

# Singuläre Homologie

Wolfgang Soergel

3. September 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Singuläre Homologie</b>	<b>4</b>
1.1	Simpliziale Homologie . . . . .	4
1.2	Definition der singulären Homologie . . . . .	11
1.3	Funktorialität der Homologie . . . . .	18
1.4	Homotopie-Invarianz . . . . .	20
1.5	Erste Homologie und Fundamentalgruppe . . . . .	28
1.6	Homologie offener Teilmengen der Ebene . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Relative Homologie mit Anwendungen</b>	<b>42</b>
2.1	Relative Homologie . . . . .	42
2.2	Die lange exakte Homologiesequenz . . . . .	46
2.3	Ausschneidung . . . . .	51
2.4	Homologie von Simplicialkomplexen . . . . .	62
2.5	Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten . . . . .	68
2.6	Variationen zur simplicialen Homologie* . . . . .	69
2.7	Einbettungen von Sphären in Sphären . . . . .	76
2.8	Homologie von endlichen Zellkomplexen . . . . .	81
2.9	Homologie und Orientierung . . . . .	85
2.10	Orientierung und Fundamentalzykel . . . . .	87
2.11	Satz von Helly* . . . . .	101
<b>3</b>	<b>Homologie mit Koeffizienten und Produkte</b>	<b>103</b>
3.1	Homologie mit Koeffizienten . . . . .	103
3.2	Tensorprodukte über Ringen . . . . .	106
3.3	Erste Anwendungen in der Homologietheorie . . . . .	112
3.4	Torsionsprodukt von abelschen Gruppen . . . . .	113
3.5	Das universelle Koeffiziententheorem . . . . .	118
3.6	Homologie von Produkten . . . . .	119
3.7	Eine explizite Eilenberg-Zilber-Abbildung . . . . .	128
3.8	Eigenschaften des Kreuzprodukts . . . . .	131
<b>4</b>	<b>Singuläre Kohomologie</b>	<b>135</b>
4.1	Die Kohomologiegruppen . . . . .	135
4.2	Der Kohomologiering . . . . .	138
4.3	Cup-Produkt von singulären Koketten . . . . .	143
4.4	Differentielle graduierte Algebra . . . . .	144
4.5	Die Homologie als Modul über der Kohomologie . . . . .	148
4.6	Ein Kriterium für Homotopieäquivalenzen . . . . .	152
4.7	Eigenschaften der Kohomologie . . . . .	153

4.8	Erweiterungen von abelschen Gruppen . . . . .	156
4.9	Injektive abelsche Gruppen . . . . .	158
4.10	Koeffizientenwechsel in der Kohomologie . . . . .	161
<b>5</b>	<b>Poincaré-Dualität und Schnittpaarung</b>	<b>163</b>
5.1	Limites und Kolimites . . . . .	163
5.2	Kohomologie mit kompaktem Träger . . . . .	170
5.3	Poincaré-Dualität . . . . .	178
5.4	Schnittzahlen . . . . .	183
5.5	Anschauung im nichtkompakten Fall . . . . .	191
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>197</b>
	<b>Index</b>	<b>198</b>

# 1 Singuläre Homologie

## 1.1 Simpliciale Homologie

**Definition 1.1.1.** Für jede Menge  $\Lambda$  betrachten wir die abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}\Lambda$  aller Abbildungen  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ , die nur auf endlich vielen Elementen von  $\Lambda$  Werte ungleich Null annehmen. In kategorientheoretischer Sprache ist das die **freie abelsche Gruppe**  $\mathbb{Z}\Lambda = \text{Ab}^\uparrow \Lambda$  über  $\Lambda$ . Die Elemente von  $\mathbb{Z}\Lambda$  fassen wir auf als endliche formale Linearkombinationen von Elementen von  $\Lambda$  und schreiben sie  $f = \sum a_\lambda \lambda$  mit  $a_\lambda = f(\lambda) \in \mathbb{Z}$  und  $\lambda \in \Lambda$ .

1.1.2. Wir haben eine offensichtliche Abbildung  $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}\Lambda$ , die eben jedem Element die charakteristische Funktion der entsprechenden einelementigen Teilmenge zuordnet. Gegeben eine weitere abelsche Gruppe  $G$  läßt sich jede Abbildung  $\varphi : \Lambda \rightarrow G$  auf genau eine Weise zu einem Gruppenhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}\Lambda \rightarrow G$  ausdehnen, den wir die **lineare Fortsetzung von  $\varphi$**  nennen.

**Definition 1.1.3.** Sei  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex im Sinne unserer Definition 2.4.5, also eine Menge  $E$  mitsamt einem System  $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$  von endlichen Teilmengen von  $E$ , das unter dem Bilden von Teilmengen stabil ist und alle einelementigen Teilmengen von  $E$  enthält. Eine geometrische Anschauung für dieses eher kombinatorische Datum mag der zugehörige Polyeder  $\Delta(\mathcal{K})$  nach 2.4.7 geben. Gegeben  $q \in \mathbb{N}$  alias  $q \geq 0$  bilden wir erst die Menge

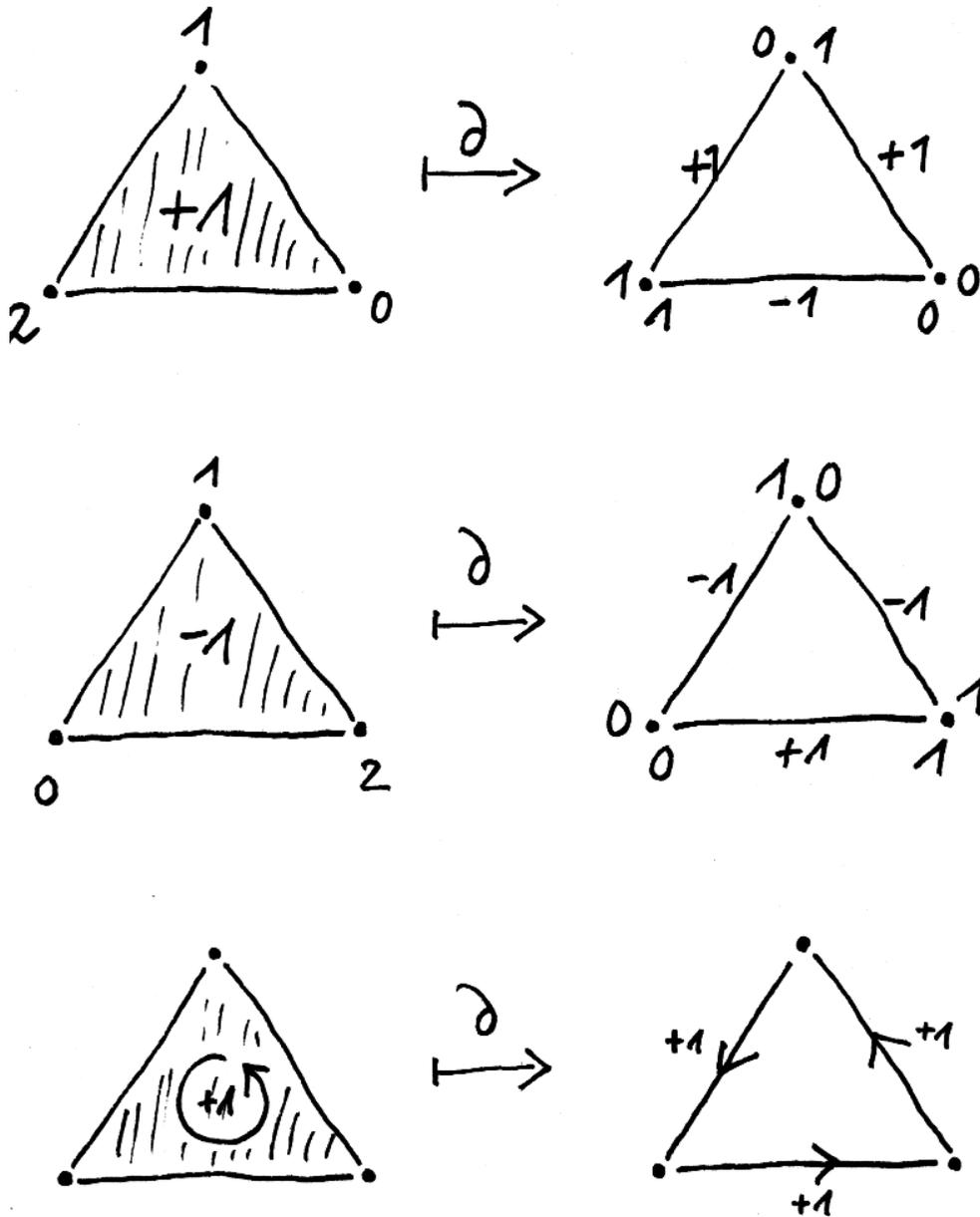
$$\mathcal{K}_q^{\leq} := \{\sigma : \{0, \dots, q\} \rightarrow E \mid \sigma \text{ injektiv, im } \sigma \in \mathcal{K}\}$$

aller **angeordneten  $q$ -Simplizes** in unserem Simplicialkomplex, deshalb auch der obere Index  $\leq$ . Dann bilden wir über dieser Menge die freie abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\leq}$ . Und schließlich bilden wir deren Quotienten

$$S_q \mathcal{K} := \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\leq} / \langle \sigma \circ \pi - (\text{sgn } \pi) \sigma \mid \sigma \in \mathcal{K}_q^{\leq}, \pi \in S_{q+1} \rangle$$

im Sinne von [LA2] 4.2.6, in dem je zwei angeordnete  $q$ -Simplizes, die sich nur in ihrer Anordnung und in dieser um eine Permutation  $\pi$  unterscheiden, bis auf das Signum der fraglichen Permutation  $\pi \in S_{q+1}$  miteinander identifiziert werden. Diesen Quotienten  $S_q \mathcal{K}$  nennen wir die **Gruppe der  $q$ -Simplizialketten von  $\mathcal{K}$** . Einen angeordneten  $q$ -Simplex  $\sigma$  notieren wir  $(v_0, \dots, v_q)$  mit  $v_i = \sigma(i)$ . Die abweichende Konvention aus 2.4.5, wo der Buchstabe  $\sigma$  meist einen Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}$  alias eine Teilmenge der Menge  $E$  der Ecken bezeichnete, werden wir von nun an nicht mehr verwenden. Wir benutzen stattdessen für solche Teilmengen lateinische Buchstaben, etwa  $s \in \mathcal{K}$ . Die Gruppenhomomorphismen  $\partial^{\leq} : \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1}^{\leq} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\leq}$ , die auf angeordneten Simplizes durch die Formel

$$(v_0, \dots, v_q) \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q)$$



Anschauung für den Rand einer 2-Simplizialkette. In der linken Spalte habe ich versucht, zwei Elemente der freien abelschen Gruppe über der Menge der angeordneten Simplizes graphisch darzustellen, die dieselbe Simplizialkette repräsentieren, sowie ganz unten besagte Simplizialkette selber. In der rechten Spalte werden die jeweiligen Ränder angedeutet.

gegeben werden mit einem Hut alias einer ‘‘Tarnkappe’’ über der wegzulassenden Komponente, induzieren Gruppenhomomorphismen

$$\partial = \partial_{q+1} : S_{q+1}\mathcal{K} \rightarrow S_q\mathcal{K}$$

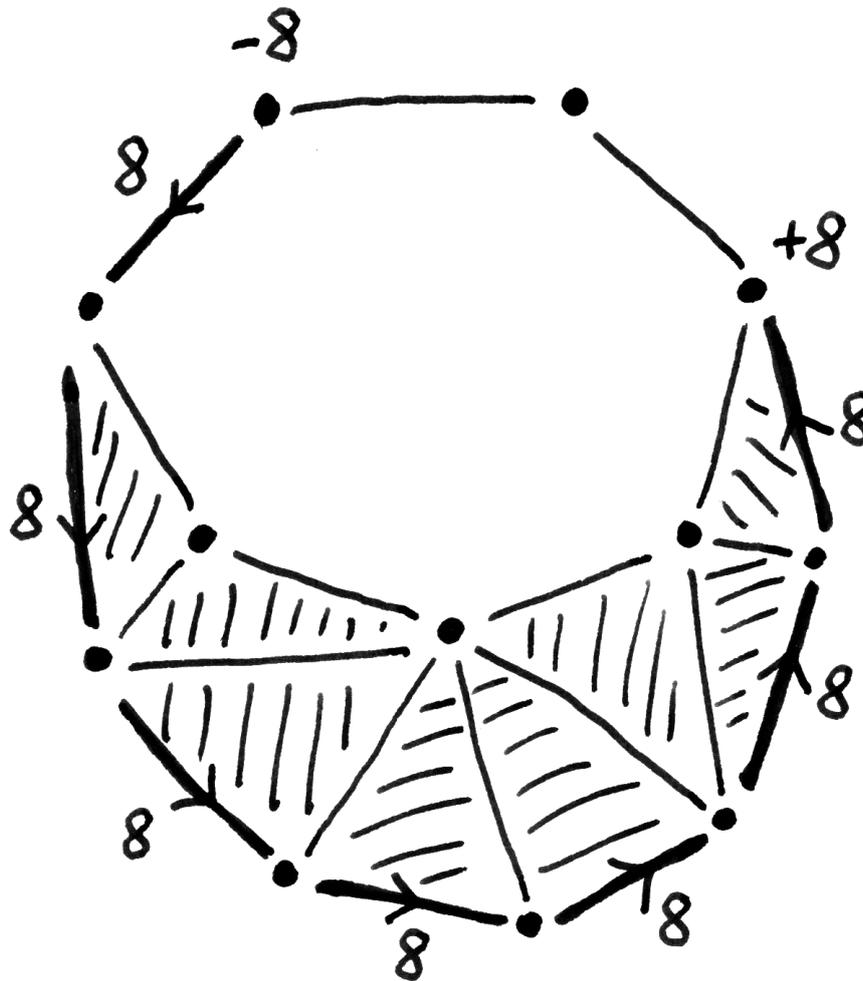
auf den Simplizialketten, die **Randoperatoren**. In der Tat, da die symmetrische Gruppe durch Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt wird, müssen wir für die Wohldefiniertheit dieser Randoperatoren nur prüfen, daß die beiden Ränder  $\partial^{\leq}(v_0, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_q)$  und  $-\partial^{\leq}(v_0, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_q)$  für alle  $i$  dieselbe Simplizialkette repräsentieren, und das ist leicht einzusehen. Weiter prüft man ohne Schwierigkeiten, daß die Verknüpfung von je zwei aufeinanderfolgenden Randoperatoren Null ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Sequenz von abelschen Gruppen

$$\dots \xrightarrow{\partial} S_2\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} S_1\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} S_0\mathcal{K},$$

den **Komplex der Simplizialketten**. Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, setzen wir unsere Sequenz ins Negative fort durch Null und vereinbaren  $S_q\mathcal{K} = 0$  für  $q < 0$ .

*Vorschau 1.1.4.* Jeder Simplizialkomplex hat genau einen  $(-1)$ -Simplex, nämlich die leere Menge, und es mag natürlicher erscheinen, den Komplex der Simplizialketten nicht bei Null enden zu lassen, sondern ihn durch  $S_{-1}\mathcal{K} = \mathbb{Z}$  fortzusetzen und erst darunter mit Nullen fortzufahren. Diese Variante unserer bisherigen Definitionen werden wir später noch ausführlicher diskutieren, sie führt zur sogenannten ‘‘reduzierten Homologie’’.

1.1.5. Anschaulich mag man sich eine 0-Simplizialkette vorstellen als eine endliche formale Linearkombination von Ecken mit ganzzahligen Koeffizienten; eine 1-Simplizialkette als eine endliche formale Linearkombination von ‘‘gerichteten’’ Kanten, wobei wir uns einen angeordneten 1-Simplex  $\sigma : \{0, 1\} \hookrightarrow E$  als eine von  $\sigma(0)$  nach  $\sigma(1)$  gerichtete Kante denken und eine Kante mit der umgekehrten Richtung mit dem Negativen der ursprünglichen Kante zu identifizieren ist; den Rand einer orientierten Kante als Endpunkt minus Anfangspunkt; eine 2-Simplizialkette als eine endliche formale Linearkombination von ‘‘orientierten’’ Dreiecksflächen, wobei wir einen angeordneten 2-Simplex  $\sigma : \{0, 1, 2\} \hookrightarrow E$  durch einen Kreispeil im Drehsinn des Weges von  $\sigma(0)$  über  $\sigma(1)$  nach  $\sigma(2)$  und wieder nach  $\sigma(0)$  andeuten, und eine Dreiecksfläche mit umgekehrter Orientierung mit dem Negativen der ursprünglichen Dreiecksfläche zu identifizieren ist; und den Rand einer orientierten Dreiecksfläche als die Summe ihrer drei Kanten, jeweils versehen mit der Richtung, für die sie einen Rundweg in der durch die Orientierung unserer Dreiecksfläche gegebenen Laufrichtung bilden. Die Herkunft der Bezeichnung  $\partial$  für die Randoperatoren wird in [2.7.8](#) diskutiert.



Ein Simplicialkomplex mit 12 Ecken, 20 Kanten und 8 Zweisimplizes. Darin eingezeichnet eine 1-Simplizialkette, bestehend aus der formalen Summe der sieben mit einem Pfeil versehenen fetten Kanten, zu verstehen mit der durch diesen Pfeil gegebenen Orientierung und jeweils mit dem Koeffizienten 8. Ebenfalls eingezeichnet der Rand dieser Simplicialkette, bestehend aus der formalen Summe der zwei besonders fetten Punkte mit den darangeschriebenen Koeffizienten  $\pm 8$ . Wenn wir unsere 1-Simplizialkette entsprechend durch die beiden Kanten zwischen diesen beiden Punkten mit geeigneter Orientierung und geeigneten Koeffizienten ergänzen, so erhalten wir einen 1-Simplizialzykel.

**Definition 1.1.6.** Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex. Wir definieren

$Z_q\mathcal{K} := \ker(\partial_q : S_q\mathcal{K} \rightarrow S_{q-1}\mathcal{K})$  die Gruppe der  $q$ -**Simplizialzykel**;

$B_q\mathcal{K} := \text{im } \partial_{q+1}$  die Gruppe der  $q$ -**Simplizialränder** (engl. boundaries);

$H_q\mathcal{K} := Z_q\mathcal{K}/B_q\mathcal{K}$  die  $q$ -**te simpliziale Homologiegruppe** von  $\mathcal{K}$ .

In der letzten Zeile ist die Restklassengruppe aus [LA2] 4.2.6 gemeint.

1.1.7. Anschaulich gesprochen beschreiben die verschiedenen Homologiegruppen verschiedene Arten von Löchern des Polyeders  $\Delta(\mathcal{K})$ . Zum Beispiel liefert 1.2.11 in Verbindung mit 2.4.3 einen Isomorphismus zwischen  $H_0\mathcal{K}$  und der freien abelschen Gruppe über der Menge der Zusammenhangskomponenten von  $\Delta(\mathcal{K})$ , die ja durch eine gewisse Art von Löchern voneinander getrennt werden; der “Hurewicz-Isomorphismus” 1.5.2 in Verbindung mit 2.4.3 einen Isomorphismus zwischen  $H_1\mathcal{K}$  und dem maximalen abelschen Quotienten der Fundamentalgruppe von  $\Delta(\mathcal{K})$ , der eine andere Art von Löchern beschreibt; und die “Alexanderdualität” ?? in Verbindung mit 2.4.3 für jeden endlichen Simplizialkomplex in  $\mathbb{R}^3$  einen Isomorphismus zwischen  $H_2\mathcal{K}$  und der freien abelschen Gruppe über der Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten des Komplements von  $\Delta(\mathcal{K})$ , d.h. mit der freien abelschen Gruppe über den “Kavitäten” unseres Polyeders, die eine wieder andere Art von Löchern beschreibt. Die höheren Homologiegruppen beschreiben ähnliche Phänomene in höheren Dimensionen, für die ich leider keine räumliche Anschauung mehr anbieten kann.

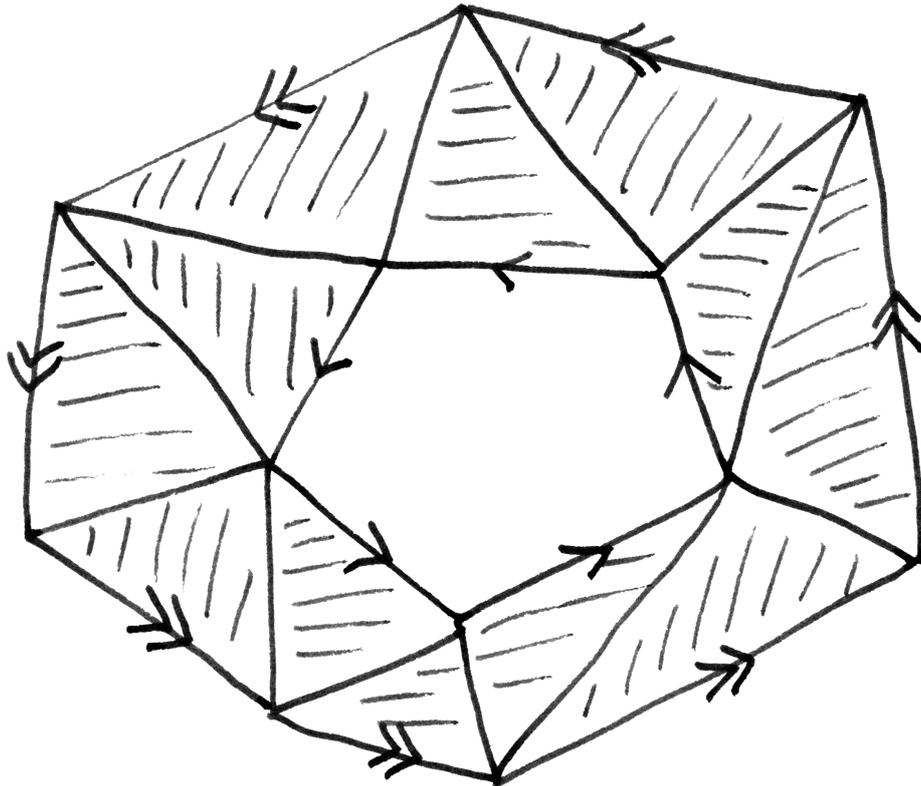
*Beispiel 1.1.8 (Simpliziale Homologie eines vollen Simplex).* Ist  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex mit  $E \neq \emptyset$  und  $\mathcal{K}$  der Menge aller endlichen Teilmengen von  $E$ , so ist der Komplex der Simplizialketten für jede Anordnung von  $E$  kanonisch isomorph in nichtnegativen Graden zum Komplex aus dem gleich anschließenden Lemma 1.1.9. Folglich liefert die Abbildung nach  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}E$  aus Lemma 1.1.9 einen Isomorphismus  $H_0\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  und Lemma 1.1.9 zeigt weiter, daß alle anderen Homologiegruppen verschwinden. Der zugehörige Polyeder  $\Delta(\mathcal{K})$  ist für endliches  $E$  ein voller Simplex mit  $|E|$  Ecken, und unsere Erkenntnis bedeutet anschaulich, daß solch ein voller Simplex “keine Löcher hat”.

**Lemma 1.1.9.** Für jede nichtleere angeordnete Menge  $E$  ist der Komplex

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_0E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_1E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_2E \leftarrow \dots$$

exakt, wo  $\mathcal{K}_qE$  das System aller  $(q+1)$ -elementigen Teilmengen von  $E$  bezeichnet und der Randoperator  $\partial = \partial^{\leq}$  durch die Formel aus 1.1.3 gegeben wird, so daß wir für  $v_0 < \dots < v_q$  haben

$$\partial : \{v_0, \dots, v_q\} \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q\}$$



Zwei homologe 1-Simplizialzykel in einem zweidimensionalen Simplicialkomplex mit 12 Zwei-Simplizes, 24 Eins-Simplizes und 12 Null-Simplizes. Betrachtet man die Summe aller mit der Orientierung "im Uhrzeigersinn" versehenen Zwei-Simplizes, so ist der Rand dieser 2-Simplizialkette die Differenz der durch Doppelpfeile bzw. einfache Pfeile angedeuteten 1-Zykel.

1.1.10. Wir verstehen hier Exaktheit im Sinne von 4.5.2. Ausgeschrieben behaupten wir also, daß an jeder Stelle der Kern des auslaufenden Pfeils mit dem Bild des einlaufenden Pfeils zusammenfällt. Eine wichtige Variante des Lemmas zeigen wir später als 2.4.8.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $E$  endlich annehmen. Ist dann  $v \in E$  die kleinste Ecke und definieren wir Gruppenhomomorphismen  $\delta : \mathbb{Z}\mathcal{K}_q E \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1} E$  durch die Vorschrift  $\delta\{v_0, \dots, v_q\} = \{v, v_0, \dots, v_q\}$  falls  $v \neq v_0$  bzw.  $\delta\{v_0, \dots, v_q\} = 0$  sonst, so prüft man leicht an jeder Stelle  $\partial\delta + \delta\partial = \text{id}$ . Also ist in unserem Komplex jeder Zykel ein Rand.  $\square$

*Beispiel* 1.1.11. Ist  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex mit  $3 \leq |E| < \infty$  und  $\mathcal{K}$  der Menge aller echten Teilmengen von  $E$ , so liefert die letzte Abbildung aus obigem Komplex wieder einen Isomorphismus  $H_0 \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  und die erste einen Isomorphismus  $H_n \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  für  $n = |E| - 2$  und alle anderen Homologiegruppen verschwinden. Der zugehörige Polyeder  $\Delta(\mathcal{K})$  ist der “anschauliche Rand” eines vollen Simplex mit  $n + 2$  Ecken.

*Übung* 1.1.12. Man berechne die simpliciale Homologie der “Vereinigung der Kanten eines Tetraeders”, also  $|E| = 4$  und  $\mathcal{K}$  alle Teilmengen mit höchstens zwei Elementen.

*Übung* 1.1.13. Man zeige: Besitzt ein Simplicialkomplex eine Ecke mit der Eigenschaft, daß jeder Simplex bei Dazunehmen dieser Ecke ein Simplex bleibt, so verschwinden seine höheren simplicialen Homologiegruppen und seine nullte Homologiegruppe ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$ . Hinweis: 1.1.9.

*Übung* 1.1.14. Man berechne die simpliciale Homologie des “Randes eines Quadrats”.

*Übung* 1.1.15. Man zeige, daß gegeben ein Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  das Bild der offensichtlichen Abbildung  $\mathcal{K}_0 \rightarrow H_0 \mathcal{K}$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis ist und daß zwei Ecken aus  $\mathcal{K}_0$  dasselbe Basiselement liefern genau dann, wenn sie durch einen Kantenweg verbunden werden können.

*Übung* 1.1.16. Man fügt bei einem Simplicialkomplex eine Kante zwischen zwei bereits existierenden Ecken hinzu. Wie können sich die Homologiegruppen unseres Simplicialkomplexes dabei ändern?

1.1.17. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, daß die simplicialen Homologiegruppen eines Simplicialkomplexes  $\mathcal{K}$  bis auf Isomorphismus nur vom topologischen Raum  $\Delta(\mathcal{K})$  abhängen und nicht von der gewählten Triangulierung. Dazu erklären wir ganz allgemein für einen beliebigen topologischen Raum seine “singulären Homologiegruppen” und konstruieren ganz am Schluß dieses Abschnitts in 2.4.3 Isomorphismen zwischen den simplicialen Homologiegruppen eines Simplicialkomplexes und den singulären Homologiegruppen seines Polyeders  $\Delta(\mathcal{K})$ .

## 1.2 Definition der singulären Homologie

**Definition 1.2.1.** Sei  $q \geq 0$ . Der topologische Raum

$$\Delta_q = \left\{ (x_0, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1 \right\}$$

heißt der  $q$ -te **Standardsimplex**. Es ist also  $\Delta_0$  ein Punkt,  $\Delta_1$  ein Geradensegment,  $\Delta_2$  eine Dreiecksfläche,  $\Delta_3$  ein massiver Tetraeder und so weiter.

**Definition 1.2.2.** Eine stetige Abbildung  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  des  $q$ -ten Standardsimplex  $\Delta_q$  in einen topologischen Raum  $X$  heißt ein **singulärer  $q$ -Simplex von  $X$** .

1.2.3. Das Adjektiv singulär ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß wir außer der Stetigkeit keine Forderungen an  $\sigma$  stellen. Wir erlauben also auch nicht-injektive, ja sogar konstante Abbildungen  $\sigma$  als singuläre Simplizes, so daß das Adjektiv singulär zumindest einen Teil unserer singulären Simplizes recht gut beschreibt. Der Buchstabe  $S$  bei  $S_q X$  steht jedoch für "Simplex", nicht etwa für "singulär".

**Definition 1.2.4.** Wir bezeichnen mit

$$S_q X := \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, X) = \text{Ab}^\dagger \text{Top}(\Delta_q, X)$$

die freie abelsche Gruppe über der Menge aller singulären  $q$ -Simplizes von  $X$  und nennen ihre Elemente **singuläre  $q$ -Ketten**. Diese Gruppe ist natürlich riesig. Zum Beispiel liefert die offensichtliche Bijektion  $\text{Top}(\Delta_0, X) \xrightarrow{\sim} X$  Gruppenisomorphismen  $S_0 X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}X$ . Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, vereinbaren wir zusätzlich  $S_q X = 0$  für  $q < 0$ .

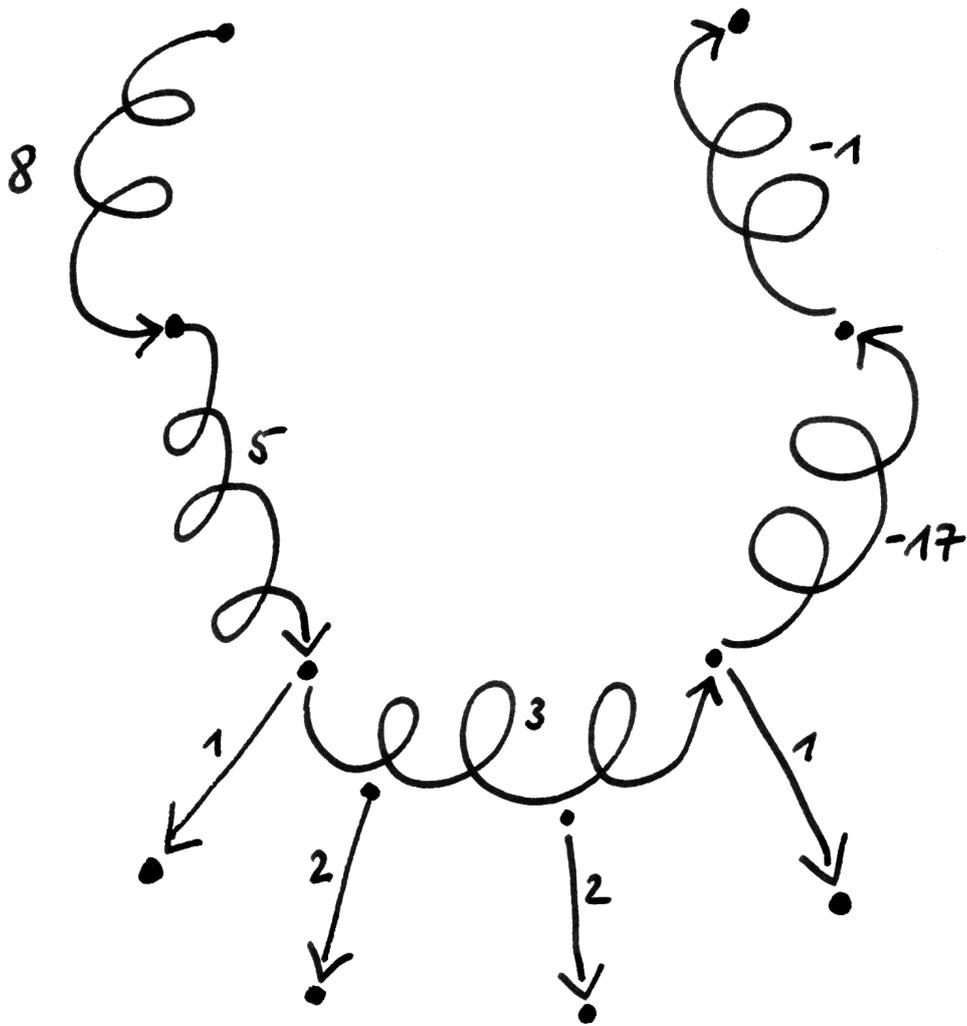
**Definition 1.2.5.** Für  $q \geq 1$  und  $0 \leq i \leq q$  erklären wir die  **$i$ -te Kantenabbildung**

$$k^i = k_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$$

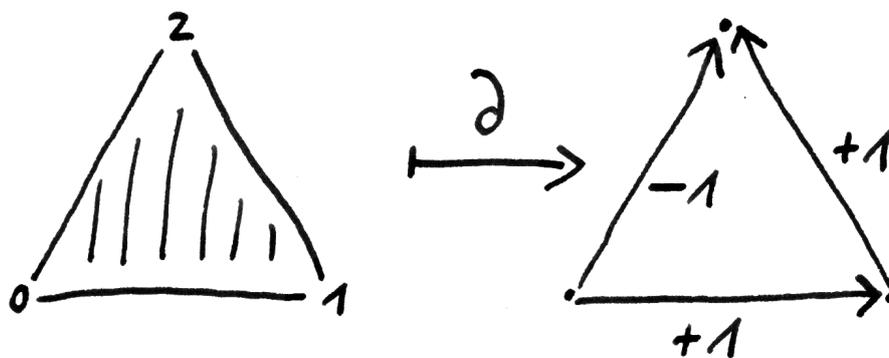
dadurch, daß sie nach der  $i$ -ten Stelle die Koordinate Null einfügen soll. Dann erklären wir für alle  $q$  einen Gruppenhomomorphismus  $\partial = \partial_q : S_q X \rightarrow S_{q-1} X$ , den sogenannten **Randoperator**: Für  $q \leq 0$  setzen wir schlicht  $\partial_q = 0$  und für  $q \geq 1$  erklären wir  $\partial_q$  durch die Vorschrift, daß für jeden singulären  $q$ -Simplex  $\sigma$  gelten soll

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ k^i$$

Natürlich sind die Elemente von  $S_q X$  eigentlich formale  $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen von  $q$ -Simplizes und die Definition sagt uns, daß wir unseren auf den Simplizes definierten Randoperator  $\partial$  linear auf alle Ketten auszudehnen haben.



Eine singuläre 1-Kette in der Papierebene. Das Bild von  $(0, 1) \in \Delta_1$  ist jeweils durch eine Pfeilspitze kenntlich gemacht. Die Parametrisierung dieser ganzen Würmer kann ich nicht darstellen. Es werden im allgemeinen auch welche darunter sein, deren Bild beliebige Kompakta der Papierebene sind, vergleiche [7.5.32](#). Der Rand ist die formale Summe “Endpunkte minus Anfangspunkte”.



Versuch der Darstellung eines singulären 2-Simplex mit seinem Rand. Die Zahlen an den Ecken der Dreiecksfläche links zeigen, wohin die Vektoren der Standardbasis  $e_0, e_1, e_2$  des  $\mathbb{R}^3$ , deren konvexe Hülle ja der Standardsimplex  $\Delta_2$  ist, abgebildet werden. Es ist in diesem Zusammenhang bequem und üblich, die Nummerierung der Standardbasis um Eins zu verschieben und den ersten Vektor der Standardbasis als  $e_0$  zu bezeichnen.

**Lemma 1.2.6.** Es gilt  $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ .

*Beweis.* Wir müssen nur für jeden  $q$ -Simplex  $\sigma$  mit  $q \geq 2$  prüfen, daß gilt  $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = 0$ . Nun prüft man sofort, daß gilt  $k_q^i \circ k_{q-1}^j = k_q^j \circ k_{q-1}^{i-1}$  falls  $i > j$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) &= \partial_{q-1} \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ k^i \\ &= \sum_{0 \leq i \leq q, 0 \leq j \leq q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ k^i \circ k^j \end{aligned}$$

und wir sehen, daß sich in dieser Doppelsumme die Terme mit  $i > j$  und die Terme mit  $i \leq j$  gegenseitig aufheben.  $\square$

**Definition 1.2.7.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir definieren

$Z_q X := \ker(\partial_q : S_q X \rightarrow S_{q-1} X)$ , die Gruppe der **singulären  $q$ -Zykel**;

$B_q X := \text{im } \partial_{q+1}$  die Gruppe der **singulären  $q$ -Ränder** (engl. boundaries);

$H_q X := Z_q X / B_q X$  die  **$q$ -te singuläre Homologiegruppe** von  $X$ .

Die Nebenklasse in  $H_q X$  eines Zyklus  $c \in Z_q X$  heißt seine **Homologieklass**e und wird mit  $[c] \in H_q X$  bezeichnet.

1.2.8. Die Zykel und Ränder sind natürlich Untergruppen in der Gruppe aller Ketten, nach 1.2.6 gilt genauer  $B_q X \subset Z_q X \subset S_q X$ . Deshalb ist es auch überhaupt nur möglich, die Quotientengruppe  $H_q X = Z_q X / B_q X$  zu bilden.

1.2.9. Später werden wir noch andere Homologietheorien kennenlernen. Die hier vorgestellte Theorie heißt genauer die **singuläre Homologie mit ganzzahligen Koeffizienten**. Wollen wir besonders betonen, daß wir die singuläre Homologie eines topologischen Raums meinen, schreiben wir statt  $H_q X$  genauer  $H_q^{\text{sing}} X$ . Statt Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  können wir als Koeffizienten in unseren formalen Linearkombinationen von Simplizes auch Elemente einer beliebigen abelschen Gruppe  $G$  zulassen und erhalten dann auf dieselbe Weise weitere abelsche Gruppen, die die **singulären Homologiegruppen von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$**  heißen und  $H_q(X; G)$  notiert werden.

1.2.10. Auf den ersten Blick sehen unsere Homologiegruppen recht unhandlich aus: Es sind Quotienten einer riesigen abelschen Gruppe durch eine fast ebenso riesige Untergruppe. Wir werden aber sehen, daß unsere  $H_q$  so schöne Eigenschaften haben, daß man sie dennoch für viele interessante Räume sehr explizit berechnen und verstehen kann.

**Beispiel 1.2.11 (Homologie eines Punktes).** Für den einpunktigen Raum  $X = \text{pt}$  gilt  $H_q(\text{pt}) = 0$  für  $q \neq 0$ . Des weiteren ist der einzige Nullsimplex  $\sigma : \Delta_0 \rightarrow \text{pt}$  ein Zykel und die Vorschrift  $1 \mapsto [\sigma]$  liefert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H_0(\text{pt})$$

In der Tat gibt es für jedes  $q \geq 0$  genau einen  $q$ -Simplex in  $\text{pt}$ , also gilt  $S_q(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}$  für alle  $q \geq 0$  und die Randabbildung  $\partial_q$  verschwindet für  $q$  ungerade und  $q \leq 0$ , ist aber ein Isomorphismus für  $q \geq 2$  gerade.

**Beispiel 1.2.12 (Homologie eines Koproducts).** Ist  $X = \bigsqcup X_w$  die Zerlegung eines topologischen Raums  $X$  in seine Wegzusammenhangskomponenten, so sind die hoffentlich offensichtlichen Isomorphismen  $\bigoplus S_q X_w \xrightarrow{\sim} S_q X$  verträglich mit den Randoperatoren und induzieren folglich Isomorphismen

$$\bigoplus H_q X_w \xrightarrow{\sim} H_q X$$

**Beispiel 1.2.13 (Nullte Homologie).** Für jeden topologischen Raum  $X$  faktoriisiert die Abbildung  $X \rightarrow H_0 X$ , die jedem Punkt die Homologiekategorie des konstanten Nullsimplex mit besagtem Punkt als Wert zuordnet, über die Menge  $\pi_0(X)$  der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  und induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} H_0 X$$

zwischen der freien abelschen Gruppe über der Menge  $\pi_0(X)$  der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  und der nullten Homologie von  $X$ . In der Tat reicht es nach dem vorhergehenden Beispiel 1.2.12, das für  $X$  wegzusammenhängend zu prüfen. Wir haben jedoch eine natürliche Abbildung, die sogenannte **Augmentation**

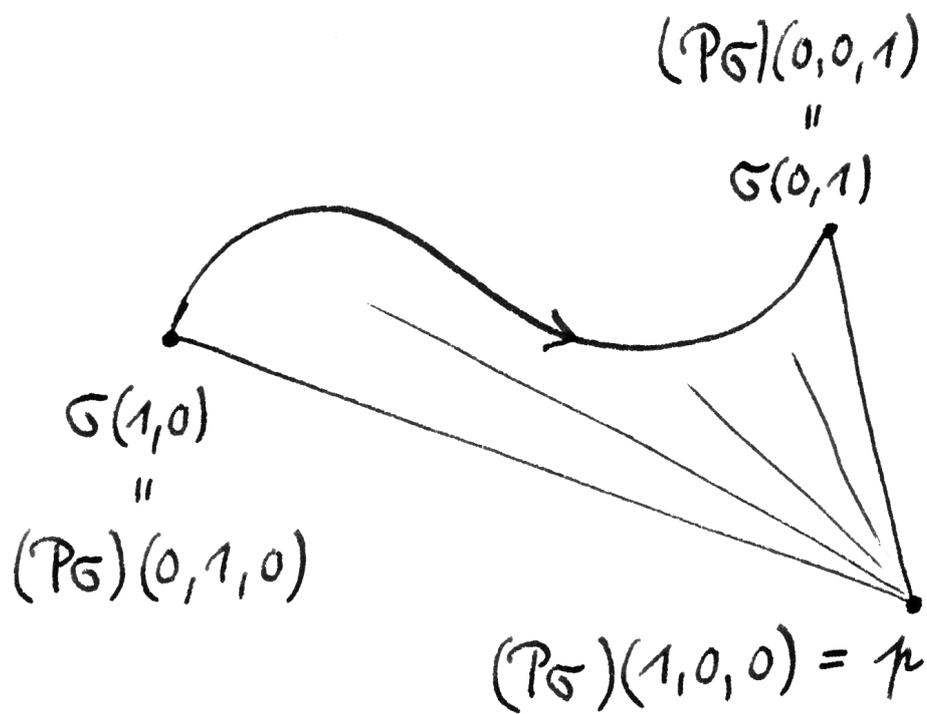
$$\begin{aligned} \varepsilon : S_0 X &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum a_x x &\mapsto \sum a_x \end{aligned}$$

und es reicht, für wegzusammenhängendes  $X$  die Formel  $\ker \varepsilon = \text{im } \partial_1$  zu zeigen. Nun wird aber  $\text{im } \partial_1$  erzeugt von allen formalen Summen  $x - y$  mit  $x, y \in X$ , denn je zwei Punkte lassen sich durch einen Weg verbinden. Daraus folgt dann sofort  $\ker \varepsilon = \text{im } \partial_1$ .

**Lemma 1.2.14 (Homologie konvexer Mengen).** Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine konvexe Teilmenge, so gilt  $H_q K = 0$  für  $q > 0$ .

*Beweis.* Ist  $K$  leer, so ist eh nichts zu zeigen. Sonst zeichnen wir einen beliebigen Punkt  $p \in K$  aus und definieren für  $q \geq 0$  den **Prismen-Operator**

$$P = P_q : S_q K \rightarrow S_{q+1} K$$



Ein 1-Simplex  $\sigma$  und der daraus durch Anwenden des Prismenoperators zu einem Punkt  $p$  entstehende 2-Simplex  $P\sigma$ .

der “jeden  $q$ -Simplex durch Verbinden mit dem ausgezeichneten Punkt  $p$  zu einem  $(q+1)$ -Simplex erweitert,” ganz ähnlich wie beim Beweis von 1.1.9. Formal definieren wir  $P$  auf Simplizes  $\sigma : \Delta_q \rightarrow K$  dadurch, daß  $P\sigma$  der Simplex  $P\sigma : \Delta_{q+1} \rightarrow K$  sein soll mit  $(P\sigma)(1 - \tau, \tau x_0, \dots, \tau x_q) = (1 - \tau)p + \tau\sigma(x_0, \dots, x_q)$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ . Hier ist  $P\sigma$  stetig, da  $[0, 1] \times \Delta_q \rightarrow \Delta_{q+1}$ ,  $(\tau, x_0, \dots, x_q) \mapsto (1 - \tau, \tau x_0, \dots, \tau x_q)$  als stetige Surjektion eines Kompaktums auf einen Hausdorffraum nach 3.4.17 final ist. Nun setzen wir  $P$  linear auf Ketten fort und prüfen die Relation  $\partial P + P\partial = \text{id} : S_q K \rightarrow S_q K$  für  $q > 0$ . In der Tat gilt ja

$$\begin{aligned}\partial(P\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq q+1} (-1)^j (P\sigma) \circ k_{q+1}^j \\ P(\partial\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq q} (-1)^j P(\sigma \circ k_q^j)\end{aligned}$$

und prüft leicht die Formeln  $(P\sigma) \circ k_{q+1}^0 = \sigma$  und  $(P\sigma) \circ k_{q+1}^j = P(\sigma \circ k_q^{j-1})$  für  $1 \leq j \leq q+1$ . Also haben wir in der Tat  $\partial P + P\partial = \text{id}$  auf  $q$ -Ketten mit  $q > 0$ , damit gilt im Fall  $q > 0$  für jeden Zykel  $z \in Z_q K$  schon  $\partial Pz = z$  und  $z$  ist ein Rand.  $\square$

*Ergänzung 1.2.15.* Wir können auch allgemeiner für eine beliebige stetige Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(0) = 0$  und  $f(1) = 1$  die Variante  $P_f$  des Prismenoperators betrachten mit  $(P_f\sigma)((1 - \tau), \tau x_0, \dots, \tau x_q) = (1 - f(\tau))p + f(\tau)\sigma(x_0, \dots, x_q)$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ . Nehmen wir für  $f$  insbesondere eine glatte Abbildung, die in einer Umgebung von  $\tau = 1$  konstant den Wert Eins annimmt, so macht diese Variante des Prismenoperators glatte Simplizes zu glatten Simplizes. Das wird uns insbesondere im Zusammenhang mit dem Beweis des Satzes von de Rham in ?? helfen.

*Ergänzung 1.2.16.* Diese Ergänzung ist für Leser gedacht, die bereits mit den Grundlagen der Funktionentheorie vertraut sind. Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\sigma : \Delta_1 \rightarrow U$  ein 1-Simplex erklären wir das Integral  $\int_\sigma f(z) dz$ , indem wir  $\sigma$  mittels des durch die Projektion auf die zweite Koordinate gegebenen Homöomorphismus  $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  als Weg auffassen und darüber integrieren im Sinne von 1.4.9. Lineare Fortsetzung liefert unmittelbar ein Integralbegriff für holomorphe Funktionen über 1-Ketten, und unter Beachtung der Homotopie-Invarianz des Wegintegrals 1.4.11 erhalten wir so sogar eine wohlbestimmte Paarung

$$\begin{aligned}H_1(U) \times \mathcal{O}^{\text{an}}(U) &\rightarrow \mathbb{C} \\ ([\alpha], f) &\mapsto \int_\alpha f(z) dz\end{aligned}$$

zwischen der ersten Homologiegruppe und der additiven Gruppe der holomorphen Funktionen auf  $U$ . Diese Paarung schreiben wir dann auch für jede Homologieklasse  $b$  in der Form  $(b, f) \mapsto \int_b f(z) dz$ .

### 1.3 Funktorialität der Homologie

1.3.1. In diesem Abschnitt erklären wir für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  Gruppenhomomorphismen  $H_q(f) = f_* : H_q X \rightarrow H_q Y$  derart, daß unsere Homologiegruppen  $H_q$  Funktoren  $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen werden.

**Definition 1.3.2.** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  definieren wir Gruppenhomomorphismen  $S_q f : S_q X \rightarrow S_q Y$ , indem wir jedem Simplex  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  den Simplex  $f \circ \sigma : \Delta_q \rightarrow Y$  zuordnen, und linear auf  $S_q X$  fortsetzen.

**Lemma 1.3.3.** Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  stetig gilt  $\partial_q \circ S_q f = S_{q-1} f \circ \partial_q$ , d.h. es kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_q X & \xrightarrow{S_q f} & S_q Y \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ S_{q-1} X & \xrightarrow{S_{q-1} f} & S_{q-1} Y \end{array}$$

*Beweis.* Wir müssen das nur auf jedem  $q$ -Simplex  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  prüfen. Es gilt aber in der Tat

$$\begin{aligned} (\partial_q \circ S_q f)(\sigma) &= \partial_q(f \circ \sigma) \\ &= \sum (-1)^i f \circ \sigma \circ k_q^i \\ &= (S_{q-1} f \circ \partial_q)(\sigma) \end{aligned} \quad \square$$

1.3.4. Das Lemma zeigt, daß  $S_q f$  Zykel auf Zykel und Ränder auf Ränder abbildet. Für einen  $q$ -Zykel  $z$  in  $X$  hängt also die Homologiekategorie seines Bildes  $(S_q f)(z)$  in  $Y$  nur von der Homologiekategorie von  $z$  ab. Wir erhalten somit einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} H_q f : H_q X & \rightarrow & H_q Y \\ [z] & \mapsto & [(S_q f)(z)] \end{array}$$

Man sieht leicht, daß gilt  $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$  und  $H_q(\text{id}) = \text{id}$ , also erhalten wir für alle  $q \in \mathbb{Z}$  einen Funktor  $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ . Oft verwenden wir auch die Abkürzung  $H_q(f) = f_*$ .

**Übung 1.3.5 (Zerlegung der Homologie).** Sei  $X = \bigsqcup X_w$  eine Zerlegung von  $X$  in paarweise disjunkte offene Teilmengen und  $i_w : X_w \hookrightarrow X$  die jeweilige Einbettung. So definieren die  $H_q(i_w) : H_q(X_w) \rightarrow H_q(X)$  einen Isomorphismus  $\bigoplus H_q(X_w) \xrightarrow{\sim} H_q(X)$ .

1.3.6. Wir wiederholen die vorhergehenden Argumente noch einmal in einer ausgefeilten Sprache und führen dazu die Kategorie der "Kettenkomplexe" ein.

**Definition 1.3.7.** Ein **Kettenkomplex** oder **Komplex von abelschen Gruppen** ist ein Paar  $C = (C, \partial)$ , wo  $C$  eine Familie  $(C_q)_{q \in \mathbb{Z}}$  abelscher Gruppen ist und  $\partial$  eine Familie von Gruppenhomomorphismen  $\partial_q = \partial_q^C : C_q \rightarrow C_{q-1}$  für  $q \in \mathbb{Z}$  derart, daß gilt

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0 \quad \text{für alle } q.$$

Ein Morphismus  $s : C \rightarrow D$  von Kettenkomplexen, auch **Kettenabbildung** genannt, ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen  $s_q : C_q \rightarrow D_q$  derart, daß gilt  $\partial_q^D \circ s_q = s_{q-1} \circ \partial_q^C$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$  oder, etwas salopp geschrieben,  $\partial \circ s = s \circ \partial$ . Wir erhalten so die **Kategorie**  $\text{Ket} = \text{Ket}(\text{Ab})$  **aller Komplexe von abelschen Gruppen**. Darin gibt es ein finales und kofinales Objekt, den **Nullkomplex**, bei dem eben alle Gruppen und Differentiale Null sind. Analog erklärt man für einen beliebigen Ring  $R$  die Kategorie  $\text{Ket}(R\text{-Mod})$  aller Komplexe von  $R$ -Moduln.

1.3.8. Für diese Struktur ist auch noch eine andere Terminologie üblich. Ganz allgemein nennt man eine abelsche Gruppe  $C$  mit einer Zerlegung  $C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C_q$  eine **graduierete abelsche Gruppe** und ist zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus  $\partial : C \rightarrow C$  gegeben mit  $\partial(C_q) \subset C_{q-1}$  und  $\partial^2 = 0$ , so nennt man das Paar  $(C, \partial)$  eine **differentielle graduierete abelsche Gruppe** oder kurz eine **dg-Gruppe** mit **Differential**  $\partial$ . Analog definieren wir die Kategorie der differentiellen graduiereten Moduln über einem Ring  $R$  und notieren sie  $\text{dgMod}_R$ , so daß also gilt  $\text{Ket}(R\text{-Mod}) = \text{dgMod}_R$ . Manchmal arbeitet man auch allgemeiner mit dem Begriff einer **differentiellen abelschen Gruppe**, womit schlicht ein Paar  $(A, \partial)$  gemeint ist bestehend aus einer abelschen Gruppe  $A$  und einem Gruppenhomomorphismus  $\partial : A \rightarrow A$  mit der Eigenschaft  $\partial^2 = 0$ . Natürlich könnte man auch differentielle graduierete abelsche Gruppen betrachten, bei denen das Differential einen anderen "Grad" hätte als in unserer Definition, aber die kommen seltener vor und wir blenden sie deshalb vorerst einmal aus.

*Beispiel 1.3.9.* Für jeden topologischen Raum  $X$  ist der Komplex der singulären Ketten  $(SX, \partial)$  ein Kettenkomplex. Für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bilden nach Lemma 1.2.6 die  $S_q(f)$  eine Kettenabbildung  $Sf : SX \rightarrow SY$ . Da gilt  $S(f \circ g) = S(f) \circ S(g)$  sowie  $S(\text{id}) = \text{id}$ , erhalten wir so einen Funktor

$$S : \text{Top} \rightarrow \text{Ket}$$

**Definition 1.3.10.** Für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  definieren wir einen Funktor, die  **$q$ -te Homologiegruppe eines Kettenkomplexes**

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_q : \text{Ket} &\rightarrow \text{Ab} \\ C &\mapsto \mathcal{H}_q(C) := \ker \partial_q / \text{im } \partial_{q+1} \end{aligned}$$

als den Quotienten vom Kern des Differentials nach seinem Bild. Auf den Objekten ist das schon mal in Ordnung und wir müssen nur noch erklären, wie

ein Morphismus von Kettenkomplexen  $s : C \rightarrow D$  Morphismen auf der Homologie  $\mathcal{H}_q(s) : \mathcal{H}_q(C) \rightarrow \mathcal{H}_q(D)$  definiert. Aus  $\partial^D \circ s = s \circ \partial^C$  folgt aber  $s(\text{im } \partial^C) \subset \text{im } \partial^D$ ,  $s(\ker \partial^C) \subset \ker \partial^D$  und damit induziert  $s$  Morphismen  $\mathcal{H}_q(s) : \mathcal{H}_q(C) \rightarrow \mathcal{H}_q(D)$ . Wieder sieht man leicht, daß gilt  $\mathcal{H}_q(s \circ t) = \mathcal{H}_q(s) \circ \mathcal{H}_q(t)$  und  $\mathcal{H}_q(\text{id}) = \text{id}$ , unser  $\mathcal{H}_q$  ist also ein Funktor für alle  $q \in \mathbb{Z}$ . Manchmal betrachten wir auch den Funktor

$$\mathcal{H} : \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$$

der einem Komplex die Gesamtheit seiner Homologiegruppen zuordnet, aufgefaßt als Komplex mit Differential Null. Man kann auch für eine differentielle abelsche Gruppe  $(A, \partial)$  ihre Homologie betrachten, darunter versteht man dann die abelsche Gruppe  $\mathcal{H}A = \ker \partial / \text{im } \partial$ , die in diesem Fall keine Graduierung trägt.

1.3.11. Wir erhalten mit diesen Begriffsbildungen und Notationen unsere Funktoren der singulären Homologiegruppen  $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  als die Verknüpfungen  $H_q = H_q^{\text{sing}} = \mathcal{H}_q \circ S$  von Funktoren

$$\text{Top} \xrightarrow{S} \text{Ket} \xrightarrow{\mathcal{H}_q} \text{Ab}$$

Man überträgt die Begriffsbildungen **Zykel**, **Rand**, **Homologieklass**e auf beliebige Kettenkomplexe  $C$  und schreibt  $\ker \partial_q = \mathcal{Z}_q C$  für die Zykel,  $\text{im } \partial_{q+1} = \mathcal{B}_q C$  für die Ränder und  $[c] \in \mathcal{H}_q C$  für die Homologieklass eines Zyklus  $c \in \mathcal{Z}_q C$ .

*Übung 1.3.12.* Ist  $\pi : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung mit endlichen Fasern, so erhält man eine Kettenabbildung  $\pi^! : SX \rightarrow SY$ , indem man jedem singulären Simplex die Summe seiner Lifts zuordnet. Man zeige, daß für die auf der Homologie induzierten **Transferabbildungen**

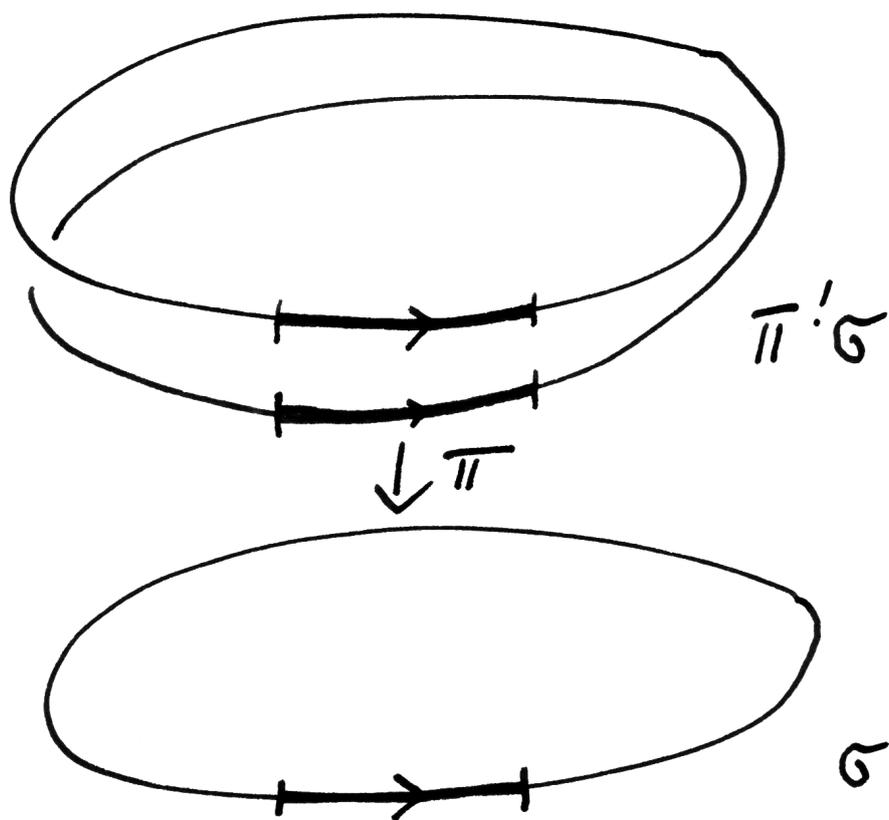
$$\pi^! : H_q X \rightarrow H_q Y$$

im Fall einer  $n$ -blättrigen Überlagerung gilt  $(H_q \pi) \circ \pi^! = n \cdot \text{id} : H_q X \rightarrow H_q X$ . Ist unsere Überlagerung normal und ist  $G$  ihre Gruppe von Decktransformationen, so zeige man weiter  $\pi^! \circ (H_q \pi) = \sum_{g \in G} H_q g : H_q Y \rightarrow H_q Y$ .

*Übung 1.3.13.* Man erkläre, wie für einen festen topologischen Raum  $X$  die Homologiegruppen mit Koeffizienten aus 1.2.9 als Funktoren  $\text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ ,  $M \mapsto H_q(X; M)$  aufgefaßt werden können, und wieso damit für jeden Ring  $R$  die Gruppen  $H_q(X; R)$  in natürlicher Weise zu  $R$ -Moduln werden.

## 1.4 Homotopie-Invarianz

**Satz 1.4.1 (Homotopie-Invarianz).** *Homotope stetige Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung auf der Homologie.*



Der Transfer eines singulären Eins-Simplex unter einer zweiblättrigen Überlagerung der Kreislinie.

1.4.2. Dieser Satz ist schon ein sehr starkes Hilfsmittel zur Berechnung der singulären Homologiegruppen. Er impliziert zum Beispiel, daß ein zusammenziehbarer Raum dieselbe Homologie hat wie ein Punkt. Wir geben zwei Beweise: Erst einen mehr rechnerischen Beweis, und dann einen mehr konzeptionellen Beweis, der jedoch im Gegensatz zu unserem rechnerischen Beweis auf der Kenntnis der Homologie konvexer Mengen 1.2.14 aufbaut. Wir werden das im Folgenden durchgeführte konzeptionelle Beweisverfahren später formalisieren zum “Satz über azyklische Modelle” 3.6.15 und damit auch die sogenannte “Künneth-Formel” über die Homologie von Produkten zeigen. Aus dieser Formel kann die Homotopie-Invarianz im übrigen auch unschwer hergeleitet werden.

*Erster Beweis.* Bezeichne  $f, g : X \rightarrow Y$  unsere homotopen stetigen Abbildungen, so behauptet der Satz für alle  $q$  die Gleichheit  $H_q(f) = H_q(g)$  von Abbildungen  $H_q X \rightarrow H_q Y$ . Es gilt also zu zeigen, daß für jeden Zykel  $z \in Z_q X$  die Differenz  $(S_q f)(z) - (S_q g)(z)$  ein Rand in  $Y$  ist. Anschaulich ist das recht klar: Unsere Differenz ist eben “der Rand des Gebiets, das von besagtem Zykel während der Homotopie von  $f$  nach  $g$  überstrichen wird”. Etwas formaler sei  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Bezeichne  $\omega_\nu : \Delta_{q+1} \rightarrow \Delta_q \times [0, 1]$  diejenige affine Abbildung, die die Ecken  $e_0, \dots, e_{q+1}$  unseres Standardsimplex der Reihe nach abbildet auf  $(e_0, 0), \dots, (e_\nu, 0), (e_\nu, 1), \dots, (e_q, 1)$ . Bezeichne  $\delta_q : S_q X \rightarrow S_{q+1} Y$  die Abbildung, die auf Simplex gegeben wird durch

$$\delta_q(\sigma) = \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \omega_\nu$$

Nun prüfen wir für die so gegebenen Abbildungen  $\delta_q$  die Identitäten  $\partial\delta + \delta\partial = S_q g - S_q f$ . Sobald das getan ist, sind wir fertig, denn dann gilt für jeden Zykel  $z \in Z_q X$  die Formel  $(S_q g)(z) - (S_q f)(z) = \partial\delta z$  und unsere Differenz ist in der Tat ein Rand. Für den Nachweis unserer Identitäten kürzen wir  $(e_\nu, 0) = v_\nu$  und  $(e_\nu, 1) = w_\nu$  ab und vereinbaren für  $q + 1$  Punkte  $a, b, \dots, c$  einer konvexen Teilmenge eines reellen Raums die Notationen  $[a, b, \dots, c]$  für die Abbildung von  $\Delta_q$  in unsere konvexe Teilmenge, die die Ecken der Reihe nach auf diese Punkte wirft. Dann haben wir also  $\omega_\nu = [v_0, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, w_q]$  und

$$\begin{aligned} \partial\delta_q(\sigma) &= \sum_{\nu \geq \mu} (-1)^\nu (-1)^\mu h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, \hat{v}_\mu, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, w_q] \\ &\quad + \sum_{\nu \leq \mu} (-1)^\nu (-1)^{\mu+1} h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, \hat{w}_\mu, \dots, w_q] \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich  $\partial(\sigma) = \sum_\mu (-1)^\mu \sigma[e_0, \dots, \hat{e}_\mu, \dots, e_q]$  und damit

$$\begin{aligned} \delta_{q-1}\partial(\sigma) &= \sum_{\nu > \mu} (-1)^\nu (-1)^{\mu+1} h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, \hat{v}_\mu, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, w_q] \\ &\quad + \sum_{\nu < \mu} (-1)^\nu (-1)^\mu h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, \hat{w}_\mu, \dots, w_q] \end{aligned}$$

Nach dem Aufaddieren bleiben nur noch die Terme mit  $\nu = \mu$  der oberen Summe übrig, und auch diese löschen sich paarweise aus bis auf den Summanden mit  $\nu = \mu = 0$  vorne und den Summanden mit  $\nu = \mu = q$  hinten. Da nun aber gilt  $h(\sigma \times \text{id})[w_0, \dots, w_q] = g\sigma$  und  $h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, v_q] = f\sigma$ , folgt die Behauptung.  $\square$

1.4.3. Es mag der Anschauung helfen, sich klarzumachen, daß die Bilder der  $\omega_\nu$  die vollen Simplexes maximaler Dimension einer Triangulierung von  $\Delta_q \times [0, 1]$  sind. Für die formale Argumentation ist das jedoch belanglos.

*Zweiter Beweis.* Sei wieder  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Bezeichnen wir die Inklusionen  $X \rightarrow X \times [0, 1]$ ,  $x \mapsto (x, t)$  mit  $i_t$ , so gilt  $f = h \circ i_0$  und  $g = h \circ i_1$ . Es reicht nun,  $H_q(i_0) = H_q(i_1)$  zu zeigen, denn daraus folgt mit der Funktorialität der Homologie schon

$$H_q(f) = H_q(h) \circ H_q(i_0) = H_q(h) \circ H_q(i_1) = H_q(g)$$

Die Formel  $H_q(i_0) = H_q(i_1)$  bedeutet, daß für jeden Zykel  $z \in Z_q X$  die Differenz seiner Bilder  $(S_q i_0)(z) - (S_q i_1)(z)$  ein Rand ist. Um das nachzuweisen reicht es, eine Familie von Morphismen

$$\delta = \delta_q = \delta_q^X : S_q X \rightarrow S_{q+1}(X \times [0, 1])$$

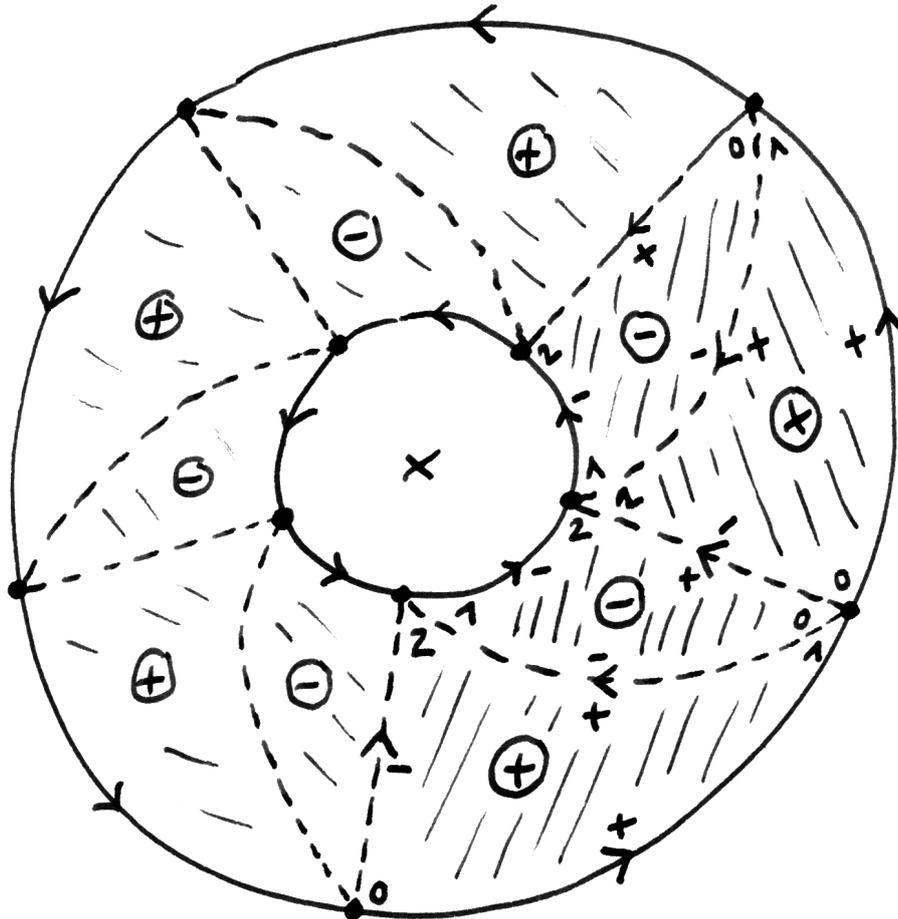
für  $q \in \mathbb{Z}$  zu konstruieren derart, daß gilt  $\partial\delta + \delta\partial = S_q i_1 - S_q i_0$ , denn dann ist  $(S_q i_1)(z) - (S_q i_0)(z) = \partial\delta z$  ein Rand für jeden Zykel  $z \in Z_q X$ . Eine Möglichkeit, derartige Morphismen explizit anzugeben, liefert die explizite Formel

$$\delta_q \sigma = \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu (\sigma \times \text{id}) \omega_\nu$$

in den Notationen unseres ersten Beweises. Ich will jedoch auch noch einen mehr konzeptionellen Zugang erklären. Es ist bequem, solch eine Familie zu konstruieren als Transformation, wo wir beide Seiten auffassen als Funktoren in  $X$  von den topologischen Räumen in die abelschen Gruppen. Dann können wir uns nämlich stützen auf eine Variante des Yoneda-Lemmas. Bezeichne dazu  $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$  den **tautologischen  $q$ -Simplex**  $\text{id} : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ .

**Lemma 1.4.4.** *Für jeden Funktor  $G : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  liefert das Auswerten auf dem tautologischen  $q$ -Simplex eine Bijektion zwischen der Menge der natürlichen Transformationen von  $S_q$  nach  $G$  und der Menge  $G(\Delta_q)$ , in Formeln*

$$\begin{array}{ccc} \text{Trans}(S_q, G) & \xrightarrow{\sim} & G(\Delta_q) \\ \delta & \mapsto & \delta_{\Delta_q}(\tau_q) \end{array}$$



Dies Bild zeigt zwei homotope Abbildungen der Kreislinie in die punktierte Ebene und die Bilder desselben aus der formalen Summe von fünf singulären Eins-Simplizes bestehenden Eins-Zykel unter diesen beiden Abbildungen. Des weiteren ist in der Abbildung eine Zweikette in der punktierten Ebene angedeutet, gegeben durch die formale Summe von insgesamt zehn singulären Zwei-Simplizes, davon die Hälfte mit dem Koeffizienten  $(-1)$ , deren Rand gerade die Differenz unserer beiden Eins-Zykel ist. So erkennt man, daß unsere beiden Eins-Zykel dieselbe Homologiekategorie in der punktierten Ebene repräsentieren.

*Beispiel 1.4.5.* Der Randoperator  $\partial : S_q \rightarrow S_{q-1}$  entspricht unter dieser Bijektion der Kette  $\partial\tau_q \in S_{q-1}(\Delta_q)$ .

*Beweis.* Das gilt auch viel allgemeiner: Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\Delta \in \mathcal{C}$  ein Objekt, so können wir den Funktor  $\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, \_ ) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  bilden, und ist  $G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  ein anderer Funktor, so liefert die Abbildungsvorschrift  $\delta \mapsto \delta_\Delta(\text{id}_\Delta)$  eine Bijektion  $\text{Trans}(\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, \_ ), G) \xrightarrow{\sim} G(\Delta)$ . Wir überlassen die Details dem Leser zur Übung, man orientiere sich am Yoneda-Lemma 7.6.2.  $\square$

Wir hatten gesehen, daß wir nur für alle topologischen Räume  $X$  und alle  $q \in \mathbb{Z}$  Morphismen  $\delta = \delta_q : S_q X \rightarrow S_{q+1}(X \times [0, 1])$  konstruieren müssen derart, daß gilt

$$\partial\delta_q + \delta_{q-1}\partial = S_q i_1 - S_q i_0 \quad (*)_q$$

Wir konstruieren die  $\delta_q$  als Transformationen  $\delta_q : S_q \Rightarrow F_{q+1}$  in den Funktor  $F_{q+1} : X \mapsto S_{q+1}(X \times [0, 1])$  von oben. Sie werden dann nach 1.4.4 schon durch die Angabe jeweils eines Elements  $\delta_q(\tau_q) = V_q \in S_{q+1}(\Delta_q \times [0, 1])$  eindeutig festgelegt und wir müssen nur unsere  $V_q$  so wählen, daß die obigen Gleichungen  $(*)_q$  erfüllt sind. Da  $(*)_q$  aber eine Gleichung von Transformationen  $S_q \Rightarrow F_q$  ist, gilt sie wieder nach dem Lemma immer, wenn sie nach Auswerten auf dem tautologischen Simplex  $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$  gilt, also genau dann, wenn gilt

$$(\partial\delta_q + \delta_{q-1}\partial)(\tau_q) = (S_q i_1 - S_q i_0)(\tau_q)$$

in  $S_q(\Delta_q \times [0, 1])$ . Für  $V_q = \delta_q(\tau_q)$  bedeutet das genau

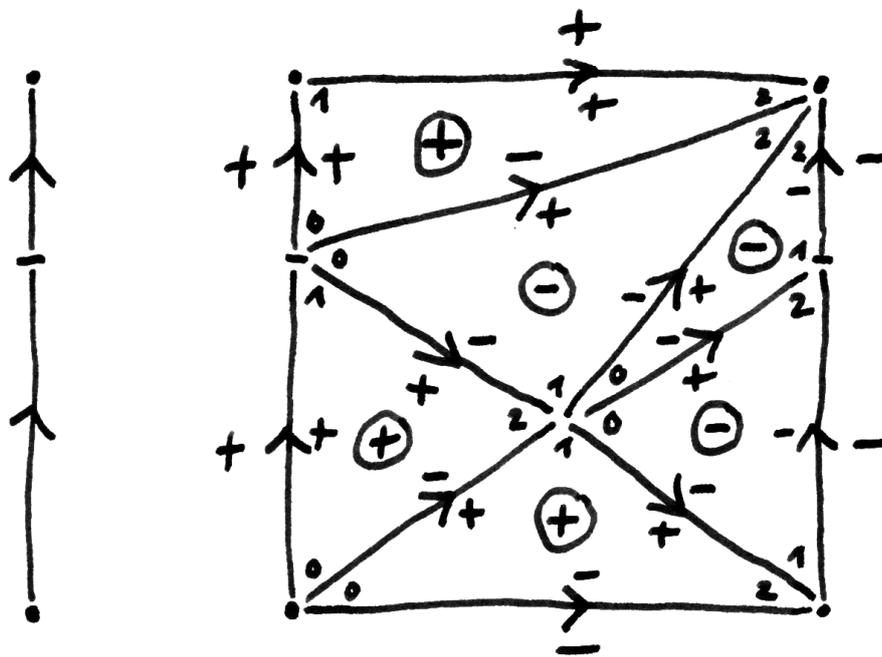
$$\partial V_q = (S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial)(\tau_q)$$

Man beachte, daß hier die rechte Seite von  $\delta_{q-1}$ , also von  $V_{q-1}$  abhängt. Wir wählen nun mögliche  $V_q$  induktiv und nehmen an, daß die  $V_\pi$  für  $\pi \leq q-1$  schon konstruiert sind und die Gleichungen  $(*)_\pi$  für  $\pi \leq q-1$  gelten. Als Basis der Induktion dürfen wir  $V_\pi = 0$  für  $\pi < 0$  nehmen und als  $V_0$  irgendeinen singulären Simplex  $\Delta_1 \rightarrow \Delta_0 \times [0, 1]$ , der die Endpunkte des Geradensegments  $\Delta_1$  “in der richtigen Reihenfolge” auf die Endpunkte des Geradensegments  $\Delta_0 \times [0, 1]$  abbildet. Da nun nach Lemma 1.2.14 für  $q > 0$  gilt  $H_q(\Delta_q \times [0, 1]) = 0$ , können wir eine  $q$ -Kette in  $\Delta_q \times [0, 1]$  für  $q > 0$  als Rand schreiben genau dann, wenn sie ein Zykel ist. Wir finden für  $q > 0$  also unser  $V_q$  wie gewünscht genau dann, wenn gilt

$$\partial(S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial)(\tau_q) = 0$$

Das zeigen wir induktiv, indem wir unter Verwendung von  $(*)_{q-1}$  rechnen

$$\begin{aligned} \partial(S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial) &= (S_{q-1} i_1 - S_{q-1} i_0 - \partial\delta_{q-1})\partial \\ &= \delta_{q-2}\partial\partial \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$



Eine mögliche Wahl von  $V_0$ , die anders ist als im Beweis vorgeschlagen, und dazu eine mögliche Wahl von  $V_1$

**Definition 1.4.6.** Zwei Kettenabbildungen  $f, g : A \rightarrow B$  von Kettenkomplexen heißen **kettenhomotop** oder kurz **homotop** genau dann, wenn es eine Familie  $\delta_q : A_q \rightarrow B_{q+1}$  von Gruppenhomomorphismen gibt mit  $f_q - g_q = \partial_{q+1}\delta_q + \delta_{q-1}\partial_q$  für alle  $q$ . Wir schreiben dafür auch manchmal  $\delta : f \sim g$ .

