

Derivierte Kategorien und Funktoren

Wolfgang Soergel

12. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Lokalisierung von Kategorien	3
1.1	Die Pfadkategorie eines Köchers	3
1.2	Lokalisierung von Kategorien	4
1.3	Lokalisierung unter Ore-Bedingungen	8
1.4	Gesättigte Ore-Systeme*	13
2	Derivierte Kategorien	14
2.1	Triangulierte Kategorien	14
2.2	Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien	21
2.3	Triangulierte Kategorien und dg-Moduln*	24
2.4	Quotienten triangulierter Kategorien	30
2.5	Derivierte Kategorien	33
2.6	Beschränkte derivierte Kategorien	36
2.7	Derivierte Kategorien durch Auflösungen	40
2.8	Auflösungen unbeschränkter Komplexe*	44
2.9	Auflösungen unbeschränkter Garbenkomplexe*	48
2.10	Derivierte Kategorien als dg-Modulkategorien*	51
2.11	Derivierte Kategorien und dg-Ringoide*	53
3	Derivierte Funktoren	58
3.1	Limites in Funktorkategorien	58
3.2	Derivierte Funktoren auf Ore-Lokalisierungen	62
3.3	Derivierte Funktoren auf triangulierten Kategorien	66
3.4	Derivierte Funktoren auf derivierten Kategorien	69
3.5	Derivieren homologisch endlicher Funktoren	72
3.6	Garbenazyklische Morphismen	74
3.7	Totalkomplexe und deren Exaktheit	76
3.8	Derivieren von Tensor und Hom	79
4	Danksagung	82
	Literaturverzeichnis	83
	Index	84

1 Lokalisierung von Kategorien

1.1 Die Pfadkategorie eines Köchers

1.1.1. Ich erinnere an die Begriffswelt der Köcher aus [LA2] 7.5. Ein **Köcher** ist ein Datum $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ bestehend aus zwei Mengen P, E und zwei Abbildungen $a, e : P \rightarrow E$. Wir nennen die Elemente von E die **Ecken** des Köchers und die Elemente von P seine **Pfeile**. Für einen Pfeil $p \in P$ nennen wir $a(p)$ seinen **Anfangspunkt** und $e(p)$ seinen **Endpunkt**.

Definition 1.1.2. Gegeben ein Köcher $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$ bilden wir seine **Pfadkategorie** $\tilde{\mathcal{K}}$ wie folgt: Als Objekte nehmen wir die Ecken $\text{Ob } \tilde{\mathcal{K}} := E$ des Köchers, als Menge von Morphismen von einer Ecke x in eine weitere Ecke y die Menge aller Folgen von Pfeilen p_1, \dots, p_n mit $a(p_1) = x, e(p_n) = y$ und $e(p_i) = a(p_{i+1})$ für $1 \leq i < n$, disjunkt vereinigt mit einem weiteren Element Id_x im Fall $y = x$. Die Verknüpfung ist das „Aneinanderhängen“, unsere Folge wäre also die Verknüpfung $p_n \circ \dots \circ p_1 \in \tilde{\mathcal{K}}(x, y)$. Wir nennen die Morphismen in der Pfadkategorie $\tilde{\mathcal{K}}$ die **Pfade** in unserem Köcher.

Beispiel 1.1.3. Gegeben ein Köcher \mathcal{K} mit nur einer Ecke ist seine Pfadkategorie die Ein-Objekt-Kategorie nach [LA2] 7.1.5 zum freien Monoid über der Menge P seiner Pfeile nach [TF] ???. Wir haben also in unseren Notationen einen natürlichen Isomorphismus von Kategorien $[\text{Mon}^\uparrow P] \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{K}}$.

1.1.4. Der offensichtliche Köchermorphismus von einem Köcher in seine Pfadkategorie $\text{can} : \mathcal{K} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ hat die folgende **universelle Eigenschaft**: Ist \mathcal{C} eine Kategorie und $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Morphismus von Köchern, so gibt es genau einen Funktor $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $\tilde{\varphi} \circ \text{can} = \varphi$. Ist \mathcal{K} ein Köcher und \mathcal{C} eine Kategorie, so definiert die Restriktion sogar einen Isomorphismus von Kategorien $\text{Cat}(\tilde{\mathcal{K}}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Car}(\mathcal{K}, \mathcal{C})$. Hier machen wir beide Seiten dadurch zu Kategorien, daß wir als Morphismen die Transformationen nehmen. In anderen Worten ist das Bilden der Pfadkategorie $\text{Car} \rightarrow \text{Cat}$ der Linksadjungierte zum Vergessen der Verknüpfung $\text{Cat} \rightarrow \text{Car}$.

Definition 1.1.5. Gegeben eine Menge \mathcal{U} verstehen wir unter einem **\mathcal{U} -Köcher** einen Köcher \mathcal{K} derart, daß die Menge seiner Ecken eine Teilmenge von \mathcal{U} ist und die Menge aller Pfeile zwischen je zwei vorgegebenen Ecken ein Element von \mathcal{U} .

1.1.6. Eine \mathcal{U} -Kategorie im Sinne von [LA2] 7.9.1 ist damit dasselbe wie eine Kategorie, deren zugrundeliegender Köcher ein \mathcal{U} -Köcher ist.

Ergänzung 1.1.7. Gegeben eine Menge \mathcal{U} und ein Universum \mathfrak{V} mit $\mathcal{U} \in \mathfrak{V}$ ist für jeden \mathcal{U} -Köcher seine Pfadkategorie eine \mathfrak{V} -Kategorie.

1.2 Lokalisierung von Kategorien

Satz 1.2.1 (Lokalisierung von Kategorien). Seien \mathcal{C} eine Kategorie und S eine Menge von Morphismen in \mathcal{C} . So gibt es ein Paar $(\mathcal{C}_S, \text{can})$ bestehend aus einer Kategorie \mathcal{C}_S mitsamt einem Funktor $\text{can} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ derart, daß gilt:

1. Jeder Morphismus aus S wird unter can ein Isomorphismus in \mathcal{C}_S ;
2. Ist $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ irgendein Funktor, der alle Morphismen aus S zu Isomorphismen macht, so gibt es genau einen Funktor $\tilde{F} : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}$ mit $F = \tilde{F} \circ \text{can}$.

1.2.2. Natürlich ist ein derartiges Paar $(\mathcal{C}_S, \text{can})$ in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir erlauben uns deshalb den bestimmten Artikel und nennen es die **Lokalisierung von \mathcal{C} an S** . Manchmal verwenden wir auch die ausführlicheren Notationen $\mathcal{C}_S = S^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{C}[S^{-1}]$.

Ergänzung 1.2.3. Sind $\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}$ Universen, so liefert unsere Konstruktion genauer für jede Menge von Morphismen S einer \mathfrak{U} -Kategorie \mathcal{C} als Lokalisierung eine \mathfrak{A} -Kategorie \mathcal{C}_S .

1.2.4 (**Herkunft der Terminologie**). Der Begriff der Lokalisierung kommt aus der Ringtheorie, in der man das formale Einführen von Inversen aus geometrischen Gründen als Lokalisierung bezeichnet, vergleiche [KAG] 3.3.4. Mehr zur Kategorientheorie findet man in [Bor94].

1.2.5 (**Lokalisierung von Monoiden als Spezialfall**). Man kann insbesondere zu jedem Paar $G \supset S$ bestehend aus einem Monoid mit einer Teilmenge ein weiteres Monoid $S^{-1}G$ mit einem Monoidhomomorphismus $G \rightarrow S^{-1}G$ konstruieren derart, daß alle Elemente von S unter diesem Morphismus invertierbar werden und daß jeder Monoidhomomorphismus $G \rightarrow H$, unter dem alle Elemente von S invertierbar werden, auf genau eine Weise über $G \rightarrow S^{-1}G$ faktorisiert. Die Ein-Objekt-Kategorie $[S^{-1}G]$ ist in diesem Fall genau die Lokalisierung $[G]_S$ der Ein-Objekt-Kategorie zu G .

Beweis. Wir vergrößern den unserer Kategorie \mathcal{C} zugrundeliegenden Köcher zu einem neuen Köcher $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$, indem wir für jeden Morphismus $s : X \rightarrow Y$ aus S einen Pfeil $\bar{s} : Y \rightarrow X$ neu hinzunehmen. Zu dem so vergrößerten Köcher bilden wir dann die **Pfadkategorie 1.1.2**. Wir notieren $[p]$ den Morphismus in der Pfadkategorie zu einem Pfeil p aus dem Köcher $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$ und Id_X bzw. id_X die Identität auf einem Objekt X in unserer Pfadkategorie bzw. in unserer ursprünglichen Kategorie \mathcal{C} . Nun betrachten wir auf der Menge der Morphismen unserer Pfadkategorie die kleinste Äquivalenzrelation \sim derart, daß gilt:

1. $[s] \circ [\bar{s}] \sim \text{Id}_Y$ und $[\bar{s}] \circ [s] \sim \text{Id}_X$ für alle $s : X \rightarrow Y$ aus S ;

2. $\text{Id}_X \sim [\text{id}_X]$ und $[f] \circ [g] \sim [f \circ g]$ für alle verknüpfbaren Morphismen f und g aus \mathcal{C} ;
3. $v \sim w \Rightarrow u \circ v \sim u \circ w$ und $v \circ x \sim w \circ x$ für beliebige entsprechend verknüpfbare Morphismen u, v, w, x unserer Pfadkategorie.

Schließlich erklären wir die Kategorie \mathcal{C}_S , indem wir als Objekte die Objekte von \mathcal{C} nehmen, als Morphismen jedoch Äquivalenzklassen von Wegen in der Pfadkategorie des Köchers $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$ unter unserer Äquivalenzrelation \sim . Die letzte Bedingung an unsere Äquivalenzrelation stellt dabei sicher, daß die Verknüpfung solcher Äquivalenzklassen wohldefiniert ist. Man folgert leicht, daß \mathcal{C}_S mit dieser Verknüpfung von Morphismen eine Kategorie ist. Bezeichne nun wie zuvor $\tilde{\mathcal{K}}$ die Pfadkategorie eines Köchers \mathcal{K} . Die vorletzte Bedingung in unserer Definition der Äquivalenzrelation erzwingt, daß die Verknüpfung

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \sqcup S^{-1} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C} \sqcup S^{-1}} \rightarrow \mathcal{C}_S$$

von Morphismen von Köchern sogar ein Funktor ist, und die erste Bedingung erzwingt, daß jeder Morphismus aus S unter diesem Funktor ein Isomorphismus der Kategorie \mathcal{C}_S wird. Wir bezeichnen unseren Funktor mit $\text{can} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ und überlassen den Nachweis der universellen Eigenschaft dem Leser. \square

Definition 1.2.6. Ein Funktor $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt ein **Lokalisierungsfunktor**, wenn für die Menge S aller Morphismen von \mathcal{C} , die er zu Isomorphismen macht, der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien $\tilde{Q} : \mathcal{C}_S \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}$ ist.

Beispiel 1.2.7. Der Funktor $\text{Ab} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$ gegeben durch $M \mapsto \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ ist ein Lokalisierungsfunktor. Gegeben ein Köcher mit zwei Ecken und einem Pfeil von der einen zu der anderen erhalten wir zwei Lokalisierungsfunktoren von der Kategorie der Darstellungen unseres Köchers in die Kategorie der abelschen Gruppen, indem wir jeder Darstellung den Wert an einer Feste unserer beiden Ecken zuordnen.

1.2.8. Ist $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Lokalisierungsfunktor, so ist F surjektiv auf Isomorphieklassen von Objekten und jeder Morphismus in $\mathcal{D}(FA, FB)$ läßt sich schreiben als eine Verknüpfung

$$F(g_1) \circ F(s_1)^{-1} \circ F(g_2) \circ F(s_2)^{-1} \circ \dots \circ F(g_n) \circ F(s_n)^{-1}$$

mit Morphismen g_i in \mathcal{C} und $s_i \in S$. Das folgt unmittelbar aus unseren Konstruktionen und Definitionen.

1.2.9. Wir nennen einen Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ **voll**dicht, wenn für jede weitere Kategorie \mathcal{C} das Vorschalten von F auf den Funktorkategorien einen volltreuen Funktor $\mathcal{C}^{\mathcal{B}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ liefert.

Beispiele 1.2.10. Jede Äquivalenz von Kategorien ist volllicht. Ist ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bijektiv auf Objekten und läßt sich jeder Morphismus in \mathcal{B} darstellen als Verknüpfung von Bildern von Morphismen aus \mathcal{A} und Inversen derartiger Bilder, so ist F volllicht. Das folgt ohne größere Schwierigkeiten daraus, daß ein quadratisches Diagramm mit Isomorphismen in den Horizontalen kommutiert genau dann, wenn es kommutiert nach Ersetzen der Horizontalen durch ihre Inversen. Insbesondere ist nach **1.2.8 jeder Lokalisierungsfunktor volllicht**.

Beispiel 1.2.11 (**Fall der Ein-Objekt-Kategorien**). Ein Morphismus von Monoiden $G \rightarrow H$ liefert einen volllichten Funtor auf den zugehörigen Ein-Objekt-Kategorien $[G] \rightarrow [H]$, wenn H erzeugt wird von den Bildern der Elemente von G und den Inversen der Bilder der Elemente von G mit inverierbarem Bild. Nach [LA2] 7.3.16 haben wir einen natürlichen Isomorphismus von Kategorien $G\text{-Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}^{[G]}$. Spezialisieren wir \mathcal{C} aus 1.2.10 zu Ens , so besagt das insbesondere, daß unter den gegebenen Annahmen die Restriktion ein volltreuer Funktor $H\text{-Ens} \xrightarrow{\sim} G\text{-Ens}$ ist. Das scheint mir auch ohne die vorhergehenden Überlegungen unmittelbar einsichtig.

1.2.12. Die für uns wesentlichen allgemeinen Aussagen zur Lokalisierung von Kategorien faßt der folgende Satz zusammen, vergleiche auch [GZ67].

Satz 1.2.13 (Eigenschaften von Lokalisierungen). *Seien \mathcal{C} eine Kategorie und S eine Menge von Morphismen in \mathcal{C} und $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ der kanonische Lokalisierungsfunktor.*

1. *Ist $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt derart, daß der Funktor $\mathcal{C}(A, _) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ alle Morphismen aus S zu Bijektionen macht, so liefert unsere Lokalisierung für alle $B \in \mathcal{C}$ Bijektionen*

$$\mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QA, QB)$$

2. *Besitzt der Lokalisierungsfunktor Q bei einem Objekt $D \in \mathcal{C}_S$ einen partiellen Linksadjungierten L , so ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus $D \xrightarrow{\sim} QLD$. Insbesondere ist nach [TF] 4.4.7 jeder Linksadjungierte eines Lokalisierungsfunktors volltreu. Analoges gilt für partielle Rechtsadjungierte;*
3. *Besitzt ein Funktor einen volltreuen globalen Rechts- oder Linksadjungierten, so ist er ein **Lokalisierungsfunktor**.*

1.2.14. Auch die speziell für $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ formulierten Aussagen folgen für jeden Lokalisierungsfunktor.

Beispiel 1.2.15 (Garbifizierung als Lokalisierung). Gegeben ein topologischer Raum X ist die Garbifizierung $\text{pEns}/_X \rightarrow \text{Ens}/_X$ ein Lokalisierungsfunktor, denn sie ist Rechtsadjungiert zum volltreuen Einbettungsfunktor. Dasselbe gilt für die Garbifizierung $\text{pAb}/_X \rightarrow \text{Ab}/_X$ von Prägarben abelscher Gruppen und analog für Prägarben von Ringen und dergleichen mehr. Dasselbe gilt auch für die von der Garbifizierung induzierten Funktoren $\text{Ket}(\text{pAb}/_X) \rightarrow \text{Ket}(\text{Ab}/_X)$ und $\text{Hot}(\text{pAb}/_X) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}/_X)$.

Beweis. 1. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung gibt es für unser spezielles A genau einen Funktor $F : \mathcal{C}_S \rightarrow \text{Ens}$ mit $FQ = \mathcal{C}(A, _)$. Wir können nun eine inverse Abbildung zur im Satz behaupteten Bijektion explizit angeben durch die Abbildungsvorschrift $g \mapsto (Fg)(\text{id}_A)$. Etwas genauer liefert der Funktor zur Lokalisierung eine Transformation $\tau : \mathcal{C}(A, _) \Rightarrow \mathcal{C}_S(QA, _) \circ Q$, die wir für unser spezielles A als Isotransformation entlarven wollen. Das Element $\text{id}_A \in F(A)$ liefert mit dem Yonedalemma [LA2] 7.9.2 eine Transformation $\eta : \mathcal{C}_S(QA, _) \Rightarrow F$, und wir behaupten, daß die induzierte Transformation $\eta Q : \mathcal{C}_S(QA, _) \circ Q \Rightarrow FQ = \mathcal{C}(A, _)$ invers ist zu τ . Das folgt mit dem Yonedalemma aus unserer Erkenntnis 1.2.10, daß jeder Lokalisierungsfunktor volllicht ist.

2. Nach Teil 1 induziert der Lokalisierungsfunktor Q für unser $D \in \mathcal{C}_S$ und alle $B \in \mathcal{C}$ Isomorphismen $\mathcal{C}(LD, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QLD, QB)$. Da jedes Objekt in \mathcal{C}_S von einem Objekt $B \in \mathcal{C}$ herkommt, ist damit der kanonische Morphismus ein Isomorphismus $D \xrightarrow{\sim} QLD$ in \mathcal{C}_S .

3. Wir behandeln nur den Fall eines Rechtsadjungierten. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ unser Funktor und $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sein volltreuer Rechtsadjungierter. Sei S die Klasse aller Morphismen in \mathcal{C} , die unter F Isomorphismen werden. Erklären wir eine Kategorie \mathcal{C}_S , indem wir als Objekte dieselben nehmen wie die Objekte von \mathcal{C} , als Morphismen jedoch setzen $\mathcal{C}_S(X, Y) := \mathcal{D}(FX, FY)$ mit der offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen, so ist der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz $\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$, da ja gilt $FRD \xrightarrow{\sim} D$ für alle $D \in \mathcal{D}$ nach [TF] 4.4.7. Wenden wir diesen Isomorphismus an auf FX für $X \in \mathcal{C}$, so folgt mit [TF] 4.4.9, daß die Sequenz von kanonischen Morphismen $FX \rightarrow FRFX \rightarrow FX$, die man mithilfe der Adjunktion erhält, aus Isomorphismen besteht. Ist nun $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ ein Funktor, der Morphismen aus S zu Isomorphismen macht, so faktorisiert er über $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ mittels eines Funktors $\tilde{G} : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{E}$, wobei wir auf den Morphismen $\tilde{G} : \mathcal{C}_S(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}(GX, GY)$ für $f_S \in \mathcal{C}_S(X, Y)$ erklären durch die Kommutativität des Diagramms mit Isomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} GX & \longrightarrow & GY \\ \downarrow & & \downarrow \\ GRFX & \xrightarrow{GRf_S} & GRFY \end{array}$$

Diese Faktorisierung ist, wie man leicht sieht, auch die einzig mögliche. \square

Vorschau 1.2.16. Gegeben Kategorien \mathcal{I}, \mathcal{C} und eine Menge von Morphismen S von \mathcal{C} können wir eine Menge $S(\mathcal{I})$ von Morphismen in der Funktorkategorie $\text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ erklären als diejenigen Transformationen τ mit $\tau_i \in S$ für alle $i \in \mathcal{I}$. Der Funktor des konstanten Systems $\text{const} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ induziert dann einen Funktor auf den Lokalisierungen

$$\text{konst} : \mathcal{C}_S \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})_{S(\mathcal{I})}$$

Der linksadjungierte Funktor dazu hinwiederum heißt der **Homotopiekolimes** und wird hocol notiert. In diesem Fall ist, anders als bei normalen Kolimites, auch die Struktur von \mathcal{I} als Kategorie und nicht nur der zugrundeliegende Köcher relevant.

