ring, 32
lokal
Ring, **117**

Mackey-Formel, 105
Maschke, Satz von, 55
Matrixkoeffizient, 73
Matrixkoeffizientenabbildung, 73
Mengenmodul, 17
Modul
äquivarianter
für Monoidoperation, 52
einfacher, 19
halbeinfacher, 24
irreduzibler, 19
Modulhomomorphismus, 17
Monoidmodul, 17
Monoidring, 11
vertwistet, 53
Morita-Äquivalenz
abstrakte, 123

Nakayama, Lemma von
nichtkommutatives, 44
nilpotent
Köcher mit Relationen, 127
noethersch
Modul, 23
Objekt, 115
Nullteilervermutung, 15

Operation
durch Konjugation, 56
durch Nachschalten, 56
durch Vorschalten, 56

Permutationsdarstellung, 5
Pfeile, 125
Polytabloid, 85
primitiv
zentrales Idempotentes, 43
Produkt
äußeres
von Moduln, 37
von Kategorien, 120
projektiv
Objekt, 110
projektive Decke, 111
Projektor, 62
Punkt
von Köcher, 125

quaternionaler Typ, 93
quiver, 125

Radikal
Jacobson-Radikal, 44
Rang
Goldie-Rang, 43
reduziert

Köcher mit Relationen, 128
reeller Typ, 93
Relation
in einem Köcher, 127
Ring
einfacher, 39
lokaler, **117**
von endlicher Länge, 32
Ringalgebra
freie, 48
Ringmodul, 17
Robinson-Schensted-Algorithmus, 89

Schiefkörper
Goldie-Schiefkörper, 43
Schur, Lemma von, **33, 34**
Separator, 123
Sesquilinearform
quaternionale, 99
Skalarprodukt
quaternionales, 99
Smashprodukt
der Ringtheorie, 54
soc Sockel, 26
$\mathrm{soc}(M)$ Sockel, 115
Sockel, 26, 115
Spaltungskörper
einer endlichen Gruppe, 58
Specht-Modul, 85
Specht-Vektor, 85
Spurform, 45
Spurkriterium, 46
Standarddarstellung, 5
Standardskalarprodukt
auf komplexem Gruppenring, 65
Standardtableau, 78
Subquotient, 20
Superspur, 48
Supervektorraum, 48

Tableau, 78
Tabloide, 85
trivial
Operation von Monoid, 5
Typ einer Darstellung, 93

Unterdarstellung
abstrakte, 7
Untermengenmodul, 18
unzerlegbar
Darstellung, 7
Objekt, 110

Vektor
zyklischer in Darstellung, 8
Verschmelzung
von Darstellungen, 51
vertwistet
Monoidring, 53
vollständig reduzibel, 55

Wedderburn, 37
Wegealgebra, 127
wesentlich
Epimorphismus, 111
Monomorphismus, 111

Young-Diagramm, 77
Young-Symmetrisator, 80

$\mathbb{Z}$-Form
einer Darstellung, 10
zyklisch
Darstellung, 8
Element, 8
Vektor
in abstrakter Darstellung, 8