1.4.7. Eine Kettenabbildung heißt **nullhomotop** genau dann, wenn sie homotop ist zur Nullabbildung. Per definitionem sind zwei Kettenabbildungen kettenhomotop genau dann, wenn ihre Differenz nullhomotop ist. Ist weiter  $g \circ h$  eine Verknüpfung von Kettenabbildungen und ist eine der beiden nullhomotop, so auch die Verknüpfung, wie Sie in 1.4.9 selbst prüfen sollen. Wir können deshalb die **Homotopiekategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen** definieren, mit Kettenkomplexen von abelschen Gruppen als Objekten und Homotopieklassen von Kettenabbildungen als Morphismen. Wir notieren sie  $\text{Hot}(\text{Ab})$  oder  $\text{Hot}_{\text{Ab}}$  oder auch einfach nur  $\text{Hot}$ , wenn aus dem Kontext klar sei sollte, daß nicht die Homotopiekategorie topologischer Räume gemeint ist. Isomorphismen in einer Homotopiekategorie von Komplexen nennen wir auch **Homotopieäquivalenzen** und notieren sie  $\xrightarrow{\sim}$ . Ein Komplex heißt **nullhomotop** genau dann, wenn er homotopieäquivalent ist zum Nullkomplex.

1.4.8. Unsere Argumente von eben zeigen, daß die Homologiegruppen ganz allgemein Funktoren  $\mathcal{H}_q : \text{Hot}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$  definieren. Weiter haben wir gezeigt, daß homotope Abbildungen  $f, g$  kettenhomotope Abbildungen  $Sf, Sg$  auf den singulären Ketten liefern, genauer erhalten wir für jede Homotopie  $h : f \sim g$  eine Kettenhomotopie  $Sf \sim Sg$  als  $Sh \circ \delta$  mit  $\delta$  wie im Beweis von 1.4.1. Bezeichnen wir wie bisher mit  $\text{Hot}$  die Homotopiekategorie topologischer Räume, so erhalten wir mithin ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \text{Top} & \xrightarrow{S} & \text{Ket}(\text{Ab}) & \xrightarrow{\mathcal{H}_q} & \text{Ab} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \text{Hot} & \xrightarrow{S} & \text{Hot}(\text{Ab}) & \xrightarrow{\mathcal{H}_q} & \text{Ab} \end{array}$$

Insbesondere induziert eine Homotopieäquivalenz stets Isomorphismen auf der Homologie. Nun ist die konstante Abbildung von einem topologischen Raum auf einen Punkt eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn unser Raum zusammenziehbar ist. Da Funktoren Isomorphismen zu Isomorphismen machen, liefert also für jeden zusammenziehbaren Raum  $X$  die konstante Abbildung Isomorphismen von seiner Homologie mit der Homologie eines Punktes. Wir folgern für  $X$  zusammenziehbar  $H_q X \cong \mathbb{Z}$  für  $q = 0$  und Null sonst.

*Übung 1.4.9.* Man zeige, daß die Verknüpfung einer nullhomotopen Kettenabbildung mit einer beliebigen Kettenabbildung wieder nullhomotop ist, und zwar sowohl für das Davorschalten wie auch für das Dahinterschalten.

**Übung 1.4.10 (Hom-Komplex).** Sind  $(C, \partial^C)$  und  $(D, \partial^D)$  Kettenkomplexe, so definieren wir einen Kettenkomplex  $\text{Hom}(C, D)$  durch die Vorschrift

$$(\text{Hom}(C, D))_i = \prod_q \text{Hom}(C_q, D_{q+i})$$

mit Differential  $\partial(f) = \partial^D \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial^C$ , wo wir  $|f| = i$  schreiben für  $f \in (\text{Hom}(C, D))_i$ . Man zeige, daß gilt  $\partial(\partial(f)) = 0$ , daß die Nullzykel des Hom-Komplexes gerade die Kettenabbildungen von  $C$  nach  $D$  sind, in Formeln  $\mathcal{Z}_0 \text{Hom}(C, D) = \text{Ket}(C, D)$ , und daß die nullte Homologie in natürlicher Weise identifiziert werden kann mit dem Raum der Morphismen von  $C$  nach  $D$  in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, in Formeln  $\mathcal{H}_0 \text{Hom}(C, D) = \text{Hot}(C, D)$ . In dieser Weise erhalten wir natürliche Abbildungen

$$\mathcal{H} \text{Hom}(C, D) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}C, \mathcal{H}D)$$

*Ergänzung 1.4.11.* Die Wahl der Vorzeichen in unserem Hom-Komplex mag willkürlich wirken. Sie kann jedoch zurückgeführt werden auf unsere Vorzeichenwahl bei der Definition des Tensorkomplexes 3.4.1: Durch diese Definition wird der Funktor  $\text{Hom}(X, \ ) : \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  festgelegt als der Rechtsadjungierte von  $\otimes X : \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$ , und nach 3.4.13 erhalten wir so gerade das Hom, das wir hier ad hoc definiert haben.

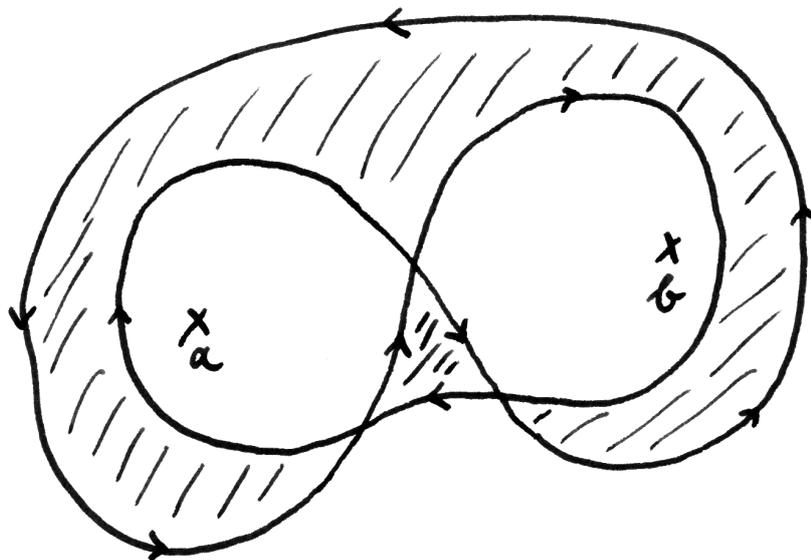
*Übung 1.4.12.* Sei  $C$  ein Komplex von Vektorräumen. Man zeige, daß es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe von Vektorräumen genau einen Isomorphismus  $C \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}C$  gibt, der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation  $\mathcal{H}C \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\mathcal{H}C)$  induziert.

## 1.5 Erste Homologie und Fundamentalgruppe

1.5.1. Der Klarheit halber schreiben wir in diesem Abschnitt anders als sonst  $[[\gamma]]$  für die Homotopieklasse mit festen Endpunkten eines Weges und wie üblich  $[z]$  für die Homologieklasse eines Zyklus. Bezeichne  $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  die Restriktion auf den Standard-1-Simplex  $\Delta_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y = 1\}$  der Projektion auf die zweite Koordinate.

**Satz 1.5.2.** 1. Für jeden punktierten Raum  $(X, x)$  gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus von seiner Fundamentalgruppe in seine erste singuläre Homologiegruppe  $\pi_1(X, x) \rightarrow H_1 X$  mit der Eigenschaft, daß gilt  $[[\gamma]] \mapsto [\gamma \circ c]$  für alle geschlossenen Wege  $\gamma \in \Omega(X, x)$ .

2. Für jeden wegzusammenhängenden punktierten Raum induziert dieser Gruppenhomomorphismus einen Isomorphismus zwischen der Abelisierung nach



Ein geschlossener, nicht zusammenziehbarer, aber dennoch nullhomologer Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Denken wir uns das Mittelkreuz als Basispunkt und bezeichnet  $\alpha$  bzw.  $\beta$  in der Fundamentalgruppe das Umrunden gegen den Uhrzeigersinn von  $a$  bzw.  $b$ , so ist unser Fundamentalgruppe nach 2.3.11 frei erzeugt von  $\alpha$  und  $\beta$  und unser Weg repräsentiert das Element  $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$  in der Fundamentalgruppe.

**2.6.10** der Fundamentalgruppe und der ersten singulären Homologiegruppe, den sogenannten **Hurewicz-Isomorphismus**

$$\pi_1(X, x)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} H_1 X$$

1.5.3. Dieser Isomorphismus hängt von der Wahl unserer Bijektion  $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  ab. Wählen wir hier statt der Projektion auf die zweite Koordinate die Projektion auf die erste Koordinate, so ändert er sein Vorzeichen. Ein geschlossener Weg, der unter der im Satz beschriebenen Abbildung zum Nullelement der ersten Homologiegruppe wird, heißt auch **nullhomolog**.

*Beweis.* 1. Offensichtlich definiert die Vorschrift  $\gamma \mapsto [\gamma \circ c]$  eine Abbildung  $\text{can} : \Omega(X, x) \rightarrow H_1 X$  vom Wegeraum in die erste Homologiegruppe. Um zu zeigen, daß sie auf Homotopieklassen von Wegen konstant ist, geben wir eine alternative Beschreibung. Bezeichne  $\text{Exp} : [0, 1] \rightarrow S^1$  unsere übliche Abbildung  $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ . Da  $\text{Exp}$  nach 3.4.17 final ist, gibt es zu jedem geschlossenen Weg  $\gamma \in \Omega(X, x)$  eine stetige Abbildung  $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow X$  mit  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \text{Exp}$ . Betrachten wir nun in der Kreislinie  $S^1$  den 1-Zykel  $z = \text{Exp} \circ c \in Z_1(S^1)$ , so können wir unsere Abbildung von  $\Omega(X, x)$  nach  $H_1 X$  auch schreiben als

$$\gamma \mapsto [\gamma \circ c] = (H_1 \tilde{\gamma})[z]$$

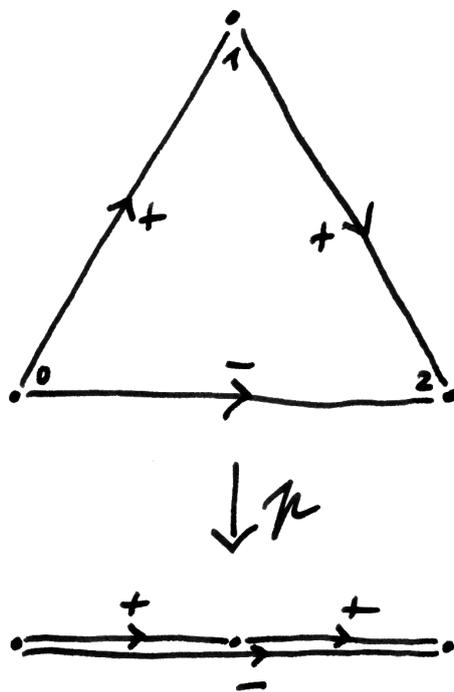
Sind nun  $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$  homotop mit festen Endpunkten, so sind  $\tilde{\gamma}$  und  $\tilde{\beta}$  homotope Abbildungen von  $S^1$  nach  $X$ , da wieder nach 3.4.17 auch  $\text{id} \times \text{Exp} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times S^1$  final ist. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket &\Rightarrow \tilde{\gamma} \simeq \tilde{\beta} \\ &\Rightarrow H_1 \tilde{\gamma} = H_1 \tilde{\beta} \text{ nach Homotopieinvarianz 1.4.1} \\ &\Rightarrow (H_1 \tilde{\gamma})[z] = (H_1 \tilde{\beta})[z] \\ &\Rightarrow [\gamma \circ c] = [\beta \circ c] \end{aligned}$$

Folglich definiert die Vorschrift  $\llbracket \gamma \rrbracket \mapsto [\gamma \circ c]$  in der Tat eine wohlbestimmte Abbildung  $\pi_1(X, x) \rightarrow H_1 X$ . Wir müssen für den ersten Teil nur noch zeigen, daß sie ein Gruppenhomomorphismus ist. Dazu betrachten wir die affine Abbildung  $p : \Delta_2 \rightarrow [0, 1]$  mit  $(1, 0, 0) \mapsto 0$ ,  $(0, 1, 0) \mapsto 1/2$  und  $(0, 0, 1) \mapsto 1$ . Offensichtlich gilt für beliebige  $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$ , ja sogar für zwei beliebige verknüpfbare nicht notwendig geschlossene Wege in  $S_1 X$  die Identität

$$\partial((\beta * \gamma) \circ p) = \gamma \circ c - (\beta * \gamma) \circ c + \beta \circ c$$

als da heißt  $(\beta * \gamma) \circ c$  ist homolog zu  $\gamma \circ c + \beta \circ c$ , und für  $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$  folgt daraus in  $H_1 X$  die Gleichung  $\llbracket (\beta * \gamma) \rrbracket = \llbracket \gamma \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket$ .



Der tautologische Zwei-Simplex mit seinem Rand sowie der Zwei-Simplex  $p : \Delta_2 \rightarrow [0, 1]$  und sein Rand in  $S_1([0, 1])$ .

2. Da  $H_1X$  abelsch ist, definiert die Abbildung aus Teil 1 nach 2.6.12 einen Gruppenhomomorphismus

$$\overline{\text{can}} : \pi_1(X, x)^{\text{ab}} \rightarrow H_1X$$

Wir nehmen nun  $X$  wegzusammenhängend an und wählen für jeden Punkt  $y \in X$  einen Weg  $\alpha_y \in \Omega(X, y, x)$  von  $x$  nach  $y$ . Dann definieren wir einen Gruppenhomomorphismus

$$w : S_1X \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

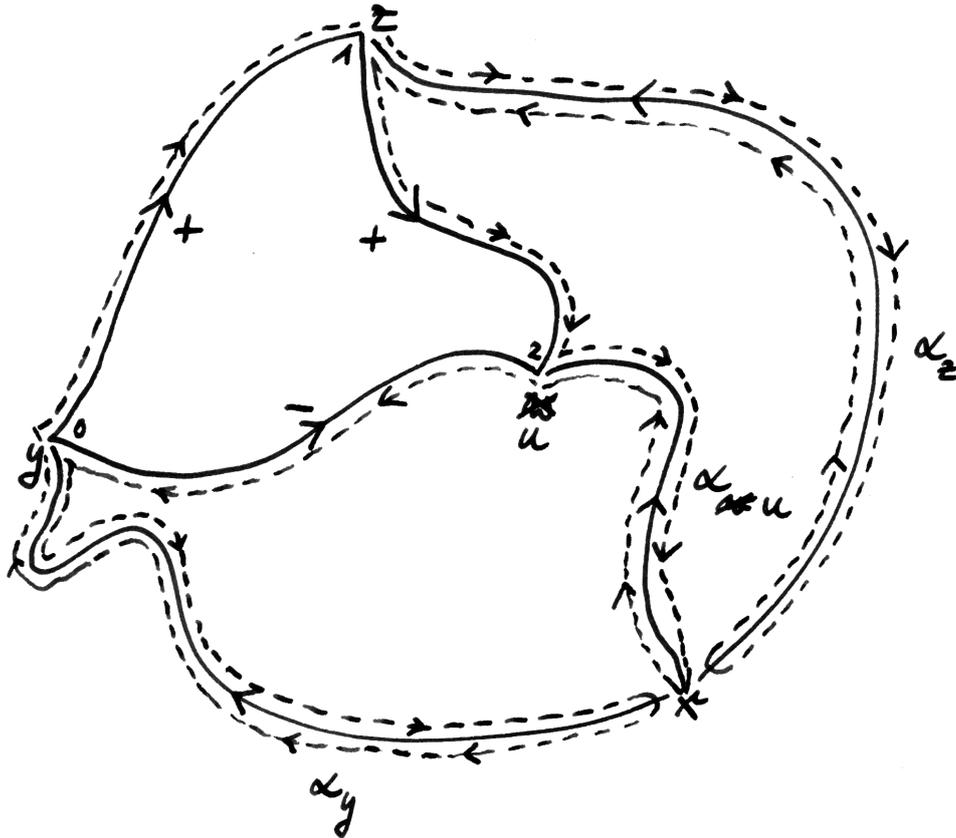
durch die Vorschrift, daß er einen 1-Simplex  $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$  abbilden möge auf die Klasse des geschlossenen Weges  $w(\sigma) = \bar{\alpha}_z * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_y$  für  $z = \sigma(0, 1)$  und  $y = \sigma(1, 0)$  die Enden unseres 1-Simplex. Wir zeigen nun, daß dieser Gruppenhomomorphismus alle Ränder in  $B_1X$  auf das neutrale Element von  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$  wirft. In der Tat, der Rand eines 2-Simplex  $\tau : \Delta_2 \rightarrow X$  wird unter unserem Gruppenhomomorphismus abgebildet auf  $[[\bar{\alpha}_u * (\tau \circ k) * \alpha_u]]$ , wo  $u = \tau(0, 0, 1)$  das Bild einer Ecke von  $\Delta_2$  ist und  $k : [0, 1] \rightarrow \Delta_2$  den Weg mit Anfangs- und Endpunkt in dieser Ecke bezeichnet, der einmal auf dem Rand von  $\Delta_2$  umläuft in einer Richtung, die der Leser sich selber überlegen möge. Da aber schon  $k$  selbst homotop ist zum konstanten Weg, gilt dasselbe für die obige Verknüpfung. Folglich definiert unsere Vorschrift einen Gruppenhomomorphismus in der umgekehrten Richtung

$$\bar{w} : H_1X \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

Es bleibt zu zeigen, daß er invers ist zu dem in Teil 1 konstruierten Homomorphismus  $\overline{\text{can}}$ . Um  $\bar{w} \circ \overline{\text{can}} = \text{id}$  nachzuweisen, wählen wir einen geschlossenen Weg  $\gamma \in \Omega(X, x)$  und erkennen, daß unter unserer Verknüpfung seine Klasse abgebildet wird auf die Klasse von  $\bar{\alpha}_x * \gamma * \alpha_x$  in  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ . Das zeigt  $\bar{w} \circ \overline{\text{can}} = \text{id}$ . Um  $\overline{\text{can}} \circ \bar{w} = \text{id}$  nachzuweisen bemerken wir, daß für jeden 1-Simplex  $\sigma$  unser  $w(\sigma)$  durch den Weg  $\bar{\alpha}_{\sigma(1,0)} * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_{\sigma(0,1)}$  repräsentiert wird. Nach dem Schluß des vorhergehenden Beweises ist damit  $\text{can}(w(\sigma))$  homolog zur 1-Kette  $\sigma + \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c - \alpha_{\sigma(0,1)} \circ c$ . Definieren wir also  $\delta : S_0X \rightarrow S_1X$  durch  $y \mapsto \alpha_y \circ c$ , so ist  $\text{can}(w(\sigma)) - \sigma$  homolog zu  $\delta \partial \sigma$  für jeden 1-Simplex  $\sigma$  und nullhomolog für jeden 1-Zykel  $a \in Z_1X$ , in Formeln  $[\text{can}(w(a))] = [a] \quad \forall a \in Z_1X$ .  $\square$

**Definition 1.5.4.** Zwei normierte geschlossene Wege  $\alpha, \beta$  in einem topologischen Raum heißen **frei homotop** genau dann, wenn es eine durch  $\tau \in [0, 1]$  parametrisierte Familie geschlossener normierter Wege  $\gamma_\tau$  gibt mit  $\gamma_0 = \alpha$ ,  $\gamma_1 = \beta$  und so, daß  $(t, \tau) \mapsto \gamma_\tau(t)$  stetig ist auf  $[0, 1]^2$ .

*Übung 1.5.5.* Man zeige, daß je zwei frei homotope geschlossene Wege unter dem Hurewitz-Homomorphismus auf dieselbe Homologiekategorie abgebildet werden.



Dies Bild soll illustrieren, warum für einen Zwei-Simplex  $\tau : \Delta_2 \rightarrow X$  sein Rand unter unserem Gruppenhomomorphismus abgebildet auf  $[[\bar{\alpha}_u * (\tau \circ k) * \alpha_u]]$ , wo  $u = \tau(0, 0, 1)$  das Bild einer Ecke von  $\Delta_2$  ist und  $k : [0, 1] \rightarrow \Delta_2$  den Weg mit Anfangs- und Endpunkt in dieser Ecke bezeichnet, der einmal auf dem Rand von  $\Delta_2$  umläuft.

## 1.6 Homologie offener Teilmengen der Ebene

1.6.1. Gegeben  $w, z \in \mathbb{C}$  zwei verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene spezialisiert der Hurewitz-Isomorphismus 1.5.2 zu einem Isomorphismus

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus w, z) \xrightarrow{\sim} H_1(\mathbb{C} \setminus w)$$

Wir notieren den durch die Umlaufzahl  $\gamma \mapsto \text{Um}(\gamma, w)$  aus 1.6.7 gegebenen Isomorphismus  $\text{Um}(\cdot, w) : \pi_1(\mathbb{C} \setminus w, z) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ . Man kann leicht zeigen, daß die auf der Homologie induzierte Abbildung nicht von  $z$  abhängt und folglich mit

$$\text{Um}(\cdot, w) : H_1(\mathbb{C} \setminus w) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

bezeichnet werden kann. Für eine Homologieklass  $\alpha \in H_1(\mathbb{C} \setminus w)$  notieren wir ihr Bild unter dieser Abbildung mit  $\text{Um}(\alpha, w)$  und nennen diese Zahl die **Umlaufzahl unserer Klasse**  $\alpha$  um den Punkt  $w$ . Für einen 1-Zykel  $\sigma \in Z_1(\mathbb{C} \setminus w)$  notieren wir das Bild seiner Homologieklass unter dieser Abbildung wieder mit  $\text{Um}(\sigma, w) := \text{Um}([\sigma], w)$  und nennen diese Zahl die **Umlaufzahl des Zyklus**  $\sigma$  um den Punkt  $w$ .

*Ergänzung 1.6.2.* Bei unserer Definition 1.2.16 des Integrals holomorpher Funktionen über 1-Zykel haben wir mit Vorbedacht dieselbe durch die Projektion auf die zweite Koordinate gegebene Identifikation  $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  zugrundegelegt wie bei der Konstruktion des Hurewitz-Isomorphismus. Ist also  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg und  $\gamma \circ c : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{C}$  der zugehörige 1-Simplex, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{[\gamma \circ c]} f(z) dz$$

Der mit den Grundlagen der Funktionentheorie vertrauten Leser wird nun leicht einsehen können, daß für jeden Punkt  $w \in \mathbb{C}$  und jede Homologieklass  $\gamma \in H_1(\mathbb{C} \setminus w)$  ihre Umlaufzahl um den Punkt  $w$  auch durch die Formel

$$\text{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} dz$$

beschrieben werden kann, mit dem in 1.2.16 erklärten Integralbegriff. Für im Sinne von 1.2.16 "geschlossene" 1-Simplizes folgt das unmittelbar aus dem Residuensatz oder auch direkter aus dem Beweis von 2.2.1, und im allgemeinen folgt es dann aus der Erkenntnis, daß jeder 1-Zykel homolog ist zu einer Linearkombination geschlossener 1-Simplizes.

**Satz 1.6.3 (Homologie offener Teilmengen der Ebene).** *Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene, so liefert die durch das Bilden der Umlaufzahlen gegebene Abbildung  $H_1(U) \times (\mathbb{C} \setminus U) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(\sigma, w) \mapsto \text{Um}(\sigma, w)$  einen Gruppenisomorphismus*

$$H_1(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_c(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$$

zwischen der ersten Homologiegruppe von  $U$  und der Gruppe der stetigen  $\mathbb{Z}$ -wertigen Funktionen mit kompaktem Träger auf dem Komplement von  $U$ .

1.6.4. Die Injektivität unserer Abbildung bedeutet in anderen Worten, daß ein Zykel in einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene in unserer Teilmenge nullhomolog ist genau dann, wenn er keinen Punkt außerhalb besagter Teilmenge umläuft. In 2.10.22 wird erklärt, wie sich unser Satz auf offene Teilmengen beliebiger endlichdimensionaler Vektorräume verallgemeinern läßt.

Übung 1.6.5. Man zeige, daß eine zusammenhängende offene Teilmenge der Ebene  $\mathbb{R}^2$  genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn ihre erste Homologiegruppe verschwindet.

Ergänzung 1.6.6. Für Zykel in nicht notwendig offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene gilt die Aussage von Satz vorhergehenden Satzes im allgemeinen nicht mehr, wie nebenstehendes Beispiel illustriert.

Ergänzung 1.6.7. Umläuft ein geschlossener Weg in einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene  $U \subseteq \mathbb{C}$  keinen Punkt des Komplements  $\mathbb{C} \setminus U$ , so ist er nach 1.6.3 insbesondere nullhomolog, und nach 1.2.16 verschwindet folglich das Integral jeder auf unserer Teilmenge holomorphen Funktion über besagten Weg. Diese Aussage ist in der Funktionentheorie bekannt als die **Umlaufzahlversion des Integralsatzes von Cauchy**.

Ergänzung 1.6.8 (**Residuensatz, homologische Version**). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $P \subset U$  eine endliche Teilmenge und  $f : U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma$  ein Zykel in  $U \setminus P$ , der in  $U$  nullhomolog ist. So gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \in P} \text{Um}(\gamma, p) \text{Res}(f, p)$$

Wir könnten das genauso herleiten wie den Residuensatz 2.2.9. Stattdessen führen wir hier einen alternativen Beweis vor, der von der Laurententwicklung unabhängig ist und die Nützlichkeit unserer neuen Sprache zeigen soll. Wählen wir um jede der Singularitäten  $w \in P$  einen Kreisweg  $\gamma_w$  mit so kleinem Radius, daß die ganze abgeschlossene Kreisscheibe innerhalb dieses Weges in  $U$  enthalten ist und keine andere Singularität enthält, so gilt  $\text{Um}(\gamma_w, w) = 1$  und  $\text{Um}(\gamma_w, v) = 0$  für alle  $v \in P \setminus w$  und für alle  $v \in \mathbb{C} \setminus U$ . Die Zykel  $\gamma$  und  $\sum_w \text{Um}(\gamma, w) \gamma_w$  haben also dieselben Umlaufzahlen um alle Punkte des Komplements von  $U \setminus P$  in  $\mathbb{C}$ , als da heißt, ihre Differenz ist in  $U \setminus P$  nullhomolog. Daraus folgt wegen der Homologieinvarianz des Wegintegrals 1.4.11 aber sofort

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{w \in P} \text{Um}(\gamma, w) \int_{\gamma_w} f(z) dz$$

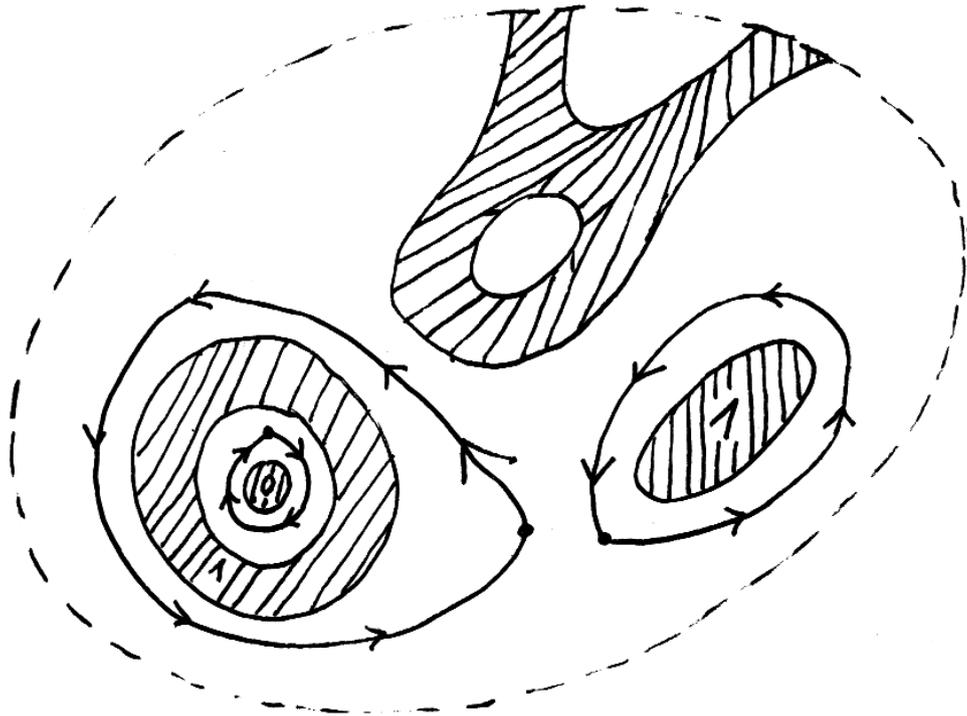
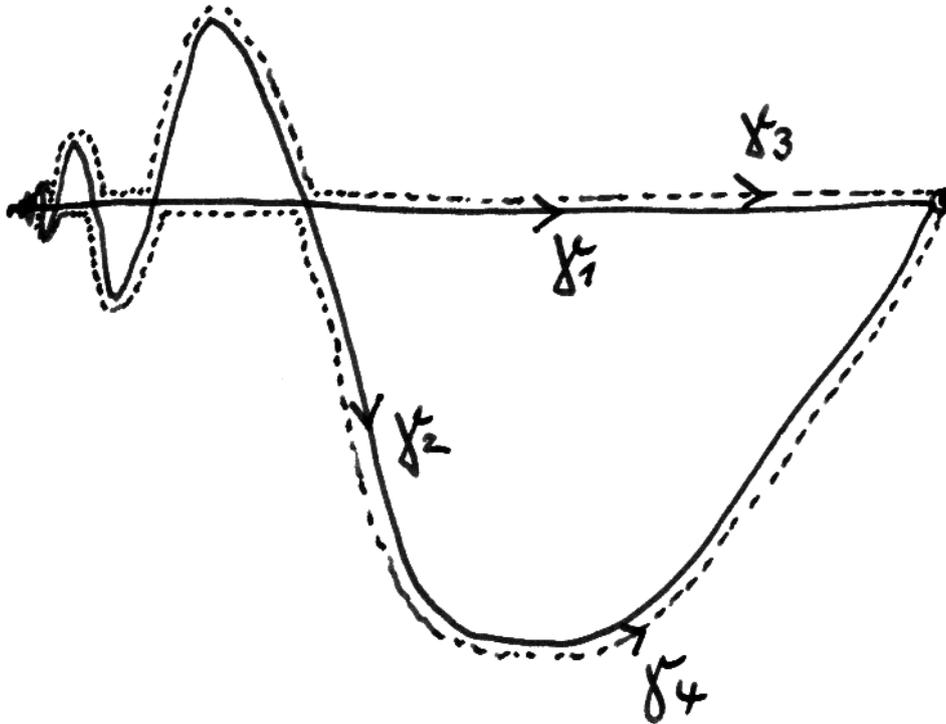


Illustration zum Satz über die Homologie offener Teilmengen der Ebene **1.6.3**.  
 Die Ebene  $\mathbb{C}$  habe ich hier ersetzt durch eine “eiförmige” konvexe offene nichtleere Teilmenge derselben, die ja homöomorph ist. Das Komplement von  $U$  ist schraffiert eingezeichnet und besteht aus vier Zusammenhangskomponenten, von denen eine nicht kompakt ist. In die kompakten Zusammenhangskomponenten habe ich Zahlen geschrieben, die die Werte einer Funktion aus  $\mathcal{C}_c(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$  meinen, und darüber hinaus habe ich einen Eins-Zykel in  $U$  angegeben, der unter dem Isomorphismus aus unserem Satz auf besagte Funktion abgebildet wird.



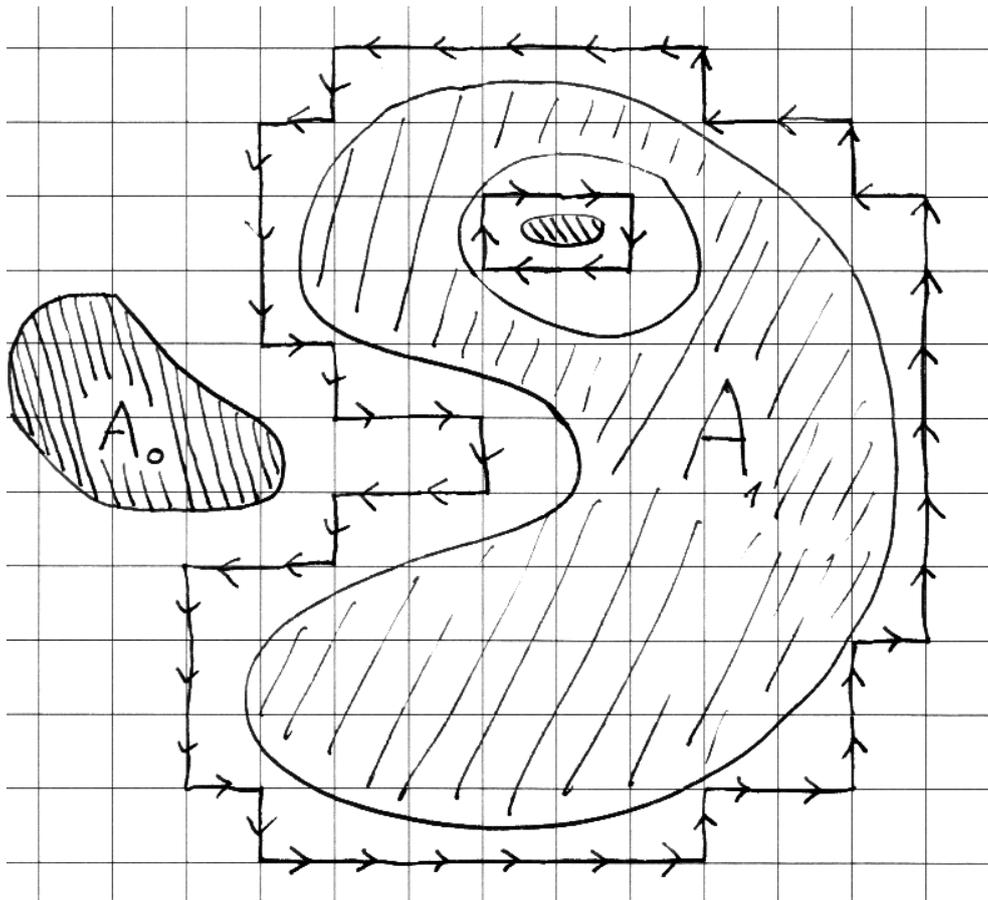
Ist unsere Teilmenge nicht offen, so gilt die Aussage von Satz 1.6.3 im allgemeinen nicht mehr. Betrachten wir etwa die stetige Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(x) = x \sin(\pi x^{-1})$  für  $x \neq 0$  und  $f(x) = 0$  für  $x = 0$ . Betrachten wir in der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= t \\ \gamma_2(t) &= t + if(t) \\ \gamma_3(t) &= t + i \sup(f(t), 0) \\ \gamma_4(t) &= t + i \inf(f(t), 0) \end{aligned}$$

Der Zykel  $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$  hat dann Umlaufzahl Null um jeden Punkt im Komplement seiner Spur. Dennoch ist er in seiner Spur nicht nullhomolog, was ich hier nur heuristisch begründen will: Wie fein ich eine endliche Zerstückelung auch wähle, die Situation in der Nähe des Ursprungs bleibt einfach zu verworren.



Anschauliche Darstellung zum Beweis von Satz 1.6.3. Als  $A_0$  ist hier die Vereinigung der zwei eng schraffierten Stücke gemeint.

und die Formel aus der Definition des Residuums 2.2.6 zeigt dann den Residuensatz.

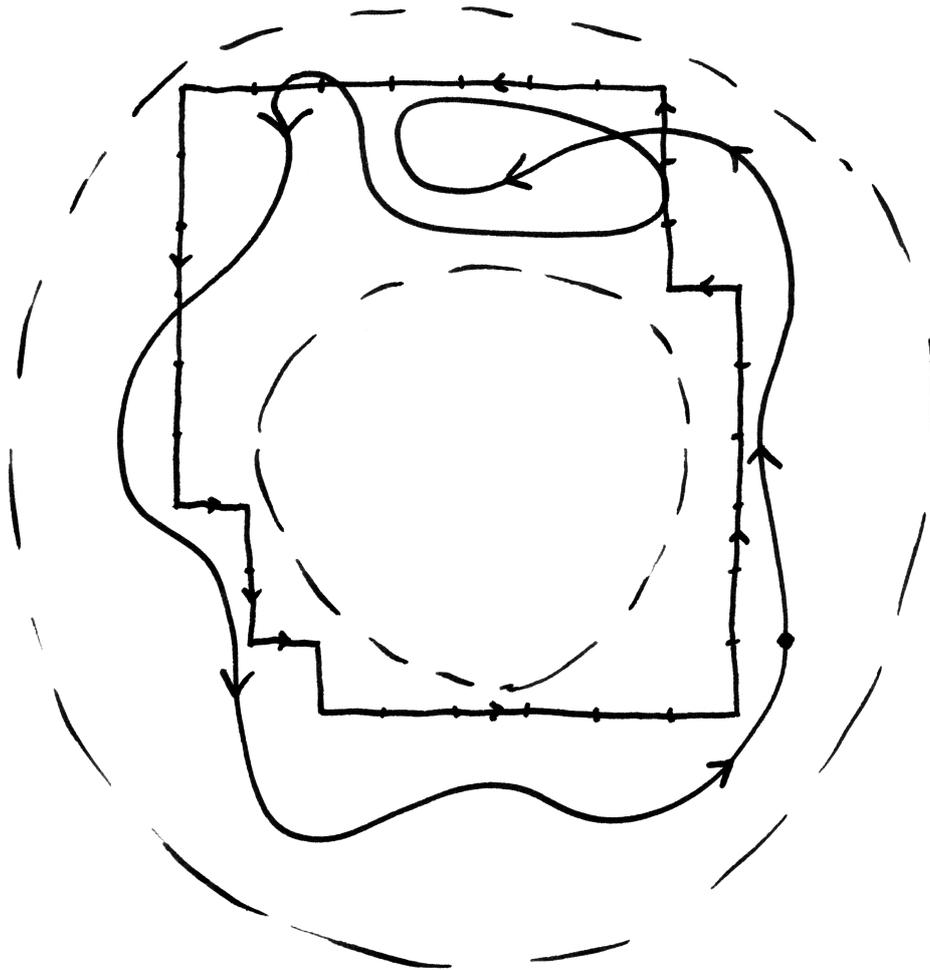
*Beweis von 1.6.3.* Jeder Zykel  $\sigma \in Z_1(U)$  wird in  $S_1(\mathbb{C})$  ein Rand,  $\sigma = \partial\alpha$  für  $\alpha \in S_2(\mathbb{C})$ . Liegt  $w$  auf keinem Simplex von  $\alpha$ , so gilt sicher  $U_m(\sigma, w) = 0$ . Folglich verschwindet  $U_m(\sigma, w)$  bei festem  $\sigma$  für alle  $w$  außerhalb eines geeigneten Kompaktums. Daß  $w \mapsto U_m(\sigma, w)$  auch stetig von  $w$  abhängt, also eine lokal konstante Funktion ist, wird sich der Leser leicht selbst überlegen können. Damit liefert unsere Abbildungsvorschrift schon einmal einen Gruppenhomomorphismus

$$H_1(U) \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$$

und es bleibt, dessen Injektivität und Surjektivität zu zeigen. Wir beginnen mit der Surjektivität. Es reicht sicher zu zeigen, daß alle Funktionen im Bild liegen, die nur die Werte Null und Eins annehmen. Dann zerfällt aber das Komplement in die disjunkte Vereinigung  $\mathbb{C} \setminus U = A_0 \sqcup A_1$  einer kompakten Teilmenge  $A_1$ , auf der der Wert Eins ist, und einer in  $\mathbb{C} \setminus U$  und  $\mathbb{C}$  abgeschlossenen Teilmenge, auf der der Wert Null ist. Nach 6.7.16 existiert ein  $\delta > 0$  mit  $|x_1 - x_0| > \delta \quad \forall x_1 \in A_1, x_0 \in A_0$ . Wir können also auf unsere Ebene ein "Rechenpapier-Raster" legen, das so fein ist, daß keines der Rechenkästchen sowohl  $A_0$  als auch  $A_1$  trifft. Zu jedem Rechenkästchen erklären wir seinen "Kantenzzykel", der anschaulich der Summe seiner vier mit konstanter Geschwindigkeit im Gegenuhrzeigersinn zu durchlaufenden Kanten entspricht, in hoffentlich offensichtlicher Weise. Dann betrachten wir die Summe  $\sigma$  aller "Kantenzyklen" zu Rechenkästchen, die  $A_1$  treffen, und behaupten, daß dieser Zykel  $\sigma$  in  $U$  liegt und jeden Punkt von  $A_1$  einmal umläuft, jeden Punkt von  $A_0$  dahingegen keinmal. Letzteres scheint mir offensichtlich. Ersteres scheint mir auch offensichtlich für Punkte, die auf keiner Kante eines Kästchens liegen. Für Punkte auf Kanten und Ecken unseres Rechenpapiers ist es aber auch leicht zu sehen. Damit ist die Surjektivität bewiesen, und es gilt, auch noch die Injektivität zu zeigen. Dazu unterbrechen wir den Beweis und zeigen zunächst einige Hilfsaussagen.

**Lemma 1.6.9.** *Jeder Zykel in einer offenen Teilmenge der Ebene ist in dieser offenen Teilmenge homolog zu einer formalen Summe von Kanten von Kästchen auf einem hinreichend feinen Rechenpapier.*

*Beweis.* Nach dem Satz von Hurwitz 1.5.2, genauer der leicht zu zeigenden Surjektivität des Hurwitz-Isomorphismus, ist jeder Zykel in einem wegzusammenhängenden Raum homolog zu einem geschlossenen Weg oder präziser zu einem Zykel, der durch einen einzigen singulären Simplex gegeben wird. Jeder Zykel in einem beliebigen Raum ist folglich homolog zu einer endlichen Linearkombination von derartigen "geschlossenen" Simplexes. Jeder geschlossene Weg in einer



Ein Zykel und eine dazu homologe Summe von Kanten in einer ringförmigen offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene.

offenen Teilmenge der Ebene ist weiter homolog, ja nach 6.5.11 sogar homotop zu einem geschlossenen polygonalen Weg und dann sogar frei homotop zu einem geschlossenen polygonalen Weg mit Ecken aus  $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ . Jedes der Geradensegmente dieser polygonalen Wege ist hinwiederum homotop in unserer offenen Teilmenge zu einem “Treppenweg” mit Ecken in  $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ , und der Hauptnenner aller Koordinaten aller Ecken aller dieser Treppenwege gibt uns dann eine mögliche Feinheit für unser Rechenpapier.  $\square$

Für den Beweis des Satzes reicht es also zu zeigen, daß jeder solche “Kantenzykel”, der keinen Punkt außerhalb unserer offenen Teilmenge umläuft, bereits in unserer offenen Teilmenge nullhomolog ist. Dazu beachten wir zunächst, daß die Umlaufzahl auf dem Komplement der Spur unseres Kantenzykels in der Ebene lokal konstant ist. Liegt also der Abschluß eines unserer Rechenkästchen nicht ganz in unserer offenen Teilmenge, so verschwindet dort die Umlaufzahl an allen Stellen, die nicht gerade zu Kanten unseres Kantenzykels gehören, und insbesondere im Innern des besagten Kästchens. Die Umlaufzahl unseres Kantenzykels kann nun nur auf dem Innern von endlich vielen Rechenkästchen von Null verschieden sein, und diese gehören nach dem Vorhergehenden mit ihrem Abschluß zu unserer offenen Teilmenge. Wir können also einen weiteren Kantenzykel in unserer offenen Menge konstruieren, der zu unserem ursprünglichen Kantenzykel homolog ist und bei dem die Umlaufzahl um jeden Punkt im Innern jedes Rechenkästchens verschwindet, indem wir bei jedem Rechenkästchen mit von Null verschiedener Umlaufzahl ein geeignetes Vielfaches seines “Randzykels” zu unserem ursprünglichen Zykel addieren. Auf diese Weise töten wir auf dem entsprechenden Kästchen die Umlaufzahl und auf den anderen Kästchen ändert sich nichts und wir erhalten einen zu unserem ursprünglichen Zykel homologen Kantenzykel, der überhaupt keinen Punkt im Innern irgendeines Rechenkästchens umläuft. Das anschließende Lemma beendet dann den Beweis.  $\square$

**Lemma 1.6.10.** *In einem Kantenzykel, der keinen Punkt aus dem Innern irgendeines Kästchens umläuft, kommt jede Kante gleich oft in beiden Richtungen vor.*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit argumentieren wir nur für senkrechte Kanten. Nehmen wir also an, eine senkrechte Kante käme  $a$ -mal in der Richtung nach oben und  $b$ -mal in die Gegenrichtung vor. Ziehen wir von unserem Kantenzykel den Randzykel des Kästchens links neben unserer Kante ab, und zwar  $a$ -mal im Gegenuhrzeigersinn und  $b$ -mal im Uhrzeigersinn, so erhalten wir einen neuen Kantenzykel mit Umlaufzahl  $b - a$  auf diesem Kästchen und Umlaufzahl null auf dem Kästchen rechts daneben. Diese Kante selbst gehört aber gar nicht mehr zur Spur unseres Zykel, und weil die Umlaufzahl lokal konstant ist folgt  $b - a = 0$ .  $\square$

## 2 Relative Homologie mit Anwendungen

In diesem Abschnitt führen wir eine Verallgemeinerung unserer singulären Homologiegruppen ein, die sogenannten “relativen Homologiegruppen” eines topologischen Raums relativ zu einer Teilmenge. Man mag sich fragen, ob es nicht sinnvoller wäre, erst einmal die bisher eingeführten gewöhnlichen Homologiegruppen so eingehend zu studieren, daß wir sie für einige elementare Beispiele auch berechnen könnten, anstatt gleich zu verallgemeinern. Es erweist sich jedoch, daß diese Verallgemeinerung bei der Berechnung der gewöhnlichen Homologiegruppen entscheidend hilft, sobald wir (1) die lange exakte Homologiesequenz hergeleitet haben, die die relative mit der gewöhnlichen Homologie in Beziehung setzt, und (2) den Satz über die Ausschneidung gezeigt haben, der sich nur für die relative Homologie überhaupt formulieren läßt.

### 2.1 Relative Homologie

**Definition 2.1.1.** Ist  $(X, A)$  ein **Raumpaar**, als da heißt ein topologischer Raum  $X$  mit einer Teilmenge  $A$ , so liefert die Einbettung  $A \hookrightarrow X$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$  Inklusionen  $S_q A \hookrightarrow S_q X$  auf den Gruppen der singulären  $q$ -Ketten. Die Quotientengruppe bezeichnen wir mit

$$S_q(X, A) := S_q X / S_q A$$

und nennen ihre Elemente **relative  $q$ -Ketten**. Wir geben der Quotientenabbildung  $S_q X \rightarrow S_q(X, A)$  keinen Namen.

2.1.2. Die Quotientenabbildung liefert einen Isomorphismus zwischen der freien Gruppe über der Menge aller der  $q$ -Simplizes  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ , deren Bild nicht in  $A$  enthalten ist, und der Gruppe der relativen  $q$ -Ketten  $S_q(X, A)$ . Diese Sichtweise zeigt, daß auch die relativen Ketten eine freie abelsche Gruppe bilden.

**Definition 2.1.3.** Man überzeugt sich leicht, daß es eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismen  $\bar{\partial}_q : S_q(X, A) \rightarrow S_{q-1}(X, A)$  gibt derart, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_q A & \hookrightarrow & S_q X & \twoheadrightarrow & S_q(X, A) \\ \partial_q \downarrow & & \partial_q \downarrow & & \bar{\partial}_q \downarrow \\ S_{q-1} A & \hookrightarrow & S_{q-1} X & \twoheadrightarrow & S_{q-1}(X, A) \end{array}$$

Es ist klar, daß die  $S_q(X, A)$  mit diesem Differential einen Kettenkomplex bilden, d.h. es gilt  $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ . Wir notieren ihn  $S(X, A)$  und definieren die **relativen**

**Homologiegruppen** von unserem Raumpaars als die Homologie dieses Kettenkomplexes, in Formeln

$$H_q(X, A) := \mathcal{H}_q(S(X, A)) = \ker \bar{\partial}_q / \text{im } \bar{\partial}_{q+1}$$

Die Elemente von  $\ker \bar{\partial}_q$  heißen auch die **relativen  $q$ -Zykel**, die Elemente von  $\text{im } \bar{\partial}_{q+1}$  die **relativen  $q$ -Ränder** und für einen relativen Zykel  $c$  bezeichnet wieder  $[c]$  seine Homologiekategorie.

*Ergänzung 2.1.4.* In 2.3.22 wird klar werden, daß wir unter geeigneten Annahmen an unser Raumpaars  $(X, A)$  die relative Homologie  $H_q(X, A)$  für  $q > 0$  identifizieren können mit der Homologie  $H_q(X/A)$  des Raums  $X/A$ , der aus  $X$  entsteht durch die Identifikation der Teilmenge  $A$  zu einem Punkt.

*Beispiel 2.1.5.* Wir haben  $H_1([x, y], \{x, y\}) \cong \mathbb{Z}$ , für  $x < y$  in  $\mathbb{R}$ . Diese Aussage können Sie sich als Übung hier schon überlegen, wir erhalten sie später auch als einen Spezialfall von 2.3.3. Wir haben nach 2.3.5 auch  $H_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Einen Erzeuger dieser relativen Homologie kann man wie folgt finden: Man schneidet den Kuchen  $D^2$  wie üblich in Stücke und betrachtet jedes der Stücke mit einer geeigneten Orientierung als 2-Simplex. Die formale Summe dieser Simplexe hat dann als Rand nur den Rand des Kuchens selber und bildet folglich einen relativen Zykel, von dem man mithilfe des zweiten Teils von 2.3.3 zeigen kann, daß seine Klasse in der Tat die relative Homologie erzeugt. Die erste relative Homologie des Möbiusbands  $M$  aus 3.4.21 relativ zu seinem Randkreis  $S^1$  hat genau zwei Elemente,  $H_1(M, S^1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , und ein nichttriviales Element wird repräsentiert durch den 1-Zykel, der "in der Mitte des Möbiusbands einmal umläuft". Um das präzise zu zeigen, benötigen wir jedoch die lange exakte Homologiesequenz 2.2.2.

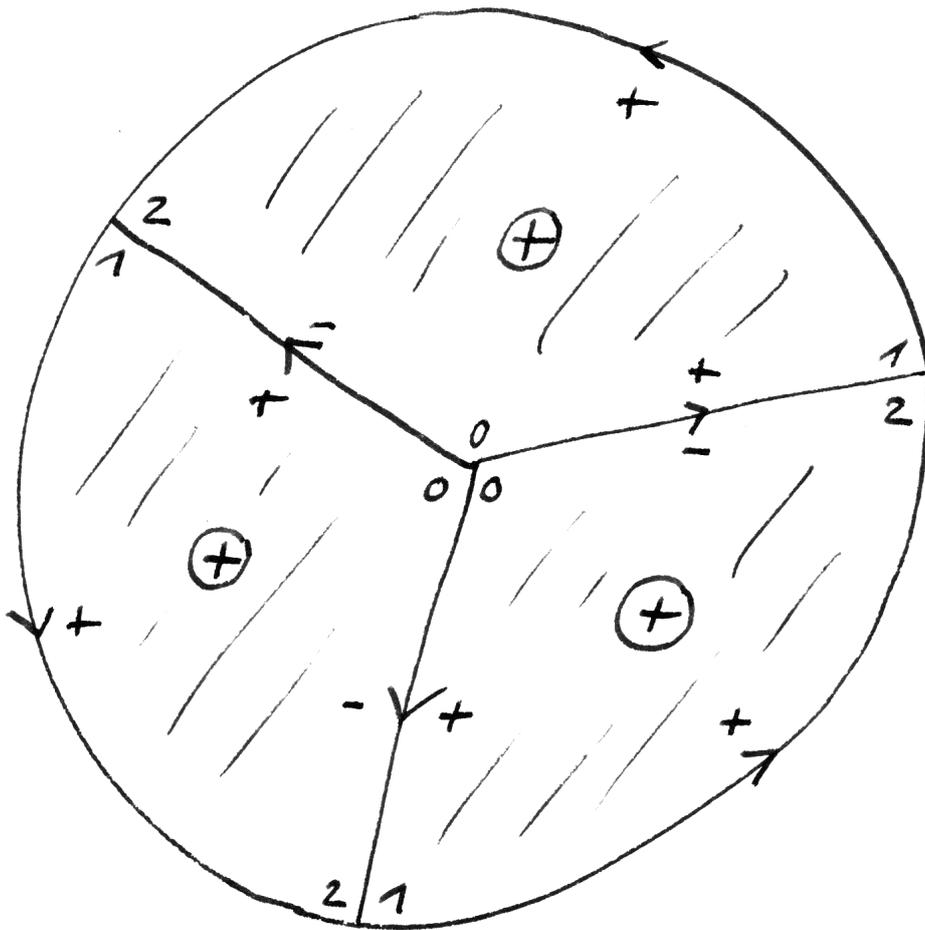
**Definition 2.1.6.** Ein **Morphismus von Raumpaaren**  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist per definitionem schlicht eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subset B$ . So ein  $f$  induziert eine Abbildung  $H_q f$  auf der relativen Homologie. Genauer definiert man zunächst  $S_q f : S_q(X, A) \rightarrow S_q(Y, B)$  durch die Bedingung, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_q A & \hookrightarrow & S_q X & \twoheadrightarrow & S_q(X, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_q B & \hookrightarrow & S_q Y & \twoheadrightarrow & S_q(Y, B) \end{array}$$

Dann prüft man, daß diese  $S_q f$  sogar mit den Differentialen kommutieren und so einen Morphismus von Kettenkomplexen

$$Sf : S(X, A) \rightarrow S(Y, B)$$

definieren. Dieser Morphismus liefert dann schließlich auf der Homologie die gewünschten Morphismen  $H_q f : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$ .



Ein Erzeuger der relativen Homologie  $H_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z}$

2.1.7. Man prüft, daß wir auf diese Weise sogar einen Funktor

$$S : \{\text{Raumpaare}\} \rightarrow \{\text{Kettenkomplexe}\}$$

erhalten. Durch Verknüpfung mit den Homologie-Funktoren

$$\mathcal{H}_q : \{\text{Kettenkomplexe}\} \rightarrow \{\text{Abelsche Gruppen}\}$$

können wir also unsere relativen Homologiegruppen verstehen als Funktoren

$$H_q : \{\text{Raumpaare}\} \rightarrow \{\text{Abelsche Gruppen}\}$$

Die Definition der relativen Ketten schenkt uns natürliche Morphismen  $SX \rightarrow S(X, A)$  und damit  $H_q X \rightarrow H_q(X, A)$ . Es ist klar nach den Definitionen, daß  $H_q X \rightarrow H_q(X, \emptyset)$  stets ein Isomorphismus ist.

2.1.8. Ich notiere die Kategorie der Raumpaare  $\text{Top}^c$ . Die in der Literatur verbreitete alternative Notation  $\text{Top}^2$  gefällt mir nicht, da sie in wieder anderen Konventionen das kartesische Produkt der Kategorie  $\text{Top}$  mit sich selber bedeuten sollte, und wir diese Begriffsbildung auch benötigen werden.

*Übung 2.1.9 (Zerlegung der relativen Homologie).* Sei  $X = \bigsqcup X_w$  eine Zerlegung eines Raums  $X$  in paarweise disjunkte offene Teilmengen und  $i_w : X_w \hookrightarrow X$  die jeweilige Einbettung. Seien  $A_w \subset X_w$  beliebig und sei  $A \subset X$  ihre Vereinigung. So definieren die  $H_q(i_w) : H_q(X_w, A_w) \rightarrow H_q(X, A)$  einen Isomorphismus  $\bigoplus H_q(X_w, A_w) \xrightarrow{\sim} H_q(X, A)$ .

*Übung 2.1.10.* Man konstruiere eine Isotransformation zwischen den beiden folgenden Funktoren von den Raumpaaren in die abelschen Gruppen:

1.  $(X, A) \mapsto H_0(X, A)$
2.  $(X, A) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Die freie abelsche Gruppe über der Menge aller Wegzu-} \\ \text{-sammenhangskomponenten von } X, \text{ die } A \text{ nicht treffen} \end{array} \right\}$

**Definition 2.1.11.** Seien  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  zwei Morphismen zwischen Raumpaaren. Eine **Homotopie von  $f$  nach  $g$**  ist ein Morphismus von Raumpaaren  $h : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B)$  derart, daß gilt  $h \circ i_0 = f$  und  $h \circ i_1 = g$ .

*Übung 2.1.12.* Man zeige: Sind zwei Morphismen  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotop, so induzieren sie dieselben Abbildungen  $H_q f = H_q g : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$  auf den relativen Homologiegruppen. Hinweis: Man wiederholt den alten Beweis. Man zeige durch ein Beispiel, daß es nicht ausreicht nur vorauszusetzen, daß  $f$  und  $g$  als Abbildungen  $X \rightarrow Y$  sowie als Abbildungen  $A \rightarrow B$  jeweils zueinander homotop sind.

## 2.2 Die lange exakte Homologiesequenz

**Satz 2.2.1.** Sei  $C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C''$  eine **kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen**, als da heißt  $C'_q \hookrightarrow C_q \twoheadrightarrow C''_q$  soll für alle  $q$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen sein. So gilt:

1. Es gibt für jedes  $q$  genau einen Gruppenhomomorphismus, den sogenannten **Randoperator**

$$\hat{\partial} : \mathcal{H}_q C'' \rightarrow \mathcal{H}_{q-1} C'$$

derart, daß gilt  $\hat{\partial}[c''] = [c']$  für Zykel  $c'' \in \mathcal{Z}_q C''$  und  $c' \in \mathcal{Z}_{q-1} C'$  genau dann, wenn es ein  $c \in C_q$  gibt mit  $pc = c''$  und  $\partial c = ic'$ .

2. Mit diesen Homomorphismen erhalten wir eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen, die **abstrakte lange exakte Homologiesequenz**

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{q+1} C'' \rightarrow \mathcal{H}_q C' \rightarrow \mathcal{H}_q C \rightarrow \mathcal{H}_q C'' \rightarrow \mathcal{H}_{q-1} C' \rightarrow \dots$$

2.2.2. Die Bezeichnung als Randoperator ist durch die topologische Anwendung motiviert: Wir werden im folgenden zu jedem Raumpaars  $(X, A)$  Homomorphismen  $\hat{\partial} = \hat{\partial}_q : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$  konstruieren derart, daß die Sequenz

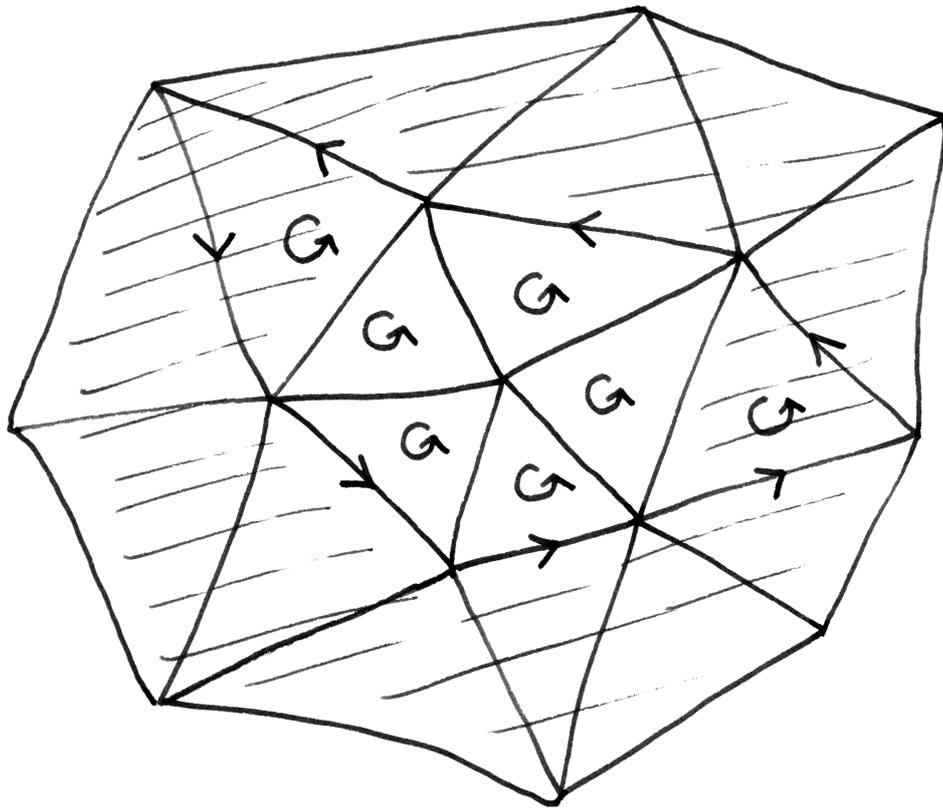
$$\dots \rightarrow H_{q+1}(X, A) \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

exakt ist, wenn wir diese  $\hat{\partial}$  und die von den Einbettungen  $(A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$  induzierten Abbildungen als Morphismen nehmen. Ist genauer eine relative Homologieklassse  $[c] \in H_q(X, A)$  gegeben, so repräsentieren wir  $[c]$  durch einen relativen  $q$ -Zykel  $c \in S_q(X, A)$  und diesen durch eine  $q$ -Kette  $\tilde{c} \in S_q X$ . Dann ist  $\partial \tilde{c} \in S_{q-1} A$  ein  $(q-1)$ -Zykel und wir nehmen als  $\hat{\partial}[c]$  seine Homologieklassse, in Formeln  $\hat{\partial}[c] := [\partial \tilde{c}]$ . Daß wir so eine wohldefinierte Abbildung erhalten und daß mit diesen Abbildungen die oben angegebene Sequenz exakt ist, folgt aus Satz 2.2.1, angewandt auf die "kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen"

$$SA \hookrightarrow SX \twoheadrightarrow S(X, A)$$

Unsere Sequenz heißt die **lange exakte Homologiesequenz des Raumpaars**  $(X, A)$ .

*Beweis.* Das folgende Diagramm stellt alle im Beweis benötigten Gruppen und



Dieses Bild soll den Randoperator der langen exakten Homologiesequenz anschaulich machen. Es stellt einen zweidimensionalen Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  mit 18 Zwei-Simplizes dar und darin schraffiert einen Teilkomplex  $\mathcal{A}$ . Die Summe der sieben durch einen Kreis Pfeil mit einer Orientierung versehenen Zwei-Simplizes ist ein relativer Zwei-Zykel aus  $S\mathcal{K}/S\mathcal{A}$  und repräsentiert eine relative simpliciale Homologiekategorie in  $\mathcal{H}_2(S\mathcal{K}/S\mathcal{A})$ . Sein Rand ist die Summe der im Bild durch Pfeile gerichteten Kanten, ein simplicialer Eins-Zykel aus  $S\mathcal{A}$ , dessen Homologiekategorie in  $\mathcal{H}_1(S\mathcal{A})$  das Bild unserer relativen simplicialen Homologiekategorie unter dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz repräsentiert.

Abbildungen dar:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_{q+1} & \twoheadrightarrow & C''_{q+1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 C'_q & \hookrightarrow & C_q & \twoheadrightarrow & C''_q \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C'_{q-1} & \hookrightarrow & C_{q-1} & \twoheadrightarrow & C''_{q-1} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 C'_{q-2} & \hookrightarrow & C_{q-2} & & 
 \end{array}$$

Jetzt beginnen wir mit der eigentlichen Argumentation. Ist  $c'' \in C''_q$  ein Zykel und  $c \in C_q$  ein Urbild, in Formeln  $pc = c''$ , so folgt  $p\partial c = \partial c'' = 0$  und mit Exaktheit bei  $C_{q-1}$  gibt es  $c' \in C'_{q-1}$  mit  $ic' = \partial c$ . Dies  $c'$  muß sogar ein Zykel sein, denn es gilt  $i\partial c' = \partial ic' = \partial^2 c = 0$  und  $i_{q-2}$  ist injektiv.

Wir wollen gerne  $\hat{\partial}[c''] = [c']$  setzen und müssen zeigen, daß die Homologieklasse  $[c']$  weder von der Wahl von  $c''$  noch von der Wahl von  $c$  abhängt. Aber sei sonst  $b'' \in C''_{q+1}$  gegeben und sei  $c''$  abgeändert zu  $c'' + \partial b''$ . Wir finden  $b \in C_{q+1}$  mit  $pb = b''$ . Wählen wir  $\tilde{c} \in C_q$  mit  $p\tilde{c} = c'' + \partial b''$ , so folgt  $p(\tilde{c} - c - \partial b) = 0$ , also  $\tilde{c} - c - \partial b = ib'$  für  $b' \in C'_q$ . Ist nun  $\partial\tilde{c} = ic'$  so folgt  $i(\tilde{c} - c') = i\partial b'$  und somit  $[\tilde{c}] = [c']$  wie gewünscht.

Damit ist also  $\hat{\partial}$  definiert und wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß dies  $\hat{\partial}$  durch die im ersten Teil des Satzes angegebene Eigenschaft charakterisiert wird. Es bleibt nur die Exaktheit unserer Sequenz nachzuweisen. Man folgert mühelos aus den Definitionen daß die Verknüpfung je zweier aufeinanderfolgender Morphismen verschwindet, also  $\ker \supset \text{im}$ . Wir müssen noch  $\ker \subset \text{im}$  an jeder Stelle zeigen.

Bei  $\mathcal{H}_q C$  folgt aus  $[c] \mapsto 0$  für  $c \in \mathcal{Z}_q C$  sofort  $pc = \partial b''$  und die Surjektivität von  $C_{q+1} \rightarrow C''_{q+1}$  liefert uns  $b \in C_{q+1}$  mit  $pb = b''$ , also  $p(c - \partial b) = 0$ . Dann gibt es aber nach der Exaktheit von  $C'_q \hookrightarrow C_q \twoheadrightarrow C''_q$  ein  $c' \in C'_q$  mit  $ic' = c - \partial b$  und notwendig ist  $c'$  ein Zykel und  $[c'] \mapsto [c - \partial b] = [c]$ . Bei  $\mathcal{H}_q C''$  folgt aus  $[c''] \mapsto 0$ , daß für jedes Urbild  $c \in C_q$  mit  $c \mapsto c''$  gilt  $\partial c = ic'$  für einen Rand  $c' = \partial b'$  in  $C'_{q-1}$ . Dann ist aber  $c - ib' \in C_q$  ein Zykel und  $[c'']$  das Bild von  $[c - ib'] \in \mathcal{H}_q C$ . Bei  $\mathcal{H}_{q-1} C'$  folgt aus  $[c'] \mapsto 0$  ja  $ic' = \partial c$  für  $c \in C_q$  und dann muß  $pc \in C''_q$  ein Zykel sein mit  $[pc] \mapsto [c']$ . Der Satz ist bewiesen.  $\square$

2.2.3. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
 C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D' & \hookrightarrow & D & \twoheadrightarrow & D''
 \end{array}$$

ist auch das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \rightarrow & \mathcal{H}_q C' & \rightarrow & \mathcal{H}_q C & \rightarrow & \mathcal{H}_q C'' & \rightarrow & \mathcal{H}_{q-1} C' & \rightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \rightarrow & \mathcal{H}_q D' & \rightarrow & \mathcal{H}_q D & \rightarrow & \mathcal{H}_q D'' & \rightarrow & \mathcal{H}_{q-1} D' & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

Das folgt aus der Funktorialität von  $\mathcal{H}_q$  für die ersten beiden Quadrate und aus der Konstruktion von  $\hat{\partial}$  für das dritte Quadrat.

2.2.4. Insbesondere kommutieren für jeden Morphismus  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Raumpaaren mit den Randabbildungen der jeweiligen langen exakten Homologiesequenzen die Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(X, A) & \rightarrow & H_{q-1}(A) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_q(Y, B) & \rightarrow & H_{q-1}(B)
 \end{array}$$

**Korollar 2.2.5.** Sei  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ein Morphismus von Raumpaaren. Induziert  $f$  Isomorphismen  $H_q f : H_q X \xrightarrow{\sim} H_q Y$  und  $H_q f : H_q A \xrightarrow{\sim} H_q B$  für alle  $q$ , so induziert  $f$  auch auf der relativen Homologie Isomorphismen

$$H_q f : H_q(X, A) \xrightarrow{\sim} H_q(Y, B)$$

*Beweis.* Das folgt aus der langen exakten Homologiesequenz mit dem anschließenden Fünferlemma.  $\square$

2.2.6. Induziert  $f$  Homotopieäquivalenzen  $X \rightarrow Y$  und  $A \rightarrow B$ , so induziert  $f$  insbesondere Isomorphismen auf der relativen Homologie, ohne daß es deshalb eine Homotopieäquivalenz von Raumpaaren sein müßte.

**Lemma 2.2.7 (Fünferlemma).** Wir betrachten ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & D & \rightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & D' & \rightarrow & E'
 \end{array}$$

Sind die beiden Horizontalen exakte Sequenzen und sind alle Vertikalen bis auf die mittlere Isomorphismen, so ist auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus.

*Beweis.* Diese Diagrammjagd überlassen wir dem Leser. Man bemerke, daß wir sogar bei der Vertikale ganz links nur die Surjektivität verwenden und bei der Vertikale ganz rechts nur die Injektivität.  $\square$

2.2.8. Sind  $X \supset Y \supset Z$  topologische Räume, so erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\dots H_{q+1}(X, Y) \rightarrow H_q(Y, Z) \rightarrow H_q(X, Z) \rightarrow H_q(X, Y) \rightarrow H_{q-1}(Y, Z) \dots$$

die **lange exakte Homologiesequenz des Tripels**  $(X, Y, Z)$ , aus der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$SY/SZ \hookrightarrow SX/SZ \twoheadrightarrow SX/SY$$

die hinwiederum eine Konsequenz des noetherschen Isomorphiesatzes ist.

*Übung 2.2.9. (Neunerlemma).* Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von (kommutativen) Gruppen mit kurzen exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} A_3 & \hookrightarrow & B_3 & \twoheadrightarrow & C_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_2 & \hookrightarrow & B_2 & \twoheadrightarrow & C_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \hookrightarrow & B_1 & \twoheadrightarrow & C_1 \end{array}$$

und seien die senkrechten Kompositionen jeweils Null. Sind zwei der Spalten kurze exakte Sequenzen, so auch die Dritte. Hinweis: Man benutze die lange exakte Homologiesequenz. Im Fall nichtkommutativer Gruppen bleibt allerdings nur die Diagrammjagd, vergleiche [LA2] 6.2.13.

*Übung 2.2.10.* Eine kurze exakte Sequenz  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  von abelschen Gruppen heißt **spaltend** genau dann, wenn es einen Isomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} A' \oplus A''$  gibt derart, daß das folgende Diagramm kommutiert, mit  $a' \mapsto (a', 0)$  und  $(a', a'') \mapsto a''$  in der unteren Horizontalen:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \parallel & & \downarrow \wr & & \parallel \\ A' & \hookrightarrow & A' \oplus A'' & \twoheadrightarrow & A'' \end{array}$$

Man zeige, daß für eine kurze exakte Sequenz  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  von abelschen Gruppen gleichbedeutend sind: (1) Die Sequenz spaltet; (2) Die Surjektion  $A \twoheadrightarrow A''$  besitzt ein Rechtsinverses; (3) Die Injektion  $A' \hookrightarrow A$  besitzt ein Linksinverses.

2.2.11. Man nennt ganz allgemein eine Surjektion von Gruppen, die ein Rechtsinverses besitzt eine **spaltende Surjektion** und eine Injektion von Gruppen, die ein Linksinverses besitzt, eine **spaltende Injektion**. Dieselbe Terminologie verwendet man bei Moduln über Ringen und auch in noch größerer Allgemeinheit. In welcher Bedeutung das jeweils gemeint ist, ob also die fraglichen Halbinversen Gruppenhomomorphismen, Modulhomomorphismen oder irgendeine andere Art von Morphismen sein sollen, gilt es jeweils aus dem Kontext zu erschließen.

*Übung 2.2.12.* Eine abelsche Gruppe  $F$  heißt **frei** genau dann, wenn sie isomorph ist zur freien abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}M$  über einer Menge  $M$ . Man zeige, daß jede Surjektion von einer beliebigen abelschen Gruppe auf eine freie abelsche Gruppe spaltet.

*Übung 2.2.13.* Sei gegeben ein kommutatives  $(3 \times 3)$ -Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \end{array}$$

So kommutiert das Diagramm der Randoperatoren der zugehörigen langen exakten Homologiesequenzen bis auf ein Vorzeichen, genauer kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q C'' & \xrightarrow{\hat{\partial}} & H_{q-1} C' \\ \hat{\partial} \downarrow & & \downarrow -\hat{\partial} \\ H_{q-1} A'' & \xrightarrow{\hat{\partial}} & H_{q-2} A' \end{array}$$

## 2.3 Ausschneidung

**Satz 2.3.1 (Ausschneidung).** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard und  $L \subset A$  eine Teilmenge von  $A$ , deren Abschluß im Inneren von  $A$  liegt, in Formeln  $\bar{L} \subset A^\circ$ . So liefert die Einbettung  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen

$$H_q(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\sim} H_q(X, A)$$

2.3.2. Ganz präzise gesagt meinen wir im Satz mit  $\bar{L} \subset A^\circ$  den Abschluß in  $X$  und das Innere in Bezug auf  $X$ , pedantisch gesagt also  $\text{Cl}_X(L) \subset \text{Of}_X(A)$ . Der Satz besagt salopp gesprochen, daß sich die relative Homologie nicht ändert, wenn wir die Menge  $L$  gleichzeitig sowohl aus  $X$  als auch aus  $A$  ausschneiden. Wir stellen den Beweis zurück und geben zunächst einige Anwendungen. Bezeichne  $\partial\Delta_n \subset \Delta_n$  den anschaulichen Rand  $\partial\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i\}$  des  $n$ -ten Standardsimplex.

**Satz 2.3.3.** Die Homologiegruppen  $H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n)$  der Standardsimplizes relativ zu ihrem Rand werden gegeben durch

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Klasse  $[\tau_n]$  des tautologischen Simplex  $\tau_n$  ist ein Erzeuger der relativen Homologiegruppe  $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ .

2.3.4. Einen meiner Ansicht nach anschaulicheren Zugang zur Berechnung dieser Homologiegruppen vermittels der ‘‘Mayer-Vietoris-Sequenz’’ erklären wir in 2.3.20. Er liefert jedoch keine explizite Beschreibung eines Erzeugers, und diese explizite Beschreibung werden wir brauchen, um den Zusammenhang zwischen simplizialer und singulärer Homologie zu klären.