1.2.1 Übungen

Übung 1.2.17. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} und darin ein System von Morphismen S ist der von $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ induzierte Funktor $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow (\mathcal{C}_S)^{\text{opp}}$ eine Lokalisierung von \mathcal{C}^{opp} an S° . Gegeben zwei Kategorien \mathcal{C}, \mathcal{D} und darin Systeme von Morphismen S, T ist das Produkt der Lokalisierungsfunktoren $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_S \times \mathcal{D}_T$ eine Lokalisierung der Produktkategorie an $S \times T$. Die Verknüpfung von zwei Lokalisierungen ist auch selbst wieder eine Lokalisierung.

Übung 1.2.18. Jeder Lokalisierungsfunktor ist auch als Funktor zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien ein Lokalisierungsfunktor. Gegeben zwei Lokalisierungsfunktoren $F : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ und $G : \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$ ist auch ihr Produkt $(F \times G) : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}}$ ein Lokalisierungsfunktor. Die Verknüpfung von zwei Lokalisierungsfunktoren ist auch selbst wieder ein Lokalisierungsfunktor.

1.3 Lokalisierung unter Ore-Bedingungen

1.3.1. Mit zusätzliche Bedingungen an das System der zu invertierenden Morphismen erhält man feinere Aussagen über die Lokalisierung, wie wir im folgenden ausführen.

Definition 1.3.2. Eine Menge von Morphismen einer Kategorie heißt **multiplikativ**, wenn sie stabil ist unter Verknüpfung und alle Isomorphismen enthält.

Definition 1.3.3. Eine Menge S von Morphismen einer Kategorie \mathcal{C} heißt ein **Rechts-Ore-System**, wenn sie multiplikativ ist und wenn zusätzlich die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1. Gegeben $E \xrightarrow{g} X \xleftarrow{s} D$ mit $s \in S$ gibt es $E \xleftarrow{t} W \xrightarrow{h} D$ mit $t \in S$ und $sh = gt$;
2. Gegeben $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $s \in S$ mit $sf = sg$ gibt es $t \in S$ mit $ft = gt$.

Eine Menge S von Morphismen einer Kategorie \mathcal{C} heißt ein **Links-Ore-System**, wenn sie ein Rechts-Ore-System in der opponierten Kategorie ist. Ein **Ore-System** in einer Kategorie ist ein System von Morphismen, das sowohl Rechts-Ore als auch Links-Ore ist.

Ergänzung 1.3.4. Hat unsere Kategorie nur ein Objekt und ist die Verknüpfung von Morphismen die Multiplikation einer Ringstruktur auf diesem Objekt, so sind diese Bedingungen Varianten der bei der Lokalisierung nichtkommutativer Ringe üblichen **Ore-Bedingungen**.

Definition 1.3.5. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und S ein Rechts-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Wir betrachten für $X, Y \in \mathcal{C}$ die Menge $\mathcal{B}(X, Y)$ aller Diagramme $D = (s, D, f)$ der Gestalt

$$X \xleftarrow{s} D \xrightarrow{f} Y$$

mit $s \in S$ und nennen derartige Diagramme **Brüche** oder genauer **Rechtsbrüche von X nach Y** . Wir sagen, ein Bruch (s, D, f) gehe hervor aus einem weiteren Bruch $(s', D', f') \in \mathcal{B}(X, Y)$ durch **Kürzen** und schreiben $D' \dashrightarrow D$, wenn es einen Morphismus $h : D' \rightarrow D$ gibt mit $s' = sh$ und $f' = fh$. Bezeichne $\bar{\mathcal{B}}(X, Y)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von Brüchen von X nach Y unter der durch Kürzen erzeugten Äquivalenzrelation und bezeichne $[s, D, f]$ die Äquivalenzklasse des Bruches (s, D, f) .

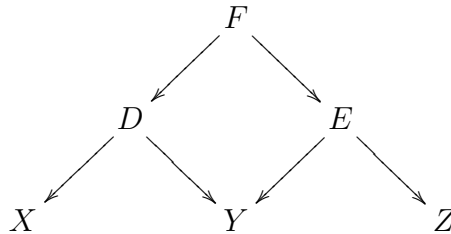
1.3.6. Ich komme mit Rechts und Links in diesem Zusammenhang leicht durcheinander. Als Eselsbrücke mag man sich einen Rechtsbruch als die Komposition $f \circ s^{-1}$ denken, bei der der Nenner eben rechts steht. Der erste Teil der Rechts-Orebedingung sagt dann, salopp gesprochen, daß man jeden Linksbruch zu einem Rechtsbruch umschreiben kann.

Proposition 1.3.7 (Kategorien von Brüchen als Lokalisierung). *Seien \mathcal{C} eine Kategorie und S ein Rechts-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . So liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(X, Y)$$

zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von Rechtsbrüchen und der Menge der Morphismen in der lokalisierten Kategorie.

Beweis. Gegeben Brüche mit Kürzungen $D' \dashrightarrow D \dashleftarrow D''$ gibt es einen Bruch D''' mit Kürzungen $D' \dashleftarrow D''' \dashrightarrow D''$. In der Tat finden wir mit der ersten Bedingung in 1.3.3 Morphismen $D' \leftarrow W \rightarrow D''$ mit $W \rightarrow D''$ in S derart, daß mit den Morphismen nach D ein kommutatives Quadrat entsteht. Es folgt insbesondere, daß für die durch Kürzen erzeugte Äquivalenzrelation auf $\mathcal{B}(X, Y)$ zwei Brüche äquivalent sind genau dann, wenn sie durch Kürzen aus ein- und demselben Bruch hervorgehen. Wir erklären nun Verknüpfungen $\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \times \bar{\mathcal{B}}(Y, Z) \rightarrow \bar{\mathcal{B}}(X, Z)$ wie folgt: Wir beginnen mit Verknüpfungen $\mathcal{B}(X, Y) \times \mathcal{B}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{B}(X, Z)$ gegeben dadurch, daß $((s, D, f), (t, E, g))$ abgebildet wird auf die Äquivalenzklasse eines Bruches der Gestalt



mit $F \rightarrow D$ aus S und kommutierendem schiefen Quadrat. Die so gebildete Äquivalenzklasse ist unabhängig von der Wahl von F und den beiden von F ausgehenden Morphismen: Ist $D \leftarrow F' \rightarrow E$ eine zweite Wahl, so vervollständigen wir $F \rightarrow D \leftarrow F'$ durch $F \leftarrow F'' \rightarrow F'$ zu einem kommutativen Quadrat mit $F'' \rightarrow F'$ aus S und folgern aus $F'' \rightarrow F' \rightarrow E \rightarrow Y = F'' \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow Y$ mit der zweiten Bedingung aus 1.3.3 die Existenz von $F''' \rightarrow F''$ aus S mit $F''' \rightarrow F'' \rightarrow F' \rightarrow E = F''' \rightarrow F'' \rightarrow F \rightarrow E$. Es ist klar, daß unsere Verknüpfung unter Kürzen dieselbe bleibt und somit absteigt zu einer Verknüpfung $\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \times \bar{\mathcal{B}}(Y, Z) \rightarrow \bar{\mathcal{B}}(X, Z)$. Schließlich zeigen wir noch, daß die Objekte von \mathcal{C} mit den Morphismenmengen $\bar{\mathcal{B}}(X, Y)$ und der eben eingeführten Verknüpfung eine Kategorie bilden. Die Identitätsmorphismen sind hier unproblematisch, und die Assoziativität der Verknüpfung scheint mir auch recht offensichtlich. Aus der Konstruktion wird jedoch zusätzlich klar, daß die eben konstruierte Kategorie $\bar{\mathcal{B}}$ dieselbe universelle Eigenschaft hat wie unsere Lokalisierung \mathcal{C}_S . \square

Satz 1.3.8 (Ore-Lokalisierung und volltreue Einbettungen). Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit einem *Rechts-Oresystem* von Morphismen S . Ist $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie und $S' \subset S$ ein Rechts-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C}' mit der Eigenschaft, daß es für alle $s \in S$ mit Ziel in \mathcal{C}' einen Morphismus h gibt mit $s \circ h \in S'$, so ist der offensichtliche Funktor $\mathcal{C}'_{S'} \rightarrow \mathcal{C}_S$ volltreu.

Beweis. Das erkennt man sofort an der Realisierung 1.3.7 der lokalisierten Kategorie als Kategorie von Brüchen. \square

1.3.9. Ist \mathcal{C} eine Kategorie mit einem Rechts-Oresystem von Morphismen S , so lassen sich zwei Brüche $(r, E, f) \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $(t, F, g) \in \mathcal{B}(X, Z)$ stets **auf einen Hauptnenner bringen**. In der Tat finden wir Morphismen von Objekten $E \leftarrow D \rightarrow F$ so, daß $D \rightarrow E$ zu S gehört und daß beide demselben Pfeil $s : D \rightarrow X$ liefern, der dann notwendig auch zu S gehört. Damit entstehen unsere beiden Brüche durch Kürzen aus Brüchen der Gestalt (s, D, f') und (s, D, g') .

Proposition 1.3.10 (Produkte in Ore-Lokalisierungen). *Ist \mathcal{C} eine Kategorie und S ein Rechts-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} , so vertauscht der Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ mit dem Bilden von endlichen Produkten und Egalisatoren [TS] 7.1.7.*

Ergänzung 1.3.11. Man zeigt allgemeiner in derselben Weise, daß unser Funktor mit dem Bilden von Limites über beliebige endliche Diagramme alias Darstellungen endlicher Köcher kommutiert.

Beweis. Wir konzentrieren uns darauf, das Kommutieren mit dem Produkt zweier Objekte zu prüfen. Wir dürfen und werden das nachweisen für die Kategorie von Brüchen $\tilde{\mathcal{B}}$ aus 1.3.5 statt \mathcal{C}_S . Gegeben zwei Brüche in $\tilde{\mathcal{B}}(X, A')$ und $\tilde{\mathcal{B}}(X, A'')$ finden wir mit 1.3.9 Repräsentanten „mit demselben Nenner“, als da heißt, von der Form (s, D, f) und (s, D, g) mit $f : D \rightarrow A'$ und $g : D \rightarrow A''$, und bilden dann den Bruch $(s, D, (f, g))$ in das Produkt $A' \times A''$. Die Verknüpfung mit den Projektionen liefert dann natürlich die beiden ursprünglichen Brüche. Ist umgekehrt ein Morphismus $[s', D', h] \in \tilde{\mathcal{B}}(X, A' \times A'')$ gegeben, der bei Nachschalten der Projektionen $[s, D, f]$ und $[s, D, g]$ liefert, so bringen wir zunächst alle drei Brüche auf einen Hauptnenner und dürfen dann auch für unseren Bruch in das Produkt einen Repräsentanten der Gestalt (s, D, h) annehmen. Gilt nun

$$[s, D, \text{pr}_1 \circ h] = [s, D, f] \text{ und } [s, D, \text{pr}_2 \circ h] = [s, D, g]$$

so können wir den Hauptnenner weiter vergrößern derart, daß gilt $\text{pr}_2 \circ h = g$, $\text{pr}_1 \circ h = f$, und das zeigt dann $h = (f, g)$. Daß finale Objekte in finale Objekte übergehen und daß Egalisatoren zu Egalisatoren werden, zeigt man ähnlich aber einfacher. \square

1.3.12. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und S ein Rechts-Oresystem von Morphismen. Jede additive Struktur auf \mathcal{C} im Sinne von ?? induziert eine additive Struktur auf \mathcal{C}_S , man addiert eben Brüche, indem man sie auf einen Hauptnenner bringt. Besitzt \mathcal{C} nur ein Objekt, so ist diese Konstruktion die sogenannte **Ore-Lokalisierung** von nicht notwendig kommutativen Ringen.

Proposition 1.3.13 (Ore-Lokalisierung additiver Kategorien). *Ist \mathcal{C} eine additive Kategorie und S ein Rechts-Oresystem von Morphismen, so ist auch \mathcal{C}_S eine additive Kategorie und der kanonische Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ ist additiv.*

Beweis. Das folgt sofort aus 1.3.12 und 1.3.10. □

Ergänzung 1.3.14. In ?? diskutieren wir Lokalisierungen abelscher Kategorien und zeigen insbesondere, daß die Lokalisierung einer abelschen Kategorie an einem Ore-System stets wieder abelsch ist.

1.3.15 (**Morphismen in einer Ore-Lokalisierung**). Seien \mathcal{C} eine Kategorie und S ein Rechts-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . In der Terminologie aus [TS] 7.1.12 liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\mathcal{C}_S(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{colf } \mathcal{C}(D, Y)$$

mit dem filtrierenden Kolimes über das System aller Morphismen $s : D \rightarrow X$ aus S in das Objekt X . Ist hier S ein Oresystem, so erhalten wir sogar ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C}_S(X, Y) & \\
 \swarrow \sim & & \searrow \sim \\
 \text{colf } \mathcal{C}(D, Y) & & \text{colf } \mathcal{C}(X, I) \\
 \searrow \sim & & \swarrow \sim \\
 & \text{colf } \mathcal{C}(D, I) &
 \end{array}$$

mit den filtrierenden Kolimites über das System aller Morphismen $s : D \rightarrow X$ aus S in das Objekt X , das System aller Morphismen $s : Y \rightarrow I$ aus S aus dem Objekt Y , und das System aller Paare derartiger Morphismen. Um das zu sehen, verwendet man die Transitivität von Kolimites [TS] 7.1.29 zusammen mit der Erkenntnis, daß der zweite Kolimes auf dem Weg nach unten jeweils über ein konstantes System gebildet wird.

1.3.1 Übungen

Übung 1.3.16 (**Liften kommutativer Diagramme**). Sei \mathcal{C} eine Kategorie und S ein Rechts-Oresystem von Morphismen. Gegeben Morphismen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ in der lokalisierten Kategorie \mathcal{C}_S gibt es Morphismen $f' : X' \rightarrow Y'$ und $g' : Y' \rightarrow Z$ in \mathcal{C} und Morphismen $s : X' \rightarrow X, t : Y' \rightarrow Y$ aus S mit $fs = tf', gt = g'$. Salopp gesprochen ist also jedes kommutative Dreiecksdiagramm in \mathcal{C}_S isomorph zum Bild eines kommutativen Dreiecksdiagramms in \mathcal{C} . Ist hier gf bereits ein Morphismus in \mathcal{C} , so können wir sogar Morphismen $f' : X \rightarrow Y'$ und $g' : Y' \rightarrow Z$ in \mathcal{C} und einen Morphismus $t : Y' \rightarrow Y$ aus S finden mit $fs = tf'$ und $gt = g'$.

Übung 1.3.17. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor mit einem volltreuen Rechtsadjungierten. Sei S das System der Morphismen in \mathcal{C} , die unter F zu Isomorphismen werden. Aus 1.2.13 mag man erinnern, daß dann F eine Äquivalenz $\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ induziert. Man zeige: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist S ein Links-Oresystem. Ein Beispiel für diese Situation ist der Garbifizierungsfunktor.

Übung 1.3.18. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und S ein Links-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Genau dann liefern Morphismen $f, g : X \rightarrow Y$ aus \mathcal{C} denselben Morphismus in \mathcal{C}_S , wenn es $s \in S$ gibt mit $sf = sg$.

1.4 Gesättigte Ore-Systeme*

Definition 1.4.1. Ein multiplikatives System S von Morphismen einer Kategorie \mathcal{C} heißt **gesättigt**, wenn für einen beliebigen Morphismus f gilt: Gibt es Morphismen g, h mit $fg \in S$ und $hf \in S$, so folgt $f \in S$.

1.4.2. Der Begriff eines gesättigten Oresystems schien mir für die Diskussion triangulierter Kategorien praktisch. Für einzelne der im folgenden diskutierten Konsequenzen dieser Eigenschaft sind auch schwächere Bedingungen ausreichend.

Beispiel 1.4.3. Das System aller Isomorphismen in einer Kategorie ist gesättigt. Das Urbild eines gesättigten multiplikativen Systems unter einem Funktor ist stets wieder ein gesättigtes multiplikatives System.

Lemma 1.4.4. Gegeben ein gesättigtes Oresystem S von Morphismen einer Kategorie \mathcal{C} ist S genau die Menge aller Morphismen von \mathcal{C} , die unter dem Lokalisierungsfunktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ Isomorphismen werden.

Beweis. Hat der Rechtsbruch $f \text{id}^{-1}$ ein Halbinverses gs^{-1} , so gibt es $r \in S$ mit $sr = fgr$. Argumentiert man analog mit Linksbrüchen, so erkennt man, daß aus unserer Sättigungsbedingung bereits $f \in S$ folgt. \square

1.4.5. Lemma 1.4.4 impliziert insbesondere, daß jedes gesättigte Oresystem S die **Zwei-aus-drei-Eigenschaft** hat: Sind Morphismen f, g, h gegeben mit $fg = h$ und gehören zwei der drei Morphismen f, g, h zu S , so auch der Dritte.

2 Derivierte Kategorien

2.1 Triangulierte Kategorien

Definition 2.1.1. Eine \mathbb{Z} -Kategorie ist eine Kategorie \mathcal{A} mitsamt einem Automorphismus $[1] : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$. Mit Automorphismus meine ich einen Isomorphismus der Kategorie zu sich selbst, nicht etwa bloß eine Äquivalenz von Kategorien. Ein \mathbb{Z} -Funktork $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ von \mathbb{Z} -Kategorien ist definiert als ein Paar (F, u) bestehend aus einem Funktor F nebst einer Isotransformation $u : [1] \circ F \xrightarrow{\sim} F \circ [1]$, die die \mathbb{Z} -Struktur unseres \mathbb{Z} -Funktors heißen möge.

2.1.2. Gegeben eine \mathbb{Z} -Struktur u eines Funktors wie eben ist natürlich auch ihr Negatives $(-u)$ eine \mathbb{Z} -Struktur für denselben Funktor.

Vorschau 2.1.3. Es gibt durchaus relevante Situationen, in denen man die hier entwickelten Begriffsbildungen auf den Fall erweitern muß, daß unsere Verschiebung $[1] : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ nur eine Äquivalenz von Kategorien ist. Das weckt jedoch Elefanten der Notation, die ich noch schlafen lassen will.

2.1.4. Die Menge aller \mathbb{Z} -Funktoren von einer \mathbb{Z} -Kategorie \mathcal{A} in eine \mathbb{Z} -Kategorie \mathcal{B} notieren wir $\text{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Die Verknüpfung von \mathbb{Z} -Funktoren sei definiert durch $(F, u) \circ (G, v) = (F \circ G, uG \circ Fv)$. Sie ist assoziativ. Gegeben ein Universum \mathcal{U} wie in [LA2] 7.2.24 bezeichne $\mathcal{UCat}^{\mathbb{Z}}$ die Kategorie aller \mathbb{Z} -Kategorien, deren zugrundeliegende Kategorie eine \mathcal{U} -Kategorie ist. Als Morphismen von $\mathcal{UCat}^{\mathbb{Z}}$ nehmen wir unsere \mathbb{Z} -Funktoren.

