

KATEGORIE \mathcal{O}

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Infinitesimale zentrale Charaktere	3
1.1	Motivation	3
1.2	Das Zentrum der universellen Einhüllenden	3
1.3	Der Chevalley-Isomorphismus	6
1.4	Herleitung des Harish-Chandra-Isomorphismus	9
1.5	Zentrale Charaktere	14
1.6	Die ganzzahlige Weylgruppe eines Gewichts	16
2	Multiplizitäten von Vermamoduln	22
2.1	Kategorie \mathcal{O}	22
2.2	Zerlegungen der Kategorie \mathcal{O}	27
2.3	Projektive Objekte von \mathcal{O}	29
2.4	Die Tensoridentität*	33
2.5	Verschiebungsfunktoren	34
2.6	Homomorphismen zwischen Vermamoduln	39
3	Kazhdan-Lusztig-Theorie	51
3.1	Iwahori-Hecke-Algebra	51
3.2	Kanonische Basis der Hecke-Algebra	56
4	Danksagung	59
	Literaturverzeichnis	60
	Indexvorwort	61
	Index	62

1 Infinitesimale zentrale Charaktere

1.1 Motivation

1.1.1 (**Bezug zu Darstellungen von Gruppen**). Die Frage nach den Multiplizitäten $[\Delta(\lambda) : L(\nu)]$ der einfachen Subquotienten in Jordan-Hölder-Reihen von Vermamoduln hat sich als ebenso schwierig wie fruchtbar erwiesen. Sie ist auch für Darstellungen von Gruppen relevant. Zum Beispiel werden wir in ?? zeigen, daß für die Wirkung der topologischen Gruppe $SL(n; \mathbb{C})$ auf der komplexen Fahnenmannigfaltigkeit $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ die teilgeordnete Menge der $SL(n; \mathbb{C})$ -invarianten unter der Norm der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossenen Untervektorräume des Raums $\mathcal{C}(\mathcal{F}) := \text{Top}(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ der stetigen komplexwertigen Funktionen $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ isomorph ist zur Opponierten der partiell geordneten Menge der Untermoduln des Vermamoduls $\Delta(0)$ der halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$. Allgemeiner werden wir zeigen, daß die anderen Vermamoduln in einer analogen Beziehung zu den Räumen stetiger Schnitte anderer äquivarianter komplexer Geradenbündel auf der Fahnenmannigfaltigkeit stehen. Um ein etwas leichter zu erreichendes motivierendes Ziel vor Augen zu haben, formulieren wir bereits hier ein erstes Hauptresultat.

Satz 1.1.2 (Einfache Vermamoduln). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System von positiven Wurzeln und \cdot . Genau dann ist der Vermamodul $\Delta(\lambda)$ einfach, wenn gilt $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{1, 2, \dots\} \forall \alpha \in R^+$ mit ρ der Halbsumme der positiven Wurzeln.*

1.1.3. Um das einzusehen, müssen wir zunächst das Zentrum der Einhüllenden Algebra verstehen. Daß unsere Bedingungen hinreichend sind, wird dann zu Ende des Abschnitts in 1.6.12 bewiesen. Daß sie auch notwendig sind, wird erst in 2.6.2 klar werden.

1.2 Das Zentrum der universellen Einhüllenden

Definition 1.2.1. Das **Zentrum** $Z(R)$ eines Rings R ist definiert als der Teilring derjenigen Elemente, die mit allen anderen Elementen unseres Rings kommutieren, in Formeln

$$Z(R) := \{z \in R \mid zr = rz \forall r \in R\}$$

1.2.2. Gegeben eine Lie-Algebra \mathfrak{g} bezeichne $Z(\mathfrak{g}) := Z(U(\mathfrak{g}))$ das Zentrum ihrer Einhüllenden $U(\mathfrak{g})$. Im Fall einer halbeinfachen komplexen Liealgebra hatten wir in ?? bereits den Casimiroperator $C \in Z(\mathfrak{g})$ kennengelernt. Im folgenden wollen wir uns einen Überblick über das ganze Zentrum verschaffen.

1.2.3. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Nach ?? operiert jedes Element des Zentrums $Z := Z(\mathfrak{g})$ der Einhüllenden auf jedem Verma-Modul durch einen Skalar. Wir vereinbaren die Bezeichnung $\langle z, \lambda \rangle$ für den komplexen Skalar, mit dem $z \in Z$ auf dem Verma-Modul $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+)$ operiert, in Formeln $zv = \langle z, \lambda \rangle v$ für alle $v \in \Delta(\lambda)$. Wir erhalten so einen \mathbb{C} -linearen Ringhomomorphismus von Z in den Ring aller \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf dem Dualraum der Cartan'schen

$$\begin{aligned} \xi = \xi_{R^+} : Z &\rightarrow \text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{C}) \\ z &\mapsto \langle z, \cdot \rangle \end{aligned}$$

Satz 1.2.4 (Harish-Chandra-Isomorphismus). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und sei $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. So liefert der eben erklärte Homomorphismus ξ einen Isomorphismus zwischen dem Zentrum Z der Einhüllenden von \mathfrak{g} und dem Ring der unter der dot-Operation der Weylgruppe invarianten polynomialen Funktionen auf \mathfrak{h}^* , in Formeln*

$$\xi : Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W \cdot)}$$

1.2.5. Für einen komplexen Vektorraum V bezeichnen wir ganz allgemein mit $\mathcal{O}(V) \subset \text{Ens}(V, \mathbb{C})$ diejenige Unterringalgebra der Algebra aller \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf V , die von den linearen Funktionen erzeugt wird, und nennen ihre Elemente die **polynomialen Funktionen auf V** . Die universelle Eigenschaft der symmetrischen Algebra $S(V^*)$ liefert einen Homomorphismus $S(V^*) \rightarrow \mathcal{O}(V)$, der in unserem Fall und allgemeiner im Fall eines beliebigen unendlichen Grundkörpers ein Isomorphismus ist.

1.2.6. Ist $f : V \rightarrow V'$ eine lineare oder affine Abbildung, so liefert das „Vorschalten von f “ einen Homomorphismus in die Gegenrichtung $f^\sharp : \mathcal{O}(V') \rightarrow \mathcal{O}(V)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Operiert insbesondere eine Gruppe G auf V durch lineare oder affine Transformationen, so operiert G auch auf $\mathcal{O}(V)$. Die unter G invarianten polynomialen Funktionen auf V heißen dann die **G -Invarianten** und werden $\mathcal{O}(V)^G$ notiert.

1.2.7. Natürlich induziert die Abbildung $(-\rho) : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ einen Isomorphismus zwischen den Invarianten für die dot-Operation der Weylgruppe und den Invarianten für die lineare Operation

$$(-\rho)^\sharp : \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W \cdot)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^W$$

Man zeigt unschwer, daß die Verknüpfung $(-\rho)^\sharp \circ \xi : Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^W$ nicht mehr von der Wahl eines Systems positiver Wurzeln abhängt. Meist nennt man diese Verknüpfung dann den **Harish-Chandra-Isomorphismus**.

1.2.8. Ich ziehe eine andere Sichtweise vor. Gegeben eine halbeinfache komplexe Liealgebra \mathfrak{g} heißt die Einskomponente G ihrer Automorphismengruppe die **adjungierte Gruppe** unserer halbeinfachen komplexen Liealgebra. Nun wissen wir aus [HL] 2.6.1 und [HL] 2.4.5, daß die adjungierte Gruppe je zwei Cartan'sche ineinander konjugiert, und wir wissen aus [HL] 2.6.6 oder besser 1.3.6, daß sie sogar je zwei Paare (\mathfrak{h}, R^+) bestehend aus einer Cartan'schen und einem System positiver Wurzeln in ihrem Dualraum ineinander konjugiert. So ein Paar (\mathfrak{h}, R^+) wird damit durch unsere halbeinfache Liealgebra \mathfrak{g} eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen es die **absolute Cartan'sche von \mathfrak{g}** und notieren es

$$(\mathfrak{h}_{\text{abs}}, R_{\text{abs}}^+)$$

Der Weylvektor ist dann ein wohlbestimmtes Element $\rho_{\text{abs}} \in \mathfrak{h}_{\text{abs}}^*$ und der Harish-Chandra-Homomorphismus ein wohlbestimmter Isomorphismus

$$Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}_{\text{abs}}^*)^{(W \cdot)}$$

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß $\xi(Z)$ wirklich aus polynomialen Funktionen auf \mathfrak{h}^* besteht; danach, daß ξ sogar in den $(W \cdot)$ -invarianten polynomialen Funktionen landet; und zum Schluß, daß die damit erst recht eigentlich etablierte Abbildung aus unserem Satz injektiv und surjektiv ist. Bezeichne

$$\pi_\lambda : \Delta(\lambda) \rightarrow \Delta(\lambda)_\lambda$$

diejenige Projektion eines Verma-Moduls auf seinen höchsten Gewichtsraum, die alle anderen Gewichtsräume $\Delta(\lambda)_\mu$ annulliert. Wir betrachten die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, wobei \mathfrak{n} beziehungsweise \mathfrak{n}^+ die direkten Summen der Wurzelräume zu den negativen beziehungsweise positiven Wurzeln meint. Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt liefert dann für die Einhüllende $U := U(\mathfrak{g})$ eine Vektorraumzerlegung $U = U(\mathfrak{h}) \oplus \langle \mathfrak{n}U + U\mathfrak{n}^+ \rangle$ und wir notieren

$$\eta : U \twoheadrightarrow U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$$

die Projektion längs dieser Zerlegung. Diese Projektion ist kein Algebrenhomomorphismus, sondern nur eine lineare Abbildung. Für die Operation auf dem kanonischen Erzeuger $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$ eines Verma-Moduls gilt jedoch offensichtlich $\pi_\lambda(uv_\lambda) = \eta(u)v_\lambda$. Für $z \in Z$ ist sogar die Projektion π_λ überflüssig und wir haben

$$zv_\lambda = \eta(z)v_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

Nun ist hoffentlich klar, daß für $u \in U(\mathfrak{h})$ gilt $uv_\lambda = \delta_\lambda(c(u))v_\lambda$ für c die Komposition $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*) \subset \text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{C})$ und δ_λ das Auswerten bei λ . Wir finden also $\langle z, \lambda \rangle = \delta_\lambda(c(\eta(z)))$ für alle λ alias $\xi(z) = c(\eta(z))$. Also ist $\xi(z)$

schon einmal polynomial für alle $z \in Z$. Als nächstes zeigen wir, daß ξ sogar in den $(W \cdot)$ -Invarianten landet. Wir wissen nach [KAG] 1.1.24, daß zwei Polynomfunktionen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, die auf der von einer Basis erzeugten Untergruppe übereinstimmen, schon gleich sind. Es reicht also für alle $z \in Z$ und $w \in W$ zu zeigen, daß $\xi(z)$ und $\xi(z) \circ (w \cdot)$ auf dem Gitter \mathfrak{X} der ganzen Gewichte dieselben Werte annehmen. Da die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe erzeugen, müssen wir nur zeigen, daß gilt

$$\langle z, \lambda \rangle = \langle z, s_\alpha \cdot \lambda \rangle \quad \forall \alpha \in \Pi, \lambda \in \mathfrak{X}$$

Wir kennen jedoch schon aus ?? für alle $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ eine Einbettung $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$ oder einfacher einen von Null verschiedenen Homomorphismus. Da das Zentrum der universellen Einhüllenden dann auf diesen beiden Moduln durch denselben Skalar operieren muß, ergibt sich die Behauptung. Wir wissen damit, daß unser ξ tatsächlich in den $(W \cdot)$ -invarianten Polynomfunktionen landet. Daß ξ einen Isomorphismus des Zentrums mit diesem Ring induziert, wird erst nach einigen Vorbereitungen in den folgenden Abschnitten im Anschluß an 1.4.4 gezeigt werden. \square

Ergänzung 1.2.9. Unter dem Harish-Chandra-Isomorphismus $Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^W$ entspricht dem durch den prinzipalen Antiautomorphismus gegebenen Automorphismus $z \mapsto z^\top$ von Z die durch die Multiplikation mit $(-1) : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ induzierte Abbildung links. Um das zu sehen geht man aus von der Erkenntnis, daß für dominante Gewichte $\lambda \in X^+$ gilt $L(\lambda)^* \cong L(-w_0\lambda)$, und folgert

$$\langle z^\top, \lambda \rangle = \langle z, -w_0\lambda \rangle = \langle z, w_0 \cdot (-w_0\lambda) \rangle = \langle z, -\lambda - 2\rho \rangle$$

erst für alle $\lambda \in X^+$, und da diese Zariski-dicht liegen dann für alle $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Unter dem nichtnormalisierten Isomorphismus $Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W \cdot)}$ entspricht der prinzipale Antiautomorphismus links also dem Automorphismus rechts, der von der Punktspiegelung $\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ mit Zentrum $-\rho$ erzeugt wird. Identifiziert man die Punkte aus dem Abschluß der dominanten Weylkammer mit gewissen maximalen Idealen des Zentrums, so ist unser prinzipaler Antiautomorphismus verträglich mit der Involution $\lambda \mapsto -w_0\lambda$ dieser Kammer, sowohl im verschobenen als auch im unverschobenen Fall.

1.3 Der Chevalley-Isomorphismus

Satz 1.3.1 (Chevalley-Isomorphismus). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei $G \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Gruppe nach [HL] 2.6.1. So induziert die Restriktion von Funktionen $\mathcal{O}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})$ einen*

Isomorphismus zwischen den G -Invarianten in $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ und den Weylgruppeninvarianten in $\mathcal{O}(\mathfrak{h})$, in Formeln

$$\text{Res} : \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$$

Ergänzung 1.3.2. Dieser Isomorphismus ist ein algebraischer Verwandter unseres Homöomorphismus $T/W \xrightarrow{\sim} K/(\text{int } K)$ für eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe (K, T) aus [ML] 5.10.12. In der Sprache der geometrischen Invariantentheorie [KAG] 9.6.22 besagt unser Satz, daß die Einbettung $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ einen Isomorphismus $\mathfrak{h}/W \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}/G$ zwischen den algebraischen Quotienten induziert, von denen der erste sogar ein geometrischer Quotient ist.

Beispiel 1.3.3. Wir besprechen den Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ und zeigen dazu eine analoge Aussage für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ mit \mathfrak{h} dem Unterraum der Diagonalmatrizen, die zwar streng genommen nicht durch den vorstehenden Satz abgedeckt wird, deren Beweis mir jedoch besonders instruktiv scheint. Unser Invariantenring $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ ist in diesem Fall die Menge aller Polynome in den Matrixeinträgen, die konstant sind auf allen Konjugationsklassen. Ist $x = x_s + x_n$ die (konkrete) Jordan-Zerlegung von $x \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$, so gehört $x_s + \varepsilon x_n$ für alle $\varepsilon \neq 0$ zur selben Konjugationsklasse wie x . Für $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ ist also $\varepsilon \mapsto f(x_s + \varepsilon x_n)$ eine polynomiale Funktion in ε , die konstant ist außerhalb von $\varepsilon = 0$. Es folgt sofort $f(x) = f(x_s)$, und da jede halbeinfache Konjugationsklasse die Menge \mathfrak{h} der Diagonalmatrizen trifft, definiert die Restriktion eine Injektion $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})$. Nun sind je zwei Diagonalmatrizen konjugiert, deren Einträge sich nur in ihrer Reihenfolge unterscheiden. Folglich landet unsere Injektion in den symmetrischen Polynomen in den Matrixeinträgen, als da heißt in $\mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$. Weiter wissen wir aber, daß die symmetrischen Polynome ihrerseits Polynome sind in den elementarsymmetrischen Polynomen, und für diese finden wir als Urbilder in $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ die Funktionen, die jeder Matrix einen geeigneten Koeffizienten ihres charakteristischen Polynoms zuordnen. Also ist unsere Restriktion für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ und \mathfrak{h} die Diagonalmatrizen eine Bijektion $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$. Dasselbe folgt leicht für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$.

Beispiel 1.3.4. Im Fall der Gruppe $G = \text{SO}(2n; \mathbb{C})$ besteht die Lie-Algebra \mathfrak{g} aus allen schiefsymmetrischen Matrizen und eine interessante invariante polynomiale Funktion aus $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ ist die Pfaff'sche Determinante [LA2] 2.5.8.

1.3.5. Der Beweis wird in eine Folge von Teilresultaten aufgebrochen. Lemma 1.3.6 zeigt, daß unsere Restriktion die G -Invarianten wirklich in die W -Invarianten abbildet. Bemerkung 1.3.7 zeigt, daß die Einschränkung der Restriktionsabbildung auf $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ injektiv ist. Im Anschluß daran zeigen wir dann noch die Surjektivität, indem wir hinreichend viele G -invariante polynomiale Funktionen auf \mathfrak{g} explizit angeben.

Lemma 1.3.6 (Realisierung der Weylgruppe in der adjungierten Gruppe). Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Liealgebra. Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra und

$w \in W$ ein Element der Weylgruppe, so gibt es ein Element der adjungierten Gruppe $\dot{w} \in G$ mit $\dot{w}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ und

$$\dot{w} = w : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$$

Beweis. Es reicht, ein mögliches \dot{s}_α für jede Wurzel $\alpha \in R$ anzugeben. Dazu wählen wir $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ und versuchen unser Glück mit

$$\dot{s}_\alpha = \exp(\operatorname{ad} x_\alpha) \exp(\operatorname{ad}(-y_\alpha)) \exp(\operatorname{ad} x_\alpha)$$

Für $h \in \ker \alpha \subset \mathfrak{h}$ gilt offensichtlich $[x_\alpha, h] = 0 = [y_\alpha, h]$, folglich halten $\exp(\operatorname{ad} x_\alpha), \exp(\operatorname{ad} y_\alpha)$ und schließlich auch \dot{s}_α jedes $h \in \ker \alpha$ fest. Dann berechnen wir noch mit Gewalt

$$\begin{aligned} \dot{s}_\alpha(\alpha^\vee) &= \exp(\operatorname{ad} x_\alpha) \exp(\operatorname{ad}(-y_\alpha))(\alpha^\vee - 2x_\alpha) \\ &= \exp(\operatorname{ad} x_\alpha)(\alpha^\vee - 2x_\alpha - 2y_\alpha - 2\alpha^\vee + 2y_\alpha) \\ &= -\alpha^\vee - 2x_\alpha + 2x_\alpha \\ &= -\alpha^\vee \end{aligned}$$

und das Lemma ist gezeigt. □

1.3.7. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei $G \subset \operatorname{GL}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Gruppe. So liegt $G\mathfrak{h}$ Zariski-dicht in \mathfrak{g} . Das haben wir bereits beim Beweis der Konjugiertheit von Cartan'schen [HL] 2.4.5 gezeigt. Will man das differentielle Dominanzkriterium [HL] 2.4.8 hier vermeiden, kann man auch einfacher argumentieren mit der Erkenntnis, daß jede nichtleere in der metrischen Topologie des \mathbb{C}^n offene Teilmenge bereits Zariski-dicht liegt.

Beweis der Surjektivität in 1.3.1. Dazu müssen wir genügend G -invariante polynomiale Funktionen auf \mathfrak{g} konstruieren. Ist $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \operatorname{End} V$ eine endlichdimensionale Darstellung von \mathfrak{g} und $p \in \mathbb{N}$, so behaupten wir, daß $x \mapsto \operatorname{tr}(\rho(x)^p)$ zu $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ gehört. In der Tat kommutiert für alle $y \in \mathfrak{g}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \otimes V & \longrightarrow & V \\ (\operatorname{ad} y) \otimes \operatorname{id} + \operatorname{id} \otimes \rho(y) \downarrow & & \downarrow \rho(y) \\ \mathfrak{g} \otimes V & \longrightarrow & V \end{array}$$

Wenn man y als nilpotent annimmt und von beiden vertikalen Abbildungen \exp nimmt und das entstehende kommutative Diagramm auf $x \otimes v$ auswertet, folgt

$$\rho((\exp(\operatorname{ad} y))(x)) (\exp \rho(y)) v = (\exp \rho(y)) (\rho(x)v)$$

Mit den Abkürzung $g := \exp(\operatorname{ad} y)$ und $b := \exp \rho(y)$ finden wir $\rho(gx)bv = b\rho(x)v$ alias $\rho(gx) = b\rho(x)b^{-1}$ ist konjugiert zu $\rho(x)$ für $g := \exp(\operatorname{ad} y)$ und

dann natürlich für alle $g \in G$. Wir erhalten also als invariante Funktionen schon mal die Funktionen $C(V, p) \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ gegeben durch $C(V, p)(x) = \text{tr}(\rho_V(x)^p)$. Nun beachte man, daß $\mathcal{O}(\mathfrak{h})$ als \mathbb{C} -Vektorraum von allen Potenzen λ^n mit $\lambda \in \mathfrak{X}$ ein ganzes Gewicht erzeugt wird. Betrachten wir also die „Symmetrisierung“

$$\begin{aligned} \text{sym} : \mathcal{O}(\mathfrak{h}) &\rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W \\ f &\mapsto \sum_{w \in W} wf \end{aligned}$$

so erzeugen die $\text{sym}(\lambda^p)$ für $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ schon $\mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$ als \mathbb{C} -Vektorraum. Es ist aber klar, daß die Restriktionen auf \mathfrak{h} der bereits konstruierten Invarianten die Gestalt

$$C(L(\lambda), p) = \sum_{\mu \in \mathfrak{X}^+, \mu \leq \lambda} a_\mu \text{sym}(\mu^p)$$

haben mit $a_\lambda \neq 0$, genauer gilt für $h \in \mathfrak{h}$ offensichtlich

$$C(L(\lambda), p)(h) = \sum_{\nu \in \mathfrak{X}} (\dim L(\lambda)_\nu) \nu(h)^p$$

Eine kurze Induktion zeigt dann, daß unsere Restriktion in der Tat eine Surjektion $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$ liefert. \square

1.4 Herleitung des Harish-Chandra-Isomorphismus

1.4.1. Ist V ein Vektorraum und $x : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, so gibt es offensichtlich genau eine Fortsetzung $\hat{x} : TV \rightarrow TV$ von x zu einer Derivation auf der Tensoralgebra, und diese induziert eine Derivation $\hat{x} : SV \rightarrow SV$ auf der symmetrischen Algebra. Ist V endlichdimensional und der Grundkörper algebraisch abgeschlossen, so haben wir einen natürlichen Isomorphismus $SV \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V^*)$, unter dem unser \hat{x} dem Anwenden des durch $y \mapsto (y \circ x)$ auf V^* gegebenen Vektorfelds entspricht.

1.4.2. Ist \mathfrak{g} eine Liealgebra und $x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ eine Derivation, so induziert unsere Derivation $\hat{x} : T\mathfrak{g} \rightarrow T\mathfrak{g}$ aus 1.4.1 eine Derivation $\hat{x} : U\mathfrak{g} \rightarrow U\mathfrak{g}$ auf der einhüllenden Algebra. Ist speziell $x = \text{ad } y$ für $y \in \mathfrak{g}$, so finden wir

$$\hat{x}(u) = yu - uy$$

In der Tat sind beide Seiten Derivationen von $U\mathfrak{g}$, die auf allen $u \in \mathfrak{g}$ übereinstimmen. Folglich müssen sie gleich sein.