*Beweis.* Für  $n = 0$  ist  $\Delta_n$  ein Punkt und  $\partial\Delta_n$  die leere Menge und der Satz ist unsere Aussage 1.2.11 über die Homologie eines Punktes. Den allgemeinen Fall folgern wir durch vollständige Induktion. Dazu betten wir  $\Delta_n$  ein in  $\Delta_{n+1}$ , indem wir als letzte Koordinate eine Null anfügen, und betrachten in  $\Delta_{n+1}$  die Spitze  $p = (0, 0, 0, \dots, 1)$ , die der Seitenfläche  $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$  gegenüberliegt. Weiter betrachten wir die Vereinigung  $\Lambda_{n+1} \subset \Delta_{n+1}$  aller Seitenflächen, die diese Spitze  $p$  enthalten, und die Isomorphismen

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1} \setminus p, \Lambda_{n+1} \setminus p) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

die von den Einbettungen aufgrund der Homotopieinvarianz und der Ausschneidung von  $p$  induziert werden. Die Randabbildung zur langen exakten Homologie-sequenz des Tripels  $(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$  liefert weiter Isomorphismen

$$H_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

und die erste Behauptung folgt durch Induktion. Unter diesen Isomorphismen geht die Klasse  $[\tau_{n+1}] \in H_{n+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1})$  über in  $(-1)^{n+1}[\tau_n] \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ , und so ergibt sich auch die zweite Behauptung mit vollständiger Induktion.  $\square$

**Korollar 2.3.5.** *Für  $n \geq 0$  wird die Homologie des  $n$ -Balls relativ zu seinem Rand gegeben durch die Formeln*

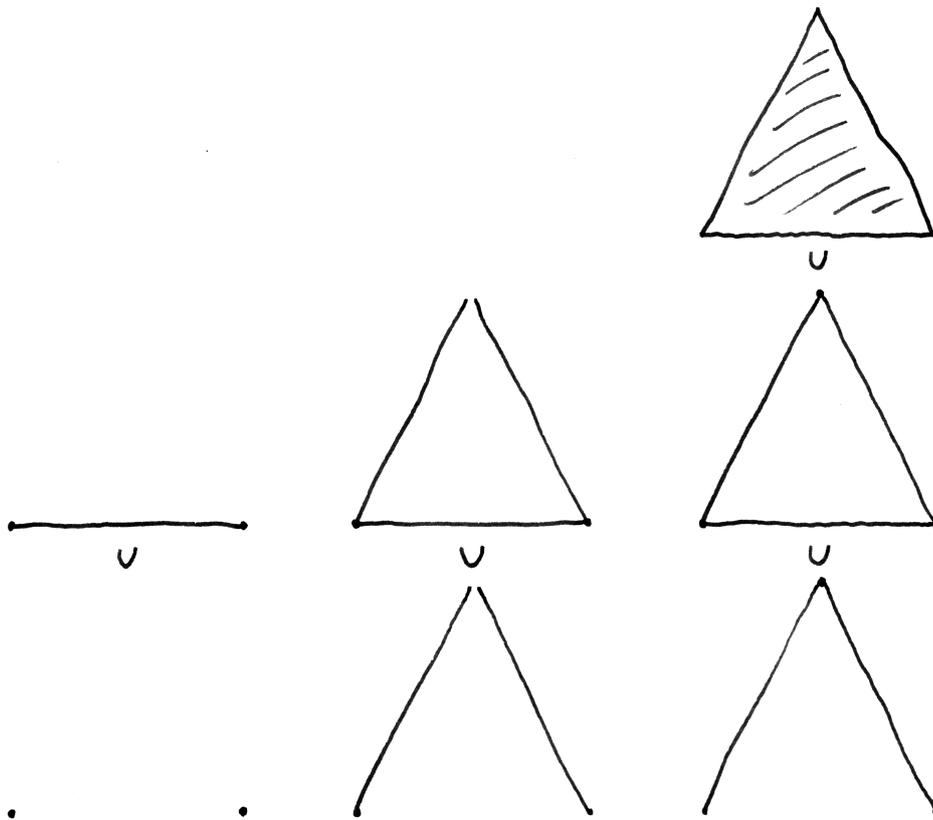
$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Das folgt sofort aus 2.3.3, da es etwa nach 3.2.3 einen Homöomorphismus  $\Delta_n \xrightarrow{\sim} D^n$  gibt, der eine Bijektion  $\partial\Delta_n \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$  induziert. Alternativ folgt es auch aus dem anschließenden Satz.  $\square$

**Satz 2.3.6.** *Die Homologiegruppen der Sphären  $S^n$  werden für  $n \geq 1$  gegeben durch*

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ oder } q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Die Nullsphare  $S^0$  besteht schlicht aus zwei Punkten, wir haben in diesem Fall also  $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sowie  $H_q(S^0) = 0$  für  $q > 0$ .*



Die Raumpaare und das Raumtripel aus dem Beweis von 2.3.3 im Fall  $n = 1$ .

*Beweis.* Das ergibt sich aus dem vorhergehenden Korollar 2.3.5 mit der langen exakten Homologiesequenz des Raumpaars  $(D^{n+1}, S^n)$ . Einen alternativen und vielleicht anschaulicheren Beweis mithilfe der sogenannten “Mayer-Vietoris-Sequenz” geben wir in 2.3.20. Er hat allerdings den Nachteil, keinen expliziten Erzeuger der Homologie zu liefern.  $\square$

**Korollar 2.3.7.** Für  $n \geq 0$  und jeden Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  für  $n \neq m$  nicht homöomorph.

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $p = 0$  annehmen. Die Einbettung  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  induziert nun aufgrund der Homotopieinvarianz 2.2.5 Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen und die Aussage folgt so aus 2.3.5.  $\square$

**Korollar 2.3.8.** Sei  $n \geq -1$ . Es gibt keine stetige Abbildung  $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ , deren Einschränkung auf  $S^n$  die Identität ist.

*Beweis.* Sei  $i : S^n \hookrightarrow D^{n+1}$  die Einbettung. Aus  $r \circ i = \text{id}$  folgt, daß die Verknüpfung

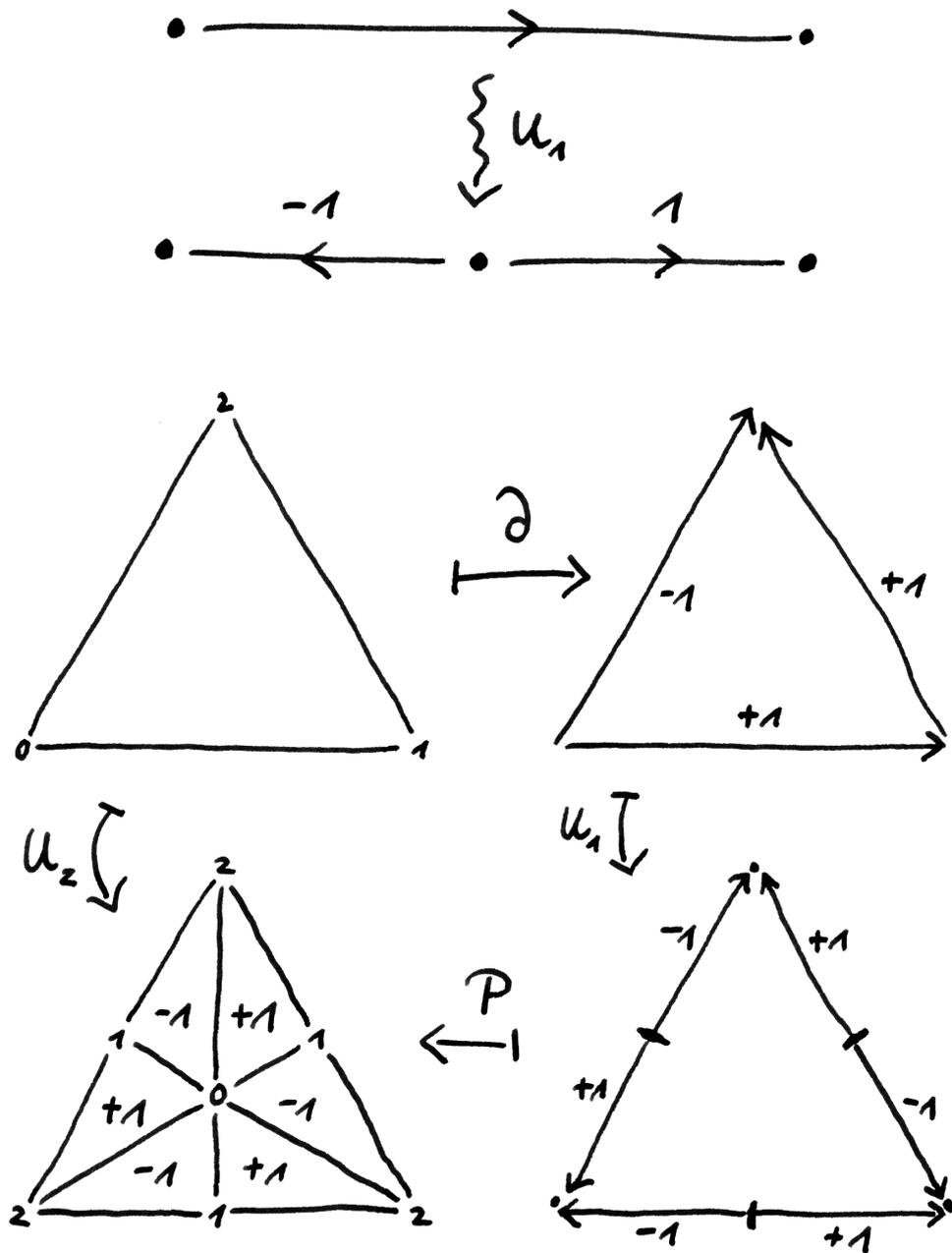
$$H_n S^n \rightarrow H_n D^{n+1} \rightarrow H_n S^n$$

von  $Hr$  mit  $Hi$  die Identität ist. Die Identität auf  $\mathbb{Z}$  kann aber nicht über 0 faktorisieren und das erledigt den Fall  $n \geq 1$ . Im Fall  $n = 0$  argumentiert man analog, daß die Identität auf  $\mathbb{Z}^2$  nicht über  $\mathbb{Z}$  faktorisieren kann. Der Fall  $n = -1$  ist eh klar.  $\square$

**Satz 2.3.9 (Fixpunktsatz von Brouwer).** Jede stetige Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  des abgeschlossenen  $n$ -Balls auf sich selber besitzt einen Fixpunkt.

*Beweis.* Sonst könnte man eine stetige Abbildung  $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$  konstruieren durch die Vorschrift, daß  $r(x)$  der Punkt ist, in dem der Strahl, der von  $r(x)$  ausgeht und durch  $x$  läuft, die Sphäre  $S^{n-1}$  trifft. Das stände jedoch im Widerspruch zum vorhergehenden Korollar 2.3.8.  $\square$

2.3.10. Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen zum Beweis des Ausschneidungssatzes. Die zentrale Rolle spielen hier die **Unterteilungsoperatoren**  $U_q : S_q X \rightarrow S_q X$ , die jeden Simplex “baryzentrisch unterteilen”. Wir konstruieren sie als natürliche Transformationen  $U_q : S_q \rightarrow S_q$ . Um solche natürlichen Transformationen festzulegen, brauchen wir ja nach Lemma 1.4.4 nur  $U_q(\tau_q) \in S_q(\Delta_q)$



Der Effekt der Unterteilungsoperatoren  $U_1$  und  $U_2$  auf Simplexes. Die Zahlen an den Ecken der Dreiecksflächen zeigen wieder, wohin die Vektoren der Standardbasis  $e_1, e_2, e_3$  des  $\mathbb{R}^3$ , deren konvexe Hülle ja der Standardsimplex  $\Delta_2$  ist, abgebildet werden.

anzugeben. Für jede konvexe Teilmenge  $K$  eines  $\mathbb{R}^n$  und jeden Punkt  $p \in K$  erinnern wir dazu an den Prismen-Operator  $P = P_p : S_q K \rightarrow S_{q+1} K$  aus dem Beweis von 1.2.14. Dann setzen wir  $U_q = 0$  für  $q < 0$  und definieren wir  $U_q$  für  $q \geq 0$  induktiv mittels der Vorschrift  $U_0(\tau_0) = \tau_0$  und  $U_q(\tau_q) = P U_{q-1}(\partial\tau_q)$  falls  $q > 0$ , wo  $P$  den Prismenoperator bezüglich des Schwerpunkts  $\frac{1}{q+1}(1, 1, \dots, 1)$  von  $\Delta_q$  bezeichnet.

**Lemma 2.3.11.** *Die Unterteilung  $U : SX \rightarrow SX$  ist eine Kettenabbildung.*

*Beweis.* Es gilt zu zeigen  $\partial U_q = U_{q-1} \partial$  für alle  $q$ . Wir zeigen die Gleichheit durch Induktion über  $q$ . Natürlich reicht es, die Gleichheit auf  $\tau_q$  zu zeigen. Die Fälle  $q = 0, 1$  überlassen wir dem Leser. Für  $q \geq 2$  haben wir

$$\begin{aligned} \partial U_q(\tau_q) &= \partial P U_{q-1} \partial(\tau_q) \\ &= (-P \partial + \text{id}) U_{q-1} \partial(\tau_q) \\ &= U_{q-1} \partial(\tau_q) \end{aligned}$$

die erste Gleichung nach Definition, die Zweite da  $\partial P + P \partial = \text{id}$  auf  $S_q \Delta_q$  für  $q \geq 1$ , die Dritte da  $\partial U_{q-1} = U_{q-2} \partial$  nach Induktion.  $\square$

**Lemma 2.3.12.** *Die Unterteilung ist in natürlicher Weise kettenhomotop zur Identität, es gibt in anderen Worten natürliche Transformationen*

$$T_q : S_q \Rightarrow S_{q+1}$$

mit  $\partial T_q + T_{q-1} \partial = U_q - \text{id}$  für alle  $q$ . Insbesondere induziert  $U$  die Identität auf der Homologie.

2.3.13. Dies Lemma wird sich später als eine Konsequenz des Satzes über azyklische Modelle 3.6.15 erweisen.

*Beweis.* Wir versuchen induktiv mögliche natürliche Transformationen  $T_q$  zu finden und müssen nur  $T_q(\tau_q) \in S_{q+1}(\Delta_q)$  angeben. Wir können mit  $T_{-1} = T_0 = 0$  beginnen und müssen dann induktiv die Gleichungen

$$\partial T_q(\tau_q) = -T_{q-1} \partial(\tau_q) + U_q(\tau_q) - \tau_q$$

lösen. Da  $H_q(\Delta_q) = 0$  für  $q \geq 1$  geht das, wenn die rechte Seite ein Zykel ist. Dazu rechnen wir stur mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} -\partial T_{q-1}(\partial\tau_q) + \partial U_q(\tau_q) - \partial\tau_q &= \\ &= (T_{q-2} \partial - U_{q-1} + \text{id})(\partial\tau_q) + \partial U_q(\tau_q) - \partial\tau_q = 0 \end{aligned}$$

$\square$

**Definition 2.3.14.** Gegeben eine Überdeckung  $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$  eines topologischen Raums  $X$  bezeichne  $S_q^\mathcal{V}X \subset S_qX$  die freie Gruppe über allen denjenigen Simplexes, die ganz in einem der  $V \in \mathcal{V}$  liegen. Wir nennen  $S_q^\mathcal{V}X$  die Gruppe der  $\mathcal{V}$ -feinen Ketten.

**Satz 2.3.15 (über feine Ketten).** Sei  $\mathcal{V}$  eine Überdeckung eines Raums  $X$  derart, daß selbst die offenen Kerne der Mengen aus  $\mathcal{V}$  schon  $X$  überdecken, in Formeln  $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V^\circ$ . So induziert die Einbettung  $S^\mathcal{V}X \hookrightarrow SX$  vom Komplex der  $\mathcal{V}$ -feinen Ketten in den Komplex aller singulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.

2.3.16. Mit 4.6.3 wird aus diesem Resultat sogar folgen, daß diese Einbettung eine Homotopieäquivalenz  $S^\mathcal{V}X \xrightarrow{\simeq} SX$  ist.

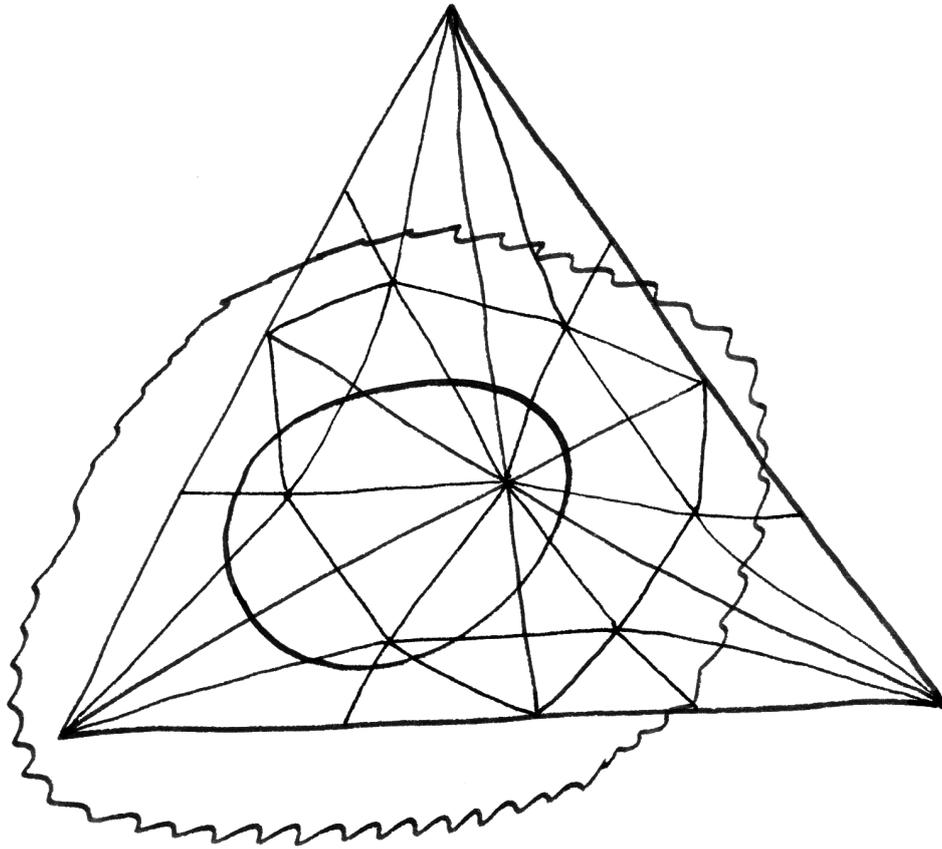
*Beweis.* Mit der langen exakten Homologiesequenz müssen wir nur zeigen, daß die Homologie von  $SX/S^\mathcal{V}X$  verschwindet. Nun bilden unsere Abbildungen  $U$  und  $T$  sicher  $S^\mathcal{V}X$  auf sich selber ab und induzieren also Operatoren  $\bar{U}, \bar{T}$  auf dem Quotienten. Offensichtlich ist auch  $\bar{U}$  homotop zur Identität vermittle  $\bar{T}$  und liefert also die Identität auf den Homologiegruppen von  $SX/S^\mathcal{V}X$ . Für jedes  $q$  und jede Kette  $\gamma \in S_qX$  gibt es aber nach dem anschließenden Lemma 2.3.17 ein  $n \gg 0$  mit  $U^n\gamma \in S_q^\mathcal{V}X$ , also  $\bar{U}^n\bar{\gamma} = 0$  für  $\bar{\gamma} \in S_qX/S_q^\mathcal{V}X$  die Nebenklasse von  $\gamma$ . Wir folgern  $\mathcal{H}_q(SX/S^\mathcal{V}X) = 0$ .  $\square$

**Lemma 2.3.17.** Sei  $\mathcal{V}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Für jedes  $q$  und jede Kette  $\gamma \in S_qX$  gibt es  $n \gg 0$  mit  $U^n\gamma \in S_q^\mathcal{V}X$ .

*Beweis.* Es reicht sicher, das Lemma für jeden Simplex  $\gamma : \Delta_q \rightarrow X$  zu zeigen. Nun sieht man, daß der maximale Durchmesser eines Simplex, der mit von Null verschiedenem Koeffizienten in  $U^n(\tau_q)$  vorkommt, für  $n \rightarrow \infty$  beliebig klein wird. Insbesondere ist für  $n \gg 0$  nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue jeder solche Simplex ganz in einer der Mengen  $\gamma^{-1}(V^\circ)$  mit  $V \in \mathcal{V}$  enthalten. Das bedeutet aber gerade  $U^n\gamma \in S_q^\mathcal{V}X$ .  $\square$

**Satz 2.3.18 (Ausschneidung).** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar und  $L \subset A$  eine Teilmenge, deren Abschluß im Inneren von  $A$  liegt, in Formeln  $\bar{L} \subset A^\circ$ . So liefert die Einbettung  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen, in Formeln

$$H_q(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\simeq} H_q(X, A)$$



Dieses Bild soll Anschauung für den Ausschneidungsisomorphismus geben.  $X$  ist darin die Papierebene,  $A$  alles außerhalb des kleinen Eis und  $L$  alles außerhalb der Zackenlinie. Das große Dreieck stellt einen singulären Zweisimplex in  $X$  dar, der relativ zu  $A$  ein Zykel ist, da eben sein Rand in  $A$  liegt. Nach zweimaliger baryzentrischer Unterteilung entsteht diese Art Spinnennetz, eine zu unserem Zweisimplex homologe singuläre Zweikette. Lassen wir aus dieser Zweikette alle Simplizes fort, die nicht in  $X \setminus L$  liegen, die also aus unserer Zackenlinie herauspieken, so repräsentiert der Rest immer noch dieselbe Homologieklassse in der relativen Homologie  $H_2(X, A)$ , die folglich herkommt von einer Homologieklassse in  $H_2(X \setminus L, A \setminus L)$ . Damit sollte zumindest die Surjektivität der von der Einbettung  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  auf der Homologie induzierten Abbildung anschaulich klar werden.

*Beweis.* Wir betrachten die Überdeckung  $X = A \cup (X \setminus L)$ , geben ihr den Namen  $\mathcal{V}$  und bilden ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
 S(A \setminus L) & \hookrightarrow & SA \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^\vee X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S(X \setminus L) & \hookrightarrow & SX \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & SX \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S(X \setminus L, A \setminus L) & \twoheadrightarrow & S(X, A) & \twoheadrightarrow & SX/S^\vee X
 \end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die beiden oberen horizontalen Inklusionen die “diagonalen” Einbettungen  $z \mapsto (z, z)$  sein sollen und die folgenden Surjektionen die Differenzen  $(x, y) \mapsto x - y$ . Nach dem Neunerlemma ist die untere Horizontale dann auch exakt, und da nach dem Satz über feine Ketten 2.3.15 die Homologie von  $SX/S^\vee X$  verschwindet, folgt unser Satz aus der langen exakten Homologiesequenz.  $\square$

2.3.19. Sei  $X = X_1 \cup X_2$  ein topologischer Raum mit einer Überdeckung  $\mathcal{V}$  durch zwei offene Teilmengen. Wir betrachten die Einbettungen

$$(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_\nu} X_\nu \xrightarrow{j_\nu} X$$

und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$S(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow SX_1 \oplus SX_2 \twoheadrightarrow S^\vee X$$

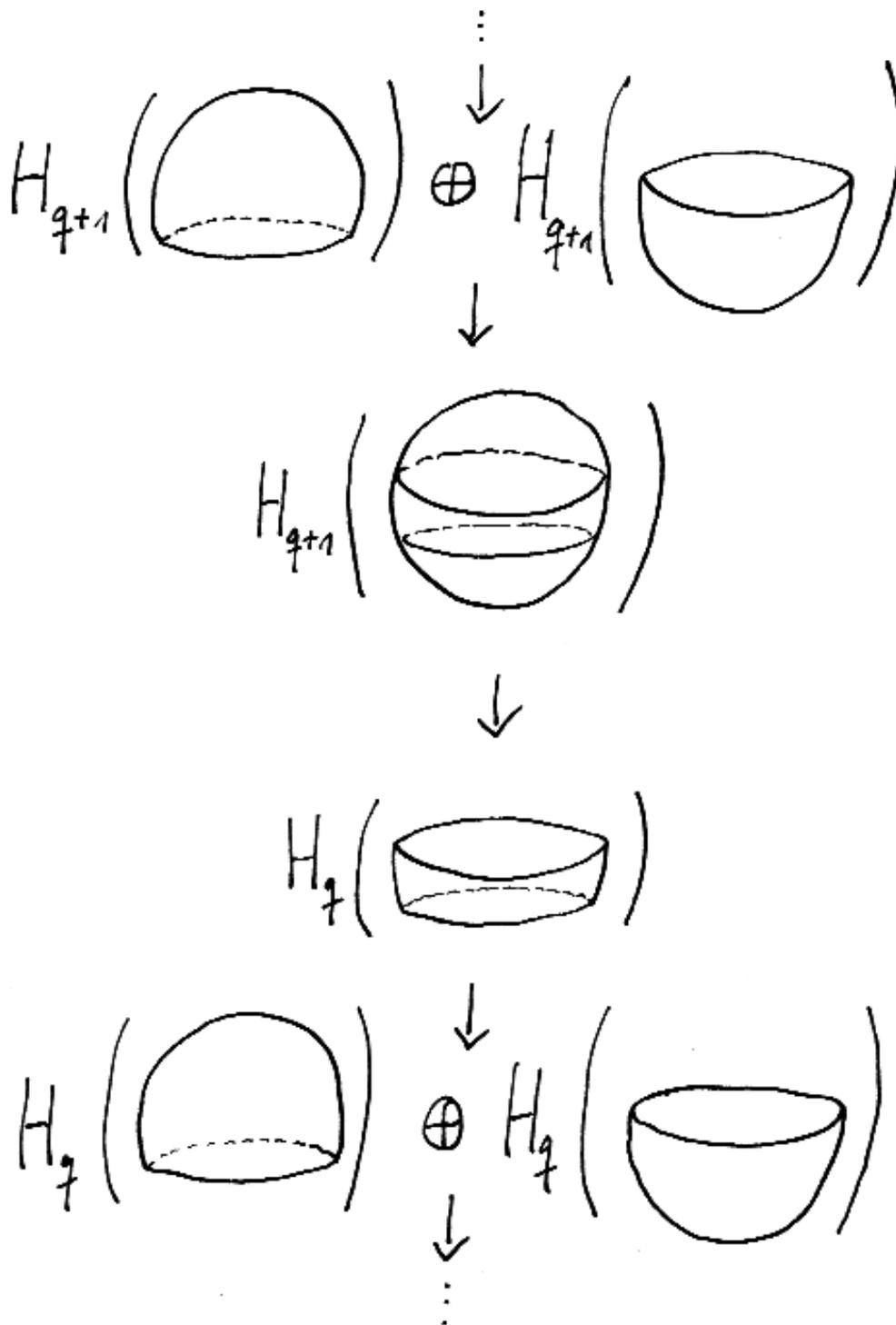
Hier fassen wir die Elemente der direkten Summe als Spaltenvektoren auf, die erste Abbildung wird gegeben durch die Spaltenmatrix  $(Si_1, Si_2)^\top$ , und die zweite durch die Zeilenmatrix  $(Sj_1, -Sj_2)$ . Nehmen wir dazu die lange exakte Homologiesequenz und verwenden die von der Einbettung  $S^\vee X \hookrightarrow SX$  induzierten Identifikationen  $\mathcal{H}_q(S^\vee X) \xrightarrow{\sim} H_q X$ , so erhalten wir die sogenannte **Mayer-Vietoris-Sequenz**, eine lange exakte Sequenz der Gestalt

$$\dots H_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \dots$$

Die ersten beiden Abbildungen dieser Sequenz werden gegeben durch die Spaltenmatrix  $(H_q i_1, H_q i_2)^\top$  und die Zeilenmatrix  $(H_q j_1, -H_q j_2)$ , die dritte Abbildung ist nicht ganz so leicht explizit anzugeben.

**Beispiel 2.3.20 (Homologie der Sphären, Variante).** Mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz 2.3.19 bestimmen wir ein weiteres Mal die Homologie der Sphären. Man schreibt für diesen Beweis die Kugelschale als die Vereinigung zweier offener etwas über den Äquator hinaus verdickter Hemisphären  $S^n = U^+ \cup U^-$  und erhält nach 2.3.19 eine lange exakte Sequenz

$$H_q(U^+) \oplus H_q(U^-) \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_{q-1}(U^+ \cap U^-) \rightarrow H_{q-1}(U^+) \oplus H_{q-1}(U^-)$$



Berechnung der Homologie der Sphäre mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz.

und so weiter. Der Schnitt  $U^+ \cap U^-$  ist homotopieäquivalent zum Äquator  $S^{n-1}$  und die Hemisphären sind beide zusammenziehbar und haben folglich dieselbe Homologie wie ein Punkt. Man sieht nun explizit leicht ein, daß wir für  $n = 0, 1$  das behauptete Ergebnis erhalten, und für  $n \geq 2$  folgt durch Betrachten der obigen Sequenz

$$H_q(S^n) \xrightarrow{\sim} H_{q-1}(U^+ \cap U^-) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$$

für  $q \geq 2$  und  $H_1(S^n) = 0$  und  $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ . Die Homologie der Sphären ergibt sich durch vollständige Induktion. Diese Herleitung gefällt mir eigentlich besser als die Herleitung aus 2.3.3, sie liefert jedoch nicht unmittelbar die Beschreibung eines Erzeugers der Homologie.

**Übung 2.3.21 (Relative Mayer-Vietoris-Sequenz).** Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $U, V \subseteq X$  zwei offene Teilmengen. Betrachten wir die offene Überdeckung von  $U \cup V$  durch  $U$  und  $V$  und bilden das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S(U \cap V) & \hookrightarrow & SU \oplus SV & \twoheadrightarrow & S^{\vee}(U \cup V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ SX & \hookrightarrow & SX \oplus SX & \twoheadrightarrow & SX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X, U \cap V) & \hookrightarrow & S(X, U) \oplus S(X, V) & \twoheadrightarrow & S(X)/S^{\vee}(U \cup V) \end{array}$$

mit “diagonalen” Abbildungen in den linken Horizontalen und “Differenzen von erstem minus zweitem Term” in den rechten Horizontalen, so entsteht in der unteren Zeile eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Die natürliche Surjektion  $S(X)/S^{\vee}(U \cup V) \twoheadrightarrow S(X, U \cup V)$  induziert weiter Isomorphismen auf der Homologie, und so erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_q(X, U) \oplus H_q(X, V) \rightarrow H_q(X, U \cup V) \rightarrow H_{q-1}(X, U \cap V) \rightarrow \dots$$

und die Randoperatoren dieser Sequenz bilden mit den Randoperatoren der Mayer-Vietoris-Sequenz und den Randoperatoren der langen exakten Homologiesequenzen nach 2.2.13 ein bis auf Vorzeichen kommutierendes Viereck.

**Ergänzende Übung 2.3.22.** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaars. Bezeichne  $X/A$  den Raum mit Quotiententopologie, der entsteht, wenn man  $A$  zu einem Punkt identifiziert. Man zeige: Gibt es  $U$  mit  $A \subset U \subset X$  derart, daß die Einbettungen  $A \hookrightarrow U$  und  $A/A \hookrightarrow U/A$  Homotopieäquivalenzen sind, so liefert die offensichtliche Abbildung Isomorphismen

$$H_q(X, A) \xrightarrow{\sim} H_q(X/A, A/A)$$

## 2.4 Homologie von Simplicialkomplexen

**Definition 2.4.1.** Seien  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex und  $\Delta(\mathcal{K})$  der zugehörige Polyeder. Im Komplex  $S\Delta(\mathcal{K})$  der singulären Ketten unseres Polyeders betrachten wir den Unterkomplex

$$S^s\Delta(\mathcal{K})$$

aller **simplicialen Ketten**, wo  $S^s_q\Delta(\mathcal{K}) \subset S_q\Delta(\mathcal{K})$  definiert ist als das Erzeugnis aller im Sinne von 2.4.10 simplicialen Abbildungen  $\Delta_q \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$ . Derartige simpliciale Abbildungen brauchen keineswegs injektiv zu sein, zum Beispiel ist die konstante Abbildung eines Standardsimplex auf eine Ecke durchaus auch simplicial.

2.4.2. Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex. Die Gruppenhomomorphismen  $S^s_q\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S_q\mathcal{K}$  von den simplicialen Ketten in die Simplicialketten, die auf injektiven simplicialen Abbildungen  $\Delta_q \hookrightarrow \Delta(\mathcal{K})$  in der offensichtlichen Weise erklärt sind und auf nichtinjektiven simplicialen Abbildungen  $\Delta_q \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$  den Wert Null annehmen, definieren eine Kettenabbildung  $S^s\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S\mathcal{K}$ . Um das zu sehen, muß man nur die Verträglichkeit mit den Randoperatoren nachzuweisen. Das ist nicht weiter schwierig und sei dem Leser überlassen.

**Satz 2.4.3 (Simpliciale als singuläre Homologie).** Für jeden Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  induzieren die Kettenabbildung aus 2.4.2 von den simplicialen Ketten in die Simplicialketten sowie die Einbettung von den simplicialen Ketten in die singulären Ketten  $S\mathcal{K} \leftarrow S^s\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S\Delta(\mathcal{K})$  Isomorphismen auf allen Homologiegruppen

$$H_q\mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}_q(S^s\Delta(\mathcal{K})) \xrightarrow{\sim} H_q(\Delta(\mathcal{K}))$$

*Ergänzung 2.4.4.* Aus 4.6.3 und 2.4.2 wird im übrigen sogar folgen, daß die fraglichen Kettenabbildungen sämtlich Homotopieäquivalenzen sind.

*Beweis.* Wir wählen eine Anordnung  $\leq$  der Menge  $E$  der Ecken von  $\mathcal{K}$ , was nach 5.1.27 stets möglich ist. Diese Wahl liefert uns auch eine Anordnung auf jedem Simplex, die wir verwenden, um jedem Simplex  $s \in \mathcal{K}_q$  denjenigen angeordneten Simplex  $\langle s \rangle = \langle s \rangle^\leq \in \mathcal{K}_q^\leq$ ,  $\langle s \rangle : \{0, \dots, q\} \hookrightarrow E$  zuzuordnen, der Bild  $s$  hat und streng monoton wächst. Zu jedem angeordneten Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}_q^\leq$  definieren wir dann weiter in  $S^s_q\Delta(\mathcal{K})$  den simplicialen  $q$ -Simplex

$$\sigma = [\sigma(0), \dots, \sigma(q)] : \Delta_q \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$$

durch die Vorschrift  $(x_0, \dots, x_q) \mapsto x_0\widetilde{\sigma(0)} + \dots + x_q\widetilde{\sigma(q)}$  in den Notationen aus 2.4.7 und machen in der Notation keinen Unterschied zwischen einem angeordneten Simplex und der zugehörigen simplicialen Kette. Insbesondere ist für jeden

$q$ -Simplex  $s \in \mathcal{K}_q$  also  $\langle s \rangle$  ein Homöomorphismus  $\Delta_q \xrightarrow{\sim} \Delta(s)$ . Die von allen  $\langle s \rangle$  mit  $s \in \mathcal{K}_q$  erzeugte Untergruppe von  $S_q^s \Delta(\mathcal{K})$  notieren wir

$$S_q^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$$

und nennen sie die Gruppe der **ordnungsverträglichen simplizialen  $q$ -Ketten von  $\mathcal{K}$** . Offensichtlich bilden die ordnungsverträglichen simplizialen Ketten einen Unterkomplex  $S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \subset S^s \Delta(\mathcal{K})$  im Komplex aller simplizialen Ketten von  $\Delta(\mathcal{K})$ , und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S\mathcal{K} & \leftarrow & S^s \Delta(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{K}) \\ & \swarrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

Der schräge Pfeil nach links oben ist offensichtlich ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. Nun zeigen wir in den anschließenden Propositionen 2.4.5 und 2.4.7, daß die beiden anderen Pfeile nach oben beide Isomorphismen auf der Homologie induzieren. Daraus folgt dann der Satz.  $\square$

**Proposition 2.4.5.** *Für jede Anordnung der Ecken eines Simplizialkomplexes  $\mathcal{K}$  liefert die Einbettung  $S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S\Delta(\mathcal{K})$  der ordnungsverträglichen simplizialen Ketten in alle singulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

*Beweis.* Wir schreiben kurz  $\Delta(\mathcal{K}) = X$  und setzen für  $k \in \mathbb{Z}$

$$X_k = \bigcup_{s \in \mathcal{K}_q, q \leq k} \Delta(s)$$

Dieser Raum heißt das  **$k$ -Skelett** von  $\mathcal{K}$ . Nun betrachten wir für alle  $k$  das folgende kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} S^{\text{os}} X_k & \hookrightarrow & S^{\text{os}} X_{k+1} & \twoheadrightarrow & S^{\text{os}} X_{k+1} / S^{\text{os}} X_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ SX_k & \hookrightarrow & SX_{k+1} & \twoheadrightarrow & SX_{k+1} / SX_k \end{array}$$

Das zugehörige Diagramm von langen exakten Homologiesequenzen schreiben wir

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H_{q+1}^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) & \rightarrow & H_q^{\text{os}} X_k & \rightarrow & H_q^{\text{os}} X_{k+1} & \rightarrow & H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dots & H_{q+1}(X_{k+1}, X_k) & \rightarrow & H_q X_k & \rightarrow & H_q X_{k+1} & \rightarrow & H_q(X_{k+1}, X_k) & \dots \end{array}$$

und werden nun durch Induktion über  $k$  zeigen, daß  $H_q^{\text{os}} X_k \rightarrow H_q X_k$  ein Isomorphismus ist für alle  $k$  und  $q$ . Für  $k < 0$  ist das klar. Im anschließenden Lemma

2.4.6 werden wir zeigen, daß  $H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) \rightarrow H_q(X_{k+1}, X_k)$  ein Isomorphismus ist für alle  $q$  und alle  $k$ . Der Induktionsschritt besteht dann im Anwenden des Fünferlemmas, und unter der Zusatzannahme  $X = X_k$  für  $k \gg 0$  ist unser Satz damit bereits bewiesen. Im allgemeinen bemerken wir zusätzlich, daß nach 2.4.15 jede singuläre Kette von  $X$  schon in einem  $X_k$  liegt, und überlassen den Rest des Beweises dem Leser zur Übung. Später wird er den Beweis auch mithilfe des Satzes über die Exaktheit filtrierender Kolimites 5.1.29 direkt beenden können.  $\square$

**Lemma 2.4.6.** *Die offensichtlichen Abbildungen auf den relativen Ketten liefern Isomorphismen  $H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) \xrightarrow{\sim} H_q(X_{k+1}, X_k)$ .*

*Beweis.* Die linke Seite ist hier die Homologie eines Komplexes, der nur im Grad  $k + 1$  lebt. Genauer ist  $H_{k+1}^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k)$  frei erzeugt von den Nebenklassen der ordnungstretäglichen simplizialen Ketten  $\langle s \rangle$  für  $s \in \mathcal{K}_{k+1}$ , und bei  $q \neq k + 1$  verschwindet unser Komplex mitsamt seiner Homologie. Wir untersuchen nun die rechte Seite  $H_q(X_{k+1}, X_k)$  und betrachten dazu das ‘‘verdickte  $k$ -Skelett’’  $U_k \subset X_{k+1}$ , das wir erhalten, indem wir aus  $X_{k+1}$  die Schwerpunkte aller  $(k + 1)$ -Simplizes entfernen. Die beiden Einbettungen

$$(X_{k+1}, X_k) \hookrightarrow (X_{k+1}, U_k) \hookrightarrow (X_{k+1} \setminus X_k, U_k \setminus X_k)$$

induzieren Isomorphismen auf der relativen Homologie: Die Linke nach 2.2.5 und 1.4.1, da  $X_k \hookrightarrow U_k$  eine Homotopieäquivalenz ist und die Rechte mit Ausschneidung des  $k$ -Skeletts  $X_k$ . Das Raumpaars rechts ist aber schlicht die disjunkte unzusammenhängende Vereinigung über alle  $(k + 1)$ -Simplizes  $s \in \mathcal{K}_{k+1}$  der Raumpaare  $(\Delta^\circ(s), \Delta^\circ(s) \setminus b(s))$ , wo wir  $\Delta^\circ(s)$  für den ‘‘offenen’’ Simplex schreiben und mit  $b(s) = \frac{1}{k+1}(p_0 + \dots + p_k)$  den Schwerpunkt von  $\Delta(s)$  bezeichnen. Zusammenfassend erhalten wir also mit den offensichtlichen Abbildungen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X_{k+1}, U_k) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_s H_q(\Delta^\circ(s), \Delta^\circ(s) \setminus b(s)) \\ \parallel & & \downarrow \wr \\ H_q(X_{k+1}, U_k) & \leftarrow & \bigoplus_s H_q(\Delta(s), \Delta(s) \setminus b(s)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ H_q(X_{k+1}, X_k) & \leftarrow & \bigoplus_s H_q(\Delta(s), \partial\Delta(s)) \end{array}$$

wo die Summen jeweils über alle  $(k + 1)$ -Simplizes  $s \in \mathcal{K}_{k+1}$  laufen und wir mit  $\partial\Delta(s)$  ähnlich wie in 2.3.3 das  $k$ -Skelett von  $\Delta(s)$  bezeichnen. Die mit  $\sim$  bezeichneten Pfeile darin sind offensichtlich Isomorphismen, und die übrigen Pfeile folglich auch. Nach 2.3.3 wissen wir aber, daß  $H_q(\Delta(s), \partial\Delta(s))$  verschwindet für  $q \neq k + 1$  und daß es für  $q = k + 1$  frei ist vom Rang 1 und erzeugt wird von der Klasse von  $\langle s \rangle$ . Das zeigt das Lemma.  $\square$

**Proposition 2.4.7.** Für jede Anordnung der Ecken eines Simplicialkomplexes  $\mathcal{K}$  liefert die Einbettung  $S^{\text{os}}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S^{\text{s}}\Delta(\mathcal{K})$  der ordnungsverträglichen simplicialen Ketten in alle simplicialen Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.

*Beweis.* Den Fall, daß unser Simplicialkomplex nur aus einem Simplex besteht, erledigen 1.1.9 und das anschließende Lemma 2.4.8. Den Fall, daß unser Simplicialkomplex endlich ist, folgern wir induktiv: Bezeichne in der Tat  $H_q^{\text{s}}\mathcal{K} = \mathcal{H}_q(S^{\text{s}}\Delta(\mathcal{K}))$  die Homologie des Komplexes der simplicialen Ketten im Polyeder eines Simplicialkomplexes  $\mathcal{K}$ . Ist  $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$  eine Darstellung unseres Simplicialkomplexes als Vereinigung zweier Unterkomplexe, so liefert der Beweis der Mayer-Vietoris-Sequenz auch in dieser Situation Mayer-Vietoris-Sequenzen für  $H^{\text{os}}$  und  $H^{\text{s}}$ . Mit dem Fünferlemma und Induktion über die Zahl der Simplexe unseres Simplicialkomplexes sehen wir so, daß die Proposition für endliche Simplicialkomplexe folgt, sobald wir sie für Simplexe kennen. Der Fall beliebiger Simplicialkomplexe hinwiederum folgt aus dem Fall endlicher Simplicialkomplexe mit etwas Nachdenken oder formal mit der Exaktheit filtrierender Kolimites 5.1.29.  $\square$

**Lemma 2.4.8.** Für jede nichtleere Menge  $E$  ist der Komplex von freien abelschen Gruppen  $0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}E \leftarrow \mathbb{Z}E^2 \leftarrow \mathbb{Z}E^3 \leftarrow \dots$  exakt, wo der Randoperator gegeben wird durch

$$\partial(v_0, \dots, v_q) = \sum (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q)$$

2.4.9. Dieser Komplex ist kanonisch isomorph zu dem um die Augmentation nach  $\mathbb{Z}$  erweiterten Komplex der simplicialen Ketten  $S^{\text{s}}\Delta(E)$  des Simplex  $\Delta(E)$  mit Ecken  $E$ .

*Beweis.* Halten wir eine Ecke  $v \in E$  fest und definieren  $\delta : \mathbb{Z}E^q \rightarrow \mathbb{Z}E^{q+1}$  durch die Vorschrift  $\delta(v_0, \dots, v_q) = (v, v_0, \dots, v_q)$ , so prüft man leicht an jeder Stelle  $\partial\delta + \delta\partial = \text{id}$ . Also ist unser Komplex sogar nullhomotop.  $\square$

**Korollar 2.4.10.** Ist  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex, so benötigt man höchstens  $|\mathcal{K}_q|$  Erzeuger für die Gruppe  $H_q(\Delta(\mathcal{K}))$ .

*Beweis.* Hierzu braucht man außer 2.4.3 nur noch die Erkenntnis 4.3.13, daß man für eine Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe höchstens soviel Erzeuger benötigt wie für die ursprüngliche Gruppe.  $\square$

*Ergänzung 2.4.11.* Wenn wir Homologie mit Koeffizienten betrachten wie in 1.2.9, so bleiben alle bisherigen Resultate und Beweise mit den hoffentlich offensichtlichen Modifikationen gültig, insbesondere auch Satz 2.4.3 über die Beziehung zwischen singularer und simplicialer Homologie.

**Definition 2.4.12.** Für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  setzt man

$$b_q(X) := \dim_{\mathbb{Q}} H_q(X; \mathbb{Q}) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

und nennt diese Zahl die  **$q$ -te Betti-Zahl** von  $X$ . Sind alle Betti-Zahlen endlich und verschwinden sie für  $q \gg 0$ , so heißt ihre alternierende Summe

$$\chi(X) = \sum (-1)^q b_q(X) \in \mathbb{Z}$$

die **Euler-Charakteristik** von  $X$  und wir sagen, unser Raum “hat eine wohldefinierte Eulercharakteristik”.

2.4.13. Wir haben  $\chi(X) = |X|$  für einen endlichen diskreten Raum mit  $|X|$  Punkten. Es ist auch für allgemeinere Räume oft sinnvoll,  $\chi(X)$  als eine Verallgemeinerung der “Zahl der Punkte von  $X$ ” aufzufassen. Eine mögliche Begründung wird in 2.4.20 skizziert, eine weitere in 3.6.1 in Gestalt der Formel  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ . Wir schreiben bei einem beliebigen Körper

$$\chi(X; k) = \sum (-1)^q \dim_k H_q(X; k)$$

wann immer dieser Ausdruck sinnvoll ist, d.h. alle Summanden endlich sind und fast alle Summanden verschwinden.

**Korollar 2.4.14 (Eulercharakteristik von Simplicialkomplexen).** *Die Eulercharakteristik des Polyeders eines endlichen Simplicialkomplexes  $\mathcal{K}$  wird für jeden Körper  $k$  gegeben durch die der Zahl der Simplexes gerader Dimension abzüglich der Zahl der Simplexes ungerader Dimension, in Formeln*

$$\chi(\Delta(\mathcal{K}); k) = \sum (-1)^q |\mathcal{K}_q|$$

*Beweis.* Wir wenden das anschließende Lemma 2.4.15 an auf den Komplex  $S(\mathcal{K}; k)$  der Simplicialketten mit Koeffizienten in  $k$ , dessen Homologie ja nach 2.4.3 genau die Homologie von  $\Delta(\mathcal{K})$  mit Koeffizienten in  $k$  ist.  $\square$

**Lemma 2.4.15.** *Ist  $A$  ein Komplex endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräume und verschwinden von den  $A_i$  alle bis auf endlich viele, so gilt*

$$\sum (-1)^i \dim_k A_i = \sum (-1)^i \dim_k \mathcal{H}_i A$$

2.4.16. Man nennt die linke Seite hier auch die **Eulercharakteristik** des Kettenkomplexes  $A$  und die Gleichung besagt dann, daß ein Kettenkomplex dieselbe Eulercharakteristik hat wie seine Homologie.

*Beweis.* Das folgt sofort aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\dim A_i &= \dim(\ker \partial_i) + \dim(\operatorname{im} \partial_i) \\ \dim \mathcal{H}_i A &= \dim(\ker \partial_i) - \dim(\operatorname{im} \partial_{i+1})\end{aligned}\quad \square$$

**Korollar 2.4.17 (Euler'scher Polyedersatz).** *Ist  $\Delta(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} S^2$  eine Triangulierung der Kugelschale, so gilt  $|\mathcal{F}_0| - |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = 2$ , in Worten*

$$|\text{Ecken}| - |\text{Kanten}| + |\text{Flächen}| = 2$$

2.4.18. Dies Resultat von Euler, ein Vorläufer der Homologietheorie, hat der Euler-Charakteristik ihren Namen gegeben. Man folgert es auch allgemeiner für in geeigneter Weise definierte "polyedrische" Zerlegungen der Kugelschale wie sie etwa die platonischen Körper liefern, indem man derartige polyedrische Zerlegungen zu Triangulierungen verfeinert. Zum Beispiel hat ein Würfel 6 Flächen, 12 Kanten und 8 Ecken, und in der Tat gilt  $6 - 12 + 8 = 2$ .

*Übung 2.4.19.* Man bestimme die Eulercharakteristik des Torus  $S^1 \times S^1$ .

*Übung 2.4.20.* Ein topologischer Raum  $X$  werde von zwei offenen Teilmengen überdeckt,  $X = U \cup V$ , und beide sowie ihr Schnitt mögen im Sinne von 2.4.12 eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzen. Man zeige, daß dann auch der ursprüngliche Raum eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzt und daß gilt

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$$

**Lemma 2.4.21.** *Ist  $A$  ein Komplex endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräume und  $\varphi : A \rightarrow A$  ein Homomorphismus von Komplexen und verschwinden von den  $A_i$  alle bis auf endlich viele, so gilt für die Spuren*

$$\sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi|A_i) = \sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi|\mathcal{H}_i A)$$

2.4.22. Der Übersichtlichkeit halber haben wir die von  $\varphi$  auf den  $A_i$  und den  $\mathcal{H}_i A$  induzierten Abbildungen auch kurzerhand  $\varphi$  notiert. Ist  $\varphi$  die Identität, so erhalten wir zumindest im Fall eines Körpers  $k$  der Charakteristik Null unser Lemma 2.4.15 als Spezialfall.

*Beweis.* Das folgt sofort aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\varphi|A_i) &= \operatorname{tr}(\varphi| \ker \partial_i) + \operatorname{tr}(\varphi| \operatorname{im} \partial_i) \\ \operatorname{tr}(\varphi|\mathcal{H}_i A) &= \operatorname{tr}(\varphi| \ker \partial_i) - \operatorname{tr}(\varphi| \operatorname{im} \partial_{i+1})\end{aligned}$$

die man hinwiederum aus der Additivität der Spur 6.2.17 folgert. □

**Satz 2.4.23 (Simplizialer Fixpunktsatz).** Sei  $\varphi : (E, \mathcal{K}) \rightarrow (E, \mathcal{K})$  eine simpliziale Selbstabbildung eines endlichen Simplizialkomplexes mit  $\varphi(s) \neq s$  für alle Simplizes mit mindestens zwei Ecken. So gilt für die Zahl der Fixpunkte von  $\varphi$  die Formel

$$|E^\varphi| = \sum (-1)^i \operatorname{tr}(H_i \varphi | H_i \mathcal{K})$$

*Beweis.* Beide Seiten stimmen aufgrund von Lemma 2.4.21 und aufgrund unserer Annahmen überein mit  $\sum (-1)^i \operatorname{tr}(S_i \varphi | S_i \mathcal{K})$   $\square$

*Jetzt sollte simpliziale Approximationen diskutieren und zeigen, daß stetige Selbstabbildungen der Sphären  $S^n$  mit von  $-(-1)^n$  verschiedenem Abbildungsgrad stets einen Fixpunkt haben.*

## 2.5 Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten

**Satz 2.5.1 (Wilder).** Die Homologiegruppen von kompakten Mannigfaltigkeiten sind stets endlich erzeugt. Ist allgemeiner  $X$  eine Mannigfaltigkeit und  $K \subset X$  eine kompakte Teilmenge, so ist das Bild von  $H_n K \rightarrow H_n X$  endlich erzeugt für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Ergänzung 2.5.2.* Der Satz gilt mit demselben Beweis auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand und für Homologie mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Ring.

*Beweis.* Per Induktion über  $n$  mithilfe des anschließenden Lemmas.  $\square$

**Lemma 2.5.3.** Sei  $X$  ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und  $n \geq 0$  eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß gilt:

1. Für jedes Paar  $M \subset W$  von Teilmengen von  $X$  mit  $M$  kompakt und  $W$  offen in  $X$  ist das Bild von  $H_{n-1} M \rightarrow H_{n-1} W$  endlich erzeugt;
2. Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine Umgebung mit endlich erzeugter  $n$ -ter Homologie.

So ist  $\operatorname{im}(H_n K \rightarrow H_n X)$  endlich erzeugt für jedes Kompaktum  $K \subset X$ .

*Beweis.* Wir betrachten in der Potenzmenge von  $X$  die Teilmenge

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n = \left\{ K \subset X \mid \begin{array}{l} K \text{ ist kompakt und besitzt eine offene} \\ \text{Umgebung } U \Subset X \text{ derart, daß das Bild} \\ \text{von } H_n U \rightarrow H_n X \text{ endlich erzeugt ist} \end{array} \right\}$$

Nach unseren Annahmen besitzt jeder Punkt von  $x$  eine Umgebung aus  $\mathcal{E}$ . Aus  $K \in \mathcal{E}$  und  $L \Subset K$  folgt ohne Schwierigkeiten  $L \in \mathcal{E}$ . Können wir zeigen, daß

mit zwei Kompakta  $L$  und  $K$  stets auch ihre Vereinigung zu  $\mathcal{E}$  gehört, so gehört offensichtlich jede kompakte Teilmenge von  $X$  zu  $\mathcal{E}$  und wir sind fertig. Seien also  $K, L \in \mathcal{E}$  und  $U, V \subseteq X$  offen mit  $K \subset U$  und  $L \subset V$  und  $\text{im}(H_n U \rightarrow H_n X)$  und  $\text{im}(H_n V \rightarrow H_n X)$  endlich erzeugt. Da  $X$  nach Voraussetzung lokal kompakt ist, finden wir sicher auch  $U_1 \subseteq U, V_1 \subseteq V$  mit  $K \subset U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U$  und  $L \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V$  und  $\bar{U}_1, \bar{V}_1$  kompakt. Dann betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(U_1 \cup V_1) & \rightarrow & H_{n-1}(U_1 \cap V_1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_n U \oplus H_n V & \rightarrow & H_n(U \cup V) & \rightarrow & H_{n-1}(U \cap V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 H_n X \oplus H_n X & \rightarrow & H_n X & & 
 \end{array}$$

Das Bild der linken Vertikale ist endlich erzeugt nach Wahl von  $U$  und  $V$ . Das Bild der rechten Vertikalen ist endlich erzeugt nach Annahme 1, angewandt auf  $M = \bar{U}_1 \cap \bar{V}_1$  und  $W = U \cap V$ . Die mittlere Horizontale ist exakt als Teil einer Mayer-Vietoris-Sequenz. Dann muß aber nach dem anschließenden Lemma auch das Bild der Komposition in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt sein und es folgt  $L \cup K \in \mathcal{E}$ .  $\square$

**Lemma 2.5.4.** *Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & \rightarrow & B \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 C & \rightarrow & D & \rightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 F & \rightarrow & G & & 
 \end{array}$$

*Ist das Bild der beiden äußeren Vertikalen  $CF$  und  $BE$  endlich erzeugt und ist die mittlere Horizontale exakt bei  $D$ , so ist auch das Bild der Komposition  $AG$  in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt.*

*Beweis.* Dem Leser überlassen.  $\square$

## 2.6 Variationen zur simplizialen Homologie\*

2.6.1. Will man explizite Rechnungen durchführen, so ist es oft hilfreich, mit einem etwas allgemeineren Begriff von Triangulierung zu arbeiten, bei dem man weniger Simplexe benötigt. Auch für theoretische Überlegungen sind die im folgenden erklärten Begriffsbildungen oft nützlich, wir werden uns bei der weiteren Entwicklung der Homologietheorie jedoch nicht darauf stützen.

**Definition 2.6.2.** Gegeben  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $[n]$  die Menge

$$[n] = \{0, 1, \dots, n\}$$

Bezeichne  $\Delta^<$  die Kategorie mit Objekten  $[n]$  für  $n \in \mathbb{N}$  und streng monoton wachsenden Abbildungen als Morphismen und  ${}^<\Delta := (\Delta^<)^{\text{opp}}$  ihre opponierte Kategorie. Eine **semisimpliziale Menge**  $X$ , bei Hatcher [Hat02] auch  **$\Delta$ -Komplex** genannt, ist ein kontravarianter Funktor  $X$  von der Kategorie  $\Delta^<$  in die Kategorie der Mengen, in Formeln

$$X : {}^<\Delta \rightarrow \text{Ens}$$

Gegeben eine semisimpliziale Menge  $X$  bilden wir den zugehörigen topologischen Raum

$$\Delta(X) = \left( \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X[n] \times \Delta_n \right) / \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  erzeugt wird durch die Bedingungen

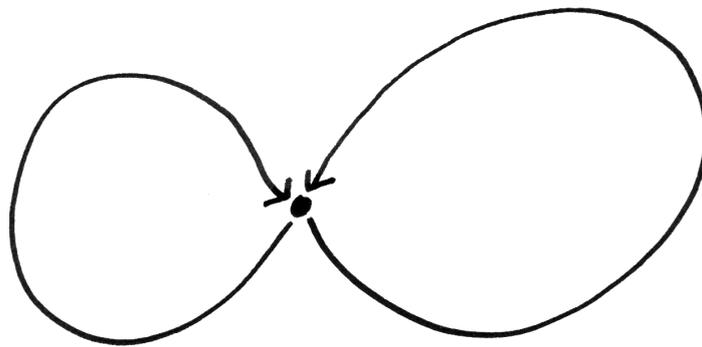
$$((Xb)(x), t) \sim (x, (\Delta b)(t)) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, b : [n] \rightarrow [m], x \in X[m], t \in \Delta_n$$

und wir  $(Xb) : X[m] \rightarrow X[n]$  die zu  $b$  gehörige Abbildung von Mengen notieren sowie  $(\Delta b) : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$  die durch  $b$  induzierte Abbildung zwischen den entsprechenden Standardsimplizes.

*Ergänzung 2.6.3.* Jede Transformation  $X \rightarrow Y$  von Funktoren im Sinne einer Sammlung von verträglichen Abbildungen  $X[n] \rightarrow Y[n]$  liefert eine stetige Abbildung  $\Delta(X) \rightarrow \Delta(Y)$ . Wir erhalten so aber nur Abbildungen, die auf dem Inneren aller Simplizes injektiv sind. Größere Flexibilität, allerdings um den Preis geringerer Anschaulichkeit, bieten die sogenannten **simplizialen Mengen**, d.h. Funktoren

$$\leq\Delta \rightarrow \text{Ens}$$

wo  $\Delta^{\leq}$  die Kategorie mit Objekten  $[n]$  für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichnet, diesmal mit beliebigen monoton wachsenden Abbildungen als Morphismen, und analog wie zuvor  $\leq\Delta := (\Delta^{\leq})^{\text{opp}}$  deren opponierte Kategorie. Wir diskutieren sie noch etwas im Anschluß. Was man heute eine simpliziale Menge nennt, hieß früher eine **vollständige semisimpliziale Menge**, und manche Autoren, etwa [?], lassen dann das Adjektiv “vollständig” auch schon mal weg und bezeichnen als “semisimpliziale Menge” das, wofür heutzutage die Bezeichnung als “simpliziale Menge” üblich ist.



Anschaulich mag man bei einer semisimplizialen Menge  $X$  die Elemente der Menge  $X[0]$  als Punkte denken; die Elemente der Menge  $X[1]$  als Pfeile zwischen diesen Punkten, wobei auch Pfeile erlaubt sind, die beim selben Punkt beginnen und enden; die Elemente der Menge  $X[2]$  als Häute, die zwischen "Dreiecken aus Pfeilen eingespannt sind", wobei es eben auch erlaubt ist, daß in dasselbe Dreieck mehrere Häute eingespannt werden, als Dreiecke gewisse geordnete Tripel von Pfeilen zu verstehen sind, und im Fall "entarteter Dreiecke" jede Haut zusätzlich erinnern muß, "in welcher Reihenfolge sie ihre Randpfeile denkt". Besteht  $X[0]$  aus einem Element und  $X[1]$  aus zweien und alle anderen  $X[n]$  sind leer, so ist  $\Delta(X)$  eine Acht, dargestellt als zwei 1-Simplizes, bei denen man alle vier Endpunkte identifiziert hat.

*Beispiel 2.6.4.* Gegeben ein Simplicialkomplex  $(E, \mathcal{K})$  mit einer Anordnung seiner Eckenmenge können wir einen semisimpliziale Menge  $X$  bilden, indem wir als  $X[n]$  alle streng monoton wachsenden Abbildungen  $[n] \rightarrow E$  nehmen, deren Bild in  $\mathcal{K}_n$  liegt, und jeder streng monotonen Abbildung  $b : [m] \rightarrow [n]$  die durch das Vorschalten von  $b$  gegebene Abbildung  $X(b) = (\circ b) : X[n] \rightarrow X[m]$ . Es reicht hier sogar, eine partielle Ordnung der Eckenmenge vorzugeben, die auf jedem Simplex eine Anordnung induziert. Wir erhalten dann Bijektionen  $X[n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_n$  und einen Homöomorphismus  $\Delta(X) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$ .

*Beispiel 2.6.5.* Eine semisimpliziale Menge  $X$  mit  $X[n] = \emptyset$  für  $n \geq 2$  ist “das-selbe” wie ein Köcher im Sinne von 7.4.2.

*Beispiel 2.6.6.* Betrachten wir die semisimpliziale Menge  $X$  eines 2-Simplex im Sinne des vorhergehenden Beispiels und “verdoppeln darin  $X[2]$  zu einer zweielementigen Menge”, so erhalten wir eine semisimpliziale Menge  $Y$ , deren topologischer Raum  $\Delta(Y)$  aus zwei längs ihres Randes verklebten Dreiecksflächen besteht, in Formeln  $\Delta(Y) \cong S^2$ .

*Übung 2.6.7.* Man gebe eine semisimpliziale Menge mit zwei 2-Simplizes, vier 1-Simplizes und zwei 0-Simplizes an, dessen zugehöriger topologischer Raum das Möbiusband ist.

**Lemma 2.6.8.** *Bezeichnet  $\Delta_n^\circ = \Delta_n \setminus \partial\Delta_n$  das anschauliche Innere des Standard-simplex, so liefert für jede semisimpliziale Menge  $X$  die offensichtliche Abbildung eine Bijektion von Mengen*

$$\bigsqcup X[n] \times \Delta_n^\circ \xrightarrow{\sim} \Delta(X)$$

*Beweis.* Bezeichne  $X_k$  das  $k$ -Skelett von  $X$ , gegeben durch  $X_k[n] = X[n]$  für  $n \leq k$  und  $X_k[n] = \emptyset$  für  $n > k$ . Man zeigt das Lemma durch Induktion über  $k$  für alle  $X_k$  und folgert es dann für  $X$  selbst.  $\square$

**Satz 2.6.9 (Simpliziale gleich singuläre Homologie, Variante).** *Sei  $X$  eine semisimpliziale Menge. Für jedes  $x \in X[q]$  betrachten wir die Abbildung  $\Delta_q \rightarrow \Delta(X)$ ,  $t \mapsto (x, t) / \sim$ . Bezeichne  $S_q^{\text{os}}\Delta(X) \subset S_q\Delta(X)$  die von diesen Simplizes erzeugte Untergruppe. So induziert die Einbettung von Kettenkomplexen  $S_q^{\text{os}}\Delta(X) \hookrightarrow S_q\Delta(X)$  Isomorphismen auf der Homologie.*

*Beweis.* Mutatis mutandis identisch zum Beweis von 2.4.3 und dem Leser überlassen.  $\square$

*Ergänzung 2.6.10.* Simpliciale Mengen sind nur schwer explizit anzugeben. Fast gleichbedeutend können wir auch kontravariante Funktoren von der Kategorie aller nichtleeren endlichen angeordneten Mengen mit monoton wachsenden Abbildungen als Morphismen in die Kategorie der Mengen betrachten. Wir werden

diese insbesondere für die kombinatorische Formulierung der Homotopietheorie wichtige Begriffsbildung hier jedoch nicht weiter entwickeln. Eine bemerkenswerte Realisierung solch einer simplizialen Menge  $X$  gibt Drinfeld in [?]: Er erweitert  $X$  in der kanonischen Weise zu einem Funktor auf der Kategorie aller endlichen angeordneten Mengen, ordnet einem derartigen Funktor die Menge  $\varinjlim_F X(\pi_0([0, 1] \setminus F))$  zu, wo der Limes über alle endlichen Teilmengen  $F \subset [0, 1]$  läuft, und versieht diese Menge dann mit einer geeigneten Topologie.

*Ergänzung 2.6.11.* Gegeben eine semisimpliziale Menge  $X : \Delta^< \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$  bilden wir eine simpliziale Menge  $\tilde{X} : \Delta^{\leq} \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$  durch die Vorschrift

$$\tilde{X}[n] = \bigsqcup_{l \geq 0} X[l] \times \{\lambda \in \Delta^{\leq}([n], [l]) \mid \lambda \text{ surjektiv}\}$$

und indem wir für  $\kappa : [m] \rightarrow [n]$  monoton die Abbildung  $\tilde{X}(\kappa) : \tilde{X}[n] \rightarrow \tilde{X}[m]$  dadurch erklären, daß sie dem Paar  $(x, \lambda)$  das Paar  $((X(\kappa_i))(x), \kappa_s \circ \lambda)$  zuordnet für die eindeutige Zerlegung  $\kappa = \kappa_i \circ \kappa_s$  in  $\Delta^{\leq}$  in eine Surjektion gefolgt von einer Injektion als  $[m] \rightarrow [a_\kappa] \hookrightarrow [n]$ .

*Ergänzung 2.6.12.* Auch jede Transformation  $X \rightarrow Y$  von simplizialen Mengen im Sinne einer Sammlung von verträglichen Abbildungen  $X[n] \rightarrow Y[n]$  liefert eine stetige Abbildung  $\Delta(X) \rightarrow \Delta(Y)$ . Wir erhalten nun auch etwa die konstante Abbildung auf einen Punkt. Gegeben zwei Transformationen  $Z \rightarrow X$  und  $Z \rightarrow Y$  können wir ihren Pushout  $X \sqcup_Z Y$  bilden durch die Vorschrift  $(X \sqcup_Z Y)[n] = X[n] \sqcup_{Z[n]} Y[n]$ . Man kann (?) zeigen, daß diesem Pushout auch ein Pushout topologischer Räume entspricht. Führen wir diese Konstruktion etwa mit  $Z \hookrightarrow X$  einem Unterfunktor und  $Y$  einem Punkt durch, so erhalten wir eine simpliziale Menge, deren zugehöriger Raum aus  $\Delta(X)$  entsteht durch die Identifikation des Teilraums  $\Delta(Z)$  zu einem Punkt.

2.6.13. Nach 5.1.10 können wir in analoger Weise zu jedem Funktor in die Kategorie der simplizialen Mengen den Kolimes bilden. Zum Beispiel kann jede semisimpliziale Menge als solch ein Funktor aufgefaßt werden, indem man jeden ihrer Simplexes als simpliziale Menge versteht, und dann ist der Kolimes gerade die unserer semisimplizialen Menge zugeordnete simpliziale Menge aus 2.6.11.

*Ergänzung 2.6.14.* Wir sagen, eine simpliziale Menge  $X$  habe eine **Dimension**  $\leq k$  genau dann, wenn jeder Simplex aus einem Simplex von  $X[l]$  mit  $l \leq k$  hervorgeht unter einer monoton wachsenden Abbildung  $[n] \rightarrow [l]$ .

*Ergänzung 2.6.15.* Eine simpliziale Menge einer Dimension  $\leq 0$  ist im Wesentlichen eine endliche Menge, eben die Menge  $X[0]$ .

*Ergänzung 2.6.16.* Eine simpliziale Menge einer Dimension  $\leq 1$  ist im wesentlichen dasselbe wie ein ‘‘Diagrammschema’’ oder ‘‘Köcher’’ im Sinne von 7.4.2.

*Ergänzung 2.6.17.* Eine simpliziale Menge einer Dimension  $\leq 2$  kann ähnlich als ein “Diagrammschema für 2-Kategorien” gelesen werden, wo bei einer Realisierung in einer 2-Kategorie jedem Element von  $X[2]$  ein 2-Morphismus zuzuordnen ist vom einkantigen Weg zur zweikantigen Komposition, und wo zu verstehen ist, daß den Pfeilen aus  $X[2]$ , die von  $X[1]$  herkommen, die 2-Identität zugeordnet werden soll.

*Ergänzung 2.6.18.* Eine simpliziale Menge  $X$  einer Dimension  $\leq 2$  kann auch als ein “Diagrammschema für 2-Kategorien” gelesen werden. Gegeben  $x \in X[n]$  und  $b : [m] \rightarrow [n]$  vereinbaren wir dazu für  $X(b) : X[n] \rightarrow X[m]$  die Notation

$$X(b) : x \mapsto x_{b(m), \dots, b(1), b(0)}$$

Eine Realisierung  $A$  eines derartigen Schemas in einer 2-Kategorie  $\mathcal{C}$  wäre in dieser Interpretation zu verstehen als eine Zuordnung, die

1. jedem Element  $x \in X[0]$  ein Objekt  $A(x)$  zuordnet;
2. jedem Element  $p \in X[1]$  einen Morphismus  $A(p) : A(p_0) \rightarrow A(p_1)$  derart, daß jedem ausgearteten Pfeil  $p = x_{0,0}$  die Identität auf  $A(x)$  zugeordnet wird;
3. jedem Element  $c \in X[2]$  einen 2-Morphismus  $A(c_{2,1})A(c_{1,0}) \Rightarrow A(c_{0,2})$  derart, daß jedem ausgearteten 2-Simplex  $c = p_{1,0,0}$  oder  $c = p_{1,1,0}$  der Identitäts-Zweimorphismus auf  $A(p)$  zugeordnet wird;

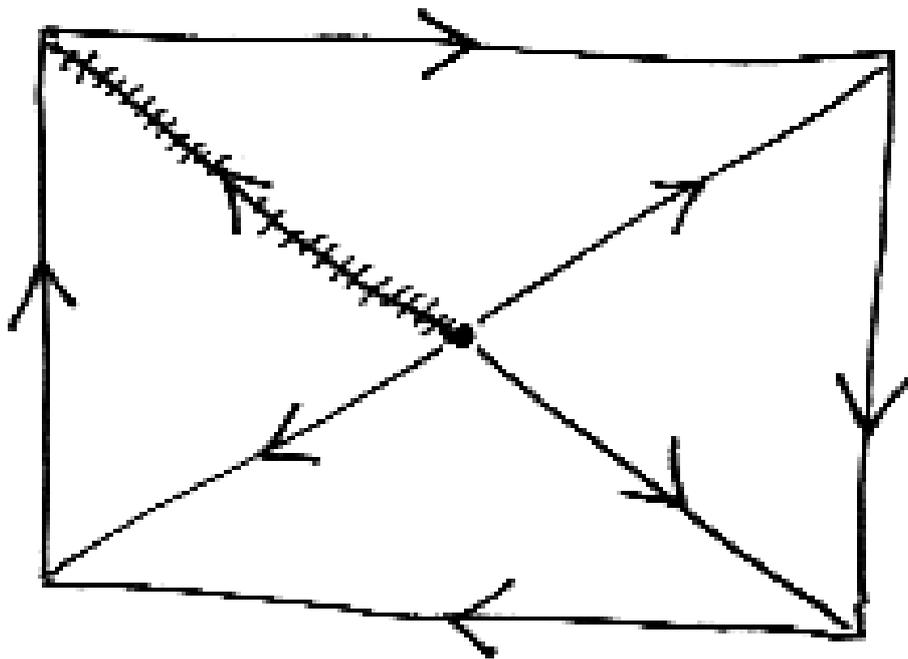
Fassen wir eine Kategorie als Zweikategorie auf, indem wir nur Identitäten als Zweimorphismen erlauben, so spezialisiert diese Interpretation zu einem Diagrammschema mit Kommutativitätsbedingungen. Die Assoziativität der Verknüpfung in einer Kategorie sorgt dafür, daß sich für den Tetraeder  $\Delta_3$  mit  $t = \text{id} : [3] \rightarrow [3]$  die Vorgabe von  $A(t_{1,0})$  und  $A(t_{2,1})$  und  $A(t_{3,2})$  stets eindeutig zu einer Realisierung des durch die simpliziale Menge  $\Delta_3$  gegebenen Diagramm-Schemas ergänzen läßt.

*Ergänzung 2.6.19.* Eine simpliziale Menge  $X$  einer Dimension  $\leq 3$  wird dann wohl analog als ein “Diagrammschema für 3-Kategorien” gelesen werden können. Jedenfalls kann man sie speziell als “Diagrammschema mit Kommutativitätsbedingungen für 2-Kategorien” lesen in der Weise, daß zusätzlich zu obigen Forderungen

4. für jedes Element  $t \in X[3]$  die Gleichheit

$$A(t_{3,2,0}) \circ A(t_{3,2})A(t_{2,1,0}) = A(t_{3,1,0}) \circ A(t_{3,2,1})A(t_{1,0})$$

von Kompositionen von Zweimorphismen erfüllt ist.



Eine simpliziale Menge, entstehend aus dem im Bild dargestellten semisimplizialen Menge durch Identifikation der gestrichelten Kante zu einem Punkt. Eine Realisierung in einer Kategorie würde bedeuten, daß man an alle vier Ecken Objekte setzt und an alle vier Kanten Morphismen derart, daß die Verknüpfung “links oben beginnend einmal im Kreis herum” die Identität ist. Formal wäre das als Kolimes im Sinne von [2.6.13](#) zu verstehen.

2.6.20. Bezeichne schließlich  $\Delta$  die Kategorie mit Objekten  $[n]$  für  $n \in \mathbb{N}$  und beliebigen Abbildungen als Morphismen. Jeder topologische Raum  $X$  definiert einen Funktor

$$\underline{X} : \Delta \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$$

vermittels  $\underline{X}[n] = \text{Top}(\Delta_n, X)$ , indem wir zu  $a : [n] \rightarrow [m]$  erst durch affine Fortsetzung der entsprechenden Abbildung auf den Ecken eine stetige Abbildung  $a : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$  konstruieren und dann durch Vorschalten  $\underline{X}[a] : \underline{X}[m] \rightarrow \underline{X}[n]$  bilden. Wir nennen  $\underline{X}$  den **Funktor der singulären Simplizes in  $X$** . Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  definiert durch Nachschalten eine Transformation  $f : \underline{X} \Rightarrow \underline{Y}$ . Vermittels der Einbettungen  $\Delta^< \hookrightarrow \Delta^{\leq} \hookrightarrow \Delta$  können wir den Funktor der singulären Simplizes in  $X$  zu einem semisimplizialen Komplex  $\underline{X}$  einschränken, dessen simpliziale Homologie dann genau die singuläre Homologie unseres ursprünglichen Raums  $X$  ist.

2.6.21. Eine merkwürdige weitere Variante ist die **zyklische Kategorie** von Connes. Ihre Objekte sind gewisse angeordnete Mengen mit einem ausgezeichneten Automorphismus, und zwar bezeichnet  $[n]$  nun die angeordnete Menge  $\mathbb{Z}$  mit dem Automorphismus

$$(n+1)+ : \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

Morphismen sind Klassen monotoner Abbildungen, die mit den jeweiligen Automorphismen verträglich sind, modulo dem Vor- oder Nachschalten der besagten Automorphismen. So gibt es etwa  $(n+1)$  Morphismen  $[0] \rightarrow [n]$  in der zyklischen Kategorie ebenso wie in  $\Delta^{\leq}$ , aber in der zyklischen Kategorie gibt es auch ebensoviele Morphismen in der Gegenrichtung.

## 2.7 Einbettungen von Sphären in Sphären

**Satz 2.7.1 (Jordan-Brouwer).** *Seien  $n, r \geq -1$  und sei  $s^r \subset S^n$  eine Teilmenge der  $n$ -Sphäre, die homöomorph ist zur  $r$ -Sphäre  $S^r$ . So haben wir:*

- $r > n$       *Unmöglich;*
- $r = n$       *Impliziert  $S^n = s^r$ ;*
- $r = n - 1$    *Dann hat  $S^n \setminus s^r$  genau zwei Zusammenhangskomponenten, und der Rand jeder dieser beiden Komponenten ist  $s^r$ ;*
- $r \leq n - 2$    *Dann ist  $S^n \setminus s^r$  zusammenhängend.*

2.7.2. Hier ist die  $(-1)$ -Sphäre wie in 1.1 als die leere Menge zu verstehen. Im Rahmen der Garbentheorie werden wir in ?? einen kürzeren Beweis für den zentralen Schritt 2.7.10 unserer Argumentation geben können. Der elementarere Beweis hier wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. Als Vorbereitung auf den Beweis beginnen wir mit einer Diskussion der sogenannten “reduzierten

Homologie". Diese Variante der Homologie hilft auch sonst oft, Sonderbetrachtungen im Grad Null zu vermeiden.

*Ergänzung 2.7.3.* Im Fall  $r = n - 1$  induziert für eine zweipunktige Teilmenge  $Z$  bestehend aus einem Punkt in jeder Komponente des Komplements  $S^n \setminus S^{n-1}$  die Einbettung  $S^{n-1} \hookrightarrow S^n \setminus Z$  einen Isomorphismus auf der Homologie. Im Fall  $n = 2$  folgt das etwa aus 1.6.10, im allgemeinen zeigen wir es erst als Übung ??.