Definition 2.1.5. Eine **verträgliche Transformation** $(F, u) \Rightarrow (G, v)$ zwischen \mathbb{Z} -Funktoren ist eine Transformation $\tau : F \Rightarrow G$, die mit den jeweiligen \mathbb{Z} -Strukturen verträglich ist in dem Sinne, daß das folgende Diagramm von Transformationen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [1] \circ F & \xrightarrow{u} & F \circ [1] \\ [1]\tau \downarrow & & \downarrow \tau[1] \\ [1] \circ G & \xrightarrow{v} & G \circ [1] \end{array}$$

Die Verknüpfung verträglicher Transformationen ist wieder verträglich und die Menge $\text{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wird mit diesen Transformationen als Morphismen eine Kategorie. Wir notieren die Menge der verträglichen Transformation

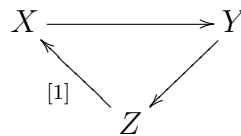
$$\text{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(F, G)$$

oder abkürzend $\text{Trans}^{\mathbb{Z}}(F, G)$. Eine Adjunktion (L, R) von \mathbb{Z} -Funktoren nennen wir eine **verträgliche Adjunktion**, wenn die zugehörigen Transformationen

$\text{Id} \Rightarrow RL$ und $LR \Rightarrow \text{Id}$ verträglich sind. Gegeben eine Adjunktion zwischen Funktoren zwischen zwei \mathbb{Z} -Kategorien existiert für jede \mathbb{Z} -Struktur auf einem der beiden genau eine \mathbb{Z} -Struktur auf dem anderen derart, daß die Adjunktion mit diesen \mathbb{Z} -Strukturen verträglich ist.

Vorschau 2.1.6. Man kann auch allgemeiner für eine beliebige Gruppe Γ den Begriff einer Γ -Kategorie, eines Γ -Funktors und so weiter einführen, aber das will ich hier noch nicht weiter verfolgen.

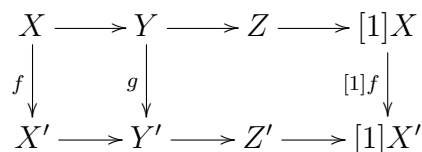
Definition 2.1.7. Unter einem **Dreieck** in einer \mathbb{Z} -Kategorie versteht man ein Diagramm der Gestalt $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{y} Z \xrightarrow{w} [1]X$, das suggestiver aber weniger präzise auch in der Gestalt



geschrieben werden mag. Ein **Morphismus von Dreiecken** wird definiert wie in ??.

Definition 2.1.8. Eine **triangulierte Kategorie** ist eine additive \mathbb{Z} -Kategorie mit samt einer Vorschrift, die unter allen Dreiecken unserer \mathbb{Z} -Kategorie gewisse Dreiecke auszeichnet derart, daß die folgenden merkwürdigen durch ?? motivierten Axiome erfüllt sind:

1. Jedes Dreieck, das isomorph ist zu einem ausgezeichneten Dreieck, ist auch selbst ein ausgezeichnetes Dreieck;
2. Für jedes Objekt X ist das Dreieck $X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow [1]X$ ausgezeichnet;
3. Jeder Morphismus $X \rightarrow Y$ unserer Kategorie kann in ein ausgezeichnetes Dreieck $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$ eingebettet werden. Es wird sich später herausstellen, daß hier Z eindeutig ist bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus, vergleiche Axiom 5. Wir gönnen ihm dennoch einen bestimmten Artikel nennen Z in Erinnerung an ?? auch im allgemeinen den **Abbildungskegel** über dem Morphismus $X \rightarrow Y$;
4. Ein Dreieck $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$ ist ausgezeichnet genau dann, wenn das „gedrehte“ Dreieck $Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X \xrightarrow{-u} [1]Y$ ausgezeichnet ist;
5. Gegeben ein Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen und einem kommutativen Quadrat links



gibt es einen Morphismus $h : Z \rightarrow Z'$ derart, daß die beiden dadurch in der Mitte und rechts entstehenden Quadrate kommutieren. Von diesem Morphismus h wird nur die Existenz und nicht die Eindeutigkeit gefordert;

6. (**Oktaederaxiom**) Gegeben ausgezeichnete Dreiecke

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow [1]X$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow [1]Y$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow [1]X$$

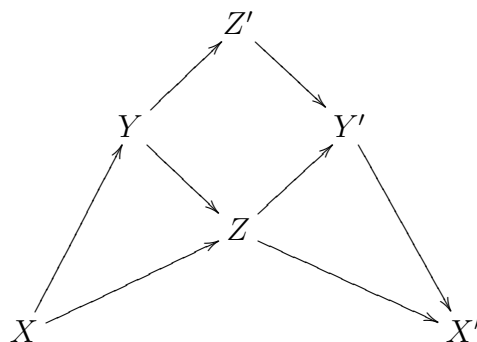
gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow [1]Z'$ derart, daß im nebenstehenden Oktaeder die beiden Quadrate im Schnitt mit senkrechten Ebenen kommutieren und die vier „zyklischen“ Dreiecke ausgezeichnete Dreiecke sind, wohingegen die anderen vier Dreiecke kommutieren.

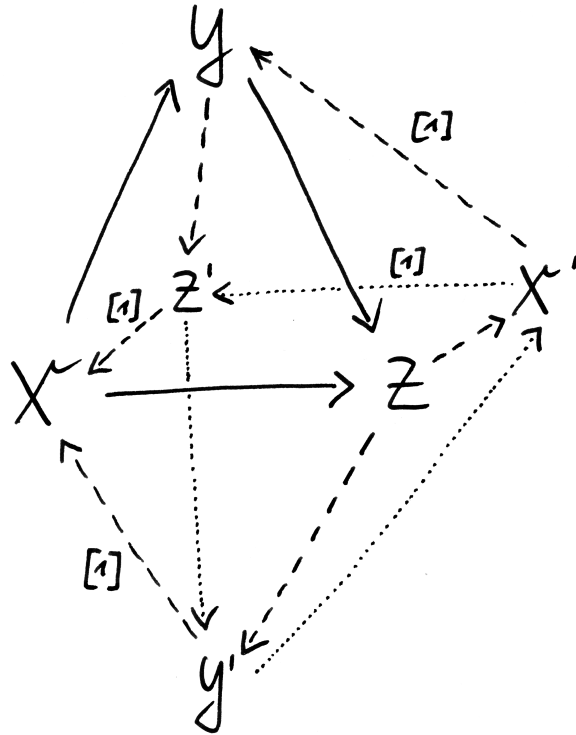
Die ausgezeichneten Dreiecke einer triangulierten Kategorie heißen, nun, eben **ausgezeichnete Dreiecke**. Eingeführt wurden sie ursprünglich auf Französisch als **triangles distingués**. Auf Englisch nennt man sie **distinguished triangles**.

2.1.9. Der Definition einer triangulierten Kategorie haftet etwas Künstliches an, und sie ist es auch. Ich hoffe aber, Sie im folgenden davon zu überzeugen, daß diese Begriffsbildung für viele Argumentationen ein geschickter Rahmen ist. Einen noch natürlicheren Rahmen bilden die sogenannten „Derivatoren“, deren Diskussion ich vorerst vermeiden will.

2.1.10. Jede triangulierte Kategorie liefert eine weitere triangulierte Kategorie, wenn man statt der ausgezeichneten Dreiecken die sogenannten **antiausgezeichneten Dreiecke** auszeichnet, die aus ausgezeichneten Dreiecken durch das Ändern des Vorzeichens aller drei Morphismen entstehen.

2.1.11. Wir notieren Oktaeder oft vereinfacht in der Form



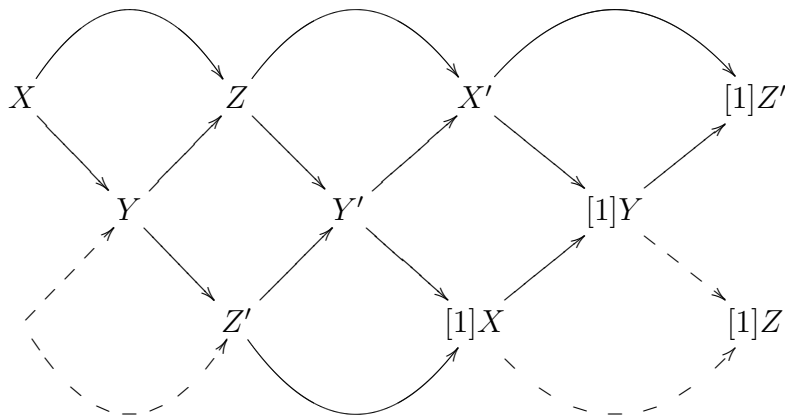


Die Struktur der Pfeile soll den Aufbau eines solchen Oktaeders verdeutlichen:
 Man beginnt mit zwei verknüpfbaren Morphismen und ihrer Komposition, dargestellt durch durchgehende Pfeile zwischen X , Y und Z . Jeden dieser Morphismen ergänzt man zu einem ausgezeichneten Dreieck, angedeutet durch die gestrichelten Pfeile. Und dann fordert man die Existenz von gepunkteten Pfeilen, die die drei eben konstruierten Objekte zu einem vierten ausgezeichneten Dreieck verbinden, die drei anderen so entstehenden Dreiecke zum Kommutieren bringen (was den horizontalen gepunkteten Pfeil im übrigen bereits eindeutig festlegt), und die beiden in Schnitten unseres Oktaeders mit geeigneten senkrechten Ebenen entstehenden Quadrate zum Kommutieren bringen. Von zwei gegenüberliegenden Flächen ist also stets eine ein kommutatives Diagramm und die andere ein ausgezeichnetes Dreieck. Unser Oktaederdiagramm hat weitaus weniger Symmetrien als ein echter Oktaeder, genauer ist die Symmetriegruppe eine zyklische Gruppe der Ordnung vier, erzeugt vom Drehen um die senkrechte Achse um einen rechten Winkel gefolgt vom Vertauschen der oberen und der unteren Ecke.

In dieser Gestalt sind alle vier ausgezeichneten Dreiecke als lediglich gerade Pfeilsequenzen erkennbar, einige kommutative Dreiecke und ein kommutatives Quadrat sind jedoch nicht sichtbar. Eine andere Darstellung ist

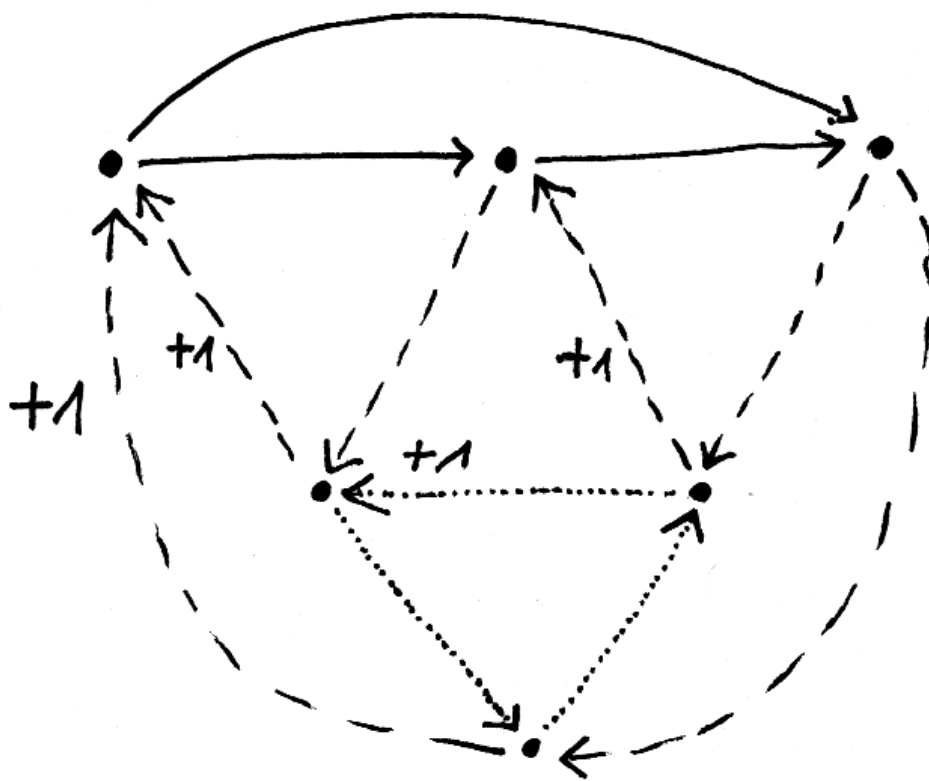
$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & [1]X \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & [1]X \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & [1]Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 Z' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & [1]Z'
 \end{array}$$

mit einigen Identitäten in den Vertikalen, kommutativen Quadraten und ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen. In dieser Darstellung sehen wir alle Information unseres Oktaeders: Alle vier ausgezeichneten Dreiecke als Zeilen, alle vier kommutativen Dreiecke als Quadrate mit einer ist-gleich-Seite, davon eines sogar doppelt, und beide kommutativen Quadrate, davon eines sogar doppelt. Als letzte Variante gebe ich



Dies Diagramm soll man sich periodisch nach rechts und links fortgesetzt denken. Alle vier ausgezeichneten Dreiecke sind hier gut als eckenlose Wege erkennbar, und die vier kommutativen Dreiecke ebenso wie die beiden kommutativen Vierecke sind gleichfalls gut zu sehen.

2.1.12. Aus ?? folgt, daß jeder Isomorphismus zwischen additiven Kategorien additiv ist. Insbesondere brauchen wir die Additivität des Funktors $[1]$ einer triangulierten Kategorie nicht extra zu fordern.



Noch eine andere Darstellung eines Oktaeders

2.1.13 (**Komposition von Morphismen in einem Dreieck**). In einem ausgezeichneten Dreieck ist die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen Null. In der Tat gibt es für jedes ausgezeichnete Dreieck $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$ notwendig einen Morphismus von Dreiecken nach $0 \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow 0$ der Gestalt $(?, v, \text{id})$ mit $v : Y \rightarrow Z$ dem zweiten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks. Folglich ist $(0, v, \text{id})$ ein Morphismus von Dreiecken, und damit gilt $v \circ u = 0$ für $u : X \rightarrow Y$ den ersten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks.

Lemma 2.1.14. *Ist \mathcal{T} eine triangulierte Kategorie und $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$ darin ein ausgezeichnetes Dreieck, so bilden für jedes Objekt $W \in \mathcal{T}$ die Morphismen nach W eine lange exakte Sequenz von abelschen Gruppen*

$$\dots \leftarrow \mathcal{T}(X, W) \leftarrow \mathcal{T}(Y, W) \leftarrow \mathcal{T}(Z, W) \leftarrow \mathcal{T}([1]X, W) \leftarrow \dots$$

Dasselbe gilt dual auch für die Morphismen von W in die Objekte unseres ausgezeichneten Dreiecks.

Beweis. Fast gleich zum Beweis von ?? und dem Leser überlassen. □

Übungen

Übung 2.1.15. Sind bei einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken zwei der Abbildungen Isomorphismen, so auch die Dritte. Hinweis: 2.1.14 und Fünferlemma und Yoneda-Lemma.

Übung 2.1.16 (Morphismen von ausgezeichneten Dreiecken, Eindeutigkeit). Sei \mathcal{T} eine triangulierte Kategorie. Gegeben ein kommutatives Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' & \rightarrow & [1]X' \end{array}$$

gibt es nach Annahme einen Morphismus $Z \rightarrow Z'$, der es kommutativ vervollständigt. Man zeige, daß sowohl unter der Annahme $\mathcal{T}([1]X, Z') = 0$ als auch unter der Annahme $\mathcal{T}(Z, Y') = 0$ dieser Morphismus $Z \rightarrow Z'$ sogar eindeutig bestimmt ist. Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das ?. Hinweis: Dieser Morphismus $Z \rightarrow Z'$ ist sogar bereits dadurch eindeutig bestimmt, daß er das linke beziehungsweise das rechte durch ihn neu entstehende Quadrat zum Kommutieren bringt.

Übung 2.1.17 (Morphismen in ausgezeichneten Dreiecken, Eindeutigkeit). Sei \mathcal{T} eine triangulierte Kategorie. Gibt es zu einem Morphismus aus einem ausgezeichneten Dreieck keinen von Null verschiedenen Morphismus in die Gegenrichtung, so wird der fragliche Morphismus bereits durch die beiden anderen eindeutig

festgelegt. Sind also in Formeln $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{r,s} [1]X$ ausgezeichnete Dreiecke für zwei Morphismen $r, s : Z \rightarrow [1]X$ und gilt $\mathcal{T}([1]X, Z) = 0$, so folgt $r = s$. Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das ??.

Übung 2.1.18. Wenn man in einem ausgezeichneten Dreieck bei zwei Morphismen das Vorzeichen ändert, entsteht wieder ein ausgezeichnetes Dreieck.

Übung 2.1.19. Die opponierte Kategorie einer triangulierten Kategorie ist mit der entgegengesetzten homologischen Verschiebung und „denselben“ ausgezeichneten Dreiecken versehen auch eine triangulierte Kategorie. Sie heißt die **opponierte triangulierte Kategorie**.

2.2 Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien

Satz 2.2.1 (Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien). Für jede additive Kategorie \mathcal{I} ist ihre Homotopiekategorie $\text{Hot}(\mathcal{I})$ mit ihrer durch Verschiebung und Negativieren der Differentiale ?? erklärten \mathbb{Z} -Operation und den in ?? durch Abbildungskegel erklärten ausgezeichneten Dreiecken eine triangulierte Kategorie.

Beweis. Alle Axiome mit Ausnahme des Oktaederaxioms sind entweder offensichtlich erfüllt oder werden in ?? bewiesen. Um auch noch das Oktaederaxiom zu prüfen, reicht es zu zeigen, daß für Morphismen von Komplexen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ die Sequenz

$$\text{Keg}(f) \xrightarrow{u} \text{Keg}(g \circ f) \xrightarrow{v} \text{Keg}(g) \xrightarrow{w} [1] \text{Keg}(f)$$

ein ausgezeichnetes Dreieck ist, wenn diese Komplexe und Morphismen gegeben werden durch

$$\begin{array}{ccccccc} X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y^{n+1} \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \\ \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ g \circ f & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ g & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ -f & -\partial \end{pmatrix} \\ X^{n+2} \oplus Y^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & X^{n+3} \oplus Y^{n+2} \end{array}$$

Hier und im Folgenden verwenden wir die Konvention [KAG] 1.4.17, nach der Elemente von direkten Summen als Spaltenmatrizen aufgefaßt werden, mit den vorne stehenden Komponenten oben, und Morphismen zwischen direkten Summen durch Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden, die durch Matrixmultiplikation von links operieren. Um zu zeigen, daß dies Dreieck ausgezeichnet ist, gilt es, eine Homotopieäquivalenz $h : \text{Keg}(g) \xrightarrow{\sim} \text{Keg}(u)$ anzugeben

derart, daß

$$\begin{array}{ccccc} \text{Keg}(g \circ f) & \xrightarrow{v} & \text{Keg}(g) & \xrightarrow{w} & [1] \text{Keg}(f) \\ \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ \text{Keg}(g \circ f) & \longrightarrow & \text{Keg}(u) & \longrightarrow & [1] \text{Keg}(f) \end{array}$$

in der Homotopiekategorie kommutiert. Nun haben wir ja

$$\text{Keg}(u)^n = X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

mit Randoperator

$$\begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 & 0 \\ f & -\partial & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\partial & 0 \\ 0 & g & g \circ f & \partial \end{pmatrix}$$

und es reicht zu zeigen, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : Y^{n+1} \oplus Z^n \rightarrow X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

eine Homotopieäquivalenz h mit den gewünschten Eigenschaften liefert. Explizite Rechnung zeigt, daß sie eine Kettenabbildung definiert und das rechte Quadrat unseres Diagramms der sechs Komplexe von eben zum Kommutieren bringt. Definieren wir eine Abbildung in die Gegenrichtung $k : \text{Keg}(u) \rightarrow \text{Keg}(g)$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n \rightarrow Y^{n+1} \oplus Z^n$$

so erhalten wir auch eine Kettenabbildung, von der klar ist, daß sie das linke Quadrat mit umgekehrtem Mittelpfeil zum Kommutieren bringt. Weiter gilt offensichtlich $k \circ h = \text{id}$, so daß nur zu zeigen bleibt, daß $h \circ k$ homotop ist zur Identität auf $\text{Keg}(u)$. Solch eine Homotopie wird jedoch gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Definition 2.2.2. Ein **triangulierter Funktor** von einer triangulierten Kategorien in eine weitere ist ein additiver **\mathbb{Z} -Funktor**, der ausgezeichnete Dreiecke zu ausgezeichneten Dreiecken macht.