1.4.3. Ist \mathfrak{g} eine komplexe Lie-Algebra und V eine Darstellung von \mathfrak{g} , so operiert \mathfrak{g} auf den Tensorpotenzen $V^{\otimes n}$ und auch auf der ganzen Tensoralgebra TV . Diese

Operation geschieht offensichtlich durch Derivationen, d.h. wir haben einen Lie-Algebren-Homomorphismus

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} TV$$

Weiter ist die symmetrische Algebra SV eine Quotientendarstellung von TV und man sieht ohne Schwierigkeiten, daß wir so auch eine Operation durch Derivationen $\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} SV$ erhalten.

1.4.4. Sei \mathfrak{g} eine komplexe Lie-Algebra. Die adjungierte Darstellung führt nach unseren allgemeinen Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts zu einer \mathfrak{g} -Operation durch Derivationen auf der Tensoralgebra und auf der symmetrischen Algebra und auch zu einer \mathfrak{g} -Operation durch Derivationen auf der universellen Einhüllenden Algebra

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} T\mathfrak{g} \\ \mathfrak{g} &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} S\mathfrak{g} \\ \mathfrak{g} &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} U\mathfrak{g} \end{aligned}$$

Auf der universellen Einhüllenden $U := U\mathfrak{g}$ notieren wir $\text{ad } x$ die Derivation zu x und prüfen leicht $(\text{ad } x)(u) = xu - ux$, da beide Seiten Derivationen der Einhüllenden sind, die auf $u \in \mathfrak{g} \subset U$ denselben Effekt haben. Insbesondere können wir das Zentrum der Einhüllenden auch beschreiben als die \mathfrak{g} -Invarianten unter der adjungierten Operation, in Formeln

$$Z = U^{\mathfrak{g}}$$

1.4.5. Ist $V = \mathfrak{g}^*$ die koadjungierte Darstellung und ist unsere Lie-Algebra endlichdimensional, so erhalten wir speziell eine Operation durch Derivationen $\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})$. Geometrisch können wir diese Operation verstehen, indem wir ein $x \in \mathfrak{g}$ auffassen als das algebraische Vektorfeld $y \mapsto [x, y]$ auf dem Raum \mathfrak{g} . Ist \mathfrak{g} die Lie-Algebra einer Liegruppe G , so wird unsere Operation induziert von der adjungierten Operation von G auf \mathfrak{g} , die eine Operation von G auf $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ liefert, die dann differenziert werden kann.

Proposition 1.4.6. *Ist \mathfrak{g} eine komplexe halbeinfache Liealgebra und G ihre adjungierte Gruppe, so haben wir $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$.*

Beweis mit Lie-Theorie. Für jedes $r \geq 0$ bilden die polynomialen Funktionen vom Grad $\leq r$ eine stetige Darstellung der adjungierten Gruppe G und die Operation von \mathfrak{g} ist offensichtlich die zugehörige abgeleitete Operation der Liealgebra. Die Proposition folgt damit aus [ML] 2.2.5. Im Rahmen algebraischer Gruppen kann man auch mit [AAG] 4.6.23 argumentieren. \square

Beweis. Wir wählen Bezeichnungen für unsere beiden Operationen und notieren sie

$$\begin{aligned}\rho : \mathfrak{g} &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g}) \\ \psi : G &\rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})\end{aligned}$$

Jetzt behaupten wir für $y \in \mathfrak{g}$ nilpotent in $\text{Aut}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ die Gleichung

$$\exp \rho(y) = \psi(\exp(\text{ad } y))$$

Da beiden Seiten Automorphismen von \mathbb{C} -Ringalgebren sind, reicht es zu zeigen, daß ihre Einschränkungen auf den Raum $\mathfrak{g}^* \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ der linearen Funktionen übereinstimmen. Zu zeigen ist also nur

$$\exp(\text{ad}^* y) = (\exp(\text{ad } y)^{\top})^{-1}$$

und das folgt sofort aus $\text{ad}^* y = (-\text{ad } y)^{\top}$. Aus unserer ersten Gleichung erhalten schon einmal $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$. Da andererseits die Lie-Algebra \mathfrak{g} von ihren nilpotenten Elementen erzeugt wird, kann man $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ auch beschreiben als die Menge aller $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ mit $\rho(y)f = 0$ für alle nilpotenten $y \in \mathfrak{g}$. Mit dem anschließenden Lemma 1.4.7 folgt so umgekehrt auch $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. \square

Lemma 1.4.7. *Sei $x : V \rightarrow V$ ein lokal nilpotenter Endomorphismus eines \mathbb{Q} -Vektorraums. Bezeichne $\exp(\mathbb{Q}x) \subset \text{GL}(V)$ die Untergruppe aller $\exp tx$ mit $t \in \mathbb{Q}$. So besteht der Kern von x genau aus den Invarianten von $\exp(\mathbb{Q}x)$, in Formeln*

$$\ker x = V^{\exp \mathbb{Q}x}$$

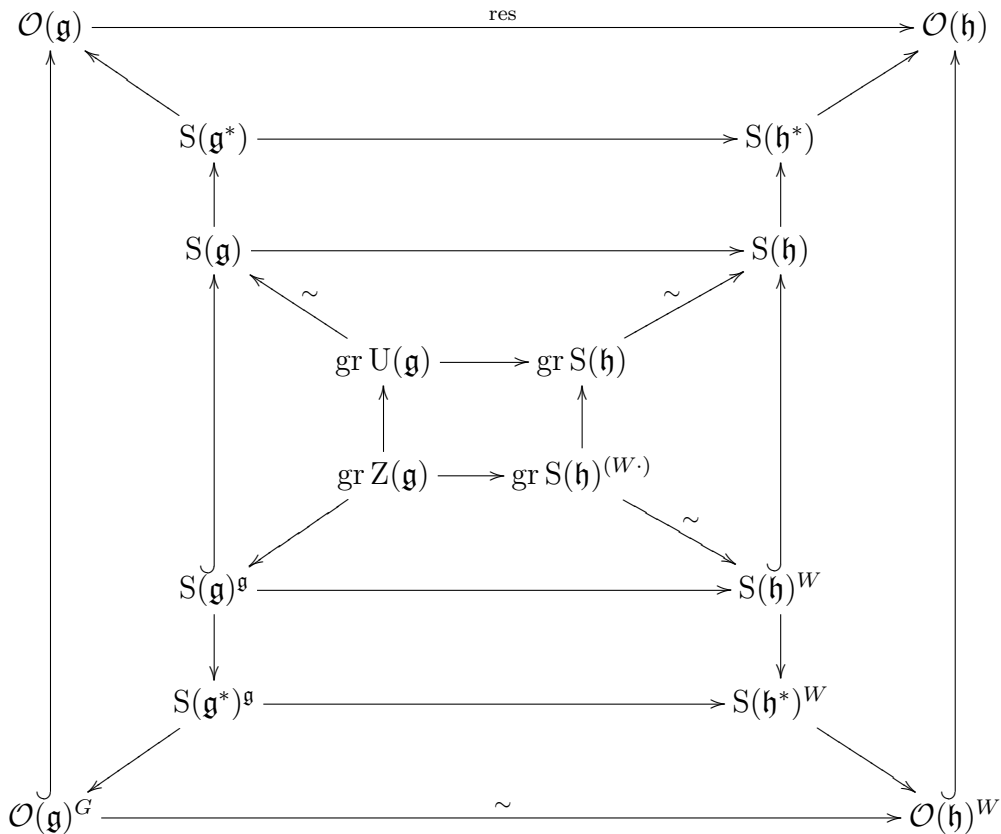
Beweis. Die Inklusion \subset ist evident. Die andere Inklusion \supset folgt aus der Tatsache, daß auch eine vektorwertige polynomiale Funktion $v_0 + v_1 t + \dots + v_n t^n$ einer Variablen t aus einem unendlichen Körper nur konstant sein kann, wenn sie keine Terme höherer Ordnung hat, $v_1 = \dots = v_n = 0$. Betrachten wir nun speziell für $v \in V$ die Abbildung $\mathbb{Q} \rightarrow V$, $t \mapsto \exp(tx)v$, so ist unsere Abbildung konstant genau dann, wenn gilt $xv = 0$. \square

Herleitung des Harish-Chandra-Isomorphismus. Wir betrachten dazu mit den Notationen aus dem ersten Teil des Beweises von 1.2.4 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\eta} & S(\mathfrak{h}) \\ \cup & & \cup \\ Z(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\xi} & S(\mathfrak{h})^{(W \cdot)} \end{array}$$

Die Abbildung η in der oberen Zeile ist verträglich mit den Standardfiltrierungen ?? auf den jeweiligen Räumen. Die Abbildung ξ in der unteren Zeile ist folglich verträglich mit den jeweils induzierten Filtrierungen. Induziert $\xi : Z \rightarrow S(\mathfrak{h})^{(W \cdot)}$

einen Isomorphismus nach Übergang zu den assoziierten graduierten Räumen, so ist es nach [KAG] 7.1.16 bereits selbst ein Isomorphismus. Machen wir nun diesen Übergang, so erhalten wir das innere Rechteck eines kommutativen Diagramms der Gestalt



Die Bedeutung der anderen Pfeile wird im folgenden erläutert: Mit den beiden inneren oberen nach außen weisenden Pfeilen sind die Identifikationen $\text{gr}(U(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g})$ und $\text{gr}(S(\mathfrak{h})) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})$ aus dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt ?? gemeint, mit dem inneren nach außen weisenden Pfeil unten rechts die hoffentlich offensichtliche Identifikation $\text{gr}(S(\mathfrak{h})^{(W\cdot)}) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^W$. Der innere nach außen weisende Pfeil unten links meint die Identifikation $\text{gr}(Z(\mathfrak{g})) = \text{gr}(U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} (\text{gr } U(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ mit dem ersten Pfeil wie im anschließenden Lemma 1.4.9. Die obere mittlere Horizontale sei induziert von der Projektion $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}$, die alle Wurzelräume zu Null macht, die mittleren Vertikalen seien die offensichtlichen Inklusionen, und die untere mittlere Horizontale sei definiert durch die Kommutativität der darüberliegenden Zelle unseres Diagramms. Aus der Kommutativität der anderen Zellen, deren Nachweis dem Leser überlassen bleiben kann, folgt dann die Kommutativität des mittleren Rechtecks. Betrachten wir nun die Killingform oder allgemeiner irgendeine nichtausgearteten invariante Bilinearform auf \mathfrak{g} und betrachten die da-

von induzierten Isomorphismen $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$ und $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$, so identifiziert sich das mittlere Rechteck mit dem äußeren Rechteck, worin wir die obere Horizontale als die Restriktion von Funktionen verstehen. In diesem Diagramm ist die untere Horizontale aber ein Isomorphismus, eben der Chevalley-Isomorphismus aus 1.3.1. \square

Lemma 1.4.8 (Invarianten und assoziierte Graduierte). *Ist V eine Darstellung einer endlichen Gruppe W über einem Körper k und ist auf V eine Filtrierung durch Unterdarstellungen gegeben und teilt die Charakteristik von k nicht die Gruppenordnung, so liefert die Einbettung einen Isomorphismus zwischen dem assoziierten Graduierten der Invarianten und den Invarianten des assoziierten Graduierten*

$$\mathrm{gr}(V^W) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{gr} V)^W$$

Beweis. Nach dem Satz von Maschke [NAS] 4.1.1 ist unter unseren Annahmen jede Darstellung unserer Gruppe über besagtem Körper halbeinfach als Modul über dem Gruppenring, nach [NAS] 2.3.4 besitzt also jede Unterdarstellung ein Komplement und insbesondere auch die Unterdarstellungen $V^{\leq n-1} \subset V^{\leq n}$. Das Lemma folgt. \square

Lemma 1.4.9. *Gegeben eine Liealgebra \mathfrak{g} über einem Körper der Charakteristik Null ist die Standardfiltrierung auf $U = U(\mathfrak{g})$ stets $(\mathrm{ad} \mathfrak{g})$ -stabil und die von der Einbettung $U^{\mathfrak{g}} \subset U$ induzierte Einbettung $\mathrm{gr}(U^{\mathfrak{g}}) \subset \mathrm{gr} U$ induziert einen Isomorphismus*

$$\mathrm{gr}(U^{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{gr} U)^{\mathfrak{g}}$$

Beweis. Ist V ein Vektorraum, so operiert die symmetrische Gruppe S_n auf $V^{\otimes n}$ durch Vertauschung der Faktoren. Im Fall $\mathrm{char} k = 0$ induziert die Surjektion $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$ einen Isomorphismus

$$(V^{\otimes n})^{S_n} \xrightarrow{\sim} S^n V$$

von den „symmetrischen“ Tensoren der Stufe n auf die n -te homogene Komponente der symmetrischen Algebra, vergleiche [KAG] 3.5.4. Wir bezeichnen mit $T^S V \subset TV$ die Summe über alle $(V^{\otimes n})^{S_n}$ und haben damit einen Isomorphismus

$$T^S V \xrightarrow{\sim} SV$$

von Vektorräumen konstruiert, der allerdings mit der Multiplikation im Allgemeinen nicht verträglich sein wird. Ist V eine Darstellung einer Lie-Algebra \mathfrak{g} , so operiert \mathfrak{g} auch durch Derivationen auf TV und SV , unser $T^S V$ ist eine Unterdarstellung von TV und unsere Abbildung $T^S V \xrightarrow{\sim} SV$ ist ein Isomorphismus von Darstellungen. Ist \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und $U := U(\mathfrak{g})$ ihre Einhüllende, so erhalten wir in derselben Weise einen Isomorphismus von Darstellungen $T^S \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} U$,

der einen Isomorphismus $\text{gr } T^S \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \text{gr } U$ induziert. Damit paßt der Morphismus aus dem Lemma in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}((T^S \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) & \rightarrow & (\text{gr}(T^S \mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{gr}(U^{\mathfrak{g}}) & \rightarrow & (\text{gr } U)^{\mathfrak{g}} \end{array}$$

Hier sind die Vertikalen und obere Horizontale Isomorphismen, also auch die untere Horizontale. \square

Übungen

Übung 1.4.10. Das Zentrum von $U(\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}))$ ist der Polynomring, der erzeugt wird von den Elementen c_1, \dots, c_n mit

$$c_i = \sum_{\nu: \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \rightarrow \{1, \dots, n\}} E_{\nu(0)\nu(1)} E_{\nu(1)\nu(2)} \cdots E_{\nu(i-1)\nu(i)}$$

Speziell wird $c_1 = E_{11} + E_{22} + \dots + E_{nn}$ die Einheitsmatrix in $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ und c_2 ist der Casimiroperator zu einer geeigneten Bilinearform auf $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$.

1.5 Zentrale Charaktere

1.5.1. Gegeben ein kommutativer Ring A bezeichne $\text{Max } A$ die Menge der maximalen Ideale von A . Ist A ein ringendlicher \mathbb{C} -Kring, so liefert die Abbildung $\varphi \mapsto \ker \varphi$ nach der körpertheoretischen Form des Hilbert'schen Nullstellensatzes und genauer [KAG] 1.6.24 eine Bijektion

$$\text{Kring}^{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Max } A$$

Wir haben also zum Beispiel eine kanonische Bijektion $\text{Max } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ und koordinatenfrei für jeden endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V eine kanonische Bijektion $\text{Max } \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\sim} V$. Weiter liefert jeder Homomorphismus $f: A \rightarrow B$ von \mathbb{C} -Kringen in einen weiteren ringendlichen \mathbb{C} -Kring B eine Abbildung in der Gegenrichtung

$$\begin{array}{ccc} \text{Max } B & \rightarrow & \text{Max } A \\ \chi & \mapsto & f^{-1}(\chi) \end{array}$$

Satz 1.5.2 (Maximale Ideale von Invariantenringen). *Sei A ein ringendlicher \mathbb{C} -Kring mit einer Operation einer endlichen Gruppe W durch Automorphismen. So induziert die von der Einbettung $A^W \subset A$ induzierte Abbildung $\text{Max } A \rightarrow \text{Max}(A^W)$ eine Bijektion*

$$(\text{Max } A)/W \xrightarrow{\sim} \text{Max}(A^W)$$

und für alle $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A^W)$ liefert die Einbettung von \mathbb{C} einen Isomorphismus $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} A^W/\mathfrak{m}$.

Ergänzung 1.5.3. In [KAG] 5.3.3 zeigen wir dieselbe Aussage über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper und zeigen zusätzlich, daß auch A^W ringendlich ist über dem Grundkörper.

Beweis. Wir beginnen mit der Surjektivität. Sei $\mathfrak{m} \subset A^W$ ein maximales Ideal und $\langle Am \rangle$ das von \mathfrak{m} in A erzeugte Ideal. Ich behaupte $\langle Am \rangle \neq A$. Es reicht zu zeigen, daß für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{m} \subset A^W$ aus $\langle Am \rangle = A$ folgt $\mathfrak{m} = A^W$. Aber $\langle Am \rangle = A$ impliziert eine Gleichung

$$a_1 m_1 + \dots + a_r m_r = 1 \quad \text{mit } a_i \in A, m_i \in \mathfrak{m}.$$

Summieren wir alle Transformaten dieser Gleichung unter den verschiedenen $x \in W$ auf, so ergibt sich eine Gleichung der Gestalt

$$b_1 m_1 + \dots + b_r m_r = |W|$$

mit $b_i \in A^W$ und es folgt $\mathfrak{m} = A^W$. Für $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A^W)$ gibt es also $\tilde{\mathfrak{m}} \in \text{Max} A$ mit $\tilde{\mathfrak{m}} \supset Am$, und dann haben wir notwendig $\tilde{\mathfrak{m}} \cap A^W = \mathfrak{m}$. Das zeigt die Surjektivität der Abbildung in unserem Satz und zeigt auch, daß die offensichtliche Abbildung eine Injektion $A^W/\mathfrak{m} \hookrightarrow A/\tilde{\mathfrak{m}}$ ist und mithin die Einbettung von \mathbb{C} in den ersten Ring auch ein Isomorphismus. Es bleibt nur noch die Injektivität der ersten Abbildung im Satz zu zeigen. Sind aber $\lambda, \mu \in \text{Max} A$ gegeben mit $\lambda \not\subseteq W\mu$, so gibt es ein $a \in A$, das „verschwindet an der Stelle λ aber bei keinem der $x\mu$ “, in Formeln $a \in \lambda, a \notin x\mu \quad \forall x \in W$. Bilden wir dann das Produkt aller xa mit $x \in W$, so erhalten wir eine Invariante $f \in A^W$ mit $f \in \lambda, f \notin \mu$. Das zeigt die Injektivität. \square

Definition 1.5.4. Sei \mathfrak{g} eine komplexe Lie-Algebra und $Z := Z(\mathfrak{g})$ das Zentrum ihrer Einhüllenden. Ein Homomorphismus von \mathbb{C} -Kringen $Z \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein **zentraler Charakter** von \mathfrak{g} . Ist Z endlich erzeugt als \mathbb{C} -Algebra, so können und werden wir die Menge aller zentralen Charaktere identifizieren mit $\text{Max} Z$.

Proposition 1.5.5. Seien \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, \mathfrak{h} eine Cartan'sche und R^+ ein ausgezeichnetes System positiver Wurzeln. Die von unserem Harish-Chandra-Homomorphismus induzierte Abbildung $\xi : \mathfrak{h}^* \rightarrow \text{Max} Z$, $\lambda \mapsto \text{Ann}_Z \Delta(\lambda)$ induziert eine Bijektion

$$\mathfrak{h}^*/(W \cdot) \xrightarrow{\sim} \text{Max} Z$$

Bemerkung 1.5.6. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann ξ eine Abbildung $Z \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$ meint und wann wie hier die induzierte Abbildung $\mathfrak{h}^* \rightarrow \text{Max} Z$.

Beweis. Wir betten unsere Abbildung ein in ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^*/(W\cdot) & \rightarrow & \text{Max } Z \\ \wr \downarrow & & \uparrow \wr \\ (\text{Max } \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)) / (W\cdot) & \rightarrow & \text{Max } (\mathcal{O}(\mathfrak{h}^*))^{(W\cdot)} \end{array}$$

wo die linke Vertikale induziert wird von der kanonischen Identifikation $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \text{Max } \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$, die rechte Vertikale von $\xi : Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W\cdot)}$ und die untere Horizontale von der Einbettung $\mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W\cdot)} \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$. Der Leser mag prüfen, daß dies Diagramm kommutiert. Die rechte Vertikale ist bijektiv nach dem Satz von Harish-Chandra. Die untere Horizontale ist bijektiv nach dem vorhergehenden allgemeinen Satz 1.5.2. Die Proposition folgt. \square

Lemma 1.5.7. *Jeder einfache Subquotient eines Vermamoduls $\Delta(\lambda)$ ist isomorph zu einem $L(x \cdot \lambda)$ für $x \in W$.*

Beweis. Das folgt sofort aus Proposition 1.5.5, da jeder Subquotient von demselben maximalen Ideal des Zentrums der Einhüllenden annulliert werden muß wie der ganze Vermamodul. \square

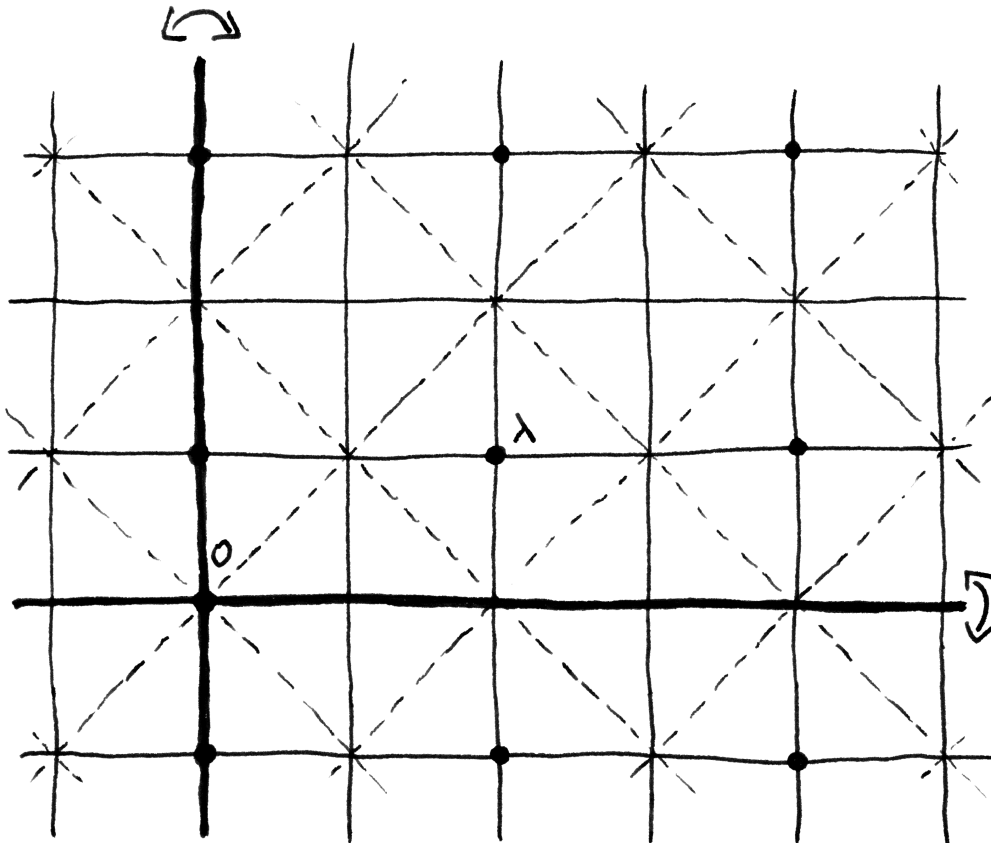
1.6 Die ganzzahlige Weylgruppe eines Gewichts

1.6.1. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, $R \subset V$ ein Wurzelsystem [SPW] 2.1.2 und $\Lambda \in V/\langle R \rangle$ eine Nebenklasse unter dem Wurzelgitter. Wir bezeichnen mit W die Weylgruppe unseres Wurzelsystems und mit $W_\Lambda \subset W$ die Standgruppe der Nebenklasse Λ . Weiter definieren wir das **System der auf Λ ganzzahligen Wurzeln** durch

$$R_\Lambda := \{ \alpha \in R \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \lambda \in \Lambda \}$$

Man sieht leicht ein, daß R_Λ ein Wurzelsystem ist in dem von ihm aufgespannten Teilraum von V . Gegeben ein System positiver Wurzeln $R^+ \subset R$ ist sicher auch $R^+ \cap R_\Lambda$ ein System positiver Wurzeln in R_Λ . Die zugehörige Menge von einfachen Wurzeln notieren wir $\Pi_\Lambda \subset R^+ \cap R_\Lambda$. Offensichtlich gilt stets $\Pi \cap R_\Lambda \subset \Pi_\Lambda$.