**Definition 2.7.4.** Für jeden Raum  $X$  kann man den Komplex  $SX$  der singulären Ketten verlängern zu einem Komplex  $\tilde{S}X$  mit  $\tilde{S}_q X = S_q X$  für  $q \neq -1$  und  $\tilde{S}_{-1} X = \mathbb{Z}$ , wobei der unterste Randoperator  $\partial_0 : \tilde{S}_0 X \rightarrow \tilde{S}_{-1} X$  gegeben wird durch die sogenannte **Augmentation**  $\partial_0 = \epsilon : \sum n_x x \mapsto \sum n_x$ . Offensichtlich erhalten wir so wieder einen Funktor  $\tilde{S} : \text{Top} \rightarrow \text{Ket}$ . Wir definieren dann die **reduzierten Homologiegruppen** von  $X$  als die Homologiegruppen des augmentierten Komplexes der singulären Ketten, in Formeln

$$\tilde{H}_q(X) := \mathcal{H}_q(\tilde{S}X)$$

2.7.5. Diese Definition weicht im Fall  $X = \emptyset$  von der in der Literatur gebräuchlichen Konvention ab, bei der—so will mir scheinen—das Widerstreben gegenüber Homologie in negativen Graden die Oberhand gewonnen hat über das Streben nach Klarheit des Formalismus.

2.7.6. Für  $X \neq \emptyset$  gilt  $\tilde{H}_q(X) = 0$  für  $q < 0$ , für die leere Menge erhalten wir jedoch  $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$ . Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  bezeichne ganz allgemein  $G[q]$  den Komplex mit  $G$  im Grad  $q$  und Nullen sonst. Speziell meint also  $\mathbb{Z}[-1]$  den Kettenkomplex mit  $\mathbb{Z}$  im Grad  $-1$  und Nullen sonst. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $\mathbb{Z}[-1] \hookrightarrow \tilde{S}X \twoheadrightarrow SX$ . Mit der zugehörigen langen Homologiesequenz erhalten wir  $H_q X = \tilde{H}_q X$  für  $q > 0$  und im Fall  $X \neq \emptyset$  eine kurze exakte Sequenz  $\tilde{H}_0 X \hookrightarrow H_0 X \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ , mithin nach 2.2.12 und 2.2.10 einen allerdings nicht kanonischen Isomorphismus  $H_0 X \cong \tilde{H}_0 X \oplus \mathbb{Z}$ . Es gilt also  $\tilde{H}_0 X = 0$  genau dann, wenn  $X$  leer oder wegzusammenhängend ist, und die reduzierte Homologie von Sphären wird für alle  $n \geq -1$  gegeben durch

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = q; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.7.7. Für ein Raumpaars  $(X, A)$  folgt aus der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen  $\tilde{S}A \hookrightarrow \tilde{S}X \twoheadrightarrow \tilde{S}X/\tilde{S}A$  auch eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_q(A) \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

für Raumpaars in der reduzierten Homologie, wobei natürlich gilt  $\tilde{S}X/\tilde{S}A = SX/SA$  und folglich  $\tilde{H}_q(X, A) = H_q(X, A)$ . Für jeden Punkt  $p \in X$  erhalten

wir so insbesondere einen kanonischen Isomorphismus  $\tilde{H}_q(X) \rightarrow H_q(X, p)$ . Homotope Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  induzieren auch auf der reduzierten Homologie dieselben Abbildungen: Um das zu sehen reicht es, unsere Kettenhomotopie  $Sf \simeq Sg$  durch Null auf  $\tilde{S}_{-1}X = \mathbb{Z}$  fortzusetzen. Die Mayer-Vietoris-Sequenz und ihr Beweis übertragen sich ebenso ohne Schwierigkeiten in die reduzierte Homologie. Der folgende Beweis ist eine erste Illustration für die Nützlichkeit der reduzierten Homologie.

**Proposition 2.7.8.** *Gegeben eine stetige Injektion eines Hyperkubus in eine Sphäre beliebiger Dimension verschwinden die reduzierten Homologiegruppen des Komplements des Bildes in allen Graden.*

*Beweis.* Sei also in Formeln  $r \geq 0$  und  $\varphi : [0, 1]^r \rightarrow S^n$  eine stetige Injektion mit Bild  $\text{im } \varphi = \varphi([0, 1]^r)$ . Unsere Proposition behauptet in Formeln  $\tilde{H}_q(S^n \setminus \text{im } \varphi) = 0$  für alle  $q$ . Als stetige Injektion von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum ist  $\varphi$  nach 3.3.9 ein Homöomorphismus auf sein Bild. Da  $S^n$  nie zusammenziehbar ist, folgt  $S^n \neq \text{im } \varphi$ . Wir können uns also auf  $q \geq 0$  beschränken. Dafür machen wir eine Induktion über  $r$  und geben dazu der Aussage der Proposition den Namen  $P(r)$ . Nach Konvention ist  $[0, 1]^0$  ein Punkt und  $S^n \setminus x$  ist zusammenziehbar, ja sogar homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  für alle  $x \in S^n$ . Das liefert unsere Induktionsbasis  $P(0)$ .

Sei nun  $P(r-1)$  bekannt, sei  $\varphi : [0, 1]^r \rightarrow S^n$  eine stetige Injektion und sei  $z \in \tilde{S}_q(S^n \setminus \text{im } \varphi)$  ein  $q$ -Zykel,  $q \geq 0$ . Es gilt zu zeigen, daß  $z$  ein Rand ist. Für  $I \subset [0, 1]$  setzen wir

$$U_I = S^n \setminus \varphi(I \times [0, 1]^{r-1})$$

und kürzen  $U_{\{t\}} = U_t$  ab. Nach unserer Induktionsannahme  $P(r-1)$  gibt es für alle  $t \in [0, 1]$  ein  $w_t \in S_{q+1}U_t$  mit  $\partial w_t = z$ . Mit Kompaktheitsargumenten folgt, daß sogar gilt  $w_t \in S_{q+1}U_B$  für eine geeignete Umgebung  $B$  von  $t$  in  $[0, 1]$ . Mit zusätzlichen Kompaktheitsargumenten gibt es dann eine Folge  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  derart, daß für alle  $i$  ein  $w_i \in S_{q+1}U_{[t_{i-1}, t_i]}$  existiert mit  $\partial w_i = z$ . Die Aussage  $P(r)$  folgt nun mit Induktion über  $i$ , wenn wir noch die anschließende Folgerung aus unserer Induktionsannahme  $P(r-1)$  bemerken.  $\square$

**Lemma 2.7.9.** *Sei  $r \geq 1$  und es gelte  $P(r-1)$ . Sei  $\varphi : [0, 1]^r \rightarrow S^n$  eine stetige Injektion. Seien  $0 \leq a < b < c \leq 1$ . Gegeben Ketten  $u \in S_{q+1}U_{[a,b]}$  und  $v \in S_{q+1}U_{[b,c]}$  mit  $\partial u = \partial v$  gibt es dann auch eine Kette  $w \in S_{q+1}U_{[a,c]}$  mit  $\partial w = \partial u = \partial v$ .*

*Beweis.* Sicher gilt

$$U_{[a,b]} \cup U_{[b,c]} = U_b \text{ und } U_{[a,b]} \cap U_{[b,c]} = U_{[a,c]}$$

Die Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie liefert uns nun

$$\tilde{H}_{q+1}U_b \rightarrow \tilde{H}_qU_{[a,c]} \rightarrow \tilde{H}_qU_{[a,b]} \oplus \tilde{H}_qU_{[b,c]} \rightarrow \tilde{H}_qU_b$$

Da hier das rechte und linke Ende verschwindet nach  $P(r-1)$ , steht in der Mitte ein Isomorphismus. Schreiben wir also  $\partial u = \partial v = z$ , so ist  $z$  ein Zykel in  $\tilde{S}_qU_{[a,c]}$ , der ein Rand wird in  $\tilde{S}_qU_{[a,b]} \oplus \tilde{S}_qU_{[b,c]}$ . Also muß  $z$  auch in  $\tilde{S}_qU_{[a,c]}$  bereits ein Rand gewesen sein.  $\square$

**Satz 2.7.10.** *Seien  $r, n \geq -1$  und sei  $s^r \subset S^n$  eine Teilmenge der  $n$ -Sphäre, die homöomorph ist zur  $r$ -Sphäre  $S^r$ . So gilt*

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus s^r) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - r - 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Wir machen wieder eine Induktion über  $r$ . Für  $r = -1$  ist die Aussage schon aus 2.7.6 bekannt. Ist nun  $r \geq 0$ , so schreiben wir  $s^r = s_+ \cup s_-$  als Vereinigung von zwei abgeschlossenen Hemisphären mit Schnitt  $s_+ \cap s_- = s^{r-1} \cong S^{r-1}$ . Wir wenden die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz an auf  $X_{\pm} = S^n \setminus s_{\pm}$ , es ist also  $X_+ \cup X_- = S^n \setminus s^{r-1}$  und  $X_+ \cap X_- = S^n \setminus s^r$  und wir erhalten mit 2.7.8 Isomorphismen  $\tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus s^{r-1}) \cong \tilde{H}_q(S^n \setminus s^r)$ , also induktiv  $\tilde{H}_q(S^n \setminus s^r) \cong \tilde{H}_{q+r+1}(S^n \setminus s^{-1}) = \tilde{H}_{q+r+1}(S^n)$ .  $\square$

*Beweis von Jordan-Brouwer 2.7.1.* Der Fall  $r > n$  ist unmöglich, da  $\tilde{H}_q$  stets verschwindet für  $q < -1$ . Im Fall  $r = n$  haben wir  $S^n = s^r$ , denn  $\tilde{H}_{-1}(X) \neq 0$  bedeutet  $X = \emptyset$ . Im Fall  $r \leq n - 2$  haben wir  $\tilde{H}_0(S^n \setminus s^r) = 0$  aber  $S^n \setminus s^r \neq \emptyset$ . Es folgt  $H_0(S^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}$ , und damit hat  $S^n \setminus s^r$  nach 1.2.13 genau eine Wegzusammenhangskomponente, die auch die einzige Zusammenhangskomponente sein muß. Im Fall  $r = n - 1$  haben wir  $\tilde{H}_0(S^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}$ , also  $H_0(S^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}^2$  und damit hat  $S^n \setminus s^r$  nach 1.2.13 genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Da bei einer offenen Teilmenge von  $S^n$  jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung hat, sind das auch die Zusammenhangskomponenten von  $S^n \setminus s^r$ . Jetzt müssen wir nur noch im Fall  $r = n - 1$  zusätzlich zeigen, daß  $s^{n-1}$  im Abschluß jeder der beiden Zusammenhangskomponenten von  $S^n \setminus s^{n-1}$  liegt. Für jedes  $x \in s^{n-1}$  und eine beliebige offene Umgebung  $U$  von  $x$  in  $S^n$  finden wir eine Teilmenge  $A \subset s^{n-1}$  mit  $x \in A$  derart, daß gilt  $\bar{A} \subset U$  und  $s^{n-1} \setminus A \cong [0, 1]^{n-1}$ . Wir setzen  $s^{n-1} \setminus A = e$ . Nach 2.7.8 ist  $S^n \setminus e$  wegzusammenhängend. Verbinden wir nun zwei Punkte aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $S^n \setminus s^{n-1}$  in  $S^n \setminus e$  durch einen Weg  $\sigma$ , so muß  $\sigma$  durch  $A$  laufen. Ist  $\sigma(t)$  bzw.  $\sigma(s)$  der erste bzw. letzte Punkt von  $\sigma$  in  $\bar{A}$ , so liegen für kleines  $\epsilon > 0$  notwendig  $\sigma(t - \epsilon)$ ,  $\sigma(s + \epsilon)$  in  $U$ , aber in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von  $S^n \setminus s^{n-1}$ . Jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  trifft also beide Komponenten von  $S^n \setminus s^{n-1}$ .  $\square$

**Korollar 2.7.11.** Sei  $n \geq 2$  und sei  $s^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge, die homöomorph ist zur  $(n-1)$ -Sphäre  $S^{n-1}$ . So zerfällt ihr Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus s^{n-1}$  in zwei Zusammenhangskomponenten, deren Rand jeweils  $s^{n-1}$  ist.

*Beweis.* Man fasse  $\mathbb{R}^n$  auf als das Komplement eines Punktes in  $S^n$ . □

2.7.12. Der Spezialfall  $n = 2$  des vorhergehenden Korollars heißt der **Jordan'sche Kurvensatz**. Er besagt grob gesprochen, daß jede geschlossene Kurve in der Ebene die Ebene in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt.

*Ergänzende Übung 2.7.13 (Invarianz von Gebieten).* Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  zwei Teilmengen, die homöomorph sind als topologische Räume. Man zeige: Ist  $U$  offen, so ist auch  $V$  offen. In der Funktionentheorie nennt man offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene auch Gebiete, daher die Terminologie. Hinweis: Es reicht, wenn wir für jede Einbettung  $f : E \hookrightarrow S^n$  der abgeschlossenen Einheitskugel  $E \subset \mathbb{R}^n$  in die  $S^n$  zeigen, daß ihr Inneres  $E^\circ$  offenes Bild hat. Das Komplement des Bildes der Randsphäre  $f(\partial E)$  besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten  $W_1, W_2$  nach dem Satz von Jordan-Brouwer 2.7.1 und wir erhalten eine disjunkte Zerlegung in zusammenhängende Teilmengen  $S^n = W_1 \cup f(\partial E) \cup W_2$ . Das Komplement des Bildes  $f(E)$  besteht aus einer Zusammenhangskomponente nach 2.7.8, somit erhalten wir auch eine disjunkte Zerlegung in zusammenhängende Teilmengen  $S^n = (S^n \setminus f(E)) \cup f(\partial E) \cup f(E^\circ)$ . Gilt nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $(S^n \setminus f(E)) \subset W_1$ , so folgt  $W_2 \subset f(E^\circ)$  und Zusammenhangsargumente zeigen, daß beide Inklusionen Gleichheiten sein müssen.

*Übung 2.7.14.* Eine injektive stetige Abbildung zwischen zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension ist stets surjektiv. Hinweis: 2.7.13.

2.7.15. Sind  $s, s' \subset S^n$  disjunkte Teilmengen, die homöomorph sind zu  $S^p$  bzw.  $S^q$  mit  $p+q = n-1$ , so kann man ihre **Verschlingungszahl**  $v(s, s') \in \mathbb{N}$  definieren als den Betrag des Bildes der Eins unter  $\mathbb{Z} \cong \tilde{H}_p(s) \rightarrow \tilde{H}_p(S^n \setminus s') \cong \mathbb{Z}$ . Der Spezialfall  $q = 0$  wird in 2.7.3 diskutiert. Mehr dazu findet man in [SZ94a].

*Ergänzende Übung 2.7.16.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  erklärt man seine **Suspension** als den Raum

$$\Sigma X = X \times [0, 1] / \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  alle Punkte von  $X \times \{0\}$  und alle Punkte von  $X \times \{1\}$  zu jeweils einem Punkt identifiziert. Die lange exakte Sequenz der reduzierten Homologie zum Raumpaar  $(\tilde{\Sigma} X, X \times \{1\})$  mit  $\tilde{\Sigma} X = X \times [0, 1] / X \times \{0\}$  liefert dann Isomorphismen  $\tilde{H}_{i+1}(\tilde{\Sigma} X, X \times \{1\}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(X \times \{1\})$  für  $X \neq \emptyset$ , und mit 2.3.22 erhalten wir wieder für  $X \neq \emptyset$  und alle  $i$  kanonische Isomorphismen

$$\tilde{H}_{i+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(X)$$

## 2.8 Homologie von endlichen Zellkomplexen

**Definition 2.8.1.** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : A \rightarrow X$  erklärt man ihren **Abbildungskegel** als den topologischen Raum

$$K(f) = (X \sqcup (A \times [0, 1]) \sqcup \text{pt}) / \sim$$

wobei  $\text{pt} = \{*\}$  den einpunktigen Raum bezeichnet und die Äquivalenzrelation  $\sim$  erzeugt sei durch  $f(a) \sim (a, 0)$  sowie  $(a, 1) \sim *$  für alle  $a \in A$ .

*Beispiel 2.8.2.* Ist  $n \geq 0$  und  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so sagt man auch, der Abbildungskegel  $K(f)$  entstehe aus  $X$  durch **Ankleben einer  $n$ -Zelle** **vermittels**  $f$ . Im Fall  $n = 0$  alias  $A = \emptyset$  ist  $K(f)$  schlicht die disjunkte Vereinigung von  $X$  mit einem Punkt; im Fall  $n = 1$  das Ankleben einer Kante, indem ihre beiden Endpunkte mit Punkten des Ausgangsraums identifiziert werden; im Fall  $n = 2$  das Ankleben einer Kreisscheibe längs ihres Randkreises etc.

**Satz 2.8.3 (Anklebesequenz).** *Ist  $f : A \rightarrow X$  stetig und  $K(f)$  der Abbildungskegel von  $f$ , so gibt es in der reduzierten Homologie eine lange exakte Sequenz*

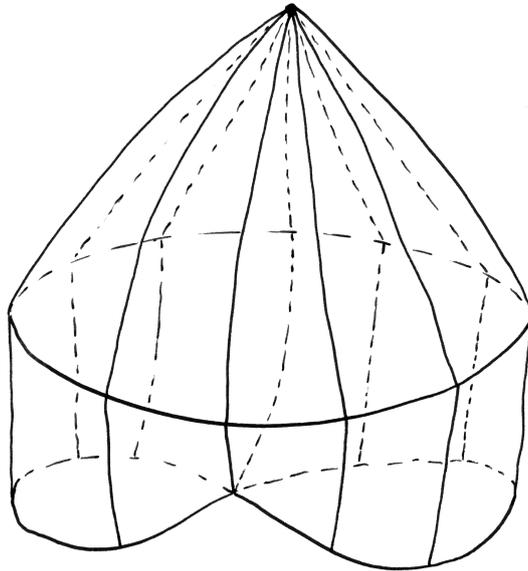
$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q A \rightarrow \tilde{H}_q X \rightarrow \tilde{H}_q K(f) \rightarrow \tilde{H}_{q-1} A \rightarrow \dots$$

*deren erste Abbildung von  $f$  induziert wird und deren zweite von der Einbettung  $X \hookrightarrow K(f)$ .*

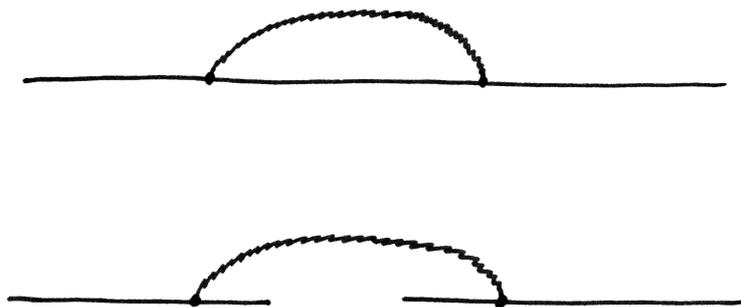
2.8.4. Es können also anschaulich gesprochen beim Ankleben einer  $n$ -Zelle im Wesentlichen zwei Dinge passieren: Entweder die angeklebte Zelle “füllt ein  $(n-1)$ -Loch”, als da heißt  $\tilde{H}_{n-1} S^{n-1} \rightarrow \tilde{H}_{n-1} X$  ist eine Injektion und die Homologie von  $X$  im Grad  $n-1$  wird beim Ankleben entsprechend kleiner; Oder die angeklebte Zelle “schafft ein  $n$ -Loch”, als da heißt  $\tilde{H}_{n-1} S^{n-1} \rightarrow \tilde{H}_{n-1} X$  ist keine Injektion und die Homologie von  $X$  im Grad  $n$  wird beim Ankleben entsprechend größer. In diesem Fall kann sich natürlich die Homologie im Grad  $n-1$  auch noch etwas verkleinern, es wird eben eine endliche Untergruppe daraus weggeteilt, und das ist dann nicht mehr so leicht anschaulich zu machen. In jedem Fall gilt jedoch  $\tilde{H}_q X \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_q K(f)$  für  $q \neq n, n-1$ .

*Beweis.* Das Bild der ausgezeichneten einpunktigen Menge  $\text{pt}$  im Abbildungskegel bezeichnen wir wieder mit  $\text{pt}$  und das Bild von  $X$  wieder mit  $X$ . Wir erhalten so zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen des Abbildungskegels  $K(f) = K$ , deren Komplemente eine offene Überdeckung bilden. Von diesen offenen Mengen ist die eine zusammenziehbar, nämlich das Komplement von  $X$ , und der Schnitt unserer beiden offenen Mengen kann identifiziert werden mit  $A \times (0, 1)$ . Die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie hat also die Gestalt

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(A \times (0, 1)) \rightarrow \tilde{H}_q(K \setminus \text{pt}) \rightarrow \tilde{H}_q(K) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(A \times (0, 1)) \rightarrow \dots$$



Der Abbildungskegel der Abbildung, die eine Kreislinie  $A$  zu einer Acht  $X$  zusammenzwickt. Die hier zu sehende Kreislinie in mittlerer Höhe ist das Bild von  $A \times \{1/2\}$  oder vielleicht auch eher von  $A \times \{1/4\}$  im Abbildungskegel.



Zwei Fälle des Anklebens einer Eins-Zelle, hier gezackt eingezeichnet. Im ersten Fall wird ein Eins-Loch geschaffen, im zweiten Fall ein Null-Loch geschlossen.

Wendet man 2.8.5 auf  $Z = [0, 1]$  und die die Topologie des Abbildungskegels definierende finale Abbildung an, so erkennt man leicht, daß die Einbettung  $X \hookrightarrow (K \setminus \text{pt})$  eine Homotopieäquivalenz ist, und es bleibt uns nur, im homotopiekommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & (a, 1/2) \\ A & \hookrightarrow & A \times (0, 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & K \setminus \text{pt} \end{array}$$

mit Homotopieäquivalenzen in den Horizontalen zur reduzierten Homologie überzugehen und so in unserer Mayer-Vietoris-Sequenz  $\tilde{H}_q(A \times (0, 1)) \rightarrow \tilde{H}_q(K \setminus \text{pt})$  durch  $\tilde{H}_q A \rightarrow \tilde{H}_q X$  zu ersetzen.  $\square$

**Proposition 2.8.5.** *Ist  $p : X \rightarrow Y$  final und surjektiv und  $Z$  lokal kompakt, so ist auch  $p \times \text{id} : X \times Z \rightarrow Y \times Z$  final und surjektiv.*

*Beweis.* Sei  $W \subset Y \times Z$  eine Teilmenge mit offenem Urbild  $U \subseteq X \times Z$ . Es gilt zu zeigen, daß  $W$  selbst offen ist. Sei dazu  $(y, z) \in W$  ein Punkt und  $(x, z)$  eines seiner Urbilder. Sicher gibt es eine kompakte Umgebung  $K$  von  $z$  mit  $\{x\} \times K \subset U$ . Man überlegt sich leicht, daß dann

$$A = \{a \in X \mid \{a\} \times K \subset U\}$$

offen ist in  $X$  und daß gilt  $A = p^{-1}(p(A))$ . Folglich ist  $p(A)$  offen in  $Y$  und wir haben  $(y, z) \in p(A) \times K \subset W$ . Mithin liegt mit jedem Punkt auch eine ganze offene Umgebung des besagten Punktes in  $W$  und  $W$  ist offen.  $\square$

*Alternativer Beweis mit ??.* Sei  $W$  ein topologischer Raum und  $g : Y \times Z \rightarrow W$  eine Abbildung. Ist  $g \circ (p \times \text{id}) : X \times Z \rightarrow W$  stetig, so nach ?? auch die induzierte Abbildung  $X \rightarrow \mathcal{C}(Z, W)$ . Diese Abbildung faktorisiert jedoch als  $X \rightarrow Y \rightarrow \mathcal{C}(Z, W)$  mit  $p$  als erstem Pfeil und der von  $g$  induzierten Abbildung als zweitem Pfeil, da wir  $p$  surjektiv vorausgesetzt hatten. Ist zusätzlich  $p$  final, so ist folglich mit  $g \circ (p \times \text{id})$  auch die von  $g$  induzierte Abbildung  $Y \rightarrow \mathcal{C}(Z, W)$  stetig und damit nach ?? wiederum  $g$  selbst.  $\square$

**Korollar 2.8.6 (Homologie von Zellkomplexen).** *Entsteht  $X$  aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften endlich vieler Zellen und heften wir dabei keine Zellen der Dimension  $> d$  an, so gilt  $H_q X = 0$  für  $q > d$  und  $H_q X$  ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe für alle  $q \in \mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Man benutze für die zweite Aussage, daß bei einer kurzen exakten Sequenz abelscher Gruppen  $A' \hookrightarrow A \rightarrow A''$  die Mitte endlich erzeugt ist genau dann, wenn die Enden es sind.  $\square$

**Beispiel 2.8.7 (Homologie der komplex projektiven Räume).** Der  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  ergibt sich aus dem  $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$  durch Anheften einer  $2n$ -Zelle. Betrachten wir genauer die Abbildung  $F : D^{2n} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}$  gegeben durch die Abbildungsvorschrift  $z = (z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto \langle z_0, \dots, z_{n-1}, 1 - \|z\| \rangle$  und nehmen ihre Restriktion zu  $f : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$  als Anklebeabbildung, so konstruiert man ohne Schwierigkeiten einen Homöomorphismus  $K(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n\mathbb{C}$  zwischen dem Abbildungskegel und  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ . Wir erhalten also

$$H_q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2, \dots, 2n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsteht allgemeiner  $X$  aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von Zellen gerader Dimension, so verschwindet  $H_q X$  für ungerades  $q$  und für gerades  $q$  ist  $H_q X$  eine freie abelsche Gruppe, deren Rang gerade die Anzahl der angehefteten  $q$ -Zellen ist.

*Übung 2.8.8.* Man zeige, daß die Homologie der quaternionalen projektiven Räume gegeben wird durch  $H_q(\mathbb{P}^n\mathbb{H}) \cong \mathbb{Z}$  für  $q = 0, 4, \dots, 4n$  und Null sonst.

**Satz 2.8.9 (Eulercharakteristik von Zellkomplexen).** *Der Raum  $X$  entstehe aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von endlich vielen Zellen. Sei  $c_q$  die Zahl der verwendeten  $q$ -Zellen und sei  $k$  ein Körper. So wird die Eulercharakteristik von  $X$  gegeben durch die Formel*

$$\chi(X; k) = \sum (-1)^q c_q$$

*Beweis.* Ist  $\dots \rightarrow A_i \xrightarrow{\partial_i} A_{i-1} \rightarrow \dots$  eine lange exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorräumen und verschwinden von den  $A_i$  alle bis auf endlich viele, so gilt für die Eulercharakteristik unseres Komplexes

$$\sum (-1)^i \dim A_i = \sum (-1)^i \dim \mathcal{H}_i A = 0$$

nach 2.4.15. Schreiben wir unsere Sequenz in der Gestalt

$$\dots \rightarrow D_{q+1} \rightarrow B_q \rightarrow C_q \rightarrow D_q \rightarrow B_{q-1} \rightarrow \dots$$

so folgt natürlich

$$\sum (-1)^q \dim C_q = \sum (-1)^q \dim B_q + \sum (-1)^q \dim D_q$$

Nun läßt sich die Eulercharakteristik natürlich auch mithilfe der reduzierten Homologie darstellen als  $\chi(X; k) - 1 = \sum (-1)^q \dim_k \tilde{H}_q(X; k)$ . Mit unserer Anklebesequenz folgt  $\chi(X; k) - 1 = \chi(Y; k) - 1 + (-1)^n$ , wenn  $X$  aus  $Y$  durch Ankleben einer  $n$ -Zelle entsteht. Der Satz ergibt sich nun mit Induktion.  $\square$

2.8.10. Der vorhergehende Beweis könnte alternativ auch auf unserer Formel  $\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$  aus 2.4.20 aufgebaut werden: Diese Formel liefert sogar allgemeiner unter den offensichtlichen Endlichkeitsannahmen für  $f : A \rightarrow X$  stetig mit den im Beweis der Anklebesequenz diskutierten Argumenten die Formel

$$\chi(K(f)) = \chi(X) + 1 - \chi(A)$$

Man diese Formel jedoch auch direkt aus der Anklebesequenz folgern.

## 2.9 Homologie und Orientierung

**Satz 2.9.1 (Homologie und Orientierung).** *Ist  $n \geq 0$  eine natürliche Zahl und  $g \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$  eine invertierbare reelle Matrix, so induziert die stetige Abbildung  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf der reduzierten Homologiegruppe  $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$  die Multiplikation mit dem Vorzeichen der Determinante von  $g$ , in Formeln*

$$\tilde{H}_{n-1}g = \left( \frac{\det g}{|\det g|} \right) : \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$$

2.9.2. Wir verwenden hier die Konvention, nach der die Identität auf dem Nullvektorraum die Determinante 1 hat.

*Beweis.* Etwa nach 6.4.14 bilden für  $n \geq 1$  die Elemente von  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$  mit positiver bzw. negativer Determinante gerade die beiden Wegzusammenhangskomponenten von  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ . Elemente  $g, h$  aus derselben Wegzusammenhangskomponente liefern homotope Abbildungen  $g, h : (\mathbb{R}^n \setminus 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ . Wenn wir also den Satz für *ein*  $g$  mit  $\det g < 0$  zeigen, so folgt er in voller Allgemeinheit. Nun betrachten wir den anschaulichen Rand  $\partial\Delta_n$  des  $n$ -ten Standardsimplex wie in 2.3.2 und die Homotopieäquivalenzen

$$(\mathbb{R}^n \setminus 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}(1, 1, \dots, 1)) \hookrightarrow \partial\Delta_n$$

wo die linke Einbettung als letzte Koordinate eine Null anfügt und in der Mitte die Gerade durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor  $(1, 1, \dots, 1)$  herausgenommen wird. Nehmen wir  $n \geq 2$  an, so hält die Vertauschung der ersten beiden Koordinaten unsere beiden Teilräume fest. Der Satz folgt so für  $n \geq 2$  mit dem kanonischen Isomorphismus  $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta_n)$  aus dem anschließenden Lemma 2.9.3. Die Fälle  $n = 0, 1$  überlassen wir dem Leser.  $\square$

**Lemma 2.9.3.** *Sei  $n \geq 2$  und sei  $g : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  die stetige Abbildung, die gegeben wird durch die Vertauschung der beiden ersten Koordinaten. So induziert  $g$  auf der relativen Homologie  $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$  die Multiplikation mit  $-1$ , in Formeln*

$$H_n g = (-1) : H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \rightarrow H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$$

*Beweis.* Wir betrachten in  $\Delta_n$  den singulären  $(n + 1)$ -Simplex

$$\sigma = [e_0, e_1, e_0, e_2, \dots, e_n] : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$$

der die Ecken von  $\Delta_{n+1}$  in der angegebenen Reihenfolge auf die Ecken von  $\Delta_n$  abbildet und der auf ganz  $\Delta_{n+1}$  affin ist. Wir erinnern, daß der tautologische Simplex  $\tau_n = \text{id}$  unsere relative Homologiegruppe erzeugt und erkennen durch explizite Rechnung

$$\partial\sigma \in \tau_n + (S_n g)(\tau_n) + S_n(\partial\Delta_n)$$

Daraus folgt  $[\tau_n] + (H_n g)[\tau_n] = 0$  in  $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ . □

**Korollar 2.9.4 (Vektorfelder auf Sphären).** *Genau dann gibt es auf der  $n$ -Sphäre  $S^n$  ein nirgends verschwindendes stetiges Vektorfeld, wenn ihre Dimension  $n$  ungerade ist.*

*Beweis.* Ein Vektorfeld ist für uns eine stetige Abbildung  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  derart, daß  $v(x)$  senkrecht steht auf  $x$  für alle  $x$ , in Formeln  $x \perp v(x) \forall x \in S^n$ . Ist  $n$  ungerade, so können wir ein mögliches  $v$  angeben durch

$$v(x_0, \dots, x_n) = (x_1, -x_0, x_2, -x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

In jedem Fall können wir ein nirgends verschwindendes Vektorfeld  $v$  auf Länge Eins normieren. Es definiert dann eine Familie von Abbildungen  $\varphi_t : S^n \rightarrow S^n$ , wo  $\varphi_t(x)$  der Punkt ist, an dem man landet, wenn man von  $x$  in Richtung  $v(x)$  für die Zeit  $t$  auf dem entsprechenden Großkreis um die Sphäre läuft, in Formeln  $\varphi_t(x) = (\cos t)x + (\sin t)v(x)$ . So erhalten wir nun offensichtlich eine Homotopie zwischen der Identität und der Antipodenabbildung  $a = \varphi_\pi : S^n \rightarrow S^n$ ,  $x \mapsto -x$  und folgern  $\tilde{H}_n(a) = \text{id}$  auf  $\tilde{H}_n(S^n)$ . Da aber die Einbettung  $S^n \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)$  eine Homotopieäquivalenz ist und da folglich gilt  $\tilde{H}_n(a) = (-1)^{n+1} \text{id}$  auf  $\tilde{H}_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)$ , kann es eine derartige Homotopie nur für ungerades  $n$  geben. □

*Übung 2.9.5.* Gegeben  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Umgebungen des Ursprungs und  $g : A \xrightarrow{\sim} B$  ein Diffeomorphismus mit  $g(0) = 0$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(A, A \setminus 0) & \rightarrow & H_n(B, B \setminus 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) & \rightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \end{array}$$

mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante  $\det(d_0 g)$  als unterer Horizontale. Hinweis: Für vom Ursprung verschiedene Punkte  $p$  nahe am Ursprung gilt die Abschätzung  $\|g(p) - (d_0 g)(p)\| < \|(d_0 g)(p)\|$ .

## 2.10 Orientierung und Fundamentalzykel

2.10.1. Unter einer  $d$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit ohne Rand oder kurz  $d$ -Mannigfaltigkeit verstehen wir wie in 3.2.8 einen topologischen Hausdorffraum  $X$  derart, daß jeder Punkt  $p \in X$  eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ . Viele Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß sie “parakompakt” sein soll, oder sogar noch stärker, daß ihre Topologie “eine abzählbare Basis” haben soll. Wir werden solche Bedingungen stets explizit erwähnen, vorerst sind sie für uns belanglos.

2.10.2. Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt  $x \in M$  ist die relative Homologie  $H_n(M, M \setminus x)$  frei vom Rang Eins nach Ausschneidung 2.3.18 und den Resultaten 2.3.7 über die Homologie von Sphären.

**Definition 2.10.3.** Eine **Orientierung** einer  $n$ -Mannigfaltigkeit ist eine Zuordnung  $\omega$ , die jedem Punkt  $x \in M$  einen Erzeuger  $\omega_x$  von  $H_n(M, M \setminus x)$  zuordnet und zwar so, daß gilt: Für alle  $x \in M$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x$  und ein Element  $\omega_U \in H_n(M, M \setminus U)$  derart, daß für alle  $y \in U$  gilt  $\omega_U \mapsto \omega_y$  unter der natürlichen Abbildung  $H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus y)$ .

2.10.4. Gegeben Räume  $M \supset U \supset V$  notieren wir die natürliche Abbildung  $H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus V)$  im weiteren Verlauf kurz  $\eta \mapsto \eta|_V$ , so daß wir etwa statt  $\omega_U \mapsto \omega_y$  auch  $\omega_U|_y = \omega_y$  schreiben können.

2.10.5. In 2.3.5 hatten wir eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit, genauer einer eingebetteten  $n$ -dimensionalen  $C^1$ -Mannigfaltigkeit, anders definiert: Als eine Vorschrift, die an jedem Punkt jeder angeordneten Basis des Tangentialraums ein Vorzeichen zuordnet und die noch gewisse zusätzliche Eigenschaften hat. Um eine Orientierung in diesem Sinne mit einer Orientierung im hier erklärten topologischen Sinne zu identifizieren, müssen wir zunächst einen Erzeuger der relativen Homologie  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$  auszeichnen. Durch Verschieben und Ausschneidung erhalten wir daraus Erzeuger der relativen Homologie  $H_n(W, W \setminus p)$  für  $p \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ . Gegeben eine Karte  $(W, \varphi)$  der Orientierung  $\varepsilon$  im Sinne von 2.3.9 wählen wir dann die Bilder der  $\varepsilon$ -fachen dieser Erzeuger unter den von  $\varphi$  induzierten Abbildungen  $H_n(W, W \setminus p) \rightarrow H_n(M, M \setminus \varphi(p))$  als Erzeuger auf der rechten Seite, und führen wir das für alle zusammenhängenden Karten durch, so erhalten wir wegen 2.9.5 eine wohldefinierte Orientierung im topologischen Sinne.

**Definition 2.10.6.** Eine Mannigfaltigkeit, die mindestens eine Orientierung besitzt, heißt **orientierbar**. Unter einer **orientierten Mannigfaltigkeit** verstehen wir eine Mannigfaltigkeit mit einer ausgezeichneten Orientierung. Eine Orientierung auf  $M$  induziert in offensichtlicher Weise eine Orientierung auf jeder offenen Teilmenge von  $M$ .

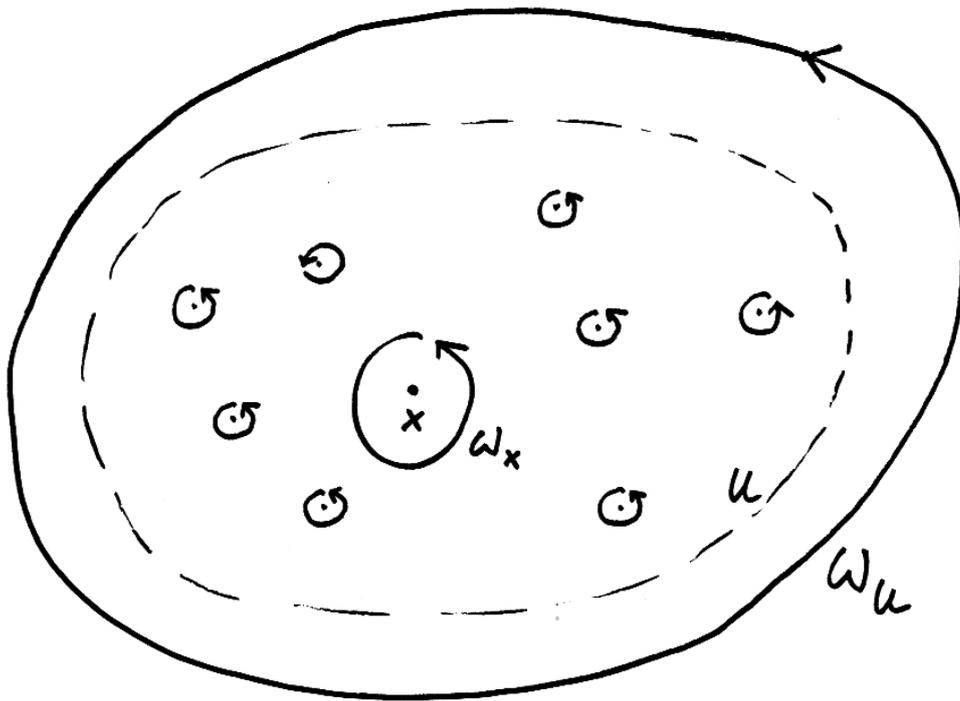
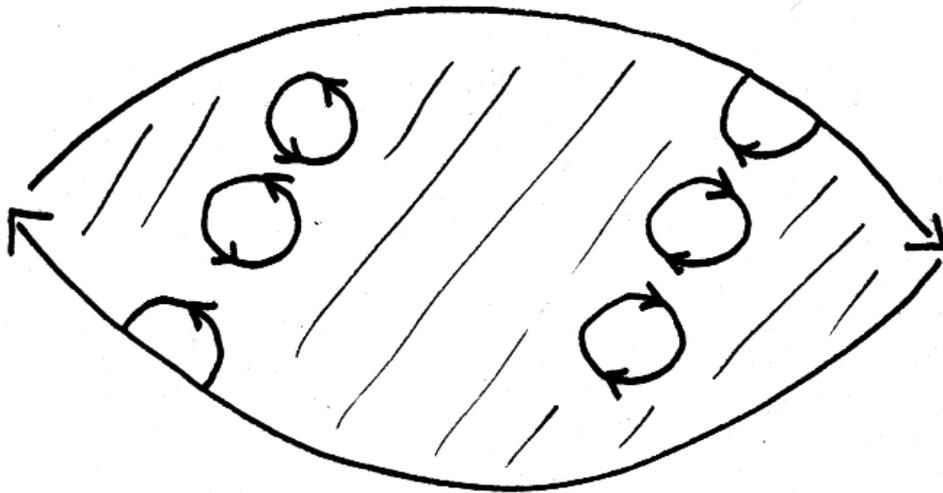


Illustration der Definition einer Orientierung. Die ganzen Punkte  $y \in U$  sind nicht beschriftet, erben aber ihre Orientierung von einem gemeinsamen  $\omega_U$ . Die Homologieklassen habe ich durch Erzeuger angedeutet.



Anschaulich Darstellung der Erkenntnis, daß die reell projektive Ebene nicht orientierbar ist. Die reell projektive Ebene ist hier aufgeschnitten dargestellt, die beiden Kanten müssen so wieder verklebt werden, daß Pfeilspitze auf Pfeilspitze geht.

**Lemma 2.10.7.** *Stimmen zwei Orientierungen einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit in einem Punkt überein, so sind sie gleich.*

*Beweis.* Seien  $M$  unsere zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $\omega, \eta$  unsere beiden Orientierungen. Sei  $x \in M$  gegeben mit  $\omega_x = \eta_x$ . Wir zeigen, daß es eine Umgebung  $U$  von  $x$  gibt mit  $\omega_y = \eta_y \quad \forall y \in U$ . Sicher dürfen wir dazu annehmen  $M = \mathbb{R}^n$ . Per definitionem gibt es einen offenen Ball  $U$  um  $x$  und Elemente  $\omega_U, \eta_U \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U)$  mit  $\omega_U \mapsto \omega_y$  und  $\eta_U \mapsto \eta_y \quad \forall y \in U$ . Da aber für so ein  $U$  die Einbettung Isomorphismen

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus y)$$

induziert für alle  $y \in U$ , folgt aus  $\omega_x = \eta_x$  bereits  $\omega_U = \eta_U$  und dann  $\omega_y = \eta_y \quad \forall y \in U$ . Die Mengen  $M_{\pm}$  aller  $x \in M$  mit  $\omega_x = \pm \eta_x$  sind folglich offen. Damit ist  $M = M_+ \sqcup M_-$  eine Zerlegung in zwei disjunkte offene Teilmengen. Da nach Annahme  $M_+$  nicht leer ist und  $M$  zusammenhängend, folgt  $\omega = \eta$ .  $\square$

*Übung 2.10.8.* Man zeige, daß  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  nicht orientierbar ist.

**Definition 2.10.9.** Etwas formaler betrachten wir die Menge

$$\text{or} = \text{or}_M = \bigsqcup_{x \in M} H_n(M, M \setminus x)$$

und versehen sie mit der Topologie, die erzeugt wird von allen Teilmengen der Gestalt  $\mathcal{O}(U, \omega) = \{\omega|_x \mid x \in U\}$  für  $U \subseteq M$  und  $\omega \in H_n(M, M \setminus U)$ . Wir nennen  $\text{or}_M$  die **Orientierungsgarbe** von  $M$ . Die offensichtliche Abbildung  $p : \text{or}_M \rightarrow M$  ist stetig, denn das Urbild von  $U \subseteq M$  kann beschrieben werden als die Vereinigung aller  $\mathcal{O}(V, \omega)$  mit  $V \subseteq U$ .

*Ergänzung 2.10.10.* Nach dem anschließenden Lemma 2.10.12 ist  $\text{or}_M \rightarrow M$  eine Überlagerung und damit in der Terminologie, wie wir sie in ?? einführen, der “étale Raum einer Garbe auf  $M$ ”. In dieser Terminologie bedeutet unsere Konstruktion der Orientierungsgarbe übrigens genau die “Garbifizierung der Prägarbe  $U \mapsto H_n(M, M \setminus U)$ ”.

*Beispiel 2.10.11 (Trivialisierung der Orientierungsgarbe von  $\mathbb{R}^n$ ).* Wir konstruieren einen Homöomorphismus  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}^n}$  oder vielmehr und noch natürlicher einen Homöomorphismus

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}^n}$$

indem wir jedem Paar  $(\omega_0, x)$  das  $\omega_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$  zuordnen mit der Eigenschaft, daß es für einen und jeden Ball  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  mit Zentrum im Ursprung und

$x \in B$  ein  $\omega_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$  gibt mit  $\omega_B|_0 = \omega_0$  und  $\omega_B|_x = \omega_x$ . Wegen der für alle  $x \in B$  von der Einbettung induzierten Isomorphismen  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$  ist damit  $\omega_x$  wohldefiniert, und daß unsere Abbildung eine Bijektion ist scheint mir offensichtlich. Sie ist stetig, da das Urbild jedes  $\mathcal{O}(U, \omega)$  für einen Ball  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen ist, und da diese Mengen auch schon die Topologie der Orientierungsgarbe erzeugen. Sie ist offen, da diese Urbilder sogar die Topologie der linken Seite erzeugen, wie der Leser unschwer einsehen wird.

**Lemma 2.10.12.** *Ist  $V \subseteq M$  eine offene Teilmenge, so haben wir mit den offensichtlichen Abbildungen ein kartesisches Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \text{or}_V & \rightarrow & \text{or}_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \rightarrow & M \end{array}$$

als da heißt, die obere Horizontale liefert einen Homöomorphismus von  $\text{or}_V$  mit dem Urbild von  $V$  in  $\text{or}_M$ .

*Ergänzung 2.10.13.* Insbesondere ist also nach dem vorhergehenden Beispiel 2.10.11 die natürliche Projektion  $\text{or}_M \rightarrow M$  eine Überlagerungsabbildung.

*Beweis.* Mit der offensichtlichen Abbildung  $\text{or}_V \rightarrow \text{or}_M$  meinen wir die durch die natürlichen Abbildungen  $H_n(V, V \setminus x) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus x)$  definierte Injektion  $\text{can} : \text{or}_V \hookrightarrow \text{or}_M$ . Wir zeigen zunächst, daß sie stetig ist. Es gilt also zu zeigen, daß die Urbilder aller  $\mathcal{O}(U, \omega_U)$  offen sind. In der Tat können wir das Urbild einer solchen Menge aber schreiben als

$$\text{can}^{-1}(\mathcal{O}(U, \omega_U)) = \bigcup_{W \subseteq U \cap V, \bar{W} \subseteq V} \mathcal{O}_V(W, \omega_U|_W)$$

wo wir mit  $\omega_U|_W$  das Bild von  $\omega_U$  unter

$$H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus W) \xleftarrow{\sim} H_n(V, V \setminus W)$$

meinen und mit  $\mathcal{O}_V(\ , \ )$  die definitionsgemäßen Erzeuger der Topologie auf  $\text{or}_V$  bezeichnen. Ähnlich aber einfacher erkennt man, daß unsere Injektion  $\text{can} : \text{or}_V \rightarrow \text{or}_M$  offen ist. Mithin trägt  $\text{or}_V$  die von  $\text{or}_M$  induzierte Topologie, und dann folgt ohne weitere Schwierigkeiten, daß unser Diagramm kartesisch ist.  $\square$

*Übung 2.10.14.* Die faserweise Addition  $\text{or}_M \times_M \text{or}_M \rightarrow \text{or}_M$  sowie das faserweise Negative  $\text{or}_M \rightarrow \text{or}_M$  sind stetig, und der **Nullschnitt**  $M \rightarrow \text{or}_M$  ist auch stetig.

2.10.15. Die Teilmenge  $\text{or}_M^\times \subset \text{or}_M$ , die aus allen Erzeugern von  $H_n(M, M \setminus x)$  für die verschiedenen  $x \in M$  besteht, ist eine zweiblättrige Überlagerung von  $M$  und eine Orientierung von  $M$  ist nichts anderes als ein Lift  $M \rightarrow \text{or}_M^\times$  der Identität auf  $M$  alias ein Schnitt dieser Überlagerung. Insbesondere ist  $M$  orientierbar genau dann, wenn  $\text{or}_M^\times \rightarrow M$  eine triviale Überlagerung ist, und 2.10.7 ist auch eine Konsequenz aus dem Satz 3.4.2 über die Eindeutigkeit von Lifts. Ist  $M$  zusammenhängend und  $x \in M$  fest gewählt, so liefert diese Überlagerung eine Operation der Fundamentalgruppe  $\pi_1(M, x)$  auf einer zweielementigen Menge alias einen Homomorphismus  $\pi_1(M, x) \rightarrow \{\pm 1\}$  und  $M$  ist orientierbar genau dann, wenn diese **Orientierungsdarstellung** konstant ist.

*Übung 2.10.16.* Eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist stets orientierbar, und sogar allgemeiner jede Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe keinen Normalteiler vom Index zwei besitzt.

*Übung 2.10.17.* Für jede Mannigfaltigkeit  $M$  ist der Raum  $\text{or}_M^\times$  eine orientierbare, ja sogar eine in natürlicher Weise orientierte Mannigfaltigkeit.

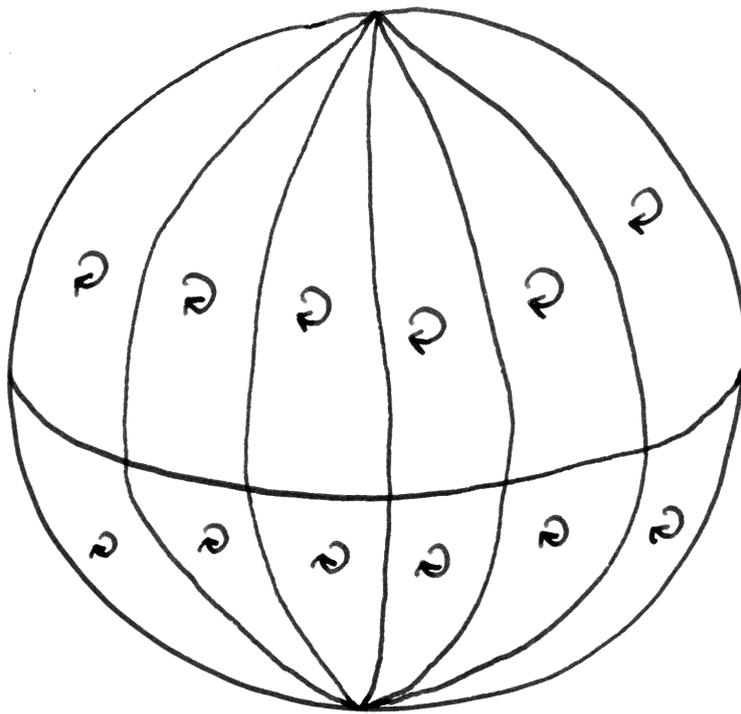
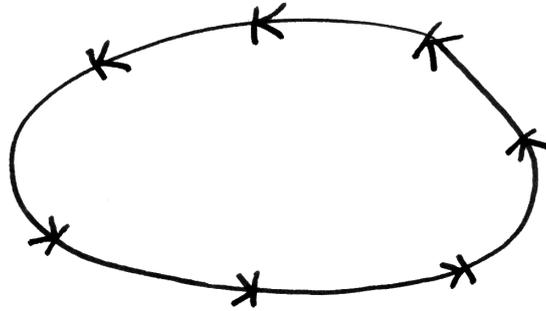
**Satz 2.10.18** ( ***$n$ -te Homologie orientierbarer  $n$ -Mannigfaltigkeiten***). Gegeben eine kompakte zusammenhängende orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist ihre  $n$ -te Homologiegruppe  $H_n M$  frei vom Rang Eins und die offensichtliche Abbildung definiert für alle  $x \in M$  Isomorphismen

$$H_n M \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus x)$$

*Beweis.* Um beim Beweis dieses Satzes die nötige Flexibilität zu haben, zeigen wir im folgenden gleich die allgemeinere Aussage 2.10.22.  $\square$

**Definition 2.10.19.** Ist  $(M, \omega)$  eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach dem Satz 2.10.18 über die hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten genau ein  $\omega_M \in H_n M$  mit  $\omega_M \mapsto \omega_x \quad \forall x \in M$ . Dies  $\omega_M$  heißt der **Fundamentalzykel** der orientierten Mannigfaltigkeit  $M$ , obwohl es genau genommen eigentlich gar kein Zykel ist, sondern vielmehr eine Homologiekategorie.

*Übung 2.10.20.* Man folgere aus 2.10.18: Ist eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer Triangulierung  $M \cong \Delta(\mathcal{K})$  versehen, so können wir jedem  $n$ -Simplex ein Vorzeichen und eine Anordnung zuordnen derart, daß die Summe der entsprechenden mit Vorzeichen simplizialen  $n$ -Simplizes ein Zykel ist. Ist  $M$  auch noch zusammenhängend, so gibt es genau zwei derartige Zyklen und ihre Homologieklassen sind genau die beiden Erzeuger von  $H_n M$ , also die beiden Fundamentalzykel zu den beiden möglichen Orientierungen.



Versuch einer graphischen Darstellung jeweils eines Repräsentanten eines der beiden Fundamentalzykel der Kreislinie und der Sphäre.

**Definition 2.10.21.** Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $M$  und  $A \subset M$  eine Teilmenge nennen wir einen Lift  $A \rightarrow \text{or}_M$  der Einbettung  $A \hookrightarrow M$  auch einen **Schnitt über  $A$  der Orientierungsgarbe**. Die Gruppe der Schnitte über  $A$  notieren wir

$$\Gamma(A; \text{or}_M) = \Gamma A$$

Der **Träger** eines Schnitts  $s \in \Gamma A$  ist die Menge  $\text{supp } s \subset A$  aller derjenigen Punkte, an denen er von Null verschieden ist. Dieser Träger ist stets abgeschlossen in  $A$ . Wir notieren die Untergruppe aller Schnitte mit kompaktem Träger

$$\Gamma_1 A \subset \Gamma A$$

**Satz 2.10.22 (Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten).** Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A \Subset M$  eine abgeschlossene Teilmenge. So haben wir für  $q > n$  stets  $H_q(M, M \setminus A) = 0$ , und für  $q = n$  induziert die offensichtliche Abbildung  $j = j_A$  einen Isomorphismus zwischen der  $n$ -ten relativen Homologie des Komplements von  $A$  und der Gruppe der Schnitte mit kompaktem Träger von  $A$  in die Orientierungsgarbe, in Formeln

$$j : H_n(M, M \setminus A) \xrightarrow{\sim} \Gamma_1 A$$

2.10.23. Ein Spezialfall dieser Aussage wurde bereits in 1.6.3 diskutiert.

*Beweis.* Um Schreibarbeit zu sparen kürzen wir  $H_q(M, M \setminus A) = H_q(\setminus A)$  ab und bemerken zunächst:

**Lemma 2.10.24.** Sind  $A_1, A_2$  abgeschlossen in  $M$  und gilt der Satz für  $A_1, A_2$  und  $A_1 \cap A_2$ , so gilt er auch für  $A_1 \cup A_2$ .

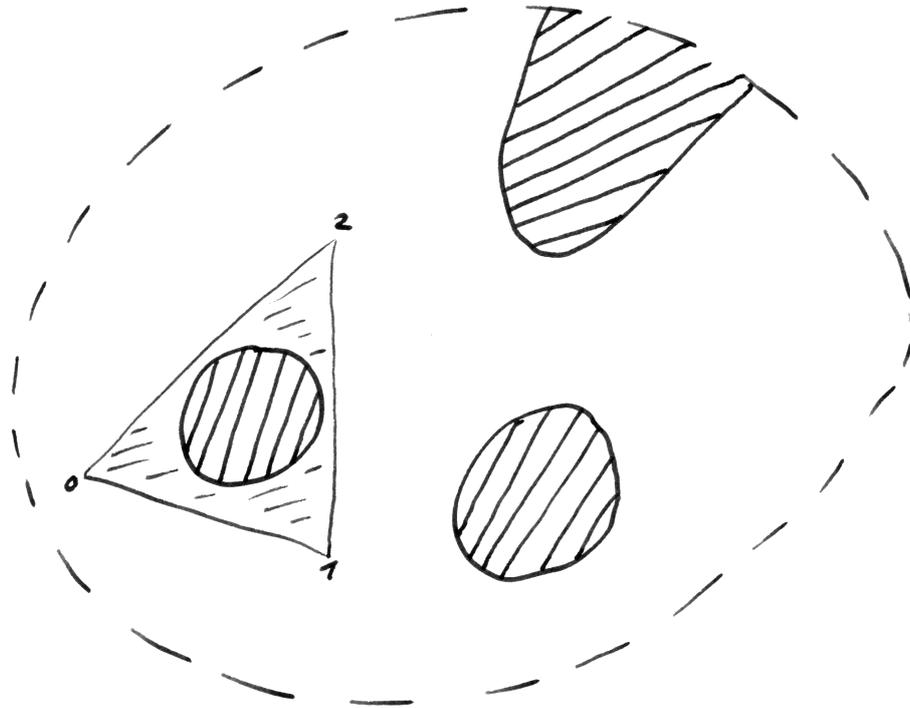
*Beweis.* Das folgt mit dem Fünferlemma aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H_{n+1}(\setminus A_1 \cap A_2) & \rightarrow & H_n(\setminus A_1 \cup A_2) & \rightarrow & H_n(\setminus A_1) \oplus H_n(\setminus A_2) & \rightarrow & H_n(\setminus A_1 \cap A_2) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & 0 & \rightarrow & \Gamma_1(A_1 \cup A_2) & \rightarrow & \Gamma_1 A_1 \oplus \Gamma_1 A_2 & \rightarrow & \Gamma_1(A_1 \cap A_2) \end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo wir oben die relative Mayer-Vietoris-Sequenz 2.3.21 benutzt haben.  $\square$

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Ist  $M = \mathbb{R}^n$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter Quader, dem wir auch Seiten der Länge Null erlauben, so gilt der Satz ganz offensichtlich, da für jeden Punkt  $p \in A$



Diese Bild soll den Satz über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten illustrieren. In der großen offenen Ellipse  $M$  betrachten wir die abgeschlossene Teilmenge  $A$ , die aus den beiden kompakten kleinen schraffierten Eiern und einer ebenfalls eingezeichneten nichtkompakten Zusammenhangskomponente besteht. Die Orientierungsgarbe ist in diesem Fall isomorph zu  $M \times \mathbb{Z}$ , ihre Schnitte über  $A$  müssen auf allen drei Zusammenhangskomponenten von  $A$  konstant sein, und die Schnitte mit kompaktem Träger sind genau die Schnitte, die auf der nichtkompakten Komponente verschwinden. Der ebenfalls eingezeichnete singuläre Zweisimplex ist ein Zykel in  $M$  relativ zu  $M \setminus A$ . Seine Homologieklass entspricht dem Schnitt aus  $\Gamma_1 A$ , der auf der entsprechenden Komponente von  $A$  den Wert plus oder Minus Eins annimmt, je nach Wahl der Identifikation unserer Orientierungsgarbe mit  $M \times \mathbb{Z}$ , und der auf dem Rest von  $A$  den Wert Null annimmt.

die Einbettung  $\mathbb{R}^n \setminus A \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus p$  eine Homotopieäquivalenz ist.

2. Ist  $M = \mathbb{R}^n$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, so gilt der Satz. In der Tat, gegeben  $z \in S_q \mathbb{R}^n$  mit  $\partial z \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$  finden wir  $\epsilon > 0$  und  $E \subset \mathbb{R}^n$  endlich mit

$$A \subset A' = \bigcup_{v \in E} v + [-\epsilon, \epsilon]^n$$

und  $\partial z \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A')$ . Es folgt, daß unser  $[z] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$  das Bild von  $[z] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A')$  ist. Nun gilt der Satz für unsere "Würfelmenge"  $A'$  nach Schritt 1 und dem Lemma. Das zeigt unsere Behauptung im Fall  $q > n$ . Im Fall  $q = n$  zeigen wir zunächst die Injektivität  $j_A[z] = 0 \Rightarrow [z] = 0$ . Dazu wählen wir unsere Würfelmenge  $A'$  zusätzlich so, daß jeder Würfel von  $A'$  die Menge  $A$  trifft, etwa indem wir  $E \subset A$  wählen. Dann ist die Restriktion  $\Gamma A' \rightarrow \Gamma A$  injektiv und aus  $j_A[z] = 0$  folgt  $j_{A'}[z] = 0$  und damit  $[z] = 0$  sogar in  $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A')$ . Das zeigt die Injektivität von  $j_A$ . Um die Surjektivität von  $j_A$  zu zeigen, argumentieren wir ähnlich: Jeder stetige Schnitt  $s \in \Gamma A$  ist lokal konstant und gleichmäßig stetig, läßt sich also stetig auf eine geeignete kompakte Würfelmenge  $A'$  ausdehnen und kommt damit sogar von einer Klasse aus  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A')$  her.

3. Sei  $A$  kompakt und  $M$  beliebig. So können wir  $A$  schreiben als eine endliche Vereinigung von Kompakta, die jeweils ganz in einer Karte enthalten sind. Dann sind wir fertig mit Induktion nach Schritt 2 und dem Lemma.

4. Sei  $A$  abgeschlossen und  $M$  lasse sich einbetten als offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß in eine größere  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$ , in Formeln  $M \subseteq X$  mit  $\bar{M}$  kompakt. So bezeichnen wir den Rand von  $M$  in  $X$  mit  $\partial M = \bar{M} \setminus M$ , betrachten die lange exakte Sequenz des Tripels

$$(X, X \setminus \partial M, X \setminus (\partial M \cup A))$$

und beachten, daß  $\partial M$  und  $\partial M \cup A$  kompakt sind. Mit dem bereits Bewiesenen folgt für  $q > n$  schon  $0 = H_q(X \setminus \partial M, X \setminus (\partial M \cup A))$  und durch Ausschneiden von  $X \setminus \bar{M}$  auch  $0 = H_q(M, M \setminus A)$ . Im Fall  $q = n$  erhalten wir mit derselben Ausschneidung ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_n(M, M \setminus A) & \rightarrow & H_n(X, X \setminus (\partial M \cup A)) & \rightarrow & H_n(X, X \setminus \partial M) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_1 A & \rightarrow & \Gamma_1(\partial M \cup A) & \rightarrow & \Gamma_1(\partial M) \end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo die zweite horizontale Abbildung der unteren Zeile einen Schnitt mit kompaktem Träger fortsetzt durch Null. Die Behauptung folgt mit dem Fünferlemma.

5. Der allgemeine Fall. Sei zunächst  $q > n$  und  $z \in S_q M$  ein Repräsentant von

$\omega \in H_q(M, M \setminus A)$ . So finden wir  $U \Subset M$  mit  $z \in S_q U$  und  $\bar{U}$  kompakt. Nach dem vorhergehenden Punkt verschwindet die Klasse von  $z$  schon in  $H_q(U, U \setminus A)$ , also erst recht in  $H_q(M, M \setminus A)$  und es folgt  $H_q(M, M \setminus A) = 0$  für  $q > n$ . Im Fall  $q = n$  beachten wir für  $U \Subset M$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus A) & \rightarrow & H_n(M, M \setminus A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_1(A \cap U) & \rightarrow & \Gamma_1 A \end{array}$$

wo die untere Horizontale ausdehnt durch Null. Ist  $\bar{U}$  kompakt, so ist die linke Vertikale ein Isomorphismus nach dem vorigen Schritt. Aber jedes  $\omega \in H_n(M, M \setminus A)$  wird repräsentiert von einem  $z \in S_n M$ , wir finden dann  $U \Subset M$  mit  $\bar{U}$  kompakt und  $z \in S_n U$  und so kommt  $\omega$  schon her von einem  $[z] \in H_n(U, U \setminus A)$ . Das zeigt die Injektivität von  $j_A$ . Die Surjektivität zeigen wir ähnlich: Für jedes  $s \in \Gamma_1 A$  gibt es  $U \Subset M$  mit  $\bar{U}$  kompakt und  $s \in \Gamma_1(A \cap U)$  und dann kommt  $s$  sogar schon her von  $H_n(U, U \setminus A)$ .  $\square$

**Korollar 2.10.25.** *Ist  $M$  eine zusammenhängende aber nicht kompakte oder nicht orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit, so gilt  $H_n M = 0$ .*

**Korollar 2.10.26.** *Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen mit endlich vielen kompakten und beliebig vielen sonstigen Zusammenhangskomponenten, so gilt*

$$\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \mathbb{Z}^k$$

für  $k$  die Zahl der kompakten Zusammenhangskomponenten.

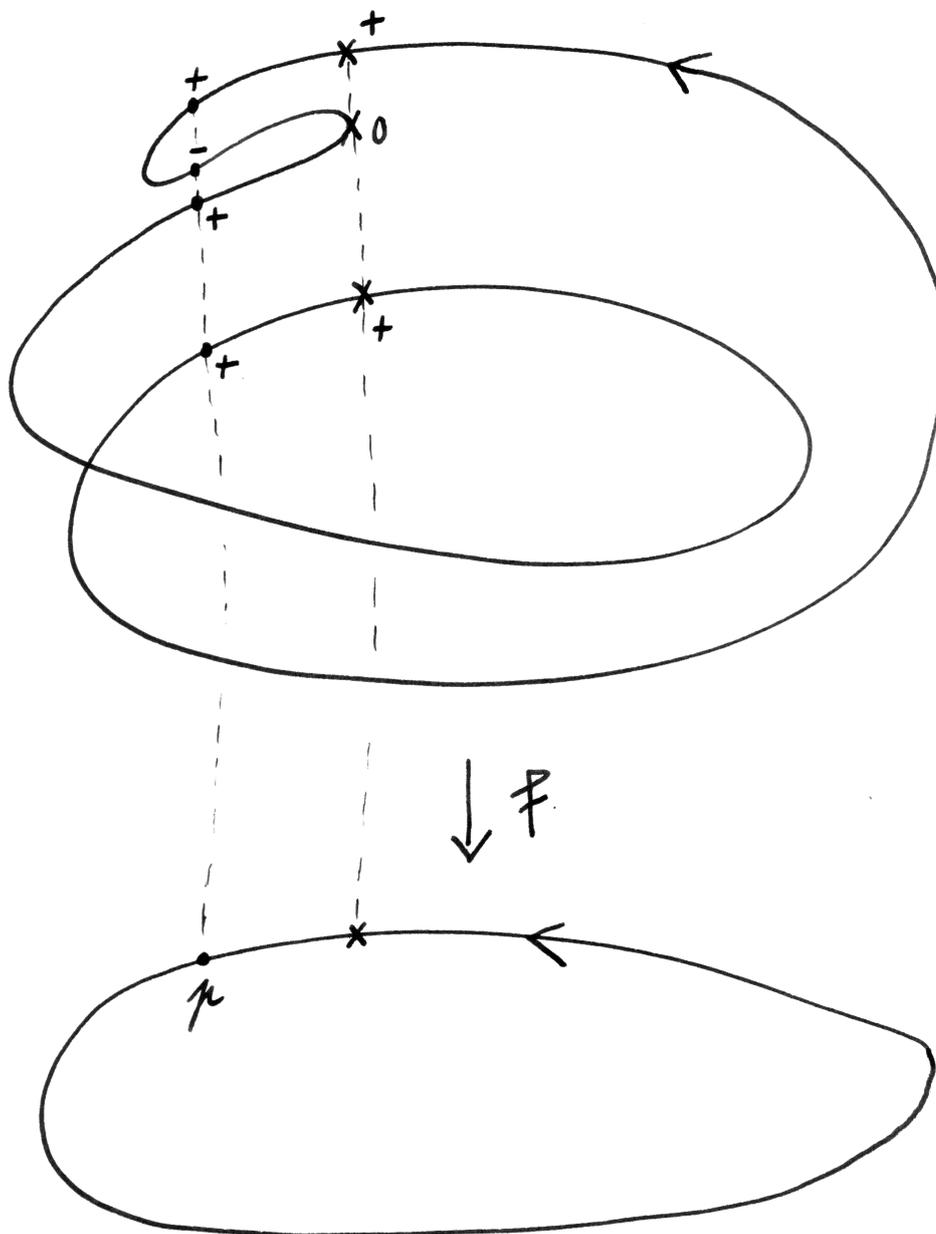
*Beweis.* Wir haben  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$  nach der langen exakten Homologiesequenz und der linke Raum ist isomorph zu  $\Gamma_1 A \cong \mathbb{Z}^k$  nach unserem Satz 2.10.22.  $\square$

2.10.27. Dies letzte Korollar 2.10.26 ist ein Spezialfall der sogenannten ‘Alexander-Dualität’ ??.

2.10.28. Sind wir im Spezialfall  $M = \mathbb{C}$  und benutzen die kanonische Orientierung von  $\mathbb{C}$ , um  $\Gamma_1 A$  zu identifizieren mit stetigen Abbildungen  $A \rightarrow \mathbb{Z}$  mit kompaktem Träger, so ordnet unser Isomorphismus

$$H_1(\mathbb{C} \setminus A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_1 A$$

der Klasse  $[\gamma]$  eines Zyklus  $\gamma$  diejenige Funktion  $A \rightarrow \mathbb{Z}$  zu, deren Wert an einer Stelle  $z \in A$  die Umlaufzahl im Sinne von 1.6.2 des Zyklus  $\gamma$  um den Punkt  $z$  ist.



Eine Abbildung einer Kreislinie auf sich selbst vom Abbildungsgrad Zwei. Die Orientierungen sind durch Pfeilspitzen angedeutet. An den Punkten des Urbilds zweier Punkte sind auch die lokalen Abbildungsgrade eingetragen, unter Verwendung der Abkürzungen  $\pm$  für  $\pm 1$ .

**Definition 2.10.29.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine stetige Abbildung von kompakten orientierten zusammenhängenden  $n$ -Mannigfaltigkeiten. Seien  $\omega_M \in H_n M$  und  $\omega_N \in H_n N$  die Fundamentalzykel. Der **Abbildungsgrad**  $\text{grad } f$  von  $f$  ist die ganze Zahl, die gegeben wird durch die Gleichung

$$f_*\omega_M = (\text{grad } f) \omega_N$$

2.10.30. Insbesondere ist eine Abbildung wie in der Definition mit von Null verschiedenem Abbildungsgrad stets surjektiv, da nach 2.10.25 für die nichtkompakte bzw. im Fall  $n = 0$  für die leere Mannigfaltigkeit  $N \setminus p$  gilt  $H_n(N \setminus p) = 0 \quad \forall p \in N$  und da jede Abbildung, deren Bild einen Punkt  $p$  nicht enthält, faktorisiert als  $M \rightarrow (N \setminus p) \hookrightarrow N$ . Des Weiteren haben homotope Abbildungen nach 1.4.1 denselben Abbildungsgrad.

**Definition 2.10.31.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine stetige Abbildung von orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeiten. Ist  $q \in M$  ein isolierter Punkt der Faser über  $f(q)$ , gibt es in anderen Worten eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  von  $q$  mit  $U \cap f^{-1}(f(q)) = \{q\}$ , so definieren wir den **lokalen Abbildungsgrad von  $f$  bei  $q$**  als die ganze Zahl  $\text{grad}_q f \in \mathbb{Z}$ , die gegeben wird durch die Gleichung

$$f_*\omega_M|_q = (\text{grad}_q f)\omega_N|_{f(q)}$$

für  $f_* : H_n(U, U \setminus q) \rightarrow H_n(N, N \setminus f(q))$  die auf der Homologie induzierte Abbildung und  $\omega_M$  bzw.  $\omega_N$  die entsprechenden Fundamentalzykel. Diese Abbildung hängt offensichtlich nicht von der Wahl von  $U$  ab.

*Beispiel 2.10.32.* In Übung 2.9.5 haben Sie gezeigt, daß der lokale Grad im Fall eines lokalen Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  gerade das Vorzeichen der Funktionaldeterminante ist. In Übung 2.10.34 werden Sie unter anderem zeigen, daß der lokale Abbildungsgrad am Ursprung der Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^n$  genau  $n$  ist.

**Satz 2.10.33 (über den Abbildungsgrad).** *Gegeben eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  von kompakten orientierten zusammenhängenden  $n$ -Mannigfaltigkeiten und ein Punkt  $p \in N$  mit endlichem Urbild ist der Abbildungsgrad von  $f$  die Summe der lokalen Abbildungsgrade bei den Urbildern unseres Punktes, in Formeln*

$$\text{grad } f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \text{grad}_q f$$

*Beweis.* Wir nummerieren die Punkte aus der Faser über  $p$  als  $q_1, \dots, q_r$  und wählen für sie paarweise disjunkte offene Umgebungen  $U_1, \dots, U_r$ . Dann betrachten

wir für jedes  $j$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n M & \xrightarrow{\sim} & H_n(M, M \setminus q_j) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_j, U_j \setminus q_j) \\
 \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 H_n M & \rightarrow & H_n(M, M \setminus \{q_1, \dots, q_r\}) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus q_i) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_n N & \xrightarrow{\sim} & H_n(N, N \setminus p) & = & H_n(N, N \setminus p)
 \end{array}$$

wobei der letzte Isomorphismus der mittleren Horizontalen durch Ausschneidung und der relativen Version der Zerlegung der Homologie 2.1.9 entsteht. Gehen wir von der Mitte der linken Vertikalen direkt nach unten, so wird der Fundamentalzykel  $\omega_M$  abgebildet auf  $(\text{grad } f)\omega_N$ . Gehen wir dahingegen in der mittleren Horizontale nach rechts, so erhalten wir das Tupel der  $\omega_M|_{q_i}$ , wie die obere Hälfte des Diagramms zeigt, gehen wir dann nach unten, so erhalten wir die Summe der lokalen Abbildungsgrade multipliziert mit  $\omega_N|_p$ . Gehen wir wieder nach links, so folgt die Behauptung.  $\square$

*Übung 2.10.34.* Man bestimme die lokalen Abbildungsgrade der nichtkonstanten Polynomfunktionen  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

*Übung 2.10.35 (Rückzug von Orientierungen).* Ist  $f : M \rightarrow N$  eine étale Abbildung von  $n$ -Mannigfaltigkeiten und  $x \in M$  ein Punkt, so gibt es genau einen Isomorphismus  $H_n(M, M \setminus x) \xrightarrow{\sim} H_n(N, N \setminus f(x))$ , der für alle Umgebungen  $U$  von  $x$ , die homöomorph auf ihr Bild abgebildet werden, verträglich ist mit den von  $f$  induzierten Isomorphismen  $H_n(U, U \setminus x) \xrightarrow{\sim} H_n(f(U), f(U) \setminus f(x))$ . Wir erhalten so ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \text{or}_M & \rightarrow & \text{or}_N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \rightarrow & N
 \end{array}$$

Insbesondere läßt sich jede Orientierung von  $N$  “zurückziehen” zu einer Orientierung von  $M$ .

*Übung 2.10.36.* Jede Operation einer Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit induziert eine Operation auf der Orientierungsgarbe, die verträglich ist mit der faserweisen Addition. Operiert eine Gruppe  $D$  topologisch frei auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ , so ist auch  $M/D$  eine Mannigfaltigkeit und die obere Horizontale aus 2.10.35 induziert einen Homöomorphismus

$$(\text{or}_M)/D \xrightarrow{\sim} \text{or}_{(M/D)}$$

*Übung 2.10.37.* Die Kugelschalen  $S^r$  sind orientierbar für alle  $r \geq 0$ . Für  $r \geq 1$  sind sie auch zusammenhängend und die Antipodenabbildung  $S^r \xrightarrow{\sim} S^r$  bildet einen Fundamentalzykel ab auf sich selber für  $r$  ungerade und auf sein Negatives für  $r$  gerade. Der reell projektive Raum  $\mathbb{P}^r \mathbb{R}$  ist orientierbar für  $r = 0$  und  $r \geq 1$  ungerade, jedoch nicht für  $r \geq 1$  gerade.

## 2.11 Satz von Helly\*

**Satz 2.11.1 (Helly).** *Seien  $K_1, \dots, K_r$  konvexe Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Ist der Schnitt von je  $(n + 1)$  unserer  $K_i$  nicht leer, so haben alle  $K_i$  einen Punkt gemeinsam.*

2.11.2. Im Fall von kompakten konvexen Teilmengen folgt das sogar für beliebige Familien mit 6.10.8. Im allgemeinen ist es für unendliche Familien falsch, wie etwa die Familie aller Intervalle  $[a, \infty)$  in  $\mathbb{R}$  zeigt. Man findet einen sehr elementaren Beweis dieser Aussage etwa in Wikipedia. Ich gebe im folgenden einen homologischen Beweis, der zwar einerseits unnötig kompliziert ist, andererseits aber auch die Bedeutung unserer homologischen Sätze illustriert.