Definition 2.2.3. Eine Menge von Objekten einer triangulierten Kategorie heißt ein **trianguliertes System**, wenn gilt:

1. Das Nullobjekt gehört zu unserer Menge;
2. Mit je zwei Objekten eines ausgezeichneten Dreiecks gehört auch das Dritte zu unserer Menge;

Ein trianguliertes System, das mit jedem Objekt auch alle seine direkten Summanden enthält, nennen wir ein **Verdiersystem**.

2.2.4. Nach der Definition einer triangulierten Kategorie 2.1.8 haben wir für jedes Objekt X ein ausgezeichnetes Dreieck $(X, 0, [1]X)$ und jeder Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ paßt in ein ausgezeichnetes Dreieck $(X, Y, 0)$. Folglich gehören zu einem gegebenen triangulierten System mit einem Objekt X auch alle seine Shifts und alle zu ihm isomorphen Objekte.

2.2.5 (**Diskussion der Terminologie**). Kashiwara und Schapira verwenden in [KS90] die Bezeichnung **Nullsystem** für das, was ich ein trianguliertes System nenne. Der Terminologie von Kashiwara und Schapira folge ich nicht, da ich derartige Systeme keineswegs nur betrachten will, um sie wegzuteilen. Die Bezeichnung als „Verdiersystem“ ist nicht üblich. Verdier selbst benutzt die Bezeichnung **souscatégorie épaisse**.

2.2.6. Verstehen wir ein trianguliertes System als volle Unterkategorie, so erbt es in natürlicher Weise die Struktur einer triangulierten Kategorie. Diejenigen Objekte, die von einem triangulierten Funktor zu Null gemacht werden, bilden offensichtlich sogar ein Verdiersystem. Das kleinste triangulierte System beziehungsweise Verdiersystem, das eine vorgegebene Menge von Objekten umfaßt, bezeichnen wir als das **von dieser Menge erzeugte triangulierte System** beziehungsweise **Verdiersystem**. Das von einer Menge von Objekten \mathcal{N} erzeugte triangulierte System notieren wir $\langle \mathcal{N} \rangle = \langle {}_t\mathcal{N} \rangle_{\Delta}$, wobei wir einen unteren Index Δ verwenden, wenn wir betonen wollen, daß das triangulierte Erzeugnis gemeint ist, und in Anlehnung an unsere Vereinbarung aus [AL] 3.5.1 das untere Ausrufezeichen, wenn wir betonen wollen, daß das Symbol in der Klammer nicht einen einzelnen Erzeuger meint, sondern ein ganzes System von Erzeugern. Besteht \mathcal{N} aus einem einzigen Objekt N , so schreiben wir auch kürzer $\langle N \rangle$ oder $\langle N \rangle_{\Delta}$. Für das von was auch immer erzeugte Verdiersystem verwenden wir analog die Notation $\langle \rangle_{\Delta \text{e}}$.

Beispiel 2.2.7. In der Homotopiekategorie der Kategorie der Vektorräume über einem Körper k besteht das von k^2 erzeugte Verdiersystem aus allen in beide Richtungen beschränkten Komplexen mit endlichdimensionalen Einträgen. Das von k^2 erzeugte triangulierte System enthält jedoch nur beschränkte Komplexe

mit endlichdimensionalen Einträgen und gerader Eulercharakteristik, wir haben also $\langle k^2 \rangle_{\Delta} \neq \langle k^2 \rangle_{\Delta \ominus}$.

2.2.8. Ist ein triangulierter Funktor volltreu auf einer vollen Unterkategorie, so ist er auch volltreu auf dem von dieser Unterkategorie erzeugten Verdiersystem. Das folgt sofort aus 2.1.14 und dem Fünferlemma. Das Anwenden dieser Erkenntnis bezeichnet man oft als **dévissage**, französisch für „Aufschrauben“.

Übungen

Übung 2.2.9. Ist ein triangulierter Funktor eine Äquivalenz von Kategorien, so ist auch jeder dazu quasiinverse Funktor trianguliert. In anderen Worten kann man unter keinen Umständen in einer triangulierten Kategorie noch zusätzliche Dreiecke auszeichnen derart, daß man wieder eine triangulierte Kategorie erhält.

Übung 2.2.10. Man betrachte den Funktor \mathbb{D} , der jedem Komplex C von abelschen Gruppen seinen dualen Komplex $\mathbb{D}C := C^*$ im Sinne von [TG] ?? zuordnet, und versehe ihn mit der \mathbb{Z} -Struktur, die durch diejenigen Morphismen $[1]\mathbb{D}C \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}[1]C$ erklärt wird, die auf der Komponente vom Grad n beider Komplexe das $(-1)^n$ -fache der offensichtlichen Identifikation sind. Mit dieser \mathbb{Z} -Struktur ist \mathbb{D} ein triangulierter Funktor

$$\mathbb{D} : \text{Hot}_{\text{Ab}} \rightarrow \text{Hot}_{\text{Ab}}^{\text{opp}}$$

2.3 Triangulierte Kategorien und dg-Moduln*

2.3.1. Auf der Kategorie dgMod_{-R} aller dg-Rechtsmoduln über einem dg-Ring R ist das Verschieben von Komplexen mit dem Negativ-Machen der Differentiale $M \mapsto [1]M$ aus [TS] 5.1.31 eine \mathbb{Z} -Operation.

Ergänzung 2.3.2. Auf der Kategorie dgMod_R aller dg-Moduln über einem dg-Ring R können wir eine \mathbb{Z} -Operation erklären, indem wir von unserer \mathbb{Z} -Operation $M \mapsto [1]M$ auf Komplexen aus [TS] 5.1.31 ausgehen und die R -Operation erklären durch die Vorschrift

$$r([1]m) := (-1)^{|r|}[1](rm)$$

für homogene $r \in R$. Das Vorzeichen ist nötig, damit unser $[1]M$ aus [TS] 5.1.31 mit seinem negativ gemachten Differential wieder ein dg-Modul ist.

2.3.3 (**Homotopiekategorie eines dg-Rings als triangulierte Kategorie**). Die Homotopiekategorie dgHot_{-R} aus [TS] 6.4.15 aller dg-Rechtsmoduln über einem dg-Ring R wird eine triangulierte Kategorie, wenn wir sie mit der \mathbb{Z} -Operation

durch Verschiebung versehen und diejenigen Dreiecke auszeichnen, die isomorph sind zu Dreiecken der Gestalt

$$M \xrightarrow{f} N \rightarrow \text{Keg}(f) \rightarrow [1]M$$

mit $\text{Keg}(f)$ dem Abbildungskegel, den wir mit seiner offensichtlichen Struktur als dg-Rechtsmodul versehen. Um die Axiome einer triangulierten Kategorie zu prüfen, müssen wir nur den Beweis des Satzes 2.2.1 durchgehen und prüfen, daß alle Kettenabbildungen und Homotopien daraus unter unseren zusätzlichen Voraussetzungen mit der Operation von R verträglich sind. Für Linksmodule gilt Entsprechendes, wenn wir auf dem Abbildungskegel die nicht ganz so offensichtliche R -Operation betrachten, bei der ein homogenes $r \in R$ in den Notationen von [TS] 6.6.5 durch die Diagonalmatrix $\text{diag}((-1)^{|r|}r, r)$ operiert. Im Folgenden will ich auf die Bedeutung dieser Verallgemeinerungen eingehen.

2.3.4. Gegeben dg-Ringe A, B und ein A - B -dg-Bimodul X liefern die Konstruktionen aus [TS] 6.4.14 und [TS] 6.4.15, wenn wir sie in der offensichtlichen Weise durch \mathbb{Z} -Strukturen ergänzen, wie der Leser unschwer selbst prüfen kann, triangulierte Funktoren

$$\begin{aligned} \otimes_A X &: \text{dgHot}_{-A} \rightarrow \text{dgHot}_{-B} \\ \text{Hom}_A(X, \) &: \text{dgHot}_A \rightarrow \text{dgHot}_B \\ \text{Hom}_A(\ , X) &: \text{dgHot}_A \rightarrow \text{dgHot}_B^{\text{opp}} \\ X \otimes_B &: \text{dgHot}_B \rightarrow \text{dgHot}_A \\ \text{Hom}_{-B}(X, \) &: \text{dgHot}_{-B} \rightarrow \text{dgHot}_{-A} \\ \text{Hom}_{-B}(\ , X) &: \text{dgHot}_{-B} \rightarrow \text{dgHot}_{-A}^{\text{opp}} \end{aligned}$$

Definition 2.3.5. Gegeben ein dg-Ring E nennen wir das von E in dgHot_E erzeugte triangulierte System die **freie triangulierte Kategorie zu E** und notieren es

$$\langle E \rangle_{\Delta} = E\text{-dgFrei} = \text{dgFrei}_E$$

Diese Terminologie befriedigt mich nicht vollständig, da es sich bei den Objekten eher um eine Art „freie und endlich erzeugte Objekte“ handelt, aber mir ist nichts Besseres eingefallen. Das von E in dgHot_E erzeugte Verdiersystem nennen wir die **perfekte triangulierte Kategorie zu E** und notieren es

$$\langle E \rangle_{\Delta\ominus} = E\text{-dgPer} = \text{dgPer}_E$$

Die Objekte der perfekten triangulierten Kategorie heißen **perfekte Komplexe**. Analog bilden wir die freie und die perfekte triangulierte Kategorie zum opponierten Ring und notieren sie alternativ $\langle E \rangle_{\Delta} = \text{dgFrei-}E = \text{dgFrei}_{-E}$ beziehungsweise $\langle E \rangle_{\Delta\ominus} = \text{dgPer-}E = \text{dgPer}_{-E}$.

Proposition 2.3.6 (Triangulierte Kategorien und dg-Moduln). Seien \mathcal{P} eine additive Kategorie, $T \in \text{Ket}_{\mathcal{P}}$ ein Komplex, $E := \text{End}_{\mathcal{P}} T$ der Endomorphismenkomplex von T mit seiner natürlichen Struktur als dg-Ring und $\langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}}$ das von T in $\text{Hot}_{\mathcal{P}}$ erzeugte triangulierte System. So induziert der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(T, _)$ eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-} E$$

2.3.7. Wenden wir das auf die zu \mathcal{P} opponierte Kategorie an, so ergibt sich, daß $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(_, T)$ eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien $\langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} E\text{-dgFrei}^{\text{opp}}$ induziert.

2.3.8. Ich sehe diese Proposition als Analogon zu Übung ??, die eine ähnliche Aussage für additive Kategorien bereitstellt. Arbeiten wir allgemeiner mit dg-Ringoiden im Sinne von 2.11.12, so können wir unsere Proposition ohne Schwierigkeiten zu einer Beschreibung des von einer beliebigen Menge von Komplexen erzeugten triangulierten Systems ausbauen. In 2.10.3 folgern wir eine analoge Aussage für die sogenannten „derivierten Kategorien“.

Beweis. Der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(T, _) : \text{Ket}_{\mathcal{P}} \rightarrow \text{dgMod-} E$ induziert einen triangulierten Funktor $\text{Hot}_{\mathcal{P}} \rightarrow \text{dgHot-} E$ mit $T \mapsto E$. Besonders transparent sieht man das in der Notation der „opponierten Hom-Räume“ aus [TS] 6.4.7 mit [TS] 6.4.13. Dieser Funktor induziert Bijektionen

$$\text{Hot}_{\mathcal{P}}(T, [n]T) \xrightarrow{\sim} \text{dgHot-}_E(E, [n]E)$$

für alle n , da beide Seiten mit $\mathcal{H}^n E$ identifiziert werden können in natürlicher und verträglicher Weise, vergleiche [TS] 6.4.17. Nach dévissage 2.2.8 induziert er folglich eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien wie behauptet. \square

2.3.9. Seien \mathcal{P} eine additive Kategorie und $T \in \text{Ket}_{\mathcal{P}}$ ein Komplex mit der Eigenschaft $\text{Hot}_{\mathcal{P}}(T, [n]T) = 0$ für $n < 0$. Wir nennen ein T mit dieser Eigenschaft **nichtnegativ erweiternd** und erklären für $\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}} \subset \text{Hot}_{\mathcal{P}}$ die von T erzeugte volle additive Unterkategorie den **Doppelkomplexfunktor**

$$\text{Hot}^b(\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{P}}$$

als die Verknüpfung der im Anschluß erklärten triangulierten Funktoren

$$\text{Hot}^b(\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}^b(\langle -H \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) \xleftarrow{\sim} \text{dgFrei-} Z \rightarrow \text{dgFrei-} E \xleftarrow{\sim} \langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{P}}$$

Genau genommen ist unser Doppelkomplexfunktor also nur definiert bis auf eindeutige Isotransformation von Funktoren, da ja bei seiner Definition Äquivalenzen von Kategorien zu invertieren sind. In unserer Sequenz bezeichnet $E :=$

$\text{End}_{\mathcal{P}} T$ den Endomorphismenkomplex von T mit seiner natürlichen Struktur als dg-Ring und der zweite Funktor von rechts kommt von 2.3.6 her. Weiter setzen wir $Z := \mathcal{Z}^0 E \oplus E^{<0}$ und der nächste Funktor von rechts ist die Erweiterung der Skalare $\otimes_Z E$. Dann setzen wir $H := \mathcal{H}^0 E$ und die offensichtliche Surjektion $Z \twoheadrightarrow H$ ist nach Annahme ein Quasiisomorphismus, so daß nach Übung 2.3.15 die Erweiterung der Skalare $\otimes_Z H$ eine Äquivalenz $\text{dgFrei-}Z \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-}H$ induziert. Schließlich verwenden wir noch die offensichtlichen Äquivalenzen $\text{dgFrei-}H = \text{Hot}^b(\langle -H \rangle_{\oplus}) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}^b(\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}})$ mit der Notation $-H$ für den H -Rechtsmodul H und $\langle -H \rangle_{\oplus} \subset \text{Mod-}H$ die volle Unterkategorie aller endlichen direkten Summen von Kopien von $-H$. Hat unser Komplex T stärker die Eigenschaft $\text{Hot}_{\mathcal{P}}(T, [n]T) = 0$ für $n \neq 0$, so ist auch die Einbettung $Z \hookrightarrow E$ ein Quasiisomorphismus und unser Doppelkomplexfunktor induziert mit einer nochmaligen Anwendung von 2.3.15 eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\text{Hot}^b(\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) \xrightarrow{\sim} \langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}}$$

2.3.10 (Explizite Beschreibung des Doppelkomplexfunktors). Sei Z ein dg-Ring, dessen homogene Anteile in positiven Graden verschwinden und dessen Homologie in Grad Null konzentriert ist. Sei $Z \twoheadrightarrow H$ seine Surjektion auf die Homologie. Wir wollen zunächst Urbilder unter unserer Äquivalenz

$$(\otimes_Z H) : \text{dgFrei-}Z \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-}H = \text{Hot}^b(\langle -H \rangle_{\oplus})$$

expliziter beschreiben. Indem wir einen beschränkten Komplex

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H^{\oplus n(r)} \rightarrow \dots \rightarrow H^{\oplus n(s)} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

von freien Rechtsmoduln als iterierten Abbildungskegel verstehen, erkennen wir, daß er von einem Objekt in $\text{dgFrei-}Z$ herkommen muß, das als Z -Rechtsmodul schlicht

$$\bigoplus_{i=r}^s [-i] Z^{\oplus n(i)}$$

ist und das als Differential eine bei richtiger Anordnung der Summanden obere Block-Dreiecksmatrix hat mit $(-1)^i \partial^{\oplus n(i)}$ in der Diagonalen, Elementen vom Grad Null in der ersten Nebendiagonalen, und Elementen von immer negativeren Graden in den höheren Nebendiagonalen. Wir erhalten so eine etwas direktere Beschreibung des Doppelkomplexfunktors 2.3.9: Gegeben ein nichtnegativ erweiternder Komplex T in einer additiven Kategorie \mathcal{P} und ein Komplex

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow T^{\oplus n(r)} \rightarrow \dots \rightarrow T^{\oplus n(s)} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

in $\text{Hot}^b(\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}})$ betrachten wir in \mathcal{P} das graduierte Objekt alias die Folge von Objekten gegeben durch

$$\bigoplus_{i=r}^s [-i] T^{\oplus n(i)}$$

und versehen es mit einem Differential durch block-obere Dreiecksmatrizen mit $(-1)^i \partial^{\oplus n(i)}$ in der Diagonalen, Hochhebungen unserer Homologieklassen zu Kettenabbildungen in der ersten Nebendiagonale, und dann in den höheren Nebendiagonalen irgendwie so, daß wir insgesamt ein Differential erhalten. Unsere Überlegungen von oben sagen uns, daß das möglich ist, und daß der entstehende Komplex ein wohldefiniertes Objekt von $\text{Hot}_{\mathcal{P}}$ ist und das Bild des ursprünglichen Komplexes unter dem Doppelkomplexfunktor. Ebenso sagt uns unser Satz, daß jeder Morphismus in $\text{Hot}^b(\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}})$ von einer bis auf Homotopie wohlbestimmten Kettenabbildung zwischen zwei beliebigen in dieser Weise erhaltenen Komplexen aus $\text{Hot}_{\mathcal{P}}$ herkommen muß.

2.3.11. Seien \mathcal{P}, \mathcal{Q} additive Kategorien und $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ ein additiver Funktor und $T \in \text{Ket}_{\mathcal{P}}$ ein nichtnegativ erweiternder Komplex, dessen Bild FT ein nichtnegativ erweiternder Komplex in $\text{Ket}_{\mathcal{Q}}$ ist. So kann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hot}^b(\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) & \longrightarrow & \text{Hot}_{\mathcal{P}} \\ \downarrow F & \swarrow \sim & \downarrow F \\ \text{Hot}^b(\langle FT \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) & \longrightarrow & \text{Hot}_{\mathcal{Q}} \end{array}$$

mit unseren Doppelkomplexfunktoren 2.3.9 in den Horizontalen durch eine Isotransformation gefüllt werden, die man an der in 2.3.10 gegebenen Beschreibung unschwer ablesen kann.

2.3.12. Seien $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ additive Kategorien. Wir nehmen an, daß \mathcal{R} abzählbare direkte Summen besitzt. Sei $\otimes : \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ ein **biadditiver**, als da heißt auf Morphismenräumen bilinearer, Funktor und seien $P \in \text{Ket}_{\mathcal{P}}, Q \in \text{Ket}_{\mathcal{Q}}$ nichtnegativ erweiternde Komplexe derart, daß $P \otimes Q$ ein nichtnegativ erweiternder Komplex in $\text{Ket}_{\mathcal{R}}$ ist. So kann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hot}^b(\langle P \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) \times \text{Hot}^b(\langle Q \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) & \longrightarrow & \text{Hot}_{\mathcal{P}} \times \text{Hot}_{\mathcal{Q}} \\ \downarrow \otimes & \swarrow \sim & \downarrow \otimes \\ \text{Hot}^b(\langle P \otimes Q \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) & \longrightarrow & \text{Hot}_{\mathcal{R}} \end{array}$$

mit unseren Doppelkomplexfunktoren 2.3.9 in den Horizontalen durch eine Isotransformation gefüllt werden, die man an der in 2.3.10 gegebenen Beschreibung unschwer ablesen kann. Analoges gilt auch ohne die Annahme der Existenz abzählbarer direkter Summen, wenn wir P und Q beide in Richtung der Pfeile beschränkt oder alternativ in Richtung gegen die Pfeile beschränkt annehmen.