1.6.2. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $R \subset V$ ein Wurzelsystem. Ist $\lambda \in V$ gegeben, so bezeichnen wir mit $\bar{\lambda}$ seine Nebenklasse modulo dem Wurzelgitter und nennen die Standgruppe $W_{\bar{\lambda}}$ dieser Nebenklasse die **ganzzahlige Weylgruppe von λ** , nicht zu verwechseln mit der Standgruppe W_λ von λ selbst. Ebenso nennen wir $R_{\bar{\lambda}}$ das **ganzzahlige Wurzelsystem von λ** . Bei genauerem Hinsehen erkennt man unschwer, daß diese Bildungen sogar nur von der Nebenklasse von λ modulo dem Gitter X der ganzzahligen Gewichte abhängen.



Die Spiegelebenen der affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems, das im Bild neben [SPW] 2.4.5 eingezeichnet war. Hier habe ich ein Gewicht λ eingezeichnet und als fette Punkte den Nullpunkt sowie die Elemente seiner Nebenklasse $\bar{\lambda}$ unter dem Wurzelgitter. Die Spiegelungen an den beiden fett eingezeichneten Linien erzeugen die ganzzahlige Weylgruppe $W_{\bar{\lambda}}$ von λ . Die Spiegelungen an den durchgezogenen Linien erzeugen den Stabilisator in der affinen Weylgruppe seiner Nebenklasse modulo dem Wurzelgitter.

Proposition 1.6.3 (zur ganzzahligen Weylgruppe eines Gewichts). *Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, $R \subset V$ ein Wurzelsystem, W die Weylgruppe und $\Lambda \in V/\langle R \rangle$ eine Nebenklasse des Wurzelgitters. So wird die Standgruppe W_Λ von Λ erzeugt von den Spiegelungen an den auf Λ ganzzahligen Wurzeln, in Formeln*

$$W_\Lambda = \langle s_\alpha \mid \alpha \in R_\Lambda \rangle$$

Beweis. Sei $\lambda \in \Lambda$ ein Repräsentant. Das anschließende Lemma 1.6.4 zeigt, daß die Standgruppe \mathcal{W}_λ von λ in der affinen Weylgruppe \mathcal{W} unseres Wurzelsystems R von Spiegelungen erzeugt wird. Damit wird auch W_Λ von Spiegelungen erzeugt, denn W_Λ ist gerade das Bild von \mathcal{W}_λ unter dem Bilden des linearen Anteils $\mathcal{W} \twoheadrightarrow W$. Die Spiegelungen aus W_Λ sind aber per definitionem gerade die Spiegelungen zu Wurzeln aus R_Λ . \square

Lemma 1.6.4. *Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper k und $\mathcal{W} \subset \text{Aff}^\times V$ eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne von [SPW] 1.5.2. Ist $K \supset k$ eine Körpererweiterung, so wird auch für jedes $\lambda \in K \otimes_k V$ seine Standgruppe $\mathcal{W}_\lambda \subset \mathcal{W}$ erzeugt von Spiegelungen.*

Beweis. Wir ergänzen $e_0 = 1 \in k$ zu einer k -Basis $(e_i)_{i \in I}$ von K und erhalten eine Zerlegung $K \otimes_k V = \bigoplus (e_i \otimes V)$. Nach geeigneter Umbenennung von I können wir dann λ darstellen in der Form

$$\lambda = \lambda_0 + e_1 \otimes \lambda_1 + \dots + e_n \otimes \lambda_n$$

mit $\lambda_i \in V$. Bezeichnet $\bar{w} \in \text{GL}(V)$ den linearen Anteil von $w \in \mathcal{W}$, so haben wir offensichtlich

$$w\lambda = w\lambda_0 + e_1 \otimes \bar{w}\lambda_1 + \dots + e_n \otimes \bar{w}\lambda_n$$

Die Standgruppe von λ können wir demnach so beschreiben: Wir nehmen erst die Standgruppe von λ_0 , eine endliche affine Spiegelungsgruppe nach [SPW] 1.7.5. Diese identifizieren mit der endlichen Spiegelungsgruppe ihrer linearen Anteile und nehmen dann darin die Standgruppe von λ_1 , darin wiederum die Standgruppe von λ_2 etcetera. In jedem Schritt wird aber nach [SPW] 1.7.5 aus einer Spiegelungsgruppe wieder eine Spiegelungsgruppe. \square

Definition 1.6.5. Seien $V \supset R \supset R^+$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, ein Wurzelsystem und ein System positiver Wurzeln. Gegeben $\Lambda \in V/\langle R \rangle$ eine Nebenklasse des Wurzelgitters bezeichnen wir die durch $R_\Lambda \cap R^+$ gegebene Länge auf der Standgruppe W_Λ mit $l_\Lambda : W_\Lambda \rightarrow \mathbb{N}$ und bezeichnen mit $w_\Lambda \in W_\Lambda$ das bezüglich l_Λ längste Element.

1.6.6. Sei ganz allgemein (W, E) eine endliche affine Spiegelungsgruppe und A einer ihrer Alkoven. Wir betrachten im Raum der Richtungsvektoren \vec{E} die Menge A^* aller nichtnegativen Linearkombinationen von Vektoren, die (-1) -Eigenvektoren von Spiegelungen sind und in Richtung von A zeigen. Nun führen wir auf E zwei Teilordnungen ein:

1. $\lambda \leq \mu$ möge bedeuten $\mu \in \lambda + A^*$. Wir verwenden das Symbol \leq , um den Unterschied zur Relation \leq aus 1.6.8 anzudeuten;
2. $\lambda \preceq \mu$ möge bedeuten, daß es eine Folge t_1, t_2, \dots, t_r von Spiegelungen gibt mit $\lambda \leq t_1 \lambda \leq t_2 t_1 \lambda \leq \dots \leq t_r \dots t_2 t_1 \lambda = \mu$.

Offensichtlich ist die zweite Relation stärker als die Erste. Offensichtlich ist weiter in jeder W -Bahn auf E der Repräsentant aus \bar{A} das größte Element für beide Teilordnungen und der Repräsentant aus $w_A \bar{A} = -\bar{A}$ das Kleinste.

Ergänzung 1.6.7. Im Übrigen ist für $\lambda \in A$ und $x, y \in W$ auch $x\lambda \preceq y\lambda$ gleichbedeutend dazu, daß gilt $x \geq y$ in der Bruhat-Teilordnung auf W aus [SPW] 3.3.

Definition 1.6.8. Seien $V \supset R \supset R^+$ ein Vektorraum mit einem Wurzelsystem und einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln. Wir führen zwei Teilordnungen auf V ein:

1. $\lambda \leq \mu$ möge wie in ?? bedeuten $\mu \in \lambda + |R^+|$;
2. $\lambda \uparrow \mu$ möge bedeuten, daß es eine Folge t_1, t_2, \dots, t_r von Spiegelungen gibt mit $\lambda \leq t_1 \cdot \lambda \leq (t_2 t_1) \cdot \lambda \leq \dots \leq (t_r \dots t_1) \cdot \lambda = \mu$.

Beispiel 1.6.9. Auch auf der Weylbahn eines ganzen Gewichts ist die zweite Relation im allgemeinen echt stärker. Zum Beispiel mag man das Wurzelsystem $\{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ in $\{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + \dots + x_4 = 0\}$ aus [SPW] 2.1.18 vom Typ A_3 betrachten mit dem üblichen System positiver Wurzeln $R^+ = \{e_i - e_j \mid i < j\}$. Für die Gewichte $\lambda = \lambda' - \rho$ und $\mu = \mu' - \rho$ mit $\mu' = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + \varepsilon_4$ und $\lambda' = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4$ in den Notationen [SPW] 2.1.18, also mit $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, gilt dann $\mu = \lambda + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + 2(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)$ und damit $\lambda \leq \mu$ in Bezug auf das duale Wurzelsystem. Wir haben auch $W \cdot \lambda = W \cdot \mu$, aber dennoch gilt nicht $\lambda \uparrow \mu$, wie man unschwer einsieht.

Definition 1.6.10. Seien V ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $R^+ \subset R \subset V$ ein Wurzelsystem im Sinne von [SPW] 2.1.2 mit einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln. Dann bilden wir die Halbsumme der positiven Wurzeln $\rho = \rho(R^+)$ und betrachten die Menge

$$V_{\text{dom}} := \{\lambda \in V \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{-1, -2, \dots\} \forall \alpha \in R^+\}$$

und nennen ihre Elemente die ρ -**dominanten Vektoren von V** . Sind wir in einer der in der Darstellungstheorie üblichen Situationen, daß unser Vektorraum etwa der Dualraum einer Cartan'schen ist, so daß seine Elemente üblicherweise als Gewichte bezeichnet werden, so sprechen wir entsprechend von ρ -**dominanten Gewichten**. Die dominanten Gewichte in \mathfrak{h}^* erhalten wir mithin aus den ρ -dominanten ganzen Gewichten durch die Addition von ρ .

Korollar 1.6.11. *Seien $V \supset R \supset R^+$ ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null mit einem Wurzelsystem und einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln. So haben wir:*

1. Für alle $\lambda \in V$ gilt $\bar{\lambda} \cap (W \cdot \lambda) = W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$;
2. Für jedes $\lambda \in V$ besitzt seine Bahn unter seiner ganzzahligen Weylgruppe, kurz seine **ganzzahlige Bahn** $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$, ein größtes und ein kleinstes Element bezüglich \uparrow und a fortiori auch bezüglich \leq ;
3. Ein Gewicht $\lambda \in V$ ist ρ -dominant genau dann, wenn es das größte Element seiner ganzzahligen Bahn $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$ ist. Das kleinste Element besagter Bahn ist dann $w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus den Definitionen. Die anderen ergeben sich, wenn wir Bemerkung 1.6.6 anwenden auf die dot-Operation der ganzzahligen Weylgruppe $W_{\bar{\lambda}}$ auf dem affinen Raum $\lambda + \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ über dem angeordneten Körper \mathbb{Q} . \square

Proposition 1.6.12 (Einfache Vermamoduln). *Der Vermamodul $\Delta(\lambda)$ einfach, wenn gilt $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{1, 2, \dots\} \forall \alpha \in R^+$, wo ρ die Halbsumme der positiven Wurzeln bezeichnet.*

Vorschau 1.6.13. Die in dieser Proposition formulierte hinreichende Bedingung für die Einfachkeit eines Vermamoduls aus obigem Satz ist auch notwendig, wie aus unserer Beschreibung aller Homomorphismen zwischen Vermamoduln 2.6.2 unmittelbar folgen wird.

Beweis. Wir wissen nach 1.5.7, daß nur die einfachen Höchstgewichtsmoduln $L(x \cdot \lambda)$ mit $x \in W$ und $x \cdot \lambda \in \lambda - |R^+$ als einfache Subquotienten in Frage kommen. Nach 1.6.11 gehört x dann zur ganzen Weylgruppe $W_{\bar{\lambda}}$ und ist λ das \leq -kleinste Element von $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$, so muß $\Delta(\lambda)$ einfach sein. Dies \leq -kleinste Element ist aber nach 1.6.11 auch das \uparrow -kleinste und kann deshalb charakterisiert werden durch die Eigenschaft $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{1, 2, \dots\}$ für alle $\alpha \in R^+$. \square

Beispiel 1.6.14. Im Kontext von 1.6.5 muß die Bruhat-Teilordnung auf W nicht notwendig die Bruhat-Teilordnung auf W_Λ induzieren. Ist etwa R das Wurzelsystem vom Typ G_2 mit Basis $\{\alpha, \beta\}$ und $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -3$, und erklären wir λ durch $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 1/2$ und $\langle \lambda, \beta^\vee \rangle = 1$ und Λ als seine Nebenklasse, so ist R_Λ vom Typ $A_1 \times A_1$, aber die Bruhat-Teilordnung auf W induziert eine totale Ordnung auf W_Λ .

2 Multiplizitäten von Vermamoduln

Die Kategorie \mathcal{O} wurde eingeführt in einer Arbeit von Bernstein-Gelfand-Gelfand [BGG76] als natürlicher Rahmen für das Studium der Jordan-Hölder-Multiplizitäten von Vermamoduln. Die Bezeichnung geht auf das russische Wort *основной* für „grundlegend“ zurück. In obiger Arbeit zeigen die Autoren eine Analogie im Kontext unendlichdimensionalen Darstellungen komplexer halbeinfacher Liealgebren zur sogenannten „Brauer-Nesbitt-Reziprozität“ [?] aus der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Für derartige Phänomene hat sich mittlerweile die Bezeichnung „BGG-Reziprozität“ durchgesetzt.

2.1 Kategorie \mathcal{O}

Definition 2.1.1. Gegeben $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan’schen und ein System R^+ positiver Wurzeln setzen wir $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ und definieren die **Kategorie \mathcal{O}** als diejenige volle Unterkategorie in der Kategorie aller Darstellungen der Liealgebra \mathfrak{g} , die gegeben wird durch die Bedingungen

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, R^+) := \left\{ M \in \mathfrak{g}\text{-Mod} \left| \begin{array}{l} M \text{ ist endlich erzeugt über } \mathfrak{g} \\ M \text{ ist lokal endlich über } \mathfrak{b} \\ M \text{ ist halbeinfach über } \mathfrak{h} \end{array} \right. \right\}$$

Die zweite Bedingung meint ausgeschrieben, daß jeder Vektor unserer Darstellung in einem endlichdimensionalen \mathfrak{b} -stabilen Teilraum enthalten ist. Die dritte Bedingung bedeutet, daß alle $H \in \mathfrak{h}$ auf unserer Darstellung durch diagonalisierbare Endomorphismen operieren, daß also gilt $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$ mit

$$M_\lambda := \{m \in M \mid Hm = \lambda(H)m \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

dem **Gewichtsraum** zum Gewicht λ .

2.1.2. Die Terminologie „halbeinfach“ ist an dieser Stelle aus der Theorie der Moduln über Ringen entnommen: Wie in [NAS] 2.3.1 nennen wir auch Darstellungen von Liealgebren „halbeinfach“, wenn sie das Erzeugnis ihrer einfachen Unterdarstellungen sind. Durch [NAS] ?? ist der Begriff „halbeinfach“ ja sogar für Moduln über beliebigen Mengen erklärt.

Ergänzung 2.1.3. Ist \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan’sche und $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem, so erhalten wir nach Übung [HL] 2.3.29 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Systeme } R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ von} \\ \text{positiven Wurzeln} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Borelsche Unteralegebren,} \\ \text{die } \mathfrak{h} \text{ umfassen} \end{array} \right\}$$

durch die Vorschrift $R^+ \mapsto \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Im Rahmen der Theorie der algebraischen Gruppen [AAG] 4.6.28 sieht man ohne große Schwierigkeiten, daß je zwei Borel'sche Unteralgebren einer endlichdimensionalen reductiven komplexen Liealgebra konjugiert sind unter einem Automorphismus der Liealgebra, so daß insbesondere jede Borel'sche einer halbeinfachen Liealgebra von der oben angegebenen Gestalt ist. Weiter hängt unsere Kategorie $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, R^+) \subset \mathfrak{g}\text{-Mod}$ von der Wahl von \mathfrak{h} gar nicht ab, sondern nur von der Borel'schen \mathfrak{b} , und wir hätten sie durchaus $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ notieren können: In der Tat kann die dritte Bedingung umformuliert werden zur Forderung, daß für jeden \mathfrak{b} -Untermodule $N \subset M$ unserer Darstellung der Quotient $N/[\mathfrak{b}, N]$ ein halbeinfacher \mathfrak{b} -Modul ist. Ich schreibe dennoch $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, R^+)$, weil sich so die Theorie der Borel'schen Unteralgebren ausklammern läßt.

2.1.4. Gegeben $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei R^+ ein System positiver Wurzeln. So ist für die zugehörige Borel'sche \mathfrak{b} die Surjektion $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}$ mit den Wurzelräumen im Kern ein Homomorphismus von Liealgebren und jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ liefert durch Vorschalten besagter Surjektion einen Charakter $\lambda : \mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{C}$. Wir erinnern an die Verma-Moduln $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, \mathfrak{b}) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda = \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda$ aus ???. Eine endliche Filtrierung eines \mathfrak{g} -Moduls durch Unterdarstellungen, deren sukzessive Subquotienten sämtlich Verma-Moduln zu einer festen Borel'schen sind, nennt man eine **Verma-Fahne**.

Lemma 2.1.5 (Erste Eigenschaften der Kategorie \mathcal{O}). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit Cartan'scher und R^+ ein System positiver Wurzeln mit der zugehörigen Kategorie \mathcal{O} . So gilt:*

1. *Alle Verma-Moduln $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, \mathfrak{b})$ liegen in \mathcal{O} . Ist allgemeiner V eine endlichdimensionale Darstellung von \mathfrak{b} , die halbeinfach ist über \mathfrak{h} , so besitzt $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} V$ eine Verma-Fahne und gehört zu \mathcal{O} ;*
2. *Alle Subquotienten von Darstellungen aus \mathcal{O} liegen wieder in \mathcal{O} , und jedes Objekt von \mathcal{O} ist Quotient eines Objekts von \mathcal{O} mit einer Verma-Fahne;*
3. *Jede Darstellung aus \mathcal{O} ist ein $U(\mathfrak{g})$ -Modul endlicher Länge;*
4. *Alle Gewichtsräume von Darstellungen aus \mathcal{O} sind endlichdimensional, ja für alle $M \in \mathcal{O}$ und $\nu \in \mathfrak{h}^*$ ist sogar der Raum $\bigoplus_{\mu \geq \nu} M_{\nu+\mu}$ endlichdimensional;*
5. *Gehören bei einer kurzen exakten Sequenz von Darstellungen von \mathfrak{g} die Enden zu \mathcal{O} und ist die Mitte halbeinfach unter unserer Cartan'schen \mathfrak{h} , so gehört auch die Mitte zu \mathcal{O} ;*

6. Die Kategorie der Darstellungen aus \mathcal{O} ist stabil unter dem Tensorieren mit endlichdimensionalen Darstellungen von \mathfrak{g} , in Formeln haben wir also ($\dim E < \infty$ und $M \in \mathcal{O}$) $\Rightarrow E \otimes M \in \mathcal{O}$;

7. Die einfachen Darstellungen aus \mathcal{O} sind genau die einfachen Höchstgewichtsmoduln. Bezeichnet genauer $L(\lambda)$ den nach ?? eindeutig bestimmten einfachen Quotienten von $\Delta(\lambda)$, so haben wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^* &\xrightarrow{\sim} \text{irr } \mathcal{O} \\ \lambda &\mapsto L(\lambda) \end{aligned}$$

2.1.6. Im letzten Punkt bezeichnet $\text{irr } \mathcal{O}$ die Menge der Isomorphieklassen von einfachen Objekten aus \mathcal{O} . Dieselbe Notation verwenden wir für beliebige „abelsche Kategorien“.

Beweis. 1. Vermamoduln sind endlich erzeugt, ja sogar zyklisch. Weiter zerfallen sie nach ?? in Gewichtsräume, genauer haben sie die Zerlegung $\Delta(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \lambda - |R^+)} \Delta(\lambda)_\nu$ mit der Notation $|R^+)$ für das von R^+ erzeugte Untermonoid von \mathfrak{h}^* . Da alle diese Gewichtsräume wieder nach ?? von endlicher Dimension sind und da gilt

$$U(\mathfrak{b})\Delta(\lambda)_\nu \subset \bigoplus_{\mu \in |R^+)} \Delta(\lambda)_{\nu+\mu}$$

und da überdies $(\nu + |R^+)) \cap (\lambda - |R^+))$ stets endlich ist, hat die rechte Seite unserer Inklusion endliche Dimension und unser Vermamodul ist auch lokal endlich über \mathfrak{b} . Allgemeiner ist das Produzieren alias Koinduzieren

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} = \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} : \mathfrak{b}\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{g}\text{-Mod}$$

nach ?? ein exakter Funktor und macht \mathfrak{h} -halbeinfache Moduln zu \mathfrak{h} -halbeinfachen Moduln. Da \mathfrak{b} auflösbar ist, besitzt V nach dem Satz von Lie oder vielmehr seinem Korollar [HL] 1.5.6 oder auch einfacheren expliziten Überlegungen in unserer speziellen Situation eine Filtrierung

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r = V$$

mit eindimensionalen Subquotienten $V_i/V_{i-1} \cong \mathbb{C}_{\lambda_i}$ für geeignete $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$. Wir erhalten so auf $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V$ eine Filtrierung durch die $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V_i$ mit Subquotienten $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda_i} = \Delta(\lambda_i)$. Daß $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V$ lokal endlich ist über \mathfrak{b} , folgert man ganz analog wie bei Vermamoduln.

2. Daß Quotienten von Objekten aus \mathcal{O} wieder in \mathcal{O} liegen ist offensichtlich. Um es für Untermoduln zu erhalten müssen wir nur bemerken, daß jeder Untermodul eines endlich erzeugten $U(\mathfrak{g})$ -Moduls endlich erzeugt ist, da nämlich $U(\mathfrak{g})$

noethersch ist nach ???. Um schließlich ein beliebiges Objekt $M \in \mathcal{O}$ als Quotient eines Objekts mit Vermafahne zu schreiben, suchen wir uns einen endlichdimensionalen erzeugenden Teilraum $V \subset M$, den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit \mathfrak{b} -stabil annehmen dürfen, und erhalten eine Surjektion $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V \twoheadrightarrow M$.