*Homologischer Beweis.* Wir überlegen uns zunächst, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle  $K_i$  offen annehmen dürfen. In jedem nichtleeren Schnitt einer Auswahl der  $K_i$  wählen wir dazu einen Punkt. Ersetzen wir nun  $K_i$  durch die konvexe Hülle aller derjenigen eben gewählten Punkte, die in  $K_i$  liegen, so erkennen wir, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle  $K_i$  kompakt annehmen dürfen. Wäre der Schnitt aller  $K_i$  leer, so auch der Schnitt aller  $K_i + \overline{B(0; \epsilon)}$  über alle  $i$  und alle  $\epsilon > 0$ . Dann wäre dieser Schnitt aber nach 6.10.8 bereits für ein festes  $\epsilon > 0$  leer und dasselbe gälte für den Schnitt der offenen Mengen  $K_i + B(0; \epsilon)$ . Damit erkennen wir, daß wir auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle  $K_i$  offen annehmen dürfen. Nach dem Satz über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten wissen wir  $H_q(U) = 0$  für  $q \geq n$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß jede echte Teilfamilie der  $K_i$  nichtleeren Schnitt hat. Setzen wir nun  $U = \bigcup K_i$  und bezeichnen mit  $\mathcal{V}$  diese offenen Überdeckung von  $U$ , so haben wir eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\tilde{S}\left(\bigcap K_i\right) \hookrightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{i < j} \tilde{S}(K_i \cap K_j) \rightarrow \bigoplus \tilde{S}K_i \rightarrow \tilde{S}^{\mathcal{V}}U$$

mit Abbildungen gegeben durch Matrizen mit Einträgen

$$\tilde{S}(K_{i_0} \cap \dots \cap K_{i_\nu} \cap \dots \cap K_{i_q}) \xrightarrow{(-1)^\nu} \tilde{S}(K_{i_0} \cap \dots \cap \hat{K}_{i_\nu} \cap \dots \cap K_{i_q})$$

In der Tat ist das “für jeden singulären Simplex so”, im wesentlichen nach 1.1.9, angewandt auf die angeordnete Menge aller Indizes  $i$  mit der Eigenschaft, daß unser singulärer Simplex in der Menge  $K_i$  liegt. Wäre  $\bigcap K_i = \emptyset$ , so hätten wir für den ersten Komplex unserer Sequenz  $\mathcal{H}_{-1} \neq 0$ . Da nach Annahme alle anderen Komplexe bis auf  $\tilde{S}^{\mathcal{V}}U$  exakt sind, folgte mit der Notation  $C_k$  für den Kokern des  $(k + 1)$ -ten Pfeils, aufgefaßt als Kettenkomplex, für  $k = 0, 1, \dots$  aus der langen exakten Homologiesequenz induktiv  $\mathcal{H}_k(C_k) \neq 0$  und schließlich  $\mathcal{H}_r(\tilde{S}^{\mathcal{V}}U) \neq 0$  im Widerspruch zu  $H_r(U) = 0$ .  $\square$

2.11.3. Ich wüßte gerne, warum ein Simplizialkomplex, der sich als Triangulierung einer konvexen Teilmenge eines affinen Raums über einem beliebigen angeordneten Körper realisieren läßt, azyklisch ist.

## 3 Homologie mit Koeffizienten und Produkte

### 3.1 Homologie mit Koeffizienten

**Definition 3.1.1.** Sei  $G$  eine abelsche Gruppe. In unseren bisherigen Argumenten können wir stets  $G$  statt  $\mathbb{Z}$  schreiben und erhalten so allgemeinere Funktoren von topologischen Räumen oder Raumpaaren in die abelschen Gruppen. Sie heißen die **Homologie** bzw. **reduzierte Homologie mit Koeffizienten in  $G$** . Zum Beispiel definieren wir die  $q$ -te Homologie

$$H_q(X; G)$$

eines Raums  $X$  mit Koeffizienten in  $G$ , indem wir die Homologie des Komplexes  $S(X; G)$  der singulären Ketten mit Koeffizienten in  $G$  nehmen, wobei  $S_q(X; G)$  schlicht die Menge aller endlichen formalen Ausdrücke  $\sum n_\sigma \sigma$  bezeichnet mit  $n_\sigma \in G$  und  $n_\sigma = 0$  für alle bis auf endlich viele Simplizes  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ . Wir schreiben  $\tilde{H}_q(X; G)$  für die reduzierten Homologiegruppen und  $H_q(X, A; G)$  für die relativen Homologiegruppen mit Koeffizienten in  $G$ .

3.1.2. Es wird auch andersherum ein Schuh daraus: Halten wir den Raum  $X$  fest, so wird  $G \mapsto H_q(X; G)$  ein Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in sich selber. Ist insbesondere  $R$  ein Ring und  $G$  ein  $R$ -Modul, so werden die Homologiegruppen mit Koeffizienten in  $G$  auch  $R$ -Moduln in natürlicher Weise.

*Übung 3.1.3.* Gegeben eine kurze exakte Sequenz  $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$  von abelschen Gruppen und ein topologischer Raum  $X$  zeige man, wie in natürlicher Weise Randoperatoren definiert werden können derart, daß eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_q(X; G') \rightarrow H_q(X; G) \rightarrow H_q(X; G'') \rightarrow H_{q-1}(X; G') \rightarrow \dots$$

entsteht. Diese Randoperatoren heißen die **Bockstein-Homomorphismen**.

3.1.4. Die meisten der bisher bewiesenen allgemeinen Aussagen, insbesondere Homotopieinvarianz, lange exakte Homologiesequenz, Ausschneidung, Mayer-Vietoris-Sequenz und Anklebesequenz gelten in der Homologie mit Koeffizienten genauso mit demselben oder fast demselben Beweis. Bei den bisherigen speziellen Resultaten zur Homologie und reduzierten Homologie von Punkten und Sphären kann man direkt prüfen, daß alle Argumente ebenso mit Koeffizienten  $G$  funktionieren und wir nur im Endresultat jeweils  $G$  statt  $\mathbb{Z}$  erhalten. Wir werden in 3.5.2 zeigen, daß Ähnliches allgemein gilt, solange die Homologiegruppen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  alle frei sind über  $\mathbb{Z}$ .

*Beispiel 3.1.5.* Wir behaupten, daß sich ein Landkarte, bei der an jedem "Mehrländereck" eine gerade Anzahl von Grenzen beginnnt, stets so mit zwei Farben

färben läßt, daß keine zwei benachbarten Staaten dieselbe Farbe haben. Staaten, die nur Grenzsteine gemeinsam haben, gelten hierbei nicht als benachbart! Um das zu zeigen, ergänzen wir die Anschauungsebene durch einen Punkt im Unendlichen zu einer Sphäre und unterteilen unsere Staaten durch zusätzliche Grenzen aber ohne zusätzliche Mehrländerecken in Bundesländer, bis wir eine Triangulierung der Sphäre erhalten. Die Summe der Staatsgrenzen ist dann ein simplizialer Einszykel mit  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Koeffizienten, der also der Rand einer Zweikette sein muß, und diese ist dann die gesuchte Färbung.

3.1.6. Ganz genauso wie in 2.10 definieren wir für jede  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  und jede abelsche Gruppe  $G$  die **Orientierungsgarbe mit Koeffizienten in  $G$**  und zeigen für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \Subset M$ , daß gilt  $H_q(M, M \setminus A; G) = 0$  für  $q > n$  und daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$j = j_A : H_n(M, M \setminus A; G) \xrightarrow{\sim} \Gamma_! A$$

induziert, wobei rechts die Schnitte mit kompaktem Träger von  $A$  in die Orientierungsgarbe mit Koeffizienten in  $G$  zu verstehen sind. Man erkennt ohne Schwierigkeiten, daß die fragliche Orientierungsgarbe gerade die Überlagerung ist, die von der Operation der Fundamentalgruppe auf  $G$  mittels der Orientierungsdarstellung aus 2.10.15 herkommt. Daraus folgt, daß für eine kompakte zusammenhängende  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  und einen beliebigen Punkt  $x \in M$  die kanonische Abbildung

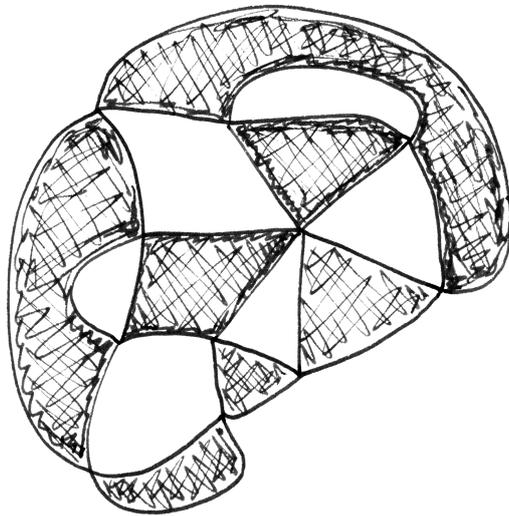
$$H_n(M; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus x; G)$$

ein Isomorphismus ist für  $M$  orientierbar und eine Injektion mit Bild die Fixpunkte der Multiplikation mit  $(-1)$  für  $M$  nicht orientierbar.

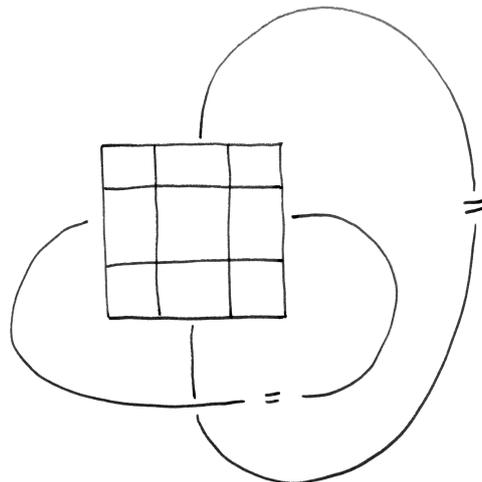
**Satz 3.1.7.** *Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  verwenden wir im folgenden die Notation  $G_2 = \{a \in G \mid a + a = 0\}$  für die Fixpunkte der Multiplikation mit  $(-1)$ . Die **Homologie der reell projektiven Räume**  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  mit Koeffizienten in  $G$  wird in dieser Notation gegeben durch*

$$H_q(\mathbb{P}^n \mathbb{R}; G) \cong \begin{cases} G & q = 0; \\ G/2G & 0 < q < n, \quad q \text{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q < n, \quad q \text{ gerade}; \\ G & 0 < q = n, \quad n \text{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q = n, \quad n \text{ gerade}; \\ 0 & q > n. \end{cases}$$

*Beweis.* Wir kürzen für diesen Beweis  $H_q(X; G) = H_q X$  und  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = \mathbb{P}^n$  ab. Für  $n \geq 0$  geht  $\mathbb{P}^{n+1}$  aus  $\mathbb{P}^n$  hervor durch Ankleben einer  $(n+1)$ -Zelle und die verklebende Abbildung ist schlicht die offensichtliche zweifache Überlagerung



Eine Zweifärbung einer ebenen “geraden” Karte



Eine nicht zweifärbbare “gerade” Karte auf dem Torus

$S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Wir haben also  $\tilde{H}_q \mathbb{P}^{n+1} = \tilde{H}_q \mathbb{P}^n$  für  $q \neq n+1, n$  und  $\tilde{H}_q \mathbb{P}^{n+1} = 0$  für  $q > n+1$  sowie eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{n+1} \mathbb{P}^{n+1} \rightarrow \tilde{H}_n S^n \rightarrow \tilde{H}_n \mathbb{P}^n \rightarrow \tilde{H}_n \mathbb{P}^{n+1} \rightarrow 0$$

Es reicht zu zeigen, daß hier der mittlere Pfeil die Nullabbildung ist für  $n$  gerade bzw. unter geeigneter Identifikation der Enden die Multiplikationsabbildung  $(2 \cdot) : G \rightarrow G$  für  $n > 0$  ungerade. Der Fall  $n = 0$  ist eh klar. Für  $n > 0$  betrachten wir nun das kommutative Diagramm aus dem Beweis von 2.10.33 mit Koeffizienten in  $G$ . Genauer betrachten wir um  $p \in \mathbb{P}^n$  eine trivial überlagerte offene Umgebung  $U$ , die homöomorph ist zu einem offenen Ball. Wir haben dann  $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$  und  $\pi^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2$  für geeignete offene Umgebungen  $U_i$  von  $p_i$  in  $S^n$ . Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n S^n & \rightarrow & H_n(S^n, S^n \setminus \pi^{-1}(p)) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_1, U_1 \setminus p_1) \oplus H_n(U_2, U_2 \setminus p_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n \mathbb{P}^n & \hookrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus p) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U, U \setminus p) \end{array}$$

Mit  $a : S^n \rightarrow S^n$  der Antipoden-Abbildung kommutiert nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_n S^n & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n, S^n \setminus p_1) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_1, U_1 \setminus p_1) & \xrightarrow{\sim} & H_n(U, U \setminus p) \\ \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow a & & \parallel \\ H_n S^n & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n, S^n \setminus p_2) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_2, U_2 \setminus p_2) & \xrightarrow{\sim} & H_n(U, U \setminus p) \end{array}$$

Da aber nach 2.9.1 die Antipodenabbildung auf der  $n$ -ten reduzierten Homologie der Sphäre  $S^n$  die Multiplikation mit  $(-1)^{n+1}$  induziert, ist die Verknüpfung  $H_n S^n \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus p)$  das  $(1 + (-1)^{n+1})$ -fache eines Isomorphismus.  $\square$

## 3.2 Tensorprodukte über Ringen

**Definition 3.2.1.** Gegeben  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $N$  ein  $R$ -Linksmodul definieren wir eine abelsche Gruppe  $M \otimes_R N$ , das **Tensorprodukt** von  $M$  mit  $N$  über  $R$ , als den Quotienten der freien abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}(M \times N)$  über dem kartesischen Produkt  $M \times N$  durch die von allen Ausdrücken

$$\begin{aligned} (mr, n) & - (m, rn) \\ (m + m', n) & - (m, n) - (m', n) \\ (m, n + n') & - (m, n) - (m, n') \end{aligned}$$

mit  $m, m' \in M, n, n' \in N$  und  $r \in R$  erzeugte Untergruppe. Die Nebenklasse von  $(m, n)$  schreiben wir  $m \otimes n$ . Wenn wir erwarten, daß der Leser den Grundring  $R$  aus dem Kontext erschließen soll, und insbesondere im Fall  $R = \mathbb{Z}$  kürzen wir auch gerne  $\otimes_R$  zu  $\otimes$  ab.

*Ergänzung 3.2.2.* Prinzipiell könnten wir auch für zwei  $R$ -Linksmoduln  $M, N$  in ähnlicher Weise eine abelsche Gruppe  $T(M, N)$  definieren als einen Quotienten wie eben mit  $(rm, n) - (m, rn)$  anstelle von  $(mr, n) - (m, rn)$ . Diese Konstruktion erweist sich jedoch für nichtkommutative Ringe—and nur für diese unterscheidet sie sich von der zuvor gegebenen Konstruktion—as wenig hilfreich, da sie keine vergleichbar guten Eigenschaften hat: Als Illustration mag der Leser prüfen, daß in dem Fall, daß  $R$  der Schiefkörper der Quaternionen ist, alle in dieser Weise gebildeten  $T(M, N)$  schlicht Null sind.

**Definition 3.2.3.** Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul,  $N$  ein  $R$ -Linksmodul und  $A$  eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung  $b : M \times N \rightarrow A$  heißt  **$R$ -bilinear** genau dann, wenn für alle  $m, m' \in M, n, n' \in N$  und  $r \in R$  gilt:

$$\begin{aligned} b(mr, n) &= b(m, rn) \\ b(m + m', n) &= b(m, n) + b(m', n) \\ b(m, n + n') &= b(m, n) + b(m, n') \end{aligned}$$

**Satz 3.2.4 (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts).** Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $N$  ein  $R$ -Linksmodul.

1. Die Abbildung  $M \times N \rightarrow M \otimes_R N, (m, n) \mapsto m \otimes n$  ist  $R$ -bilinear.
2. Wann immer  $b : M \times N \rightarrow A$  eine  $R$ -bilineare Abbildung in eine abelsche Gruppe  $A$  ist, gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus  $\tilde{b} : M \otimes_R N \rightarrow A$  derart, daß gilt  $\tilde{b}(m \otimes n) = b(m, n)$  für alle  $m \in M, n \in N$ .

*Beweis.* Vollständig analog zum in [LA2] 6.3.4 behandelten Fall des Tensorprodukts über einem Körper und dem Leser überlassen.  $\square$

3.2.5. Keineswegs jedes Element eines Tensorprodukts ist von der Form  $m \otimes n$ , die Elemente dieser Gestalt erzeugen jedoch das Tensorprodukt als abelsche Gruppe. Besitzt weiter ein Element eines Tensorprodukts eine Darstellung der Gestalt  $m \otimes n$ , so besitzt es meist sogar viele verschiedene Darstellungen dieser Gestalt. Geben wir dennoch eine Abbildung von einem Tensorprodukt in eine abelsche Gruppe  $A$  an durch eine Vorschrift der Gestalt  $m \otimes n \mapsto b(m, n)$ , so ist der Leser implizit gefordert, die Bilinearität der Abbildung  $b : M \times N \rightarrow A$  zu prüfen, und gemeint ist die durch die universelle Eigenschaft 3.2.4 definierte Abbildung  $\tilde{b} : M \otimes_R N \rightarrow A$ .

*Beispiel 3.2.6.* Es gilt  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ , denn wir haben für jeden Tensor  $a \otimes q = a \otimes 5(q/5) = 5a \otimes (q/5) = 0 \otimes (q/5) = 0$ .

3.2.7. Aufgrund der universellen Eigenschaft definieren je zwei  $R$ -lineare Abbildungen  $f : M \rightarrow M'$  und  $g : N \rightarrow N'$  einen Gruppenhomomorphismus

$f \otimes g : M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N', m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$  und wir erhalten so einen Funktor

$$\begin{aligned} (\text{Mod-}R) \times (R\text{-Mod}) &\rightarrow \text{Ab} \\ (M, N) &\mapsto M \otimes_R N \end{aligned}$$

3.2.8. Sind  $S, R$  Ringe, so versteht man unter einem  $S$ - $R$ -**Bimodul** eine abelsche Gruppe  $M$  mit einer Struktur als  $S$ -Linksmodul und einer Struktur als  $R$ -Rechtsmodul derart, daß gilt

$$(sm)r = s(mr) \quad \forall s \in S, m \in M, r \in R$$

Wir notieren die Kategorie aller  $S$ - $R$ -Bimoduln als  $S\text{-Mod-}R$ . Aufgrund seiner Funktorialität ist das Tensorprodukt automatisch auch ein Funktor

$$(S\text{-Mod-}R) \times (R\text{-Mod-}T) \rightarrow (S\text{-Mod-}T)$$

für beliebige Ringe  $S, R, T$ , die Operation von  $S$  bzw.  $T$  geschieht schlicht durch  $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n, (m \otimes n)t = m \otimes (nt)$ . Ist speziell  $R$  ein kommutativer Ring, so ist das Tensorprodukt von zwei  $R$ -Moduln in natürlicher Weise wieder ein  $R$ -Modul. Diesen Fall lernt man oft zuerst kennen.

3.2.9 (**Tensorieren mit dem Grundring**). Ist  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul, so ist  $R \otimes_R M \rightarrow M, r \otimes m \mapsto rm$  ein Isomorphismus mit Inversem  $m \mapsto 1 \otimes m$ . Für diese Eigenschaft wesentlich ist, daß in unseren Konventionen Ringe stets eine Eins haben und Moduln stets unitär sind.

**Lemma 3.2.10 (Tensorprodukte vertauschen mit Summen)**. Gegeben ein Ring  $R$  definiert die offensichtliche Abbildung für einen  $R$ -Rechtsmodul  $M$  und eine beliebige Familie von  $R$ -Moduln  $(N_i)$  einen Isomorphismus

$$M \otimes_R \left( \bigoplus N_i \right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus (M \otimes_R N_i)$$

*Beweis.* In der Tat haben wir sowohl für die linke als auch für die rechte Seite  $S$  offensichtliche bilineare Abbildungen  $\text{can}_i : M \times N_i \rightarrow S$  und diese sind universell: Ist irgendeine abelsche Gruppe  $A$  gegeben und eine Familie von bilinearen Abbildungen  $b_i : M \times N_i \rightarrow A$ , so gibt es jeweils genau einen Gruppenhomomorphismus  $\tilde{b} : S \rightarrow A$  mit  $b_i = \tilde{b} \circ \text{can}_i$ .  $\square$

*Beispiel 3.2.11.* Wir haben  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}^7 \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^7$ .

3.2.12. Das Tensorprodukt vertauscht keineswegs mit beliebigen Produkten, es vertauscht jedoch mit beliebigen ‘‘Kolimites’’, vergleiche 5.1.31.

**Definition 3.2.13.** Eine Sequenz  $A' \rightarrow A \rightarrow A''$  von abelschen Gruppen heißt **rechtsexakt** genau dann, wenn sie exakt ist bei  $A$  und wenn zusätzlich  $A \rightarrow A''$  eine Surjektion ist. Wir schreiben rechtsexakte Sequenzen meist  $A' \rightarrow A \twoheadrightarrow A''$ .

**Lemma 3.2.14 (Das Tensorprodukt ist rechtsexakt).** *Ist  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $N' \rightarrow N \twoheadrightarrow N''$  eine rechtsexakte Sequenz von  $R$ -Linksmoduln, so entsteht durch Darantensorieren von  $M$  eine rechtsexakte Sequenz von abelschen Gruppen  $M \otimes_R N' \rightarrow M \otimes_R N \twoheadrightarrow M \otimes_R N''$ .*

*Beweis.* Daß hier die Surjektivität erhalten bleibt und daß die Verknüpfung auch nach dem Tensorieren verschwindet, ist offensichtlich. Wir kürzen für den weiteren Beweis  $\otimes_R = \otimes$  ab und haben also eine Surjektion

$$\text{cok}(M \otimes N' \rightarrow M \otimes N) \twoheadrightarrow M \otimes N''$$

Wir müssen zeigen, daß sie eine Injektion ist. Nun gibt es aber offensichtlich eine wohldefinierte  $R$ -bilineare Abbildung  $M \times N'' \rightarrow \text{cok}$  mit  $(m, \bar{n}) \mapsto \overline{m \otimes n}$  für alle  $n \in N$ . Sie induziert folglich eine Abbildung  $M \otimes N'' \rightarrow \text{cok}$ . Man sieht, daß wir so eine inverse Abbildung zu unserer Surjektion  $\text{cok} \twoheadrightarrow M \otimes N''$  erhalten.  $\square$

3.2.15. Die drei vorstehenden Lemmata gelten analog auch für den anderen Tensorfaktor.

*Beispiel 3.2.16.* Wir erhalten  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , indem wir die Sequenz  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mit der Multiplikation  $(2 \cdot)$  als erster Abbildung tensorieren mit  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und die Rechtsexaktheit des Tensorprodukts ausnutzen.

**Lemma 3.2.17.** *Ist  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $\mathfrak{m} \subset R$  ein Rechtsideal, d.h. ein Untermodul des  $R$ -Rechtsmoduls  $R$ , und betrachten wir in  $M$  den Untermodul  $\mathfrak{m}M = \{\sum a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{m}, m_i \in M\}$ , so induziert die Multiplikation einen natürlichen Isomorphismus*

$$(R/\mathfrak{m}) \otimes_R M \cong M/\mathfrak{m}M$$

*Beweis.* Das folgt, indem wir auf  $\mathfrak{m} \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$  den Funktor  $\otimes_R M$  anwenden.  $\square$

*Beispiel 3.2.18.* Das Tensorprodukt ist im allgemeinen nicht linksexakt: Wendet man auf die Multiplikation  $(2 \cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$  den Funktor  $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  an, so erhält man die Nullabbildung  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Definition 3.2.19.** Eine abelsche Gruppe heißt **torsionsfrei** genau dann, wenn die Multiplikation mit jeder von Null verschiedenen ganzen Zahl auf unserer Gruppe eine Injektion induziert. Allgemeiner heißt ein Modul über einem Ring **torsionsfrei** genau dann, wenn die Multiplikation mit jedem von Null verschiedenen Ringelement auf unserem Modul eine Injektion induziert.

**Lemma 3.2.20.** *Aus einer Injektion  $N' \hookrightarrow N$  von abelschen Gruppen entsteht durch Darantensorieren einer torsionsfreien abelschen Gruppe  $M$  eine Injektion  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N' \hookrightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ .*

*Beweis.* Ist  $M$  endlich erzeugt, so ist  $M$  frei nach 4.4.9 und das Lemma folgt aus 3.2.10. Wir führen nun den allgemeinen Fall darauf zurück. Jedes Element  $t \in M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$  ist ja Bild eines  $t_1 \in M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$  für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe  $M_1 \subset M$ . Geht  $t$  nach Null in  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ , so auch in  $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N$  für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe  $M_2 \subset M$  mit  $M_1 \subset M_2$ . Nach dem bereits behandelten Fall verschwindet damit  $t_1$  schon in  $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$  und erst recht in  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$  und es folgt  $t = 0$ .  $\square$

3.2.21. In einer Sprache, die wir später einführen werden, hört sich dieser Beweis so an: Für endlich erzeugte Gruppen gilt das Lemma, da sie frei sind. Eine beliebige torsionsfreie Gruppe ist der filtrierende direkte Limes ihrer endlich erzeugten Untergruppen, das Tensorprodukt kommutiert nach 5.1.31 mit direkten Limites, und filtrierende direkte Limites sind nach 5.1.29 exakt.

*Übung 3.2.22.* Ist  $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$  eine spaltende kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln, so bleibt die Sequenz exakt unter  $M \otimes_R$ . Insbesondere ist also das Tensorieren über einem Körper stets exakt.

*Übung 3.2.23.* Seien  $R, S$  Ringe und  $M \in \text{Mod-}S$ ,  $N \in S\text{-Mod-}R$  und  $L \in R\text{-Mod}$  Moduln. So ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus  $(M \otimes_S N) \otimes_R L \xrightarrow{\sim} M \otimes_S (N \otimes_R L)$ .

*Übung 3.2.24.* Sei  $S \rightarrow R$  ein Ringhomomorphismus. Ist  $M$  ein  $S$ -Modul und  $(m_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $M$ , so bilden die  $1 \otimes m_i$  eine Basis des  $R$ -Moduls  $R \otimes_S M$ .

*Übung 3.2.25.* Ist  $\varphi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus derart, daß  $S$  als Ring erzeugt wird vom Bild  $\varphi(R)$  von  $R$  mitsamt den Inversen der Elemente aus  $\varphi(R) \cap S^\times$ , so ist für  $M \in \text{Mod-}S$  und  $N \in S\text{-Mod}$  die kanonische Abbildung eine Bijektion

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} M \otimes_S N$$

Speziell liefert für ein Ideal  $\mathfrak{m} \subset R$  und  $M \in \text{Mod-}R/\mathfrak{m}$  sowie  $N \in R/\mathfrak{m}\text{-Mod}$  die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus  $M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{R/\mathfrak{m}} N$ , und für je zwei  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume  $M, N$  liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathbb{Q}} N$ .

*Übung 3.2.26.* Genau dann besteht eine abelsche Gruppe  $M$  nur aus Elementen endlicher Ordnung, wenn gilt  $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ . Etwas allgemeiner wird das auch aus 2.5.1 folgen.

*Übung 3.2.27.* Sind  $M' \rightarrow M \twoheadrightarrow M''$  und  $N' \rightarrow N \twoheadrightarrow N''$  rechtsexakte Sequenzen von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring  $R$ , so ist auch die Sequenz  $(M' \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N') \rightarrow M \otimes_R N \twoheadrightarrow M'' \otimes_R N''$  rechtsexakt.

*Übung 3.2.28.* Gegeben ein Rechtsmodul  $M$  über einem Ring  $R$  erhalten wir aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts ein adjungiertes Paar von Funktoren  $(M \otimes_R, \text{Ab}(M, \_))$  zwischen den Kategorien  $R\text{-Mod}$  und  $\text{Ab}$ . In größerer Allgemeinheit wird das in ?? diskutiert.

*Ergänzende Übung 3.2.29.* Man zeige: Gegeben  $A \supset k$  ein Ring mit einem Teilering und  $M$  ein  $A$ -Linksmodul ist der Komplex

$$\dots \rightarrow A \otimes_k A \otimes_k M \rightarrow A \otimes_k M \rightarrow M$$

mit dem Randoperator

$$\begin{aligned} a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes m &\mapsto a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes m \\ &\quad - a_0 \otimes a_1 a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes m \\ &\quad \dots \\ &\quad \pm a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n m \end{aligned}$$

exakt, ja sogar nullhomotop. Er heißt der **Bar-Komplex** oder präziser der **nicht normalisierte Bar-Komplex**. Hinweis: Das Davorschreiben von  $1 \otimes$  ist eine Homotopie der Identität mit der Nullabbildung.

*Ergänzendes Beispiel 3.2.30.* Ist  $R$  ein linksnoetherscher Ring, so ist für je zwei Mengen  $X, Y$  die offensichtliche Abbildung eine Injektion

$$\text{Ens}(X, R) \otimes_R \text{Ens}(Y, R) \hookrightarrow \text{Ens}(X \times Y, R)$$

In der Tat gehe  $a_1 \otimes b_1 + \dots + a_n \otimes b_n$  nach Null. Die Menge aller  $(r_1, \dots, r_n) \in R^n$  mit  $r_1 b_1 + \dots + r_n b_n = 0$  in  $\text{Ens}(Y, R)$  ist ein Untermodul von  $R^n$ . Ist  $R$  linksnoethersch, so ist dieser Untermodul endlich erzeugt, etwa von  $c_1, \dots, c_k \in R^n$ . Für alle  $x \in X$  gibt es also  $r_1(x), \dots, r_k(x) \in R$  derart, daß für alle  $i$  mit  $1 \leq i \leq n$  gilt  $a_i(x) = r_1(x)c_{1i} + \dots + r_k(x)c_{ki}$ . Es folgt

$$a_1 \otimes b_1 + \dots + a_n \otimes b_n = \sum_{i,j} r_j c_{ji} \otimes b_i = \sum_{i,j} r_j \otimes c_{ji} b_i = 0$$

Heike Mildenerger und Martin Ziegler haben ein Beispiel konstruiert, das zeigt, daß die kanonische Abbildung

$$\text{Ens}(\mathbb{N}, R) \otimes_R \text{Ens}(\mathbb{N}, R) \rightarrow \text{Ens}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, R)$$

nicht für jeden Ring  $R$  injektiv ist. Der Ring  $R$  ist dabei der Polynomring in abzählbar vielen Variablen  $x_0, x_1, x_2, \dots, y_0, y_1, y_2, \dots$  modulo der quadratischen Relationen  $x_i y_j = 0 \forall i, j$  und  $x_i x_j = y_i y_j = 0$  außer bei  $\{i, j\} = \{2n, 2n+1\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Man betrachte nun die Elemente  $a : i \mapsto x_i$  und  $b : j \mapsto y_j$  von  $\text{Ens}(\mathbb{N}, R)$ . Natürlich hat  $a \otimes b$  in  $\text{Ens}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, R)$  das Bild Null. Es reicht zu zeigen, daß  $a \otimes b$  nicht bereits selbst Null ist. Dazu betrachte man das Ideal  $I \subset \text{Ens}(\mathbb{N}, R)$  aller Abbildungen mit endlichem Träger und setze  $R^* := \text{Ens}(\mathbb{N}, R)/I$ . Die Komposition

$$R \hookrightarrow \text{Ens}(\mathbb{N}, R) \twoheadrightarrow R^*$$

mit der Einbettung als konstante Funktionen links ist ein Ringhomomorphismus. Seien  $a^*, b^* \in R^*$  die Bilder von  $a, b \in \text{Ens}(\mathbb{N}, R)$ . Man zeigt nun, daß  $R^*$  einen  $R$ -linearen Ringautomorphismus  $f$  besitzt mit der Eigenschaft  $f(a^*)b^* \neq 0$ . Wir betrachten dazu die involutiven Automorphismen  $f_{2n} = f_{2n+1} : R \xrightarrow{\sim} R$  des Rings  $R$  mit  $f_{2n}(x_{2n}) = y_{2n+1}$  und  $f_{2n}(y_{2n}) = x_{2n+1}$ . Jedes Element von  $R$  wird nur von endlich vielen dieser Automorphismen überhaupt bewegt. Zusammen liefern die  $f_i$  einen Ringautomorphismus  $f : \text{Ens}(\mathbb{N}, R) \rightarrow \text{Ens}(\mathbb{N}, R)$  gegeben durch  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (f_i(u_i))_{i \in \mathbb{N}}$ . Dieser Automorphismus ist nicht  $R$ -linear, hält jedoch das Ideal  $I$  fest und der davon induzierte Automorphismus  $f : R^* \xrightarrow{\sim} R^*$  des Quotienten ist sogar  $R$ -linear, da eben jedes Element von  $R$  nur von endlich vielen unserer Automorphismen  $f_i$  überhaupt bewegt wird und folglich jede konstante Folge nur an endlich vielen Stellen verändert wird. Damit ist  $f(a^*)b^*$  das Bild der Folge  $(y_2y_1, y_1y_2, y_4y_3, y_3y_4, \dots)$  in  $R^*$ , und das ist nicht Null.

### 3.3 Erste Anwendungen in der Homologietheorie

**Proposition 3.3.1.** *Ist  $C \in \text{Ket}$  ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen und  $M$  eine abelsche Gruppe, so definiert die Vorschrift  $m \otimes [c] \mapsto [m \otimes c]$  Homomorphismen*

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{H}_q C) \rightarrow \mathcal{H}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} C)$$

*Ist  $M$  torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen.*

*Beweis.* Die offensichtlichen vertikalen Abbildungen liefern ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{B}_q C) & \rightarrow & M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{Z}_q C) & \twoheadrightarrow & M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{H}_q C) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{B}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} C) & \hookrightarrow & \mathcal{Z}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} C) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} C) \end{array}$$

in dem auch die obere Horizontale rechtsexakt ist nach 3.2.14 rechtsexakt ist und das deshalb die behauptete Abbildung auf der Homologie induziert. Ist  $M$  torsionsfrei, so ist die obere Horizontale auch exakt und bei Vertikalen sind Isomorphismen und induzieren deshalb einen Isomorphismus auf der Homologie.  $\square$

*Übung 3.3.2.* Für jede abelsche Gruppe  $M$  und jeden topologischen Raum  $X$  und jedes  $m \in M$  und jede  $q$ -Kette  $c \in S_q X$  erklären wir die  $q$ -Kette  $mc \in S_q(X; M)$  mit Koeffizienten in  $M$  in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Dann liefert die Abbildung  $m \otimes c \mapsto mc$  Isomorphismen  $M \otimes_{\mathbb{Z}} S_q X \xrightarrow{\sim} S_q(X; M)$  für alle  $q$  und sogar einen Isomorphismus  $M \otimes_{\mathbb{Z}} S X \xrightarrow{\sim} S(X; M)$  von Komplexen.

**Korollar 3.3.3.** *Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $M$  eine abelsche Gruppe, so liefert die Vorschrift  $m \otimes [c] \mapsto [mc]$  natürliche Homomorphismen*

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(X) \rightarrow H_q(X; M)$$

*Ist  $M$  torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen.*

*Beweis.* Die vorhergehende Proposition 3.3.1 liefert uns Homomorphismen  $M \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(X) \rightarrow \mathcal{H}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} S X)$ ,  $m \otimes [c] \mapsto [m \otimes c]$ , und Übung 3.3.2 liefert uns weiter Isomorphismen  $\mathcal{H}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} S X) \xrightarrow{\sim} H_q(X; M)$ ,  $[m \otimes c] \mapsto [mc]$ .  $\square$

### 3.4 Torsionsprodukt von abelschen Gruppen

**Definition 3.4.1 (Tensorprodukt von Komplexen).** Sind  $C, D$  Komplexe von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring  $R$ , so bildet man einen Komplex von abelschen Gruppen  $C \otimes_R D$ , ihr **Tensorprodukt** alias den **Tensorkomplex**, durch die Vorschrift  $(C \otimes_R D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R D_q$  mit dem Differential

$$\partial(c \otimes d) = \partial c \otimes d + (-1)^{|c|} c \otimes \partial d$$

3.4.2. Ob mit dem Symbol  $\otimes$  das Tensorprodukt zweier Moduln oder vielmehr das Tensorprodukt zweier Komplexe gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. Da das Tensorprodukt mit direkten Summen vertauscht, kommt es darauf auch nicht so wesentlich an.

3.4.3. Offensichtlich ist das Tensorprodukt von Kettenkomplexen auch ein Funktor  $\text{Ket}(\text{Mod-}R) \times \text{Ket}(R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Ket}(\text{Ab})$ . Er geht sogar auf die Homotopiekategorien über: Sind  $f, g : C \rightarrow C'$  Kettenhomomorphismen und ist  $\delta$  eine Kettenhomotopie zwischen  $f$  und  $g$ , in Formeln  $\delta\partial + \partial\delta = f - g$ , so ist  $\delta \otimes \text{id}$  eine Kettenhomotopie zwischen  $f \otimes \text{id}$  und  $g \otimes \text{id}$ . Analoges gilt für den zweiten Tensorfaktor, und das Tensorprodukt definiert damit in der Tat auch einen Funktor

$$\text{Hot}(\text{Mod-}R) \times \text{Hot}(R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab})$$

**Definition 3.4.4.** Gegeben eine abelsche Gruppe  $M$  betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$$

Mit  $\mathbb{Z}M$  meinen wir hier die freie abelsche Gruppe über der Menge  $M$  und mit  $KM$  schlicht den Kern der offensichtlichen Surjektion  $\mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ . Wir notieren  $\mathcal{P}M$  das Anfangsstück dieser kurzen exakten Sequenz, also den Komplex mit  $\mathcal{P}_1 M = KM$  und  $\mathcal{P}_0 M = \mathbb{Z}M$  und  $\mathcal{P}_q M = 0$  für  $q \neq 0, 1$ , und nennen ihn die **Standardauflösung von  $M$** . Gegeben zwei abelsche Gruppen  $M, N$  definiert

man eine dritte abelsche Gruppe  $M * N$ , ihr **Torsionsprodukt**, als die erste Homologiegruppe des Tensorprodukts ihrer Standardauflösungen, in Formeln

$$M * N := M *_Z N := \mathcal{H}_1(\mathcal{P}M \otimes_Z \mathcal{P}N)$$

Wir erhalten so in offensichtlicher Weise einen Funktor  $* : \text{Ab} \times \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ .

3.4.5. Diese Definition mag auf den ersten Blick bizarr wirken. Erst das gleich folgende Beispiel 3.4.8 und die Anwendung im universellen Koeffiziententheorem 3.5.2 zeigen ihre Sinnhaftigkeit. Vom höheren Standpunkt aus betrachtet ist das Torsionsprodukt unser erstes Beispiel für einen “derivierten Funktor”, genauer haben wir hier den “ersten derivierten Funktor des Tensorprodukts” vor uns, vergleiche ??.

3.4.6. Wir kürzen im folgenden  $\otimes_Z = \otimes$  ab. Bezeichnet  $M[0]$  die Gruppe  $M$ , aufgefaßt als Komplex mit einem einzigen Eintrag im Grad Null, so erhalten wir eine surjektive Kettenabbildung  $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M[0]$ . Wir behaupten, daß für jedes weitere  $N$  die induzierte Abbildung  $\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M[0] \otimes \mathcal{P}N$  Isomorphismen auf der Homologie

$$\mathcal{H}_i(\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_i(M[0] \otimes \mathcal{P}N)$$

liefert. In der Tat ist der Kern unserer surjektiven Kettenabbildung  $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M[0]$  der Komplex  $K^2M$  mit  $KM$  in den Graden Null und Eins, der Identität dazwischen als Randoperator und Nullen sonst. Dieser Komplex  $K^2M$  ist nun offensichtlich nullhomotop. Da  $\mathcal{P}N$  aus torsionsfreien Gruppen besteht, erhalten wir mit 3.2.20 eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$K^2M \otimes \mathcal{P}N \hookrightarrow \mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M[0] \otimes \mathcal{P}N$$

und da darin der erste Komplex nullhomotop ist, muß nach der langen exakten Homologiesequenz die zweite Abbildung Isomorphismen auf der Homologie liefern. Ist insbesondere von zwei abelschen Gruppen  $M, N$  eine torsionsfrei, so gilt  $M * N = 0$ . In der Tat folgt für  $M$  torsionsfrei sofort

$$M * N = \mathcal{H}_1(\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_1(M[0] \otimes \mathcal{P}N) = 0$$

mit 3.2.20 für die letzte Gleichung. Den Fall von torsionsfreiem  $N$  behandelt man analog.

3.4.7. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$  erhält man nach 3.2.20 für alle  $N$  eine kurze exakte Sequenz von Komplexen  $M' \otimes \mathcal{P}N \hookrightarrow M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M'' \otimes \mathcal{P}N$  und daraus mit 3.4.6 eine exakte Sequenz, die sogenannte **Torsionssequenz** oder genauer **Torsionssequenz im ersten Eintrag**

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' * N & \hookrightarrow & M * N & \twoheadrightarrow & M'' * N & \rightarrow \\ & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & 0 \end{array}$$

die natürlich ist in der kurzen exakten Sequenz  $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$  und in  $N$ . Analog konstruieren wir die **Torsionssequenz im zweiten Eintrag**.

3.4.8. Für jede abelsche Gruppe  $N$  und jede natürliche Zahl  $m \neq 0$  liefert der Randoperator der Torsionssequenz zur offensichtliche kurzen exakten Sequenz  $\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  einen Isomorphismus

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * N \xrightarrow{\sim} \{a \in N \mid ma = 0\}$$

Die Gruppe auf der rechten Seite würde man in Worten die “Gruppe aller Elemente von  $N$  mit  $m$ -Torsion” nennen, daher wohl auch die Bezeichnung der linken Seite als “Torsionsprodukt”.

*Übung 3.4.9.* Man zeige, daß das Torsionsprodukt mit beliebigen direkten Summen vertauscht.

*Ergänzende Übung 3.4.10.* Das Torsionsprodukt  $M * N$  von zwei abelschen Gruppen besitzt keine Elemente unendlicher Ordnung. Hinweis: Man zeige  $(M * N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ .

3.4.11. Sind  $C, D$  Komplexe von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring  $R$ , so ist  $v : C \otimes_R D \rightarrow D \otimes_{R^o} C$ ,  $c \otimes d \mapsto (-1)^{|c||d|} d \otimes c$  ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. Speziell erhalten wir so für  $C, D \in \text{Ket}$  einen natürlichen Isomorphismus

$$v : C \otimes D \xrightarrow{\sim} D \otimes C$$

In der Tat prüfen wir die Bedingung  $\partial v(c \otimes d) = v \partial(c \otimes d)$  durch die Umformungen

$$\begin{aligned} \partial v(c \otimes d) &= (-1)^{|c||d|} \partial(d \otimes c) \\ &= (-1)^{|c||d|} \partial d \otimes c + (-1)^{|c||d|+|d|} d \otimes \partial c \\ v \partial(c \otimes d) &= v(\partial c \otimes d) + (-1)^{|c|} v(c \otimes \partial d) \\ &= (-1)^{|d||c|+|d|} d \otimes \partial c + (-1)^{|c|} (-1)^{|c||d|+|c|} \partial d \otimes c \end{aligned}$$

*Ergänzende Übung 3.4.12.* Man zeige, daß unser  $v : \mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \rightarrow \mathcal{P}N \otimes \mathcal{P}M$  aus 3.4.11 Isomorphismen  $v_{M,N} : M * N \xrightarrow{\sim} N * M$  liefert mit  $v_{M,N} \circ v_{N,M} = \text{id}$ . Man zeige weiter, daß für  $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$  eine kurze exakte Sequenz sogar das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M'' * N & \longrightarrow & M' \otimes N \\ \downarrow & & \downarrow \\ N * M'' & \longrightarrow & N \otimes M' \end{array}$$

kommutiert mit den Randabbildungen der entsprechenden Torsionssequenzen in den Horizontalen und unseren Vertauschungen in den Vertikalen.

*Ergänzende Übung 3.4.13.* Seien  $A, B$  Ringe und  $M \in \text{Ket}(\text{Mod-}A), X \in \text{Ket}(A\text{-Mod-}B)$  und  $N \in \text{Ket}(\text{Mod-}B)$  Komplexe. So erhalten wir mit dem Hom aus 1.4.10 einen Isomorphismus von Komplexen

$$\text{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-A}(M, \text{Hom}_{-B}(X, N))$$

gegeben durch  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  mit  $\tilde{\varphi}(m)(x) = \varphi(m \otimes x)$ , und der induzierte Isomorphismus auf den Nullzykeln liefert ein adjungiertes Paar  $(\otimes_A X, \text{Hom}_{-B}(X, \ ))$  von Funktoren zwischen  $\text{dgMod}_{-A}$  und  $\text{dgMod}_{-B}$ . Speziell erhalten wir so eine Adjunktion

$$(\otimes X, \text{Hom}(X, \ ))$$

von Funktoren  $\text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  von der Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen in sich selber.

*Ergänzung 3.4.14.* Arbeiten wir in Übung 3.4.13 statt mit Rechts- mit Linksmoduln  $M \in \text{Ket}(A\text{-Mod}), X \in \text{Ket}(B\text{-Mod-}A)$  und  $N \in \text{Ket}(B\text{-Mod})$ , so haben wir analog

$$\text{Hom}_B(X \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_B(X, N))$$

vermittels  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  mit  $\tilde{\varphi}(m)(x) = (-1)^{|m||x|} \varphi(x \otimes m)$ . Daraus erhalten wir insbesondere ein adjungiertes Paar  $(X \otimes_A, \text{Hom}_B(X, \ ))$  von Funktoren zwischen  $\text{dgMod}_A$  und  $\text{dgMod}_B$ .

3.4.15. Bezeichne  $\text{Ket}$  die Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen oder allgemeiner der Komplexe von Moduln über einem kommutativen Ring  $k$ . Wir werden im folgenden einer Vielzahl von natürlichen Kettenabbildungen begegnen, die alle aus den folgenden drei Grundkonstruktionen entstehen:

1. Dem Funktor  $\otimes : \text{Ket} \times \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  aus 3.4.1;
2. Der Isotransformation  $a : \otimes(\otimes \times \text{Id}) \xrightarrow{\sim} \otimes(\text{Id} \times \otimes)$  der in hoffentlich offensichtlicher Weise gegebenen Funktoren  $\text{Ket} \times \text{Ket} \times \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  alias der Sammlung von natürlichen Isomorphismen  $a : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C)$  mit  $(a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c)$  nach 3.8.4, genannt ‘‘Assoziatoren’’;
3. Der Isotransformation von Funktoren  $v : \otimes \tau \xrightarrow{\sim} \otimes$  für die Vertauschung  $\tau : \text{Ket} \times \text{Ket} \rightarrow \text{Ket} \times \text{Ket}$  alias unserer Wahl von natürlichen Isomorphismen  $v : C \otimes D \xrightarrow{\sim} D \otimes C$  aus 3.4.11, genannt ‘‘Kommutatoren’’.

Die Vorzeichenwahlen in diesen Konstruktionen haben wir in der Weise verträglich gewählt, daß gegeben eine endliche Familie von Komplexen und zwei Tensorausdrücke, in denen jeder unserer Komplexe genau einmal vorkommt, je zwei

mit unseren Assoziatoren  $a$  und Kommutatoren  $v$  gebildeten Morphismen zwischen unseren beiden Tensorausdrücken übereinstimmen. Ist etwa unsere Familie  $A, B, C$  und betrachten wir die beiden Tensorausdrücke  $A \otimes (B \otimes C)$  und  $(C \otimes A) \otimes B$ , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & (B \otimes C) \otimes A & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 A \otimes (B \otimes C) & & B \otimes (C \otimes A) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (A \otimes B) \otimes C & & (C \otimes A) \otimes B \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & C \otimes (A \otimes B) &
 \end{array}$$

in dem alle Pfeile abwechselnd als Kommutatoren und Assoziatoren in hoffentlich offensichtlicher Weise zu verstehen sind. Im allgemeinen sieht man unschwer ein, daß jede derartige Verknüpfung auf Tensoren von homogenen Elementen, unabhängig von der Klammerung, durch eine Vorschrift der Art  $a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto \pm a_{\sigma(1)} \otimes a_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)}$  gegeben wird, mit einem Vorzeichen, das der Parität der Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren  $a_i$  von ungeradem Grad in unserem Tensor entspricht. Salopp gesprochen gilt es also, “ein Vorzeichen  $(-1)^{|a||b|}$  einzuführen, wann immer zwei homogene Tensorfaktoren  $a, b$  der Grade  $|a|, |b|$  vertauscht werden”. Im übrigen liegt man mit dieser Faustregel auch richtig bei der Formel  $\partial(c \otimes d) = \partial c \otimes d + (-1)^{|c|} c \otimes \partial d$  aus 3.4.1 für das Differential homogener Tensoren, wenn man sich  $\partial$  als “homogen von ungeradem Grad” denkt.

3.4.16. In ?? bzw. ?? werden wir ganz allgemein eine “symmetrische Tensor-kategorie” erklären als ein Datum dieser Art mit gewissen Eigenschaften, die in der hier vorliegenden Situation unter anderem deshalb erfüllt sind, weil wir “die Vorzeichen bei allen drei Grundkonstruktionen kompatibel gewählt haben.” Es sind jedoch im hier vorliegenden Fall der Kettenkomplexe durchaus auch andere “kompatible Vorzeichenwahlen” denkbar.

3.4.17. Nach 3.4.13 besitzt für alle  $X \in \text{Ket}$  der Funktor  $\otimes X : \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  einen Rechtsadjungierten in der Gestalt des Funktors  $\text{Hom}(X, \_)$  mitsamt den in 3.4.13 beschriebenen Adjunktionsabbildungen. In dieser Weise werden also die Funktoren  $\text{Hom}(X, \_)$  oder präziser diese Funktoren zusammen mit den fraglichen Adjunktionen durch den Funktor  $\otimes$  aus unseren Grundkonstruktionen bereits eindeutig festgelegt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

### 3.5 Das universelle Koeffiziententheorem

3.5.1. In diesem Abschnitt kürzen wir systematisch  $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$  und  $*_{\mathbb{Z}} = *$  ab.

**Satz 3.5.2 (Universelles Koeffiziententheorem der Homologie).** *Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und eine abelsche Gruppe  $G$  gibt es Isomorphismen*

$$H_q(X; G) \cong (H_q(X) \otimes G) \oplus (H_{q-1}(X) * G)$$

3.5.3. Dasselbe gilt für relative Homologie und mit Koeffizienten in einem beliebigen Hauptidealring  $R$ , für den wir allerdings erst noch das Torsionsprodukt  $*_R$  einführen müßten. Der Satz behauptet nur die Existenz solcher Isomorphismen. Inwieweit sie natürlich sind, wird im Beweis genauer diskutiert werden.

*Beispiel 3.5.4.* Wir haben einerseits  $H_2(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{Z}) = 0$  nach 2.10.25 oder 3.1.7 und  $H_2(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nach 3.1.6 oder 3.1.7. In diesem Fall behauptet unser Theorem die Existenz eines Isomorphismus

$$H_2(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_1(\mathbb{P}^2\mathbb{R}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Das mag der Leser auch direkt prüfen, zum Beispiel mithilfe des Hurwitz-Isomorphismus und 3.6.17.

*Beweis.* Tensorieren wir die kurze exakte Sequenz  $KG \hookrightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow G$  über  $\mathbb{Z}$  mit dem Komplex von freien abelschen Gruppen  $SX$ , so erhalten wir mit 3.3.2 eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$SX \otimes KG \hookrightarrow SX \otimes \mathbb{Z}G \rightarrow S(X; G)$$

Bilden wir die exakte Homologiesequenz und beachten die Isomorphismen  $(\mathcal{H}_q SX) \otimes \mathbb{Z}G \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q(SX \otimes \mathbb{Z}G)$  und  $(\mathcal{H}_q SX) \otimes KG \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q(SX \otimes KG)$  nach 3.3.1, so ergibt sich mit der Abkürzung  $\mathcal{H}_q(SX) = H_q$  die lange exakte Sequenz

$$H_q \otimes KG \rightarrow H_q \otimes \mathbb{Z}G \rightarrow H_q(X; G) \rightarrow H_{q-1} \otimes KG \rightarrow H_{q-1} \otimes \mathbb{Z}G$$

und dann mit der Rechtsexaktheit von  $\otimes$  und der Definition von  $*$  und 3.5.6 eine kurze exakte Sequenz

$$H_q(X) \otimes G \hookrightarrow H_q(X; G) \rightarrow H_{q-1}(X) * G$$

Es bleibt zu zeigen, daß sie spaltet. Aber die kurze exakte Sequenz  $Z_q X \hookrightarrow S_q X \rightarrow B_{q-1} X$  spaltet, da  $B_{q-1} X \subset S_{q-1} X$  frei ist nach 3.5.7, wir finden nach 2.2.10 also ein Linksinverses  $S_q X \rightarrow Z_q X$  der Einbettung der Zyklen in die Ketten und das induziert die gesuchte Spaltung  $H_q(X; G) \rightarrow H_q(X) \otimes G$ .  $\square$

3.5.5. Die Spaltung im vorhergehenden Beweis ist für festes  $X$  natürlich in  $G$ . Sie kann aber nicht bei festem  $G \neq 0$  natürlich in  $X$  gewählt werden. Dazu hätte ich gerne ein gut zugängliches Beispiel etwa eines Raums  $X$  mit einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow X$ , die die Identität auf  $H_1(X)$  und  $H_2(X)$  induziert, nicht aber auf  $H_2(X; G)$ .

3.5.6. Ist  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$  eine exakte Sequenz, so ist  $(\text{cok}(A \rightarrow B)) \rightarrow C \rightarrow (\text{ker}(D \rightarrow E))$  eine kurze exakte Sequenz.

**Satz 3.5.7.** *Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei.*

3.5.8. Der anschließende Beweis zeigt allgemeiner: Jeder Untermodul eines freien Moduls über einem Hauptidealring ist frei. Für endlich erzeugte Gruppen folgt das aus 4.3.13 in Verbindung mit 4.4.2, für endlich erzeugte Moduln analog aus 1.6.8 in Verbindung mit 1.11.9. Die Hauptarbeit besteht darin, auch nicht notwendig endlich erzeugte Gruppen bzw. Moduln zu behandeln.

*Beweis.* Sei  $I$  eine Menge und  $U \subset \mathbb{Z}I$  eine Untergruppe. Wir betrachten die Menge aller Paare  $(J, B)$  wo  $J \subset I$  eine Teilmenge ist und  $B$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis des Schnitts  $U \cap \mathbb{Z}J$ . Diese Menge ist nicht leer und ist induktiv geordnet. Sie besitzt also nach Zorns Lemma 5.1.8 ein maximales Element  $(J_m, B_m)$  und es gilt zu zeigen  $J_m = I$ . Aber sonst sei  $i \in I \setminus J_m$ . Das Bild von  $U \cap \mathbb{Z}(J_m \cup \{i\})$  in  $\mathbb{Z}i$  unter der offensichtlichen Projektion ist von der Form  $r\mathbb{Z}i$  für ein  $r \in \mathbb{Z}$ . Ist  $r \neq 0$ , so wählen wir ein Urbild  $u$  von  $ri$  in  $U$  und  $(J_m \cup \{i\}, B_m \cup \{u\})$  wäre ein größeres Paar. Ist  $r = 0$ , so wäre schon  $(J_m \cup \{i\}, B_m)$  ein größeres Paar. In jedem Fall steht  $J_m \neq I$  im Widerspruch zur Maximalität von  $(J_m, B_m)$ .  $\square$

## 3.6 Homologie von Produkten

3.6.1. Gegeben topologische Räume  $X, Y$  scheint mir anschaulich klar, daß man natürliche Produktabbildungen

$$(H_p X) \times (H_q Y) \rightarrow H_{p+q}(X \times Y)$$

erwarten darf. Suchen wir zum Beispiel das Produkt von zwei Homologieklassen vom Grad 1, und werden diese Klassen repräsentiert durch geschlossene Wege in  $X$  bzw.  $Y$ , so liefern unsere beiden Wege zusammen eine Abbildung des 2-Torus nach  $X \times Y$ , und jede Triangulierung dieses 2-Torus liefert einen 2-Zykel im Produkt, der dann das Produkt unserer beiden 1-Klassen repräsentieren soll. Diese Anschauung werden wir im folgenden zur Definition des "Kreuzprodukts der Homologie" formalisieren und zeigen, wie uns die "Künneth-Formel" erlaubt, die Homologie eines Produkts aus der Homologie seiner Faktoren zu berechnen.

Arbeiten wir zur Vereinfachung mit Koeffizienten in einem Körper  $k$ , so liefert nach dieser Formel das Kreuzprodukt sogar Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X; k) \otimes_k H_q(Y; k) \xrightarrow{\sim} H_n(X \times Y; k)$$

Besitzen insbesondere  $X$  und  $Y$  eine im Sinne von 2.4.12 wohldefinierte Eulercharakteristik, so auch  $X \times Y$  und es gilt  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ . Der Fall ganzzahliger Koeffizienten ist nur unwesentlich komplizierter. Nach diesen Vorbemerkungen beginnen wir nun die formale Arbeit.

**Satz 3.6.2 (Eilenberg-Zilber).** *Von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe betrachte man die beiden Funktoren  $S(\times) : (X, Y) \mapsto S(X \times Y)$  und  $S \otimes S : (X, Y) \mapsto SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY$ .*

1. *Es gibt eine Transformation von Funktoren  $\eta : S \otimes S \Rightarrow S(\times)$ , die auf der nullten Homologie dieselben Abbildungen induziert wie die offensichtlichen Isomorphismen  $S_0 X \otimes_{\mathbb{Z}} S_0 Y \xrightarrow{\sim} S_0(X \times Y)$ .*
2. *Für jede solche Transformation sind die Kettenabbildungen  $\eta_{(X,Y)}$  für alle  $X, Y$  Homotopieäquivalenzen.*
3. *Je zwei solche Transformationen  $\eta$  und  $\eta'$  bestehen aus homotopieäquivalenten Kettenabbildungen, d.h. gegeben zwei solche Transformationen  $\eta$  und  $\eta'$  haben wir  $\eta_{(X,Y)} \simeq \eta'_{(X,Y)}$  für alle  $X, Y$ .*

3.6.3. Ich gebe zu, daß die in diesem Text gewählte Terminologie zu Verwechslungen der Kategorie  $\text{Top}^2 = \text{Top} \times \text{Top}$  aller Paare topologischer Räume mit der Kategorie  $\text{Top}^c$  aller Raumpaare aus 2.1.6 einläßt. Mir ist jedoch keine bessere Terminologie eingefallen.

3.6.4. Der vorstehende Satz liefert uns eine wohlbestimmte Isotransformation zwischen Funktoren von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, die **Eilenberg-Zilber-Transformation**

$$S \otimes S \xrightarrow{\sim} S(\times)$$

Eine Kettenabbildung  $\eta_{(X,Y)} : SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \rightarrow S(X \times Y)$ , die diese Äquivalenz “materialisiert”, nennen wir eine **Eilenberg-Zilber-Abbildung**. Will man ihre anschauliche Bedeutung verstehen, so mag das in 3.7.3 gegebene explizite Beispiel helfen. Wir wollen den Satz abstrakt mithilfe der Methode der “azyklischen Modelle” beweisen und führen dazu nun die nötige Terminologie ein. Zum Aufwärmen beweisen wir erst einmal eine einfachere Aussage, das sogenannte “Hauptlemma der homologischen Algebra”.

*Übung 3.6.5.* Man zeige, daß für je zwei topologische Räume  $X, Y$  der offensichtliche Isomorphismus  $S_0 X \otimes_{\mathbb{Z}} S_0 Y \xrightarrow{\sim} S_0(X \times Y)$  einen Isomorphismus  $\mathcal{H}_0(SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0 S(X \times Y)$  induziert.

**Definition 3.6.6.** Sei  $R$  ein Ring. Ein  $R$ -Modul  $P$  heißt **projektiv** genau dann, wenn jeder surjektive Homomorphismus  $A \twoheadrightarrow A''$  von  $R$ -Moduln eine Surjektion  $\text{Hom}_R(P, A) \twoheadrightarrow \text{Hom}_R(P, A'')$  von Homomorphismenräumen induziert.

*Beispiel 3.6.7.* Ist  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  eine kurze exakte Sequenz von Moduln über einem Ring  $R$  und ist  $M$  ein weiterer  $R$ -Modul, so ist die induzierte Sequenz

$$\text{Hom}_R(M, A') \hookrightarrow \text{Hom}_R(M, A) \twoheadrightarrow \text{Hom}_R(M, A'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein. Für die kurze exakte Sequenz  $2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  etwa kommt die Identität  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nicht von einem Morphismus  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  her.

*Beispiele 3.6.8.* Gegeben ein Ring  $R$  ist jeder freie  $R$ -Modul projektiv. Sind  $P', P''$  zwei  $R$ -Moduln und ist ihre Summe  $P' \oplus P''$  projektiv, so auch die Summanden  $P'$  und  $P''$ . Über einem Ring der Gestalt  $R = R' \times R''$  für zwei Ringe  $R', R''$  ist insbesondere  $R' \times 0$  ein projektiver Modul, der jedoch nicht frei ist, falls  $R'$  und  $R''$  von Null verschieden sind.

**Lemma 3.6.9.** *Ein Modul über einem Ring ist projektiv genau dann, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist.*

*Beweis.* Natürlich ist jeder direkte Summand eines freien Moduls projektiv. Ist umgekehrt  $P$  ein projektiver  $R$ -Modul, so finden wir einen freien Modul  $F$  und eine Surjektion  $F \twoheadrightarrow P$ . Nach Annahme induziert diese Surjektion eine Surjektion  $\text{Hom}_R(P, F) \twoheadrightarrow \text{Hom}_R(P, P)$ . Jedes Urbild der Identität auf  $P$  ist dann eine Spaltung der Surjektion  $F \twoheadrightarrow P$ .  $\square$

**Satz 3.6.10 (Hauptlemma der homologischen Algebra).** *Seien gegeben  $R$  ein Ring,  $P$  ein Komplex projektiver  $R$ -Moduln mit  $P_q = 0$  für  $q < 0$  und  $C$  ein Komplex von  $R$ -Moduln mit  $\mathcal{H}_q(C) = 0$  für  $q > 0$ . So induziert das Bilden der nullten Homologie eine Bijektion*

$$\text{Hot}_R(P, C) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(\mathcal{H}_0 P, \mathcal{H}_0 C)$$

*zwischen der Menge der Homotopieklassen von Kettenabbildungen einerseits und der Menge der  $R$ -linearen Abbildungen auf der nullten Homologie andererseits.*

*Beweis.* Als erstes zeigen wir die Surjektivität. Sei  $\tau : \mathcal{H}_0 P \rightarrow \mathcal{H}_0 C$  gegeben. Wir beginnen unsere Konstruktion einer Kettenabbildung  $f : P \rightarrow C$ , indem wir

notgedrungen setzen  $f_q = 0$  für  $q < 0$ . Wegen der Projektivität von  $P_0$  finden wir  $f_0 : P_0 \rightarrow \mathcal{Z}_0 C$  derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{f_0} & \mathcal{Z}_0 C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_0 P & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{H}_0 C \end{array}$$

kommutiert. Dann landet die Verknüpfung  $f_0 \partial : P_1 \rightarrow \mathcal{Z}_0 C$  sogar in  $\mathcal{B}_0 C$  und wegen der Projektivität von  $P_1$  finden wir  $f_1 : P_1 \rightarrow C_1$  mit  $\partial f_1 = f_0 \partial : P_1 \rightarrow C_0$ . Haben wir bis zu einem  $q \geq 1$  induktiv  $f_q$  bereits gefunden mit  $\partial f_q = f_{q-1} \partial$ , so gilt  $\partial f_q \partial = 0$ , wegen  $\mathcal{H}_q C = 0$  landet also  $f_q \partial$  in  $\mathcal{B}_q C$  und wegen der Projektivität von  $P_{q+1}$  finden wir  $f_{q+1} : P_{q+1} \rightarrow C_{q+1}$  mit  $\partial f_{q+1} = f_q \partial$  und die Induktion läuft. Das zeigt die Surjektivität. Um die Injektivität zu zeigen müssen wir prüfen, daß der Kern unserer Surjektion verschwindet, daß also eine Kettenabbildung  $f : P \rightarrow C$ , die auf der nullten Homologie die Nullabbildung induziert, schon nullhomotop ist. Wir suchen also unter dieser Voraussetzung  $s_q : P_q \rightarrow C_{q+1}$  mit  $f_q = s_{q-1} \partial + \partial s_q$  für alle  $q$ . Wieder beginnen wir notgedrungen mit  $s_q = 0$  für  $q < 0$ . Da  $f_0$  nach Annahme in  $\mathcal{B}_0 C$  landet finden wir auch sofort  $s_0$  mit  $f_0 = \partial s_0$ . Haben wir bis zu einem  $q \geq 0$  induktiv  $s_q$  bereits gefunden mit  $f_q = \partial s_q + s_{q-1} \partial$ , so folgt  $\partial(f_{q+1} - s_q \partial) = (f_q - \partial s_q) \partial = 0$  und  $f_{q+1} - s_q \partial$  landet in  $\mathcal{B}_{q+1} C$  als da heißt, es gibt  $s_{q+1}$  mit  $f_{q+1} - s_q \partial = \partial s_{q+1}$ . Das zeigt die Injektivität.  $\square$

**Definition 3.6.11.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Eine **Basis eines Funktors**

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$$

ist eine Familie  $(M_i, m_i)_{i \in I}$  von Paaren bestehend aus jeweils einem Objekt  $M_i \in \mathcal{C}$  und einem Element  $m_i \in F(M_i)$  seines Bildes unter unserem Funktor derart, daß für jedes  $X \in \mathcal{C}$  die  $(Ff)(m_i)$  mit  $i \in I$  und  $f \in \mathcal{C}(M_i, X)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $F(X)$  bilden.

*Beispiel 3.6.12.* Für alle  $q \geq 0$  ist die einelementige Familie  $(\Delta_q, \tau_q)$  bestehend aus dem  $q$ -ten Standardsimplex  $\Delta_q$  und dem tautologischen singulären Simplex  $\tau_q \in \mathcal{S}_q(\Delta_q)$  eine Basis des Funktors der  $q$ -Ketten  $\mathcal{S}_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ .

**Proposition 3.6.13.** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  zwei Funktoren und  $(M_i, m_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $F$ . So haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Trans}(F, G) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i \in I} G(M_i) \\ \eta & \mapsto & (\eta_{M_i}(m_i))_{i \in I} \end{array}$$

*Beweis.* Den Beweis dieser Verallgemeinerung von 1.4.4 überlassen wir dem Leser.  $\square$

**Definition 3.6.14.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\mathcal{M} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Teilmenge. Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  heißt **frei mit Modellen in  $\mathcal{M}$**  genau dann, wenn er eine Basis  $(M_i, m_i)_{i \in I}$  besitzt derart, daß alle  $M_i$  zu  $\mathcal{M}$  gehören.

**Satz 3.6.15 (über azyklische Modelle).** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ket}$  zwei Funktoren von einer Kategorie  $\mathcal{C}$  in die Kategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen und bezeichne  $F_q, G_q : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  die homogenen Komponenten der jeweiligen Komplexe. Sei  $\mathcal{M}$  eine Menge von Objekten von  $\mathcal{C}$ . Wir nehmen an, daß gilt  $F_q = 0$  für  $q < 0$  und daß alle  $F_q$  frei sind mit Modellen in  $\mathcal{M}$ . Wir nehmen weiter an, daß für alle  $M \in \mathcal{M}$  die Homologie  $\mathcal{H}_q(GM)$  verschwindet für alle  $q > 0$ . So gilt:

1. Für jede Transformation  $h : \mathcal{H}_0 F \Rightarrow \mathcal{H}_0 G$  gibt es eine Transformation  $f : F \Rightarrow G$  mit  $h = \mathcal{H}_0 f$ .
2. Sind  $f, f' : F \Rightarrow G$  zwei Transformationen mit  $\mathcal{H}_0 f = \mathcal{H}_0 f'$ , so sind  $f$  und  $f'$  "natürlich kettenhomotop", als da heißt, es gibt Transformationen  $\delta_q : F_q \Rightarrow G_{q+1}$  mit  $f - f' = \partial \delta + \delta \partial$ .

3.6.16. Ein topologischer Raum, dessen reduzierte Homologie identisch verschwindet, heißt **azyklisch**. Übertragen nennt man manchmal auch Komplexe azyklisch, deren Homologie vom Grad Null abgesehen identisch verschwindet. Die wesentliche Voraussetzung des vorhergehenden Satzes läßt sich dahingehend formulieren, daß " $G$  in echt positiven Graden azyklisch ist auf den Modellen von  $F$ ". Spezialisiert man den Satz über azyklische Modelle auf den Fall einer Kategorie  $\mathcal{C}$  mit nur einem Objekt und einem Morphismus, eben der Identität dieses einzigen Objekts, so erhält man dieselbe Aussage wie bei der Spezialisierung des Hauptlemmas der homologischen Algebra 3.6.10 auf den Fall freier statt projektiver Moduln.

*Beweis.* 1. Notgedrungen setzen wir  $f_q = 0$  für  $q < 0$ . Um eine Transformation  $f_0 : F_0 \Rightarrow G_0$  anzugeben reicht es, die Bilder  $z_i \in G_0(M_i)$  von  $m_i \in F_0(M_i)$  anzugeben, für  $(M_i, m_i)$  eine Basis von  $F_0$ . Diese Bilder können wir sicher als Zykel wählen derart, daß auf der Homologie gilt  $h : [m_i] \mapsto [z_i]$ . Dann kommutiert notwendig das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{f_0} & Z_0 G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_0 F & \xrightarrow{h} & \mathcal{H}_0 G \end{array}$$

und darüber hinaus gilt  $\partial f_q = f_{q-1} \partial$  für alle  $q \leq 0$ . Jetzt müssen wir nur noch für  $q > 0$  Transformationen  $f_q : F_q \Rightarrow G_q$  konstruieren derart, daß gilt  $\partial f_q = f_{q-1} \partial$ . Das gelingt induktiv. Ist  $(M_j, m_j)$  eine Basis von  $F_q$ , so reicht es aus,  $f_q(m_j) \in G_q(M_j)$  so festzulegen, daß gilt

$$\partial f_q m_j = f_{q-1} \partial m_j \quad \forall j$$

Im Fall  $q = 1$  finden wir solche  $f_1(m_j)$ , da nach Konstruktion von  $f_0$  alias wegen der Kommutativität obigen Diagramms die Verknüpfung  $f_0\partial : F_1M_j \rightarrow G_0M_j$  faktorisiert über  $\mathcal{B}_0GM_j$ . Für  $q > 1$  folgt aus unserer Azyklizitäts-Annahme  $\mathcal{H}_{q-1}GM_j = 0$ , so daß wir solche  $f_q(m_j)$  finden können, wenn gilt  $\partial f_{q-1}\partial m_j = 0$ . Das folgt aber aus der per Induktion bereits bekannten Formel  $\partial f_{q-1} = f_{q-2}\partial$ .

2. Ähnlich wie im Beweis des ersten Teils konstruieren wir beginnend mit  $\delta_q = 0$  für  $q < 0$  induktiv Lösungen  $\delta_q$  der Gleichungen

$$\partial\delta_q = f_q - f'_q - \delta_{q-1}\partial$$

Wir finden solche Lösungen für  $q = 0$ , da  $f_0 - f'_0$  in den Rändern  $\mathcal{B}_0G$  landet, und für  $q > 0$ , da wir induktiv haben

$$\begin{aligned} \partial(f_q - f'_q - \delta_{q-1}\partial) &= (f_{q-1} - f'_{q-1} - \partial\delta_{q-1})\partial \\ &= \delta_{q-2}\partial\partial \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

*Beweis von Eilenberg-Zilber.* Der Funktor  $(X, Y) \mapsto S_n(X \times Y)$  ist offensichtlich frei mit Basis  $((\Delta_n, \Delta_n), \text{diag})$ , wobei  $\text{diag} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n \times \Delta_n$  die diagonale Einbettung  $\text{diag} \in S_n(\Delta_n \times \Delta_n)$  bezeichnet. Der Funktor  $(X, Y) \mapsto (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY)_n$  ist frei mit Basis  $((\Delta_p, \Delta_q), \tau_p \otimes \tau_q)_{p+q=n}$  den Tensorprodukten der tautologischen Simplizes. Wir zeigen als nächstes, daß beide Funktoren auf ihren eigenen Modellen und den Modellen des anderen Funktors azyklisch sind, daß also die höheren Homologiegruppen der Komplexe  $S(\Delta_p \times \Delta_q)$  und  $S\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} S\Delta_q$  verschwinden. Die erste Aussage folgt daraus, daß  $\Delta_p \times \Delta_q$  konvex ist. Um die zweite Aussage einzusehen, bilden wir den Kettenkomplex  $\mathbb{Z}[0]$ , der nur im Grad Null lebt und dort  $\mathbb{Z}$  ist. Nun betrachtet man die Folge von Kettenabbildungen  $S(\Delta_p) \rightarrow S(\text{pt}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}[0]$  und erkennt, daß alle diese Abbildungen Homotopieäquivalenzen sind, zum Beispiel mit 1.4.8 für die erste Abbildung und expliziter Rechnung für die zweite, oder mit 4.6.3. Es folgt eine Homotopieäquivalenz  $S\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} S\Delta_q \rightarrow \mathbb{Z}[0] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[0]$  und so die Azyklizität dieses Komplexes. Der Satz über azyklische Modelle in Verbindung mit 3.6.5 liefert uns also Transformationen  $\eta : S \otimes S \Rightarrow S(\times)$  und  $\alpha : S(\times) \Rightarrow S \otimes S$  von Funktoren  $\text{Top}^2 \rightarrow \text{Ket}$  die auf der nullten Homologie die durch 3.6.5 gegebene Abbildung bzw. ihre Inverse induzieren. Weiter liefert er, daß alle möglichen Wahlen von  $\eta$  bzw.  $\alpha$  dieselbe Transformation von Funktoren  $\text{Top}^2 \rightarrow \text{Hot}$  liefern. Und schließlich liefert er, daß  $\eta \circ \alpha$  bzw.  $\alpha \circ \eta$  die Identität auf den durch  $S \otimes S$  bzw.  $S(\times)$  gegebenen Funktoren  $\text{Top}^2 \rightarrow \text{Hot}$  induzieren, da sie nämlich beide auf der nullten Homologie die Identität liefern.  $\square$

3.6.17. Sind  $C, D$  Komplexe von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring  $R$ , so haben wir offensichtliche Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p C \otimes_R \mathcal{H}_q D &\rightarrow \mathcal{H}_{p+q}(C \otimes_R D) \\ [c] \otimes [d] &\mapsto [c \otimes d] \end{aligned}$$

Verschwanden unsere beiden Komplexe in allen Graden, die man von Null aus in Richtung der Pfeile erreicht, so liefert die natürliche Abbildung sogar einen Isomorphismus  $\mathcal{H}_0 C \otimes_R \mathcal{H}_0 D \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(C \otimes_R D)$  als Konsequenz aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts, vergleiche 3.2.27.

**Definition 3.6.18.** Gegeben topologische Räume  $X, Y$  induziert jede Eilenberg-Zilber-Abbildung in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe denselben Isomorphismus

$$SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \xrightarrow{\simeq} S(X \times Y)$$

Die nach 3.6.17 auf der Homologie induzierten Abbildungen schreibt man in der Form

$$\begin{array}{ccc} H_p X \times H_q Y & \rightarrow & H_{p+q}(X \times Y) \\ (c, d) & \mapsto & c \times d \end{array}$$

und nennt sie das **Kreuzprodukt der Homologie**. Ist allgemeiner  $R$  ein Ring, so liefert die Vorschrift  $(c \otimes d) \otimes r \mapsto c \otimes rd$  Isomorphismen von  $R$ -Bimoduln  $(SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY) \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\sim} S(X; R) \otimes_R S(Y; R)$ . In der Tat kann man zum Beispiel argumentieren, daß die so definierte Abbildung eine Basis für die Linksoperation von  $R$  in eine ebensolche überführt. Damit definiert jede Eilenberg-Zilber-Abbildung bis auf Homotopie wohlbestimmte Kettenabbildungen, ja sogar Homotopieäquivalenzen  $S(X; R) \otimes_R S(Y; R) \xrightarrow{\simeq} S(X \times Y; R)$ . Die nach 3.6.17 auf der Homologie induzierten Abbildungen schreibt man in der Form

$$\begin{array}{ccc} H_p(X; R) \times H_q(Y; R) & \rightarrow & H_{p+q}(X \times Y; R) \\ (c, d) & \mapsto & c \times d \end{array}$$

und nennt sie das **Kreuzprodukt der Homologie mit Koeffizienten**.