Ergänzung 2.3.13 (Vergleich verschiedener Hom-Funktoren). Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie und seien $P, I \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ Komplexe. Wir betrachten die dg-Ringe

$F = \text{End}_{\mathcal{A}} I$ und $E = \text{End}_{\mathcal{A}} P$ und den F - E -dg-Bimodul $X = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, I)$. So erhalten wir eine verträgliche Transformation τ von \mathbb{Z} -Funktoren wie im Diagramm als Doppelpfeil angedeutet

$$\begin{array}{ccc} \text{Ket}_{\mathcal{A}} & \xlongequal{\quad} & \text{Ket}_{\mathcal{A}} \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, I) \downarrow & \xrightarrow{\tau} & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot) \\ \text{dgMod}_F^{\text{opp}} & \xrightarrow{\text{Hom}_F(\cdot, X)} & \text{dgMod}_{-E} \end{array}$$

durch die Morphismen $\tau_A : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A) \rightarrow \text{Hom}_F(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I), X)$ mit $\tau_A : \varphi \mapsto (\circ\varphi)$. Im Fall $A = I$ ist τ_I sogar ein Isomorphismus. Des weiteren steigt unser Diagramm zu den Homotopie-Kategorien ab und unser τ liefert auch eine verträgliche Transformation $\tilde{\tau}$ von \mathbb{Z} -Funktoren wie im folgenden Diagramm als Doppelpfeil angedeutet:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hot}_{\mathcal{A}} & \xlongequal{\quad} & \text{Hot}_{\mathcal{A}} \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, I) \downarrow & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot) \\ \text{dgHot}_F^{\text{opp}} & \xrightarrow{\text{Hom}_F(\cdot, X)} & \text{dgHot}_{-E} \end{array}$$

Diese Transformation $\tilde{\tau}$ liefert dann sogar Isomorphismen $\tilde{\tau}_A$ für alle Objekte A im triangulierten Erzeugnis $\langle I \rangle_{\Delta} \subset \text{Hot}_{\mathcal{A}}$ von I und damit eine Isotransformation wie im folgenden Diagramm durch einen Doppelpfeil angedeutet:

$$\begin{array}{ccc} \langle I \rangle_{\Delta} & \xrightarrow{\sim} & \text{Hot}_{\mathcal{A}} \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, I) \downarrow \cong & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot) \\ \text{dgFrei}_F^{\text{opp}} & \xrightarrow{\text{Hom}_F(\cdot, X)} & \text{dgHot}_{-E} \end{array}$$

Ergänzung 2.3.14 (Vergleich verschiedener Hom-Funktoren, Variante). Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie und seien $P, T \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ Komplexe. Wir betrachten die dg-Ringe $F = \text{End}_{\mathcal{A}} T$ und $E = \text{End}_{\mathcal{A}} P$ und den F - E -dg-Bimodul $X = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, T)$. So erhalten wir eine verträgliche Transformation τ von \mathbb{Z} -Funktoren wie im Diagramm als Doppelpfeil angedeutet

$$\begin{array}{ccc} \text{Ket}_{\mathcal{A}} & \xlongequal{\quad} & \text{Ket}_{\mathcal{A}} \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, \cdot) \downarrow & \xrightarrow{\tau} & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot) \\ \text{dgMod}_{-F} & \xrightarrow{\otimes_F X} & \text{dgMod}_{-E} \end{array}$$

durch die Morphismen $\tau_A : \varphi \otimes x \mapsto \varphi \circ x$. Im Fall $A = T$ ist τ_T sogar ein Isomorphismus. Des weiteren steigt unser Diagramm zu den Homotopie-Kategorien

ab und unser τ liefert auch eine verträgliche Transformation $\tilde{\tau}$ von \mathbb{Z} -Funktoren wie im folgenden Diagramm als Doppelpfeil angedeutet:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hot}_{\mathcal{A}} & \xlongequal{\quad} & \text{Hot}_{\mathcal{A}} \\
 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T,) \downarrow & \nearrow \tilde{\tau} & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P,) \\
 \text{dgHot}_{-F} & \xrightarrow{\otimes_F X} & \text{dgHot}_{-E}
 \end{array}$$

Diese Transformation $\tilde{\tau}$ liefert dann sogar Isomorphismen $\tilde{\tau}_A$ für alle Objekte A im triangulierten Erzeugnis $\langle T \rangle_{\Delta} \subset \text{Hot}_{\mathcal{A}}$ von T und damit eine Isotransformation wie im folgenden Diagramm durch einen Doppelpfeil angedeutet:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle T \rangle_{\Delta} \subset & \xrightarrow{\sim} & \text{Hot}_{\mathcal{A}} \\
 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T,) \downarrow \mathcal{R} & \nearrow \sim & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P,) \\
 \text{dgFrei}_{-F} & \xrightarrow{\otimes_F X} & \text{dgHot}_{-E}
 \end{array}$$

Übungen

Übung 2.3.15. Gegeben ein Quasiisomorphismus $A \xrightarrow{\sim} B$ von dg-Ringen induziert der Funktor $\otimes_A B$ eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$(\otimes_A B) : \text{dgFrei-} A \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-} B$$

Analoges gilt für Linksmoduln.

2.4 Quotienten triangulierter Kategorien

2.4.1. Seien \mathcal{T} eine **triangulierte Kategorie** und \mathcal{N} eine Menge von Objekten von \mathcal{T} . Im folgenden konstruieren wir ein Paar $(\mathcal{T}/\mathcal{N}, \text{can})$ bestehend aus einer triangulierten Kategorie \mathcal{T}/\mathcal{N} und einem **triangulierten Funktor** $\text{can} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$ derart, daß gilt:

1. Jedes Objekt aus \mathcal{N} wird unter can ein Nullobjekt in \mathcal{T}/\mathcal{N} ;
2. Ist \mathcal{D} eine weitere triangulierte Kategorie und $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$ ein triangulierter Funktor, der alle Objekte aus \mathcal{N} zu Null macht, so gibt es genau einen triangulierten Funktor $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{D}$ mit $F = \tilde{F} \circ \text{can}$.

Ein derartiges Paar ist in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen es den **Quotienten von \mathcal{T} nach \mathcal{N}** .

2.4.2. Ist $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$ ein triangulierter Funktor in eine weitere triangulierte Kategorie, der die Objekte aus \mathcal{N} zu Null macht und für den der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}$ ist, so nenne ich F einen **Quotientenfunktor** oder genauer, wenn ich Verwechslungen mit Quotientenfunktoren im Kontext abelscher Kategorien vermeiden will, einen **triangulierten Quotientenfunktor**. Man erinnere hier, daß nach 2.2.9 in diesem Fall jeder Quasiinverse zu unserer Äquivalenz auch trianguliert ist.

Satz 2.4.3 (Konstruktion triangulierter Quotienten). *Seien \mathcal{T} eine triangulierte Kategorie und $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ ein Verdiersystem. So gilt:*

1. Die Menge $S(\mathcal{V})$ aller Morphismen mit Abbildungskegel in \mathcal{V} ist ein **Oresystem**;
2. Die an $S(\mathcal{V})$ **lokalisierte Kategorie** $\mathcal{T}_{S(\mathcal{V})}$ wird eine triangulierte Kategorie, wenn wir sie mit der von \mathcal{T} induzierten \mathbb{Z} -Operation [1] versehen und als ausgezeichnete Dreiecke alle Dreiecke nehmen, die isomorph sind zu Bildern ausgezeichneter Dreiecke von \mathcal{T} ;
3. Der kanonische Funktor $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_{S(\mathcal{V})}$ ist ein Quotient von \mathcal{T} nach \mathcal{V} , die davon annullierten Objekte sind genau die Objekte von \mathcal{V} , und die davon zu Isomorphismen gemachten Morphismen sind genau die Morphismen mit Abbildungskegel aus \mathcal{V} , die mithin sogar ein **gesättigtes Oresystem** bilden.

2.4.4. Mit diesem Satz ist auch klar, daß für eine beliebig vorgegebene Menge von Objekten \mathcal{N} einer triangulierten Kategorie \mathcal{T} der Quotient \mathcal{T}/\mathcal{N} existiert: Man wendet schlicht die Konstruktion aus dem Satz an auf das von dieser Menge erzeugte Verdiersystem $\langle \mathcal{N} \rangle_{\Delta \ominus}$ und setzt also in Formeln

$$\mathcal{T}/\mathcal{N} := \mathcal{T}_{S(\langle \mathcal{N} \rangle_{\Delta \ominus})}$$

Zusätzlich zeigt unser Satz dann, daß die von $\text{can} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$ zu Null gemachten Objekte genau die Objekte des von \mathcal{N} erzeugten Verdiersystems sind.

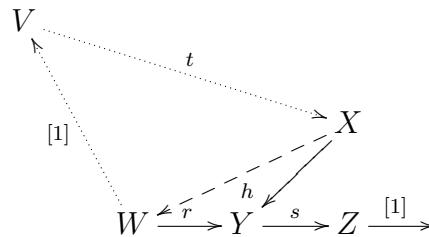
Beweis. 1. Daß unser System $S := S(\mathcal{V})$ stabil ist unter Verknüpfung, folgt sofort aus dem Oktaederaxiom. Daß sich jeder Winkel

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow s & \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

mit $s \in S$ ergänzen läßt zu einem kommutativen Diagramm

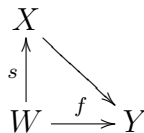
$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & X \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

mit $t \in S$ folgt auch aus dem Oktaederaxiom, indem man nämlich erst das Dreieck $X \rightarrow Z \rightarrow N \rightarrow$ über s bildet und damit den Oktaeder zur Komposition $Y \rightarrow Z \rightarrow N$. Dessen untere Ecke, also die dritte Ecke des Dreiecks über der Komposition, ist dann das gesuchte W . Sind schließlich $f, g : X \rightarrow Y$ gegeben und $s \in S$ und $sf = sg$, also $s \circ (f - g) = 0$, so betrachten wir das ausgezeichnete Dreieck über s und folgern mit 2.1.14 die Existenz von $h : X \rightarrow W$ mit $(f - g) = r \circ h$.



Bilden wir nun, wie durch die gepunkteten Pfeile angedeutet, das ausgezeichnete Dreieck über h , so haben wir $t \in S$ und $(f - g) \circ t = 0$. Damit haben wir gezeigt, daß unser System rechts-Ore ist im Sinne von 1.3.3. Daß es auch links-Ore sein muß, folgt durch Übergang zur opponierten Kategorie.

2. Nach 1.3.13 ist unsere lokalisierte Kategorie \mathcal{T}_S additiv und der kanonische Funktor $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_S$ desgleichen. Die \mathbb{Z} -Operation geht ohne Schwierigkeiten auf die Lokalisierung über. Daß unsere in 2.4.3 ausgezeichneten Dreiecke die Lokalisierung sogar zu einer triangulierten Kategorie machen, scheint mir klar, da sich ja jeder Morphismus $X \rightarrow Y$ der lokalisierten Kategorie einbetten läßt in ein kommutatives Diagramm



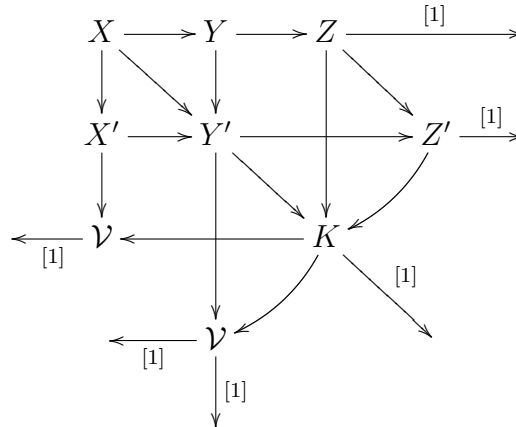
mit der Eigenschaft, daß s und f von Morphismen in \mathcal{T} herkommen und daß s in \mathcal{T}_S ein Isomorphismus wird. Und nun muß man nur 2.4.5 anwenden und erinnern, daß nach 1.3.16 jedes kommutative Dreieck oder Viereck in der lokalisierten Kategorie bis auf Isomorphismus von einem kommutativen Dreieck oder Viereck in der ursprünglichen Kategorie herkommt.

3. Die universelle Eigenschaft scheint mir evident. Geht ein Objekt unter dem Quotientenfunktor nach Null, so muß die Identität darauf zur Nullabbildung werden. Schreiben wir diese Bedingung in der Kategorie der Brüche, so impliziert sie leicht, daß unser Objekt direkter Summand eines Objekts von \mathcal{N} sein muß. Aufgrund unserer Definition eines Verdiersystems gehört unser Objekt dann aber sogar selbst bereits zu \mathcal{N} . \square

Lemma 2.4.5. Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ ein Verdiersystem in einer triangulierten Kategorie.

Haben bei einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken zwei der Objekt-morphismen Kegel in \mathcal{V} , so auch der Dritte.

Beweis. Wir argumentieren anhand des folgenden Diagramms:



Es entsteht durch zweimaliges Anwenden des Oktaederaxioms auf die beiden Kompositionen im Rechteck oben links und zeigt, daß sowohl $Z \rightarrow K$ als auch $Z' \rightarrow K$ Kegel in \mathcal{V} haben. Mit nochmaligem Anwenden des Oktaederaxioms folgt dann, daß auch $Z \rightarrow Z'$ Kegel in \mathcal{V} hat. \square

2.5 Derivierte Kategorien

Definition 2.5.1. Ist \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, so bezeichnen wir den Quotienten im Sinne von 2.4.3 der zugehörigen Homotopiekategorie nach dem Verdiersystem aller exakten Komplexe mit

$$\text{Der}_{\mathcal{A}} = \text{Der}(\mathcal{A}) := \text{Hot}(\mathcal{A}) / (\text{exakte Komplexe})$$

und nennen diese triangulierte Kategorie die **derivierte Kategorie von \mathcal{A}** .

2.5.2. Nach der in 2.4.3 gegebenen Konstruktion ist die derivierte Kategorie also genau die Lokalisierung der Homotopiekategorie an den Quasiisomorphismen aus ???. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert uns folglich Funktoren

$$\mathcal{H}^i : \text{Der}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

mit der Eigenschaft, daß jedes ausgezeichnete Dreieck eine lange exakte Sequenz liefert und daß ein Morphismus ein Isomorphismus ist genau dann, wenn er Isomorphismen auf allen \mathcal{H}^i induziert. Ich werde Isomorphismen in der derivierten Kategorie selbst dann manchmal $\xrightarrow{\sim}$ notieren, wenn sie nicht durch eine Kettenabbildung repräsentiert werden können und diese Notation noch nicht bereits durch unsere Konvention ??? abgedeckt ist.

Definition 2.5.3. Ist A ein dg-Ring und \mathfrak{U} ein Universum mit $A \in \mathfrak{U}$, so bilden wir die triangulierte Kategorie

$$A\text{-dgDer} = \text{dgDer}_A = \text{dgHot}_A / (\text{exakte dg-Moduln})$$

und analog $\text{dgDer-}A = \text{dgDer}_{-A}$ für dg-Rechtsmoduln und nennen sie die **derivierete Kategorie der dg-Moduln** beziehungsweise **dg-Rechtsmoduln über A in \mathfrak{U}** . Das fragliche Universum notieren wir nicht mit, um die Notation nicht zu überladen. Ist unser dg-Ring ein Ring A konzentriert im Grad Null, so haben wir mit unseren Definitionen also

$$\text{dgDer}_A = \text{Der}(A\text{-Mod}) = \text{Der}_{A\text{-Mod}}$$

$$\text{dgDer}_{-A} = \text{Der}(\text{Mod-}A) = \text{Der}_{\text{Mod-}A}$$

Wir verwenden für einen Ring A auch gerne die Notationen $\text{Der}_A = \text{dgDer}_A$ und $\text{Der}_{-A} = \text{dgDer}_{-A}$ für die entsprechenden derivierten Kategorien von A -Moduln.

2.5.4. Gegeben eine kurze exakte Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ von Komplexen in einer abelschen Kategorie \mathcal{A} bilden wir in $\text{Der}(\mathcal{A})$ das **der kurzen exakten Sequenz zugeordnete ausgezeichnete Dreieck**

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$$

wie folgt: Wir beachten im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & \text{Keg}(f) & \rightarrow & [1]X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & & [1]X \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ [-1]\text{Keg}(g) & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & \text{Keg}(g) \end{array}$$

mit dritter oberer Vertikale $(0, g)$ und unterer erster Vertikale $(f, 0)^\top$, daß diese Vertikalen Quasiisomorphismen sind. Das erkennt man für die dritte Vertikale an der langen exakten Homologiesequenz der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$\text{Keg}(\text{id}_X) \hookrightarrow \text{Keg}(f) \xrightarrow{(0, g)} Z$$

In der Tat prüft man leicht, daß die Homologie von $\text{Keg}(\text{id}_X)$ verschwindet. Weiter erkennt man, daß die linken und mittleren Quadrate kommutieren, wohingegen das rechte Rechteck in der Homotopiekategorie kommutiert. So erhalten wir sogar zwei ausgezeichnete Dreiecke und einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen den beiden. Analoges gilt in der derivierten Kategorie der dg-Moduln über einem vorgegebenen dg-Ring. Diese Konstruktion liefert sogar einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Komplexen in die Kategorie der ausgezeichneten Dreiecke der derivierten Kategorie.

Ergänzung 2.5.5. Ich sehe keinen Grund, aus dem der natürliche Funktor von der Homotopiekategorie zur derivierten Kategorie mit unendlichen Produkten oder Koprodukten verträglich sein sollte.

Ergänzung 2.5.6. Gegeben eine abelsche Kategorie \mathcal{A} heißt das Supremum

$$\text{hdim}(\mathcal{A}) := \sup\{i \mid \exists M, N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{A}^{[i]}(M, N) \neq 0\}$$

die **homologische Dimension von** \mathcal{A} . Im Fall $\text{hdim}(\mathcal{A}) < \infty$ sagen wir auch, unsere abelsche Kategorie habe **endliche homologische Dimension**. Homologische Dimension $-\infty$ haben genau die **Nullkategorien**, als da heißt, diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle Objekte Nullobjekte sind. Homologische Dimension ≤ 0 haben genau diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle kurzen exakten Sequenzen spalten. Derartige Kategorien heißen **halbeinfach**. Abelsche Kategorien einer homologischen Dimension ≤ 1 bezeichnet man gleichbedeutend auch als **erbliche Kategorien**, da sich bei ihnen die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt. Diese Terminologie ist allerdings gefährlich, denn es gibt durchaus abelsche Kategorien, die nicht von homologischer Dimension ≤ 1 sind, bei denen sich aber dennoch die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt, etwa weil sie außer der Null gar keine projektiven Objekte besitzen.

Übungen

Übung 2.5.7. Für jeden dg-Ring A ist der Quotientenfunktor alias Lokalisierungsfunktor $A\text{-dgHot} \rightarrow A\text{-dgDer}$ volltreu auf $A\text{-dgPer}$. Wir können $A\text{-dgPer}$ also auch als das von A in $A\text{-dgDer}$ erzeugte Verdiersystem auffassen. Ebenso induziert der Lokalisierungsfunktor eine Äquivalenz von $A\text{-dgFrei}$ mit dem von A in $A\text{-dgDer}$ erzeugten triangulierten System.

Übung 2.5.8. Ist $A \xrightarrow{\sim} B$ ein Quasiisomorphismus von dg-Ringen im Sinne von [TS] ??, so induziert der durch Restriktion längs unseres Quasiisomorphismus gegebene Funktor $B\text{-dgDer} \rightarrow A\text{-dgDer}$ eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien $B\text{-dgFrei} \xrightarrow{\sim} A\text{-dgFrei}$. Hinweis: 2.5.7. In ?? konstruieren wir im übrigen eine Adjunktion zu unserer Äquivalenz $B \otimes_A$ aus 2.3.15 in die Gegenrichtung.