3. Das folgt sofort aus Teil 2, da nach ??? jeder Vermamodul endliche Länge hat.
4. Das folgt sofort aus dem bereits bewiesenen Teil 2 des Lemmas.
5. Das einzige Problem ist zu zeigen, daß die Mitte auch lokal endlich ist unter \mathfrak{b} . Das folgt jedoch mit Teil 4, wenn wir beachten, daß mit Anfang und Ende unserer Sequenz auch ihre Mitte die in Teil 4 beschriebene Endlichkeitseigenschaft haben muß.
6. Sind Darstellungen E und M lokal endlich über \mathfrak{b} beziehungsweise halbeinfach über \mathfrak{h} , so gilt offensichtlich dasselbe für ihr Tensorprodukt. Sind weiter E und M Darstellungen einer Liealgebra und wird M als Darstellung erzeugt von einem Teilraum $V \subset M$, so wird offensichtlich $E \otimes M$ erzeugt von $E \otimes V$. Ist insbesondere M endlich erzeugt und E endlichdimensional, so ist auch $E \otimes M$ endlich erzeugt.
7. Das folgt aus Teil 2. Nach ??? wissen wir nämlich bereits, daß alle Kompositionsfaktoren von Vermamoduln einfache höchste Gewichtsmodule sind. \square

Beispiel 2.1.7 (Die Kategorie \mathcal{O} im Fall $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$). Wir untersuchen die Kategorie \mathcal{O} im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$. Wir arbeiten mit der üblichen Basis e, h, f wie in [HL] 1.2.14 und mit $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$ und $\mathfrak{b} = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e$. Da alle h -Eigenräume jedes Objekts $M \in \mathcal{O}$ endlichdimensional sind, operiert der Casimiroperator $C = C_{\kappa}$ darauf lokal endlich und M zerfällt in die direkte Summe seiner Haupträume $M = \bigoplus_{a \in \mathbb{C}} \text{Hau}(C|M; a)$. Wir setzen

$${}_a\mathcal{O} := \{M \in \mathcal{O} \mid (C - a) \text{ operiert lokal nilpotent auf } M\}$$

Wir wissen nach ???, daß der Casimiroperator auf zwei einfachen Modulen $L(\lambda)$ und $L(\mu)$ genau dann durch denselben Skalar a operiert, wenn gilt $\lambda = \mu$ oder $\lambda = s \cdot \mu$ für s das einzige nichttriviale Element der Weylgruppe. Wir unterscheiden drei Fälle.

Singulärer zentraler Charakter. Der Fixpunkt $-\rho$ von $(s \cdot)$ ist das einzige $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit $(C - a)\Delta(\lambda) = 0$. In diesem Fall gibt es in ${}_a\mathcal{O}$ nur ein einfaches Objekt $L(-\rho) = \Delta(-\rho)$ und ein beliebiges Objekt $M \in {}_a\mathcal{O}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien dieses einfachen Objekts und der von der universellen Eigenschaft induzierte Morphismus ist ein Isomorphismus $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(M_{-\rho}) \xrightarrow{\sim} M$;

Regulärer nicht ganzer zentraler Charakter. Es gibt zwei Gewichte $\lambda \neq \mu$ mit $(C - a)\Delta(\lambda) = (C - a)\Delta(\mu) = 0$, aber wir haben $\lambda - \mu \notin \langle R \rangle$. In diesem Fall

gibt es in ${}_a\mathcal{O}$ genau zwei einfache Objekte $L(\lambda) = \Delta(\lambda)$ und $L(\mu) = \Delta(\mu)$ ein beliebiges Objekt $M \in {}_a\mathcal{O}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien dieser beiden einfachen Objekte, genauer sind die Gewichtsräume M_λ und M_μ stabil unter \mathfrak{b} und die universelle Eigenschaft koinduzierter Darstellungen liefert einen Isomorphismus $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(M_\lambda \oplus M_\mu) \xrightarrow{\sim} M$;

Regulärer ganzer zentraler Charakter. Es gibt zwei Gewichte $\lambda \neq \mu$ mit $(C - a)\Delta(\lambda) = (C - a)\Delta(\mu) = 0$ und $\lambda - \mu \in \langle R \rangle$. Dann finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $\{\lambda, \mu\} = \{n\rho, -(n+2)\rho\}$. In diesem Fall gibt es in ${}_a\mathcal{O}$ genau zwei einfache Objekte, die einfache endlichdimensionale Darstellung $L(n\rho)$ der Dimension $n+1$ und den einfachen Vermamodul $L(-(n+2)\rho) = \Delta(-(n+2)\rho)$. Wir werden in 2.5.12 Äquivalenzen zwischen je zwei dieser Kategorien ${}_a\mathcal{O}$ konstruieren und konzentrieren uns im folgenden auf den Fall $a = 0$. Dann hat ${}_0\mathcal{O}$ als einfache Objekte nur die Einsdarstellung $L(0) = \mathbb{C}$ und den Vermamodul $\Delta(-2\rho)$ und wir erhalten eine Äquivalenz

$${}_0\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \{V \in \text{Car}(q \rightleftharpoons p, \mathbb{C}\text{-Modf}) \mid (V_q \rightarrow V_p \rightarrow V_q) = 0\}$$

mit der besagten Kategorie aller Darstellungen des oben angedeuteten Köchers mit zwei Ecken p, q und zwei Pfeilen, indem wir dem Objekt $M \in {}_0\mathcal{O}$ das Diagramm

$$M_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{e} \end{array} M_{-2\rho}$$

zuordnen. Der quasiinverse Funktor wird dann dadurch gegeben, daß man $M_0 \oplus M_{-2\rho}$ als \mathfrak{b} -Modul auffaßt und aus $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (M_0 \oplus M_{-2\rho})$ den von allen Ausdrücken $f \otimes (v, 0) - 1 \otimes (0, fv)$ erzeugten \mathfrak{g} -Untermodul herausschält. Man überzeugt sich im Köcherbild leicht, daß unsere Kategorie bis auf Isomorphismus genau fünf unzerlegbare Objekte besitzt: Die ersten vier mag man schematisch schreiben als $\mathbb{C} \rightleftharpoons 0, 0 \rightleftharpoons \mathbb{C}, \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$, wo wir in den letzten beiden Fällen nur den von Null verschiedenen Pfeil notiert haben. Das Fünfte dieser unzerlegbaren Objekte ist $\mathbb{C} \rightleftharpoons \mathbb{C}^2$ mit in_1 und pr_2 als Morphismen. In ${}_0\mathcal{O}$ entsprechen diese fünf Objekte der Reihe nach den Darstellungen $L(0), L(-2\rho) = \Delta(-2\rho), \Delta(0)$, einem noch nicht besprochenen Objekt $\nabla(0)$ und $L(1) \otimes \Delta(-\rho)$. Ein Möglichkeit, $\nabla(0)$ hier schon zu beschreiben, ist als der Kokern eines und jedes injektiven Morphismus $\Delta(-2\rho) \hookrightarrow L(1) \otimes \Delta(-\rho)$.

Übungen

Übung 2.1.8. Der Raum der Homomorphismen zwischen Darstellungen aus \mathcal{O} ist stets endlichdimensional.

Übung 2.1.9 (Dualität auf \mathcal{O}). Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und R^+ ein System positiver Wurzeln. Man erinnere aus dem Beweis von [HL] 3.5.11, daß es einen Liealgebrenautomorphismus $\tau : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ gibt mit $\tau^2 = \text{id}$ und $\tau(h) = -h \ \forall h \in \mathfrak{h}$, und daß derartige Liealgebrenautomorphismen **Chevalley-Involutionen** heißen. Man zeige, daß wir für jede Chevalley-Involution zu $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$d = d_\tau : \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\text{opp}}$$

erhalten durch die Vorschrift $dM := (M^*)_{\mathfrak{h}}^\tau$ alias den Raum der \mathfrak{h} -endlichen Vektoren der kontragredienten Darstellung mit der durch τ getwisteten \mathfrak{g} -Operation, in Formeln $xf := -f \circ (\tau x)$. Weiter zeige man, daß die kanonische Abbildung in den Bidualraum für alle $M \in \mathcal{O}$ einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} ddM$ induziert. Man zeige, daß der natürliche Homomorphismus $E^* \otimes M^* \rightarrow (E \otimes M)^*$ für $M \in \mathcal{O}$ und E eine endlichdimensionale Darstellung einen Isomorphismus $E^{*\tau} \otimes dM \xrightarrow{\sim} d(E \otimes M)$ induziert. Im übrigen ist auch $E^{*\tau}$ isomorph zu E , aber das Auszeichnen eines Isomorphismus bedeutet eine unkanonische Wahl. Man zeige weiter $\dim_{\mathbb{C}}(dM)_\lambda = \dim_{\mathbb{C}}(M)_\lambda$ und folgere $dL(\lambda) \cong L(\lambda)$.

Ergänzende Übung 2.1.10 (∇ -Moduln und ihre universelle Eigenschaft). Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und R^+ ein System positiver Wurzeln. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ und eine Chevalley-Involution τ setzen wir

$$\nabla(\lambda) = \nabla_\tau(\lambda) := d_\tau \Delta(\lambda)$$

und erklären den kanonischen Erzeuger $v_\lambda^\top \in \nabla(\lambda)_\lambda$ des höchsten Gewichtsraums durch $v_\lambda^\top(v_\lambda) = 1$ für $v_\lambda \in \Delta(\lambda)_\lambda$ den bereits in ?? erklärten kanonischen Erzeuger. Für alle $M \in \mathcal{O}$ folgere man aus ??, daß wir einen Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, \nabla(\lambda)) \xrightarrow{\sim} M_\lambda^{*\tau} / \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} M_{\lambda+\alpha}^{*\tau}$$

erhalten, indem wir jeden Homomorphismus auf den λ -Gewichtsraum einschränken und den durch v_λ^\top gegebenen Isomorphismus $\nabla(\lambda)_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ nachschalten. Dadurch ist das Paar $(\nabla(\lambda), v_\lambda^\top)$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus und hängt insbesondere nicht von der Wahl der Chevalley-Involution τ ab.

2.2 Zerlegungen der Kategorie \mathcal{O}

2.2.1. Ich erinnere an unsere allgemeine Terminologie [NAS] 7.3.1 zur Blockzerlegung.

Lemma 2.2.2 (Zerlegung nach der Nebenklasse der Gewichte). Für $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ setze man $\mathcal{O}_\Lambda := \{M \in \mathcal{O} \mid M_\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \Lambda\}$. So haben wir die Zerlegung

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\langle R \rangle} \mathcal{O}_\Lambda$$

Beweis. Gegeben ein Objekt $M \in \mathcal{O}$ und eine Nebenklasse unter dem Wurzelgitter $\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\langle R \rangle$ setzen wir $M_\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$. Natürlich sind die M_Λ Unterdarstellungen von M und es gilt $M = \bigoplus_\Lambda M_\Lambda$. Den Rest des Beweises überlassen wir dem Leser. \square

2.2.3. Wir erinnern an das Zentrum Z der universellen Einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$, an die Menge $\text{Max } Z$ aller maximalen Ideale von Z und an die Abbildung $\xi : \mathfrak{h}^* \rightarrow \text{Max } Z$, $\lambda \mapsto \text{Ann}_Z \Delta(\lambda)$, deren Fasern nach 1.5.5 gerade die Bahnen unter der dot-Operation der Weylgruppe sind.

Lemma 2.2.4 (Zerlegung nach zentralem Charakter). Für $\chi \in \text{Max } Z$ setze man ${}_\chi \mathcal{O} := \{M \in \mathcal{O} \mid \chi^n M = 0 \text{ für } n \gg 0\}$. So haben wir die Zerlegung

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\chi \in \text{Max } Z} {}_\chi \mathcal{O}$$

Beweis. Nach 2.1.5.3 hat jedes $M \in \mathcal{O}$ endliche Länge und alle seine einfachen Subquotienten sind einfache höchste Gewichtsmoduln. Auf diesen operiert jedoch das Zentrum durch Skalare. Damit ergibt sich unser Satz als Spezialfall aus dem Satz über die verallgemeinerte Hauptraumzerlegung von Moduln über kommutativen Ringen [KAG] 4.8.1. \square

Satz 2.2.5 (Blockzerlegung von \mathcal{O}). Gegeben ein Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit Nebenklasse $\bar{\lambda} = \lambda + \langle R \rangle$ unter dem Wurzelgitter bezeichne $\mathcal{O}_\lambda = {}_{\xi(\lambda)} \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{\bar{\lambda}}$ den Schnitt der zugehörigen Unterkategorien aus beiden vorhergehenden Lemmata 2.2.2 und 2.2.4. So haben wir die Zerlegung

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*} \mathcal{O}_\lambda$$

2.2.6. Aus unserer Beschreibung 2.6.2 aller Homomorphismen zwischen Verma-Moduln wird unmittelbar folgen, daß sich die \mathcal{O}_λ nicht mehr weiter in direkte Summen von nichttrivialen Unterkategorien zerlegen lassen. Das rechtfertigt dann auch recht eigentlich erst die Bezeichnung unserer Zerlegung als Blockzerlegung. Den Block \mathcal{O}_0 , der die Einsdarstellung enthält, bezeichnet man auch als den **Hauptblock von \mathcal{O}** .

Beweis. Die einfachen Isomorphieklassen in ${}_{\xi(\lambda)} \mathcal{O}$ werden repräsentiert von den $L(\mu)$ mit $\mu \in W \cdot \lambda$, der Bahn von λ unter der zum Fixpunkt $-\rho$ verschobenen Operation der Weylgruppe nach [?] ??, und die einfachen Isomorphieklassen in $\mathcal{O}_{\bar{\lambda}}$ werden repräsentiert von den $L(\mu)$ mit $\mu \in \bar{\lambda}$. Es reicht demnach zu zeigen, daß für alle $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ der Schnitt von $W \cdot \lambda$ und $\bar{\lambda}$ genau ein ρ -dominantes Gewicht enthält. Dazu dienen die Überlegungen zur Geometrie von Spiegelungsgruppen. Die Aussage selber ergibt sich als Korollar 1.6.11. \square

Korollar 2.2.7. *Seien \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche, $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln und $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ ein ρ -dominantes Gewicht.*

1. *Die einfachen Objekte von \mathcal{O}_λ werden parametrisiert durch die dot-Bahn des Gewichts λ unter seiner ganzzahligen Weylgruppe, genauer haben wir eine Bijektion $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda \xrightarrow{\sim} \text{irr } \mathcal{O}_\lambda$ durch die Vorschrift $\mu \mapsto L(\mu)$;*
2. *Der Vermamodul $\Delta(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$ ist einfach.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der ersten Aussage von 1.6.11. Zum Nachweis der Zweiten bemerken wir, daß für $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ ein ρ -dominantes Gewicht und $x \in W_{\bar{\lambda}}$ beliebig nach 1.6.11 gilt

$$w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda \leq x \cdot \lambda \leq \lambda$$

Jeder einfache Subquotient von $\Delta(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$ gehört nun aber zu \mathcal{O}_λ und ist daher nach unseren Resultaten zur Blockzerlegung 2.2.5 ein einfacher höchster Gewichtsmodul der Gestalt $L(x \cdot \lambda)$ mit $x \in W_{\bar{\lambda}}$. Bei $\Delta(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$ kommt nun als einfacher Untermodul nur $L(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$ in Frage, als da heißt, jeder einfache Untermodul unseres Vermamoduls ist bereits der Vermamodul selber. \square

Übungen

Übung 2.2.8. Man zeige, daß für jede Chevalley-Involution die zugehörige Dualität auf \mathcal{O} die Blockzerlegung erhält, in Formeln $M \in \mathcal{O}_\lambda \Rightarrow dM \in \mathcal{O}_\lambda$.

2.3 Projektive Objekte von \mathcal{O}

2.3.1. Wir haben mittlerweile bewiesen, daß „fast alle“ Vermamoduln einfach sind. Unser Leitproblem für die nächsten Abschnitte ist es, die Kompositionsfaktoren der übrigen Vermamoduln zu bestimmen. Dazu wird sich ein vertieftes Verständnis der Projektiven von \mathcal{O} als außerordentlich hilfreich erweisen. Darunter verstehen wir projektive Objekte der abelschen Kategorie \mathcal{O} , d.h. Darstellungen $P \in \mathcal{O}$ derart, daß jeder surjektive Homomorphismus $M \twoheadrightarrow N$ zwischen Darstellungen $M, N \in \mathcal{O}$ eine Surjektion $\mathcal{O}(P, M) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(P, N)$ induziert. Hier erinnere ich unsere allgemeine Konvention, nach der wir für eine Kategorie \mathcal{C} und Objekte $M, N \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{C}(M, N)$ die Menge der Morphismen von M nach N bezeichnen.

Satz 2.3.2 (Projektive Vermamoduln). *Seien \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. So ist für jedes ρ -dominante Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ der Vermamodul $\Delta(\lambda)$ ein projektives Objekt der Kategorie \mathcal{O} .*

Vorschau 2.3.3. Diese hinreichende Bedingung für die Projektivität eines Vermoduls aus obigem Satz ist auch notwendig. Wir zeigen das in ??.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß $\Delta(\lambda)$ projektiv ist in \mathcal{O}_λ , denn der Projektionsfunktorktor $\text{pr}_\lambda : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\lambda$ ist exakt und wir haben

$$\mathcal{O}(\Delta(\lambda), M) = \mathcal{O}_\lambda(\Delta(\lambda), \text{pr}_\lambda M)$$

für alle $M \in \mathcal{O}$. Nach unseren Erkenntnissen über die ganzzahlige Weylgruppe aus 1.6.11 und über die Irreduziblen in \mathcal{O}_λ aus 2.2.7 haben wir für $M \in \mathcal{O}_\lambda$ jedoch $M_\nu \neq 0 \Rightarrow \nu \leq \lambda$. Nach ?? ?? liefert also für $M \in \mathcal{O}_\lambda$ das Auswerten auf dem kanonischen Erzeuger $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}_\lambda(\Delta(\lambda), M) \xrightarrow{\sim} M_\lambda$. Da jedoch das Bilden des λ -Gewichtsraums ein exakter Funktor ist, folgt aus diesem Isomorphismus die Projektivität von $\Delta(\lambda)$. \square

Satz 2.3.4. *Es gibt in \mathcal{O} genügend projektive Objekte und jedes projektive Objekt von \mathcal{O} besitzt eine Vermafahne.*

Beweis. Das folgt sofort aus den zwei präziseren Aussagen 2.3.5 und 2.3.6, die wir gleich im Anschluß beweisen. \square

Proposition 2.3.5. *Jeder Vermodul kann eingefügt werden in eine kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow P \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$, bei der P projektiv ist in \mathcal{O} und N eine Vermafahne besitzt, in der nur Subquotienten $\Delta(\mu)$ mit $\mu > \lambda$ vorkommen.*

Beweis. Gegeben $\gamma \in \mathfrak{h}^*$ und M ein \mathfrak{b} -Modul betrachten wir in M den Untervektorraum

$$\tau_{\leq \gamma} M = \bigoplus_{\mu \leq \gamma} M_\mu$$

Sicher ist die Summe aller Gewichtsräume eine Unterdarstellung von M und $\tau_{\leq \gamma} M$ ist hinwiederum ein Quotient dieser Unterdarstellung nach einem \mathfrak{b} -stabilen Teilraum und damit auch ein \mathfrak{b} -Modul. Wir betrachten nun den Projektionsfunktorktor $\text{pr}_\lambda : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\lambda$ und bilden für $\nu \in |R^+|$ in \mathcal{O} die Darstellungen

$$P_{\leq \lambda + \nu} = \text{pr}_\lambda \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \tau_{\leq \lambda + \nu} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda$$

Zusammen mit den natürlichen Surjektionen bilden sie ein durch die Menge $|R^+|$ indiziertes projektives System, das mit $\Delta(\lambda)$ endet. Wir behaupten, daß $P_{\leq \lambda + \nu}$ für ν hinreichend groß nicht mehr von ν abhängt und daß das dann ein projektives Objekt P der gewünschten Gestalt ist. Genauer stabilisiert unser System bereits, wenn $\lambda + \nu$ größer ist als jedes Gewicht aus $(W \cdot \lambda) \cap (\lambda + \langle R \rangle)$, denn die Kerne der Surjektionen im projektiven System vor Anwenden von pr_λ haben stets Vermafahnen und werden unter dieser Bedingung von pr_λ annulliert. Weiter folgt

unter dieser Bedingung an ν für jedes $N \in \mathcal{O}_\lambda$ aus $N_\mu \neq 0$ schon $\mu \leq \lambda + \nu$. Für beliebiges $M \in \mathcal{O}$ folgern wir damit kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Mod}^{\mathfrak{g}}(P_{\leq \lambda + \nu}, M) &\xrightarrow{\sim} \text{Mod}^{\mathfrak{g}}(P_{\leq \lambda + \nu}, \text{pr}_\lambda M) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Mod}^{\mathfrak{b}}(\tau_{\leq \lambda + \nu} \text{prod}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda, \text{pr}_\lambda M) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Mod}^{\mathfrak{b}}(\text{prod}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda, \text{pr}_\lambda M) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Mod}^{\mathfrak{b}}(\mathbb{C}_\lambda, \text{pr}_\lambda M) \\ &\xrightarrow{\sim} (\text{pr}_\lambda M)_\lambda \end{aligned}$$

und erkennen so die Projektivität von $P_{\leq \lambda + \nu}$. Die übrigen in der Proposition behaupteten Eigenschaften sind leicht einzusehen. \square

Proposition 2.3.6. *Seien $M', M'' \in \mathcal{O}$. Genau dann besitzt $M' \oplus M''$ eine Vermafabne, wenn sowohl M' als auch M'' eine Vermafabne besitzen.*

Beweis. Daß eine direkte Summe von zwei Moduln mit Vermafabne auch eine Vermafabne besitzt ist offensichtlich. Um die andere Implikation zu zeigen beginnen wir mit einem Lemma.

Lemma 2.3.7. *Besitzt $M \in \mathcal{O}$ eine Vermafabne und ist λ ein maximales Gewicht von M und $v \in M_\lambda$ ein von Null verschiedener Gewichtsvektor, so ist die Abbildung $\Delta(\lambda) \rightarrow M, v_\lambda \mapsto v$ eine Injektion und $M/\Delta(\lambda)$ besitzt auch eine Vermafabne.*

Beweis des Lemmas. Besitzt M eine Vermafabne, so ist M offensichtlich frei als $U(\mathfrak{n})$ -Modul. Das zeigt, daß unsere Abbildung $\Delta(\lambda) \rightarrow M$ eine Injektion sein muß. Ihr Bild ist offensichtlich $U(\mathfrak{g})v$. Gegeben eine Vermafabne

$$M = M_n \supset \dots \supset M_i \supset M_{i-1} \supset M_0 = 0$$

von M sei nun i der Index mit $v \in M_i$ aber $v \notin M_{i-1}$. Da λ ein maximales Gewicht von M war, haben wir notwendig $U(\mathfrak{g})v \xrightarrow{\sim} M_i/M_{i-1}$ und damit $U(\mathfrak{g})v \cap M_{i-1} = 0$. Also hat $\overline{M} = M/U(\mathfrak{g})v$ die Vermafabne

$$\overline{M} = \overline{M}_n \supset \dots \supset \overline{M}_i = \overline{M}_{i-1} \supset \dots \supset \overline{M}_0 = 0 \quad \square$$

Um nun die Proposition zu zeigen, wählen wir einen von Null verschiedenen Vektor v zu einem maximalen Gewicht aus einem der beiden Summanden, sagen wir aus M' . Dann haben wir offensichtlich $\overline{M'} \oplus \overline{M''} = \overline{M'} \oplus M''$ und Induktion über die kleinstmögliche Länge einer Vermafabne von M beendet den Beweis der Proposition. \square

2.3.8. Wir bezeichnen mit $P(\lambda)$ eine **projektive Decke** von $L(\lambda)$ in \mathcal{O} , als da heißt, ein unzerlegbares projektives Objekt mit Quotient $L(\lambda)$. Nach 2.3.4 existiert

stets solch ein Objekt. Nach [NAS] 7.1.27 ist es eindeutig bis auf nichteindeutigen Isomorphismus und wir haben

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(\lambda), L(\mu)) = \delta_{\lambda\mu}$$

Weiter hat der Kern der offensichtlichen Surjektion $P(\lambda) \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$ nach 2.3.5 und 2.3.6 eine Vermafabne, in der nur Subquotienten $\Delta(\mu)$ mit $\mu > \lambda$ auftreten.