**Lemma 3.6.19.** Sind  $C, D$  Kettenkomplexe von Vektorräumen über einem Körper  $k$ , so liefern die natürlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_p(C) \otimes_k \mathcal{H}_q(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_n(C \otimes_k D)$$

*Beweis.* Nach 1.4.12 gibt es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe von  $k$ -Vektorräumen eindeutig bestimmte Isomorphismen  $\mathcal{H}C \xrightarrow{\simeq} C$  und  $\mathcal{H}D \xrightarrow{\simeq} D$ , die auf der Homologie die offensichtlichen Identifikationen induzieren. Mit 3.4.3 folgt eine Homotopieäquivalenz  $\mathcal{H}C \otimes \mathcal{H}D \xrightarrow{\simeq} C \otimes D$ , die dann den gewünschten Isomorphismus  $\mathcal{H}C \otimes \mathcal{H}D \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(C \otimes D)$  induziert.  $\square$

**Satz 3.6.20 (Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper).** Für zwei beliebige topologische Räume  $X, Y$  und Homologie mit Koeffizienten in einem Körper  $k$  definiert das Kreuzprodukt der Homologie Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X; k) \otimes_k H_q(Y; k) \xrightarrow{\sim} H_n(X \times Y; k)$$

*Beweis.* Für diesen Beweis vereinbaren wir die Abkürzungen  $H(X; k) = : HX$  und  $S(X; k) = : SX$  sowie  $\otimes_k = : \otimes$ . Unser Lemma 3.6.19 und die Homotopieäquivalenz  $SX \otimes SY \xrightarrow{\sim} S(X \times Y)$  liefern in der Tat auf der Homologie Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} HX \otimes HY & & H(X \times Y) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{H}(SX) \otimes \mathcal{H}(SY) & \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(SX \otimes SY) \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}(S(X \times Y)) \end{array} \quad \square$$

**Satz 3.6.21 (Künneth-Formel).** *Gegeben topologische Räume  $X$  und  $Y$  liefert das Kreuzprodukt der Homologie die erste Abbildung einer natürlichen kurzen exakten Sequenz*

$$\bigoplus_{p+q=n} (H_p X \otimes H_q Y) \hookrightarrow H_n(X \times Y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} (H_p X * H_q Y)$$

die in unnatürlicher Weise spaltet und deren zweite Abbildung im Beweis explizit angegeben werden wird.

*Ergänzung 3.6.22.* Die von der Vertauschung  $X \times Y \rightarrow Y \times X$  auf der Homologie induzierte Abbildung läßt sich zu einem Morphismus der entsprechenden Künneth-Sequenzen ergänzen. Wie die zugehörige Abbildung auf dem Tensorprodukt der Homologien aussieht, erklärt die “graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts” nach 3.8.2. Wie die zugehörige Abbildung auf dem Torsionsprodukt der Homologien aussieht, habe ich mir nicht so genau überlegt. Wer hilft?

3.6.23. Arbeitet man mit Koeffizienten in einem Hauptidealring, so gilt dieselbe Formel mit demselben Beweis. Insbesondere erhalten wir die Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper als Korollar. Ich habe nur deshalb einen separaten Beweis für Körper gegeben, da mir dieser sehr viel einfacher schien als der Beweis im allgemeinen.

3.6.24 (**Verschieben von Komplexen**). Ist  $C$  ein Komplex, so bezeichnen wir mit

$$C[1]$$

den “um eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex”, in Formeln  $(C[1])_q = C_{q-1}$  bzw. bei Kokettenkomplexen  $(C[1])^q = C^{q+1}$ . Jedes Element  $c \in C$  liefert ein Element  $c[1] \in C[1]$ . Entgegen leider üblichen Konventionen führe ich hier beim Randoperator *kein* Vorzeichen ein. Bezeichnet also  $\mathbb{Z}[1]$  den um eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex  $\mathbb{Z}[0]$  und ist  $C$  ein Komplex von abelschen Gruppen, so definiert die Abbildung  $c \otimes 1[1] \mapsto c[1]$  einen Isomorphismus von Komplexen  $C \otimes \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\sim} C[1]$ . Dahingegen bezeichne

$$[1]C$$

den um eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex, bei dem zusätzlich der Randoperator  $\partial$  durch  $-\partial$  ersetzt wird. Jedes Element  $c \in C$  liefert auch ein Element  $[1]c \in [1]C$ , und in diesen Notationen haben wir  $\partial([1]c) = -[1](\partial c)$ . Wieder liefert  $1[1] \otimes c \mapsto [1]c$  einen Isomorphismus von Komplexen  $\mathbb{Z}[1] \otimes C \xrightarrow{\sim} [1]C$ . Die offensichtliche Abbildung induziert dann einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$(C \otimes D)[1] \xrightarrow{\sim} C \otimes (D[1])$$

und die Abbildung  $[1]c \mapsto (-1)^{|c|}c[1]$  mit  $|c| = q$  für  $c \in C^q$  ist ein Isomorphismus  $[1]C \xrightarrow{\sim} C[1]$ .

*Beweis.* Sicher haben wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$ZX \hookrightarrow SX \rightarrow BX[1]$$

wobei vorne und hinten Komplexe mit Differential Null stehen. Tensorieren wir über  $\mathbb{Z}$  mit dem aus freien abelschen Gruppen bestehenden Komplex  $SY$ , so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$ZX \otimes SY \hookrightarrow SX \otimes SY \rightarrow BX[1] \otimes SY$$

Da  $ZX$  und  $BX$  auch aus freien abelschen Gruppen bestehen und Differential Null haben, hat die zugehörige lange exakte Homologiesequenz die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & (BX[1] \otimes HY)_{n+1} & \rightarrow & \\ \rightarrow & (ZX \otimes HY)_n & \rightarrow & \mathcal{H}_n(SX \otimes SY) & \rightarrow & (BX[1] \otimes HY)_n & \rightarrow \\ \rightarrow & (ZX \otimes HY)_{n-1} & \rightarrow & & & & \end{array}$$

Man überzeugt sich mühelos, daß die Randabbildungen hier schlicht von den Einbettungen der Ränder in die Zyklen induziert werden, so daß sich aufgrund der kurzen exakten Sequenz  $BX \hookrightarrow ZX \rightarrow HX$  und der exakten Tor-Sequenz eine natürliche kurze exakte Sequenz der Gestalt

$$(HX \otimes HY)_n \hookrightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow (HX * HY)_{n-1}$$

ergibt. Um eine Spaltung dieser Sequenz anzugeben, wählen wir einfach Linksinverse der Einbettungen  $ZX \hookrightarrow SX$ ,  $ZY \hookrightarrow SY$ , und solche Linksinversen existieren, da ja die jeweiligen Kokerne  $BX$ ,  $BY$  nach 3.5.7 frei sind als Untergruppen der freien abelschen Gruppen  $SX$ ,  $SY$ .  $\square$

*Übung 3.6.25.* Man berechne die Homologie von  $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ .

*Ergänzende Übung 3.6.26 (Verschieben und Hom-Komplexe).* Gegeben Komplexe  $X, Y$  liefern die offensichtlichen, ohne alle Vorzeichen erklärten Identifikationen Isomorphismen von Komplexen

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(X, Z) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(X[1], Z[1]) \\ \operatorname{Hom}([1]X, Z) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(X, Z)[-1] \\ \operatorname{Hom}(X, [1]Z) &\xrightarrow{\sim} [1]\operatorname{Hom}(X, Z) \end{aligned}$$

### 3.7 Eine explizite Eilenberg-Zilber-Abbildung

3.7.1. Um zusätzliche Anschauung bereitzustellen, gebe ich eine mögliche Eilenberg-Zilber-Abbildung auch noch explizit an. Wir werden diese explizite Form nicht benötigen, deshalb führe ich den Beweis nicht aus. Wir betrachten für  $n = p + q$  alle affinen injektiven Abbildungen

$$\omega : \Delta_n \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q$$

die Ecken auf Paare von Ecken werfen und die “in jeder Komponente monoton wachsen auf den Ecken”. So eine Abbildung entspricht eindeutig einer Injektion

$$\omega = (\alpha, \beta) : \{0, \dots, n\} \hookrightarrow \{0, \dots, p\} \times \{0, \dots, q\}$$

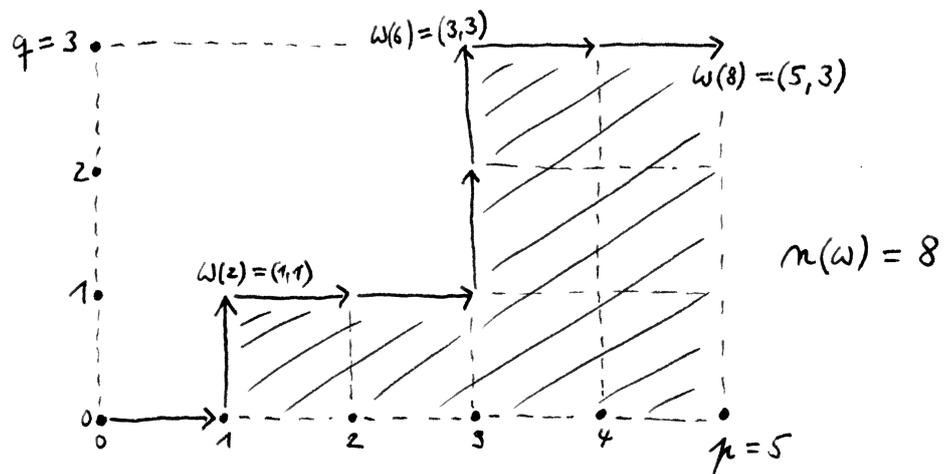
mit monoton wachsenden  $\alpha$  und  $\beta$ . Man erkennt, daß für solch ein  $\omega$  notwendig gilt  $\omega(0) = (0, 0)$ ,  $\omega(n) = (p, q)$  und daß beim Übergang von  $i$  zu  $i + 1$  entweder  $\alpha$  oder  $\beta$  aber nicht beide um 1 wachsen. Man kann sich so ein  $\omega$  vorstellen als einen Weg von  $(0, 0)$  nach  $(p, q)$ , der in jedem von  $n$  Zeitschritten entweder eins nach oben oder eins nach rechts gehen darf. Die Fläche unterhalb dieses Weges im Quadrat  $[0, p] \times [0, q]$  notieren wir  $n(\omega)$ , in Formeln

$$n(\omega) = \sum_{0 \leq i < j < p+q} (\beta(i+1) - \beta(i))(\alpha(j+1) - \alpha(j))$$

Unsere Abbildungen  $\omega : \Delta_n \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q$  sind die  $n$ -Simplizes einer Triangulierung von  $\Delta_p \times \Delta_q$ , aber diese Erkenntnis ist nur für die Anschauung von Belang. Jetzt definieren wir Homomorphismen

$$\begin{aligned} S_p X \otimes_{\mathbb{Z}} S_q Y &\rightarrow S_{p+q}(X \times Y) \\ \sigma \otimes \tau &\mapsto \sum_{\omega} (-1)^{n(\omega)} (\sigma \times \tau) \circ \omega \end{aligned}$$

und erhalten so eine Transformation von Funktoren von der Kategorie aller Paare topologischer Räume in die Kategorie der Gruppen.



Graphische Darstellung einer unserer in beiden Komponenten monotonen Injektionen  $\omega$  im Fall  $p = 5, q = 3$ .

*Ergänzung 3.7.2.* Im übrigen entsprechen unsere Wege auch eindeutig den sogenannten  $(p, q)$ -Shuffles aus dem Beweis von [AN3] 2.1.7. Des weiteren entsprechen sie Wege auch eindeutig den Worten, die man durch das Hintereinanderschreiben von  $p$  Einsen und  $q$  Nullen bilden kann und die wir etwa in [GR] 2.2.33 betrachtet hatten.

**Lemma 3.7.3.** *Die in 3.7.1 angegebenen Homomorphismen definieren eine mögliche Eilenberg-Zilber-Abbildung*

$$SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \rightarrow S(X \times Y)$$

*Beweis.* Unsere Abbildung ist offensichtlich funktoriell und tut das Richtige in der nullten Homologie. Nach dem Satz über azyklische Modelle 3.6.15 und dem Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber müssen also nur prüfen, daß sie wirklich für alle  $X, Y$  eine Kettenabbildung ist. Das überlassen wir dem Leser.  $\square$

3.7.4. Als nächstes beschreiben wir eine Homotopieinverse der Eilenberg-Zilber-Abbildung.

**Definition 3.7.5.** Die Abbildungen

$$\lambda_{p+q}^p = \lambda^p : \Delta_p \rightarrow \Delta_{p+q} \text{ und } \rho_{p+q}^q = \rho^q : \Delta_q \rightarrow \Delta_{p+q},$$

die hinten  $q$  Nullen anhängen bzw. vorne  $p$  Nullen davorschieben, heißen die  $p$ -**Vorderseite** bzw. die  $q$ -**Hinterseite** unseres Standardsimplex. Hier steht  $\lambda$  für “links” und  $\rho$  für “rechts”.

**Lemma 3.7.6.** *Schreiben wir einen beliebigen  $n$ -Simplex  $\Delta_n \rightarrow X \times Y$  in der Form  $(\sigma, \tau)$  mit  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X, \tau : \Delta_n \rightarrow Y$  und definieren Abbildungen*

$$\begin{aligned} A_n : S_n(X \times Y) &\rightarrow (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY)_n \\ (\sigma, \tau) &\mapsto \sum_{p+q=n} \sigma \lambda^p \otimes \tau \rho^q \end{aligned}$$

so erhalten wir eine natürliche Kettenabbildung  $A : S(X \times Y) \rightarrow SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY$ , die **Alexander-Whitney-Abbildung**, und diese Abbildung repräsentiert das Homotopie-Inverse zu einer und jeder Eilenberg-Zilber-Abbildung.

*Beweis.* Die im Lemma definierte Abbildung ist offensichtlich funktoriell und tut das Richtige in der nullten Homologie. Nach dem Satz über azyklische Modelle 3.6.15 und dem Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber müssen wir also nur prüfen, daß sie für alle  $X, Y$  eine Kettenabbildung ist. Dazu rechnen wir

$$\partial A(\sigma, \tau) = \sum_{p+q=n} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \lambda^p k^i \otimes \tau \rho^q + (-1)^p \sum_{j=0}^q (-1) \sigma \lambda^p \otimes \tau \rho^q k^j \right)$$

wobei wir die a priori undefinierten Ausdrücke  $\sigma\lambda^0k^0$  und  $\tau\rho^0k^0$  als Null interpretieren. Ebenso finden wir auch

$$A\partial(\sigma, \tau) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \sum_{a+b=n-1} \sigma k^\nu \lambda^a \otimes \tau k^\nu \rho^b$$

Für die entsprechenden Abbildungen mit Werten in  $\Delta_n$  für  $n = a + b + 1$  gilt nun

$$k^\nu \lambda^a = \begin{cases} \lambda^{a+1} k^\nu & \text{falls } 0 \leq \nu \leq a + 1; \\ \lambda^a & \text{falls } a + 1 \leq \nu \leq n; \end{cases}$$

$$k^\nu \rho^b = \begin{cases} \rho^b & \text{falls } 0 \leq \nu \leq a; \\ \rho^{b+1} k^{\nu-a} & \text{falls } a \leq \nu \leq n. \end{cases}$$

Damit können wir  $A\partial(\sigma, \tau)$  umschreiben zu

$$\sum_{a+b+1=n} \left( (-1)^\nu \sum_{\nu=0}^a \sigma \lambda^{a+1} k^\nu \otimes \tau \rho^b + (-1)^{a+1+\mu} \sum_{\mu=0}^b \sigma \lambda^a \otimes \tau \rho^{b+1} k^{\mu+1} \right)$$

und wenn wir in der ersten Summe  $p = a + 1$ ,  $q = b$ ,  $i = \nu$  substituieren und in der Zweiten  $p = a$ ,  $q = b + 1$ ,  $j = \mu + 1$  ergibt sich

$$A\partial(\sigma, \tau) = \sum_{p+q=n} \left( \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \sigma \lambda^p k^i \otimes \tau \rho^q + (-1)^p \sum_{j=1}^q (-1)^j \sigma \lambda^p \otimes \tau \rho^q k^j \right)$$

wobei wir die erste Summe im Fall  $p = 0$  und die zweite im Fall  $q = 0$  als Null zu verstehen haben. Es folgt  $\partial A(\sigma, \tau) = A\partial(\sigma, \tau)$ .  $\square$

### 3.8 Eigenschaften des Kreuzprodukts

3.8.1. Sei für diesen Abschnitt  $R$  ein beliebiger Koeffizientenring. Der Übersichtlichkeit halber kürzen wir  $H(X; R) = HX$  und  $\otimes_R = \otimes$  ab.

**Proposition 3.8.2 (Eigenschaften des Kreuzprodukts).**

**Natürlichkeit:** Gegeben stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow X'$  und  $g : Y \rightarrow Y'$  gilt für beliebige  $c \in H_p X$  und  $d \in H_q Y$  in  $H_{p+q}(X' \times Y')$  die Formel

$$(f_*c) \times (g_*d) = (f \times g)_*(c \times d)$$

**Einheit:** Bezeichnet  $1 \in H_0(\text{pt})$  den kanonischen Erzeuger der Homologie eines Punktes, so gelten unter Unterdrückung der Notation für die von den offensichtlichen Identifikationen  $\text{pt} \times X \xrightarrow{\sim} X \xrightarrow{\sim} X \times \text{pt}$  auf der Homologie induzierten Isomorphismen die Gleichungen

$$1 \times c = c = c \times 1$$

**Assoziativität:** Gegeben  $X, Y, Z$  topologische Räume und  $a, b, c$  zugehörige Homologieklassen gilt in der Homologie von  $X \times Y \times Z$  unter Unterdrückung der Notation für die von den natürlichen Identifikationen  $(X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times Y \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$  auf der Homologie induzierten Isomorphismen die Gleichung

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

**Graduierte Kommutativität:** Gegeben topologische Räume  $X, Y$  bezeichne  $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$  die Vertauschung  $(x, y) \mapsto (y, x)$ . Für beliebige homogene Homologieklassen  $c \in HX$  und  $d \in HY$  gilt in  $H(Y \times X)$  bei kommutativem Koeffizientenring  $R$  die Formel

$$\tau_*(c \times d) = (-1)^{|c||d|} d \times c$$

*Beweis. Natürlichkeit:* Das folgt aus dem anschließenden kommutativen Diagramm in der Kategorie der Kettenkomplexe

$$\begin{array}{ccc} SX \otimes SY & \rightarrow & S(X \times Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SX' \otimes SY' & \rightarrow & S(X' \times Y') \end{array}$$

mit Eilenberg-Zilber-Abbildungen in den Horizontalen und hoffentlich offensichtlichen Abbildungen in den Vertikalen.

*Einheit:* Wir zeigen nur die erste Gleichung  $1 \times c = c$ . Bezeichnet  $\text{pr} : \text{pt} \times X \rightarrow X$  die Projektion auf die zweite Koordinate, so lautet die präzise Formulierung unserer Behauptung ja  $\text{pr}_*(1 \times c) = c$ . Um das zu zeigen, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S(\text{pt}) \otimes SX & \rightarrow & S(\text{pt} \times X) \\ \epsilon \otimes \text{id} \downarrow & & \wr \downarrow \text{pr} \\ R[0] \otimes SX & \xrightarrow{\text{mult}} & SX \end{array}$$

und behaupten, daß es kommutiert in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe für alle  $X$ . Dazu hinwiederum fassen wir alle Ecken des Diagramms auf als Funktoren von den topologischen Räumen in die Kettenkomplexe und alle Pfeile als Transformationen und müssen mit dem Satz über azyklische Modelle 3.6.15.2 nur zeigen, daß das induzierte Diagramm in der nullten Homologie kommutiert für alle  $X$ . Das ist aber klar.

*Assoziativität, erster Beweis:* Nach 3.8.4 ist für drei Kettenkomplexe  $A, B, C$  die offensichtliche Abbildung  $(A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$  ein Isomorphismus. Wir dürfen deshalb bei solchen Tensorprodukten die Klammern weglassen, ebenso wie

bei Produkten topologischer Räume. Dann betrachten wir das durch Eilenberg-Zilber-Abbildungen gegebene Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc}
 & & SX \otimes S(Y \times Z) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 SX \otimes SY \otimes SZ & & & & S(X \times Y \times Z) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & S(X \times Y) \otimes SZ & & 
 \end{array}$$

Aus dem Satz über azyklische Modelle folgt ähnlich wie im vorhergehenden Punkt, daß unser Diagramm kommutiert in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe. Gehen wir zur Homologie über, so folgt die behauptete Assoziativität des Kreuzprodukts.

*Assoziativität, zweiter Beweis:* Um zu zeigen, daß unser Diagramm aus dem ersten Beweis homotopiekommutativ ist, reicht es zu zeigen, daß das andersherum gerichtete durch Alexander-Whitney-Abbildungen gegebene Diagramm homotopiekommutativ ist. Nehmen wir speziell unsere Alexander-Whitney-Abbildungen  $A$  aus 3.7.6, so ist dies Diagramm jedoch offensichtlich sogar kommutativ als Diagramm von Kettenkomplexen.

*Graduierte Kommutativität:* Wir erinnern an unseren Vertauschungsmorphismus  $C \otimes D \xrightarrow{\sim} D \otimes C, c \otimes d \mapsto (-1)^{|c||d|} d \otimes c$  aus 3.4.11 und betrachten das folgende Diagramm von Funktoren aus der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe:

$$\begin{array}{ccc}
 SX \otimes SY & \rightarrow & S(X \times Y) \\
 v \downarrow & & \downarrow S\tau \\
 SY \otimes SX & \rightarrow & S(Y \times X)
 \end{array}$$

Hier sind mit  $X, Y$  variable topologische Räume gemeint und die Horizontalen sind Eilenberg-Zilber-Abbildungen. Um zu zeigen, daß dies Diagramm für beliebige Räume  $X, Y$  kommutiert in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, müssen wir wie beim ersten Punkt nach dem Satz über azyklische Modelle 3.6.15.2 nur zeigen, daß es kommutiert in der nullten Homologie. Das ist jedoch offensichtlich. Die graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts folgt durch Übergang zur Homologie.  $\square$

*Übung 3.8.3.* Man zeige, daß sich jede Eilenberg-Zilber-Transformation auf genau eine Weise zu einer Transformation

$$S(X, A) \otimes S(Y, B) \rightarrow S(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

zwischen Funktoren auf Paaren von Raumpaaren fortsetzen läßt, und daß jede solche Fortsetzung eine von allen Wahlen unabhängige Äquivalenz von Funktoren

in die Homotopiekategorie liefert. Wir erhalten so das Kreuzprodukt der relativen Homologie

$$H(X, A) \otimes H(Y, B) \rightarrow H(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

Bei Koeffizienten in einem Körper ist das Kreuzprodukt auf der relativen Homologie wieder ein Isomorphismus. Man folgere, daß es für ungerades  $n$  keinen topologischen Raum  $X$  geben kann derart, daß  $X \times X$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere gibt es salopp gesagt “keine Wurzel aus dem  $\mathbb{R}^3$ ”.

*Ergänzung 3.8.4.* Man sieht ohne Mühe, daß ganz allgemein die offensichtliche Abbildung  $c \otimes (d \otimes e) \mapsto (c \otimes d) \otimes e$  einen Isomorphismus von Kettenkomplexen  $C \otimes_R (D \otimes_S E) \mapsto (C \otimes_R D) \otimes_S E$  liefert, wobei  $R, S$  Ringe sind und wir für  $C$  einen Komplex in  $\text{Mod-}R$ , für  $D$  einen Komplex in  $R\text{-Mod-}S$  und für  $E$  einen Komplex in  $S\text{-Mod}$  nehmen.

## 4 Singuläre Kohomologie

Für eine orientierte kompakte  $n$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand  $M$  darf man erwarten, daß sich der anschauliche Schnitt zweier Zyklen formalisieren läßt zu einer bilinearen Paarung

$$H_{n-p}M \times H_{n-q}M \rightarrow H_{n-(p+q)}M$$

Das ist auch in der Tat der Fall, aber die Konstruktion dieses sogenannten “Schnittprodukts” und insbesondere deren anschauliche Rechtfertigung ist nicht einfach und wird uns lange beschäftigen. Wir konstruieren zunächst einmal den Kohomologiering, den man für einen beliebigen topologischen Raum zwar recht mühelos definiert, für den ich jedoch im allgemeinen keine Anschauung anbieten kann. Für kompakte orientierbare Mannigfaltigkeiten entspricht die Multiplikation im Kohomologiering unter der “Poincaré-Dualität” dem oben anschaulich erklärten Schnittprodukt, aber diesen Zusammenhang kann ich vorerst nur im Fall von Zykeln komplementärer Dimension klar machen und muß den allgemeinen Fall verschieben, bis wir die Garbenkohomologie weit genug entwickelt haben. Eine interessante Quelle zur Entwicklung der Theorie ist [Mas99].

### 4.1 Die Kohomologiegruppen

**Definition 4.1.1.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und eine abelsche Gruppe  $G$  definieren wir ganz allgemein

$$S^q(X; G) := \text{Hom}(S_q X, G) = \text{Ens}(\text{Top}(\Delta_q, X), G)$$

für  $S_q X = S_q(X; \mathbb{Z})$  und nennen die Elemente dieser Gruppe **singuläre Koketten von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$** .

4.1.2. Wir können  $S^q(X; G)$  also auch interpretieren als die Gruppe aller Abbildungen von der Menge der  $q$ -Simplizes nach  $G$ . Die Gruppe der singulären Ketten  $S_q(X; G)$  mit Koeffizienten in  $G$  besteht im Gegensatz dazu nur aus allen auf fast allen singulären Simplizes verschwindenden solchen Abbildungen.

4.1.3. Per definitionem ist  $S^q(X; G)$  gerade die homogene Komponente vom Grad  $(-q)$  im Komplex  $\text{Hom}(SX, G) = \text{Hom}(SX, G[0])$  wie er in 1.4.10 definiert wird. Wir vereinbaren die Konvention, nach der obere Indizes bei einem Komplex bedeuten sollen, daß ein Differential in Richtung wachsender Indizes gemeint ist. Im allgemeinen kann man diese Regel  $C^q = C_{-q}$  schreiben, aber in konkreten Situationen wie zum Beispiel hier trägt die Stellung des Index zusätzliche Information.

**Definition 4.1.4.** Eine Kokette  $c \in S^q(X; G)$  nennen wir eine **Kokette vom Grad**  $q$  und schreiben  $|c| = q$ . Den Wert einer Kokette  $c \in S^q(X; G)$  auf einer Kette  $z \in S_q X$  notieren wir  $\langle c, z \rangle \in G$ . Sprechen wir ohne nähere Spezifikation von singulären Koketten, so meinen wir Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . Den Randoperator des Komplexes  $S^*(X; G) := \text{Hom}(SX, G)$  nennen wir den **Korandoperator**.

4.1.5. Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  definieren wir ganz allgemein einen Funktor  $\text{Ab} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ ,  $A \mapsto \text{Hom}(A, G)$ . Das Bild eines Morphismus  $f : A \rightarrow B$  unter diesem Funktor nennen wir das “Vorschalten von  $f$ ” alias die **transponierte Abbildung**  $f^\top : \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G)$ . Explizit wird unser Korandoperator nach 1.4.10 also gegeben durch die Vorschrift  $\delta = -(-1)^q \partial^\top : S^q(X; G) \rightarrow S^{q+1}(X; G)$  und noch expliziter durch die Vorschrift  $\langle \delta c, z \rangle = -(-1)^{|c|} \langle c, \partial z \rangle$ .

4.1.6. Wir haben nun kontravariante Funktoren konstruiert von den topologischen Räumen in die Komplexe abelscher Gruppen als die Komposition

$$\text{Top} \rightarrow \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}^{\text{opp}}$$

wo der erste Funktor gegeben ist durch  $X \mapsto SX$  und der zweite durch  $C \mapsto \text{Hom}(C, G)$ . Im Fall  $G = \mathbb{Z}$  notieren wir die Komposition  $S^*$ , also  $X \mapsto S^*X$  auf Objekten und  $f \mapsto S^*f$  auf Morphismen.

4.1.7. Im Kontext von Morphismen in Richtung wachsender Indizes bezeichnet man die Ränder, Zykel und Homologiegruppen meist als **Koränder**  $\mathcal{B}^q C$ , **Kozykel**  $\mathcal{Z}^q C$  und **Kohomologiegruppen**  $\mathcal{H}^q C$ .

**Definition 4.1.8.** Die Kohomologiegruppen unseres Komplexes  $S^*(X; G)$  der singulären Koketten von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$  heißen die **singulären Kohomologiegruppen von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$**  und werden bezeichnet mit

$$\mathcal{H}^q(S^*(X; G)) = H_{\text{sing}}^q(X; G) = H^q(X; G)$$

Die Notation  $H^q(X; G)$  kann später auch Garbenkohomologie bedeuten und der Leser muß die genaue Bedeutung jeweils aus dem Kontext erschließen. Offensichtlich erhalten wir so kontravariante Funktoren von den topologischen Räumen in die abelschen Gruppen  $H^q(\ ; G) : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ . Das Bild einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  unter einem derartigen Funktor notieren wir  $H^q f = f^* : H^q Y \rightarrow H^q X$  und haben also  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ . Man bezeichnet die Abbildung  $f^*$  auch als den **Rückzug unter  $f$** .

4.1.9. Wir können auch die Zuordnung  $G \mapsto H^q(X; G)$  für festes  $X$  auffassen als einen Funktor von den abelschen Gruppen in sich selber. Ist insbesondere  $G$  ein Modul über einem Ring  $R$ , so erbt  $H^q(X; G)$  diese Struktur.

*Übung 4.1.10.* Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $G' \hookrightarrow G \rightarrow G''$  und ein topologischer Raum  $X$  zeige man, wie analog zu 3.1.3 in natürlicher Weise Randoperatoren definiert werden können so, daß eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H^q(X; G') \rightarrow H^q(X; G) \rightarrow H^q(X; G'') \rightarrow H^{q+1}(X; G') \rightarrow \dots$$

entsteht. Diese Randoperatoren heißen **Bockstein-Homomorphismen**.

4.1.11. Wenden wir die Abbildung  $\mathcal{H}\text{Hom}(C, D) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}C, \mathcal{H}D)$  aus 1.4.10 an mit  $C = S_*X$  und  $D$  dem Komplex, der nur im Grad Null lebt und dort  $G$  ist, so erhalten wir eine Abbildung  $H^q(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_q X, G)$  alias eine  $\mathbb{Z}$ -bilineare Abbildung, die **Kronecker-Paarung**

$$\begin{aligned} H^q(X; G) \times H_q X &\rightarrow G \\ (c, z) &\mapsto \langle c, z \rangle \end{aligned}$$

Ist  $G$  ein Modul über einem Ring  $k$ , so erhalten wir analog einen natürlichen Homomorphismus  $H^q(X; G) \rightarrow \text{Hom}_k(H_q(X; k), G)$  von Linksmoduln über  $k$ , wobei die  $k$ -Operation auf dem Hom-Raum herkommt von der Rechtsoperation von  $k$  auf  $H_q(X; k)$ . Arbeiten wir mit Koeffizienten in einem Körper  $k$ , so ist nach 1.4.12 die Kohomologie schlicht der Dualraum der Homologie, die Kronecker-Paarung definiert genauer Isomorphismen

$$H^q(X; k) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_q(X; k), k)$$

Ich kann mir die höheren Kohomologiegruppen ab  $q \geq 2$  nur vorstellen als den Dualraum in diesem Sinne der für mich vergleichsweise anschaulichen Homologiegruppen. Im Fall  $q = 1$  erkläre ich eine weitere mögliche Anschauung in der anschließenden Bemerkung 4.1.12.

4.1.12. Die erste Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $G$  kann man sich im Fall eines "lokal zusammenziehbaren" Raums als die Menge aller Isomorphieklassen von " $G$ -Hauptfaserbündeln" veranschaulichen, wobei  $G$  mit der diskreten Topologie zu verstehen ist, so daß unsere Hauptfaserbündel Überlagerungen sind. Der Wert einer Isomorphieklasse von Hauptfaserbündeln auf einem durch einen geschlossenen Weg dargestellten Zykel wird dann berechnet, indem man "den Weg liftet und ihm das Gruppenelement zuordnet, das den Anfangspunkt auf den Endpunkt schiebt". Für allgemeine topologische Räume werden wir die Menge aller Isomorphieklassen von  $G$ -Hauptfaserbündeln in ?? und ?? mit der "ersten Garbenkohomologiegruppe unseres Raums mit Koeffizienten in  $G$ " identifizieren.

## 4.2 Der Kohomologiering

**Definition 4.2.1.** Gegeben ein Komplex von abelschen Gruppen  $A \in \text{Ket}$  erklären wir den **dualen Komplex** als den Komplex  $A^* = \text{Hom}(A, \mathbb{Z}) \in \text{Ket}$  der Homomorphismen in den im Grad Null konzentrierten Komplex  $\mathbb{Z}$ . Das Dualisieren ist in offensichtlicher Weise ein Funktor  $\text{Ket} \rightarrow \text{Ket}^{\text{opp}}$  und wir erhalten natürliche Kettenabbildungen

$$t = t_{A,B} : A^* \otimes B^* \rightarrow (A \otimes B)^*$$

durch die Vorschrift  $(t(f \otimes g))(a \otimes b) = (-1)^{|g||a|} f(a)g(b)$  für homogene Elemente  $f \in A^*, g \in B^*, a \in A$  und  $b \in B$ . Ich werde in 4.4.18 kurz diskutieren, warum wir bei der Konstruktion dieser Kettenabbildungen  $t$  in Wirklichkeit gar keine Vorzeichenwahl treffen und sie vielmehr durch die Daten in 3.4.15 bereits festgelegt werden.

4.2.2. Ist  $k$  ein beliebiger kommutativer Ring und lesen wir im Vorhergehenden wie im Folgenden  $H^*X = H^*(X; k)$  und  $\otimes = \otimes_k$  und  $\text{Hom} = \text{Hom}_k$  und  $A^* = \text{Hom}(A, k)$ , so behalten alle Aussagen weiter ihre Gültigkeit.

**Definition 4.2.3.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  betrachten wir die bis auf Homotopie wohlbestimmte Komposition von Kettenabbildungen

$$SX \rightarrow S(X \times X) \rightarrow SX \otimes SX$$

mit der von der diagonalen Einbettung  $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$  induzierten Abbildung vorne und einer Homotopieinversen einer Eilenberg-Zilber-Abbildung 3.6.4 hinten. Durch Dualisieren und Vorschalten der kanonischen Abbildung vom Tensorprodukt der dualen Komplexe in das Duale des Tensorprodukts wie in 4.2.1 erhalten wir daraus eine bis auf Homotopie wohlbestimmte Komposition von Kettenabbildungen

$$S^*X \leftarrow (SX \otimes SX)^* \leftarrow S^*X \otimes S^*X$$

Durch Bilden der Kohomologie und Vorschalten der kanonischen Abbildung 3.6.17 vom Tensorprodukt der Kohomologien in die Kohomologie des Tensorprodukts erhalten wir weiter eine wohlbestimmte Abbildung

$$H^*X \leftarrow \mathcal{H}^*(S^*X \otimes S^*X) \leftarrow H^*X \otimes H^*X$$

Sie beinhaltet lauter bilineare Abbildungen  $H^pX \times H^qX \rightarrow H^{p+q}X$ . Man notiert diese Abbildungen  $(a, b) \mapsto a \cup b$  und bezeichnet sie nach der tassenförmigen Gestalt des Verknüpfungssymbols als **cup-Produkt**. Wie bereits erwähnt kann ich für dieses Produkt in der Allgemeinheit beliebiger topologischer Räume zu meinem Leidwesen keinerlei Anschauung bereitstellen.

*Ergänzung 4.2.4.* Die Notation  $\cup$  für die Multiplikation im Kohomologiering scheint auf Whitney zurückzugehen. Seine Motivation war vermutlich, daß diese Multiplikation für jede kompakte orientierte Mannigfaltigkeit unter dem Isomorphismus der Poincaré-Dualität dem “Schnittprodukt” auf der Homologie entspricht, für das die Notation  $\cap$  nahe liegt. Wir werden das in 4.5.15 noch ausführen. Allerdings hat sich mittlerweile für das Schnittprodukt die Notation  $\cdot$  durchgesetzt, und zu allem Überfluß hat man dem Symbol  $\cap$  in der algebraischen Topologie daraufhin eine andere Bedeutung zugewiesen, wodurch der Ursprung der Notation  $\cup$  völlig verschüttet worden ist.

4.2.5. Wenn man mit Koeffizienten in einem Körper  $k$  arbeitet, kann man gleich zu Beginn der Argumentationskette aus 4.2.3 zur Homologie übergehen und so eine natürliche Abbildung  $H(X; k) \rightarrow H(X; k) \otimes_k H(X; k)$  erhalten, aus der dann das cup-Produkt auf der Kohomologie mit Koeffizienten in  $k$  durch Dualisieren entsteht. Bei der Arbeit mit ganzzahligen Koeffizienten erhalten wir jedoch auf diese Weise nur kanonische Abbildungen

$$HX \rightarrow \mathcal{H}(SX \otimes SX) \leftarrow HX \otimes HX$$

Eine “Komultiplikation” auf der ganzzahligen Homologie ergibt sich nur unter der zusätzlichen Annahme, daß der rechte Pfeil ein Isomorphismus ist, also etwa für Räume mit torsionsfreier Homologie.

**Satz 4.2.6 (Kohomologiering).** *Für jeden topologischen Raum  $X$  wird die totale Kohomologie  $H^*X = \bigoplus_q H^q X$  mit dem cup-Produkt als Multiplikation zu einem Ring, dem **singulären Kohomologiering** von  $X$ , und in diesem Ring gilt*

$$a \cup b = (-1)^{|a||b|} b \cup a$$

*Für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist weiter das Zurückholen ein Ringhomomorphismus  $f^* : H^*Y \rightarrow H^*X$ .*

4.2.7. Wir stützen uns beim Beweis auf das “Kreuzprodukt der Kohomologie” und seine Eigenschaften, die wir dazu erst einmal diskutieren müssen. Der eigentliche Beweis unseres Satzes folgt dann im Anschluß an den Beweis der Proposition 4.2.10 zu den Eigenschaften des Kreuzprodukts.

**Definition 4.2.8.** Gegeben topologische Räume  $X, Y$  definieren wir das **Kreuzprodukt der Kohomologie**

$$\begin{aligned} H^p X \otimes H^q Y &\rightarrow H^{p+q}(X \times Y) \\ a \otimes b &\mapsto a \times b \end{aligned}$$

indem wir den Effekt der Komposition

$$S^* X \otimes S^* Y \rightarrow (SX \otimes SY)^* \rightarrow S^*(X \times Y)$$

auf der Kohomologie betrachten, mit der Transponierten einer Eilenberg-Zilber-Abbildung als Abbildung rechts und der in 4.2.1 erklärten Kettenabbildung links, und dann noch die Abbildung  $H^*X \otimes H^*Y \rightarrow \mathcal{H}^*(S^*X \otimes S^*Y)$  aus 3.6.17 von dem Tensorprodukt der Homologie zweier Komplexe zur Homologie ihres Tensorprodukts davorschalten.

4.2.9. Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $\Delta : X \rightarrow X \times X$ ,  $x \mapsto (x, x)$  die Diagonale, so gilt nach unserer Definition 4.2.3 für beliebige  $a, b \in H^*X$  die Formel

$$a \cup b = \Delta^*(a \times b)$$

**Proposition 4.2.10 (Eigenschaften des Kreuzprodukts).**

**Natürlichkeit:** Gegeben stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow X'$  und  $g : Y \rightarrow Y'$  gilt für beliebige  $c \in H^p X'$  und  $d \in H^q Y'$  in der Kohomologie der Produktraums  $H^{p+q}(X \times Y)$  die Identität

$$(f^*c) \times (g^*d) = (f \times g)^*(c \times d)$$

**Einheit:** Bezeichnet  $1 \in H^0(\text{pt})$  den kanonischen Erzeuger der Homologie eines Punktes, so gelten unter Unterdrückung der Notation für die von den Identifikationen  $\text{pt} \times X \cong X \cong X \times \text{pt}$  auf der Kohomologie induzierten Isomorphismen die Gleichungen

$$1 \times c = c = c \times 1$$

**Assoziativität:** Gegeben  $X, Y, Z$  topologische Räume und  $a, b, c$  zugehörige Kohomologieklassen gilt unter Unterdrückung der Notation für die von den Identifikationen  $(X \times Y) \times Z \cong X \times Y \times Z \cong X \times (Y \times Z)$  auf der Kohomologie induzierten Isomorphismen in der Kohomologie von  $X \times Y \times Z$  die Gleichung

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

**Graduierte Kommutativität:** Gegeben topologische Räume  $X, Y$  bezeichne  $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$  die Vertauschung der Faktoren  $(x, y) \mapsto (y, x)$ . Für beliebige homogene Kohomologieklassen  $c \in H^*X$  und  $d \in H^*Y$  gilt dann in  $H^*(Y \times X)$  die Identität

$$\tau^*(c \times d) = (-1)^{|c||d|} d \times c$$

*Beweis.* Um das zu zeigen, gilt es zunächst, alle Diagramme aus dem entsprechenden Beweis im Fall des Kreuzprodukts der Homologie 3.8.2 zu dualisieren.

Dann gilt es jedoch weiter, die Kommutativität einiger Diagramme von abstrakten Kettenkomplexen zu prüfen, die wir im folgenden ohne Beweis angeben.

*Natürlichkeit:* Gegeben  $C \rightarrow C_1, D \rightarrow D_1$  Kettenabbildungen kommutiert mit den durch 4.2.1 gegebenen Horizontalen, wie bereits in 4.2.1 behauptet, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^* \otimes D^* & \longrightarrow & (C \otimes D)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1^* \otimes D_1^* & \longrightarrow & (C_1 \otimes D_1)^* \end{array}$$

*Einheit:* Hier ist nichts zusätzlich zu prüfen.

*Assoziativität:* Wir betrachten das Diagramm mit hoffentlich offensichtlichen Morphismen

$$\begin{array}{ccccc} S^*X \otimes S^*Y \otimes S^*Z & \rightarrow & (SX \otimes SY)^* \otimes S^*Z & \rightarrow & (SX \otimes SY \otimes SZ)^* \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & S^*(X \times Y) \otimes S^*Z & \rightarrow & (S(X \times Y) \otimes SZ)^* \\ & & & & \downarrow \\ & & & & S^*(X \times Y \times Z) \end{array}$$

Das bereits im Beweis der Natürlichkeit benutzte Diagramm alias die in 4.2.1 behauptete Natürlichkeit der Morphismen  $t$  zeigt, daß auch dies Diagramm kommutiert. Setzen wir oben links ein Tensorprodukt  $\tilde{a} \otimes \tilde{b} \otimes \tilde{c}$  von Repräsentanten der jeweiligen Kohomologieklassen ein, so kommt unten rechts ein Repräsentant von  $(a \times b) \times c$  heraus. Nun ist die rechte Vertikale unseres Diagramms gerade einer der beiden möglichen Wege im Diagramm aus dem Beweis der Assoziativität für das Kreuzprodukt der Homologie, dualisiert. Malen wir dasselbe Diagramm für die andere Klammerung, so sind also die rechten Vertikalen in beiden Diagrammen homotopieäquivalent. Um den Beweis zu beenden benötigen wir dann nur noch die Information, daß auch die obere Horizontale unseres Diagramms nicht von der Wahl der Klammerung abhängt, also die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} & (A \otimes B)^* \otimes C^* & \\ & \nearrow & \searrow \\ A^* \otimes B^* \otimes C^* & & (A \otimes B \otimes C)^* \\ & \searrow & \nearrow \\ & A^* \otimes (B \otimes C)^* & \end{array}$$

Deren Nachweis überlassen wir dem Leser.

*Graduierte Kommutativität:* Hierzu benötigen wir zusätzlich nur noch die Kom-

mutativität von

$$\begin{array}{ccc} A^* \otimes B^* & \longrightarrow & (A \otimes B)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^* \otimes A^* & \longrightarrow & (B \otimes A)^* \end{array}$$

mit  $t$ -Abbildungen in den Horizontalen und von Vertauschungen induzierten Abbildungen in den Vertikalen. Den Nachweis dieser Kommutativität überlassen wir wieder dem Leser.  $\square$

*Beweis von 4.2.6.* Wir stützen uns auf die Darstellung  $a \cup b = \Delta^*(a \times b)$  des cup-Produkts aus 4.2.9. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (a \cup b) \cup c &= \Delta^*((a \cup b) \times c) \\ &= \Delta^*((\Delta^*(a \times b)) \times c) \\ &= \Delta^*(\Delta \times \text{id})^*((a \times b) \times c) \\ &= \Delta_3^*((a \times b) \times c) \end{aligned}$$

wo wir im dritten Schritt die Natürlichkeit des Kreuzprodukts und die Identität  $c = \text{id}^* c$  benutzt haben und im vierten Schritt mit  $\Delta_3 = \Delta(\Delta \times \text{id})$  die Abbildung  $X \rightarrow (X \times X) \times X$ ,  $x \mapsto ((x, x), x)$  notieren. Die Assoziativität des cup-Produkts folgt nun unmittelbar aus der Assoziativität des Kreuzprodukts. Als nächstes behaupten wir, daß  $1_X = p^* 1 \in H^0 X$  für  $p : X \rightarrow \text{pt}$  die konstante Abbildung ein neutrales Element für das cup-Produkt ist. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} a \cup 1_X &= \Delta^*(a \times 1_X) \\ &= \Delta^*(\text{id} \times p)^*(a \times 1) \\ &= \text{id}^*(a) \\ &= a \end{aligned}$$

unter Verwendung unserer Erkenntnisse über die Einheit beim Kreuzprodukt, und  $1_X \cup a = a$  zeigt man genauso. Die Formel  $a \cup b = (-1)^{|a||b|} b \cup a$  folgt aus der graduierten Kommutativität des Kreuzprodukts, indem man für die Vertauschung der Faktoren  $\tau : X \times X \rightarrow X \times X$  die Formel  $\tau \circ \Delta = \Delta$  beachtet. Damit erhalten wir dann wie gewünscht

$$\begin{aligned} a \cup b &= \Delta^*(a \times b) \\ &= \Delta^* \tau^*(a \times b) \\ &= (-1)^{|a||b|} \Delta^*(b \times a) \\ &= (-1)^{|a||b|} b \cup a \end{aligned}$$

Die Natürlichkeit des cup-Produkts folgt unmittelbar aus der Natürlichkeit des Kreuzprodukts.  $\square$

### 4.3 Cup-Produkt von singulären Koketten

**Proposition 4.3.1 (Komultiplikation von Ketten).** Für jeden topologischen Raum  $X$  ist die Abbildung  $\Delta : SX \rightarrow SX \otimes SX$ , die auf Simplizes in der Notation 3.7.5 gegeben wird durch die Vorschrift

$$\sigma \mapsto \sum_{p+q=|\sigma|} \sigma \lambda^p \otimes \sigma \rho^q$$

ein Homomorphismus von Kettenkomplexen und erfüllt die Bedingung der **Koassoziativität**  $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta : SX \rightarrow SX \otimes SX \otimes SX$ .

*Beweis.* Die fragliche Abbildung erhält man als die Verknüpfung  $SX \rightarrow S(X \times X) \rightarrow SX \otimes SX$  des direkten Bildes unter der Diagonale mit der Alexander-Whitney-Abbildung aus 3.7.6. Das ist auch der Grund, aus dem sie  $\Delta$  notiert wird. Als eine Verknüpfung von Kettenabbildungen ist unsere Abbildung eine Kettenabbildung. Die Koassoziativität ist offensichtlich.  $\square$

**Definition 4.3.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Verknüpfung

$$S^*X \otimes S^*X \rightarrow (SX \otimes SX)^* \rightarrow S^*X$$

unserer kanonischen Abbildung aus 4.2.1 mit der Transponierten unserer Komultiplikation  $\Delta$  aus 4.3.1 wird auch notiert in der Form

$$a \otimes b \mapsto a \cup b$$

und heißt das **cup-Produkt auf den singulären Koketten**. Explizit wird für Koketten  $a \in S^pX$ ,  $b \in S^qX$  der Wert von  $a \cup b$  auf einem Simplex  $\sigma : \Delta_{p+q} \rightarrow X$  gegeben durch die Formel

$$\langle a \cup b, \sigma \rangle = (-1)^{pq} \langle a, \sigma \circ \lambda^p \rangle \langle b, \sigma \circ \rho^q \rangle$$

Die Koassoziativität von  $\Delta$  liefert mit ähnlichen Argumenten wie beim Beweis von 4.2.10 die Assoziativität des cup-Produkts auf den singulären Koketten, und daß die Augmentation  $\varepsilon \in S^0X$  für diese Verknüpfung ein neutrales Element ist, sieht man auch sofort ein. Daß unsere Verknüpfung eine Kettenabbildung ist, bedeutet explizit die “graduierte Leibniz-Regel”

$$\delta(a \cup b) = (\delta a) \cup b + (-1)^{|a|} a \cup (\delta b)$$

aus der hinwiederum folgt, daß die Zyklen einen Teilring  $Z^*X \subset S^*X$  bilden und darin die Bilder ein Ideal  $B^*X \subset Z^*X$ . Die Homologie erbt folglich die Struktur eines graduierten Rings im Sinne von 4.4.2, dessen Multiplikation per definitionem gerade unser cup-Produkt aus 4.2.3 ist. Das zeigt ein weiteres Mal, daß die Kohomologie mit dem Cup-Produkt zu einem Ring wird, und liefert somit einen alternativen Beweis für einen Teil von Satz 4.2.6. Die “graduierte Kommutativität” des Kohomologierings ist jedoch auf diesem Weg nicht so leicht zu sehen.

4.3.3. Jeder stetigen Abbildung  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  für  $n \geq 1$  ordnet man eine ganze Zahl, ihre **Hopf-Invariante**, zu wie folgt: Bezeichnet  $X$  den Raum, der aus  $S^n$  entsteht durch Ankleben einer  $2n$ -Zelle mittels der Abbildung  $f$ , so erhält man aus der analog zu 2.8.3 gebildeten “Anklebesequenz der Kohomologie” zwei Isomorphismen

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^n X \xrightarrow{\sim} H^n S^n \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow H^{2n-1} S^{2n-1} \xrightarrow{\sim} H^{2n} X \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Nun nimmt man den kanonischen Erzeuger von  $H^n S^n$ , holt ihn zurück nach  $H^n X$ , quadriert ihn im Kohomologiering des verklebten Raums  $X$ , betrachtet das Urbild unter dem Korand in  $H^{2n-1} S^{2n-1}$  und erhält ein Vielfaches des kanonischen Erzeugers. Der Faktor, mit dem hier multipliziert werden muß, heißt dann die Hopf-Invariante von  $f$ . Man kann zeigen, daß sie nur von der Homotopieklasse von  $f$  abhängt, siehe zum Beispiel [Vic94].

## 4.4 Differentielle graduierte Algebra

*Noch nicht ganz glatt. Man erinnere 3.4.15.*

**Definition 4.4.1.** Ein **differentieller graduierter Ring** oder kurz **dg-Ring** ist ein differentielle graduierte abelsche Gruppe  $R$  mit einer Kettenabbildung  $R \otimes R \rightarrow R$  derart, daß die induzierte Abbildung  $R \times R \rightarrow R$  die abelsche Gruppe  $R$  zu einem Ring macht. Ein **Morphismus von differentiellen graduierten Ringen** ist ein Ringhomomorphismus, der gleichzeitig eine Kettenabbildung ist.

4.4.2. Einen Ring  $R$  mit einer Graduierung der zugrundeliegenden additiven Gruppe und der Eigenschaft  $R_i R_j \subset R_{i+j} \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}$  nennt man einen **graduerten Ring**. Nach unserer Definition ist das dasselbe wie ein dg-Ring mit Differential Null. Ein dg-Ring ist ausgeschrieben ein graduierter Ring  $R$  mit einem Differential  $d : R \rightarrow R$  auf der zugrundeliegenden graduierten abelschen Gruppe derart, daß die graduierte Leibniz-Regel  $d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|}a(db)$  gilt.

*Übung 4.4.3.* In einem graduerten Ring gilt stets  $1 \in R_0$ . In einem dg-Ring gilt stets  $d(1) = 0$ .

4.4.4. Etwas allgemeiner mag man einen beliebigen kommutativen Grundring  $k$  fixieren. Eine **differentielle graduierte  $k$ -Ringalgebra** ist dann ein differentieller graduierter  $k$ -Modul  $R$  mit einer Kettenabbildung  $R \otimes_k R \rightarrow R$  derart, daß die induzierte Abbildung  $R \times R \rightarrow R$  den  $k$ -Modul  $R$  zu einer  $k$ -Ringalgebra macht. Ich werde mich im folgenden auf den Fall  $k = \mathbb{Z}$  der dg-Ringe konzentrieren und die offensichtlichen Verallgemeinerungen dem Leser überlassen.

*Ergänzung* 4.4.5. Leider paßt die in 2.2.13 erklärte Notation für Verknüpfungen mit unserer Notation 2.2.3 für Abbildungen partout nicht zusammen: Gegeben Mengen  $X, Y, Z$  liefert das Verknüpfen von Abbildungen eine Abbildung, die man in unseren Notationen entweder notieren kann als

$$\begin{aligned} \text{Ens}(X, Y) \times \text{Ens}(Y, Z) &\rightarrow \text{Ens}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

oder als

$$\begin{aligned} \text{Ens}(Y, Z) \times \text{Ens}(X, Y) &\rightarrow \text{Ens}(X, Z) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Beides sieht nicht schön aus und führt bei komplizierteren Formeln leicht zu unnötiger Verwirrung. Mir scheint das nachgerade die Erbsünde der üblichen mathematischen Notation. Ein Ausweg ist schwer zu finden, da beide Notationen die gesamte mathematische Literatur durchdringen. Ich schlage vor, wenn es später einmal darauf ankommt, zusätzlich die mit  $\circ$  besser verträgliche Notation  $\text{Eñs}$  einzuführen durch die Vorschrift  $\text{Eñs}(Y, X) := \text{Ens}(X, Y)$ . In dieser Notation nehmen unsere Formeln die schönere Gestalt

$$\begin{aligned} \text{Eñs}(Z, Y) \times \text{Eñs}(Y, X) &\rightarrow \text{Eñs}(Z, X) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

an. Sie hat darüber hinaus den Vorteil, daß man dabei an “opponierte Kategorien” denken kann. Ein anderer Ausweg bestünde darin, die Notationen  $x|f := f(x)$  und  $f|g := g \circ f$  mit dem aus der Programmierung vertrauten “pipe”-Zeichen  $|$  zu verwenden, das so etwa bedeutet “verfüttere das Resultat von dem, was davorsteht, an das, was dahintersteht”. Diese Notation wäre ihrerseits gut mit der üblichen Notation  $\text{Ens}(X, Y)$  verträglich, hat jedoch den Nachteil, daß das Symbol  $|$  in der Mathematik bereits vielfältig in anderer Weise verwendet wird.

4.4.6. In Anlehnung an 4.4.5 schlage ich vor, die Notation  $\text{Hòm}$  einzuführen durch die Vorschrift

$$\text{Hòm}(Y, X) := \text{Hom}(X, Y)$$

für Kettenkomplexe  $X, Y$ .

*Übung* 4.4.7. Gegeben Komplexe  $C, D, E$  von Moduln über einem beliebigen Ring liefert das Verknüpfen eine Kettenabbildung

$$\text{Hòm}(E, D) \otimes \text{Hòm}(D, C) \rightarrow \text{Hòm}(E, C)$$

Insbesondere ist für jede dg-Gruppe  $(M, d)$  der Endomorphismenkomplex  $\text{End } M = \text{Hom}(M, M)$  mit der Verknüpfung als Multiplikation ein dg-Ring. In größerer Allgemeinheit wird das in ?? diskutiert.

4.4.8. Die Homologie eines dg-Rings trägt nach 3.6.17 stets in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Rings. Genauer bilden die Kozykel einen graduierten Teilring und die Koränder ein graduiertes beidseitiges Ideal im Ring der Kozykel im Sinne von 2.1.2, so daß der Quotient wie in 2.1.8 eine Ringstruktur erbt.

**Definition 4.4.9.** Ein **differentieller graduierter Modul** oder kurz **dg-Modul** über einem dg-Ring  $A$  ist eine abelsche dg-Gruppe  $M$  mitsamt einem Homomorphismus von dg-Ringen  $A \rightarrow \text{End } M$ . Ein Homomorphismus von dg-Moduln ist eine  $A$ -lineare Kettenabbildung. Wir notieren die Kategorie der dg-Moduln als  $A\text{-dgMod}$  oder  $\text{dgMod}_A$ . Lebt der dg-Ring  $A$  nur im Grad Null, so erhalten wir unsere alte Kategorie von Komplexen von  $A$ -Moduln.

4.4.10. Homomorphismen von dg-Gruppen  $A \rightarrow \text{End } M$  können wir nach 3.4.13 identifizieren mit Homomorphismen von dg-Gruppen  $A \otimes M \rightarrow M$ , und unser ursprünglicher Homomorphismus ist ein Ringhomomorphismus genau dann, wenn der so gebildete Homomorphismus die Bedingungen erfüllt, die man üblicherweise von der Operation eines Rings auf einem Modul fordert. Ausgeschrieben bedeutet das, daß  $M$  ein graduierter  $A$ -Modul ist und daß für alle homogenen  $a \in A$  und  $m \in M$  die “graduierete Leibniz-Regel” gilt, die da lautet

$$d(am) = (da)m + (-1)^{|a|}a(dm)$$

**Definition 4.4.11.** Ist  $(A, d)$  ein dg-Ring, so definiert man den **opponierten dg-Ring**  $A^{\text{opp}}$ , indem man dieselbe dg-Gruppe zugrunde legt und nur die Multiplikation in der Weise abändert, daß man die Abbildung  $v : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$  aus 3.4.11 davorschaltet. Manchmal verwende ich statt  $A^{\text{opp}}$  auch die kürzere Notation  $A^\circ$ .

4.4.12. Explizit wird demnach die neue Multiplikation gegeben durch die Vorschrift  $a * b = (-1)^{|a||b|}ba$ . Die analoge Regel  $a * m = (-1)^{|a||m|}ma$  identifiziert dann dg-Moduln über  $A^{\text{opp}}$  mit “dg-Rechtsmoduln” über  $A$ , deren Definition hoffentlich offensichtlich ist. Ist die Identität auf einem dg-Ring ein Isomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} A^{\text{opp}}$ , d.h. gilt für alle homogenen  $a, b \in A$  die Regel  $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ , so heißt unser dg-Ring **graduieret kommutativ** oder auch **superkommutativ**.

*Ergänzende Übung 4.4.13.* Gegeben über einem  $\mathbb{Z}$ -graduerten Ring  $R$  ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Rechtsmodul  $M$  und ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Linksmodul  $N$  ist der Kern der Surjektion  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow M \otimes_R N$  stets ein im Sinne von 4.1.10 homogener Teilraum und folglich ist  $M \otimes_R N$  in natürlicher Weise  $\mathbb{Z}$ -graduieret. Ist  $R$  sogar ein dg-Ring und sind  $M$  und  $N$  beide dg-Moduln, so induziert das offensichtliche Differential auf  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$  ein Differential auf  $M \otimes_R N$ .

*Ergänzende Übung 4.4.14.* Gegeben dg-Moduln  $M, N$  über einem dg-Ring  $R$  ist die Menge der mit der Operation von  $R$  in hoffentlich offensichtlicher Weise

verträglichen Elemente des Hom-Komplexes  $\text{Hom}(M, N)$  aus 1.4.10 ein Unterkomplex  $\text{Hom}_R(M, N)$ . Die Nullzykel dieses Komplexes sind genau die Homomorphismen von dg-Moduln, in Verallgemeinerung von 1.4.10 gilt also

$$\text{dgMod}_R(M, N) = \mathcal{Z}^0 \text{Hom}_R(M, N)$$

Die Nullränder  $\mathcal{B}^0 \text{Hom}_R(M, N)$  dieses Komplexes nennen wir analog **nullhomotope** Homomorphismen von differentiellen graduierten Moduln über  $R$  und führen die Homotopiekategorie

$$R\text{-dgHot} = \text{dgHot}_R$$

ein dadurch, daß ihre Objekte  $R$ -dg-Moduln sein sollen, die Morphismen jedoch gegeben sein sollen durch  $\text{dgHot}_R(M, N) := \mathcal{H}^0 \text{Hom}_R(M, N)$ .

*Ergänzende Übung 4.4.15.* Gegeben dg-Rechtsmoduln  $M, N$  über einem dg-Ring  $R$  ist  $\text{Hom}_{-R}(M, N) \subset \text{Hom}(M, N)$  ein Unterkomplex des Hom-Komplexes. Ist  $S$  ein weiterer dg-Ring und ist  $M$  ein  $S$ - $R$ -dg-Bimodul, so ist unser Unterkomplex ein  $S$ -dg-Unterrechtsmodul des Hom-Komplexes mit seiner offensichtlichen und in ?? formalisierten  $S$ -Operation von rechts. Analoges gilt, wenn man Links und Rechts vertauscht.

*Ergänzende Übung 4.4.16.* Gegeben ein dg-Ring  $R$  liefert die Multiplikation des Rings von links auf sich selber analog zum Fall normaler Ringe 1.5.5 einen Isomorphismus von dg-Ringen  $R \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-R}(R, R)$  zwischen  $R$  selbst und dem Endomorphismenkomplex von  $R$  als dg-Rechtsmodul.

4.4.17. Unsere Adjunktion 3.4.13 liefert nach 3.9.12 insbesondere natürliche Kettenabbildungen von  $B$ -Rechtsmoduln  $\text{Hom}_{-B}(X, M) \otimes_A X \rightarrow M$ , die auch explizit als das ‘‘Auswerten von Homomorphismen auf Elementen’’ beschrieben werden können. Insbesondere erhalten wir so aus den Daten 3.4.15 für  $X, M \in \text{Ket}$  natürliche Kettenabbildungen

$$\text{Hom}(X, M) \otimes X \rightarrow M$$

*Übung 4.4.18.* Gegeben Komplexe  $C, C', D, D'$  von Moduln über einem kommutativen Ring erhalten wir eine Kettenabbildung

$$\gamma : \text{Hom}(C, C') \otimes \text{Hom}(D, D') \rightarrow \text{Hom}(C \otimes D, C' \otimes D')$$

durch die Vorschrift  $(\gamma(f \otimes g))(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|}(fx) \otimes (gy)$ , wobei das Tensorprodukt über besagtem Ring zu verstehen ist. Diese Kettenabbildung entsteht aus den Daten nach 3.4.15 durch das Anwenden der Adjunktion auf die durch zweimaliges Auswerten nach 4.4.17 gegebene Kettenabbildung

$$C \otimes D \otimes \text{Hom}(C, C') \otimes \text{Hom}(D, D') \rightarrow C' \otimes D'$$

wobei wir verschiedene Assoziatoren und Kommutatoren unterschlagen haben. Sie wird sich in ?? als Spezialfall einer allgemeinen Konstruktion im Rahmen von Tensorkategorien erweisen.

*Ergänzende Übung 4.4.19.* Hinweis: Diese Übung verfeinert 3.4.13. Gegeben dg-Ringe  $A, B$  und ein  $A$ - $B$ -dg-Bimodul  $X$  induziert für  $M$  bzw.  $N$  beliebige dg-Rechtsmoduln über  $A$  bzw.  $B$  die offensichtliche Abbildung Isomorphismen von Komplexen abelscher Gruppen

$$\mathrm{Hom}_{-A}(M, \mathrm{Hom}_{-B}(X, N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N)$$

Insbesondere erhalten wir durch Übergang zur nullten Homologie natürliche Bijektionen  $\mathrm{dgHot}_{-A}(M, \mathrm{Hom}_{-B}(X, N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{dgHot}_{-B}(M \otimes_A X, N)$ .

## 4.5 Die Homologie als Modul über der Kohomologie

**Definition 4.5.1.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  betrachten wir die Verknüpfung von Kettenabbildungen

$$S^*X \otimes SX \rightarrow S^*X \otimes SX \otimes SX \rightarrow SX$$

wobei der erste Morphismus gegeben wird durch  $\mathrm{id} \otimes v \Delta$  mit  $\Delta$  der Komultiplikation auf den singulären Ketten aus 4.3.1 und  $v$  der Vertauschung der Tensorfaktoren 3.4.11, der zweite Morphismus dahingegen durch das Auswerten  $S^*X \otimes SX \rightarrow \mathbb{Z}$  aus 4.4.17 auf den ersten beiden Tensorfaktoren. Diese Verknüpfung notieren wir

$$b \otimes z \mapsto b \cap z$$

und nennen sie das **cap-Produkt einer Kokette mit einer Kette**. Die Bezeichnung “cap” für englisch “Mütze” erinnert wieder an die Form des Symbols.

4.5.2. Algebraisch betrachtet ist also das cap-Produkt eine Art partieller Auswertung einer Kokette auf einer Kette. Ich kann für diese Konstruktion leider keinerlei Anschauung anbieten.

**Definition 4.5.3.** Gegeben ein dg-Ring  $R$  heißt eine differentielle graduierte Gruppe  $M$  mit einer Kettenabbildung  $R \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow M$ , die sie zu einem  $R$ -Modul macht, ein **differentieller graduierter Modul** oder kurz **dg-Modul** über unserem dg-Ring.

4.5.4. Das cap-Produkt macht  $SX$  zu einem dg-Modul über  $S^*X$ . Das prüft man zum Beispiel mit Hilfe der **Adjunktionsformel**

$$\langle a, b \cap z \rangle = \langle a \cup b, z \rangle \quad \forall z \in SX, a, b \in S^*X,$$

die ihrerseits leicht aus der Definition folgt. Explizit wird das cap-Produkt einer Kokette  $b \in S^q X$  mit einem Simplex  $z = \sigma : \Delta_{p+q} \rightarrow X$  in den Notationen 3.7.5 gegeben durch

$$b \cap \sigma = (-1)^{pq} \langle b, \sigma \rho^q \rangle \sigma \lambda^p$$

4.5.5. Ganz allgemein versteht man unter einem **graduerten Modul** über einem graduerten Ring  $R$  einen  $R$ -Modul  $M$  mitsamt einer Graduierung  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$  derart, daß gilt  $R^i M^j \subset M^{i+j}$  für alle  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Nach unserer Definition ist das dasselbe wie ein dg-Modul mit Differential Null über  $R$  aufgefaßt als dg-Ring mit Differential Null. Ein dg-Modul über einem beliebigen dg-Ring  $(R, d)$  ist ausgeschrieben ein graduierter  $R$ -Modul  $M$  mit Differential  $d$  derart, daß gilt  $d(am) = (da)m + (-1)^{|a|} a(dm)$  für alle homogenen  $a \in R$  und alle  $m \in M$ .

4.5.6. Nach 3.6.17 ist die Kohomologie  $\mathcal{H}M$  eines dg-Moduls  $M$  über einem dg-Ring  $R$  in natürlicher Weise ein graduierter Modul über der Kohomologie  $\mathcal{H}R$  von  $R$ . Konkret bilden die Zyklen  $\mathcal{Z}M = \ker d$  von  $M$  einen Modul über dem Ring  $\mathcal{Z}R$  der Zyklen von  $R$ , die Bilder  $\mathcal{B}M = d(M)$  bilden darin einen Untermodul, und auf dem Quotienten  $\mathcal{H}M = \mathcal{Z}M/\mathcal{B}M$  operiert das Ideal der Bilder  $\mathcal{B}R \subset \mathcal{Z}R$  durch Null, so daß die Operation von  $\mathcal{Z}R$  faktorisiert über die behauptete Operation von  $\mathcal{H}R$  auf  $\mathcal{H}M$ .

4.5.7. Unter unserem cap-Produkt wird  $SX$ , aufgefaßt als differentielle graduierte Gruppe mittels  $(S_q X) = (SX)^{-q}$  und Differential  $\partial$ , ein dg-Modul über  $S^* X$ . Speziell wird also nach 4.5.6 für jeden topologischen Raum  $X$  die **totale Homologie**  $HX = \bigoplus_q H_q X$  ein Modul über dem Kohomologiering  $H^* X$ . Wir notieren diese Operation auch mit  $\cap$  und erhalten so das **cap-Produkt auf der Homologie**

$$\cap : H^p X \times H_{p+q} X \rightarrow H_q X$$

*Übung 4.5.8.* Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $b \in H^p Y$  und  $z \in H_{p+q} X$ , so gilt die **Projektionsformel**  $f_*(f^* b \cap z) = b \cap (f_* z)$ .

4.5.9. Ist  $A \subset X$  eine Teilmenge, so ist  $S^*(X, A)$  als Kern des Ringhomomorphismus  $S^* X \rightarrow S^* A$  ein unter dem Korandoperator stabiles graduertes Ideal von  $S^* X$  und somit ist  $H^*(X, A)$  ein graduierter Rng, d.h. ein "nicht notwendig unitärer Ring", sowie ein  $H^* X$ -Modul von rechts und links. Des weiteren ist  $SA \subset SX$  ein dg-Untermodul für die Operation von  $S^* X$  und das cap-Produkt definiert somit eine Operation auf dem Kokern  $S(X, A)$ , in Formeln  $\cap : H^p X \times H_{p+q}(X, A) \rightarrow H_q(X, A)$ . Das Merkwürdigste ist jedoch die Variante

$$\cap : H^p(X, A) \times H_{p+q}(X, A) \rightarrow H_q X$$

Um sie zu erhalten gilt es zu bemerken, daß das dg-Ideal  $S^*(X, A) \subset S^* X$  den dg-Untermodul  $SA \subset SX$  annulliert.

Übung 4.5.10. Gegeben  $z \in H_{p+q}(X, A)$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) & \rightarrow & H^p X \\ \cap z \downarrow & & \downarrow \cap z \\ H_q X & \rightarrow & H_q(X, A) \end{array}$$

Übung 4.5.11. Gegeben  $X \supset A \supset B$  und  $z \in H_{p+q}(X, B)$  mit Bild  $\bar{z} \in H_{p+q}(X, A)$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) & \rightarrow & H^p(X, B) \\ \cap \bar{z} \downarrow & & \downarrow \cap z \\ H_q X & = & H_q X \end{array}$$

**Satz 4.5.12 (Poincaré-Dualität).** Für jede kompakte orientierte Mannigfaltigkeit definiert das cap-Produkt mit dem Fundamentalzykel einen Isomorphismus von ihrer Kohomologie mit ihrer Homologie.

4.5.13. Ist also in Formeln  $M$  eine kompakte orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $\omega \in H_n M$  ihr Fundamentalzykel, so liefert das cap-Produkt mit  $\omega$  für alle  $p$  einen Isomorphismus

$$\cap \omega : H^p M \xrightarrow{\sim} H_{n-p} M$$

4.5.14. Dieser Satz und sein Beweis gelten mit Koeffizienten in einem beliebigen kommutativen Ring. Gilt in unserem Ring  $1 + 1 = 0$ , so benötigt man noch nicht einmal die Voraussetzung der Orientierbarkeit.

4.5.15. Für zwei Homologieklassen komplementärer Dimension  $\alpha \in H_p M$  und  $\beta \in H_{n-p} M$  einer orientierten kompakten  $n$ -Mannigfaltigkeit ist hoffentlich anschaulich klar, was ihre "Schnittzahl"  $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Z}$  sein sollte, die die Schnittpunkte von repräsentierenden Zykeln "in generischer Lage" mit geeigneten, von der Orientierung abhängigen Vorzeichen zählt. Der Isomorphismus aus dem obigen Satz 4.5.12 liefert eine Definition solcher Schnittzahlen: Wir suchen  $a \in H^{n-p} M$ ,  $b \in H^p M$  mit  $\alpha = a \cap \omega_M$ ,  $\beta = b \cap \omega_M$  und setzen

$$\alpha \cdot \beta = \langle a \cup b, \omega_M \rangle$$

Wir werden unsere geometrische Interpretation der so definierten Schnittzahlen in 5.4.6 rechtfertigen. Ebenso zeigt die graduierte Kommutativität des cup-Produkts nach 4.2.6, daß für die Schnittzahlen in einer  $n$ -Mannigfaltigkeit gilt  $\alpha \cdot \beta = (-1)^{(n-|\alpha|)(n-|\beta|)} \beta \cdot \alpha$ . Nach der Adjunktionsformel  $\langle a \cup b, \omega_M \rangle = \langle a, b \cap \omega_M \rangle$  und unseren Definitionen entsprechen sich unter den Identifikationen der Poincaré-Dualität für einen beliebigen kommutativen Koeffizientenring die drei Paarungen

$$\begin{array}{lll} H_p(M; k) \times H_{n-p}(M; k) & \rightarrow k, & (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta \\ H^{n-p}(M; k) \times H_{n-p}(M; k) & \rightarrow k, & (a, \beta) \mapsto \langle a, \beta \rangle \\ H^{n-p}(M; k) \times H^p(M; k) & \rightarrow k, & (a, b) \mapsto \langle a \cup b, \omega_M \rangle \end{array}$$

Falls eine dieser Paarungen eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes oder das Umgekehrte induziert, so folgt dasselbe für die beiden anderen Paarungen. Haben wir etwa Koeffizienten in einem Körper oder ist  $H_{n-p-1}(M; \mathbb{Z})$  eine freie abelsche Gruppe, so liefert nach 4.1.11 oder 4.10.1 die Paarung in der Mitte eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes, und dasselbe folgt für die beiden anderen Paarungen.

4.5.16. Der Satz liefert uns auch allgemeiner eine Definition des Schnittprodukts auf der Homologie von  $M$ : Man überträgt schlicht das cup-Produkt auf der Kohomologie mithilfe der Isomorphismen aus dem Satz in die Homologie. Allerdings sind wir hier noch nicht in der Lage, die Brücke von dieser Definition bis zur Anschauung zu schlagen.

4.5.17. Um einen anschaulichen Beweis der Poincaré-Dualität zu geben, verallgemeinert man zunächst unseren Satz 2.4.3 über den Zusammenhang von singulärer und simplizialer Homologie von endlichen Simplizialkomplexen auf Räume, die statt aus Simplizes in ähnlicher Art aus komplizierten kompakten konvexen Polyedern zusammengesetzt sind, wie zum Beispiel die Oberflächen der platonischen Körper. So kann etwa die Homologie der Sphäre mithilfe einer Dodekaeder-Zerlegung berechnet werden durch einen Komplex der Gestalt  $\mathbb{Z}^{12} \rightarrow \mathbb{Z}^{30} \rightarrow \mathbb{Z}^{20}$  für die 12 Flächen, 30 Kanten und 20 Ecken. Gehen wir nun über zur “dualen” Zerlegung in kompakte konvexe Polyeder, im Beispiel zur Ikosaeder-Zerlegung der Sphäre in 20 Flächen mit 30 Kanten und 12 Ecken, so kann man den Komplex, der ursprünglich die Homologie berechnet, in natürlicher Weise identifizieren mit dem Komplex, der bezüglich dieser dualen Zerlegung die Kohomologie berechnet. Da aber Homologie und Kohomologie von der Zerlegung gänzlich unabhängig sind, ergibt sich  $H_i M \cong H^{n-i} M$  für jede orientierte kompakte triangulierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es ist nicht allzu schwer, diese Skizze zu einem richtigen Beweis auszubauen, siehe zum Beispiel [SZ94b]. Wir werden jedoch einen anderen Weg gehen, der Triangulierbarkeitsvoraussetzungen vermeidet und auch abgesehen davon zu allgemeineren Resultaten führt. Genauer wollen wir unseren Satz durch eine Art Induktion über alle offenen Teilmengen beweisen und werden dazu eine Version formulieren, die auch nichtkompakte Mannigfaltigkeiten einbezieht. Das benötigt einige algebraische Vorbereitungen.

*Übung 4.5.18.* Ist  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung von orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m, n$  und  $[Y] \in H_m(Y)$  der Fundamentalzykel und  $c_Y \in H^{n-m}(X)$  das Poincaré-Duale von  $f_*[Y] \in H_m(X)$ , also  $c_Y \cap [X] = f_*[Y]$ , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^\nu Y & \xleftarrow{f^*} & H^\nu X & \xrightarrow{U_{c_Y}} & H^{\nu+n-m} X \\ \downarrow \cap [Y] & & & & \downarrow \cap [X] \\ H_{m-\nu} Y & \xrightarrow{f_*} & & & H_{m-\nu} X \end{array}$$

Hinweis: 4.5.7 und 4.5.8. Das Daranmultiplizieren des Poincaré-Dualen des Fundamentalzykels einer Untermannigfaltigkeit kann also ausgedrückt werden durch Rückzug auf der Kohomologie, Poincaré-Dualität auf der Untermannigfaltigkeit und Bild auf der Homologie.