Übung 2.5.9 (Alternative Konstruktion der derivierten Kategorie). Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Man prüfe, daß Kettenabbildungen $f, g \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ genau dann homotop sind, wenn es eine Kettenabbildung $h : S\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X \rightarrow Y$ gibt mit $f = h \circ \delta_0$ und $g = h \circ \delta_1$. Hier meint $S\Delta_1$ den Komplex der Simplicialketten des eindimensionalen Standardsimplex. Andererseits sind im Diagramm

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \end{array} S\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X \xrightarrow{p} X$$

beide Kompositionen die Identität und p ist eine Homotopieäquivalenz. Jeder Funktor, der Homotopieäquivalenzen zu Isomorphismen macht, muß also über $\text{Ket}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{A}}$ faktorisieren. Andererseits werden unter diesem Funktor auch alle Homotopieäquivalenzen Isomorphismen. Bezeichnet also H die Menge der Homotopieäquivalenzen, so liefert der offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$H^{-1} \text{Ket}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}$$

Bezeichnet weiter Q die Menge aller Quasiisomorphismen in $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$ und \bar{Q} die Menge aller Quasiisomorphismen in $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$, so liefert demnach der offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$Q^{-1} \text{Ket}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \bar{Q}^{-1} \text{Hot}_{\mathcal{A}}$$

Damit erhalten wir eine alternative Konstruktion der derivierten Kategorie $\text{Der}_{\mathcal{A}}$ als Lokalisierung der Kategorie $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$ der Komplexe nach Quasiisomorphismen.

2.6 Beschränkte derivierte Kategorien

Definition 2.6.1. Gegeben eine additive Kategorie \mathcal{I} betrachten wir in der triangulierten Kategorie $\text{Hot}(\mathcal{I})$ die Verdiersysteme

$$\begin{aligned} \text{Hot}_{\mathcal{I}}^+ &= \text{Hot}^+(\mathcal{I}) \quad \text{aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe;} \\ \text{Hot}_{\mathcal{I}}^- &= \text{Hot}^-(\mathcal{I}) \quad \text{aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe;} \\ \text{Hot}_{\mathcal{I}}^b &= \text{Hot}^b(\mathcal{I}) \quad \text{aller beidseitig beschränkten Komplexe.} \end{aligned}$$

Im Fall einer abelschen Kategorie \mathcal{A} schreiben wir kurz

$$\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\sharp} = \text{Der}^{\sharp}(\mathcal{A})$$

mit $\sharp \in \{+, -, b\}$ für die Quotienten dieser triangulierten Kategorien nach dem Verdiersystem aller azyklischen Komplexe in der jeweiligen Kategorie von Komplexen.

Lemma 2.6.2. Für jede abelsche Kategorie \mathcal{A} liefern die offensichtlichen Funktoren volltreue Einbettungen

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Der}^+(\mathcal{A}) & & \\ & \nearrow \sim & \hookrightarrow & \searrow \sim & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\sim} & \text{Der}^b(\mathcal{A}) & & \text{Der}(\mathcal{A}) \\ & \searrow \sim & \hookrightarrow & \nearrow \sim & \\ & & \text{Der}^-(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

Des Weiteren ist ein Komplex im $\text{Der}(\mathcal{A})$ isomorph zum Bild eines Objekts unter einer unserer Einbettungen genau dann, wenn seine Kohomologie nach oben beschränkt beziehungsweise nach unten beschränkt beziehungsweise beschränkt beziehungsweise nur im Grad Null konzentriert ist.

2.6.3. Oft bezeichnen wir später mit $\text{Der}^\sharp(\mathcal{A})$ auch das essentielle Bild unserer volltreuen Einbettungen.

Beweis. Wir verwenden die Abschneidefunktoren, wie sie in 2.6.4 eingeführt werden. Um zu zeigen, daß $\text{Der}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$ volltreu ist, wenden wir 1.3.8 an: Ist $s : X \rightarrow Y$ ein Quasiisomorphismus mit $Y \in \text{Hot}^-(\mathcal{A})$, so ist für hinreichend großes n der Morphismus $h : \tau^{\leq n} X \rightarrow X$ ein Quasiisomorphismus und leistet das Gewünschte. Die anderen Fälle mit Ausnahme der Einbettung von \mathcal{A} behandelt man ähnlich. Im Fall der Einbettung von \mathcal{A} zeigt der Funktor \mathcal{H}^0 , daß sie treu ist. Ist andererseits X ein Komplex, dessen Kohomologie nur im Grad Null lebt, so liefern die Quasiisomorphismen $X \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0} X \xleftarrow{\sim} \tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X$ einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 X$ in der derivierten Kategorie, wo wir $\mathcal{H}^0 X$ als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen. Also ist jeder Komplex mit trivialer Kohomologie außerhalb von Null in der derivierten Kategorie isomorph zu seiner Kohomologie. Damit gilt es nur noch zu zeigen, daß die Einbettung $\mathcal{A} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$ surjektiv ist auf Morphismen. Dazu stellen wir für $A, B \in \mathcal{A}$ einen Morphismus als Bruch $A \xleftarrow{\sim} X \rightarrow B$ in der Homotopiekategorie dar mit $A \xleftarrow{\sim} X$ einem Quasiisomorphismus. Wenden wir nun die Abschneidefunktoren in der Homotopiekategorie auf unseren Bruch an, so erhalten wir einen Bruch $A \xleftarrow{\sim} \tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X \rightarrow B$, der offensichtlich denselben Morphismus darstellt. Nun steht jedoch links ein echter Isomorphismus und wir sind fertig. \square

2.6.4 (**Abschneidefunktoren**). Gegeben ein Komplex $X = (X^n, d^n)$ in einer abelschen Kategorie erklären wir für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Komplexe

$$\begin{array}{cccccccc}
 \tau^{\leq n} X & \dots \rightarrow & X^{n-1} & \rightarrow & \ker d^n & \rightarrow & 0 & \rightarrow \dots \\
 \tau^{< n+1} X & \dots \rightarrow & X^{n-1} & \rightarrow & X^n & \rightarrow & \text{im } d^n & \rightarrow \dots \\
 \tau^{> n} X & \dots \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{im } d^n & \rightarrow & X^{n+1} & \rightarrow \dots \\
 \tau^{\geq n+1} X & \dots \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{cok } d^n & \rightarrow \dots
 \end{array}$$

Der Buchstabe τ steht für englisch „truncated“ oder französisch „tronqué“. Wir haben ein offensichtliches kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Quasiisomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccccc}
 \tau^{< n+1} X & \hookrightarrow & X & \twoheadrightarrow & \tau^{\geq n+1} X \\
 \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\
 \tau^{\leq n} X & \hookrightarrow & X & \twoheadrightarrow & \tau^{> n} X
 \end{array}$$

Sicher gilt $\mathcal{H}^i(\tau^{\leq n} X) = \mathcal{H}^i(\tau^{< n+1} X) = 0$ für $i > n$ und die offensichtlichen Morphismen $\tau^{\leq n} X \rightarrow \tau^{< n+1} X \rightarrow X$ induzieren für $i \leq n$ Isomorphismen auf den i -ten Kohomologiegruppen. Der offensichtliche Morphismus ist also stets ein Isomorphismus $\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{< n+1} X$ in der derivierten Kategorie, und verschwinden alle $\mathcal{H}^i X$ für $i > n$, so liefern die offensichtlichen Morphismen in der derivierten Kategorie Isomorphismen $\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{< n+1} X \xrightarrow{\sim} X$. Analoges gilt für das andere Abschneiden. Offensichtlich machen alle diese Abschneidefunktoren homotope Abbildungen zu homotopen Abbildungen und Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen und induzieren folglich Abschneidefunktoren sowohl auf der Homotopiekategorie als auch auf der derivierten Kategorie. Wir verwenden für diese induzierten Funktoren dieselbe Notation.

2.6.5. Gegeben eine abelsche Kategorie \mathcal{A} setzen wir

$$\begin{aligned} \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} &= \{X \in \text{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i > n\} \\ \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} &= \{X \in \text{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i < n\} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n+1}$ und $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \supset \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$.

Proposition 2.6.6 (über Abschneidefunktoren). *Seien \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und $n \in \mathbb{Z}$. So haben wir:*

1. Für alle $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$ und $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$ gilt $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$;
2. Die Einbettung $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$ besitzt stets einen Rechtsadjungierten $\tau^{\leq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$;
3. Die Einbettung $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$ besitzt stets einen Linksadjungierten $\tau^{\geq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n}$;
4. Die Einheit beziehungsweise Koeinheit zu diesen Adjunktionen lassen sich für jedes $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$ auf genau eine Weise ergänzen zu einem ausgezeichneten Dreieck

$$\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n+1} X \rightarrow [1]\tau^{\leq n} X$$

und dieses Dreieck ist funktoriell in X .

Beweis. Jeder Morphismus aus $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ läßt sich natürlich darstellen als ein Bruch $X \xleftarrow{Z} Z \rightarrow Y$ von Morphismen in $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$ mit einem Quasiisomorphismus $Z \xrightarrow{\sim} X$. Unter der Annahme $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}(\mathcal{A})$ können wir diesen Bruch erweitern durch den Quasiisomorphismus $\tau^{\leq n} Z \xrightarrow{\sim} Z$. Unter der Annahme $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}(\mathcal{A})$ dürfen wir weiter aufgrund des Quasiisomorphismus $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq n+1} Y$ annehmen, daß Y durch einen Komplex dargestellt wird, der Null ist in Graden $\leq n$. Die erste Aussage folgt nun wegen $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(\tau^{\leq n} Z, Y) = 0$, es gibt ja noch

nicht einmal von Null verschiedene Kettenabbildungen zwischen diesen beiden Komplexen. Wir erhalten mit den Abschneidefunktoren aus 2.6.4 nun offensichtlich eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $\tau^{\leq n} X \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/\tau^{\leq n} X$ nebst einem offensichtlichen Quasiisomorphismus $X/\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq n+1} X$ und so mit 2.5.4 ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n+1} X \rightarrow [1]\tau^{\leq n} X$$

in der derivierten Kategorie $\text{Der}(\mathcal{A})$. Die Eindeutigkeit des dritten Morphismus folgt mit 2.1.17 aus Teil 1. Um nun die erste Adjunktion zu zeigen, müssen wir für $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$ und $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$ zeigen $\text{Der}_{\mathcal{A}}(Y, \tau^{\leq n} X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(Y, X)$. Das folgt jedoch sofort aus den bereits bewiesenen Teilen. Die andere Adjunktion zeigt man genauso. \square

Übungen

Ergänzende Übung 2.6.7. Man zeige: Gegeben eine additive Kategorie \mathcal{I} mit der Karoubi-Eigenschaft liefert die Einbettung der mit Grad Null endenden Komplexe $\text{Hot}^{\leq 0}(\mathcal{I}) \subset \text{Hot}^+(\mathcal{I})$ eine Äquivalenz mit der Kategorie aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe T mit $\text{Hot}(I[0], T[n]) = 0$ für alle $n > 0$ und alle $I \in \mathcal{I}$. Ebenso liefert die Einbettung der mit Grad Null beginnenden Komplexe $\text{Hot}^{\geq 0}(\mathcal{I}) \subset \text{Hot}^-(\mathcal{I})$ eine Äquivalenz mit der Kategorie aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe T mit $\text{Hot}(T[n], I[0]) = 0$ für alle $n < 0$ und alle $I \in \mathcal{I}$.

Übung 2.6.8 (Ausgezeichnete Dreiecke als kurze exakte Sequenzen). Gegeben eine abelsche Kategorie \mathcal{A} liefert der Funktor \mathcal{H}^0 eine Äquivalenz zwischen der Kategorie derjenigen ausgezeichneten Dreiecke $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow$ in $\text{Der}(\mathcal{A})$, bei denen die Objekte zum Bild von \mathcal{A} gehören, und der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in \mathcal{A} . Ein quasiinverser Funktor kann wie in 2.5.4 beschrieben konstruiert werden.

Übung 2.6.9. Gegeben eine abelsche Kategorie \mathcal{A} und ein ausgezeichnetes Dreieck $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow$ in $\text{Der}_{\mathcal{A}}$ mit $\tau^{\leq 0} Y \xrightarrow{\sim} Y$ erhalten wir mit den offensichtlichen Morphismen ein ausgezeichnetes Dreieck $\tau^{\leq 1} X \rightarrow Y \rightarrow \tau^{\leq 0} Z \rightarrow$. Ebenso erhalten wir unter der Annahme $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0} Y$ mit den offensichtlichen Morphismen ein ausgezeichnetes Dreieck $\tau^{\geq 0} X \rightarrow Y \rightarrow \tau^{\geq -1} Z \rightarrow$. Hinweis: Fünferlemma.

Übung 2.6.10. Gegeben ein linksnoetherscher Ring A liefert die Einbettung einen volltreuen Funktor $\text{Der}^-(A\text{-modfg}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^-(A\text{-mod})$.

Übung 2.6.11. Gegeben ein nichtnegativ \mathbb{Z} -graduierter Ring A mit halbeinfacher Nullkomponente A^0 und allen A^n von endlicher Länge als A^0 -Linksmodul liefert die Einbettung Kategorie der graduierten Moduln endlicher Länge einen volltreuen Funktor $\text{Der}^b(A\text{-modfl}^{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^b(A\text{-modfg}^{\mathbb{Z}})$. Hinweis: Man verwende

das Kriterium 1.3.8 für die volltreue Einbettung von Ore-Lokalisierungen und das „Abschneiden oberhalb eines geeigneten Grades“.

2.7 Derivierte Kategorien durch Auflösungen

Definition 2.7.1. Gegeben eine triangulierte Kategorie \mathcal{T} und darin eine Menge von Objekten \mathcal{N} setzen wir $\mathcal{N}^\perp := \{I \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(N, I) = 0 \ \forall N \in \mathcal{N}\}$ und bezeichnen die Objekte von \mathcal{N}^\perp als \mathcal{N} -**injektiv**. Analog setzen wir ${}^\perp\mathcal{N} := \{P \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(P, N) = 0 \ \forall N \in \mathcal{N}\}$ und bezeichnen die Objekte von ${}^\perp\mathcal{N}$ als \mathcal{N} -**projektiv**.

2.7.2. Offensichtlich bilden ${}^\perp\mathcal{N}$ und \mathcal{N}^\perp stets ein **Verdiersystem**.

2.7.3. Ist \mathcal{N} die Menge aller azyklischen Komplexe in der Homotopiekategorie zu einer abelschen Kategorie, so bezeichnen wir die Objekte von \mathcal{N}^\perp als **homotopieinjektiv** und die Objekte von ${}^\perp\mathcal{N}$ als **homotopieprojektiv**. Ist \mathcal{N} die Menge aller azyklischen dg-Moduln in der Homotopiekategorie einem dg-Ring, so bezeichnen wir wieder die Objekte von \mathcal{N}^\perp als **homotopieinjektiv** und die Objekte von ${}^\perp\mathcal{N}$ als **homotopieprojektiv**. Mehr dazu diskutieren wir in 2.8.1.

Satz 2.7.4 (Triangulierte Quotienten über Auflösungen). *Gegeben eine triangulierte Kategorie \mathcal{T} und darin eine Menge von Objekten $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ ist der restringierte Lokalisierungsfunktor ein volltreuer Funktor $\mathcal{N}^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}/\mathcal{N}$ und induziert eine Äquivalenz auf die volle Unterkategorie derjenigen Objekte des Quotienten, auf denen der partielle Rechtsadjungierte des Lokalisierungsfunktors existiert.*

2.7.5. Ist der partielle Rechtsadjungierte R von $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$ bei B definiert, so ist also die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $QRB \xrightarrow{\sim} B$, und gilt zusätzlich $B = QA$, so liegt nach [TF] 4.8.11 der Kegel über der Einheit der Adjunktion $A \rightarrow RQA$ in \mathcal{N} .

Beweis. Aufgrund von 1.2.13.1 oder auch durch explizite Inspektion im Fall einer Lokalisierung unter Ore-Bedingungen liefert für alle $I \in \mathcal{N}^\perp$ und $Y \in \mathcal{T}$ der Quotientenfunktor eine Bijektion $\mathcal{T}(Y, I) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{N})(Y, I)$. Also ist die Restriktion des Quotientenfunktors auf \mathcal{N}^\perp volltreu. Existiert umgekehrt für ein Objekt $A \in \mathcal{T}/\mathcal{N}$ ein Objekt $RA = I \in \mathcal{T}$ nebst in Y natürlichen Bijektionen $\mathcal{T}(Y, I) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{N})(Y, A)$, so folgt unmittelbar $I \in \mathcal{N}^\perp$. Nach 1.2.13.2 induziert für partielle Adjungierte von Lokalisierungsfunktoren die Adjunktion einen Isomorphismus $QI = QRA \xrightarrow{\sim} A$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

2.7.6. Unter dem **wesentlichen Bild** eines Funktors $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ versteht man die volle Unterkategorie aller Objekte von \mathcal{B} , die isomorph sind zu Objekten der Gestalt $F(A)$ für $A \in \mathcal{A}$.

Korollar 2.7.7 (Derivierte Kategorien über injektive Auflösungen). Gegeben eine abelsche Kategorie \mathcal{A} und $i\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ die Unterkategorie aller injektiven Objekte schränkt der Quotientenfunktor ein zu einem volltreuen Funktor

$$Q : \text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{A})$$

Des Weiteren ist jeder Quasiinverse der von Q induzierten Äquivalenz mit seinem wesentlichen Bild partiell rechtsadjungiert zum Quotientenfunktor $Q : \text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$.

2.7.8. Besitzt \mathcal{A} genügend Injektive, so induziert der Quotientenfunktor genauer sogar eine Äquivalenz $Q : \text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^+(\mathcal{A})$. Das wird aus 2.7.16 folgen.

Beweis. Für $\mathcal{V} \subset \text{Hot}(\mathcal{A})$ das Verdiersystem der azyklischen Komplexe liefert das Hauptlemma ?? der homologischen Algebra $\text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \subset \mathcal{V}^\perp$. Damit folgt das Korollar aus 2.7.4. \square

Korollar 2.7.9 (Derivierte Kategorien über projektive Auflösungen). Gegeben eine abelsche Kategorie \mathcal{A} und $p\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ die Unterkategorie aller projektiven Objekte schränkt dual der Quotientenfunktor ein zu einem volltreuen Funktor

$$Q : \text{Hot}^-(p\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{A})$$

und jeder Quasiinverse auf seinem wesentlichen Bild ist partiell linksadjungiert zum Quotientenfunktor $\text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$.

2.7.10. Besitzt \mathcal{A} genügend Projektive, so induziert der Quotientenfunktor sogar eine Äquivalenz $Q : \text{Hot}^-(p\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^-(\mathcal{A})$. Das folgt aus der zu 2.7.16 dualen Aussage.

Beweis. Dual zum Beweis von 2.7.7. \square

2.7.11 (**Morphismenräume als Kohomologie**). Gegeben ein Ring k und ein Komplex $X \in \text{Hot}(k\text{-Mod})$ erhalten wir speziell mit [TS] 1.4.10 und 2.7.9 kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{H}^0 X \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_k(k[0], X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_k(k[0], X)$$

Korollar 2.7.12 (Erweiterungen in \mathcal{A} als Morphismen in $\text{Der}_{\mathcal{A}}$). Ist \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven, so liefert ?? für beliebige Objekte $M, N \in \mathcal{A}$ kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{A}^{[r]}(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(M, [r]N)$$

zwischen Erweiterungen und Morphismen in der derivierten Kategorie. Das Yoneda-Produkt von Erweiterungen entspricht hierbei der Verknüpfung geeignet verschobener Morphismen in der derivierten Kategorie.