Satz 2.3.9 (Reziprozitätsformel). *Die Vielfachheit eines Vermamoduls als Subquotient in einer Vermafabne eines unzerlegbaren Projektiven der Kategorie \mathcal{O} stimmt überein mit der Vielfachheit des einfachen Quotienten von besagtem Projektiven als Subquotient einer Kompositionsreihe von besagtem Vermamodul, in Formeln*

$$[P(\lambda) : \Delta(\mu)]_{\Delta} = [\Delta(\mu) : L(\lambda)] \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$$

2.3.10. Die Reziprozitätsformel wurde in diesem Kontext zuerst von Bernstein, Gelfand und Gelfand bewiesen und wird deshalb meist **BGG-Reziprozität** genannt. Daß die Subquotienten in einer Vermafabne eines Objekts von Kategorie bis auf Reihenfolge wohldefiniert sind, kann man entweder aus dem gleich folgenden Beweis ableiten oder auch einfacher aus 2.5.10.

Beweis. Nach 2.3.8 haben wir $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(\lambda), L(\mu)) = \delta_{\lambda\mu}$ und damit

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(P(\lambda), M) = [M : L(\lambda)]$$

für alle Objekte $M \in \mathcal{O}$. Wegen $[\Delta(\mu) : L(\lambda)] = [\nabla(\mu) : L(\lambda)]$ reicht es also, für alle λ, μ die Gleichheit $[P(\lambda) : \Delta(\mu)]_{\Delta} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(P(\lambda), \nabla(\mu))$ zu zeigen, und dafür müssen wir nur für alle projektiven Objekte P von \mathcal{O} und alle Gewichte μ die Gleichheit

$$[P : \Delta(\mu)]_{\Delta} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(P, \nabla(\mu))$$

zeigen. Wir zeigen diese Gleichheit allgemeiner für alle Objekte P mit Vermafabne, und zwar durch vollständige Induktion über die Länge einer Vermafabne. Sei dazu $Q \hookrightarrow P \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$ eine kurze exakte Sequenz in \mathcal{O} . Es reicht zu zeigen, daß sie eine kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{O}(\Delta(\lambda), \nabla(\mu)) \hookrightarrow \mathcal{O}(P, \nabla(\mu)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Q, \nabla(\mu))$$

induziert, als da heißt, daß die rechte Abbildung hier wie bereits angedeutet eine Surjektion sein muß. Um das zu sehen, zeigen wir zunächst, daß jede kurze exakte Sequenz $\nabla(\mu) \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$ in \mathcal{O} spaltet. Gilt hier nicht $\lambda < \mu$, so liefert die universelle Eigenschaft von Vermamoduln unmittelbar eine Spaltung. Gilt dahingegen $\lambda < \mu$, so dualisieren wir und sind auch wieder fertig. Für die

mit den langen exakten Ext-Sequenzen vertrauten Leser ist der Beweis damit zu Ende. Die anderen müssen sich noch überlegen, daß wir durch Bilden des Pushout $E := \text{cok}((i, -\varphi)^\top : Q \hookrightarrow (P \oplus \nabla(\mu)))$ zur Einbettung $i : Q \hookrightarrow P$ und irgendeinem Morphismus $\varphi : Q \rightarrow \nabla(\mu)$ ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \Delta(\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \nabla(\mu) & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & \Delta(\lambda) \end{array}$$

erhalten. Da die untere Zeile spaltet, läßt sich unser Morphismus $\varphi : Q \rightarrow \nabla(\mu)$ in der Tat zu einem Morphismus $P \rightarrow \nabla(\mu)$ ausdehnen. \square

Übungen

Übung 2.3.11. Ist P ein projektives Objekt von \mathcal{O} und E eine endlichdimensionale Darstellung, so ist auch $E \otimes P$ ein projektives Objekt von \mathcal{O} .

2.4 Die Tensoridentität*

Proposition 2.4.1 (Die Tensoridentität und ihre Verwandten). Sei $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Homomorphismus von Liealgebren über einem Körper k . Gegeben Darstellungen $M \in \mathfrak{b}\text{-Mod}$ und $E \in \mathfrak{g}\text{-Mod}$ haben wir kanonische Isomorphismen von \mathfrak{g} -Moduln

$$\begin{aligned} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(E \otimes_k M) &\xrightarrow{\sim} E \otimes_k (\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M) \\ \text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \text{Hom}_k(E, M) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(E, \text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M) \\ \text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \text{Hom}_k(M, E) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M, E) \end{aligned}$$

Ergänzung 2.4.2. Eine Variante dieser Aussagen für Mengen mit Gruppenoperation wird in [TF] 4.8.26 ausformuliert.

Beweis. Ganz allgemein ist nach [TF] 4.8.22 der Adjungierte einer Verknüpfung von Funktoren die Verknüpfung der Adjungierten, wenn sie existieren. Dieses Erkenntnis gilt es nun anzuwenden auf die kommutativen Diagramme von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g}\text{-Mod} & \xrightarrow{E \otimes} & \mathfrak{g}\text{-Mod} & & \mathfrak{g}\text{-Mod} & \xrightarrow{\text{Hom}(E, \cdot)} & \mathfrak{g}\text{-Mod} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{b}\text{-Mod} & \xrightarrow{E \otimes} & \mathfrak{b}\text{-Mod} & & \mathfrak{b}\text{-Mod} & \xrightarrow{\text{Hom}(E, \cdot)} & \mathfrak{b}\text{-Mod} \\ & & & & & & \\ & & \mathfrak{g}\text{-Mod} & \xrightarrow{\text{Hom}(\cdot, E)} & \mathfrak{g}\text{-Mod}^{\text{opp}} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathfrak{b}\text{-Mod} & \xrightarrow{\text{Hom}(\cdot, E)} & \mathfrak{b}\text{-Mod}^{\text{opp}} & & \end{array}$$

mit den Restriktionen als Vertikalen und der Adjunktion $(E \otimes, \text{Hom}(E, \))$ beziehungsweise der Tatsache, daß der Rechtsadjungierte der Horizontalen $\text{Hom}(\ , E)$ im Diagramm ganz rechts wieder $\text{Hom}(\ , E)$ ist, nur diesmal aufgefaßt als Funktor in der Gegenrichtung. \square

2.4.3. Nehmen wir im letzten unserer Isomorphismen speziell $E = k$, so ergibt sich ein kanonischer Isomorphismus $(\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} N)^* \xrightarrow{\sim} \text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(N^*)$.

Übungen

Übung 2.4.4. Der erste unserer drei Isomorphismen wird unter der Identifikation $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} M$ auf Elementen gegeben durch die Vorschrift $u \otimes (e \otimes m) \mapsto u(e \otimes (1 \otimes m))$.

Übung 2.4.5. Gegeben eine weitere Darstellung $F \in \mathfrak{g}\text{-Mod}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(E \otimes F \otimes M) & \longrightarrow & (E \otimes F) \otimes \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \otimes \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(F \otimes M) & \longrightarrow & E \otimes (F \otimes \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M) \end{array}$$

2.5 Verschiebungsfunktoren

2.5.1. Wir erinnern an die Zerlegung $\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{b}_{\text{dom}}} \mathcal{O}_{\lambda}$ aus 2.2.5, in der λ über alle ρ -dominante Gewichte läuft. Zu dieser Zerlegung gehören Projektionsfunktoren $\text{pr}_{\lambda} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{\lambda}$ und Einbettungsfunktoren $\text{in}_{\lambda} : \mathcal{O}_{\lambda} \hookrightarrow \mathcal{O}$.

Definition 2.5.2. Gegeben λ, μ zwei ρ -dominante Gewichte mit ganzer Differenz $\mu - \lambda \in \mathfrak{X}$ betrachten wir eine einfache endlichdimensionale Darstellung E mit extremem Gewicht $\mu - \lambda$ und einem ausgezeichnetem Erzeuger des zugehörigen Gewichtsraums und definieren den **Verschiebungsfunktor von λ nach μ** , auf englisch und französisch **translation functor**, als den Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{\lambda}^{\mu} : \mathcal{O}_{\lambda} & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mu} \\ M & \mapsto & \text{pr}_{\mu}(E \otimes M) \end{array}$$

2.5.3. Die Wahl eines ausgezeichneten Erzeugers des zugehörigen Gewichtsraums ist nur eine von vielen Möglichkeiten, unseren Funktor bis auf eindeutigen Isomorphismus festzulegen. Alternativ könnte man auch $E = L(\nu)$ nehmen für $\{\nu\} = W(\mu - \lambda) \cap \mathfrak{X}^+$, aber mit dieser Wahl erreicht man bei den nun folgenden Konstruktionen nur schwer denselben Grad von Eindeutigkeit.

Lemma 2.5.4 (Erste Eigenschaften der Verschiebungsfunktoren). *Seien λ, μ zwei ρ -dominante Gewichte mit ganzer Differenz. So gilt:*

1. Der Verschiebungsfunktor T_λ^μ ist exakt;
2. Es gibt Adjunktionen $(T_\mu^\lambda, T_\lambda^\mu)$;
3. Die Verschiebungsfunktoren vertauschen mit der Dualität, wir geben im Beweis sogar genauer für jede Chevalley-Involution eine ausgezeichnete Isotransformation $T_\lambda^\mu \circ d \xrightarrow{\cong} d \circ T_\lambda^\mu$ an;
4. Unter unseren Verschiebungsfunktoren T_λ^μ werden Projektive zu Projektiven.

Beweis. 1. Der Verschiebungsfunktor T_λ^μ ist exakt als Komposition der exakten Funktoren $T_\lambda^\mu = \text{pr}_\mu \circ (E \otimes) \circ \text{in}_\lambda$;

2. Wir haben natürliche Adjunktionen $(\text{in}_\lambda, \text{pr}_\lambda)$, $(E \otimes, E^* \otimes)$ und $(\text{pr}_\mu, \text{in}_\mu)$. Weiter haben wir $T_\mu^\lambda = \text{pr}_\lambda \circ (E^* \otimes) \circ \text{in}_\mu$, wobei wir in E^* den Gewichtsvektor auszeichnen, der auf dem in E ausgezeichneten Gewichtsvektor den Wert Eins annimmt. So erhalten wir eine Adjunktion von Funktoren $(T_\lambda^\mu, T_\mu^\lambda)$;

3. Wir denken uns hier eine Chevalley-Involution τ fest gewählt und verstehen $d = d_\tau$. Wir haben kanonische Isomorphismen $(E \otimes M)^* \xrightarrow{\cong} E^* \otimes M^*$ wegen $\dim E < \infty$ und dann auch $d(E \otimes M) \xrightarrow{\cong} dE \otimes dM$. Weiter erklären wir kanonische Isomorphismen $dE \xrightarrow{\cong} E$ dadurch, daß wir den eben erklärten ausgezeichneten extremen Gewichtsvektor von E^* mit dem ausgezeichneten extremen Gewichtsvektor von E identifizieren. Mit der offensichtlichen Isotransformation $\text{pr}_\mu \circ d \xrightarrow{\cong} d \circ \text{pr}_\mu$ erhalten wir dann kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned}
T_\lambda^\mu dM &= \text{pr}_\mu(E \otimes dM) \\
&\xrightarrow{\cong} \text{pr}_\mu(dE \otimes dM) \\
&\xrightarrow{\cong} \text{pr}_\mu d(E \otimes M) \\
&\xrightarrow{\cong} d \text{pr}_\mu(E \otimes M) = d(T_\lambda^\mu M)
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

4. Ist in der Tat P projektiv in \mathcal{O}_λ , so ist $\mathcal{O}_\lambda(P, \) \circ T_\mu^\lambda \cong \mathcal{O}_\mu(T_\lambda^\mu P, \)$ exakt als Verknüpfung exakter Funktoren und somit ist $T_\lambda^\mu P$ projektiv in \mathcal{O}_μ . \square

2.5.5. Wir bezeichnen von nun an mit W_λ die Standgruppe von λ bezüglich der dot-Operation und $W_{\bar{\lambda}}$ die ganzzahlige Weylgruppe von λ nach 1.6.2. Bei der ganzzahligen Weylgruppe kommt es noch nicht einmal darauf an, ob wir diesen Begriff in Bezug auf die lineare Operation oder in Bezug auf die dot-Operation verstehen.

Proposition 2.5.6 (Verschieben von Vermamoduln). *Seien λ, μ zwei ρ -dominante Gewichte mit ganzer Differenz $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$. So besitzt für alle Elemente der*

ganzzahligen Weygruppe $x \in W_{\tilde{\lambda}}$ der verschobene Vermamodul $T_{\tilde{\lambda}}^{\mu} \Delta(x \cdot \lambda)$ eine Vermafake, in der jeder Vermamodul $\Delta(xy \cdot \mu)$ mit $y \in W_{\tilde{\lambda}} / (W_{\tilde{\lambda}} \cap W_{\mu})$ genau einmal als Subquotient auftritt.

2.5.7. Zwei Spezialfälle verdienen besondere Beachtung: Im Fall $W_{\tilde{\lambda}} \subset W_{\mu}$ der sogenannten **Verschiebung auf Wände** werden Vermamoduln zu Vermamoduln, genauer gilt $T_{\tilde{\lambda}}^{\mu} \Delta(x \cdot \lambda) \cong \Delta(x \cdot \mu)$. Im Fall $W_{\tilde{\lambda}} \supset W_{\mu}$ der sogenannten **Verschiebung aus Wänden** hat $T_{\tilde{\lambda}}^{\mu} \Delta(x \cdot \lambda)$ eine Filtrierung mit Subquotienten $\Delta(xy \cdot \mu)$ für $y \in W_{\tilde{\lambda}} / W_{\mu}$.

Beweis. Wir haben nach der Definition $T_{\tilde{\lambda}}^{\mu} \Delta(x \cdot \lambda) = \text{pr}_{\mu}(E \otimes \Delta(x \cdot \lambda))$ für $E \cong L(\nu)$ mit $\{\nu\} = W(\mu - \lambda) \cap \mathfrak{X}^+$. Jetzt brauchen wir ein Lemma.

Lemma 2.5.8. *Sei E eine endlichdimensionale Darstellung von \mathfrak{g} . So hat die Tensordarstellung $E \otimes \Delta(\lambda)$ eine Vermafake mit Subquotienten $\Delta(\lambda + \eta)$, wobei η über die Multimenge $P_{\mu}(E)$ der Gewichte von E mit ihren Multiplizitäten läuft.*

Beweis. Die Tensoridentität 2.4.1 liefert uns einen kanonischen Isomorphismus $E \otimes_{\mathbb{C}} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda} \xrightarrow{\sim} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} (E \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\lambda})$, und jede Filtrierung des \mathfrak{b} -Moduls E mit eindimensionalen Subquotienten induziert eine Δ -Fake der gewünschten Art auf $E \otimes \Delta(\lambda)$. \square

Insbesondere hat in unserem Fall $E \otimes \Delta(x \cdot \lambda)$ eine Vermafake mit Subquotienten $\Delta(x \cdot \lambda + \eta)$, wo η die Multimenge $P_{\mu}(E)$ der Gewichte von E durchläuft. Wir müssen demnach nur für alle $\eta \in P_{\mu}(E)$ die drei Implikationen

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\mu} \Delta(x \cdot \lambda + \eta) \neq 0 &\Leftrightarrow \exists y \in W_{\tilde{\lambda}} \text{ mit } x \cdot \lambda + \eta = xy \cdot \mu \\ &\Downarrow \\ \dim E_{\eta} &= 1 \end{aligned}$$

zeigen. \Leftarrow und \Downarrow sind evident. Wir zeigen nun \Rightarrow . Gegeben eine beliebige affine Spiegelungsgruppe \mathcal{W} auf einem affinen euklidischen Raum E wird für beliebige $v, w \in E$ nach [SPW] 1.7.7 der Abstand $\|v - zw\|$ minimal genau für die $z \in \mathcal{W}$, für die v und zw im Abschluß desselben Alkoven liegen. Lassen wir speziell $\mathcal{W} = W_{\tilde{\lambda}} = W_{\tilde{\mu}}$ operieren vermittelt der dot-Operation als affine Spiegelungsgruppe auf dem affinen euklidischen Raum $E = \lambda + \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ über dem angeordneten Körper \mathbb{Q} , so liegen λ und μ im Abschluß desselben Alkoven, da sie beide ρ -dominant sind. Andererseits sind aber die Gewichte maximaler Länge von E nach ?? genau die extremen Gewichte, d.h. die Gewichte auf dem Weylgruppenorbit $W(\mu - \lambda)$. Nur dann kann also ein Gewicht $\eta \in P_{\mu}(E)$ den Abstand zwischen einem Element aus $W_{\tilde{\lambda}} \cdot \lambda$ und einem Element aus $W_{\tilde{\lambda}} \cdot \mu$ überbrücken, wenn unser Gewicht η extrem ist und die beiden fraglichen Punkte im Abschluß desselben Alkoven liegen. Genau dann liegen nun aber $x \cdot \lambda$ und $xy \cdot \mu$ im Abschluß desselben Alkoven,

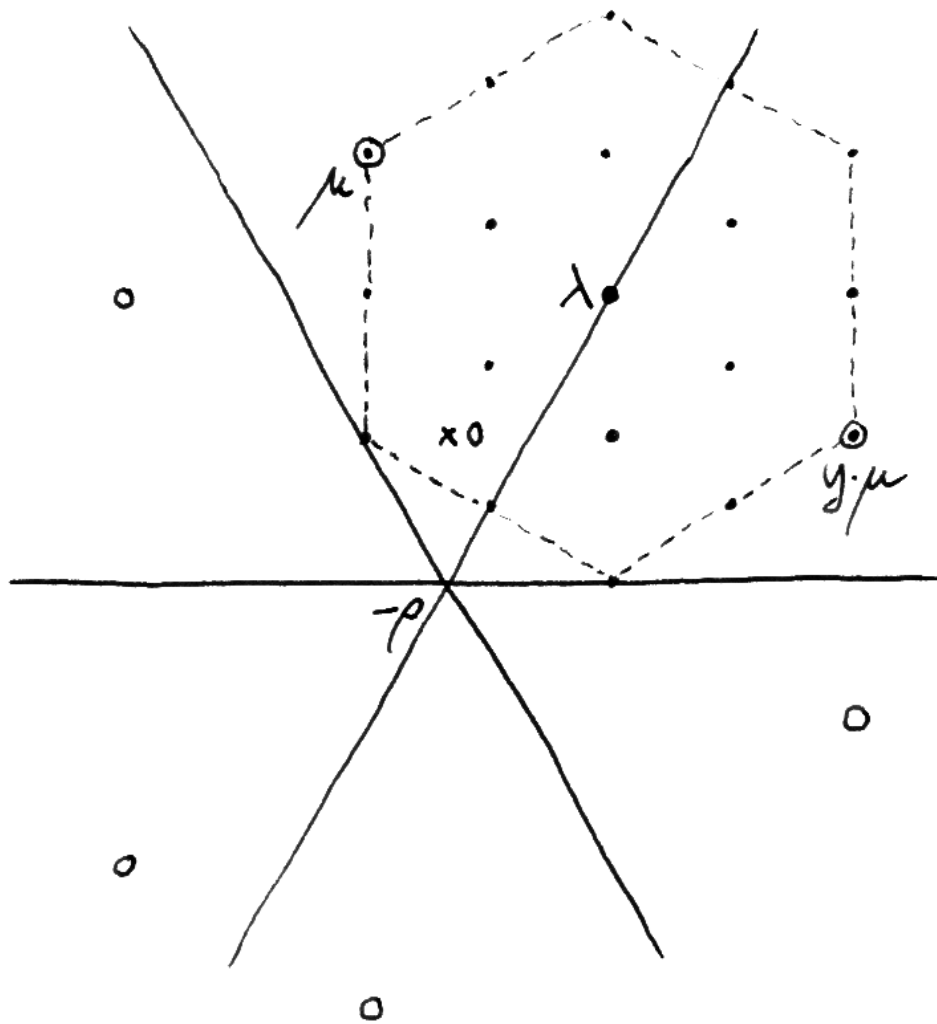


Illustration zur Verschiebung aus der Wand: In diesem Fall ergibt sich eine kurze exakte Sequenz

$$\Delta(\mu) \hookrightarrow T_{\lambda}^{\mu} \Delta(\lambda) \twoheadrightarrow \Delta(y \cdot \mu)$$

wenn es ein z aus der Standgruppe von λ gibt mit $y \cdot \mu = z \cdot \mu$, und dann wird ihre Differenz auch in der Tat gerade überbrückt durch ein extremes Gewicht von E , nämlich durch das Gewicht $xz(\mu - \lambda)$. \square

2.5.9. Ich erinnere an die Grothendieckgruppe einer abelschen Kategorie [NAS] ?? und an den von einem exakten Funktor induzierten Gruppenhomomorphismus [NAS] 7.4.5.