## 4.6 Ein Kriterium für Homotopieäquivalenzen

4.6.1. Um bequem unsere bisher bewiesenen Resultate von der Homologie auf die Kohomologie übertragen zu können, entwickeln wir in diesem Abschnitt zunächst noch weitere Methoden der homologischen Algebra.

**Definition 4.6.2.** Wir nennen einen Komplex **beschränkt in Richtung der Pfeile** genau dann, wenn wir in Richtung der Pfeile gehend ab einer Stelle nur noch  $C_q = 0$  treffen.

**Satz 4.6.3 (Kriterium für Homotopieäquivalenzen).** Sei  $R$  ein Ring und seien  $P, Q$  zwei in Richtung der Pfeile beschränkte Komplexe von projektiven  $R$ -Moduln. Induziert eine Kettenabbildung  $f : Q \rightarrow P$  Isomorphismen auf allen Homologiegruppen, so ist sie bereits eine Homotopieäquivalenz.

*Beweis.* Das folgt durch zweifaches Anwenden der anschließenden technischen Proposition 4.6.4.  $\square$

**Proposition 4.6.4.** Sei  $R$  ein Ring,  $P$  ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex von projektiven  $R$ -Moduln und  $C$  ein beliebiger Komplex von  $R$ -Moduln. Induziert eine Kettenabbildung  $f : C \rightarrow P$  Isomorphismen auf allen Homologiegruppen, so besitzt sie ein Rechtsinverses in der Homotopiekategorie, d.h. es gibt  $h : P \rightarrow C$  mit  $fh \simeq \text{id}_P$ .

*Beweis.* Wir konstruieren für eine beliebige Kettenabbildung  $f : C \rightarrow P$  einen Komplex  $K = K(f)$ , den sogenannten **Abbildungskegel** von  $f$  wie folgt: Wir setzen  $K_n = C_{n-1} \oplus P_n$ , fassen die Elemente dieser Summe als Spaltenvektoren auf und definieren den Randoperator  $\partial^K : K_n \rightarrow K_{n-1}$  durch die Matrix

$$\partial^K = \begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix}$$

Man prüft mühelos  $\partial^K \circ \partial^K = 0$ . Bezeichnet  $[1]C$  wie in 3.6.24 den verschobenen Komplex mit  $([1]C)_n = C_{n-1}$  und Randoperator  $\partial^{[1]C} = -\partial^C$ , so ergibt sich mit den offensichtlichen Abbildungen eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$P \hookrightarrow K(f) \twoheadrightarrow [1]C$$

und man überzeugt sich, daß der Randoperator der zugehörigen langen exakten Homologiesequenz gerade  $\mathcal{H}_n f : \mathcal{H}_n C \rightarrow \mathcal{H}_n P$  ist. Ist speziell  $\mathcal{H}_n f$  ein Isomorphismus für alle  $n$ , so ist der Abbildungskegel  $K(f)$  exakt nach der langen exakten Homologiesequenz, und ist zusätzlich  $P$  ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex von projektiven  $R$ -Moduln, so ist nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra 3.6.10 die Kettenabbildung  $P \hookrightarrow K(f)$  nullhomotop. Setzen wir so eine Homotopie an als Spaltenmatrix  $(h, \delta)^\top$ , so ergibt sich die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} \partial^P = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_P \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren bedeutet die erste Zeile, daß  $h : P \rightarrow C$  eine Kettenabbildung ist, und die zweite, daß  $fh$  homotop ist zur Identität auf  $P$ .  $\square$

*Übung 4.6.5.* Hat ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex  $C$  von projektiven  $R$ -Moduln projektive Homologie, so ist er homotopieäquivalent zu seiner Homologie. Fassen wir genauer die Homologie  $\mathcal{H}C$  wie auch anderweitig auf als Komplex mit trivialen Differentialen, so gibt es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe genau einen Isomorphismus  $\mathcal{H}C \xrightarrow{\sim} C$ , der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation  $\mathcal{H}(\mathcal{H}C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}C$  induziert.

## 4.7 Eigenschaften der Kohomologie

**Satz 4.7.1 (Homotopie-Invarianz der Kohomologie).** *Homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen induzieren dieselbe Abbildung auf der Kohomologie.*

*Beweis.* Sind  $f$  und  $g$  homotop,  $f \simeq g$ , so sind nach 1.4.8 die induzierten Abbildungen  $Sf$  und  $Sg$  kettenhomotop,  $Sf \simeq Sg$ . Dasselbe gilt dann auch für die transponierten Abbildungen auf den Koketten,  $S^*f \simeq S^*g$ , und so erhalten wir wie gewünscht  $H^q(f) = H^q(g)$ .  $\square$

**Lemma 4.7.2.** *Sind alle Homologiegruppen eines topologischen Raums  $X$  mit Koeffizienten in einem Ring  $k$  freie Linksmodule über  $k$ , so induziert die Kronecker-Paarung mit Koeffizienten für jeden  $k$ -Modul  $G$  Isomorphismen*

$$H^q(X; G) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_k(H_q(X; k), G)$$

*Beweis.* Nach 4.6.5 ist unter unseren Voraussetzungen der Komplex  $S(X; k)$  als Komplex von Linksmodule homotop zu seiner Homologie  $H(X; k)$ . Also ist natürlich auch der Komplex  $S^*(X; G) = \text{Hom}_k(S(X; k), G)$  homotop zum Komplex  $\text{Hom}_k(H(X; k), G)$ .  $\square$

4.7.3. Die Kohomologie eines topologischen Raums  $X$  mit Koeffizienten in einem Körper  $k$  ist insbesondere schlicht der Dualraum der Homologie, in Formeln  $H^q(X; k) = H_q(X; k)^*$ . Wenden wir das Lemma an mit  $k = \mathbb{Z}$ , so erhalten wir insbesondere Formeln für die Kohomologie eines Punktes und die Kohomologie von Sphären mit beliebigen Koeffizienten.

4.7.4. Schon wenn  $X$  und  $Y$  unendliche diskrete Mengen sind, ist das Analogon der Künneth-Formel 3.6.20 für die Kohomologie falsch, selbst mit Koeffizienten in einem Körper. Nehmen wir jedoch an, alle Homologie-Gruppen des Raums  $X$  seien frei oder, noch allgemeiner, projektiv über dem gewählten Koeffizientenring, so haben wir ja nach 4.6.5 einen kanonischen Isomorphismus  $SX \xrightarrow{\sim} HX$  in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe. Nehmen wir dann zusätzlich für den vorletzten Isomorphismus alle Homologiegruppen von  $X$  als endlich erzeugt an, so erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$S^*(X \times Y) \xrightarrow{\sim} (SX \otimes SY)^* \xrightarrow{\sim} (HX \otimes SY)^* \xrightarrow{\sim} (HX)^* \otimes S^*Y \xleftarrow{\sim} (H^*X \otimes S^*Y)$$

und man sieht unschwer ein, daß der auf der Kohomologie in der Gegenrichtung induzierte Isomorphismus  $H^*X \otimes H^*Y \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y)$  gerade das Kreuzprodukt sein muß.

*Übung 4.7.5.* In dieser Übung ist  $H^q(X)$  eine Abkürzung für  $H^q(X; G)$  mit beliebigen aber festen Koeffizienten  $G$ . Sei  $X = \bigsqcup X_w$  eine Zerlegung von  $X$  in paarweise disjunkte offene Teilmengen und  $i_w : X_w \hookrightarrow X$  die jeweilige Einbettung. So definieren die  $H^q(i_w) : H^q(X) \rightarrow H^q(X_w)$  einen Isomorphismus  $H^q(X) \xrightarrow{\sim} \prod H^q(X_w)$ . Dasselbe gilt allgemeiner, wenn wir nur fordern, daß es für  $v \neq w$  keinen Weg von einem Punkt aus  $X_v$  zu einem Punkt aus  $X_w$  gibt.

4.7.6. Wir definieren weiter die **relative Kohomologie** eines Paares als die Kohomologie des Komplexes  $S^q(X, A; G) = \text{Ab}(S_q(X, A), G)$  der **relativen Koketten** und erhalten so einen Funktor

$$H^q : \{\text{Raumpaare}\} \rightarrow \{\text{Abelsche Gruppen}\}^{\text{opp}}$$

Lemma 4.7.2 gilt mit demselben Beweis auch für die relative Kohomologie. Gegeben ein Raumpaar  $(X, A)$  liefern die (spaltenden) kurzen exakten Sequenzen  $S_q A \hookrightarrow S_q X \rightarrow S_q(X, A)$  mittels Dualisierung kurze exakte Sequenzen  $S^q A \leftarrow S^q X \leftarrow S^q(X, A)$ . Die kurze exakte Sequenz der Komplexe der singulären Koketten liefert wiederum die **lange exakte Kohomologiesequenz**

$$0 \rightarrow H^0(X, A) \rightarrow H^0 X \rightarrow H^0 A \rightarrow H^1(X, A) \rightarrow \dots$$

mit einem im Raumpaar  $(X, A)$  natürlichen Randoperator. Dasselbe gilt auch mit beliebigen Koeffizienten. Wir übertragen beispielhaft noch einige weitere Aussagen auf die Kohomologie.

**Satz 4.7.7 (Ausschneidung für die Kohomologie).** Ist  $(X, A)$  ein Raumpaard und  $V \subset A$  eine Teilmenge mit  $\bar{V} \subset A^\circ$ , so liefert die Einbettung von Raumpaaren  $i : (X \setminus V, A \setminus V) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf den relativen Kohomologiegruppen

$$H^q(X, A) \xrightarrow{\sim} H^q(X \setminus V, A \setminus V)$$

*Beweis.* Nach dem Ausschneidungssatz 2.3.18 induziert die von der Einbettung herkommende Kettenabbildung  $S_i : S(X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow S(X, A)$  Isomorphismen auf der Homologie und ist mithin nach 4.6.3 eine Homotopieäquivalenz. Dann ist natürlich auch die transponierte Abbildung  $S^*i : S^*(X, A) \rightarrow S^*(X \setminus V, A \setminus V)$  eine Homotopieäquivalenz und induziert Isomorphismen auf der Kohomologie.  $\square$

4.7.8. Geht man in der Herleitung der Mayer-Vietoris-Sequenz und der relativen Mayer-Vietoris-Sequenz in 2.3.19 und 2.3.21 aus kurzen exakten Sequenzen von komplexen freier abelscher Gruppen zuerst zu den dualen Kettenkomplexen über und bildet erst dann die lange exakte Homologiesequenz, so erhält man lange exakte Sequenzen von Kohomologiegruppen, genannt die **Mayer-Vietoris-Sequenz** und die **relative Mayer-Vietoris-Sequenz der Kohomologie**.

4.7.9. Ist  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex, so besteht die obere Zeile des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} S\mathcal{K} & \leftarrow & S^s\Delta(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{K}) \\ & \searrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & S^{os}\Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

aus 2.4.3 nach 4.6.3 aus Homotopieäquivalenzen, und wählen wir zusätzlich eine Anordnung auf den Ecken, so ist auch der Komplex  $S^{os}\Delta(\mathcal{K})$  der ordnungsverträglichen simplicialen Ketten definiert und das ganze Diagramm besteht aus Homotopieäquivalenzen. Folglich erhalten wir durch Anwenden von  $\text{Hom}(\_, \mathbb{Z})$  wieder ein kommutatives Diagramm von Homotopieäquivalenzen, das wir

$$\begin{array}{ccccc} S^*\mathcal{K} & \rightarrow & S_s^*\Delta(\mathcal{K}) & \leftarrow & S^*\Delta(\mathcal{K}) \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & S_{os}^*\Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

notieren und das Isomorphismen zwischen den Kohomologiegruppen dieser Komplexe liefert. Die Elemente von  $S_{os}^q\Delta(\mathcal{K})$  kann man auffassen als unendliche formale Linearkombinationen von ordnungsverträglichen  $q$ -Simplizes, formal haben wir eine kanonische Bijektion  $S_{os}^q\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(\mathcal{K}_q, \mathbb{Z})$ . Der Korandoperator ordnet einem  $q$ -Simplex die formale Summe mit geeigneten Vorzeichen aller  $(q+1)$ -Simplizes zu, die unseren  $q$ -Simplex enthalten. Ähnlich kann man die Gruppe der **Simplicialketten**  $S^q\mathcal{K}$  identifizieren mit der Gruppe aller Abbildungen  $f : \mathcal{K}_q^{\leq} \rightarrow \mathbb{Z}$  von der Menge aller angeordneten  $q$ -Simplizes nach  $\mathbb{Z}$  mit

der Eigenschaft  $f(\sigma \circ \pi) = (\text{sgn } \pi)f(\sigma)$  für alle Permutationen  $\pi \in \mathcal{S}_{q+1}$ . Zur Übung empfehle ich, diese **simpliziale Kohomologie** für eine Triangulierung der reellen Zahlengerade explizit zu berechnen.

## 4.8 Erweiterungen von abelschen Gruppen

4.8.1. Um unsere Kohomologiegruppen aus den Homologiegruppen berechnen zu können, brauchen wir **Erweiterungen**. Unter einer Erweiterung einer abelschen Gruppe  $M$  durch eine abelsche Gruppe  $N$  versteht man zunächst einmal eine kurze exakte Sequenz  $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$ . Eine zweite solche Erweiterung  $N \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow M$  heißt **isomorph** zu unserer ersten Erweiterung genau dann, wenn es einen Isomorphismus  $E \xrightarrow{\sim} E'$  gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ N & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

zum Kommutieren bringt. Wir werden uns im folgenden überlegen, daß die Isomorphieklassen von derartigen Erweiterungen eine Menge, ja sogar in natürlicher Weise eine abelsche Gruppe bilden, und wie wir diese Gruppe zu gegebenen  $M$  und  $N$  effektiv berechnen können. Die eigentliche Arbeit beginnen wir mit einem etwas künstlichen aber formal einfacheren Zugang zu besagter Gruppe. Das Ausarbeiten des Zusammenhangs zum hier nur skizzierten namensgebenden Zugang überlasse ich dem Leser als Übung 4.8.6.

**Definition 4.8.2.** Gegeben ein Homomorphismus von abelschen Gruppen  $f : A \rightarrow B$  definiert man seinen **Kokern** als die abelsche Gruppe

$$\text{cok } f = B/(\text{im } f)$$

**Definition 4.8.3.** Gegeben zwei abelsche Gruppen  $M$  und  $N$  erklären wir eine dritte abelsche Gruppe  $\text{Ext}(M, N)$  durch die Vorschrift

$$\text{Ext}(M, N) := \text{cok}(\text{Hom}(\mathbb{Z}M, N) \rightarrow \text{Hom}(KM, N))$$

für  $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$  die Standardauflösung von  $M$  aus 3.4.4. Sie heißt die Gruppe der **Erweiterungen von  $M$  durch  $N$** . Die Notation rührt her von der englischen und französischen Bezeichnung “**extension**”.

4.8.4. Offensichtlich ist  $\text{Ext}$  ein kovarianter Funktor in der zweiten und ein kontravarianter Funktor in der ersten Variablen. Ist  $M$  frei, so spaltet die Sequenz  $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$  und wir folgern  $\text{Ext}(M, N) = 0$  für alle  $N$ .

4.8.5. Wir können unsere Definition auch dahingehend umschreiben, daß wir den Komplex  $\mathcal{P}M$  mit  $\mathcal{P}_1M = KM$  und  $\mathcal{P}_0M = \mathbb{Z}M$  und  $\mathcal{P}_qM = 0$  für  $q \neq 0, 1$  aus 3.4.4 betrachten und  $N = N[0]$  als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen und im Sinne von 1.4.10 den Hom-Komplex  $\text{Hom}(\mathcal{P}M, N[0])$  bilden. Damit erhalten wir dann die Darstellung

$$\text{Ext}(M, N) = \mathcal{H}_{-1} \text{Hom}(\mathcal{P}M, N[0])$$

Andererseits definiert die Surjektion  $\mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$  offensichtlich einen Isomorphismus

$$\text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0 \text{Hom}(\mathcal{P}M, N[0])$$

Da nun nach 3.5.7 der Komplex  $\mathcal{P}M$  aus freien abelschen Gruppen besteht, liefert jede kurze exakte Sequenz  $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$  von abelschen Gruppen eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\text{Hom}(\mathcal{P}M, N'[0]) \hookrightarrow \text{Hom}(\mathcal{P}M, N[0]) \twoheadrightarrow \text{Hom}(\mathcal{P}M, N''[0])$$

und die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert mit den eben angegebenen Identifikationen eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}(M, N') & \hookrightarrow & \text{Hom}(M, N) & \twoheadrightarrow & \text{Hom}(M, N'') & \rightarrow & & & \\ & & \rightarrow & & \text{Ext}(M, N') & \rightarrow & \text{Ext}(M, N) & \rightarrow & \text{Ext}(M, N'') & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Sie heißt die lange exakte **Ext-Sequenz im zweiten Eintrag**.

*Übung 4.8.6.* Man zeige, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Erweiterungen von } M \text{ durch } N \\ \text{im Sinne von 4.8.1,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \text{Ext}(M, N)$$

erhalten, indem wir jeder kurzen exakten Sequenz  $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$  das Bild in  $\text{Ext}(M, N)$  der Identität auf  $M$  unter dem Randoperator der zugehörigen Ext-Sequenz im zweiten Eintrag zuordnen. Hinweis: Gegeben  $e \in \text{Ext}(M, N)$  wähle man einen Repräsentanten  $\tilde{e} : KM \rightarrow N$  und bilde durch pushout in die Mitte im Sinne von 4.9.6 ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} KM & \hookrightarrow & \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

## 4.9 Injektive abelsche Gruppen

**Definition 4.9.1.** Ein Modul  $I$  über einem Ring heißt **injektiv** genau dann, wenn gegeben irgendein weiterer Modul  $M$  über unserem Ring und darin ein Untermodul  $U \subset M$  sich jeder Modulhomomorphismus  $U \rightarrow I$  zu einem Modulhomomorphismus  $M \rightarrow I$  ausdehnen läßt.

4.9.2. In Formeln heißt also ein  $R$ -Modul  $I$  injektiv genau dann, wenn für jede Injektion  $i : U \hookrightarrow M$  von  $R$ -Moduln das Vorschalten eine Surjektion  $(\circ i) : \text{Mod}_R(M, I) \twoheadrightarrow \text{Mod}_R(U, I)$  liefert.

*Beispiele 4.9.3.* Ist  $k$  ein Körper, so ist jeder  $k$ -Modul injektiv als  $k$ -Modul, aber natürlich nicht notwendig als abelsche Gruppe. Einen injektiven  $\mathbb{Z}$ -Modul nennen wir eine **injektive abelsche Gruppe**. Die abelsche Gruppe  $\mathbb{Q}$  ist injektiv, wie die gleich anschließende Proposition 4.9.5 zeigt. Alternativ können wir auch argumentieren, daß gilt  $\text{Ab}(M, \mathbb{Q}) = \text{Mod}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M, \mathbb{Q})$  nach ?? und daß die rechte Seite ein exakter Funktor in  $M$  ist nach 3.2.20.

**Definition 4.9.4.** Eine abelsche Gruppe heißt **divisibel** genau dann, wenn für jede von Null verschiedene ganze Zahl  $n$  der durch die Multiplikation mit dieser Zahl gegebene Endomorphismus unserer Gruppe surjektiv ist.

**Proposition 4.9.5.** 1. Eine abelsche Gruppe  $I$  ist injektiv genau dann, wenn gilt  $\text{Ext}(M, I) = 0$  für alle  $M$ .

2. Eine abelsche Gruppe ist injektiv genau dann, wenn sie divisibel ist.

3. Jeder Quotient einer injektiven abelschen Gruppe ist injektiv.

4. Jede abelsche Gruppe läßt sich in eine Injektive einbetten.

4.9.6. Analoges gilt mit einem analogen Beweis auch für Moduln über beliebigen Hauptidealringen. Der folgende Beweis verwendet die Konstruktion des “push-out in der Kategorie der abelschen Gruppen”: Gegeben Homomorphismen abelscher Gruppen  $\phi : A \rightarrow B$  und  $\psi : A \rightarrow C$  bildet man die abelsche Gruppe  $P = (B \oplus C) / \{(\phi(a), -\psi(a)) \mid a \in A\}$  mit den durch die Einbettungen induzierten Morphismen  $B \rightarrow P$  und  $C \rightarrow P$  und erhält so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \rightarrow & P \end{array}$$

von abelschen Gruppen. Die Gruppe  $P$  oder genauer die “Hälfte dieses Diagramms unterhalb der Linie durch  $B$  und  $C$ ” heißt der **push-out** der Hälfte oberhalb besagter Linie. Im Rahmen der Kategorientheorie in 2.1.11 mag man die

universelle Eigenschaft kennenlernen, die push-outs in beliebigen Kategorien charakterisiert. In unserem speziellen Fall erkennt man leicht, daß die Injektivität eines Ausgangspfeils die Injektivität des dazu parallelen Pfeils in den push-out impliziert und daß die Surjektivität eines Ausgangspfeils gleichbedeutend ist zur Surjektivität des dazu parallelen Pfeils in den push-out, in Formeln  $(A \hookrightarrow B) \Rightarrow (C \hookrightarrow P)$  und  $(A \twoheadrightarrow B) \Leftrightarrow (C \twoheadrightarrow P)$ . Vergleiche auch Übung 2.1.14.

*Beweis.* 1. Für  $I$  injektiv folgt  $\text{Ext}(M, I) = 0$  aus der Definition. Sei umgekehrt  $I$  eine abelsche Gruppe mit  $\text{Ext}(M, I) = 0$  für alle  $M$ . Gegeben eine Injektion  $B' \hookrightarrow B$  gilt es, jeden Morphismus  $B' \rightarrow I$  zu einem Morphismus  $B \rightarrow I$  auszudehnen. Dazu bilden wir den push-out

$$\begin{array}{ccc} B' & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

mit einer Injektion in der unteren Horizontalen nach 4.9.6. Vervollständigen wir diese untere Horizontale zu einer kurzen exakten Sequenz  $I \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow K$  und bilden dazu die Ext-Sequenz im zweiten Eintrag 4.8.5 mit  $M = K$ , so folgt, daß die Surjektion  $Y \twoheadrightarrow K$  spaltet alias ein Rechtsinverses besitzt. Mit 2.2.10 folgt, daß dann auch die Injektion  $I \hookrightarrow Y$  spaltet, und ein Linksinverses  $Y \rightarrow I$  dazu liefert dann die gewünschte Ausdehnung.

2. Ist  $I$  injektiv, so induziert für alle  $n \neq 0$  die Injektion  $(n \cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$  eine Surjektion  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, I) \twoheadrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, I)$  alias  $(n \cdot) : I \twoheadrightarrow I$ . Jede injektive abelsche Gruppe ist also divisibel. Die Umkehrung zeigen wir mit dem Zorn'schen Lemma. Sei  $I$  divisibel,  $A' \subset A$  eine Untergruppe und  $\varphi' : A' \rightarrow I$  ein Homomorphismus. Es gilt,  $\varphi'$  auf ganz  $A$  auszudehnen. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare  $(A_1, \varphi_1)$  mit  $A_1$  einer Untergruppe von  $A$  oberhalb von  $A'$  und  $\varphi_1$  einer Fortsetzung von  $\varphi'$  auf  $A_1$ . Die Menge aller derartigen Paare ist in offensichtlicher Weise induktiv geordnet, wir finden also eine maximale Ausdehnung  $(A_{\max}, \varphi_{\max})$ . Wäre hier nicht  $A_{\max} = A$ , so könnten wir ein  $a$  im Komplement wählen und das pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_{\max} \cap \langle a \rangle & \hookrightarrow & \langle a \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\max} & \hookrightarrow & A_{\max} + \langle a \rangle \end{array}$$

bilden. Da  $I$  divisibel ist, können wir die Einschränkung von  $\varphi_{\max}$  längs der linken Vertikale ausdehnen längs der oberen Horizontale zu sagen wir  $\varphi_a : \langle a \rangle \rightarrow I$ , und  $\varphi_{\max}$  und  $\varphi_a$  zusammen liefern dann eine Ausdehnung von  $\varphi_{\max}$  auf den pushout. Das aber widerspräche der Maximalität unserer Ausdehnung.

3. Das folgt direkt aus 2, oder auch aus 1 mit der Ext-Sequenz 4.8.5.

4. Eine derartige Einbettung liefert nach 3 die rechte Vertikale des kokartesischen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}M & \twoheadrightarrow & I \end{array}$$

Daß die untere Horizontale eine Surjektion und die rechte Vertikale eine Injektion ist, folgt aus der expliziten Konstruktion des pushout nach 4.9.6.  $\square$

4.9.7. Ist  $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist  $M$  ein weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\text{Hom}(M, N') \hookrightarrow \text{Hom}(M, N) \twoheadrightarrow \text{Hom}(M, N'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein. Ist jedoch  $M$  frei, so ist auch der rechte Pfeil offensichtlich wieder eine Surjektion und unsere Sequenz folglich exakt. Ist ähnlich  $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist  $N$  ein weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\text{Hom}(M'', N) \hookrightarrow \text{Hom}(M, N) \twoheadrightarrow \text{Hom}(M', N)$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß ebensowenig eine Surjektion sein. Unsere Erweiterungsgruppen sind in gewisser Weise Korrekturterme für diese Phänomene. Im ersten Fall ist das die Bedeutung von 4.8.5. Wir zeigen es nun im zweiten Fall.

4.9.8. Gegeben eine abelsche Gruppe  $N$  betrachten wir die kurze exakte Sequenz  $N \hookrightarrow I_N \twoheadrightarrow C_N$  mit der im letzten Schritt des Beweises von 4.9.5 als pushout konstruierten Einbettung von  $N$  in eine injektive Gruppe  $I = I_N$  als erstem Pfeil und dem Kokern dieser Einbettung als zweitem Pfeil. Den Zwischritt komplex  $I_N \twoheadrightarrow C_N$  in Graden Null und  $(-1)$  notieren wir  $\mathcal{I}N$ . Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$  erhält man nun wegen der Injektivität der Einträge  $\mathcal{I}N$  eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\text{Hom}(M'', \mathcal{I}N) \hookrightarrow \text{Hom}(M, \mathcal{I}N) \twoheadrightarrow \text{Hom}(M', \mathcal{I}N)$$

Die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert mit den durch die Homologiesequenz im zweiten Eintrag gegebenen Identifikationen eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}(M'', N) & \hookrightarrow & \text{Hom}(M, N) & \twoheadrightarrow & \text{Hom}(M', N) & \rightarrow \\ & & \rightarrow & & \text{Ext}(M, N) & \twoheadrightarrow & \text{Ext}(M', N) & \rightarrow 0 \end{array}$$

Sie heißt die lange exakte **Ext-Sequenz im ersten Eintrag**.

*Übung 4.9.9.* Ähnlich wie im Fall der Torsionsgruppen zeige man, daß gegeben abelsche Gruppen  $M, N$  die von  $\mathcal{P}M \rightarrow M[0]$  und  $N[0] \hookrightarrow \mathcal{I}N$  induzierten Kettenabbildungen

$$\mathrm{Hom}(M[0], \mathcal{I}N) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{P}M, \mathcal{I}N) \leftarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{P}M, N[0])$$

auf der Homologie Isomorphismen induzieren.

4.9.10. Für jede abelsche Gruppe  $N$  und jede natürliche Zahl  $m \neq 0$  liefert der Randoperator der Ext-Sequenz im ersten Eintrag zur kurzen exakten Sequenz  $\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  einen Isomorphismus

$$N/mN \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$$

*Übung 4.9.11.* Gegeben eine abelsche Gruppe  $M$  und eine Familie von abelschen Gruppen  $(N_i)$  ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}\left(M, \prod N_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod \mathrm{Ext}(M, N_i)$$

*Übung 4.9.12.* Gegeben eine Familie von abelschen Gruppen  $(M_i)$  und eine abelsche Gruppe  $N$  ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}\left(\bigoplus M_i, N\right) \xrightarrow{\sim} \prod \mathrm{Ext}(M_i, N)$$

*Übung 4.9.13.* Gilt  $\mathrm{Ext}(P, N) = 0$  für alle  $N$ , so ist  $P$  frei. Kann im allgemeinen  $\mathrm{Ext}(M, N)$  Elemente unendlicher Ordnung enthalten?

4.9.14. Eine berühmte **Vermutung von Whitehead** dahingehend, daß für abelsche Gruppen  $A$  gilt

$$\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow A \text{ frei}$$

ist von Shelah [She74] in ganz absonderlicher Weise “gelöst” worden: Ob die Vermutung stimmt oder nicht, hängt von den Axiomen der Mengenlehre ab, die man zugrunde legt!

## 4.10 Koeffizientenwechsel in der Kohomologie

**Satz 4.10.1 (Universelles Koeffiziententheorem der Kohomologie).** *Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $G$  eine abelsche Gruppe, so haben wir natürliche kurze exakte Sequenzen*

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{q-1}X, G) \hookrightarrow \mathrm{H}^q(X; G) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_qX, G)$$

*die in unnatürlicher Weise spalten.*

*Übung 4.10.2.* Dasselbe gilt mit demselben Beweis auch in der relativen Kohomologie. Man prüfe es explizit im Fall der relativen Kohomologie des Möbiusbands relativ zu seinem Randkreis. Hinweis: 2.6.7.

*Ergänzung 4.10.3.* Will man aus Homologie eines topologischen Raums  $X$  mit Koeffizienten in einem Ring  $k$  die Kohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in einem  $k$ -Modul  $G$  berechnen, so leistet das im allgemeinen eine “Spektralsequenz mit  $E_2$ -Term  $\text{Ext}_k^i(H_j(X; k), G)$ ”. In unserem speziellen Fall  $k = \mathbb{Z}$  verschwinden alle Erweiterungen ab Grad zwei, wir notieren  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Ext}$  und besagte Spektralsequenz degeneriert zur Aussage des obigen Satzes. Das gilt allgemeiner nach 3.5.7 für  $k$  einen Hauptidealring oder ganz allgemein für alle Ringe derart, daß jeder Untermodul eines projektiven Moduls projektiv ist. Derartige Ringe heißen **erbliche Ringe**, da sich bei ihnen “die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt”.

*Ergänzung 4.10.4.* Kaplansky hat ein Beispiel für einen erblichen Ring gefunden, dessen opponierter Ring nicht erblich ist. Man müßte also eigentlich genauer von **linkserblichen** und **rechtserblichen Ringen** reden.

*Beweis.* Wir betrachten die kurze exakte Sequenz  $G \hookrightarrow I_G \rightarrow C_G$  mit injektiven  $I_G$  und  $C_G$  aus 4.9.8. Sie führt zu einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen

$$\text{Hom}(SX, G) \hookrightarrow \text{Hom}(SX, I_G) \rightarrow \text{Hom}(SX, C_G)$$

Da  $I_G$  und  $C_G$  injektiv sind, sind die Funktoren  $\text{Hom}(\_, I_G)$  und  $\text{Hom}(\_, C_G)$  exakt und “kommutieren” folglich mit dem Bilden der Homologie in derselben Weise, wie wir das in 3.3.1 für das Tensorieren mit torsionsfreien Moduln gesehen hatten. Von der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz ist also ein Ausschnitt

$$\begin{array}{ccccccc} & & \rightarrow & \text{Hom}(H_{q-1}X, I_G) & \rightarrow & \text{Hom}(H_{q-1}X, C_G) & \rightarrow \\ \rightarrow & H^q(X; G) & \rightarrow & \text{Hom}(H_qX, I_G) & \rightarrow & \text{Hom}(H_qX, C_G) & \rightarrow \end{array}$$

und die Ext-Sequenz im zweiten Eintrag liefert uns wie gewünscht kurze exakte Sequenzen

$$\text{Ext}(H_{q-1}X, G) \hookrightarrow H^q(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_qX, G)$$

Es bleibt zu zeigen, daß unsere Sequenzen spalten. So eine Spaltung folgt aber wie zu Ende des Beweises von 3.5.2 aus der Existenz einer Spaltung der Einbettung  $Z_qX \hookrightarrow S_qX$ : Solch eine Spaltung  $S_qX \rightarrow Z_qX$  induziert durch eine Abbildung  $\text{Hom}(H_qX, G) \hookrightarrow \text{Hom}(Z_qX, G) \rightarrow S^q(X; G)$ , die in  $Z^q(X; G)$  landet.  $\square$

*Ergänzung 4.10.5.* Sei allgemeiner  $C_*$  irgendein Komplex von freien abelschen Gruppen und  $G$  eine weitere abelsche Gruppe. So liefert dasselbe Argument unkanonisch spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\text{Ext}(\mathcal{H}_{q-1}C_*, G) \hookrightarrow \mathcal{H}^q \text{Hom}(C_*, G) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_qC_*, G)$$

## 5 Poincaré-Dualität und Schnittpaarung

### 5.1 Limites und Kolimites

**Definition 5.1.1.** Sei  $(I, \geq)$  eine partiell geordnete Menge. Ein **durch  $I$  indiziertes System in einer Kategorie  $\mathcal{C}$**  ist eine Familie  $\{M_i\}_{i \in I}$  von Objekten mitsamt Morphismen  $\varphi_{ji} : M_i \rightarrow M_j$  für alle  $j \geq i$  derart, daß gilt  $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$  wann immer  $k \geq j \geq i$ , und daß gilt  $\varphi_{ii} = \text{id}$  für alle  $i$ .

**Definition 5.1.2.** Ein **Kolimes** eines Systems ist ein Objekt  $L$  mitsamt Morphismen  $\text{can}_i : M_i \rightarrow L$  derart, daß gilt  $\text{can}_j \circ \varphi_{ji} = \text{can}_i$  für  $j \geq i$  und daß die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist: Gegeben ein Objekt  $N$  mitsamt Morphismen  $f_i : M_i \rightarrow N$  derart, daß gilt  $f_j \circ \varphi_{ji} = f_i$  wann immer  $j \geq i$ , gibt es genau einen Morphismus  $f : L \rightarrow N$  mit  $f_i = f \circ \text{can}_i$  für alle  $i$ . Wie üblich legt die universelle Eigenschaft das Datum  $(L, (\text{can}_i)_{i \in I})$  fest bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir schreiben für “den” Kolimes der  $M_i$  kurz

$$L =: \text{colim } M_i =: \text{col } M_i$$

*Beispiel 5.1.3.* Im Fall einer partiell geordneten Menge, in der je zwei verschiedene Objekte unvergleichbar sind, spezialisiert unsere Definition zum Koprodukt, daher die Bezeichnung als Kolimes. Im Fall einer partiell geordneten Menge mit drei Elementen, von denen eines kleiner ist als die beiden anderen, wobei diese beiden anderen jedoch unvergleichbar sind, spezialisiert unsere Definition zum Pushout.

**Definition 5.1.4.** Eine partiell geordnete Menge heißt **filtrierend** genau dann, wenn darin jede endliche Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Ein Kolimes über ein filtrierendes System heißt ein **filtrierender Kolimes**.

5.1.5. In der Literatur wird meist eine andere Definition verwendet, nach der man eine partiell geordnete Menge filtrierend nennt genau dann, wenn es für je zwei Elemente aus  $I$  ein Drittes gibt, daß größer ist als alle beide. Mit dieser Definition wäre auch die leere Menge filtrierend, was mir jedoch unnatürlich scheint und was ich in diesem Text nicht zulassen will. Das ist der einzige Unterschied der Definition dieses Textes zur in der Literatur üblichen Definition.

5.1.6. Ein System über einer filtrierenden Menge heißt in der Literatur oft auch ein **direktes** oder **induktives System**. Ein Kolimes über ein derartiges System heißt ein **direkter** oder **induktiver Kolimes** oder in milder Begriffsverwirrung sogar ein **direkter** oder **induktiver Limes** und wird statt  $\text{col}$  meist  $\varinjlim$  notiert.

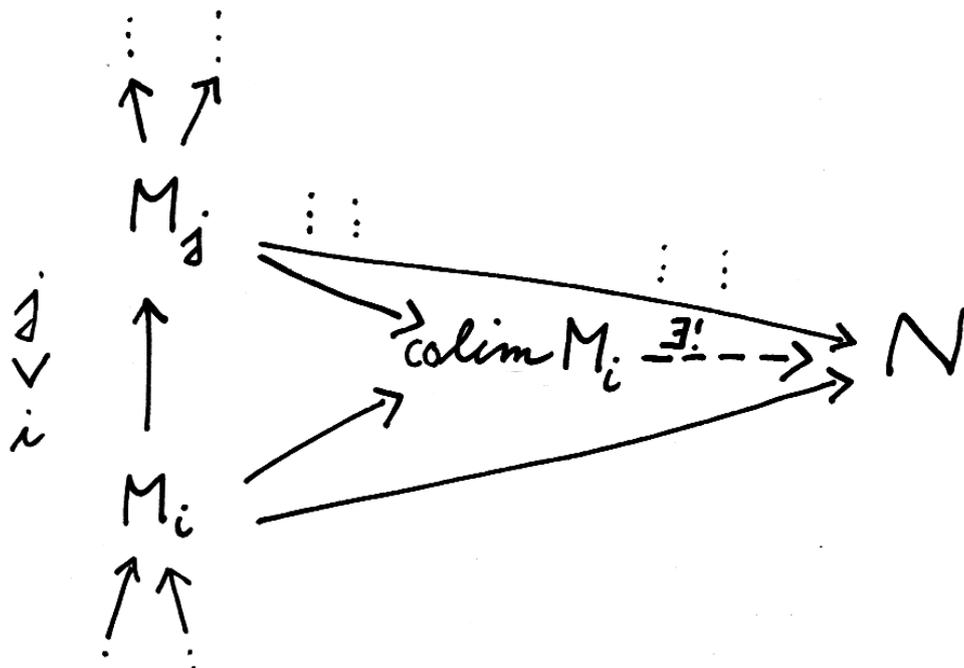


Illustration zum Kolimes

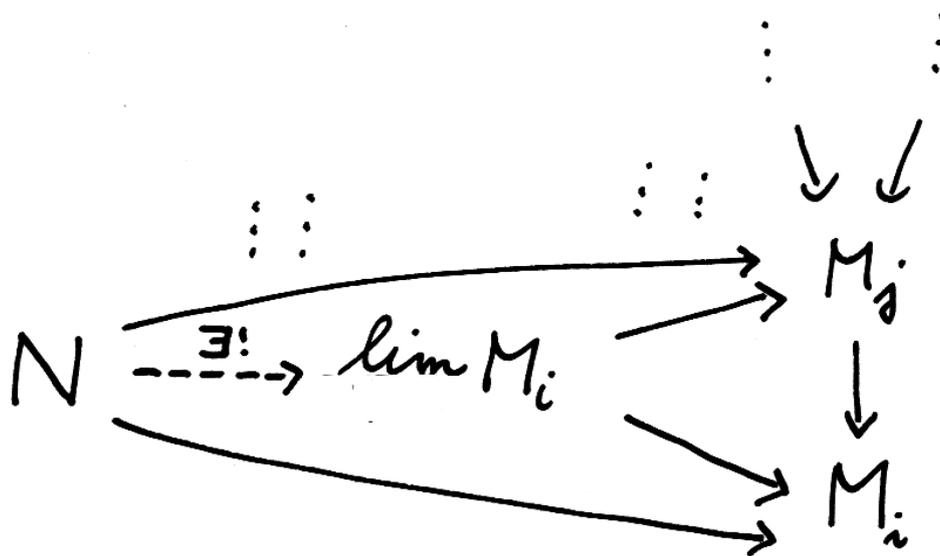


Illustration zum Limes

**Beispiel 5.1.7 (Kolimites von Mengen).** In der Kategorie der Mengen existieren Kolimites: Die Menge der Äquivalenzklassen in der disjunkten Vereinigung  $\bigsqcup_{i \in I} M_i$  unter der Äquivalenzrelation  $\sim$ , die erzeugt wird durch die Äquivalenzen

$$\text{in}_i(m_i) \sim \text{in}_j(\varphi_{ji}(m_i)) \text{ für alle } i, j \in I \text{ mit } j > i \text{ und alle } m_i \in M_i$$

löst unser universelles Problem. Wir nennen diese Menge von Äquivalenzklassen ab jetzt *den* Kolimes  $\text{colim } M_i$  der  $M_i$ . Sind speziell alle  $M_i$  Teilmengen einer Menge  $M$  und sind die  $\varphi_{ji}$  die Inklusionen und ist unser System filtrierend, so liefert die kanonische Abbildung eine Bijektion  $\text{colim } M_i \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i \in I} M_i \subset M$ .

**Beispiel 5.1.8.** In der Kategorie der abelschen Gruppen existieren Kolimites: Der Quotient der direkten Summe  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  nach der Untergruppe, die erzeugt wird von allen  $\text{in}_i(m) - \text{in}_j(\varphi_{ji}(m))$  für  $i \in I, j \geq i$  und  $m \in M_i$ , löst unser universelles Problem.

5.1.9. Bildet man zur partiell geordneten Menge  $(I, \geq)$  eine Kategorie  $\mathcal{I}$  mit  $\text{Ob } \mathcal{I} = I$  und  $|\mathcal{I}(i, j)| = 1$  falls  $j \geq i$ ,  $\mathcal{I}(i, j) = \emptyset$  sonst, so ist ein durch  $I$  indiziertes System schlicht ein Funktor  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ . Die Definition des Kolimes bleibt für beliebige Funktoren von einer Kategorie in eine weitere Kategorie oder sogar beliebige Köchermorphismen von einem Köcher in eine Kategorie sinnvoll.

**Ergänzende Übung 5.1.10.** Gegeben seien beliebige Kategorien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  und ein Funktor  $\mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), i \mapsto F_i$ . Existiert für alle  $C \in \mathcal{C}$  der Kolimes  $\text{colim } F_i(C)$  in  $\mathcal{D}$ , so erhalten wir einen Kolimes der  $F_i$  in  $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  durch die Vorschrift

$$(\text{colim } F_i)(C) = \text{colim}(F_i(C))$$

5.1.11. Systeme in der opponierten Kategorie nennen wir **Kosysteme** und der Kolimes heißt dann **Limes**. Ausgeschrieben ist also ein Kosystem in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  über einer partiell geordneten Menge  $(I, \geq)$  eine Familie  $\{M_i\}_{i \in I}$  von Objekten mitsamt Morphismen  $\varphi_{ij} : M_j \rightarrow M_i$  für alle  $j \geq i$  derart, daß gilt  $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$  wann immer  $k \geq j \geq i$  und  $\varphi_{ii} = \text{id}$  für alle  $i$ , und ein Limes über ein solches Kosystem ist ein Objekt  $L$  mitsamt Morphismen  $\text{can}_i : L \rightarrow M_i$  derart, daß eine gewisse universelle Eigenschaft erfüllt ist, die der Leser nun erraten kann. Man notiert Limes meist

$$L = \lim M_i$$

Im Fall einer partiell geordneten Menge, in der je zwei verschiedene Objekte unvergleichbar sind, spezialisiert unser Limes zum Produkt. Im Fall einer partiell geordneten Menge mit drei Elementen, von denen eines kleiner ist als die beiden anderen, diese beiden jedoch unvergleichbar sind, spezialisiert unsere Definition zum Pullback alias Faserprodukt.

*Bemerkung 5.1.12.* Sicher können Kosysteme identifiziert werden mit Systemen, die durch die opponierte partiell geordnete Menge indiziert werden. Wir können in diesem Sinne sowohl unsere Limes als auch unsere Kolimes jeweils sowohl über Systemen als auch über Kosystemen erklären, aber das würde zu zusätzlicher Verwirrung führen. Die Indizierung ist so gewählt, daß weder der Limes noch der Kolimes sich ändern, wenn man Elemente unserer partiell geordneten Mengen wegläßt, die nicht maximal sind. Stärkere Aussagen in dieser Richtung formuliert **5.1.21**.

5.1.13. Ein Kosystem über einer filtrierenden Menge heißt in der Literatur meist ein **inverses System**, und ein Limes über ein derartiges System heißt dann ein **inverser** oder **projektiver Limes** und wird statt  $\lim$  meist  $\varprojlim$  notiert.

*Beispiel 5.1.14 (Limes von Mengen).* In der Kategorie der Mengen existieren Limes: Die Teilmenge des Produkts  $\prod_{i \in I} M_i$ , die besteht aus allen Tupeln  $(m_i)$  mit

$$\varphi_{ij}(m_j) = m_i \text{ für alle } i, j \in I \text{ mit } j > i$$

löst unser universelles Problem. Wir nennen diese Teilmenge des Produkts ab jetzt *den Limes* ( $\lim M_i$ ) der  $M_i$ .

*Ergänzung 5.1.15.* Gegeben ein inverses System nichtleerer endlicher Mengen ist auch der inverse Limes nicht leer: Das folgt aus dem Satz von Tychonov ?? mit [AN1] 6.10.8. Die Mengen  $\mathbb{Z}_{\leq n}$  mit den Inklusionen bilden ein inverses System nichtleerer unendlicher Mengen, bei dem der inverse Limes leer ist. Auch bei einem allgemeinen inversen System nichtleerer unendlicher Mengen mit surjektiven Morphismen kann es jedoch vorkommen, daß der inverse Limes leer ist. Mehr dazu findet man in der “Théorie des Ensembles” von Bourbaki.

*Ergänzung 5.1.16.* Bezeichne  $\rightrightarrows$  den Köcher mit zwei Punkten und zwei Pfeilen, von dem ich der Einfachheit halber nur die Pfeile angedeutet habe. Der Limes eines Köchermorphismus  $(\rightrightarrows) \rightarrow \mathcal{C}$  in eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt, wenn er existiert, auch der **Egalisator** der beiden Morphismen, die den Pfeilen unseres Köchers zugeordnet werden. Sind zum Beispiel  $f, g : X \rightarrow Y$  zwei Abbildungen von Mengen, so ist ihr Egalisator schlicht  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ .

*Übung 5.1.17.* Gegeben ein Kosystem von Gruppen (oder abelschen Gruppen, oder Ringen, oder Moduln) trägt sein Limes als Kosystem von Mengen in natürlicher Weise die Struktur einer Gruppe (oder einer abelschen Gruppe, oder eines Rings, oder eines Moduls) und wird mit dieser Struktur ein Limes in der jeweiligen Kategorie.

*Beispiel 5.1.18.* Zum Beispiel können wir den Ring  $k[[X]]$  der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in einem Ring  $k$  aus 2.5.34 beschreiben als Limes des Kosystems aller “abgeschnittenen Polynomringe”, genauer liefert die universelle Eigenschaft einen Isomorphismus  $k[[X]] \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n k[X]/\langle X^n \rangle$ .

**Definition 5.1.19.** Eine Teilmenge  $K \subset I$  einer partiell geordneten Menge  $I$  heißt **final** genau dann, wenn es für jedes  $i \in I$  ein  $k \in K$  gibt mit  $k \geq i$ .

5.1.20. In der Literatur heißt diese Eigenschaft meist **kofinal**. Da die Vorsilbe “ko” aber in diesem Zusammenhang mit anderer Bedeutung belastet ist, habe ich die Terminologie etwas variiert.

**Lemma 5.1.21 (Übergang zu finalen Teilsystemen).** Seien  $I$  eine partiell geordnete Menge,  $K \subset I$  final und  $M_i$  ein durch  $I$  indiziertes System. Genau dann existiert der Kolimes über  $I$ , wenn der Kolimes über  $K$  existiert, und dann ist der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$\operatorname{col}_{k \in K} M_k \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_{i \in I} M_i$$

*Beweis.* Beide Seiten haben dieselbe universelle Eigenschaft. Man überzeuge sich davon zunächst im Spezialfall, daß  $I$  ein größtes Element besitzt und daß  $K$  nur aus diesem einen Element besteht.  $\square$

5.1.22. Als Konsequenz unseres Resultats für Kolimites in 5.1.21 bleiben natürlich auch Limites unverändert bei der Restriktion zu einer finalen Teilmenge der Indexmenge des zugehörigen Kosystems.

5.1.23 (**Filtrierende Kolimites von Mengen**). Gegeben ein induktives System  $(M_i)$  von Mengen haben  $m_i \in M_i$  und  $m_j \in M_j$  dasselbe Bild im direkten Limes genau dann, wenn es ein  $k$  oberhalb von  $i$  und  $j$  gibt derart, daß beide Elemente dasselbe Bild in  $M_k$  haben. In der Tat kann in diesem Fall die fragliche Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung explizit beschrieben werden durch die Vorschrift

$$(m_i \sim m_j) \Leftrightarrow (\exists k \in I \text{ mit } k \geq i, k \geq j \text{ und } \varphi_{ki}(m_i) = \varphi_{kj}(m_j))$$

da nämlich diese Vorschrift im Fall eines induktiven Systems bereits eine Äquivalenzrelation definiert.

5.1.24 (**Filtrierende Kolimites von Gruppen**). Gegeben ein induktives System  $(M_i)$  von Gruppen kann man mithilfe von 5.1.23 seinen direkten Limes in der Kategorie der Mengen leicht mit einer Gruppenstruktur versehen derart, daß alle  $\operatorname{can}_i$  Gruppenhomomorphismen werden. Mit dieser Gruppenstruktur ist unser direkter Limes dann natürlich auch ein direkter Limes in der Kategorie der Gruppen, da er die geforderte universelle Eigenschaft hat. Analoges gilt für direkte Limites in der Kategorie der abelschen Gruppen oder auch der Ringe oder auch der Moduln über einem Ring. Insbesondere kommt in diesen Fällen jedes Element des direkten Limes von einem  $M_i$  her, und ein  $m \in M_i$  geht im direkten Limes auf das neutrale Element genau dann, wenn es ein  $k \geq i$  gibt derart, daß sein Bild in  $M_k$  das neutrale Element ist.

*Ergänzende Übung 5.1.25.* Gegeben ein induktives System  $(M_i)$  von Gruppen, dessen sämtliche Morphismen Surjektionen  $\varphi_{ji} : M_i \rightarrow M_j$  sind, kann man den direkten Limes auch beschreiben, indem man ein  $i$  festhält und  $M_i$  teilt durch die Vereinigung der Kerne aller  $\varphi_{ji}$  für  $j > i$ .

*Ergänzende Übung 5.1.26.* (Hinweis: 5.1.25.) Gegeben ein induktives System von Ringen  $R_i$  mit Kolimes  $R$  und einen  $R$ -Rechtsmodul  $M$  sowie einen  $R$ -Linksmodul  $N$  induziert die kanonische Abbildung einen Isomorphismus

$$\varinjlim_i (M \otimes_{R_i} N) \xrightarrow{\sim} M \otimes_R N$$

**Definition 5.1.27.** Ein **Morphismus von Systemen**

$$(M_i, \varphi_{ji}) \rightarrow (N_i, \psi_{ji})$$

ist eine Familie von Abbildungen  $g_i : M_i \rightarrow N_i$  so daß gilt  $\psi_{ji} \circ g_i = g_j \circ \varphi_{ji}$  wann immer  $j \geq i$ . Fassen wir Systeme als Funktoren auf, so sind unsere Morphismen gerade die natürlichen Transformationen.

5.1.28. Aufgrund der universellen Eigenschaften liefert jeder Morphismus von Systemen einen Morphismus auf den Kolimites. Wir nennen eine Sequenz  $(M'_i) \rightarrow (M_i) \rightarrow (M''_i)$  von Systemen abelscher Gruppen **exakt** genau dann, wenn die zugehörige Sequenz abelscher Gruppen  $M'_i \rightarrow M_i \rightarrow M''_i$  exakt ist für alle  $i$ .

**Satz 5.1.29 (Exaktheit von filtrierenden Kolimites).** Gegeben eine exakte Sequenz  $(M'_i) \rightarrow (M_i) \rightarrow (M''_i)$  von induktiven Systemen abelscher Gruppen erhalten wir auch im direkten Limes eine exakte Sequenz

$$\varinjlim M'_i \rightarrow \varinjlim M_i \rightarrow \varinjlim M''_i$$

*Beweis.* Bezeichne  $f_i, g_i$  unsere Morphismen und  $f, g$  ihre direkten Limites. Sicher ist die Verknüpfung auch im direkten Limes Null. Ist andererseits  $\text{can}_i(m_i)$  ein Element der Mitte, das nach Null geht, so folgt  $\text{can}''_i g_i(m_i) = 0$ , nach 5.1.24 also  $\varphi''_{ji} g_i(m_i) = 0$  für geeignetes  $j \geq i$ , also  $g_j \varphi_{ji}(m_i) = 0$  und folglich ist  $\varphi_{ji}(m_i) = f_j(m'_j)$  und  $\text{can}_i(m_i) = f \text{can}'_j(m'_j)$ .  $\square$

*Übung 5.1.30.* Sei der topologische Raum  $X$  eine aufsteigende Vereinigung offener Teilmengen,  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ . So gilt  $H_q(X) = \varinjlim H_q(U_i)$  und  $\pi_1(X, x) = \varinjlim \pi_1(U_i, x)$ , wo der zweite direkte Limes nur über alle  $i$  mit  $x \in U_i$  läuft.

*Übung 5.1.31. Kolimites kommutieren mit Tensorprodukten.* In Formeln liefert also die kanonische Abbildung einen Isomorphismus

$$\text{colim}(M_i \otimes_R N) \xrightarrow{\sim} (\text{colim } M_i) \otimes_R N$$

Hinweis: Man verallgemeinere den Beweis für die Vertauschbarkeit von Tensorprodukten und direkten Summen 3.2.10.

*Ergänzende Übung 5.1.32.* Algebraisch Gebildete mögen zeigen, daß in der Kategorie Kring der kommutativen Ringe beliebige Produkte existieren. Hinweis: Man bilde den inversen Limes über alle endlichen Teilprodukte, deren Existenz durch 7.5.17 bereits gesichert ist.

*Übung 5.1.33.* Ist  $M'_i \hookrightarrow M_i \rightarrow M''_i$  eine linksexakte Sequenz von Kosystemen abelscher Gruppen, so ist die Sequenz

$$\lim_i M'_i \hookrightarrow \lim_i M_i \rightarrow \lim_i M''_i$$

der Limites auch linksexakt. Sind die opponierten Systeme indiziert durch  $n \in \mathbb{N}$  und besteht die Sequenz aus kurzen exakten Sequenzen  $M'_n \hookrightarrow M_n \rightarrow M''_n$  und sind alle  $M'_n \rightarrow M'_m$  surjektiv, so bilden die inversen Limites sogar eine kurze exakte Sequenz

$$\varprojlim_n M'_n \hookrightarrow \varprojlim_n M_n \rightarrow \varprojlim_n M''_n$$

Man kann das sogar allgemeiner zeigen unter der noch schwächeren sogenannten **Mittag-Leffler-Bedingung**, daß in jedem  $M'_n$  die absteigende Folge der Bilder der  $M'_j$  mit  $j > n$  nach endlich vielen Schritten konstant wird, etwa beim Bild von  $M'_{j(n)}$ . Hinweis: Gegeben ein Element des inversen Limes ( $m'_n$ ) wähle man zunächst in der Mitte jeweils Urbilder  $m_n$  und davon ausgehend "bessere" Urbilder als die Bilder  $\tilde{m}_n \in M'_n$  der  $m_{j(n)}$ , und ändere die  $m_{j(n)}$  dann induktiv so ab, daß die  $\tilde{m}_n$  ein Element des inversen Limes werden.

*Beispiel 5.1.34.* Die kurzen exakten Sequenzen  $p^n \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$  für  $p \neq 0$  liefern im inversen Limes keine kurze exakte Sequenz: Die kanonische Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  von  $\mathbb{Z}$  in die  $p$ -adischen Zahlen ist nicht surjektiv.

*Übung 5.1.35.* Sei ein durch die natürlichen Zahlen indiziertes inverses System von exakten Komplexen abelscher Gruppen gegeben. Sind alle Morphismen unseres Systems surjektiv, so ist auch der inverse Limes exakt. Hinweis: Die Bilder fallen einerseits mit den Zykeln zusammen und bilden andererseits auch ein inverses System mit surjektiven Morphismen. Nun wende man das Mittag-Leffler-Kriterium 5.1.33 an.

*Übung 5.1.36.* Gegeben ein Morphismus von Kosystemen von Kettenkomplexen ist der Limes der zugehörigen Abbildungskegel der Abbildungskegel des auf den Limites induzierten Morphismus.

*Übung 5.1.37.* Sei gegeben ein Morphismus  $u : X \rightarrow Y$  von durch  $\mathbb{N}$  indizierten

inversen Systemen von Kettenkomplexen. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \cdots & & \cdots \\
 \cdots & X_n^1 \xrightarrow{\partial} X_{n-1}^1 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \cdots & X_n^0 \xrightarrow{\partial} X_{n-1}^0 & \cdots
 \end{array}$$

deuten die vertikalen Pfeile die Morphismen des inversen Systems  $X$  an. Induziert  $u^i : X^i \rightarrow Y^i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  Isomorphismen auf der Homologie und sind alle Morphismen unserer inversen Systeme Surjektionen  $X^i \twoheadrightarrow X^{i-1}$ ,  $Y^i \twoheadrightarrow Y^{i-1}$ , so induziert auch die im inversen Limes erhaltene Kettenabbildung

$$\varprojlim X^i \rightarrow \varprojlim Y^i$$

Isomorphismen auf der Homologie. Hinweis: Es reicht, die Exaktheit des Abbildungskegels zu zeigen. Das gelingt mit [5.1.36](#) und [5.1.35](#).

## 5.2 Kohomologie mit kompaktem Träger

5.2.1. Wir wollen im nächsten Abschnitt den Dualitätssatz von Poincaré [4.5.12](#) durch eine Art “Induktion über die offenen Teilmengen” beweisen und müssen dazu eine Version dieses Satzes für nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeiten formulieren. Für jeden topologischen Raum  $X$  definieren wir seine **singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger** als den direkten Limes

$$H_!^q X := \varinjlim H^q(X, X \setminus K)$$

seiner relativen Kohomologiegruppen in Bezug auf die Komplemente kompakter Teilmengen. Der Limes ist zu verstehen über alle kompakten Teilmengen  $K \subset X$ . Die Kohomologie mit kompaktem Träger hat nur für lokal kompakte Hausdorffräume so gute Eigenschaften, daß sie zu etwas nützlich ist. Ich will jedoch versuchen, im folgenden die jeweils benötigten Eigenschaften der beteiligten Räume jeweils explizit dazuschreiben.

5.2.2. Üblich ist für Kohomologie mit kompaktem Träger die Notation  $H_c^q X$ , aber bei ihrer Verallgemeinerung zum “direkten Limes mit kompaktem Träger” hat sich schon lange die  $!$ -Notation durchgesetzt und beim unteren Index  $c$  liegt auch immer die Fehlinterpretation als  $c$ -te Homologie nahe, weshalb ich die  $!$ -Notation bevorzuge. Natürlich kann Kohomologie mit kompaktem Träger auch mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $G$  definiert werden. Wir schreiben dann  $H_!^q(X; G)$  und, wenn wir besonders betonen wollen, daß die singuläre Kohomologie gemeint ist, genauer  $H_!^q(X; G)_{\text{sing}}$ .

*Beispiel 5.2.3.* Für die Kohomologie mit kompaktem Träger des  $\mathbb{R}^n$  gilt

$$H_!^q(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat bilden immer größere Bälle um den Ursprung ein finales System im System aller kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , und für dieses System ist der fragliche Limes leicht zu berechnen. Man beachte, daß die Kohomologie mit kompaktem Träger insbesondere keine Homotopieinvariante ist.

5.2.4. Wie bereits erwähnt, finde ich Homologie und insbesondere simpliziale Homologie sehr viel anschaulicher als Kohomologie. Zumindest bei der Arbeit über einem Koeffizientenkörper ist nun die Kohomologie der Dualraum der Homologie, und das hilft mir, auch für die Kohomologie eine gewisse Anschauung zu entwickeln. Man beachte, daß die Homologie nur dann auch umgekehrt der Dualraum der Kohomologie ist, wenn die Homologie bereits endlichdimensional war.

5.2.5. In der Hoffnung, dadurch im Sinne der vorhergehenden Bemerkung zusätzliche Anschauung für die Kohomologie mit kompaktem Träger bereitzustellen, erkläre ich im folgenden, wie deren Dualraum im Fall von Körperkoeffizienten anschaulich interpretiert werden kann als die sogenannte “Borel-Moore-Homologie”. Man beachte, daß es sich in diesem Fall andersherum verhält: Die Borel-Moore-Homologie ist zwar stets der Dualraum der Kohomologie mit kompaktem Träger, die Kohomologie mit kompaktem Träger ist jedoch nur dann der Dualraum der Borel-Moore-Homologie, wenn sie endlichdimensional ist. In diesem Sinne scheint die Kohomologie mit kompaktem Träger ähnlich grundlegend zu sein wie die Homologie.

**Definition 5.2.6.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  erklären wir die Gruppe  $S_q^!X$  der **lokal endlichen singulären  $q$ -Ketten** als die Gruppe aller Abbildungen  $\text{Top}(\Delta_q, X) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt derart, daß nur endlich vielen der  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  mit  $\sigma(\Delta_q) \cap U \neq \emptyset$  eine von Null verschiedene Zahl zugeordnet wird. Man überlegt sich leicht, daß wir wie bei der Definition der Homologie Randoperatoren

$$\partial : S_q^!X \rightarrow S_{q-1}^!X$$

definieren können: Die lokale Endlichkeit unserer Ketten sorgt dafür, daß beim Bilden der Ränder keine unendlichen Summen von Koeffizienten auftreten. Die Homologiegruppen des Komplexes  $S^!X$  der lokal endlichen singulären Ketten nennen wir die **Borel-Moore-Homologie von  $X$**  und notieren sie

$$\mathcal{H}_q S^!X =: H_q^!X$$

Natürlich können wir diese Konstruktionen auch analog mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe  $G$  durchführen. Wir erhalten so Kettenkomplexe  $S^!(X; G)$ , notieren deren Homologie  $\mathcal{H}_q S^!(X; G) =: H_q^!(X; G)$  und nennen sie die **Borel-Moore-Homologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$** .

5.2.7. In der Literatur findet man meist andere Definitionen, die zwar nicht immer, aber doch in allen mir bekannten Anwendungsfällen dieselben Gruppen liefern. Die Notation  $H_q^! X$  ist unüblich, sie scheint mir jedoch praktisch und ich kenne auch keine allgemein übliche Notation.

5.2.8. Wir haben stets kanonische Kettenabbildungen  $SX \rightarrow S^! X$  und davon induzierte Gruppenhomomorphismen  $H_q X \rightarrow H_q^! X$ , und für  $X$  kompakt sind diese Abbildungen Isomorphismen. Für jedes Kompaktum  $K \subset X$  haben wir weiter eine offensichtliche Kettenabbildung  $S^! X \rightarrow S(X, X \setminus K)$  und damit kanonische Abbildungen auf der Homologie

$$H_q^! X \rightarrow H_q(X, X \setminus K)$$

Schalten wir unsere kanonischen Abbildungen  $H_q X \rightarrow H_q^! X$  davor, so ergeben sich die üblichen Abbildungen  $H_q X \rightarrow H_q(X, X \setminus K)$ , die demnach für kompaktes  $K$  über die Borel-Moore-Homologie  $H_q^! X$  faktorisieren.

5.2.9. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  erklären wir dual den Komplex der **singulären Koketten mit kompaktem Träger** als direkten Limes über alle Kompakta

$$S_!^* X := \varinjlim_K S^*(X, X \setminus K)$$

der relativen Koketten alias den Komplex aller Koketten, für die es ein Kompaktum gibt derart, daß sie auf allen Simplexes verschwinden, die besagtes Kompaktum nicht treffen. Wegen der Exaktheit filtrierender direkter Limes berechnet dieser Komplex in der Tat die Kohomologie mit kompaktem Träger im Sinne von 5.2.1, wir haben also kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{H}^q S_!^* X \xrightarrow{\sim} H_!^q X$$

5.2.10. Für jeden lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  liefern die Abbildungen aus 5.2.8 Isomorphismen

$$S_q^! X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_K S_q(X, X \setminus K)$$

wo der inverse Limes über alle Kompakta  $K \subset X$  zu verstehen ist. In der Tat können in diesem Fall die lokal endlichen Ketten auch beschrieben werden als Abbildungen  $\text{Top}(\Delta_q, X) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum  $K \subset X$  nur endlich vielen der  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  mit  $\sigma(\Delta_q) \cap K \neq \emptyset$  eine von Null verschiedene Zahl zugeordnet wird.

5.2.11. Die Borel-Moore-Homologie ist keineswegs homotopieinvariant, ja noch nicht einmal in dem von der Homologie gewohnten Sinne funktoriell. Vielmehr erhält man nur für eigentliche Abbildungen von lokal kompakten Hausdorffräumen  $f : X \rightarrow Y$  Abbildungen  $f_* : S^!X \rightarrow S^!Y$  auf den lokal endlichen Ketten und Abbildungen  $f_* : H_q^!X \rightarrow H_q^!Y$  auf der Borel-Moore-Homologie. Die wesentliche Bedeutung der Borel-Moore-Homologie liegt darin, daß in ihr auch für nicht kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten “Fundamentalzykel” erklärt werden können, wie im folgenden ausgeführt wird. Noch stärker gelingt das sogar für “Pseudomannigfaltigkeiten, bei denen die Singularitäten erst in Kodimension Zwei beginnen”, und damit insbesondere für mit ihrer analytischen Topologie versehene komplexe algebraische Varietäten, aber das besprechen wir hier nicht weiter.

**Satz 5.2.12 (Fundamentalzykel in der Borel-Moore-Homologie).** *Gegeben eine separable zusammenhängende orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist ihre  $n$ -te Borel-Moore-Homologie  $H_n^!M$  frei vom Rang Eins und die kanonische Abbildung nach 5.2.8 definiert für alle  $x \in M$  einen Isomorphismus*

$$H_n^!M \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus x)$$

*Beweis.* Dieser Satz folgt unmittelbar aus der anschließenden genaueren Proposition 5.2.13. □

**Proposition 5.2.13 (Borel-Moore-Homologie und Fundamentalzykel).** *Gegeben eine separable  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  liefern die Abbildungen aus 5.2.8 einen Isomorphismus*

$$H_n^!M \xrightarrow{\sim} \Gamma M$$

*zwischen ihrer  $n$ -ten Borel-Moore-Homologie und dem Raum der globalen Schnitte ihrer Orientierungsgarbe nach 2.10.21.*

**Definition 5.2.14.** Ist  $(M, \omega)$  eine separable orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach Proposition 5.2.13 genau ein  $\omega_M \in H_n^!M$  mit  $\omega_M \mapsto \omega_x$  für alle  $x \in M$ . Dies  $\omega_M$  heißt der **Fundamentalzykel** der orientierten Mannigfaltigkeit  $M$ , obwohl es genau genommen eigentlich gar kein Zykel ist, sondern vielmehr eine Homologiekategorie in ihrer Borel-Moore-Homologie.

*Ergänzung 5.2.15.* Die Separabilität ist hier wesentlich. Um das zu sehen, betrachte man die Alexandroff’sche Halbgerade  $A$  mit ihrer Anordnung nach 5.4.2 und nehme als  $M$  das Komplement ihres kleinsten Elements. Ich will kurz skizzieren, wie die Annahme der Existenz eines lokal endlichen Fundamentalzykels in diesem Fall einer nicht separablen Mannigfaltigkeit zum Widerspruch führt. In der Tat ist  $A$  nach 5.4.5 folgenkompakt, als da heißt, jede unendliche Teilmenge

hat einen Häufungspunkt. Die Endpunkte aller 1-Simplizes, die mit von Null verschiedenem Koeffizienten in einem lokal endlichen Fundamentalzykel vorkommen, bilden nun sicher eine Teilmenge von  $M$  ohne obere Schranke in  $M$ . Es gibt also zu einem festen Punkt  $x \in M$  unendliche viele solcher Endpunkte, die größer sind. Diese müssen dann einen Häufungspunkt in  $M$  haben, im Widerspruch zur lokalen Endlichkeit unseres Zyklus.

*Beweis.* Für jeden lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  liefern die Abbildungen aus 5.2.8 nach 5.2.10 Isomorphismen

$$S_q^! X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_K S_q(X, X \setminus K)$$

wo der inverse Limes über alle Kompakta  $K \subset X$  zu verstehen ist. Nehmen wir zusätzlich  $X$  separabel an, so existiert sogar eine Überdeckung von  $X$  durch eine aufsteigende Folge von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß  $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset X$ , und da die  $\bar{U}_i$  final sind im System aller Kompakta von  $X$ , haben wir auch

$$S_q^! X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i S_q(X, X \setminus \bar{U}_i)$$

Dieses inverse System besteht offensichtlich aus Surjektionen, und dasselbe gilt a fortiori für das System von Rändern  $B_{q-1}(X, X \setminus \bar{U}_i)$ . Ist nun zusätzlich  $X = M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit, so liefert Satz 2.10.22 über die hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten  $H_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i) = 0$ , folglich haben wir  $B_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i) = Z_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i)$  und die  $(n+1)$ -Zykel bilden auch ein inverses System aus Surjektionen. Mit dem Mittag-Leffler-Kriterium 5.1.33 für die Exaktheit inverser Limes folgt sowohl die Surjektivität der offensichtlichen Abbildung

$$\varprojlim_i S_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i) \rightarrow \varprojlim_i B_n(M, M \setminus \bar{U}_i)$$

als auch die Exaktheit von

$$\varprojlim_i B_n(M, M \setminus \bar{U}_i) \hookrightarrow \varprojlim_i Z_n(M, M \setminus \bar{U}_i) \rightarrow \varprojlim_i H_n(M, M \setminus \bar{U}_i)$$

Unsere erste Surjektivität erlaubt uns die Identifikation der ersten Gruppe dieser kurzen exakten Sequenz mit  $\mathcal{B}_n S^! M$  und die Linksexaktheit inverser Limes erlaubt die Identifikation der Mitte unserer Sequenz mit  $\mathcal{Z}_n S^! M$ , so daß wir schließlich für jede separable  $n$ -Mannigfaltigkeit einen Isomorphismus

$$H_n^! M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i H_n(M, M \setminus \bar{U}_i)$$

erhalten. Beachten wir nun die Isomorphismen  $H_n(M, M \setminus A) \xrightarrow{\sim} \Gamma A$  für  $A \subset M$  kompakt aus dem Satz 2.10.22 über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten,

so erhalten wir den gewünschten Isomorphismus  $H_n^!M \xrightarrow{\sim} \Gamma M$  wegen  $\Gamma M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \Gamma \bar{U}_i$ . Diese letzte Identität sieht man zum Beispiel ein, indem man sich überlegt, daß sowohl die  $\bar{U}_i$  als auch die  $U_i$  final sind im System aller Teilmengen von  $X$  mit kompaktem Abschluß.  $\square$

5.2.16. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  liefert unsere Formel 4.5.4 für das cap-Produkt auch eine Kettenabbildung

$$S_!^* X \otimes S^! X \rightarrow S X$$

Wir notieren auch diese Verknüpfung  $b \otimes z \mapsto b \cap z$  und nennen sie ein **cap-Produkt**.

**Definition 5.2.17.** Ist  $(M, \omega)$  eine separable orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach Proposition 5.2.13 genau ein  $\omega_M \in H_n^!M$  mit  $\omega_M \mapsto \omega_x$  für alle  $x \in M$ . Dies  $\omega_M$  heißt der **Fundamentalzykel** der orientierten Mannigfaltigkeit  $M$ , obwohl es genau genommen eigentlich gar kein Zykel ist, sondern vielmehr eine Homologiekategorie in der Borel-Moore-Homologie.

5.2.18 (**Poincaré-Dualität mit lokal endlichen Ketten**). Ist  $(M, \omega)$  eine separable orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit, so können wir das Auswerten auf dem Fundamentalzykel im Sinne von 5.3.6, das nach 5.3.7 den Isomorphismus der Poincaré-Dualität liefert, als den Effekt auf der Kohomologie einer und jeder Kettenabbildung

$$\cap \omega : S_!^* M[n] \rightarrow S M$$

interpretieren, die mit diesen Begriffsbildungen nun in der Tat durch das Daran-cappen eines und jedes Repräsentanten  $\omega \in S^! M$  des Fundamentalzykels gegeben wird. Die Wahl eines anderen Repräsentanten führt offensichtlich zu einer homotopen Kettenabbildung und liefert folglich dieselbe Abbildung auf der Kohomologie.

5.2.19 (**Simpliziale Interpretation der Borel-Moore-Homologie**). Gegeben ein lokal endlicher Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  wie in 5.3.3 können wir den **Komplex der lokal endlichen Simplizialketten**  $S^! \mathcal{K}$  ganz analog bilden wie den Komplex der Simplizialketten  $S \mathcal{K}$  aus 1.1.3, indem wir eben auch unendliche formale Linearkombinationen von angeordneten Simplizes zulassen. Die Homologie dieses Komplexes nennen wir die **simpliziale Borel-Moore-Homologie** und notieren sie  $H_q^! \mathcal{K} := \mathcal{H}_q S^! \mathcal{K}$ . Wir erhalten unmittelbar einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$S^! \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(S_!^* \mathcal{K}, \mathbb{Z})$$

mit dem Dualen des Komplexes der simplizialen Koketten mit kompaktem Träger aus 5.3.3, der also in gewisser Weise das fundamentalere Objekt ist. Analog wie

in 2.4.1 definieren wir auch den Komplex der lokal endlichen simplizialen Ketten  $S^{!s}\Delta(\mathcal{K}) \subset S^!\Delta(\mathcal{K})$  und analog wie in 2.4.2 die Kettenabbildung  $S^{!s}\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S^!\mathcal{K}$  von den lokal endlichen simplizialen Ketten in die lokal endlichen Simplizialketten.