2.7.13. Dasselbe gilt für die durch projektive Auflösungen vorne erklärten Erweiterungen, die also mit den durch injektive Auflösungen hinten erklärten Erweiterungen übereinstimmen müssen.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 2.7.7 und den Definitionen. \square

2.7.14 (**Der Kohomologiering als Endomorphismenring**). Man beachte, wie einfach die Definition des garbentheoretischen Kohomologierings eines topologischen Raums X in der Sprache der derivierten Kategorien wird: Wir müssen nur die abelsche Kategorie $\text{Ab}/_X$ aller abelschen Garben auf unserem Raum nehmen und dazu die derivierte Kategorie bilden. Die Homomorphismenräume in dieser derivierten Kategorie von der konstanten Garbe \mathbb{Z}_X zu ihren im Grad verschobenen Kopien $[n]\mathbb{Z}_X$ sind dann kanonisch isomorph zu den Kohomologiegruppen unseres Raums, in Formeln

$$H^n(X; \mathbb{Z})_{\text{garb}} = \text{Der}_{\text{Ab}/_X}(\mathbb{Z}_X, [n]\mathbb{Z}_X)$$

Die Verknüpfung von Morphismen entspricht weiter, wie in ?? erklärt, auf lokal singular-azyklischen Räumen dem Cup-Produkt der singulären Kohomologie. So einfach unsere Definition aber ist, so wenig anschaulich ist sie auch. Es wird noch eine Weile brauchen, bis wir die Theorie so weit entwickelt haben, daß wir etwa die Antikommutativität des Cup-Produkts auch für die Garbenkohomologie zeigen können.

Definition 2.7.15. Sei $A^* \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$ ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex in einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Eine **injektive Auflösung** von A^* ist ein Quasiisomorphismus $A^* \xrightarrow{\sim} I^*$ in einen gegen die Pfeile beschränkten Komplex $I^* \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$ aus injektiven Objekten.

Proposition 2.7.16 (Existenz injektiver Auflösungen). *Ist \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven, so existiert für jeden Komplex $A^* \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$ eine injektive Auflösung $A^* \xrightarrow{\sim} I^*$.*

Beweis. Wir konstruieren I^* induktiv mit der Zusatzeigenschaft, daß jeweils Monomorphismen zwischen den Kokernen der Randoperatoren induziert werden. Sind wir schon bei

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & A^p & \rightarrow & A^{p+1} & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & & & \\ \dots & \xrightarrow{d} & I^p & & & & \end{array}$$

angekommen in einer Weise, daß Isomorphismen $\mathcal{H}^q A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q I$ induziert werden für $q < p$ und ein Monomorphismus zwischen den Kokernen der explizit mit d

notierten Ränder, so bilden wir den Pushout von

$$\begin{array}{ccc} \text{cok } d & \rightarrow & A^{p+1} \\ \downarrow & & \\ \text{cok } d & & \end{array}$$

und wählen eine Einbettung dieses Pushout in ein injektives Objekt I^{p+1} . Mit 2.7.17 dualisiert folgt, daß wir so im Grad p einen Epimorphismus auf der Homologie erhalten, und da unser vertikaler Morphismus zwischen den Kokernen nach Induktionsannahme ein Monomorphismus ist, erhalten wir hier sogar einen Isomorphismus. Um unsere Induktion am Laufen zu halten müssen wir nur noch zeigen, daß nun wieder ein Monomorphismus auf den Kokernen der Ränder im Grad eins höher induziert wird. Das folgt jedoch aus $\text{cok}(A^p \rightarrow A^{p+1}) \xrightarrow{\sim} \text{cok}(I^p \rightarrow \text{Pushout}) \hookrightarrow \text{cok}(I^p \rightarrow I^{p+1})$. \square

Proposition 2.7.17. *Jedes kartesische Diagramm in einer abelschen Kategorie induziert Isomorphismen zwischen den Kernen paralleler Pfeile und Monomorphismen zwischen den Kokernen paralleler Pfeile.*

2.7.18. Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Übung ???. Wir beweisen die zweite Aussage zu Ende dieses Abschnitts im Anschluß an die Behandlung von zwei Spezialfällen. Im Fall von abelschen Gruppen prüft man die zweite Aussage auch leicht explizit. Die Proposition selbst wird benötigt bei der Konstruktion injektiver Auflösungen von Komplexen in 2.7.16.

Lemma 2.7.19. *Ist in einem kartesischen Diagramm in einer abelschen Kategorie ein Ursprungspfeil epi, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.*

Beweis. Wir notieren unser kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & M \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{g} & Q \end{array}$$

Ersetzen wir M durch $M_0 := \text{im}(P \rightarrow M)$, so bleibt unser Diagramm kartesisch. Jetzt betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M_0 \times N & \hookrightarrow & M \times N & \twoheadrightarrow & \text{cok} \times N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Q & \xlongequal{\quad} & Q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wo die nichttrivialen Vertikalen durch die Zeilenmatrix $(f, -g)$ erklärt seien. Die Kerne der beiden linken Vertikalen sind dann gerade die beiden Faserprodukte $M_0 \times_Q N$ beziehungsweise $M \times_Q N$ und wir folgern aus der langen exakten Homologiesequenz $\text{cok} \times N = 0$, also $\text{cok} = 0$ und $M = M_0$. \square

Lemma 2.7.20. *Ein kartesisches Diagramm in einer präabelschen Kategorie, in dem zwei gegenüberliegende Pfeile Monomorphismen sind, induziert Monomorphismen zwischen den Kokernen dieser Pfeile.*

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \text{cok} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N & \hookrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & \text{cok} \end{array}$$

In diesem Diagramm sieht man leicht, daß $M \hookrightarrow P$ der Kern der Verknüpfung $P \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow \text{cok}$ ist. Damit ist aber $P \twoheadrightarrow \text{cok}$ in der oberen Horizontalen das Bild dieser Verknüpfung und damit ist die rechte Vertikale ein Monomorphismus. \square

Beweis von 2.7.17. Nun zeigen wir die Proposition. Faktorisieren wir einen Ursprungspfeil in $\text{mono} \circ \text{epi}$, so ist die induzierte Faktorisierung des gegenüberliegenden Pfeils auch eine Faktorisierung in $\text{mono} \circ \text{epi}$ wegen der ersten Aussage der Proposition und 2.7.19. Wir dürfen also annehmen, daß wir die Kokerne von zwei gegenüberliegenden Monomorphismen zu vergleichen haben, und das erledigt 2.7.20. \square

Übungen

Übung 2.7.21. Gegeben eine abelsche Kategorie von endlicher homologischer Dimension $d \in \mathbb{N}$ und $M \hookrightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^{d-1} \twoheadrightarrow N$ exakt mit injektiven I^ν zeige man, daß auch N injektiv ist.

Übung 2.7.22. Gegeben eine abelsche Garbe \mathcal{F} auf einem topologischen Raum X konstruiere man einen Isomorphismus

$$\text{Der}_{\text{Ab}/X}(\mathbb{Z}_X, [q]\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathcal{F})$$

2.8 Auflösungen unbeschränkter Komplexe*

Definition 2.8.1. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Ein Komplex $P \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ heiße **homotopieprojektiv**, wenn für jeden azyklischen Komplex $N \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ gilt $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(P, N) = 0$. Ein Komplex $I \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ heiße analog **homotopieinjektiv**, wenn für jeden azyklischen Komplex $N \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ gilt $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(N, I) = 0$.

Beispiel 2.8.2. Nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra ?? ist jeder gegen die Richtung der Pfeile beschränkte Komplex von injektiven Objekten homotopieinjektiv und jeder in Richtung der Pfeile beschränkte Komplex von projektiven Objekten homotopieprojektiv. Für unbeschränkte Komplexe ist das im Allgemeinen falsch: Der Komplex von freien und damit insbesondere projektiven $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -Moduln

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

ist nicht homotopieprojektiv, denn als azyklischer Komplex müßte er sonst nach ?? nullhomotop sein im Widerspruch dazu, daß er unter Tensorieren mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht azyklisch bleibt. Um genug unbeschränkte homotopieprojektive Komplexe zu konstruieren, betrachtet man geeignete Limes.

Lemma 2.8.3. 1. *Existiert für ein inverses durch die natürlichen Zahlen indiziertes System homotopieinjektiver Komplexe aus einer abelschen Kategorie mit surjektiven und gradweise spaltenden Morphismen der inverse Limes, so ist auch er homotopieinjektiv;*

2. *Existiert für ein direktes durch die natürlichen Zahlen indiziertes System homotopieprojektiver Komplexe aus einer abelschen Kategorie mit injektiven und gradweise spaltenden Morphismen der direkte Limes, so ist auch dieser direkte Limes homotopieprojektiv.*

2.8.4. Das gilt mit demselben Beweis auch, wenn man statt homotopieinjektiven beziehungsweise homotopieprojektiven Komplexen homotopieinjektive beziehungsweise homotopieprojektive dg-Moduln über einem dg-Ring betrachtet.

Beweis. Wir beginnen mit dem ersten Fall. Sei \mathcal{A} unsere abelsche Kategorie. Sei $I_0 \leftarrow I_1 \leftarrow I_2 \leftarrow \dots$ unser inverses System und N ein azyklischer Komplex. Da der inverse Limes mit den Produkten aus der Definition der Hom-Komplexe vertauscht, können wir den Hom-Komplex von N zum inversen Limes beschreiben als

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, \limf I_\nu) = \limf \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, I_\nu)$$

Rechts steht hier ein inverses System von azyklischen Komplexen abelscher Gruppen. Wegen unserer Annahme, daß die Kettenabbildungen $I_\nu \twoheadrightarrow I_{\nu-1}$ gradweise spalten sollen, sind die Morphismen dieses inversen Systems von azyklischen Komplexen alle surjektiv. Mit ?? folgt dann, daß auch der inverse Limes dieses Systems azyklisch ist. Im zweiten Fall beachten wir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{colf} P_\nu, N) = \limf \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_\nu, N)$ und argumentieren analog. \square

Definition 2.8.5. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Eine Menge $\mathcal{Q} \subset \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ von Komplexen heiße **linksaufosend**, wenn es für alle Komplexe $A \in \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ mit im Grad Null konzentrierter Kohomologie einen Quasiisomorphismus $Q \xrightarrow{\sim} A$ gibt mit $Q \in \mathcal{Q}$.

Proposition 2.8.6. *Seien \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und $\mathcal{Q} \subset \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ eine linksauflösende Menge von Komplexen und $A \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ beliebig. So lässt sich jeder Quasiisomorphismus $P_0 \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq 0} A$ zu einem kommutativen Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \longrightarrow & \tau^{\leq 1} A \\ \uparrow & & \uparrow \\ P_0 & \longrightarrow & \tau^{\leq 0} A \end{array}$$

in $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$ vervollständigen derart, daß auch die obere Horizontale ein Quasiisomorphismus ist und die linke Vertikale $P_0 \rightarrow P_1$ gradweise eine spaltende Injektion mit Kokern in $[-1]\mathcal{Q}$.

Beweis. Wir argumentieren anhand des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} & & Q & & & & \\ & & \downarrow & \searrow g & \dashrightarrow 0 & & \\ P_0 & \xrightarrow{f} & \tau^{\leq 1} A & \longrightarrow & \text{Keg}(f) & \longrightarrow & [1]P_0 & \longrightarrow & [1]\tau^{\leq 1} A \\ & & & & & & \searrow & & \uparrow \\ & & & & & & & & \text{Keg}(g) \end{array}$$

Nach Annahme finden wir einen Quasiisomorphismus $Q \xrightarrow{\sim} \text{Keg}$ mit $[1]Q \in \mathcal{Q}$. Dann bilden wir g als Komposition und darüber den Kegel. Die gestrichelte Null in der Homotopiekategorie $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$ zeigt die Existenz von $\text{Keg}(g) \dashrightarrow [1]\tau^{\leq 1} A$, das das rechte Dreieck in der Homotopiekategorie kommutieren läßt, und das Oktaederaxiom zeigt, daß jede solche Kettenbildung ein Quasiisomorphismus sein muß. Eine explizite Kettenabbildung, die das rechte Dreieck kommutieren läßt, erhält man als die Zeilenmatrix (h, f) mit h der zweiten Komponente von $Q \rightarrow \text{Keg}$. Das gilt sogar allgemeiner für eine beliebige Situation der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} & & Q & & & & \\ & & \downarrow & \searrow g & & & \\ P & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & \text{Keg}(f) & \longrightarrow & [1]P & \longrightarrow & [1]A \\ & & & & & & \searrow & & \uparrow \\ & & & & & & & & \text{Keg}(g) \end{array}$$

und auch wenn $Q \rightarrow \text{Keg}(f)$ kein Quasiisomorphismus ist und kann leicht explizit nachgerechnet werden. \square

Korollar 2.8.7. *In einer abelschen Kategorie endlicher homologischer Dimension mit genug Projektiven besitzt jeder Komplex eine homotopieprojektive Linksauflösung.*

Beweis. Sei A unser Komplex. Nach 2.7.16 gibt es schon mal einen Quasiisomorphismus $P_0 \rightarrow \tau^{\leq 0} A$ mit $P_0 \in \text{Hot}^- \mathcal{A}$ ein mit den Pfeilen beschränkter Komplex aus projektiven Objekten, der folglich homotopieprojektiv ist. Mit 2.8.6 ergänzen wir zu einem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 P_1 & \longrightarrow & \tau^{\leq 1} A \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 P_0 & \longrightarrow & \tau^{\leq 0} A
 \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß die Horizontalen Quasiisomorphismen sind und die linken Vertikalen gradweise spaltende Inklusionen, wobei der Kokern von $P_{i-1} \hookrightarrow P_i$ ein Komplex von projektiven Objekten ist, der nur in Graden $i, i-1, \dots, i-r$ nicht Null ist, für r die homologische Dimension unserer Kategorie. Aufgrund dieser Endlichkeit existiert der direkte Limes $\text{colf } P_i$ und geht quasiisomorph auf A , und wegen 2.8.3 ist er auch homotopieprojektiv. \square

Korollar 2.8.8. *In einer abelschen Kategorie mit genug Projektiven und \mathbb{N} -direkten Limites, in der \mathbb{N} -direkte Limites exakt sind, besitzt jeder Komplex eine homotopieprojektive Linksauflösung.*

2.8.9. Unter einem **\mathbb{N} -direkten Limes** verstehe ich einen direkten Limes über ein durch \mathbb{N} indiziertes direktes System.

Beweis. Wir argumentieren wie zuvor und müssen nur am Schluß die Existenz und Exaktheit \mathbb{N} -direkter Limites verwenden. \square

Korollar 2.8.10. *In der Kategorie der Moduln über einem Ring besitzt jeder Komplex eine homotopieprojektive Linksauflösung und eine homotopieinjektive Rechtsauflösung.*

2.8.11. Wir geben noch ein alternatives Argument in ??.

Beweis. Die erste Aussage ist ein Spezialfall von 2.8.8. Für die zweite Aussage argumentieren wir genauso. Zwar sind \mathbb{N} -inverse Limites von abelschen Gruppen im allgemeinen nicht mehr exakt, aber in unserer speziellen Situation kommen wir mit dem Exaktheitskriterium aus ?? durch. \square

2.9 Auflösungen unbeschränkter Garbenkomplexe*

Definition 2.9.1. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Unter einer **angeordneten Filtrierung** eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ verstehen wir einen Ordnungshomomorphismus $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$ von einer angeordneten Menge Ω in die durch Inklusion angeordnete Menge der Unterobjekte von A .

2.9.2. Ist \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit exakten filtrierenden Kolimites und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt und $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$ eine angeordnete Filtrierung von A und $\Gamma \subset \Omega$ eine Teilmenge, so setzen wir

$$A_\Gamma := \varinjlim_{\omega \in \Gamma} A_\omega \quad \text{und speziell} \quad A_{<\omega} := \varinjlim_{\eta < \omega} A_\eta$$

2.9.3. Gegeben eine Garbe \mathcal{F} auf einem topologischen Raum X erklären wir $\text{card}(\mathcal{F}) := \text{card}(\bar{\mathcal{F}})$ als die Kardinalität ihres étalen Raums. Gegeben ein Komplex von Garben \mathcal{F} setzen wir $\text{card}(\mathcal{F}) = \max(\text{card}(\mathcal{F}^i))$.

Proposition 2.9.4 (Enge Filtrierungen exakter Garbenkomplexe). Seien X ein topologischer Raum und $\alpha = \max(\text{card}(X), \text{card}(\mathbb{N}))$.

1. Für jeden surjektiven Morphismus $f : A \twoheadrightarrow B$ in $\text{Ab}/_X$ gibt es $A_0 \subset A$ mit $\text{card}(A_0) \leq \alpha \text{card}(B)$ und $f : A_0 \twoheadrightarrow B$;
2. Jeder von Null verschiedene exakte Komplex $T \neq 0$ in $\text{Ket}(\text{Ab}/_X)$ besitzt einen von Null verschiedenen exakten Unterkomplex $0 \neq S \subset T$ mit $\text{card}(S) \leq \alpha$;
3. Jeder exakte Komplex T in $\text{Ket}(\text{Ab}/_X)$ besitzt eine wohlgeordnete Filtrierung durch Unterkomplexe T_ω derart, daß alle Subquotienten $T_\omega/T_{<\omega}$ exakt sind von einer Kardinalität $\text{card}(T_\omega/T_{<\omega}) \leq \alpha$ und daß es ω gibt mit $T_\omega = T$.

Beweis. 1. Wir wählen für jeden Halm $b_x \in B_x$ eine offene Umgebung $U \Subset X$ von x und $t \in A(U)$ mit $t_x \mapsto b_x$. So finden wir einen Morphismus $\bigoplus_{(U,t)} \mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow A$ mit der Eigenschaft, daß sein Bild A_0 surjektiv auf B geht. Unsere direkte Summe ist eine Untergarbe der direkten Summe $\bigoplus_{(U,t)} \mathbb{Z}_X$ von konstanten Garben, und so kann man ihre Kardinalität abschätzen durch $\alpha \text{card}(B)$.

2. Sicher finden wir einen Index j mit $\ker(T^j \rightarrow T^{j+1}) \neq 0$ und eine Untergarbe S^j dieses Kerns mit $S^j \neq 0$ und $\text{card}(S^j) \leq \alpha$. Dann bilden wir den Pullback

$$\begin{array}{ccc} S^j & \longrightarrow & T^j \\ \uparrow & & \uparrow \\ M^{j-1} & \longrightarrow & T^{j-1} \end{array}$$

Er ist auch auf den Halmen ein Pullback, also gilt $M^{j-1} \twoheadrightarrow S^j$. Nach Teil 1 finden wir eine Untergarbe $M_0^{j-1} \subset M^{j-1}$ mit $\text{card}(M_0^j) \leq \alpha$ und $M_0^{j-1} \twoheadrightarrow S^j$. Dann nehmen wir $S^{j-1} = M^{j-1}$ und machen induktiv weiter.