Proposition 2.5.10. *Die einfachen Moduln, die Vermamoduln und die unzerlegbaren Projektiven liefern jeweils eine \mathbb{Z} -Basis der Grothendieckgruppe von \mathcal{O} .*

Beweis. Es reicht, die analoge Aussage für die Kategorien ${}_{\chi}\mathcal{O}$ zu zeigen. Die Einfachen bilden für jede längenendliche Kategorie eine Basis der Grothendieckgruppe, siehe [NAS] 7.4.3. Die Einfachen von ${}_{\chi}\mathcal{O}$ sind genau die $L(\lambda)$ mit λ aus einer geeigneten endlichen Menge S , genauer der Menge $S = \xi^{-1}(\chi)$. Die quadratische Matrix der $[\Delta(\lambda) : L(\mu)]$ mit $\lambda, \mu \in S$ hat Einsen auf der Diagonalen und obere Dreiecksgestalt bei geeigneter Nummerierung von S . Mithin ist diese Matrix invertierbar und das zeigt, daß auch die $[\Delta(\lambda)]$ mit $\lambda \in S$ eine \mathbb{Z} -Basis von $[{}_{\chi}\mathcal{O}]$ bilden. Für die unzerlegbaren Projektiven argumentiert man genauso, auch die Matrix $[P(\lambda) : \Delta(\mu)]_{\Delta}$ mit $\lambda, \mu \in S$ hat nach 2.3.8 Einsen auf der Diagonalen und obere Dreiecksgestalt bei geeigneter Nummerierung von S . \square

Korollar 2.5.11. *Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ zwei ρ -dominante Gewichte mit ganzer Differenz. Gilt $W_{\lambda} \subset W_{\mu}$, so induziert $T_{\lambda}^{\mu}T_{\mu}^{\lambda}$ auf der Grothendieckgruppe $[\mathcal{O}_{\mu}]$ die Multiplikation mit der natürlichen Zahl $|W_{\mu}/W_{\lambda}|$. Insbesondere wird unter der Verschiebung T_{μ}^{λ} aus der Wand kein von Null verschiedener Modul zu Null.*

Beweis. Die Vermamoduln aus \mathcal{O}_{μ} bilden eine Basis der Grothendieckgruppe $[\mathcal{O}_{\mu}]$. Das Korollar folgt damit aus 2.5.6. \square

Satz 2.5.12. *Gegeben ρ -dominante Gewichte λ, μ mit ganzer Differenz $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$ und mit derselben Standgruppe $W_{\lambda} = W_{\mu}$ unter der dot-Operation liefert der Verschiebungsfunktor eine Äquivalenz von Kategorien*

$$T_{\lambda}^{\mu} : \mathcal{O}_{\lambda} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mu}$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, die vermittels einer Adjunktion α erklärten Abbildungen Isomorphismen

$$\hat{\alpha}_M : M \xrightarrow{\cong} T_{\mu}^{\lambda}T_{\lambda}^{\mu}M \quad \text{und} \quad \check{\alpha}_N : T_{\lambda}^{\mu}T_{\mu}^{\lambda}N \xrightarrow{\cong} N$$

sind für alle $M \in \mathcal{O}_{\lambda}$, $N \in \mathcal{O}_{\mu}$. Wir führen das nur für die Erste unserer beiden Abbildungen aus. Per definitionem ist $\hat{\alpha}_M$ das Bild der Identität auf $T_{\lambda}^{\mu}M$ unter dem durch die Adjunktion gegebenen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mu}(T_{\lambda}^{\mu}M, T_{\lambda}^{\mu}M) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\lambda}(M, T_{\mu}^{\lambda}T_{\lambda}^{\mu}M)$$

Aus $T_\lambda^\mu M \neq 0$ folgt also $\hat{\alpha}_M \neq 0$. Da die Endomorphismen von Vermamoduln genau die skalaren Vielfachen der Identität sind, ist nach 2.5.6 mithin $\hat{\alpha}_M$ ein Isomorphismus für jeden Vermamodul $M = \Delta(x \cdot \lambda) \in \mathcal{O}_\lambda$. Dann ist $\hat{\alpha}_M$ auch ein Isomorphismus für jeden Modul M mit Vermafahne, nach dem Fünferlemma und Induktion. Nach 2.1.5.2 ist aber jedes Objekt von \mathcal{O} Quotient eines Objekts mit Vermafahne. Damit ist natürlich auch jedes Objekt von \mathcal{O}_λ Quotient eines Objekts von \mathcal{O}_λ mit Vermafahne. Für beliebiges M folgt dann die Behauptung vermittels einer Zwei-Schritte-Auflösung durch Objekte mit Vermafahne und erneuter Anwendung des Fünferlemmas. \square

Korollar 2.5.13. *Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ mit $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$ und $W_\lambda = W_\mu$. So gilt für alle $x, y \in W_\lambda = W_\mu$ die Identität von Jordan-Hölder-Multiplizitäten*

$$[\Delta(x \cdot \lambda) : L(y \cdot \lambda)] = [\Delta(x \cdot \mu) : L(y \cdot \mu)]$$

Beweis. Wir haben eine Äquivalenz von Kategorien, die $\Delta(x \cdot \lambda)$ auf $\Delta(x \cdot \mu)$ abbildet und damit natürlich auch den eindeutigen einfachen Quotienten auf den eindeutigen einfachen Quotienten. \square

2.6 Homomorphismen zwischen Vermamoduln

2.6.1. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und sei R^+ ein System von positiven Wurzeln.

Satz 2.6.2 (Homomorphismen zwischen Vermamoduln). *1. Jeder von Null verschiedene Homomorphismus zwischen zwei Vermamoduln ist injektiv;*

2. Jeder Vermamodul hat genau einen einfachen Untermodul, und dieser einfache Untermodul ist auch selbst wieder ein Vermamodul;

3. Der Raum der Homomorphismen zwischen zwei Vermamoduln hat höchstens die Dimension Eins;

4. Bezeichne \uparrow die stärkste reflexive transitive Relation auf \mathfrak{h}^ derart, daß gilt $(s_\alpha \cdot \lambda) \uparrow \lambda$ für alle $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ und $\alpha \in R^+$ mit $(s_\alpha \cdot \lambda) \leq \lambda$ alias $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$. Andererseits stehe $\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu)$ für die Aussage, daß sich $\Delta(\lambda)$ als Untermodul in $\Delta(\mu)$ einbetten läßt. So haben wir*

$$\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu) \Leftrightarrow \lambda \uparrow \mu$$

2.6.3. Bezeichne $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{g}$ die Summe der Wurzelräume zu positiven Wurzeln. Unser Satz kann auch aufgefaßt werden als eine Beschreibung des \mathfrak{h} -Moduls der \mathfrak{n}^+ -Invarianten in einem beliebigen Vermamodul.

Beweis. 1. Ist A ein Ring, so ist jeder Homomorphismus des A -Linksmoduls A in sich selber die Multiplikation mit einem Element von A von rechts. Ist A ein Integritätsring, so ist folglich jeder von Null verschiedene Homomorphismus des A -Linksmoduls A in sich selber injektiv. Bezeichne $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ die Summe der Wurzelräume zu nichtpositiven Wurzeln. Wenden wir unsere Erkenntnis an auf die Einhüllende $A = U(\mathfrak{n})$ und beachten, daß Vermamoduln als Moduln über $U(\mathfrak{n})$ isomorph sind zu $U(\mathfrak{n})$ selber, so ergibt sich die Behauptung.

2. Jeder Vermamodul ist frei über dem Integritätsring $U(\mathfrak{n})$ und damit auch torsionsfrei. Für $u \in U(\mathfrak{n}), v \in \Delta(\lambda)$ folgt aus $u \cdot v = 0$ also schon $u = 0$ oder $v = 0$. Ein einfacher Modul $L(\lambda)$ kann aber nur dann torsionsfrei sein über $U(\mathfrak{n})$, wenn er schon selbst ein Vermamodul ist, $L(\lambda) = \Delta(\lambda)$. Insbesondere ist jeder einfache Untermodul eines Vermamoduls selbst wieder ein Vermamodul. Für eine endlichdimensionale Lie-Algebra \mathfrak{n} kann es nun aber keine Einbettung

$$U(\mathfrak{n}) \oplus U(\mathfrak{n}) \hookrightarrow U(\mathfrak{n})$$

von $U(\mathfrak{n})$ -Linksmoduln geben, denn die Bilder von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ unter so einer Einbettung müßten für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ in $U^{\leq n}(\mathfrak{n})$ liegen und wir hätten damit Einbettungen

$$U^{\leq i}(\mathfrak{n}) \oplus U^{\leq i}(\mathfrak{n}) \hookrightarrow U^{\leq n+i}(\mathfrak{n})$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ im Widerspruch dazu, daß $\dim U^{\leq i}(\mathfrak{n})$ nach Poincaré-Birkhoff-Witt gegeben wird durch ein Polynom in i , genauer $\dim U^{\leq i}(\mathfrak{n}) = \binom{i+d}{d}$ für $d = \dim \mathfrak{n}$. Ein Vermamodul kann damit nicht zwei verschiedene einfache Untermoduln besitzen, denn beide müßten Vermamoduln sein und Schnitt Null haben im Widerspruch zu unseren Betrachtungen zu Moduln über $U(\mathfrak{n})$.

3. Bezeichne $\text{soc } \Delta(\lambda)$ den einfachen Untermodul von $\Delta(\lambda)$, d.h. seinen Sockel. Da nach Teil 1 jeder von Null verschiedene Homomorphismus von Vermamoduln injektiv ist, verschwindet er auch nicht auf dem Sockel des Ausgangsmoduls. Gegeben Vermamoduln $\Delta(\lambda)$ und $\Delta(\mu)$ folgern wir die dritte Behauptung nun aus den Inklusionen

$$\mathcal{O}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \hookrightarrow \mathcal{O}(\text{soc } \Delta(\lambda), \Delta(\mu)) = \mathcal{O}(\text{soc } \Delta(\lambda), \text{soc } \Delta(\mu))$$

4. Der Beweis dieser Aussage kann erst nach einigen Vorbereitungen im Anschluß an 2.6.19 gegeben werden. \square

Definition 2.6.4. Sei $s \in S$ eine einfache Spiegelung. Eine **Verschiebung durch die s -Wand** ist ein Funktor

$$\theta_s : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$$

der Gestalt $\theta_s = T_\mu^0 T_0^\mu$ für ein $\mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^* \cap \mathfrak{X}$ **auf der s -Wand**, d.h. mit $W_\mu = \langle s \rangle$.

Vorschau 2.6.5. Wir werden uns später überlegen, daß so eine Verschiebung durch die Wand bis auf natürliche Äquivalenz nicht von der Wahl der Stelle μ auf der Wand abhängt. Die möglichen μ sind übrigens genau alle ganzzahligen Linearkombinationen von fundamentalen dominanten Gewichten, in denen das fundamentale dominante Gewicht zu unserer einfachen Spiegelung den Koeffizienten -1 hat und alle anderen Koeffizienten nichtnegativ sind.

Lemma 2.6.6 (Eigenschaften von Verschiebungen durch Wände). *Sei s eine einfache Spiegelung in Bezug auf unser System von positiven Wurzeln R^+ . So gilt:*

1. *Jede Verschiebung θ_s durch die s -Wand ist ein exakter und selbstadjungierter Funktor, der mit jeder Dualität vertauscht;*
2. *Die von unseren Adjunktionen $\alpha : (T_0^\mu, T_\mu^0)$ und $\omega : (T_\mu^0, T_0^\mu)$ induzierten Transformationen $\hat{\alpha} : \text{id} \rightarrow \theta_s$ beziehungsweise $\hat{\omega} : \theta_s \rightarrow \text{id}$ liefern genau dann von Null verschiedene Abbildungen $M \rightarrow \theta_s M$ beziehungsweise $\theta_s M \rightarrow M$, wenn gilt $\theta_s M \neq 0$;*
3. *Wir haben $\dim \mathcal{O}(\Delta, \theta_s \Delta) = \dim \mathcal{O}(\theta_s \Delta, \Delta) = 1$ für jeden Vermamodul Δ aus \mathcal{O}_0 ;*
4. *Wir haben $\theta_s \Delta(x \cdot 0) \cong \theta_s \Delta(xs \cdot 0)$ für alle $x \in W$, und nehmen wir zusätzlich $x < xs$ an, so gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$\Delta(x \cdot 0) \hookrightarrow \theta_s \Delta(x \cdot 0) \twoheadrightarrow \Delta(xs \cdot 0)$$

Vorschau 2.6.7. Wir werden gleich zeigen können, daß die kurze exakte Sequenz aus 4 nicht spaltet: Sobald wir die Einbettung $\Delta(x \cdot 0) \subset \Delta(xs \cdot 0)$ kennen, liefert die Annahme einer Spaltung nämlich einen Widerspruch zur Aussage von Teil 3.

Beweis. 1. Die entsprechenden Aussagen über Verschiebungsfunktoren aus 2.5.4 liefern sofort eine natürliche Äquivalenz $\theta_s \circ d \xrightarrow{\cong} d \circ \theta_s$ und die Existenz von Adjunktionen (θ_s, θ_s) .

2. Unsere Adjunktionen liefern von Null verschiedene Abbildungen $M \rightarrow \theta_s M$ beziehungsweise $\theta_s M \rightarrow M$ genau dann, wenn gilt $T_0^\mu M \neq 0$. In der Tat kommen sie ja her von der Identität auf $T_0^\mu M$ mittels der Adjunktionsisomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T_0^\mu M, T_0^\mu M) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}(M, T_\mu^0 T_0^\mu M) \\ \text{Hom}(T_0^\mu M, T_0^\mu M) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}(T_\mu^0 T_0^\mu M, M) \end{aligned}$$

Schließlich liefert jedoch die Verschiebung aus der Wand T_μ^0 eine Injektion auf der Grothendieckgruppe nach 2.5.11, und die dort bewiesene Aussage zeigt genauer $\theta_s M \neq 0 \Leftrightarrow T_0^\mu M \neq 0$.

3. Das folgt mit den Adjunktionen (T_0^μ, T_μ^0) und (T_μ^0, T_0^μ) daraus, daß Vermamoduln auf die Wand gerückt Vermamoduln bleiben.

4. Als aus der Wand gerückter Vermamodul hat $\theta_s \Delta(x \cdot 0) = T_\mu^0 \Delta(x \cdot \mu)$ nach 2.5.6 eine Vermafabne mit Subquotienten $\Delta(x \cdot 0)$ und $\Delta(xs \cdot 0)$. Diese Vermafabne läßt sich tatsächlich in der behaupteten Weise anordnen, da sie sonst nach ?? spalten müßte und sich dann eben umsortieren ließe. \square

2.6.8. Ich erinnere an die Bruhat-Teilordnung [SPW] 3.3.2 auf der Weylgruppe. Sie kann dadurch charakterisiert werden, daß gegeben eine kürzestmögliche Darstellung $w = s_1 \dots s_r$ eines Elements als Produkt von einfachen Spiegelungen die Menge $\{x \in W \mid x \leq w\}$ mit der Menge aller Produkte von Teilausdrücken $x = s_{i(1)} \dots s_{i(s)}$ zusammenfällt, für $ss \geq 0$ und $i : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ streng monoton wachsend. Daß jedoch diese Menge nicht von der Wahl der kürzestmöglichen Darstellung abhängt und daß wir so in der Tat eine partielle Ordnung erhalten, muß erst einmal bewiesen werden. Aus [SPW] 1.6.11 folgt sogar, daß jedes $x \leq w$ unter den reduzierten Teilausdrücken unserer gegebenen kürzestmöglichen Darstellung zu finden ist.

Proposition 2.6.9. *Bezeichne \leq die Bruhat-Teilordnung auf der Weylgruppe. So haben wir für alle $x, y \in W$*

$$\Delta(x \cdot 0) \subset \Delta(y \cdot 0) \Leftrightarrow x \geq y$$

Beweis. Für diesen Beweis kürzen wir $\Delta(x \cdot 0) = \Delta(x)$ ab und haben insbesondere $\Delta(0) = \Delta(e)$ für $e \in W$ das neutrale Element. Wir zeigen zunächst die Implikation \Leftarrow und gehen dazu in mehreren Schritten vor.

1. Nach ?? gilt $\Delta(s) \subset \Delta(e)$ für alle einfachen Spiegelungen $s \in S$.
2. Für $x, y \in W$ und $s \in S$ mit $x < xs, y < ys$ gilt

$$\Delta(x) \subset \Delta(y) \Rightarrow \Delta(xs) \subset \Delta(ys)$$

Um das zu sehen, wenden wir auf die linke Inklusion den Funktor θ_s an und erhalten mithilfe von 2.6.6 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Delta(x) & \hookrightarrow & \theta_s \Delta(x) & \twoheadrightarrow & \Delta(xs) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta(y) & \hookrightarrow & \theta_s \Delta(y) & \twoheadrightarrow & \Delta(ys) \end{array}$$

Wäre hier die rechts induzierte Vertikale die Nullabbildung, so müßte die mittlere Vertikale über $\Delta(y)$ faktorisieren. Da θ_s exakt ist, ist jedoch die mittlere Vertikale injektiv, und wir erhielten auf diese Weise eine Injektion $\theta_s \Delta(x) \hookrightarrow \Delta(y)$ und damit eine Injektion von $U(\mathfrak{n})$ -Linksmoduln $U(\mathfrak{n}) \oplus U(\mathfrak{n}) \hookrightarrow U(\mathfrak{n})$. Die aber kann

es nicht geben, wie wir bereits im Beweis von 2.6.2 gesehen hatten.

3. Für alle $x \in W$ gilt $\Delta(x) \subset \Delta(e)$. Das folgt aus den ersten beiden Schritten mit Induktion über die Länge von x . Man kann das aber auch zeigen, ohne Punkt 2 zu verwenden, indem man die volle Kraft von ?? ausnutzt, die ja auch $sx > x \Rightarrow \Delta(sx) \subset \Delta(x)$ liefert für alle einfachen Spiegelungen $s \in S$.

4. Wir zeigen als Zwischenschritt für jeden Vermamodul Δ aus \mathcal{O}_0 , daß jede Komposition von Abbildungen $\Delta \rightarrow \theta_s \Delta \rightarrow \Delta$ verschwindet. Nach dem vorhergehenden Punkt, und da diese Morphismenräume eh höchstens eindimensional sind, dürfen wir uns hierbei auf den Fall $\Delta = \Delta(e)$ beschränken. Unsere Adjunktionen zeigen in diesem Fall, daß die Homomorphismenräume von $\Delta(e)$ oder $\Delta(s)$ nach $\theta_s \Delta(e) \cong \theta_s \Delta(s)$ eindimensional sind, und die Homomorphismenräume in der umgekehrten Richtung desgleichen. Die kanonische Abbildung $\theta_s \Delta(e) \rightarrow \Delta(e)$ faktorisiert also über die Einbettung $\Delta(s) \subset \Delta(e)$ und die Komposition von kanonischen Abbildungen $\Delta(e) \hookrightarrow \theta_s \Delta(e) \rightarrow \Delta(e)$ ist folglich in der Tat Null.

5. Wir zeigen für alle $x \in W$ und $s \in S$, daß gilt

$$xs > x \Rightarrow \Delta(xs) \subset \Delta(x)$$

Nach dem vorhergehenden Punkt faktorisiert nämlich die von Null verschiedene kanonische Abbildung $\Delta(xs) \rightarrow \theta_s \Delta(xs)$ über den Kern der kanonischen Abbildung $\theta_s \Delta(xs) \rightarrow \Delta(xs)$, als da heißt über $\Delta(x)$.

6. Ist $x = s_1 s_2 \dots s_l$ eine reduzierte Darstellung von x und haben wir y mit $y \leq x$, so gibt es nach unserer Charakterisierung der Bruhatteilordnung 2.6.8 geeignete $t_i \in \{s_i, e\}$ mit $y = t_1 t_2 \dots t_l$ und sogar so, daß die vom neutralen Element e verschiedenen t_i eine reduzierte Darstellung von y bilden. Mit 2 und 5 folgern wir nun induktiv $\Delta(s_1 s_2 \dots s_i) \subset \Delta(t_1 t_2 \dots t_i)$ für alle i .

7. Die andere Implikation $\Delta(x) \subset \Delta(y) \Rightarrow x \geq y$ folgt sofort aus dem anschließenden Lemma. \square

Lemma 2.6.10. *Seien $x, y \in W$. So gilt $[\Delta(y \cdot 0) : L(x \cdot 0)] \neq 0 \Leftrightarrow x \geq y$.*

Beweis. Wir kürzen stärker $\Delta(x \cdot 0) = \Delta(x) = \Delta_x$ ab und ähnlich $P(x \cdot 0) = P_x$ sowie $L(x \cdot 0) = L_x$. Die Implikation \Leftarrow folgt aus der Implikation \Leftarrow in 2.6.9 alias der Inklusion $\Delta_x \subset \Delta_y$ für $x \geq y$, die ja bereits bewiesen ist. Es gilt noch \Rightarrow zu zeigen. Gegeben $x \in W$ und $s \in S$ mit $x < xs$ bemerken wir zunächst $[\theta_s L_{xs} : L_x] \neq 0$. In der Tat haben wir nämlich

$$\mathcal{O}(\Delta_x, \theta_s L_{xs}) = \mathcal{O}(\theta_s \Delta_x, L_{xs}) \supset \mathcal{O}(\Delta_{xs}, L_{xs}) \neq 0$$

mit dem letzten Teil von 2.6.6. Ist also $x = s \dots t$ eine reduzierte Darstellung von

x als Produkt einfacher Spiegelungen, so folgern wir der Reihe nach

$$\begin{aligned}
[\theta_s \dots \theta_t L_x : L_e] \neq 0 &\Rightarrow \mathcal{O}(\Delta_e, \theta_s \dots \theta_t L_x) \neq 0 \\
&\Rightarrow \mathcal{O}(\theta_t \dots \theta_s \Delta_e, L_x) \neq 0 \\
&\Rightarrow P_x \text{ ist Summand von } \theta_t \dots \theta_s \Delta_e \\
&\Rightarrow ([P_x : \Delta_y] \neq 0 \Rightarrow [\theta_t \dots \theta_s \Delta_e : \Delta_y] \neq 0) \\
&\Rightarrow ([P_x : \Delta_y] \neq 0 \Rightarrow y \leq x)
\end{aligned}$$

In der Tat hat ja $\theta_t \dots \theta_s \Delta_e$ eine Vermaform mit Subquotienten Δ_z , wo z über die Multimenge aller Teilausdrücke des Worts $s \dots t$ läuft. Aus $[P_x : \Delta_y] \neq 0$ folgt also $x \geq y$, und die Reziprozitätsformel 2.3.9 liefert die Behauptung. \square

2.6.11. Damit ist 2.6.9 vollständig bewiesen, als da heißt, im Hauptblock \mathcal{O}_0 werden die Homomorphismen zwischen Verma-Moduln vollständig kontrolliert durch die Bruhat-Teilordnung auf der Weylgruppe. Als nächstes behandeln wir allgemeiner Blöcke mit ganzem Parameter und müssen einige kombinatorische Vorbereitungen treffen.

Lemma 2.6.12. *Seien $R \supset R^+$ ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln, (W, S) seine Weylgruppe mit den einfachen Spiegelungen, $S_\iota \subset S$ eine Teilmenge der Menge der einfachen Spiegelungen und $W_\iota \subset W$ das Erzeugnis von S_ι . So haben wir:*

1. *In jeder Nebenklasse aus W/W_ι gibt es genau einen Repräsentanten kleinster Länge und genau einen Repräsentanten größter Länge. Sie sind auch für die Bruhat-Teilordnung die kleinsten beziehungsweise größten Elemente ihrer Nebenklasse.*
2. *Bezeichnet $W^\iota \subset W$ die Menge der kürzesten Repräsentanten, so gilt für alle $x \in W^\iota$ und $y \in W_\iota$ die Formel $l(xy) = l(x) + l(y)$.*

Ergänzung 2.6.13. Dasselbe gilt analog für jedes Coxetersystem (W, S) , vergleiche [SPW] 3.3.13 und [SPW] 3.3.15.

Beweis. Bezeichne $R_\iota \subset R$ die Menge aller derjenigen Wurzeln, die sich aus den einfachen Wurzeln zu Spiegelungen aus S_ι linear kombinieren lassen. Sicher ist R_ι ein Wurzelsystem in dem von ihm aufgespannten Teilraum. Offensichtlich stabilisiert jedes $s \in S_\iota$ die Menge $R^+ \setminus R_\iota$. Gegeben $w \in W$ ist nun $R_\iota \cap (wR^+)$ ein System positiver Wurzeln in R_ι und es gibt folglich genau ein $v \in W_\iota$ mit $v(R_\iota \cap (wR^+)) = R_\iota \cap R^+$. Da die Länge eines Elements nach [SPW] 2.2.15 genau die Zahl der positiven Wurzeln ist, die von ihm negativ gemacht werden, ist $x = vw$ notwendig das kürzeste Element der Linksnebenklasse $W_\iota w$ und für alle $y \in W_\iota$ gilt $l(yx) = l(y) + l(x)$. Das zeigt die analoge Aussage für Linksnebenklassen. Die im Lemma behauptete Aussage für Rechtsnebenklassen folgt durch Invertieren. \square

Proposition 2.6.14. Gegeben $\mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^* \cap \mathfrak{X}$ ein ganzes ρ -dominantes Gewicht und $x, y \in W^\mu$ kürzeste Repräsentanten von Nebenklassen aus W/W_μ gilt

$$\Delta(x \cdot \mu) \subset \Delta(y \cdot \mu) \Leftrightarrow x \geq y$$

Beweis. Um die Implikation \Leftarrow zu zeigen, rückt man die Einbettung $\Delta(x \cdot 0) \subset \Delta(y \cdot 0)$ mit T_0^μ an die Stelle μ . Um die andere Implikation \Rightarrow zu zeigen, folgern wir aus $\Delta(x \cdot \mu) \subset \Delta(y \cdot \mu)$ der Reihe nach

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T_0^\mu \Delta(x \cdot 0), \Delta(y \cdot \mu)) &\neq 0 && \text{wegen } T_0^\mu \Delta(x \cdot 0) \cong \Delta(x \cdot \mu), \\ \text{Hom}(\Delta(x \cdot 0), T_\mu^0 \Delta(y \cdot \mu)) &\neq 0 && \text{wegen der Adjunktion } (T_0^\mu, T_\mu^0), \text{ und} \\ \text{Hom}(\Delta(x \cdot 0), \Delta(yu \cdot 0)) &\neq 0 && \text{für ein } u \in W_\mu \text{ wegen 2.5.6.} \end{aligned}$$

Mit dem Hauptblock-Fall 2.6.9 folgt dann $x \geq yu \geq y$. □

2.6.15. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ ist $W_{\bar{\lambda}}$ kanonisch isomorph zur Weylgruppe des Wurzelsystems $R_{\bar{\lambda}}$. Das System positiver Wurzeln $R^+ \cap R_{\bar{\lambda}}$ definiert folglich eine Teilordnung auf $W_{\bar{\lambda}}$, die wir „die Bruhatteilordnung auf $W_{\bar{\lambda}}$ “ nennen und $\geq_{\bar{\lambda}}$ notieren.