**Satz 5.2.20 (Simpliziale als singuläre Borel-Moore-Homologie).** *Für jeden lokal endlichen Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  induzieren die Kettenabbildungen  $S^!\mathcal{K} \leftarrow S^{!s}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S^!\Delta(\mathcal{K})$  aus 5.2.19 Isomorphismen auf der Homologie*

$$H_q^!\mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}_q S^{!s}\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} H_q^!\Delta(\mathcal{K})$$

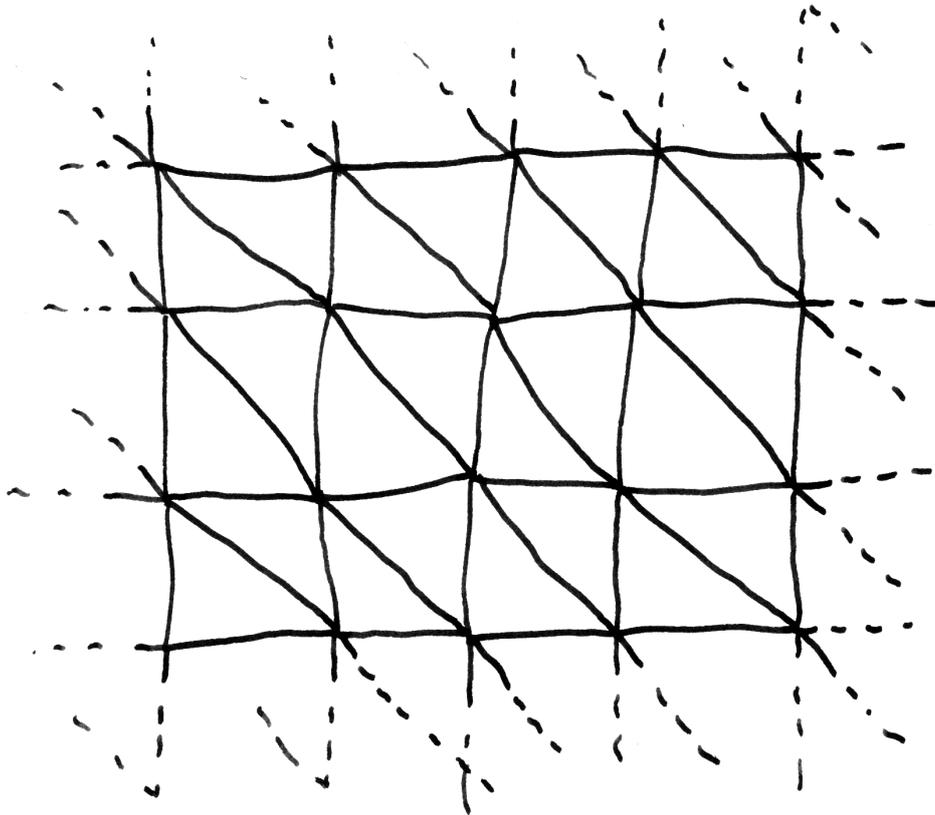
*Beweis.* Alle in diesem Satz auftauchenden Gruppen, Komplexe etc. zerfallen in ein Produkt über die Zusammenhangskomponenten unseres Simplizialkomplexes, den wir deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusammenhängend und damit abzählbar annehmen dürfen. Wir können unseren Simplizialkomplex dann als Vereinigung einer aufsteigenden Folge  $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \dots$  endlicher Teilkomplexe schreiben derart, daß  $\mathcal{K}_{n+1}$  jeweils alle Simplizes umfaßt, die Simplizes aus  $\mathcal{K}_n$  treffen. Wir betrachten nun die Unterkomplexe  $\mathcal{L}_n$  aller Simplizes von  $\mathcal{K}$ , die keinen Simplex von  $\mathcal{K}_n$  treffen, und bilden das kommutative Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccccc} S\mathcal{L}_n & \longleftarrow & S^s\Delta(\mathcal{L}_n) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{L}_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S\mathcal{K} & \longleftarrow & S^s\Delta(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{K}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S\mathcal{K}/S\mathcal{L}_n & \longleftarrow & S^s\Delta(\mathcal{K})/S^s\Delta(\mathcal{L}_n) & \longrightarrow & S(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}_n)) \end{array}$$

Nach 2.4.3 induzieren die Horizontalen oben und in der Mitte Isomorphismen auf der Homologie, nach dem Fünferlemma und der langen exakten Homologiesequenz gilt das also auch für die Horizontalen unten. Gehen wir in der unteren Horizontale zum inversen Limes über, so erhalten wir gerade die Morphismen von Komplexen

$$S^!\mathcal{K} \leftarrow S^{!s}\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S^!\Delta(\mathcal{K})$$

aus unserem Satz, denn die Komplemente der  $\Delta(\mathcal{L}_n)$  sind final im System aller Teilmengen von  $\Delta(\mathcal{K})$  mit kompaktem Abschluß. Da alle System-Morphismen der fraglichen inversen Systeme Surjektionen sind, folgt die Behauptung nun aus 5.1.37.  $\square$



*Kreisfeile einzeichnen!* Graphische Darstellung derjenigen Simplizialkette, die für die ebenfalls dargestellte Triangulierung der Ebene den Fundamentalzykel in Bezug auf eine geeignete Orientierung repräsentiert. Man mache sich auch anschaulich klar, daß die Borel-Moore-Homologie der Ebene in allen von Zwei verschiedenen Graden verschwindet.

5.2.21. Sei nun unser Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung einer nicht notwendig kompakten separablen orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeit. Der Fundamentalzykel von  $\Delta(\mathcal{K})$  im Sinne von 5.2.12 hat wegen 5.2.20 genau einen Repräsentanten in der Gruppe der Borel-Moore- $n$ -Simplizialketten. Für  $n \geq 1$  kann dieser Repräsentant beschrieben werden als die formale Summe über alle  $n$ -Simplizes, jeweils mit einer Anordnung versehen, die mit der gewählten Orientierung in der Weise verträglich ist, daß eben  $\omega|_x \in H_n(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{K}) \setminus x)$  an jeder Stelle  $x$  die vorgegebene Orientierung liefert. Im Fall  $n \geq 0$  einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit ist dieser Repräsentant dahingegen die formale Summe aller ihrer Punkte mit den durch die Orientierung gegebenen Vorzeichen.

### 5.3 Poincaré-Dualität

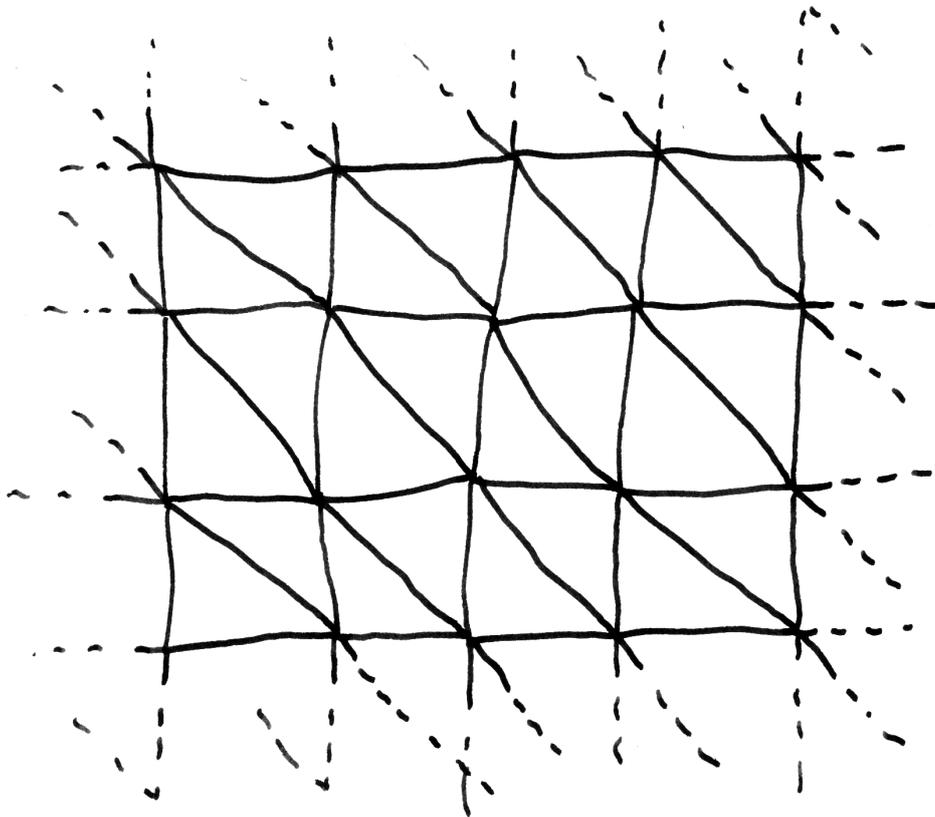
5.3.1. Für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$  eines Hausdorffraums erhalten wir eine Abbildung, die **Ausdehnung durch Null**

$$H_!^q U \rightarrow H_!^q X$$

als Limes der Abbildungen  $H^q(U, U \setminus K) \xrightarrow{\sim} H^q(X, X \setminus K) \rightarrow H_!^q X$ , wo die ersten Abbildungen die Inversen zu den Ausschneidungsisomorphismen meinen und der Limes über alle Kompakta aus  $U$  zu bilden ist. Die Hausdorff-Eigenschaft wird benötigt, um sicherzustellen, daß unser Kompaktum  $K$  auch abgeschlossen ist in  $X$  und wir somit die Ausschneidungsisomorphismen zur Verfügung haben.

*Übung 5.3.2.* Ist ein Hausdorffraum  $X$  Vereinigung eines Systems offener Teilmengen  $\mathcal{U}$  derart, daß es für je zwei Mengen aus  $\mathcal{U}$  eine weitere Menge aus  $\mathcal{U}$  gibt, die sie beide umfaßt, so induzieren die eben erklärten Abbildungen einen Isomorphismus  $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} H_!^q(U) \xrightarrow{\sim} H_!^q(X)$ .

5.3.3. Die Kohomologie mit kompaktem Träger ist nur im Fall lokal kompakter Hausdorffräume von Bedeutung, im Fall noch allgemeinerer Räume hat sie zu wenig gute Eigenschaften. Um etwas Anschauung für die Kohomologie mit kompaktem Träger zu geben, erkläre ich die simpliciale Bedeutung dieses Konzepts. Ein Simplicialkomplex heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jede seiner Ecken nur zu endlich vielen Simplizes gehört. Sie werden als Übung 5.3.4 zeigen, daß diese Bedingung gleichbedeutend ist zur lokalen Kompaktheit des zugehörigen Polyeders. Gegeben ein lokal endlicher Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  können wir im Komplex der Simplicialketten aus 4.7.9 einen Unterkomplex  $S_!^* \mathcal{K} \subset S^* \mathcal{K}$  bilden, indem wir nur solche Abbildungen  $f : \mathcal{K}_q^{\leq} \rightarrow \mathbb{Z}$  zulassen, die auf fast allen angeordneten  $q$ -Simplizes verschwinden. Wir nennen ihn den Komplex der **Simplizialketten mit kompaktem Träger** und behaupten, daß er bereits die Kohomologie mit kompaktem Träger  $H_!^* \Delta(\mathcal{K})$  berechnet. Nach 5.1.21 können wir ja bei der Definition



Dieses Bild soll anhand der simplizialen Interpretation veranschaulichen, daß nur die zweite Kohomologie mit kompaktem Träger der Ebene nicht verschwindet und daß sie frei ist vom Rang Eins über dem Koeffizientenring. Der Korand eines Punktes ist die formale Summe aller "orientierten aus ihm herauslaufenden Kanten". Es ist damit klar, daß es außer der Null keinen Null-Simplizialkozykel gibt. Der Korand eines orientierten Segments ist die Summe aller 2-Simplizes, in deren Rand es liegt, mit einer durch die Orientierung unseres Segments bestimmten Orientierung. Man kann sich etwa mithilfe der dualen Zellenzerlegung klarmachen, daß alle Eins-Simplizialkozykel Ränder sind. Schließlich sind alle 2-Simplizialkorketten auch 2-Kozykel und zwei 2-Korketten sind kohomolog genau dann, wenn die "Zahl der darin vorkommenden orientierten 2-Simplizes gleich ist, wobei 2-Simplizes mit entgegengesetztem Drehsinn negativ zu zählen sind".

der Kohomologie mit kompaktem Träger den direkten Limes ebenso gut über alle Teilmengen  $K$  mit kompaktem Abschluß laufen lassen. Wieder nach 5.1.21 haben wir in unserem speziellen Fall auch

$$H_i^* \Delta(\mathcal{K}) = \varinjlim_{\mathcal{L}} H^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$$

wo  $\mathcal{L}$  über alle Unterkomplexe  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$  läuft mit  $|\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}| < \infty$ . Nach 4.7.9 in Verbindung mit dem Fünferlemma wird nun aber die relative Kohomologie  $H^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$  berechnet durch den Komplex  $S^*(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  der relativen Simplicialketten, den wir erklären als den Kern der offensichtlichen Kettenabbildung  $S^* \mathcal{K} \rightarrow S^* \mathcal{L}$ . Bilden wir den direkten Limes dieser Kerne, so erhalten wir gerade unseren Komplex  $S_i^* \mathcal{K}$ , und wegen der Exaktheit filtrierender direkter Limites erhalten wir schließlich kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^q S_i^* \mathcal{K} &\cong \mathcal{H}^q \varinjlim_{\mathcal{L}} S^*(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \\ &\cong \varinjlim_{\mathcal{L}} \mathcal{H}^q S^*(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \\ &\cong \varinjlim_{\mathcal{L}} H^q(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L})) \\ &\cong H_i^q \Delta(\mathcal{K}) \end{aligned}$$

*Übung 5.3.4.* Ein Simplicialkomplex ist lokal endlich genau dann, wenn der zugehörige topologische Raum lokal kompakt ist. Hinweis: 2.4.15.

5.3.5 (**Mayer-Vietoris-Sequenz für  $H_i^*$** ). Ist ein Hausdorffraum  $X$  Vereinigung von zwei offenen Teilmengen  $X = U \cup V$  und sind  $K \subset U$  und  $L \subset V$  kompakt, so haben wir in 4.7.8 eine lange exakte Sequenz

$$H^q(X, X \setminus (K \cap L)) \rightarrow H^q(X, X \setminus K) \oplus H^q(X, X \setminus L) \rightarrow H^q(X, X \setminus (K \cup L))$$

konstruiert. Mit Ausschneidung und Übergang zum direkten Limes über alle  $K$  und  $L$  ergibt sich daraus eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_i^q(U \cap V) \rightarrow H_i^q(U) \oplus H_i^q(V) \rightarrow H_i^q(X) \rightarrow H_i^{q+1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Sie heißt die **Mayer-Vietoris-Sequenz der Kohomologie mit kompaktem Träger**.

5.3.6. Ist  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine Orientierung auf  $M$ , so definiert  $\omega$  nach 2.10.22 für alle kompakten Teilmengen  $K \subset M$  ein Element  $\omega_K \in H_n(M, M \setminus K)$ , das cap-Produkt mit  $\omega_K$  liefert nach 4.5.9 Abbildungen  $\cap \omega_K : H^q(M, M \setminus K) \rightarrow H_{n-q} M$ , und durch Übergang zum direkten Limes mithilfe von 4.5.11 erhalten wir Abbildungen

$$\cap \omega : H_i^q M \rightarrow H_{n-q} M$$

die verträglich sind mit dem Übergang zu offenen Teilmengen von  $M$ . Wir nennen sie das **partielle Auswerten auf dem Fundamentalzykel**.

**Satz 5.3.7 (Allgemeine Poincaré-Dualität).** *Gegeben eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  mit Orientierung  $\omega$  induziert das partielle Auswerten auf dem Fundamentalzykel  $\cap\omega$  aus 5.3.6 für alle  $q$  Isomorphismen*

$$\cap\omega : H_1^q M \xrightarrow{\sim} H_{n-q} M$$

5.3.8. Dieser Satz gilt mit demselben Beweis für Koeffizienten in einem beliebigen kommutativen Ring. Gilt in unserem Ring  $1 + 1 = 0$ , so benötigt man noch nicht einmal die Voraussetzung der Orientierbarkeit.

5.3.9. Mit Koeffizienten in einem Körper können wir diesen Satz dahingehend formulieren, daß die Schnittpaarung zwischen Borel-Moore-Homologie und Homologie die erstere identifiziert mit dem Dualraum der letzteren. Diese Formulierung ist meiner Anschauung besonders gut zugänglich.

*Beweis.* Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

**Lemma 5.3.10.** *Sind  $U, V \subset M$  offen und gilt der Satz für die  $n$ -Mannigfaltigkeiten  $U, V$  und  $U \cap V$ , so gilt er auch für  $U \cup V$ .*

*Beweis.* Das folgt sofort mit dem Fünferlemma aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow & H_1^q(U \cap V) & \rightarrow & H_1^q U \oplus H_1^q V & \rightarrow & H_1^q(U \cup V) & \rightarrow & H_1^{q+1}(U \cap V) \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots \rightarrow & H_{n-q}(U \cap V) & \rightarrow & H_{n-q} U \oplus H_{n-q} V & \rightarrow & H_{n-q}(U \cup V) & \rightarrow & H_{n-q-1}(U \cap V) \rightarrow \end{array}$$

sobald wir zeigen können, daß dies Diagramm kommutativ ist. Es reicht, für beliebige kompakte  $K \subset U$  und  $L \subset V$  die Kommutativität des Diagramms zu zeigen, das man erhält, wenn man die obere Zeile durch die entsprechende relative Mayer-Vietoris-Sequenz ersetzt. Wir kürzen  $U \cup V = X$  ab und bezeichnen die offene Überdeckung  $X \setminus (K \cap L) = (X \setminus K) \cup (X \setminus L)$  mit  $\mathcal{V}$ . Die kurze exakte Sequenz auf den singulären Ketten

$$S(X \setminus K \cup L) \hookrightarrow S(X \setminus K) \oplus S(X \setminus L) \twoheadrightarrow S^{\mathcal{V}}(X \setminus K \cap L)$$

liefert durch Dualisieren die oberste Horizontale im folgenden großen kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} S_{\mathcal{V}}^*(X \setminus K \cap L) & \hookrightarrow & S^*(X \setminus K) \oplus S^*(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^*(X \setminus K \cup L) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S^*(X) & \hookrightarrow & S^* X \oplus S^* X & \twoheadrightarrow & S^* X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S_{\mathcal{V}}^*(X, X \setminus K \cap L) & \hookrightarrow & S^*(X, X \setminus K) \oplus S^*(X, X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^*(X, X \setminus K \cup L) \end{array}$$

wo alle Vertikalen kurze exakte Sequenzen sind, die untere linke Ecke durch die Exaktheit der vertikalen Sequenz definiert ist und die untere Zeile exakt ist nach

dem Neunerlemma. Die lange exakte Kohomologiesequenz dieser untersten Zeile ist bis auf einige Identifikationen gerade unsere relative Mayer-Vietoris-Sequenz der Kohomologie. Wählen wir nun für  $\omega_{K \cup L}$  einen Repräsentanten in  $S_n X$ , der fein ist bezüglich der offenen Überdeckung  $X = (V \setminus K) \cup (U \setminus L) \cup (U \cap V)$ , und fassen die Kettenkomplexe der singulären Ketten auf als Kokettenkomplexe, die nur in Indizes  $\leq 0$  leben, so definiert das cap-Produkt mit so einem Repräsentanten die vertikalen Morphismen eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} S_{\vee}^*(X, X \setminus K \cap L) & \hookrightarrow & S^*(X, X \setminus K) \oplus S^*(X, X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^*(X, X \setminus K \cup L) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(U \cap V) & \hookrightarrow & S U \oplus S V & \twoheadrightarrow & S^{\mathcal{W}}(U \cup V) \end{array}$$

für  $\mathcal{W}$  die Überdeckung  $X = U \cup V$  von  $X$ . Das liefert dann das gesuchte kommutative Diagramm von langen exakten Sequenzen.  $\square$

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Der Satz gilt für  $M = \mathbb{R}^n$ . Dann bilden ja die abgeschlossenen Bälle  $D_r$  schon ein finales System unter allen kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  und  $\cap \omega : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_r) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}$  ist schlicht das Auswerten einer Kohomologieklassse auf der Homologieklassse  $\omega \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_r)$ , also ein Isomorphismus für  $0 < r < \infty$ .
2. Der Satz gilt für jede offene konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , denn so eine Teilmenge ist schon homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .
3. Der Satz gilt für jede endliche Vereinigung offener konvexer Mengen in  $\mathbb{R}^n$ . Mit Induktion, 2 und Lemma 5.3.10.
4. Ist  $M$  eine aufsteigende Vereinigung von offenen Teilmengen  $U_i$  und gilt der Satz für alle  $U_i$ , so gilt er auch für  $M$ . In der Tat gilt  $H_q(M) = \varinjlim H_q(U_i)$  und  $H_1^p M = \varinjlim H_1^p(U_i)$  nach den Übungen 5.1.30 und 5.3.2.
5. Der Satz gilt für jede offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . In der Tat läßt sie sich als abzählbare Vereinigung offener Bälle schreiben.
6. Der Satz gilt für jede Mannigfaltigkeit. In der Tat finden wir nach 4 und dem Zorn'schen Lemma eine maximale offene Teilmenge, für die der Satz gilt. Wäre sie nicht schon die ganze Mannigfaltigkeit, so könnten wir sie nach Lemma 5.3.10 und Schritt 5 noch durch eine Karte vergrößern, im Widerspruch zur Maximalität.  $\square$

**Korollar 5.3.11.** *Ist  $t$  ein Erzeuger der zweiten Kohomologiegruppe  $H^2 \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ , so liefert der offensichtliche Ringhomomorphismus einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}[t]/\langle t^{n+1} \rangle \xrightarrow{\sim} H^* \mathbb{P}^n \mathbb{C}$$

*Beweis.* Es gilt zu zeigen, daß das Produkt eines Erzeugers von  $H^{2p}$  mit einem Erzeuger von  $H^{2q}$  stets ein Erzeuger von  $H^{2p+2q}$  ist. Im Fall  $p + q = n$  folgt das aus 4.5.15. Im Fall  $p + q > n$  ist eh nichts zu zeigen. Im Fall  $p + q = m < n$  verwendet man den nach 2.8.7 und 4.7.2 surjektiven Ringhomomorphismus  $H^*\mathbb{P}^n\mathbb{C} \rightarrow H^*\mathbb{P}^m\mathbb{C}$ .  $\square$

*Übung 5.3.12.* Man definiere für jeden Hausdorffraum ein cup-Produkt auf seiner Kohomologie mit kompaktem Träger. Für eine Mannigfaltigkeit entspricht es nebenbei bemerkt unter dem Isomorphismus der Poincaré-Dualität dem anschaulichen Schnittprodukt auf der Homologie.

## 5.4 Schnittzahlen

5.4.1. Sei  $M$  eine kompakte orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit. Für zwei Homologieklassen komplementärer Dimension  $\alpha \in H_q M$  und  $\beta \in H_{n-q} M$  ist hoffentlich anschaulich in etwa klar, was ihre ‘‘Schnittzahl’’ sein sollte, die die Schnittpunkte von repräsentierenden Zykeln ‘‘in generischer Lage’’ mit geeigneten, von der Orientierung abhängigen Vorzeichen zählt. Mit dem Isomorphismus der Poincaré-Dualität 5.3.7 können wir unseren Homologieklassen sicher formal korrekt eine Zahl  $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Z}$  zuordnen wie folgt: Wir suchen einfach  $a \in H^{n-q} M$  und  $b \in H^q M$  mit  $\alpha = a \cap \omega_M$  und  $\beta = b \cap \omega_M$  und setzen

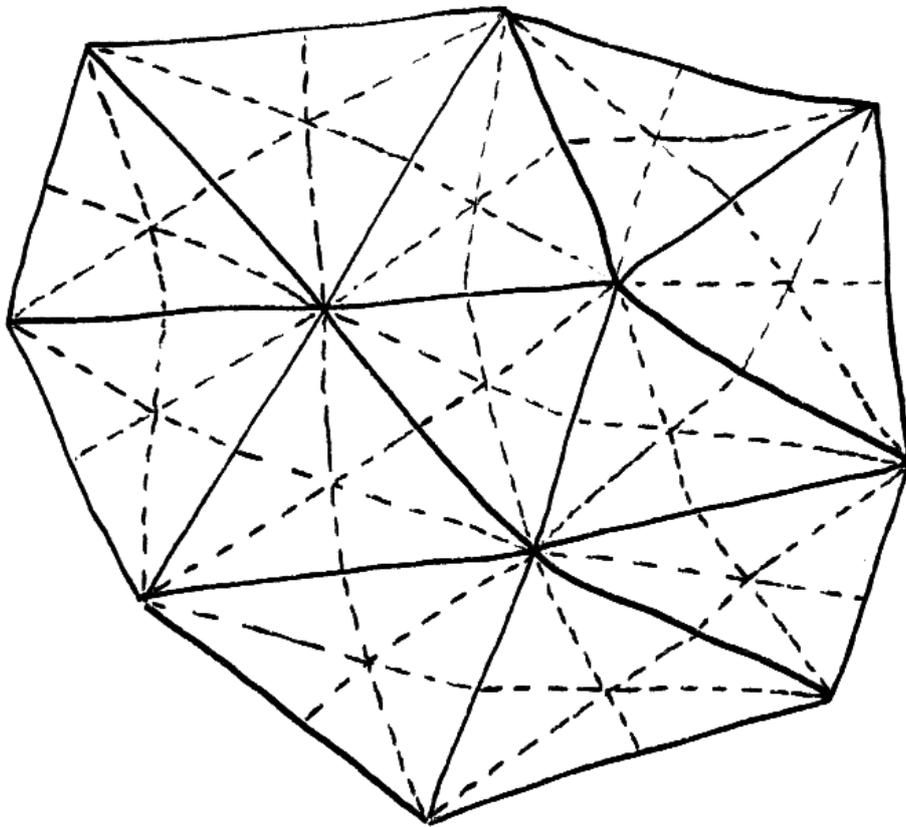
$$\alpha \cdot \beta = \langle a \cup b, \omega_M \rangle$$

Dies sei unsere Definition der **Schnittzahl** der beiden Homologieklassen. Der bald folgende Satz 5.4.6 soll plausibel machen, daß die so definierte Zahl die oben beschriebene geometrische Bedeutung hat. Dazu braucht es jedoch einige Vorbereitungen.

5.4.2. Gegeben ein Simplicialkomplex  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  im Sinne von 2.4.5 erklären wir wie folgt einen neuen Simplicialkomplex, seine **baryzentrische Unterteilung**  $\check{\mathcal{K}} = (\check{E}, \check{\mathcal{K}})$ : Als Ecken nehmen wir alle nichtleeren Simplizes des ursprünglichen Komplexes, in Formeln  $\check{E} = \{s \in \mathcal{K} \mid s \neq \emptyset\}$ . Als Simplizes nehmen wir alle endlichen Ketten in der Menge  $\check{E}$ , die ja durch die Inklusionsrelation partiell geordnet ist, also alle bezüglich dieser partiellen Ordnung total geordneten endlichen Teilmengen. Man erhält einen Homöomorphismus zwischen den zugehörigen Polyedern

$$\Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$$

durch die Vorschrift, daß jede Ecke  $s \in \check{E} \subset \mathcal{K}$  auf den Schwerpunkt des vollen Simplex  $\Delta(s) \subset \Delta(\mathcal{K})$  abgebildet wird und jeder volle Simplex von  $\Delta(\check{\mathcal{K}})$  affin in denjenigen vollen Simplex von  $\Delta(\mathcal{K})$ , der seiner größten Ecke entspricht. Jeder Simplex von  $\check{\mathcal{K}}$  hat bereits eine offensichtliche Anordnung, in Bezug auf die wir



Ein Simplicialkomplex und gestrichelt eingezeichnet seine baryzentrische Unterteilung. Die Ecken der baryzentrischen Unterteilung mag man sich denken als die Schwerpunkte der nichtleeren Simplizes des ursprünglichen Simplicialkomplexes, die Simplizes der baryzentrischen Unterteilung entsprechen den endlichen Ketten in der partiell geordneten Menge der ursprünglichen Simplizes.

von nun an den Komplex der ordnungsverträglichen simplizialen Ketten  $S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  verstehen wollen, und die hoffentlich offensichtlichen Kettenabbildungen liefern Homotopieäquivalenzen

$$S\check{\mathcal{K}} \xrightarrow{\sim} S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\cong} S\Delta(\mathcal{K})$$

Im Beweis von 2.4.3 hatten wir zwar ordnungsverträgliche simpliziale Ketten nur in Bezug auf eine totale Ordnung auf der Menge aller Ecken eingeführt, aber mit einer partiellen Ordnung, die auf allen Simplizes eine totale Ordnung induziert, geht es genauso.

5.4.3. Sei nun unser Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung einer kompakten orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeit. Wir wählen eine Anordnung  $\leq$  auf der Menge  $E$  der Ecken von  $\mathcal{K}$ . Der Fundamentalzykel von  $\Delta(\mathcal{K})$  hat genau einen Repräsentanten in den  $n$ -Simplizialketten und damit auch genau einen Repräsentanten  $\omega \in S_n^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$  in der Gruppe der ordnungsverträglichen simplizialen  $n$ -Ketten. Nach 5.2.21 hat unser Fundamentalzykel die Gestalt

$$\omega = \sum_{s \in \mathcal{K}_n} \varepsilon(s) \langle s \rangle$$

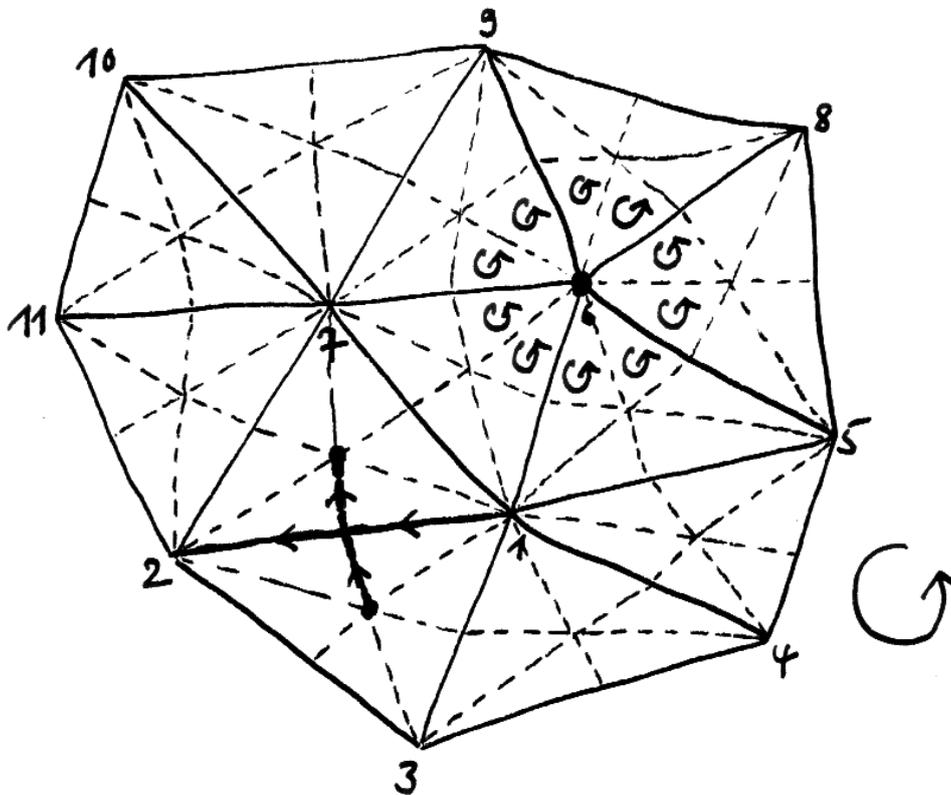
für wohlbestimmtes  $\varepsilon : \mathcal{K}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ , wobei  $\langle s \rangle$  wie im Beweis von 2.4.3 den zum  $n$ -Simplex  $s$  gehörigen angeordneten  $n$ -Simplex bezeichnet.

5.4.4. Gegeben ein  $(n-q)$ -Simplex  $t \in \mathcal{K}_{n-q}$  definieren wir die zugehörige **duale Zelle**  $c(t) \in S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  als die Summe

$$c(t) = \sum \eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle$$

über alle  $q$ -Simplizes  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  mit  $\check{u}_0 = t$ . Einen  $q$ -Simplex  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  schreiben wir dazu als echt aufsteigende Kette  $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  von nichtleeren Simplizes von  $\mathcal{K}$ , und wir summieren über alle Ketten, die mit dem  $(n-q)$ -Simplex  $t$  beginnen. Die  $\eta(\check{u}) = \pm 1$  sind gewisse Vorzeichen, die wie folgt gegeben seien: Man betrachte die Ecken  $u_1, \dots, u_q \in E$  des ursprünglichen Komplexes mit  $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$ , so daß also gilt  $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \dots, u_q\}$ . Sei  $(s_0, s_1, \dots, s_n)$  die angeordnete Darstellung des  $n$ -Simplex  $\check{u}_q$  und  $(t_0, \dots, t_{n-q})$  die angeordnete Darstellung des  $(n-q)$ -Simplex  $t = \check{u}_0$  und  $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$  die Permutation mit

$$\begin{aligned} s_{\tau(0)} &= t_0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ s_{\tau(n-q)} &= t_{n-q} \\ s_{\tau(n-q+1)} &= u_1 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ s_{\tau(n)} &= u_q \end{aligned}$$



Ein Ausschnitt einer triangulierten 2-Mannigfaltigkeit. Die Nummerierung der Ecken legt ihre Anordnung fest. Der Kreispeil daneben deutet die Orientierung an, der Fundamentalzykel hat also die Gestalt

$$\omega = \dots + \langle \{1, 2, 3\} \rangle - \langle \{1, 2, 7\} \rangle + \dots$$

Die duale Zelle zum 1-Simplex  $t = \{1, 2\}$  besteht aus den beiden Summanden  $\tilde{u} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$  und  $\tilde{v} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 7\}\}$  und deren Vorzeichen sind  $\eta(\tilde{u}) = -1$  und  $\eta(\tilde{v}) = 1$ , so daß sich die duale Zelle zu  $c(t) = \tilde{v} - \tilde{u}$  ergibt. Im

Bild habe ich die den ordnungsverträglichen 1-Ketten  $\langle t \rangle$  und  $c(t)$  entsprechenden Simplizialketten fett eingezeichnet.

Weiter besteht die duale Zelle zum 0-Simplex  $\{6\}$  aus 10 Summanden, und ich habe im Bild auch die der dualen Zelle zu dieser Ecke alias der ordnungsverträglichen 2-Kette  $c(\{6\})$  entsprechende Simplizialkette durch Kreispeile eingezeichnet.

So sei das fragliche Vorzeichen gegeben als  $\eta(\tilde{u}) = (-1)^{q(n-q)} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\tau)$ .

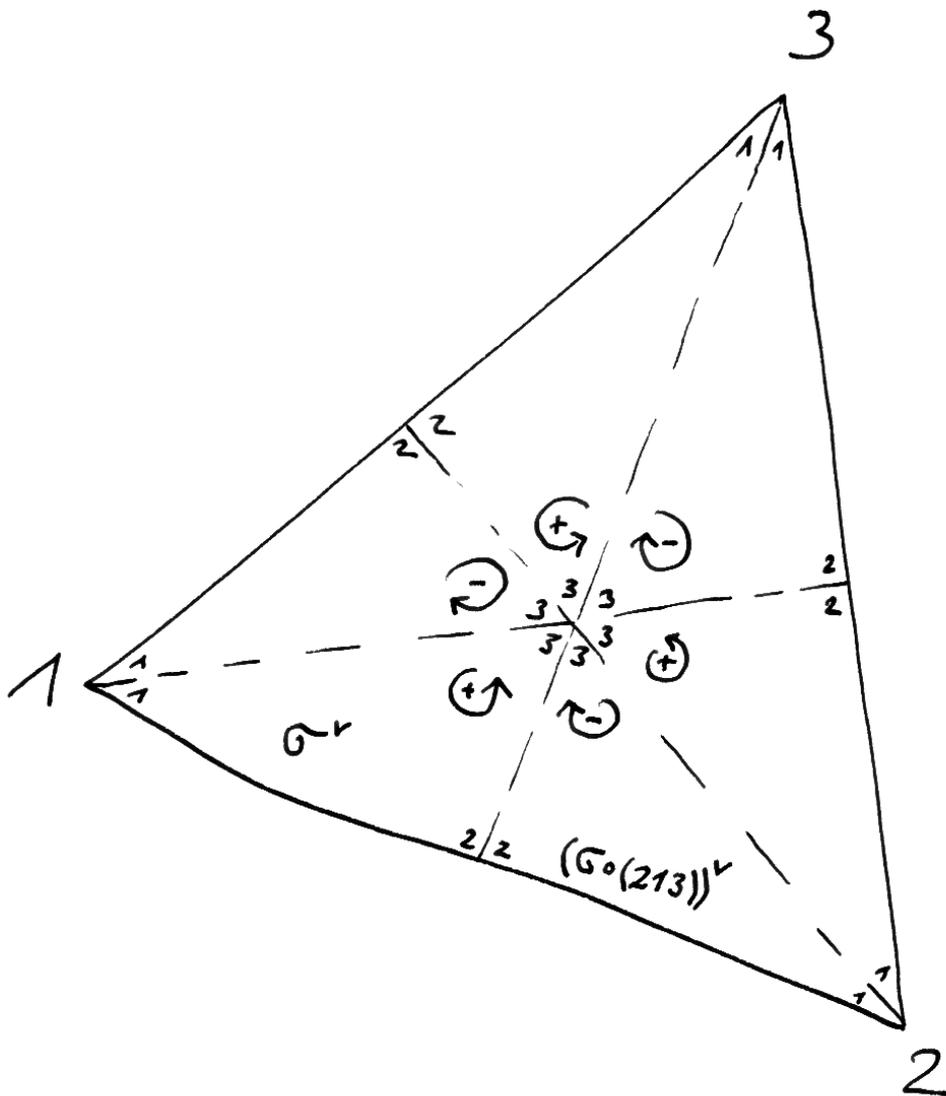
5.4.5. Diese dualen Zellen mögen mit ihren ganzen Vorzeichen unanschaulich wirken. Der erste Teil des folgenden Satzes sollte hier jedoch der Anschauung helfen, zeigt er doch, daß die Vorzeichen jedenfalls stets so zusammenpassen, daß der Rand einer dualen Zelle eine Linearkombination dualer Zellen ist. Das hat im Bild der Simplicialketten unter anderem die anschauliche Bedeutung, daß “die einzelnen Simplizes einer dualen Zelle gerade so orientiert sind, daß sich die internen Ränder gegenseitig wegheben”.

**Satz 5.4.6 (Geometrische Interpretation der Schnittzahlen).** *Sei der Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung einer kompakten orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$ . Sei auf der Menge  $E$  der Ecken von  $\mathcal{K}$  eine Anordnung gewählt. So gilt:*

1. *Die von den dualen Zellen im Sinne von 5.4.4 erzeugten Untergruppen  $C_q \subset S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  bilden einen Unterkomplex  $C \subset S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  im Komplex der ordnungsverträglichen simplicialen Ketten der baryzentrischen Unterteilung  $\check{\mathcal{K}}$  von  $\mathcal{K}$ , und die Einbettung dieses Unterkomplexes induziert auf allen Homologiegruppen Isomorphismen  $\mathcal{H}_q C \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_q M$ .*
2. *Wird  $\alpha \in \mathbb{H}_q M$  repräsentiert durch einen “simplicialen” Zykel der Gestalt  $\sum_{t \in \mathcal{K}_q} \alpha_t \langle t \rangle \in S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$  und  $\beta \in \mathbb{H}_{n-q} M$  durch einen “zellulären” Zykel der Gestalt  $\sum_{t \in \mathcal{K}_q} \beta_t c(t) \in C_{n-q}$ , so gilt für ihre Schnittzahl*

$$\alpha \cdot \beta = \sum_t \alpha_t \beta_t$$

*Beweis.* Zunächst einmal erinnern wir die Definition der Schnittzahl: Wir hatten dazu ja das  $a \in \mathbb{H}^{n-q} M$  bzw.  $b \in \mathbb{H}^q M$  genommen mit  $a \cap \omega_M = \alpha$  bzw.  $b \cap \omega_M = \beta$  und dann unsere Schnittzahl als Kronecker-Paarung des cup-Produkts dieser Kohomologieklassen mit dem Fundamentalzykel definiert, in Formeln  $\alpha \cdot \beta = \langle a \cup b, \omega_M \rangle$ . Mit der Adjunktionsformel 4.5.4 erhalten wir daraus auch die alternative Darstellung  $\alpha \cdot \beta = \langle a, \beta \rangle$ . Es reicht also, das Urbild  $a$  von  $\alpha$  unter dem Isomorphismus der Poincaré-Dualität hinreichend explizit zu beschreiben. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen. Gegeben ein Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  liefert das baryzentrische Unterteilen ganz allgemein eine Homotopieäquivalenz  $S\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} S\check{\mathcal{K}}$  zwischen den entsprechenden Komplexen von Simplicialketten. Genauer erhält man eine Injektion von der Menge  $\mathcal{K}_q^{\leq}$  aller angeordneten  $q$ -Simplizes von  $\mathcal{K}$  in die Menge  $\check{\mathcal{K}}_q^{\leq}$  aller angeordneten  $q$ -Simplizes von  $\check{\mathcal{K}}$ , indem man  $\sigma : \{0, \dots, q\} \hookrightarrow E$  abbildet auf  $\sigma^\vee : \{0, \dots, q\} \hookrightarrow \check{E}$  gegeben durch  $\sigma^\vee(i) = \{\sigma(0), \dots, \sigma(i)\}$ . Anschaulich gesprochen erhalten wir so “alle  $q$ -Simplizes von  $\check{\mathcal{K}}$ , die in  $q$ -Simplizes von  $\mathcal{K}$  liegen”, und die Abbildung  $\mathcal{K}_q^{\leq} \rightarrow S_q \check{\mathcal{K}}$  gegeben durch



Ein angeordneter 3-Simplex  $\sigma$  und die sechs angeordneten 3-Simplizes  $\sigma \circ \pi$  mit Vorzeichen, deren Summe seine baryzentrische Unterteilung  $b(\sigma)$  im Sinne des Beweises von 5.4.6 repräsentiert. Die Kreispile sind eigentlich überflüssig und betonen nur die Reihenfolge der Ecken in den angeordneten 3-Simplizes  $\sigma \circ \pi$  und die Beziehung zum Signum der zugehörigen Permutationen  $\pi$ .

$$\sigma \mapsto \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{q+1}} \text{sgn}(\pi) (\sigma \circ \pi)^\vee$$

induziert eine Homotopieäquivalenz  $b : S\mathcal{K} \xrightarrow{\simeq} S\check{\mathcal{K}}$ , die wir wieder die **baryzentrische Unterteilung** nennen. Wenden wir auf unseren Fundamentalzykel aus 5.4.3 die baryzentrische Unterteilung an, so erhalten wir den Repräsentanten

$$\check{\omega} = \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \text{sgn}(\pi) (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee$$

des Fundamentalzykels in  $S_n^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$ . Die weitere Argumentation wird ausgehen von einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} C^*[n] & \overset{\text{---}}{\longrightarrow} & S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \\ \uparrow & \nearrow & \downarrow b \\ S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})[n] & \xrightarrow{\cap \check{\omega}} & S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}}) \end{array}$$

Der Komplex  $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  der ordnungsverträgliche simplizialen Koketten mitsamt einem Isomorphismus von Komplexen  $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\simeq} S^* \check{\mathcal{K}}$  ist in derselben Weise erklärt wie der Komplex der ordnungsverträgliche simplizialen Ketten in 5.4.2. Die durchgezogenen Pfeile sind uns bereits bekannt, die rechte Vertikale ist modulo unserer Identifikation von Simplizialketten mit ordnungsverträglichen simplizialen Ketten das baryzentrische Unterteilen, die untere Horizontale die Restriktion auf ordnungsverträgliche simpliziale Ketten unserer Poincaré-Dualität aus 5.3.7. Unser Ziel ist die Ergänzung durch Kettenabbildungen wie durch die gestrichelten Pfeile angedeutet zu einem kommutativen Diagramm von Homotopieäquivalenzen, dessen obere Horizontale dann die geometrische Bedeutung des Dualitäts-Isomorphismus klar macht. Als ersten Schritt in diese Richtung behaupte ich, daß die durch  $\cap \check{\omega}$  gegebene Kettenabbildung wie durch den schrägen gestrichelten Pfeil angedeutet über unsere baryzentrische Unterteilung  $b$  faktorisiert. Ein  $q$ -Simplex  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  ist ja per definitionem eine echt aufsteigende Kette  $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  von Simplizes von  $\mathcal{K}$ . Die zugehörigen  $\langle \check{u} \rangle$  bilden eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  und die zugehörigen Linearformen bilden eine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $\langle \check{u} \rangle^*$  von  $S_{\text{os}}^q \Delta(\check{\mathcal{K}})$ . Für das cap-Produkt  $\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega}$  mit dem Fundamentalzykel erhalten wir nach 4.5.4 die Darstellung

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = (-1)^{q(n-q)} \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \text{sgn}(\pi) \langle \langle \check{u} \rangle^*, (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \rho^q \rangle (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \lambda^{n-q}$$

Insbesondere ist die rechte Seite nur dann nicht Null, wenn  $\check{u}$  die Gestalt  $\check{u}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  hat mit  $\check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}$  und dann natürlich auch  $\check{u}_i \in \mathcal{K}_{n-q+i}$  für alle  $i$ . Seien nun  $u_1, \dots, u_q \in E$  die Ecken des ursprünglichen Komplexes mit  $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$ , so daß also gilt  $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \dots, u_q\}$ . Sei  $s = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  die angeordnete Darstellung des  $n$ -Simplex  $s$ . Auf der rechten Seite liefert nur  $s = \check{u}_q \in \mathcal{K}_n$  von Null verschiedene Beiträge, und zwar nur für  $\pi \in \mathcal{S}_{n+1}$  mit  $s_{\pi(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\pi(n)} = u_q$ , und für diese ist der Gesamtbeitrag bis auf ein Vorzeichen gerade

$$b(\check{u}_0) = \sum_{\kappa \in \mathcal{S}_{n-q+1}} \operatorname{sgn}(\kappa) (\langle \check{u}_0 \rangle \circ \kappa)^\vee$$

Das zeigt schon einmal, dass  $\cap \check{\omega}$  wie behauptet über  $b$  faktorisiert und liefert den Pfeil schräg nach oben. Um auch das Vorzeichen anzugeben, betrachten wir die angeordnete Darstellung  $\check{u}_0 = (v_0, \dots, v_{n-q})$  und die Permutation  $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$  mit  $s_{\tau(0)} = v_0, \dots, s_{\tau(n-q)} = v_{n-q}, s_{\tau(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\tau(n)} = u_q$ , finden für das fragliche Vorzeichen die Darstellung  $\eta(\check{u}) = (-1)^{q(n-q)} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\tau)$  und erhalten für  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  die Formel

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = \begin{cases} \eta(\check{u}) b(\check{u}_0) & \text{falls } \check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bilden wir den Quotienten  $C^*$  von  $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  nach den  $\langle \check{u} \rangle^*$  mit  $\check{u}_0 \notin \mathcal{K}_{n-q}$  sowie den  $\eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle^* - \eta(\check{v}) \langle \check{v} \rangle^*$  mit  $\check{u}_0 = \check{v}_0$ , so faktorisiert unser  $\cap \check{\omega}$  weiter und liefert, wie man leicht sieht, einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$C^*[n] \xrightarrow{\sim} S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$$

unter Verwendung unserer Konvention 4.1.3. Man kann in dieser Weise sogar einen Beweis der Poincaré-Dualität im triangulierbaren Fall geben, wofür dann allerdings noch gezeigt werden muß, daß die linke Vertikale unseres Diagramms Isomorphismen auf der Homologie induziert. Da wir aber vielmehr an der anschaulichen Bedeutung der Poincaré-Dualität interessiert sind, drehen wir den Spieß um und folgern aus der Poincaré-Dualität 5.3.7, daß die linke Vertikale unseres Diagramms  $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}}) \rightarrow C^*$  Isomorphismen auf der Kohomologie induziert. Nach 4.6.3 ist sie also eine Homotopieäquivalenz und unser ganzes Diagramm besteht aus Homotopieäquivalenzen. Gehen wir nun in dieser linken Vertikale zu den dualen Komplexen über, so erhalten wir offensichtlich genau den Unterkomplex  $C \subset S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  aus dem ersten Teil unseres Satzes 5.4.6, und damit ist auch dieser erste Teil bereits bewiesen. Des weiteren sehen wir, daß für  $t \in \mathcal{K}_{n-q}$  und  $\langle t \rangle$  der zugehörige angeordnete Simplex seine baryzentrische Unterteilung  $b(\langle t \rangle)$  genau ein Urbild hat unter  $\cap \check{\omega}$ , und daß dieses Urbild auf der dualen Zelle  $c(t)$  den Wert Eins annimmt und auf allen anderen dualen Zellen den Wert Null. Daraus folgt dann auch der zweite Teil des Satzes.  $\square$

## 5.5 Anschauung im nichtkompakten Fall

5.5.1. *Später!* In derselben Weise erklären wir die Komplexe  $S^{!os} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  bzw.  $S_{!os}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  mitsamt Isomorphismen von Komplexen nach  $S^! \check{\mathcal{K}}$  bzw.  $S_!^* \check{\mathcal{K}}$ .

5.5.2. Sei nun unser Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung einer nicht notwendig kompakten separablen orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeit. Wir wählen eine Anordnung  $\leq$  auf der Menge  $E$  der Ecken von  $\mathcal{K}$ . Der Fundamentalzykel von  $\Delta(\mathcal{K})$  im Sinne von 5.2.12 hat wegen 5.2.20 genau einen Repräsentanten in den Borel-Moore-Simplizialketten und damit auch genau einen Repräsentanten  $\omega \in S_n^{!os} \Delta(\mathcal{K})$  in der in hoffentlich offensichtlicher Weise definierten Gruppe der ordnungsverträglichen simplizialen Borel-Moore- $n$ -Ketten. Nach 5.2.21 hat er Gestalt

$$\omega = \sum_{s \in \mathcal{K}_n} \varepsilon(s) \langle s \rangle$$

für wohlbestimmtes  $\varepsilon : \mathcal{K}_n \rightarrow \{\pm 1\}$  mit  $\langle s \rangle$  dem zum  $n$ -Simplex  $s$  gehörigen angeordneten  $n$ -Simplex wie im Beweis von 2.4.3. Wenden wir darauf die baryzentrische Unterteilung an, so erhalten wir den Repräsentanten

$$\check{\omega} = \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\pi) (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee$$

des Fundamentalzykels in  $S_n^{!os} \Delta(\check{\mathcal{K}})$ . Die weitere Argumentation wird ausgehen vom Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_!^* \Delta(\check{\mathcal{K}})[n] & \overset{\sim}{\dashrightarrow} & S^{os} \Delta(\mathcal{K}) \\ \uparrow & \nearrow & \downarrow b \\ S_{!os}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})[n] & \xrightarrow{\cap \check{\omega}} & S^{os} \Delta(\check{\mathcal{K}}) \end{array}$$

Die durchgezogenen Pfeile sind uns bereits bekannt, die rechte Vertikale ist modulo unserer Identifikation von Simplizialketten mit ordnungsverträglichen simplizialen Ketten das baryzentrische Unterteilen, die untere Horizontale die Restriktion auf ordnungsverträgliche simpliziale Ketten unserer Poincaré-Dualität auf singulären Ketten aus 5.2.18. Unser Ziel ist die Ergänzung durch Kettenabbildungen wie durch die gestrichelten Pfeile angedeutet zu einem kommutativen Diagramm von Homotopieäquivalenzen, dessen obere Horizontale dann die geometrische Bedeutung des Dualitäts-Isomorphismus klar macht. Als ersten Schritt in diese Richtung behaupte ich, daß die durch  $\cap \check{\omega}$  gegebene Kettenabbildung wie durch den schrägen gestrichelten Pfeil angedeutet über unsere baryzentrische Unterteilung  $b$  faktorisiert. Ein  $q$ -Simplex  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  ist ja per definitionem eine echt

aufsteigende Kette  $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  von Simplizes von  $\mathcal{K}$ . Die zugehörigen  $\langle \check{u} \rangle$  bilden eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $S_q^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$  und die zugehörigen Linearformen bilden eine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $\langle \check{u} \rangle^*$  von  $S_{1\text{os}}^q \Delta(\mathcal{K})$ . Für das cap-Produkt  $\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega}$  mit dem Fundamentalzykel erhalten wir nach 4.5.4 die Darstellung

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = (-1)^{q(n-q)} \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \text{sgn}(\pi) \langle \langle \check{u} \rangle^*, (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \rho^q \rangle (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \lambda^{n-q}$$

Insbesondere ist die rechte Seite nur dann nicht Null, wenn  $\check{u}$  die Gestalt  $\check{u}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  hat mit  $\check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}$  und dann natürlich auch  $\check{u}_i \in \mathcal{K}_{n-q+i}$  für alle  $i$ . Seien nun  $u_1, \dots, u_q \in E$  die Ecken des ursprünglichen Komplexes mit  $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$ , so daß also gilt  $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \dots, u_q\}$ . Sei  $s = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  die angeordnete Darstellung des  $n$ -Simplex  $s$ . Auf der rechten Seite liefert nur  $s = \check{u}_q \in \mathcal{K}_n$  von Null verschiedene Beiträge, und zwar nur für  $\pi \in \mathcal{S}_{n+1}$  mit  $s_{\pi(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\pi(n)} = u_q$ , und für diese ist der Gesamtbeitrag bis auf ein Vorzeichen gerade

$$b(\check{u}_0) = \sum_{\kappa \in \mathcal{S}_{n-q+1}} \text{sgn}(\kappa) (\langle \check{u}_0 \rangle \circ \kappa)^\vee$$

Das zeigt schon einmal, dass  $\cap \check{\omega}$  wie behauptet über  $b$  faktorisiert und liefert den Pfeil schräg nach oben. Um das Vorzeichen anzugeben, betrachten wir die angeordnete Darstellung  $\check{u}_0 = (v_0, \dots, v_{n-q})$  und die Permutation  $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$  mit  $s_{\tau(0)} = v_0, \dots, s_{\tau(n-q)} = v_{n-q}, s_{\tau(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\tau(n)} = u_q$ , finden für das fragliche Vorzeichen die Darstellung  $\eta(\check{u}) = (-1)^{q(n-q)} \varepsilon(s) \text{sgn}(\tau)$  und erhalten für  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  die Formel

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = \begin{cases} \eta(\check{u}) b(\check{u}_0) & \text{falls } \check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bilden wir den Quotienten  $C_1^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  von  $S_{1\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  nach den  $\langle \check{u} \rangle^*$  mit  $\check{u}_0 \notin \mathcal{K}_{n-q}$  sowie den  $\eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle^* - \eta(\check{v}) \langle \check{v} \rangle^*$  mit  $\check{u}_0 = \check{v}_0$ , so faktorisiert unser  $\cap \check{\omega}$  weiter und liefert, wie man leicht sieht, einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$C_1^* \Delta(\check{\mathcal{K}})[n] \xrightarrow{\sim} S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$$

Man kann in dieser Weise sogar einen Beweis der Poincaré-Dualität im triangulierbaren Fall geben, wofür dann allerdings noch gezeigt werden muß, daß die linke Vertikale unseres Diagramms Isomorphismen auf der Homologie induziert. Da wir aber vielmehr an der anschaulichen Bedeutung der Poincaré-Dualität interessiert sind, drehen wir den Spieß um und folgern aus der Poincaré-Dualität, daß die linke Vertikale unseres Diagramms  $S_{1\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}}) \rightarrow C_1^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  Isomorphismen auf

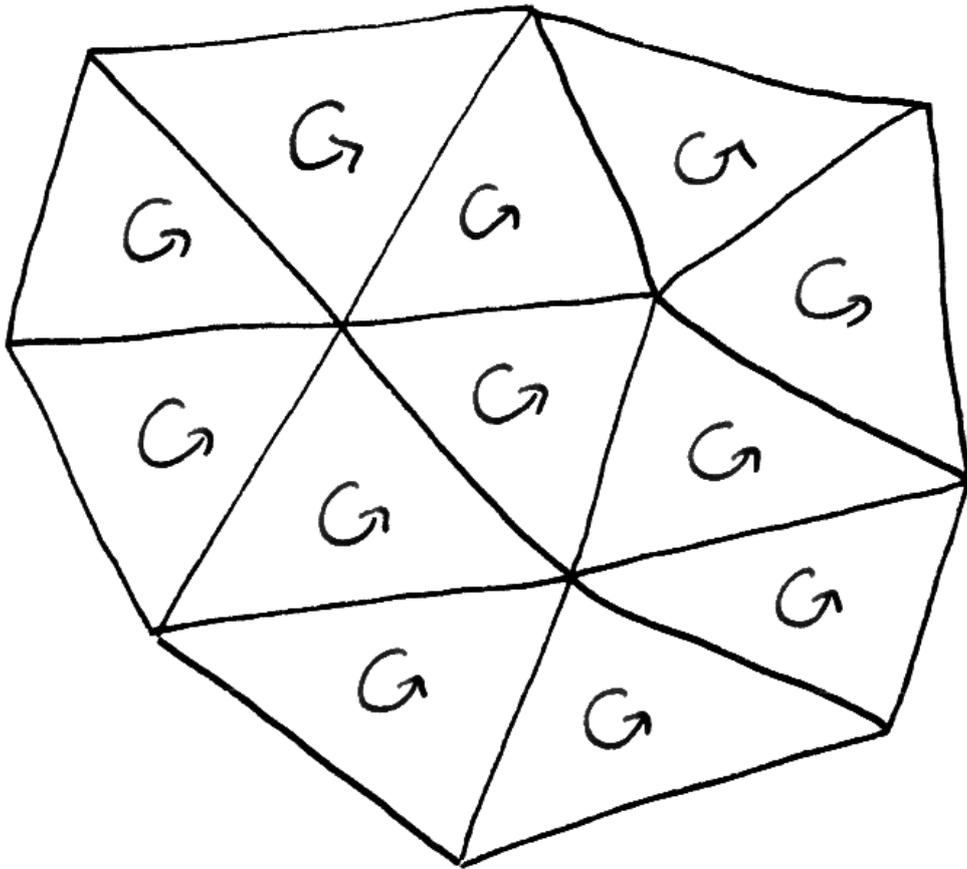
der Kohomologie induziert. Nach 4.6.3 ist sie also eine Homotopieäquivalenz und unser ganzes Diagramm besteht aus Homotopieäquivalenzen. Um nun endlich zur anschaulichen Bedeutung vorzudringen, betrachten wir in der linken Vertikalen die dualen Komplexe und erhalten so eine Homotopieäquivalenz

$$C^! \Delta(\check{\mathcal{K}}) \hookrightarrow S^{!os} \Delta(\check{\mathcal{K}})$$

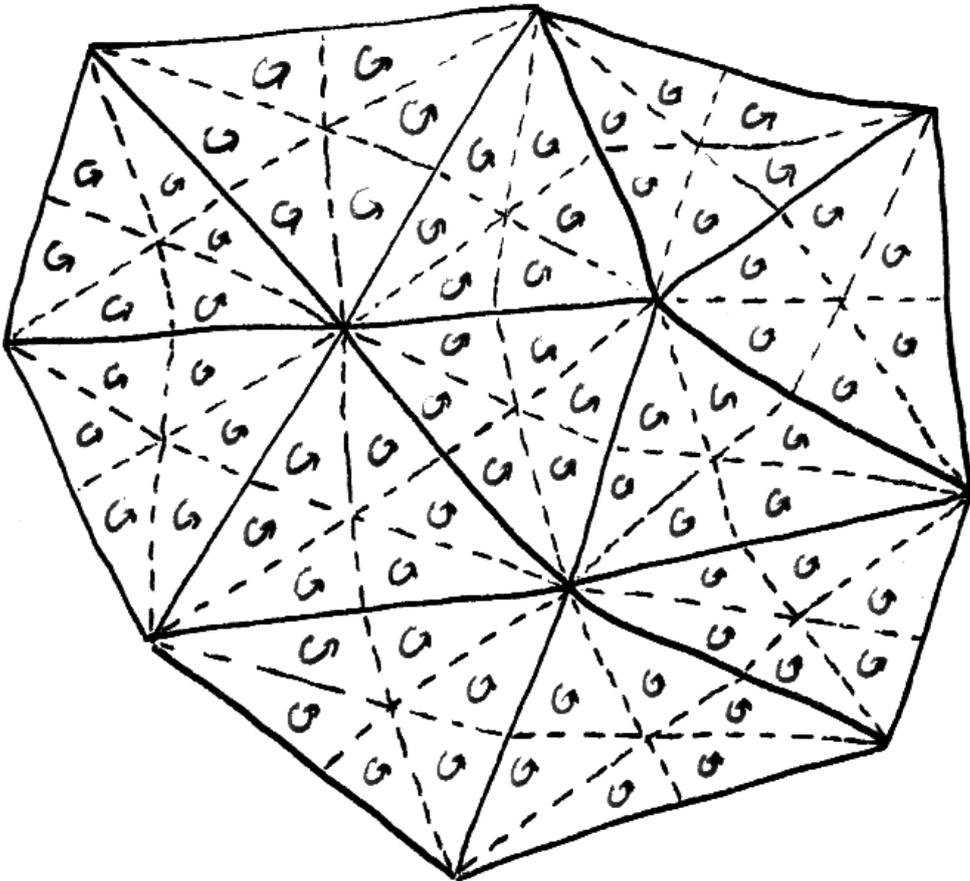
wo der  $q$ -te Teil  $C_q^! \Delta(\check{\mathcal{K}})$  unseres Teilkomplexes aus allen “unendlichen formalen Linearkombinationen” über  $t \in \mathcal{K}_{n-q}$  gewisser Ausdrücke  $c(t)$  besteht, die ihrerseits gegeben werden als

$$c(t) = \sum \eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle$$

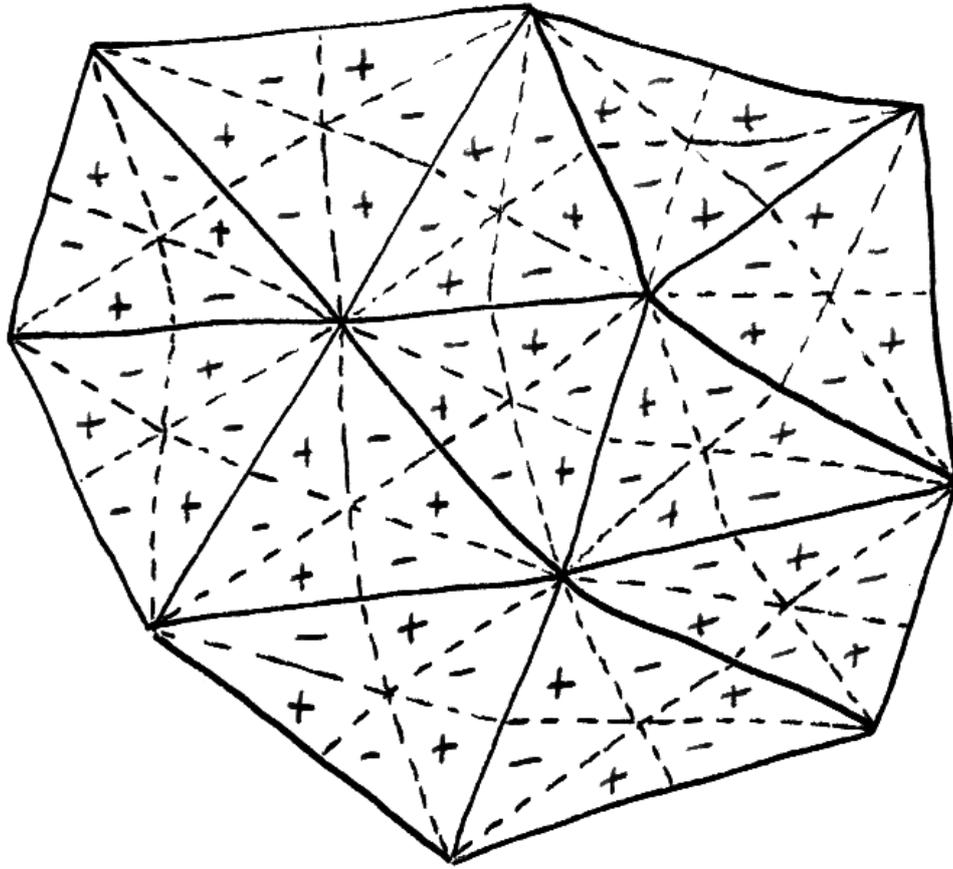
summiert über alle  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  mit  $\check{u}_0 = t$ .



BlahBlah



BlahBlah



BlahBlah

## Literatur

- [AN1] *Skriptum Analysis 1*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die internen Querverweise funktionieren.
- [AN3] *Skriptum Analysis 3*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die internen Querverweise funktionieren.
- [GR] *Skriptum Grundlagen*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die internen Querverweise funktionieren.
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die internen Querverweise funktionieren.
- [Mas99] W. S. Massey, *A history of cohomology theory*, History of Topology (I. M. James, ed.), North-Holland, 1999, pp. 579–603.
- [She74] S. Shelah, *Infinite abelian groups*, Israel Journal of Mathematics **18** (1974), 243–256.
- [SZ94a] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, second ed., Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1994, Eine Einführung. [An introduction].
- [SZ94b] ———, *Algebraische Topologie*, second ed., Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1994, Eine Einführung. [An introduction].
- [Vic94] James W. Vick, *Homology theory*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 145, Springer-Verlag, New York, 1994, An introduction to algebraic topology.

## Index

- $X/A$  bei topologischen Räumen, 61
- [1] verschobener Komplex, 126
- $\otimes$ 
  - Tensorprodukt
    - über Ring, 106
- $\pi^!$  Transfer der Homologie, 20
- $\times$  Kreuzprodukt
  - der Homologie, 125
  - der Kohomologie, 139
- $f^*$  Rückzug
  - für singuläre Kohomologie, 136
- $f_*$  für  $H_q(f)$ , 18
- $\mathcal{K}_q^{\leq}$  angeordnete  $q$ -Simplizes, 4
- $\xrightarrow{\simeq}$  Homotopieäquivalenz, 27
- \*
- Torsionsprodukt, 114
  
- Abbildungsgrad
  - allgemein, 99
  - lokaler, 99
- Abbildungskegel
  - von Kettenabbildung, 152
  - von stetiger Abbildung, 81
- Adjunktionsformel
  - für  $\cup$  und  $\cap$ , 148
- Alexander-Whitney-Abbildung, 130
- Ankleben einer Zelle, 81
- Anklebesequenz, 81
- Augmentation, 77
  - bei singulären Ketten, 15
- Ausdehnung durch Null
  - in der singulären Theorie, 178
- Ausschneidung, 51, 57
  - Kohomologie, 155
- azyklisch
  - topologischer Raum, 123
- azyklische Modelle, 123
  
- $B_q\mathcal{K}$  Simplizialränder, 8
- $B_qX$  singuläre Ränder, 14
- Bar-Komplex
  - nicht normalisierter, 111
- baryzentrische Unterteilung, 183
- Basis eines Funktors, 122
- beschränkt in Richtung der Pfeile, 152
- Betti-Zahl, 66
- bilinear
  - bei Moduln, 107
- Bimodul, 108
- Bockstein-Homomorphismen, 103, 137
- Borel-Moore-Homologie, 171
  - simpliziale, 175
- Brouwer, Fixpunktsatz
  - allgemeiner, 54
  
- cap-Produkt
  - auf der Homologie, 149
  - mit lokal endlicher Kette, 175
  - von Ketten, 148
- Cauchy'scher Integralsatz
  - Umlaufzahlversion, 35
- cok Kokern
  - bei abelschen Gruppen, 156
- col Kolimes, 163
- colim Kolimes, 163
- cup-Produkt, 138, 143
  
- $\Delta$ -Komplex, 70
- dg-Gruppe, 19
- dg-Modul, 146
  - über dg-Ring, 148
- dg-Ring, 144
- dgHot, 147
- dgMod, 19, 146
- differentiell
  - abelsche Gruppe, 19

graduierte abelsche Gruppe, 19  
 graduiertes Modul, 146  
 graduiertes Modul über dg-Ring, 148  
 graduiertes Ring, 144  
 differentieller graduiertes Modul, 146  
 Dimension  
   einer simplizialen Menge, 73  
 divisibel, 158  
 duale Zelle, 185  
 dualen Komplex, 138  
 Egalisator, 166  
 Eilenberg-Zilber, 120  
 Eilenberg-Zilber-Abbildung, 120  
 Eilenberg-Zilber-Transformation, 120  
 Eiß umgedrehte Abbildungen, 145  
 erblicher Ring, 162  
 Erweiterung  
   von abelschen Gruppen  
     abstrakte, 156  
     konkrete, 156  
 Euler'scher Polyedersatz, 67  
 Eulercharakteristik  
   eines Kettenkomplexes, 66  
   eines topologischen Raums, 66  
 exakte Sequenz  
   von Systemen, 168  
 Ext-Sequenz  
   im ersten Eintrag, 160  
   im zweiten Eintrag, 157  
 extension, 156  
 feine Ketten, 57  
 filtrierend  
   partiell geordnete Menge, 163  
 final  
   in partiell geordneter Menge, 167  
 Fixpunktsatz  
   simplizialer, 68  
 Fixpunktsatz von Brouwer  
   allgemeiner, 54  
 frei  
   abelsche Gruppe, 51  
   Funktorkomplex, 123  
   Untergruppe, 119  
 Fünferlemma, 49  
 Fundamentalzykel, 92  
   in der Borel-Moore-Homologie, 173, 175  
 $\Gamma$  Schnitt  
   der Orientierungsgarbe, 94  
 $\Gamma_1$  Schnitte mit kompaktem Träger  
   der Orientierungsgarbe, 94  
 graduiert  
   abelsche Gruppe, 19  
   Ring, 144  
 graduiert kommutativ, 146  
 Graduierte Kommutativität, 132, 140  
 graduiertes Modul, 149  
 $\mathcal{H}_q$  Homologie eines Komplexes, 19  
 $H_{\text{sing}}^q$  singuläre Kohomologie, 136  
 $\tilde{H}_q$  reduzierte Homologiegruppen, 77  
 $H_q^{\text{sing}}$  singuläre Homologie, 14  
 $H_!^q(X; G)_{\text{sing}}$  Kohomologie mit kompaktem Träger, 170  
 $H_!^q$  Kohomologie mit kompaktem Träger, 170  
 $H_c^q$  Kohomologie mit kompaktem Träger, 170  
 $H_q$  simpliziale Homologie, 8  
 $H_q$  singuläre Homologie, 14  
 Hauptlemma der homologischen Algebra, 121  
 Hinterseite eines Simplex, 130  
 $\text{Hom}$  umgedrehte Hom-Räume, 145  
 Hom-Komplex, 28  
 Homologie  
   eines Kettenkomplexes, 19  
   eines Punktes, 15  
   konvexer Mengen, 15

- mit Koeffizienten, 103
- singuläre, 14
- von  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ , 104
- Homologiegruppe
  - der Sphären, 52
  - relative, 43
  - simpliziale, 8
  - singuläre, 14
- Homologiekategorie, 14
  - in Kettenkomplex, 20
- Homologiesequenz
  - abstrakte, 46
  - eines Raumpaars, 46
  - eines Raumtripels, 50
- homotop, 27
  - frei homotop, 32
- Homotopie
  - bei Raumpaaren, 45
- Homotopie-Invarianz
  - der Homologie, 20
  - der Kohomologie, 153
- Homotopieäquivalenz
  - algebraische, 27
- Homotopiekategorie
  - algebraische, 27
- Hopf-Invariante, 144
- Hot
  - algebraische Homotopiekategorie, 27
- Hurewicz-Isomorphismus, 30
- injektiv
  - Modul, 158
- injektive abelsche Gruppe, 158
- Integralsatzes von Cauchy
  - Umlaufzahlversion, 35
- Invarianz von Gebieten, 80
- Jordan'scher Kurvensatz, 80
- Jordan-Brouwer
  - Satz von, 76
- $k$ -Skelett, 63
- Kantenabbildung, 11
- Ket, 19
- Kette
  - simpliziale, 62
  - ordnungsverträgliche, 63
  - Simplizialkette, 4
  - singuläre, 11
- Kettenabbildung, 19
- kettenhomotop, 27
- Kettenkomplex, 19
- Koassoziativität, 143
- kofinal
  - in partiell geordneter Menge, 167
- Kohomologie
  - relative, 154
  - simpliziale, 156
  - singuläre, 136
  - mit kompaktem Träger, 170
- Kohomologiegruppen, 136
- Kohomologiering
  - singulärer, 139
- Kokern
  - bei abelschen Gruppen, 156
- Kokette vom Grad  $q$ , 136
- Koketten
  - relative, 154
  - singuläre mit kompaktem Träger, 172
- Kolimes, 163
  - direkter, 163
  - filtrierender, 163
  - induktiver, 163
- Komplex, 19
  - $\Delta$ -Komplex, 70
- Korand, 136
- Korandoperator, 136
- Kosystem, 165
- Kozykel, 136
- Kreuzprodukt
  - der Homologie, 125
  - der Kohomologie, 139
- Kronecker-Paarung, 137

Künneth-Formel, 126  
     mit Körperkoeffizienten, 125  
 $\lambda^p$  Vorderseite eines Simplex, 130  
 lange exakte Sequenz  
     der Homologie, abstrakte, 46  
     der Kohomologie, 154  
 $\lim$  Limes in Kategorie, 165  
 $\varinjlim$  direkter Limes in Kategorie, 163  
 $\varprojlim$  inverser Limes in Kategorie, 166  
 $\overleftarrow{\text{Limes}}$ , 165  
     direkter, 163  
     in Kategorie, 165  
     induktiver, 163  
     inverser, 166  
     projektiver, 166  
 lineare Fortsetzung, 4  
 lokal endlich  
     Simplizialkomplex, 178  
 lokal endlichen singulären  $q$ -Ketten, 171  
 Mannigfaltigkeit  
     topologische, 87  
 Mayer-Vietoris-Sequenz  
     der Homologie, 59  
     der Kohomologie, 155  
         mit kompaktem Träger, 180  
     für  $H_i^*$ , 180  
     relative, 61  
     relative, der Kohomologie, 155  
 Menge  
     semisimpliziale, 70  
 Mittag-Leffler  
     Bedingung von, 169  
 Morphismus  
     von Raumpaaren, 43  
 Morphismus von Systemen, 168  
 Natürlichkeit, 131, 140  
 Neunerlemma, 50  
 nullhomolog, 30  
 nullhomotop  
     Kettenabbildung, 27  
     Komplex, 27  
     nullhomotope, 147  
     Nullkomplex, 19  
     Nullschnitt, 91  
 $\otimes$   
     Tensorprodukt  
         über Ring, 106  
     opponierten dg-Ring, 146  
 orientierbar  
     Mannigfaltigkeit, topologische, 87  
 orientiert  
     Mannigfaltigkeit, topologische, 87  
 Orientierung  
     von topologischer Mannigfaltigkeit,  
         87  
 Orientierungsdarstellung, 92  
 Orientierungsgarbe, 90  
     mit Koeffizienten, 104  
 Poincaré-Dualität, 150  
     allgemeine, 181  
 Prismen-Operator, 15  
 Projektionsformel  
     der Homologie, 149  
 projektiv  
     Modul, 121  
 $\rho^q$  Hinterseite eines Simplex, 130  
 Rand  
     in Kettenkomplex, 20  
     simplizialer, 8  
     singulärer, 14  
 Randoperator, 6  
     der langen exakten Homologiesequenz,  
         46  
 Raumpaar, 42  
 rechtsexakt, 108  
 reduzierte Homologie mit Koeffizienten  
     in  $G$ , 103  
 reduzierte Homologiegruppen, 77

- relative  $q$ -Ränder, 43
- relative Homologiegruppen, 43
- relative Ketten, 42
- relative Kohomologie, 154
- relative Koketten, 154
- Rückzug
  - für singuläre Kohomologie, 136
- $S_i^* \mathcal{K}$  Simplizialkoketten mit kompaktem Träger, 178
- $S_q \mathcal{K}$  Simplizialkette, 4
- $S_q X$  singuläre  $q$ -Ketten, 11
- Schnitt
  - der Orientierungsgarbe, 94
- Schnittzahl, 183
- semisimpliziale Menge, 70
  - vollständige, 70
- Simplex
  - angeordneter, 4
  - singulärer, 11
- simplizial
  - Homologiegruppe, 8
  - Kette, 62
    - ordnungsverträgliche, 63
  - Kohomologie, 156
  - Menge, 70
- Simplizialkette, 4
  - lokal endliche, 175
- Simplizialkokette, 155
  - mit kompaktem Träger, 178
- Simplizialrand, 8
- Simplizialzykel, 8
- singulär
  - $q$ -Kette, 11
  - $q$ -Simplex, 11
  - Homologie, 14
  - Kohomologiering, 139
  - Kokette mit Koeffizienten, 135
  - Koketten mit kompaktem Träger, 172
- singulären Homologie
  - mit Koeffizienten, 14
- Skelett
  - $k$ -Skelett von Simplizialkomplex, 72
- Skelett von Simplizialkomplex, 63
- spaltend
  - Injektion, 50
  - Surjektion, 50
- Standardauflösung, 113
- Standardsimplex, 11
- superkommutativ, 146
- Suspension, 80
- System
  - direktes, 163
  - in Kategorie, 163
  - induktives, 163
  - inverses, 166
- $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$  tautologischer Simplex, 23
- tautologischer Simplex, 23
- Tensorkomplex, 113
- Tensorprodukt
  - über Ring, 106
  - von Komplexen, 113
- $\text{Top}^2$  Raumpaare, 45
- $\text{Top}^c$  Raumpaare, 45
- topologisch
  - Mannigfaltigkeit, 87
- torsionsfrei
  - abelsche Gruppe, 109
  - Modul, 109
- Torsionsprodukt, 114
- Torsionssequenz, 114
- totale Homologie, 149
- Träger
  - von Schnitt
    - der Orientierungsgarbe, 94
- Transferabbildungen, 20
- transponiert
  - Abbildung
    - bei abelschen Gruppen, 136
- Umlaufzahl

eines Zyklus, 34  
universelle Eigenschaft, 163  
Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, 107  
Universelles Koeffiziententheorem  
der Homologie, 118  
der Kohomologie, 161  
Unterteilungsoperator, 54  
Verschlingungszahl, 80  
Vorderseite eines Simplex, 130  
Whitehead  
Vermutung von, 161  
Wilder, Satz von, 68  
Wurzel  
aus dem  $\mathbb{R}^3$ , 134  
 $Z_q X$  singuläre Zykel, 14  
 $Z_q \mathcal{K}$  Simplicialzykel, 8  
Zykel  
in Kettenkomplex, 20  
simplicialer, 8  
singulärer, 14  
zyklische Kategorie, 76