Satz 2.6.16. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ und $x, y \in W_{\bar{\lambda}}$ kürzeste Repräsentanten von Nebenklassen aus $W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$ gilt mit $\geq_{\bar{\lambda}}$ der Bruhat-Teilordnung auf $W_{\bar{\lambda}}$ die Regel

$$\Delta(x \cdot \lambda) \subset \Delta(y \cdot \lambda) \Leftrightarrow x \geq_{\bar{\lambda}} y$$

Beweis. Ganz genauso wie der Beweis für den bisher behandelten Spezialfall $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^* \cap \mathfrak{X}$ mit zwei Ausnahmen: Erstens sollten wir uns klarmachen, daß es für jede einfache Spiegelung $s \in W_{\bar{\lambda}}$ tatsächlich ein $\mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^* \cap (\lambda + \mathfrak{X})$ gibt mit $W_\mu = \langle s \rangle$. Das überlassen wir dem Leser. Zweitens benötigen wir für jede einfache Spiegelung $s \in W_{\bar{\lambda}}$ eine Einbettung $\Delta(s \cdot \lambda) \subset \Delta(\lambda)$. Das leistet die anschließende Proposition 2.6.17. □

Proposition 2.6.17. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ beliebig und $s \in W$ eine Spiegelung mit $(s \cdot \lambda) \leq \lambda$ gilt $\Delta(s \cdot \lambda) \subset \Delta(\lambda)$.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir das für λ ganz und regulär. In diesem Fall haben wir ja $\lambda = z \cdot \mu$ für eindeutig bestimmte $z \in W$ und $\mu \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ und es gilt, aus $(sz \cdot \mu) \leq (z \cdot \mu)$ zu folgern $sz \geq z$ in der Bruhat-Teilordnung. Nun bedeutet unsere Ungleichung $(sz \cdot \mu) \leq (z \cdot \mu)$ aber geometrisch gerade, daß die Spiegelebene L von s den Alkoven B von $(z \cdot \mu)$ und den Alkoven A von μ nicht trennt. Mit ?? folgt erst $l(sz) > l(z)$ und dann $sz \geq z$ wie gewünscht. Jetzt behandeln wir den allgemeinen Fall. Hier beruht das Argument auf dem folgenden Lemma, das wir im Anschluß beweisen.

Lemma 2.6.18. Für jedes ganze Gewicht $\nu \in \mathfrak{X}$ ist die Menge

$$\{\tau \in \mathfrak{h}^* \mid \Delta(\tau + \nu) \subset \Delta(\tau)\}$$

abgeschlossen in \mathfrak{h}^* für die Zariski-Topologie.

Daraus folgt dann die Proposition, denn ist sagen wir α die Wurzel zu s und setzen wir $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle = n$, betrachten die Hyperebene H aller $\tau \in \mathfrak{h}^*$ mit $\langle \tau + \rho, \alpha^\vee \rangle = n$ und nehmen $\nu = -n\alpha$, so gilt $(s \cdot \tau) = \tau + \nu$ für alle $\tau \in H$ und nach dem schon Bewiesenen haben wir $\Delta(\tau + \nu) \subset \Delta(\tau)$ für alle regulären $\tau \in \mathfrak{X} \cap H$. Da diese jedoch in H Zariski-dicht liegen, folgt diese Inklusion mit 2.6.18 für alle $\tau \in H$ und insbesondere für λ . \square

Beweis von Lemma 2.6.18. Gegeben Vektorräume V, W endlicher Dimension ist die Menge aller Injektionen sicher Zariski-offen in $\text{Hom}(V, W)$ und die Menge der Nicht-Injektionen folglich Zariski-abgeschlossen. Identifizieren wir alle $\Delta(\lambda)$ mit dem festen Vektorraum $U(\mathfrak{n})$ mittels ihres kanonischen Erzeugers v_λ und ist $\nu \in \mathfrak{X}$ fest gewählt, so wird für $\alpha \in R$ die Operation eines Elements $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ eine von λ abhängige lineare Abbildung

$$\varphi_\alpha(\lambda) : U(\mathfrak{n})_\nu \rightarrow U(\mathfrak{n})_{\nu+\alpha}$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten, daß wir auf diese Weise eine algebraische Abbildung $\varphi_\alpha : \mathfrak{h}^* \rightarrow \text{Hom}(U(\mathfrak{n})_\nu, U(\mathfrak{n})_{\nu+\alpha})$ erhalten. Die λ mit $\Delta(\lambda + \nu) \subset \Delta(\lambda)$ können nun beschrieben werden als das Urbild der Nicht-Injektionen unter der algebraischen Abbildung $\mathfrak{h}^* \mapsto \text{Hom}(U(\mathfrak{n})_\nu, \bigoplus_{\alpha \in R^+} U(\mathfrak{n})_{\nu+\alpha})$, die jedem $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ die Spaltenmatrix der $\varphi_\alpha(\lambda)$ zuordnet. \square

2.6.19. Wir haben nun Satz 2.6.16 vollständig bewiesen und damit die Homomorphismen zwischen Vermamoduln sogar noch expliziter beschrieben als im eingangs formulierten Satz 2.6.2. Der Vollständigkeit halber müssen wir jedoch auch noch die dort gegebene Beschreibung ableiten.

Beweis von 2.6.2.4. Wir zeigen also noch

$$\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu) \Leftrightarrow \lambda \uparrow \mu$$

Die Implikation \Leftarrow ist schon klar nach 2.6.17. Zum Nachweis der anderen Implikation schreiben wir $\lambda = x \cdot \tau$ und $\mu = y \cdot \tau$ mit $\tau \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ und $x, y \in W_{\bar{\tau}}$ und es reicht, aus $x \geq_{\bar{\tau}} y$ zu folgern $(x \cdot \tau) \uparrow (y \cdot \tau)$. Zu zeigen ist also nur, daß für eine Spiegelung $s \in W_{\bar{\tau}}$ mit $l_{\bar{\tau}}(sy) > l_{\bar{\tau}}(y)$ gilt $(sy \cdot \tau) \uparrow (y \cdot \tau)$. Das folgt jedoch aus ??, angewandt auf die affine Spiegelungsgruppe $W_{\bar{\tau}} \subset \text{Aff}(\tau + \langle R_{\bar{\tau}} \rangle_{\mathbb{Q}})$. \square

Satz 2.6.20. Es gilt $[\Delta(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \uparrow \mu$.

Beweis. Die Implikation \Leftarrow folgt sofort aus der eben bewiesenen Inklusion von Vermamoduln $\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu)$. Die andere Implikation zeigt man wie ihren Spezialfall 2.6.10. \square

Satz 2.6.21 (Verschieben einfacher Moduln auf Wände). *Seien gegeben Gewichte $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ mit ganzer Differenz und $W_\lambda \subset W_\mu$. Sei $x \in W_{\bar{\lambda}}$ der größte Repräsentant aus seiner Nebenklasse in $W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$. So haben wir*

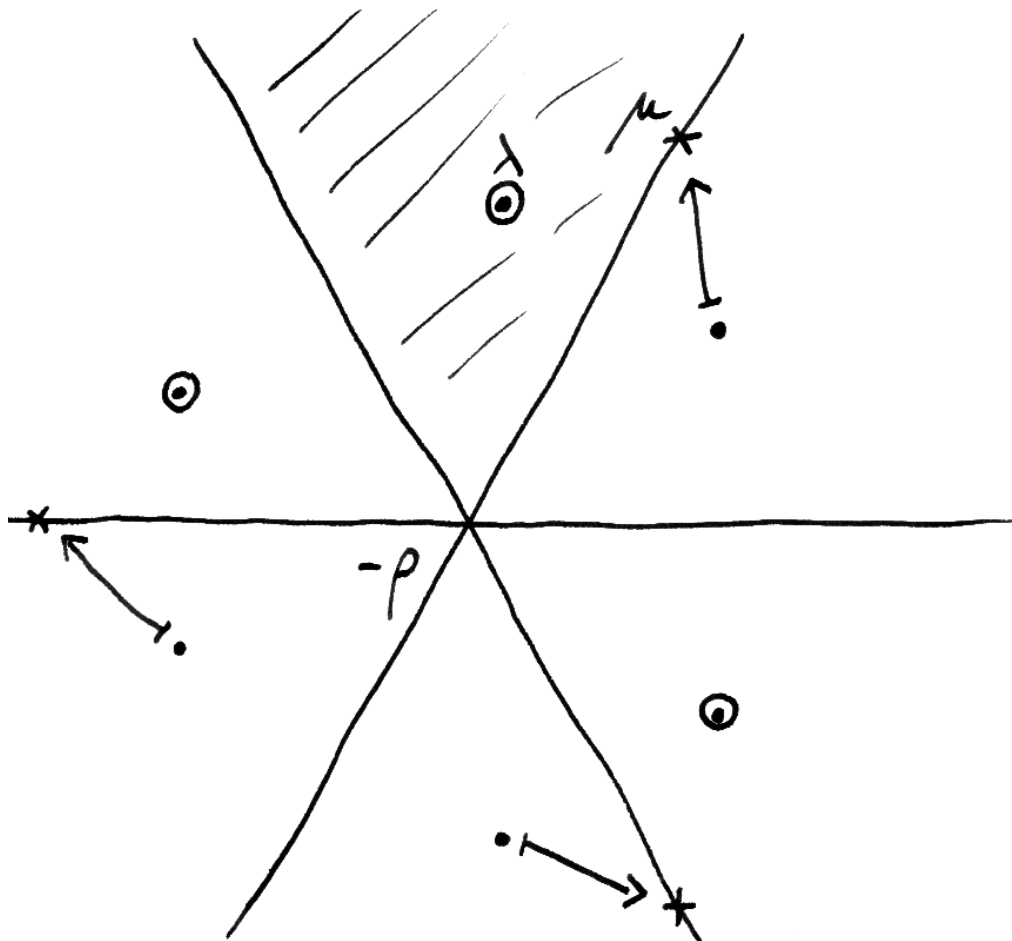
$$T_\lambda^\mu L(x \cdot \lambda) \cong \begin{cases} L(x \cdot \mu) & \text{falls } x \text{ auch der größte Repräsentant} \\ & \text{aus seiner Nebenklasse in } W_{\bar{\mu}}/W_\mu \text{ ist;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.6.22. Man kann die Bedingung in Satz 2.6.21 auch geometrischer fassen wie folgt: Für jede Spiegelung auf einem affinen Raum über einem angeordneten Körper betrachtet man die dreiteilige Partition in die zwei offenen Halbräume und die Spiegelhyperebene. Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe betrachtet man die grösste Partition des affinen Raums, die feiner ist als diese Partition für jede der Spiegelebenen. Die Stücke dieser Partition heißen die **Facetten** unserer affinen Spiegelungsgruppe. Ist unsere Spiegelungsgruppe endlich und zeichnen wir einen Alkoven A als dominant aus, so definieren wir zu einer Facette F ihren **oberen Abschluß** \hat{F} als

$$\hat{F} = \bigcap_{H \supset F} H \cap \bigcap_{H_A^+ \supset F} H_A^+ \cap \bigcap_{H_A^- \supset F} \bar{H}_A^-$$

wo der Schnitt über alle Spiegelhyperebenen H läuft. Dann haben wir für beliebige $x \in W_{\bar{\lambda}}$ in der Situation des Satzes $T_\lambda^\mu L(x \cdot \lambda) = L(x \cdot \mu)$ genau dann, wenn $x \cdot \mu$ im oberen Abschluß der Facette von $x \cdot \lambda$ liegt, für die Operation von $W_{\bar{\lambda}}$ auf $\lambda + \langle R_{\bar{\lambda}} \rangle_{\mathbb{Q}}$. Andernfalls gilt $T_\lambda^\mu L(x \cdot \lambda) = 0$.

Beweis. Schiebt man einen einfachen Modul auf Wände, so erhält man einen einfachen Modul oder Null. In der Tat ist jeder einfache Modul das Bild eines Homomorphismus von einem Vermamodul in einen Nablamodul und umgekehrt hat jeder von Null verschiedene derartige Homomorphismus einfaches Bild. Folglich kommen für $T_\lambda^\mu L(x \cdot \lambda)$ überhaupt nur die Alternativen $L(x \cdot \mu)$ und 0 in Betracht. Ist x nicht der größte Repräsentant seiner Nebenklasse aus $W_{\bar{\mu}}/W_\mu$, so finden wir in dieser Nebenklasse ein y , das noch größer ist. Da x maximal war in seiner Nebenklasse aus $W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$, folgt $(y \cdot \lambda) \neq (x \cdot \lambda)$ und $L(x \cdot \lambda)$ ist ein Quotient des Kokerns der Inklusion $\Delta(y \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(x \cdot \lambda)$. Beim Verschieben auf die Wände wird diese Inklusion jedoch nach 2.5.6 eine Inklusion von einem Vermamodul in sich selber, folglich muß ihr Kokern bei diesem Verschieben sterben. Es bleibt damit nur zu zeigen, daß diejenigen einfachen Moduln, denen das vorhergehende Argument eine Überlebenschance einräumt, auch tatsächlich die Verschiebung



Die eingekringelten Punkte aus der Bahn von λ unter der dot-Operation der Weylgruppe zeigen die Gewichte $x \cdot \lambda$ mit $T_\lambda^\mu L(x \cdot \lambda) = 0$, bei denen eben „von der Seite der positiven Weylkammer her auf die Wand gerückt wird“. Die Pfeile deuten dahingegen an, auf welche Einfachen in der Wand die anderen Einfachen außerhalb der Wand geschoben werden.

auf die Wand überleben. Mithilfe der Vermamoduln erkennt man jedoch, daß das Verschieben eine Surjektion $T_\lambda^\mu : [\mathcal{O}_\lambda] \rightarrow [\mathcal{O}_\mu]$ auf den Grothendieckgruppen liefert. Das zeigt, daß in der Tat die übrigen Einfachen alle am Leben bleiben müssen. \square

Korollar 2.6.23. *Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ mit $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$ und $W_\lambda \subset W_\mu$. So gilt für alle $x, y \in W_{\bar{\lambda}} = W_{\bar{\mu}}$ mit y maximal in seiner Nebenklasse yW_μ die Identität von Jordan-Hölder-Multiplizitäten*

$$[\Delta(x \cdot \lambda) : L(y \cdot \lambda)] = [\Delta(x \cdot \mu) : L(y \cdot \mu)]$$

Beweis. Der Verschiebungsfunktor T_λ^μ ist ein exakter Funktor, der $\Delta(x \cdot \lambda)$ auf $\Delta(x \cdot \mu)$ abbildet, einfache Objekte auf einfache Objekte oder auf Null, das Objekt $L(y \cdot \lambda)$ auf $L(y \cdot \mu)$, und kein nicht zu $L(y \cdot \lambda)$ isomorphes einfaches Objekt von \mathcal{O} auf $L(y \cdot \mu)$. \square

2.6.24. Wir sehen insbesondere, daß wir aus den Multiplizitäten der Vermamoduln im Hauptblock bereits die Multiplizitäten aller Vermamoduln mit ganzem höchstem Gewicht herleiten können.

2.6.25 (**Multiplizitäten im subgenerischen Fall**). Sei $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$ gegeben derart, daß seine ganzzahlige Weylgruppe genau zwei Elemente hat, sagen wir $W_{\bar{\lambda}} = \{e, s\}$, und die Standgruppe von λ trivial ist, in Formeln $s \cdot \lambda \neq \lambda$. So haben wir nach 2.6.2 eine kurze exakte Sequenz

$$\Delta(s \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda) \twoheadrightarrow L(\lambda)$$

Wegen $\Delta(s \cdot \lambda) = L(s \cdot \lambda)$ nach 1.6.12 liefert diese Sequenz bereits alle Multiplizitäten von Vermamoduln im Block \mathcal{O}_λ .

2.6.26 (**Einige weitere Multiplizitäten**). Wir erinnern unsere Notation $\Delta_x = \Delta(x \cdot 0)$ und betrachten den Isomorphismus $\Delta : \mathbb{Z}W \xrightarrow{\sim} [\mathcal{O}_0]$, der gegeben wird durch $x \mapsto [\Delta_x]$ für $x \in W$. Unsere Formeln 2.6.6 für die Verschiebung von Vermamoduln durch die Wand zeigen $\theta_s \circ \Delta = \Delta \circ (\cdot(1+s))$ für jede einfache Spiegelung $s \in W$. Wir erklären nun $C_x \in \mathbb{Z}W$ durch die Vorschrift $\Delta(C_x) = [P_x]$ alias

$$C_x := \sum_{y \in W} [P_x : \Delta_y]_\Delta y$$

Aus der Reziprozitätsformel und unseren Erkenntnissen über Homomorphismen von Vermamoduln folgt $[P_x : \Delta_e]_\Delta \geq 1$ und $[P_x : \Delta_x]_\Delta = 1$. Wir wissen, daß $\theta_s P_x$ projektiv ist, also $\theta_s P_x \cong \bigoplus_{z \in W} P_z^{\oplus m(z)}$ für geeignete Vielfachheiten $m(z) \geq 0$. Es folgt $C_x(1+s) = \sum_{z \in W} m(z) C_z$ mit $m(z) \geq 0$. Besitzt nun W

genau zwei einfache Spiegelungen s und t , so betrachten wir im Gruppenring die Elemente $D_x := \sum_{y \leq x} y$ und finden durch elementare Rechnung

$$D_x(1 + s) = \begin{cases} 2D_x & \text{falls } xs < x; \\ D_{xs} + D_{xt} & \text{falls } xs > x \text{ und } x \neq e; \\ D_{xs} & \text{falls } x = e \text{ oder } x = t. \end{cases}$$

Im Fall $sts = tst$ alias $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3; \mathbb{C})$ überzeugt man sich nun leicht, daß wir notwendig $C_x = D_x$ erhalten und damit

$$[\Delta_x : L_y] = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \geq x; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In derselben Weise erhält man im Fall einer beliebigen halbeinfachen Liealgebra für ein ρ -dominantes Gewicht λ mit $|W_{\bar{\lambda}}| \leq 6$ und beliebige $\mu, \nu \in W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$ die Multiplizitäten

$$[\Delta(\mu) : L(\nu)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } \nu \uparrow \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im allgemeinen liegen die Verhältnisse jedoch nicht so einfach, wie im weiteren ausgeführt werden soll.

3 Kazhdan-Lusztig-Theorie

3.1 Iwahori-Hecke-Algebra

3.1.1. Gegeben $G \supset B$ eine Gruppe mit einer endlichen Untergruppe können wir im Gruppenring $\mathbb{Z}G$ mit der Konvolution $*$ als Multiplikation die additive Untergruppe $\mathcal{H}(G, B)$ der B -Biinvarianten betrachten. Eine \mathbb{Z} -Basis dieser Untergruppe bilden die charakteristischen Funktionen der B -Doppelnebenklassen. Die Untergruppe $\mathcal{H}(G, B) \subset \mathbb{Z}G$ ist zwar abgeschlossen unter der Konvolution, besitzt jedoch im allgemeinen in Bezug auf diese Multiplikation kein Einselement. Um das zu korrigieren führen wir auf $\mathcal{H}(G, B)$ eine neue Multiplikation ein durch die Vorschrift

$$f *_B g := \frac{1}{|B|}(f * g)$$

und erhalten so einen Ring mit der charakteristischen Funktion von B als Einselement, die sogenannte **Hecke-Algebra** zu $G \supset B$.

3.1.2 (**Ursprung der Terminologie**). In ?? werde ich diskutieren, wie man diese Konstruktion auf den Fall einer beliebigen Untergruppe B verallgemeinern kann, und inwiefern gewisse Erzeuger der Hecke-Algebra zu $GL(2; \mathbb{R}) \supset GL(2; \mathbb{Z})$ dann gerade den Operatoren entsprechen, die Hecke in die Theorie der Modulformen eingeführt hat und denen unsere Hecke-Algebra ihren Namen verdankt.

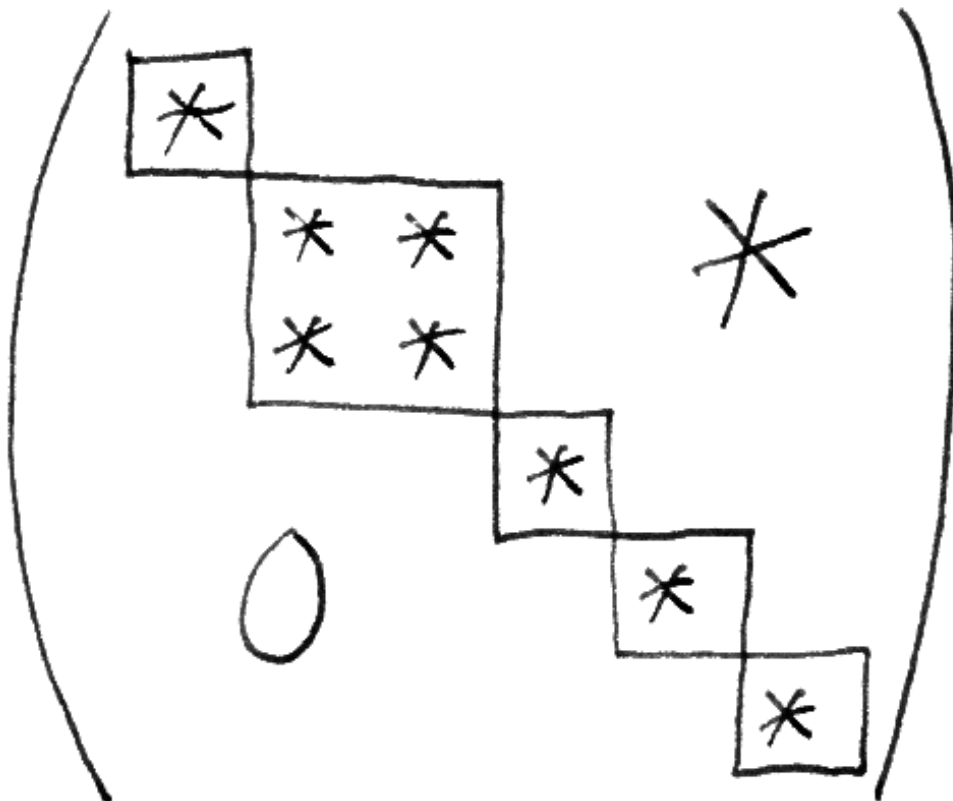
3.1.3. Bezeichne \mathbb{F}_q den endlichen Körper mit q Elementen. Wir interessieren uns für den Fall der endlichen Gruppe $G = GL(n; \mathbb{F}_q)$ mit der Untergruppe B der oberen Dreiecksmatrizen. Nach [LA1] ?? ist G die disjunkte Vereinigung der B -Doppelnebenklassen zu Permutationsmatrizen, in Formeln

$$GL(n; \mathbb{F}_q) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB$$

Die charakteristischen Funktionen T_x der Doppelnebenklassen BxB für $x \in \mathcal{S}_n$ bilden folglich eine \mathbb{Z} -Basis der Hecke-Algebra $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, B)$. Bezeichne $l(x)$ die Zahl der Fehlstände alias die **Länge** der Permutation x in Bezug auf die Menge S der Transpositionen benachbarter Elemente, die genau die einfachen Spiegelungen sind in Bezug auf das durch B gegebene System positiver Wurzeln. Wir behaupten für die Multiplikation $*_B$ in dieser Heckealgebra, die wir von nun an einfach durch Hintereinanderschreiben notieren, die Formeln

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= qT_e + (q-1)T_s && \text{für } s \text{ von der Länge } l(s) = 1. \end{aligned}$$

In der Tat kennen wir aus Übung [LA2] 5.2.7 für die Kardinalitäten der Doppelnebenklassen die Formel $|BxB| = q^{l(x)}|B|$. Für x, y mit $l(x) + l(y) = l(xy)$ liefert



Die Untergruppe $B \sqcup BsB$ im Fall der Transposition benachbarter Elemente $s = (2, 3)$ in der $GL(6)$.

die Multiplikation $BxB \times_B ByB \rightarrow G$ sicher eine Abbildung, deren Bild $BxyB$ umfaßt. Ein Vergleich der Kardinalitäten zeigt dann, daß sie sogar eine Bijektion mit $BxyB$ liefern muß, und das zeigt die erste Formel. Ist $s \in \mathcal{S}_n$ von der Länge $l(s) = 1$, also die Vertauschung zweier benachbarter Elemente von $\{1, \dots, n\}$, so erkennt man leicht, daß $B \sqcup BsB$ eine Untergruppe ist, nämlich die Untergruppe aller invertierbaren Block-obere-Dreiecksmatrizen mit lauter (1×1) -Blöcken aber einem (2×2) -Block auf der Diagonalen, und daß diese Untergruppe genau $(q+1)|B|$ Elemente hat. Es folgt $(T_s + T_e) * (T_s + T_e) = (q+1)|B|(T_s + T_e)$ und in der Hecke-Algebra mit dem neutralen Element $1 = T_e$ gilt folglich $(T_s + 1)^2 = (q+1)(T_s + 1)$ alias $T_s^2 = (q-1)T_s + q$.

Vorschau 3.1.4. Haben wir allgemeiner eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe über dem endlichen q -elementigen Körper \mathbb{F}_q mit einer Borel'schen und bezeichnet $G \supset B$ die zugehörigen endlichen Gruppen \mathbb{F}_q -wertiger Punkte, so gilt das Vorhergehende entsprechend, sobald wir in unserer Borel'schen eine Cartan'sche wählen und statt mit \mathcal{S}_n allgemeiner mit der zugehörigen Weylgruppe W und der darauf durch die Borel'sche festgelegten Längenfunktion arbeiten. Die Elemente der Länge Eins heißen in dieser Allgemeinheit die „einfachen Spiegelungen“.

Lemma 3.1.5 (Universelle Strukturkonstanten). *Für die symmetrische Gruppe $W := \mathcal{S}_n$ mit dem System einfacher Spiegelungen $S := \{(i, i+1) \mid 1 \leq i < n\}$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $c_{x,y}^z$ im Polynomring $\mathbb{Z}[q]$ derart, daß bei Einsetzen einer beliebigen echten Primzahlpotenz für q in unserer Hecke-Algebra aus 3.1.3 gilt*

$$T_x T_y = \sum_z c_{x,y}^z(q) T_z$$

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar und nur die Existenz ist noch zu zeigen. Ist $y = s$ eine einfache Spiegelung, so haben wir $T_x T_s = T_{xs}$ falls $xs > x$ und $T_x T_s = T_{xs} T_s^2 = qT_{xs} + (q-1)T_x$ falls $xs < x$ und die Existenz ist auch klar. Im allgemeinen schreibe man $T_y = T_s \dots T_r$ für $y = s \dots r$ eine reduzierte Darstellung. □

Satz 3.1.6 (Iwahori-Hecke-Algebra für \mathcal{S}_n). *Für die symmetrische Gruppe $W := \mathcal{S}_n$ mit dem System einfacher Spiegelungen $S := \{(i, i+1) \mid 1 \leq i < n\}$ gibt es auf dem freien Modul $\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q] T_x$ über dem Polynomring $\mathbb{Z}[q]$ zur Basis W genau eine assoziative $\mathbb{Z}[q]$ -bilineare Verknüpfung derart, daß gilt*

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= qT_e + (q-1)T_s && \text{für } s \in S. \end{aligned}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit scheint mir offensichtlich. Um die Existenz einer derartigen Verknüpfung zu zeigen, mag man schlicht eine Verknüpfung definieren

durch die im vorhergehenden Lemma 3.1.5 eingeführten Polynome $c_{x,y}^z$ mittels der Vorschrift

$$T_x T_y = \sum_z c_{x,y}^z T_z$$

Das einzige Problem ist der Nachweis der Assoziativität der so erklärten Verknüpfung. Unser freier $\mathbb{Z}[q]$ -Modul mit Verknüpfung läßt sich jedoch durch Spezialisieren von q zu allen echten Primzahlpotenzen einbetten in das Produkt aller zuvor betrachteten konkreten Hecke-Algebren aus 3.1.3. In der Tat ist das Produkt dieser Spezialisierungsabbildungen injektiv, da jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat. Da alle konkreten Hecke-Algebren assoziativ sind, muß das auch für unsere Iwahori-Hecke-Algebra gelten. \square

Satz 3.1.7 (Iwahori-Hecke-Algebra eines Coxetersystems). *Gegeben ein Coxetersystem (W, S) gibt es auf dem freien Modul $\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x$ über dem Polynomring $\mathbb{Z}[q]$ zur Basis W genau eine assoziative $\mathbb{Z}[q]$ -bilineare Verknüpfung derart, daß gilt*

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= qT_e + (q-1)T_s && \text{für } s \in S. \end{aligned}$$

3.1.8. Die durch unseren Satz erklärte $\mathbb{Z}[q]$ -Ringalgebra heißt die **Hecke-Algebra** oder ausführlicher **Iwahori-Hecke-Algebra** unseres Coxetersystems. Wir verwenden dafür die Notation

$$\mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x$$

Beweis. Diese Verallgemeinerung von 3.1.6 zeigt man im Fall einer Diedergruppe $S = \{s, t\}$, indem man auf dem freien $\mathbb{Z}[q]$ -Modul $\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x$ Endomorphismen $(T_s \cdot)$ und $(T_t \cdot)$ sowie $(\cdot T_s)$ und $(\cdot T_t)$ erklärt durch

$$(T_s \cdot) : T_x \mapsto \begin{cases} T_{sx} & \text{falls } sx > x; \\ qT_{sx} + (q-1)T_x & \text{falls } sx < x, \end{cases}$$

und analoge Regeln in den drei anderen Fällen. Dann prüft man durch explizite Rechnung, daß $(T_s \cdot)$ und $(T_t \cdot)$ mit $(\cdot T_s)$ und $(\cdot T_t)$ jeweils kommutieren. Die Endomorphismen unseres freien $\mathbb{Z}[q]$ -Moduls, die mit $(\cdot T_s)$ und $(\cdot T_t)$ kommutieren, bilden dann offensichtlich eine Ringalgebra mit den behaupteten Eigenschaften. Im allgemeinen betrachtet man die von den in derselben Weise definierten Endomorphismen $(T_s \cdot)$ von $\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x$ und folgert aus dem bereits behandelten Diederfall, daß sie die Zopfrelationen erfüllen. Da man nun nach [SPW] 3.2.5 zwischen je zwei reduzierten Darstellungen ein und desselben Elements einer Coxetergruppe mit Zopfrelationen hin- und hergehen kann, folgert man leicht, daß die von diesen Endomorphismen erzeugte Unterringalgebra die behaupteten Eigenschaften besitzt. \square

Ergänzung 3.1.9. Gegeben ein Coxetersystem (W, S) und ein Kring R und eine Abbildung $S \rightarrow R, s \mapsto q_s$ mit der Eigenschaft, daß gilt $q_s = q_t$ falls ts ungerade Ordnung hat, gibt es auf dem freien Modul $\bigoplus_{x \in W} RT_x$ über dem Kring R zur Basis W genau eine assoziative R -bilineare Verknüpfung derart, daß gilt

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= q_s T_e + (q_s - 1)T_s && \text{für } s \in S. \end{aligned}$$

Der Beweis bleibt mutatis mutandis derselbe. Meist wählt man $R = \mathbb{Z}[Q, q]$ und spricht dann von **Hecke-Algebren mit verschiedenen Parametern**.

3.1.10 (Varianten der Hecke-Algebra). Vielfach betrachtet man statt der im vorhergehenden Satz erklärten Hecke-Algebra

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x$$

Varianten mit nach $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ oder sogar nach $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ erweiterten Skalaren und bezeichnet diese Algebren mit demselben Buchstaben \mathcal{H} . Der Ausdruck $q^{1/2}$ meint in diesem Zusammenhang nur ein formales Symbol, dessen Quadrat q sein soll. Wir führen stattdessen ein neues Symbol v ein mit $v^{-2} = q$ und bezeichnen den Ring der Laurentpolynome in v mit $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ und arbeiten also in Formeln ausgedrückt meist mit der Algebra

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]T_x = \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}[q]} \left(\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x \right)$$

Das Tensorieren ist dabei bezüglich der Einbettung $\mathbb{Z}[q] \hookrightarrow \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ mit $q \mapsto v^{-2}$ gemeint und ganz rechts steht unsere Hecke-Algebra aus 3.1.7.

3.1.11 (Beschreibung der Hecke-Algebra durch Erzeuger und Relationen). Die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(W, S)$ zu einem Coxetersystem (W, S) vom Schluß der vorhergehenden Bemerkung 3.1.10 kann mit der Abkürzung $q = v^{-2}$ und der Terminologie aus [NAS] 3.7.2 auch beschrieben werden als die \mathcal{L} -Ringalgebra mit den Erzeugern $\{T_s\}_{s \in S}$, den quadratischen Relationen $(T_s + 1)(T_s - q) = 0$ sowie den sogenannten Zopf-Relationen $T_s T_t \dots T_s = T_t T_s \dots T_t$ beziehungsweise $T_s T_t T_s \dots T_t = T_t T_s T_t \dots T_s$ wenn gilt $st \dots s = ts \dots t$ beziehungsweise $sts \dots t = tst \dots s$ für $s, t \in S$. Das folgt ohne Schwierigkeiten aus der Erkenntnis [SPW] 3.2.5, daß man zwischen je zwei reduzierten Darstellungen ein und desselben Elements einer Coxetergruppe mit Zopfrelationen hin- und hergehen kann.

3.2 Kanonische Basis der Hecke-Algebra

3.2.1. Seien (W, S) ein Coxetersystem, $l : W \rightarrow \mathbb{N}$ die zugehörige Längenfunktion und \leq die Bruhat-Teilordnung auf W . Insbesondere bedeutet $x < y$ also $x \leq y$, $x \neq y$. Bezeichne $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ den Ring der Laurentpolynome über \mathbb{Z} in einer Variablen v . Auf dem freien \mathcal{L} -Modul

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathcal{L}T_x$$

über W gibt es nach 3.1.11 genau eine Struktur einer assoziativen \mathcal{L} -Algebra mit $T_x T_y = T_{xy}$ falls $l(x) + l(y) = l(xy)$ und $T_s^2 = v^{-2}T_e + (v^{-2} - 1)T_s$ für alle $s \in S$. Diese assoziative Algebra \mathcal{H} nennen wir im folgenden die **Hecke-Algebra** von (W, S) . Sie ist unitär mit Eins-Element T_e , wir schreiben auch oft $T_e = 1$.

3.2.2. Die Hecke-Algebra kann in leichter Abwandlung von 3.1.11 auch beschrieben werden als die unitäre assoziative \mathcal{L} -Algebra mit den Erzeugern $\{H_s\}_{s \in S}$ für $H_s = vT_s$, den quadratischen Relationen

$$(H_s + v)(H_s - v^{-1}) = 0 \quad \text{alias} \quad H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v)H_s$$

sowie den sogenannten Zopf-Relationen $H_s H_t \dots H_s = H_t H_s \dots H_t$ beziehungsweise $H_s H_t H_s \dots H_t = H_t H_s H_t \dots H_s$ wenn gilt $st \dots s = ts \dots t$ beziehungsweise $sts \dots t = tst \dots s$ für $s, t \in S$. Alle H_s sind invertierbar, genauer prüft man leicht die Formel

$$H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1})$$

3.2.3. Wir arbeiten von nun an mit $H_x = v^{l(x)}T_x$. Sicher gilt auch $H_x H_y = H_{xy}$ falls $l(x) + l(y) = l(xy)$. Mit den H_s sind also auch alle H_x Einheiten in \mathcal{H} . Wir können involutive alias selbstinverse Ringautomorphismen $a, b : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definieren durch die Regeln

$$\begin{aligned} a(v) &= -v, & a(H_y) &= (-1)^{l(y)} H_y, \\ b(v) &= -v^{-1}, & b(H_x) &= H_x. \end{aligned}$$

Wir können weiter involutive Ringantiautomorphismen $\delta, i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ erklären durch die Regeln

$$\begin{aligned} \delta(v) &= v^{-1}, & \delta(H_x) &= H_x^{-1}, \\ i(v) &= v, & i(H_x) &= H_{x^{-1}}. \end{aligned}$$

Diese vier Involutionen kommutieren paarweise und definieren mithin eine Operation von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ auf \mathcal{H} , die für nichtkommutatives W sogar treu ist. Insbesondere ist $d = i\delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein involutiver Automorphismus von \mathcal{H} , die sogenannte **Dualität**. Indem man H_x als ein Produkt von H_s mit $s \in S$ schreibt, prüft man leicht

$$d(H_x) \in H_x + \sum_{y < x} \mathcal{L}H_y$$

Die Dualität d spielt in der Theorie der Kazhdan-Lusztig-Polynome eine fundamentale Rolle. Wir schreiben oft $d(H) = \overline{H}$, es gilt also $\overline{\overline{v}} = v^{-1}$ und $\overline{\overline{H}_x} = (H_{x^{-1}})^{-1}$. Wir nennen $H \in \mathcal{H}$ **selbstdual**, wenn gilt $\overline{H} = H$.

Satz 3.2.4. *Sei (W, S) ein Coxetersystem. Für alle $x \in W$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft*

$$\underline{H}_x \in H_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$$

3.2.5. In [KL79] wird unser \underline{H}_x mit C'_x bezeichnet. Kazhdan und Lusztig arbeiten mit der Variablen $q = v^{-2}$ und mit der \mathcal{L} -Basis der T_x . Wir werden gleich sehen, daß die \underline{H}_x eine \mathcal{L} -Basis der Heckealgebra bilden. Sie heißt die **kanonische selbstduale Basis** oder kurz **kanonische Basis**.

3.2.6 (**Die Kazhdan-Lusztig-Vermutungen**). Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und R^+ ein System positiver Wurzeln. Ebenfalls in [KL79] wird die Vermutung ausgesprochen, daß unsere Elemente

$$C_x := \sum_{y \in W} [P_x : \Delta_y]_{\Delta} y = \sum_{y \in W} [\Delta_y : L_x]_{\Delta} y$$

des Gruppenrings $\mathbb{Z}W$ aus 2.6.26, die die Jordan-Hölder-Multiplizitäten der Vermoduln beschreiben, die Bilder der kanonischen Basis der Heckealgebra unter dem durch $v \mapsto 1$ gegebenen Ringhomomorphismus $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}W$ sind, in Formeln $\underline{H}_x \mapsto C_x$ bei $v \mapsto 1$. Das ist mittlerweile bewiesen und ich will im weiteren Verlauf dieser Vorlesungen einen Beweis vorstellen.

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit folgen sofort aus den beiden anschließenden Lemmata 3.2.7 und 3.2.8. Alternativ kann man das Theorem auch aus der sehr allgemeinen Proposition ?? folgern. \square

Lemma 3.2.7. *Es gibt für alle $x \in W$ ein selbstduales $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ mit $\underline{H}_x \in H_x + \sum_{y < x} v\mathbb{Z}[v]H_y$.*

Beweis. Wir wissen ja schon, daß gilt $\overline{\overline{H}_s} = H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1})$ für alle $s \in S$. Insbesondere ist $H_s + v$ selbstdual, und sobald wir die Eindeutigkeit der \underline{H}_x gezeigt haben, können und werden wir $H_s + v$ mit \underline{H}_s abkürzen. Die Rechtsmultiplikation von $(H_s + v)$ auf \mathcal{H} wird beschrieben durch die Formeln

$$H_x(H_s + v) = \begin{cases} H_{xs} + vH_x & \text{falls } xs > x; \\ H_{xs} + v^{-1}H_x & \text{falls } xs < x. \end{cases}$$

Wir zeigen nun das Lemma durch Induktion über die Bruhat-Teilordnung. Sicher können wir die Induktion mit $\underline{H}_e = H_e = 1$ beginnen. Sei nun $x \in W$ gegeben

und sei die Existenz von \underline{H}_y bekannt für alle $y < x$. Falls $x \neq e$ finden wir $s \in S$ mit $xs < x$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\underline{H}_{xs}(H_s + v) = H_x + \sum_{y < x} h_y H_y$$

für geeignete $h_y \in \mathbb{Z}[v]$. Wir bilden

$$\underline{H}_x = \underline{H}_{xs}(H_s + v) - \sum_{y < x} h_y(0) \underline{H}_y$$

und unsere Induktion läuft. □

Lemma 3.2.8. Für $H \in \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$ folgt aus $H = \overline{H}$ schon $H = 0$.

Beweis. Sicher gilt $H_x \in \underline{H}_x + \sum_{y < x} \mathcal{L}H_y$ für \underline{H}_x wie in der schon gezeigten Behauptung 3.2.7 und folglich $\overline{H}_x \in H_x + \sum_{y < x} \mathcal{L}H_y$ für alle $x \in W$. Schreiben wir nun $H = \sum h_y H_y$ und wählen z maximal mit $h_z \neq 0$, so folgt aus $H = \overline{H}$ schon $h_z = \overline{h}_z$ im Widerspruch zu $h_z \in v\mathbb{Z}[v]$. Das zeigt die Behauptung und das Lemma ist bewiesen. □

Definition 3.2.9. In einer abelschen Gruppe E mit Involution d bezeichne $E^+ \subset E$ die Untergruppe der selbstdualen Elemente $E^+ := \{e \in E \mid de = e\}$.

Proposition 3.2.10. Die selbstdualen Elemente der Hecke-Algebra bilden einen freien Modul \mathcal{H}^+ über $\mathcal{L}^+ = \mathbb{Z}[(v + v^{-1})]$ mit Basis \underline{H}_x mit $x \in W$. Als Algebra über \mathcal{L}^+ wird \mathcal{H}^+ erzeugt von den \underline{H}_s mit $s \in S$.

Beweis. Offensichtlich bilden die \underline{H}_x eine \mathcal{L} -Basis von \mathcal{H} , und $\sum h_x \underline{H}_x$ ist selbstdual genau dann, wenn alle h_x es sind. Die induktive Konstruktion der \underline{H}_x zeigt sogar, daß alle \underline{H}_x in der \mathbb{Z} -Unteralgebra von \mathcal{H} liegen, die von den \underline{H}_s mit $s \in S$ erzeugt wird. □

4 Danksagung

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich vielen Freiburger Studenten, insbesondere Catharina Stoppel, Olaf Schnürer, Ivan Zaccanelli und auch Christoph Geiss. Eine wesentliche Quelle war für mich der Text [Hum70] von Humphreys und natürlich Bourbaki, insbesondere [Bou81]. Weiter war auch [Kna96] sehr hilfreich sowie ein Skript von Dragan Miličić. Proposition ?? habe ich in [Kac90, 11.3.a] gelernt.

Literatur

- [AAG] **Skriptum Affine Algebraische Gruppen.** Wolfgang Soergel.
- [BGG76] Joseph N. Bernstein, Israel M. Gelfand, and Sergei I. Gelfand. Category of \mathfrak{g} -modules. *Functional Analysis and its Applications*, 10:87–92, 1976.
- [Bou81] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4–6.* Masson, 1981.
- [HL] **Skriptum halbeinfache Lie-Algebren.** Wolfgang Soergel.
- [Hum70] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *GTM*. Springer, 1970.
- [Kac90] Victor G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, 3 edition, 1990.
- [KAG] **Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie.** Wolfgang Soergel.
- [KL79] David Kazhdan and George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Inventiones*, 53:191–213, 1979.
- [Kna96] Anthony W. Knap. *Lie groups beyond an introduction.* Birkhäuser, 1996.
- [LA1] **Skriptum Lineare Algebra 1.** Wolfgang Soergel.
- [LA2] **Skriptum Lineare Algebra 2.** Wolfgang Soergel.
- [ML] **Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen.** Wolfgang Soergel.
- [NAS] **Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie.** Wolfgang Soergel.
- [SPW] **Skriptum Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme.** Wolfgang Soergel.
- [TF] **Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie.** Wolfgang Soergel.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das \cup dem Buchstaben u oder das \subset dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

- adjungiert
 - Gruppe, 5
- auf der s -Wand, 40
- Bahn
 - ganzzahlige, 20
- BGG-Reziprozität, 32
- Cartan'sche
 - absolute, 5
- ρ -dominant, 20
- Dualität
 - der Heckealgebra, 56
- Facette
 - von Spiegelungsgruppe, 47
- Funktion
 - polynomiale, 4
- ganzzahlige Weylgruppe von λ , 16
- ganzzahlige Wurzelsystem von λ , 16
- Gewicht
 - ρ -dominantes, 20
- Gewichtsraum, 22
- \mathcal{H} , Hecke-Algebra, 56
- $\mathcal{H}(W, S)$ Hecke-Algebra des Coxetersystems (W, S) , 54
- Harish-Chandra-Isomorphismus, 4
- Hauptblock
 - von \mathcal{O} , 28
- Hecke-Algebra, 51
 - eines Coxetersystems, 54
- Invarianten, 4
- Iwahori-Hecke-Algebra
 - eines Coxetersystems, 54
- kanonische Basis
 - der Heckealgebra, 57
- Kategorie \mathcal{O} , 22
- \mathcal{L} , Laurentpolynome, 56
- oberen Abschluß, 47
- Π_Λ Basis des Systems der Λ -ganzen Wurzeln, 16
- polynomiale Funktion, 4
- System der auf Λ ganzzahligen Wurzeln, 16
- Tensoridentität, 33
- translation functor, 34
- Vermafahne, 23
- Verschiebung, 34
 - auf Wände, 36
 - aus Wänden, 36
 - durch Wand, 40
- zentraler Charakter, 15
- Zentrum
 - eines Rings, 3