3. Wir finden nach dem Zorn'schen Lemma eine maximale wohlgeordnete Familie von Unterkomplexen $(T_\omega)_{\omega \in \Omega}$ mit der fraglichen Eigenschaft. Sie sind alle exakt, denn sonst gäbe es einen kleinsten Index ω , für den T_ω nicht exakt wäre, und dann wäre $T_{<\omega}$ exakt und $T_\omega/T_{<\omega}$ exakt und damit T_ω doch exakt nach der langen exakten Homologiesequenz. Also ist auch T_Ω exakt. Ist dieser Komplex bereits ganz T , so sind wir fertig. In jedem Fall ist T/T_Ω exakt, und ist es nicht Null, so finden wir darin einen von Null verschiedenen exakten Unterkomplex einer Kardinalität $\leq \alpha$. Durch sein Urbild in T könnten wir dann unsere wohlgeordnete Familie vergrößern, im Widerspruch zur Maximalität. \square

Korollar 2.9.5 (Kriterium für Homotopie-Injektivität). *Seien X ein topologischer Raum und $\alpha = \max(\text{card}(X), \text{card}(\mathbb{N}))$. Ist $J \in \text{Ket}(\text{Ab}/X)$ ein Komplex aus injektiven Garben und gilt $\text{Hot}_{\text{Ab}/X}(T, J) = 0$ für jeden exakten Komplex T mit $\text{card}(T) \leq \alpha$, so folgt $\text{Hot}_{\text{Ab}/X}(T, J) = 0$ für jeden exakten Komplex.*

Beweis. Nach 2.9.4 besitzt T eine wohlgeordnete Filtrierung durch Unterkomplexe T_ω mit $\text{card}(T_\omega/T_{<\omega}) \leq \alpha \forall \omega$ und $T_\omega = T$ für mindestens ein ω . Die Komplexe von abelschen Gruppen $\text{Hom}_{\text{Ab}/X}(T_\omega, J)$ bilden dann ein transfinit surjektives System von Komplexen, dessen Kernkomplexe

$$\ker \left(\text{Hom}_{\text{Ab}/X}(T_\omega, J) \rightarrow \varprojlim_{\omega > \eta} \text{Hom}_{\text{Ab}/X}(T_\eta, J) \right) = \text{Hom}_{\text{Ab}/X}(T_\omega/T_{<\omega}, J)$$

an jeder Stelle exakt sind. Mit [TS] 7.1.44 folgt, daß auch $\text{Hom}_{\text{Ab}/X}(T, J)$ exakt ist. \square

Lemma 2.9.6. *Sei $A \in \text{Ket}(\text{Ab}/X)$ ein Komplex und $(f_\omega : T_\omega \rightarrow A)_{\omega \in \Omega}$ eine Familie von Morphismen exakter Komplexe nach A . So gibt es einen injektiven Quasiisomorphismus $g : A \rightarrow B$ derart, daß alle $g \circ f_\omega$ nullhomotop sind.*

2.9.7. Mit etwas Arbeit sollte man zeigen können, daß es in Abhängigkeit von X eine Kardinalität β gibt derart, daß man hier zusätzlich eine Abschätzung der Art $\text{card}(B) \leq \max(\beta, \text{card}(A), \text{card}(\Omega))$ erreichen kann.

Beweis. Wir wählen auf Ω eine Wohlordnung und konstruieren mit transfiniten Induktion ein direktes System B_ω und Quasiisomorphismus $g_\omega : A \rightarrow B_\omega$ mit $g_\omega \circ f_\omega$ nullhomotop durch

$$T_\omega \rightarrow A \rightarrow \varinjlim_{\eta < \omega} B_\eta \rightarrow B_\omega$$

mit B_ω dem Abbildungskegel der Komposition der beiden vorderen Morphismen. Dann löst $g : A \hookrightarrow B := \varinjlim_{\omega \in \Omega} B_\omega$ unser Problem. \square

Lemma 2.9.8. *Sei $A \in \text{Ket}(\text{Ab}/X)$ ein Komplex. So existiert eine injektive Kettenabbildung $h : A \hookrightarrow B$, die ein Quasiisomorphismus ist und die Eigenschaft hat, daß $h(A^i)$ in einer injektiven Untergarbe von B^i liegt für alle $i \in \mathbb{Z}$.*

2.9.9. Mit etwas Arbeit sollte man zeigen können, daß man es in Abhängigkeit von X eine Kardinalität β gibt derart, daß man hier zusätzlich $\text{card}(B) \leq \max(\beta, \text{card}(A))$ erreichen kann.

Beweis. Wir wählen für alle i eine Einbettung $f^i : A^i \hookrightarrow J^i$ in eine injektive Garbe. Wir bilden den Komplex $K^i = J^i \oplus J^{i+1}$ mit dem Differential $d(x, y) = (y, 0)$. Die Einbettung $(f^i, f^{i+1}\alpha)^\top : A^i \hookrightarrow K^i$ ist dann eine Kettenabbildung. Wir bilden nun erst den Kokernkomplex (C^i) dieser Kettenabbildung und dann den Komplex $[-1] \text{Keg}(K \rightarrow C)$. Die natürliche Kettenabbildung von A in diesen letzten Komplex hat dann die gesuchten Eigenschaften. \square

Proposition 2.9.10. *Sei $(T_e)_{e \in E}$ eine Familie exakter Komplexe in $\text{Ket}(\text{Ab}/X)$. So besitzt jeder Komplex $A \in \text{Ket}(\text{Ab}/X)$ eine Auflösung $A \rightarrow I$ durch einen Komplex aus injektiven Garben mit $\text{Hot}_{\text{Ab}/X}(T_e, I) = 0$ für alle $e \in E$.*

Ergänzung 2.9.11. Der Beweis scheint mir noch problematisch: Man sollte irgendwie eine a priori Abschätzung der möglichen Kardinalitäten der hier auftauchenden J_γ mit konstruieren. Dann wird mit 2.9.5 folgen, daß I homotopieinjektiv ist, wenn wir für $(T_e)_{e \in E}$ ein Repräsentantensystem der exakten Komplexe einer Kardinalität $\leq \alpha := \max(\text{card}(X), \text{card}(\mathbb{N}))$ nehmen. Frage: Gibt es für jede nichtleere Menge X eine Kardinalität derart, daß für Y von mindestens dieser Kardinalität gilt $\text{card}(\text{Ens}(X, Y)) = \text{card}(Y)$? Lieber Wolfgang,

wir schreiben $\text{card}(X)$ fuer die Maechtigkeit von X . Gegeben ein unendliches X nimmt man $Y = \{f \mid f : X \rightarrow \{0, 1\}\}$. Dann ist $\text{card}(Y) = 2^{\text{card}(X)}$ und

$$\text{card} \text{Ens}(X, Y) = \text{card}(Y)^{\text{card} X} = (2^{\text{card} X})^{\text{card} X} = 2^{\text{card}(X) \times \text{card}(X)} = 2^{\text{card} X} = \text{card} Y$$

Fuer unendliche X ist naemlich $\text{card}(X) \times \text{card}(X) = \text{card}(X)$. Dies sagt der Satz von Hessenberg. Die Maechtigkeit des kartesischen Produkts ist gerade das Produkt der Maechtigkeiten der beiden Faktoren. Dieses Produkt habe ich oben "mal" genannt.

Fuer endliches nicht leeres X sind genau die endlichen Y Gegenbeispiele und genau die unendlichen Y Beispiele fuer Deine Gleichung. Man hat also beliebig grosse Beispiele.

Zusatz: Fuer jedes ueberabzaehlbare X gibt es aber auch beliebig maechtige Y , fuer die die Gleichung falsch ist. Man nimmt Y von abzaehlbarer Konfinalitaet.

Fuer unendliche abzählbare X ist die Frage nach beliebig grossen Gegenbeispielen unabhängig von ZFC. Kleine Gegenbeispiele gibt es immer.

Nun zur Frage nach den beliebig grossen Y im Falle eines unendlichen X :

Statt $\{0, 1\} = 2$ in der Definition von Y oben kann man oben aber auch jede Menge mit mindestens 2 Elementen nehmen. So hat man fuer jedes nicht leere X beliebig grosse Beispiele Y , die die Gleichung richtig machen.

Viele Gruesse Heike

Beweis. Sei α eine Kardinalzahl mit $\alpha \geq \text{card}(T_e)$ für alle $e \in E$ und $\alpha \geq \max(\text{card}(X), \text{card}(\mathbb{N}))$. Sei Γ eine wohlgeordnete Menge mit $\text{card}(\Gamma) > \alpha$. Wir konstruieren ein direktes System $(J_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ von Komplexen von Garben und beginnen mit $J_0 := A$. Dann wählen wir injektive Quasiisomorphismen

$$\varinjlim_{\eta < \gamma} J_\eta \hookrightarrow J_\gamma$$

induktiv so, daß alle Morphismen von irgendwelchen T_e in den Limes nullhomotop werden unter dem Nachschalten des Morphismus nach J_γ , und dürfen nach ?? zusätzlich annehmen, daß die Bilder unserer Injektionen jeweils in injektiven Untergarben enthalten sind. Ich behaupte, daß dann der direkte Limes

$$\varinjlim_{\gamma \in \Gamma} J_\gamma$$

unser Problem löst. In der Tat muß jeder Morphismus von einem T_e dorthin aus Kardinalitatsgrunden bereits in einem der J_γ landen und damit nullhomotop werden. Weiter muß unser direkter Limes aus injektiven Garben bestehen, da er das Injektivitatskriterium über Ideale ?? erfüllt. \square

2.10 Derivierte Kategorien als dg-Modulkategorien*

2.10.1. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Ein Komplex $T \in \text{Ket}(\mathcal{A})$ heiße **endazyklisch**, wenn für alle $n \in \mathbb{Z}$ die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(T, [n]T) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(T, [n]T)$$

zwischen Morphismen in der Homotopiekategorie und Morphismen in der derivierten Kategorie liefert.

Beispiele 2.10.2. Jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex injektiver Objekte ist endazyklisch. Jeder mit den Pfeilen beschränkte Komplex projektiver Objekte ist endazyklisch.

Satz 2.10.3 (über endazyklische Komplexe). Seien \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $T \in \text{Ket}(\mathcal{A})$ ein endazyklischer Komplex und $E = \text{End}_{\mathcal{A}} T$ sein Endomorphismenkomplex mit der natürlichen Struktur als dg-Ring. So induzieren die Lokalisierung und der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, _)$ Äquivalenzen von triangulierten Kategorien

$$\langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Der}} \xrightarrow{\sim} \langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-} E$$

Beweis. Dévissage 2.2.8 zeigt schon einmal, daß die Lokalisierung eine Äquivalenz $\langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} \langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Der}}$ zwischen dem von T in der Homotopiekategorie und in der derivierten Kategorie jeweils erzeugten **triangulierten System** liefert. Die zweite Äquivalenz folgt mit einer anderen Variante 2.3.6 von dévissage. \square

2.10.4 (Kippen mit Kippobjekten). Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $K \in \mathcal{A}$ heißt ein **Kippobjekt**, englisch **tilting object**, französisch **objet basculant**, wenn alle seine höheren Selbsterweiterungen verschwinden, wenn also in Formeln gilt

$$\mathcal{A}^{[n]}(K, K) = 0 \quad \text{für } n > 0.$$

Jedes Kippobjekt liefert unter der üblichen Einbettung $\mathcal{A} \hookrightarrow \text{Ket}(\mathcal{A})$ offensichtlich einen endazyklischen Komplex. Bezeichnet also $E := \text{End}_{\mathcal{A}} K$ den Endomorphismenring unseres Kippobjekts, der in diesem Fall ein ganz gewöhnlicher Ring ist, so spezialisieren die Aussagen unseres Satzes 2.10.3 über endazyklische Komplexe zu Äquivalenzen von triangulierten Kategorien

$$\langle K \rangle_{\Delta}^{\text{Der}} \xrightarrow{\sim} \langle K \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} \langle E \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} \langle E \rangle_{\Delta}^{\text{Der}} \subset \text{Der}(\text{Mod-} E)$$

Definition 2.10.5. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Ein Komplex $T \in \text{Ket}(\mathcal{A})$ heißt ein **Kippkomplex**, wenn er endazyklisch ist und wenn zusätzlich gilt

$$\text{Der}_{\mathcal{A}}(T, [n]T) = 0 \quad \text{für } n \neq 0.$$

Gilt das nur für $n < 0$, so nennen wir unseren Komplex **halbkippend**.

Satz 2.10.6 (Kippen mit Kippkomplexen). Seien \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und $T \in \text{Ket}(\mathcal{A})$ ein Kippkomplex. So läßt sich die Einbettung $\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Der}} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}$ fortsetzen zu einem triangulierten Funktor

$$\text{Hot}^b(\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Der}}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}$$

*Im Beweis konstruieren wir genauer eine bis auf eindeutige Isotransformation eindeutige derartige Fortsetzung, den **Kippfunktor**.*

2.10.7. Ist \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und sind $T_1, \dots, T_r \in \text{Ket}(\mathcal{A})$ gegeben derart, daß $T_1 \oplus \dots \oplus T_r$ ein Kippkomplex ist, so erhält man ähnlich einen volltreuen triangulierten Funktor

$$\text{Hot}^b(\langle T_1, \dots, T_r \rangle_{\oplus}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}$$

Ist unser Komplex nur halbkippend, so gelingt die im folgenden Beweis erklärte Konstruktion eines Kippfunktors immer noch, aber er muß nicht mehr volltreu sein. Analoges gilt unter den entsprechenden Annahmen auch für unendliche Familien von Komplexen und wird im nächsten Abschnitt ausgeführt.

Beweis. Unser Doppelkomplexfunktor aus 2.3.9 liefert schon mal eine triangulierte Äquivalenz $\text{Hot}^b(\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}}) \xrightarrow{\sim} \langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}}$. Unsere Annahmen liefern zusätzliche Äquivalenzen $\langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} \langle T \rangle_{\oplus}^{\text{Der}}$ und $\langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Hot}} \xrightarrow{\sim} \langle T \rangle_{\Delta}^{\text{Der}}$. Der Satz folgt. \square

2.11 Derivierte Kategorien und dg-Ringoide*

Definition 2.11.1. Eine Kategorie mit einer additiven Struktur im Sinne von ?? nennen wir auch ein **Ringoid**. Ist I die Menge der Objekte besagter Kategorie, so sprechen wir auch von einem **Ringoid über I** . Ein **Homomorphismus von Ringoiden** ist ein Funktor, der verträglich ist mit den jeweiligen additiven Strukturen.

2.11.2. Die opponierte Kategorie zu einem Ringoid A ist auch ein Ringoid in natürlicher Weise. Wir bezeichnen es mit oder A^{opp} und nennen es das **opponierte Ringoid**.

2.11.3 (**Diskussion der Terminologie**). Es mag merkwürdig scheinen, die neue Terminologie der Ringoiden einzuführen, wo man doch schlicht von Kategorien mit additiver Struktur sprechen könnte. Der Grund ist rein didaktischer Natur: Es scheint mir übersichtlicher, mit der Kategorie aller Moduln über einem Ringoid zu arbeiten statt mit der Kategorie aller Moduln über einer kleinen Kategorie mit additiver Struktur, ähnlich wie es mir übersichtlicher scheint, mit Systemen von Teilmengen zu arbeiten statt mit Mengen von Teilmengen. Ich habe in der Literatur noch andere Verwendungen des Begriffs Ringoid gesehen: Manche Autoren verwenden ihn als Synonym für „kleine additive Kategorie“, andere als „Menge mit zwei assoziativen und in geeigneter Weise distributiven Verknüpfungen“.

Beispiel 2.11.4 (Ringoid mit endlich vielen Objekten). Ein Ringoid mit nur einem Objekt ist im Wesentlichen dasselbe wie ein Ring. Gegeben ein Ring R mit einer Zerlegung $1 = e_1 + \dots + e_n$ der Eins in eine Summe von paarweise orthogonalen Idempotenten $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ erhalten wir allgemeiner ein Ringoid \tilde{R} mit Objekten $1, \dots, n$ durch die Vorschrift $\tilde{R}(i, j) = e_j R e_i$. So ergibt sich eine im wesentlichen eindeutige Entsprechung zwischen Ringoiden mit endlich vielen

Objekten und Ringen mit einer Zerlegung der Eins in eine Summe von paarweise orthogonalen Idempotenten.

2.11.5. Motiviert durch dieses Beispiel verwenden wir auch bei einem beliebigen Ringoid R mit Objekten i, j die Notation

$$R(i, j) = jRi$$

für den Raum der Morphismen von i nach j , bezeichnen die Verknüpfung von Morphismen als **Multiplikation** und bezeichnen die Objekte des Ringoids als seine **ausgezeichneten Idempotenten**.

Beispiel 2.11.6. Ein Ringoid mit einer Operation einer Gruppe G , die frei und transitiv ist auf den Objekten, ist im Wesentlichen dasselbe wie ein G -graduierter Ring. Der Leser mag das selbst genauer ausführen.

Definition 2.11.7. Ein **Modul** über einem Ringoid ist ein Ringoidhomomorphismus von unserem Ringoid in die Kategorie der abelschen Gruppen. Gegeben ein Modul M über einem Ringoid R und ein Objekt alias ausgezeichnetes Idempotent i von R setzen wir $M(i) = iM$, so daß die Operation die Gestalt \mathbb{Z} -bilinearer Abbildungen $jRi \times iM \rightarrow jM$ annimmt. Ein **Homomorphismus von Moduln** ist eine Transformation von Funktoren. Die Kategorie aller Moduln über einem Ringoid R notieren wir $R\text{-Mod}$. Sie ist eine abelsche Kategorie.

Beispiel 2.11.8. Gegeben ein Ringoid R und darin ein Objekt i können wir den R -Modul Ri betrachten, der durch die Vorschrift $(Ri)(j) := jRi$ erklärt wird.

2.11.9. Gegeben ein Ringoidhomomorphismus $A \rightarrow B$ liefert das Vorschalten desselben zwischen den Modulkategorien einen exakten Funktor, die Restriktion

$$\text{res}_B^A : B\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} A\text{-Mod}$$

Lemma 2.11.10. *Ist $A \rightarrow B$ ein Ringoidhomomorphismus, der volltreu ist als Funktor und der die Eigenschaft hat, daß jedes Objekt von B isomorph ist zu einem endlichen Produkt von direkten Summanden von Bildern von Objekten von A , so induziert die Restriktion eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{res}_B^A : B\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} A\text{-Mod}$$

Beweis. Man muß sich im wesentlichen nur überlegen, daß solch ein Modul als Funktor verträglich sein muß mit endlichen Produkten, wann immer diese denn für vorgegebene Objekte unserer Ringoide existieren. \square

Beispiel 2.11.11. Jede Kategorie von endlich erzeugten freien Moduln über einem Ring R , die nicht nur aus Nullobjekten besteht, hat eine zu $R\text{-Mod}$ äquivalente Modulkategorie. Diese Erkenntnis verallgemeinert unsere Äquivalenz von Kategorien $R\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} \text{Mat}(n; R)\text{-Mod}$ aus [KAG] 1.5.16.

Definition 2.11.12. Ein **differentielles graduiertes Ringoid** oder **dg-Ringoid** ist ein Ringoid A zusammen mit einer Erweiterung der Gruppenstruktur auf allen iAj zur Struktur einer dg-Gruppe derart, daß die Multiplikationen

$$iAj \otimes_{\mathbb{Z}} jAk \rightarrow iAk$$

Morphismen von dg-Gruppen sind. Ein **differentieller graduierter Modul** über einem dg-Ringoid A ist ein A -Modul M mit einer Erweiterung der Gruppenstruktur auf allen iM zur Struktur einer dg-Gruppe derart, daß die Multiplikationen

$$jAi \otimes_{\mathbb{Z}} iM \rightarrow jM$$

Morphismen von dg-Gruppen sind. Analog zum Fall von dg-Ringen erklären wir auch für jedes dg-Ringoid A die Kategorie dgMod_A aller dg-Moduln und die vier davon abgeleiteten triangulierten Kategorien

$$\text{dgHot}_A, \text{dgDer}_A, \text{dgFrei}_A, \text{dgPer}_A.$$

Hier erklären wir dgFrei_A als das triangulierte Erzeugnis der dg-Moduln Ai und beachten, daß es nicht darauf ankommt, ob das in dgDer_A oder in dgHot_A gebildet wird. Unser dgPer_A schließlich meint das Erzeugnis derselben Objekte als Verdiersystem, also unter Hinzunahme direkter Summanden. Lemma 2.11.10 gilt entsprechend für dgMod und die vier davon abgeleiteten triangulierten Kategorien.

2.11.13. Gegeben eine abelsche Kategorie \mathcal{A} und eine Familie von Komplexen $T : I \rightarrow \text{Ket}_{\mathcal{A}}$, $i \mapsto T_i$ erhalten wir ein dg-Ringoid $E = \text{End}_{\mathcal{A}} T$ über I mit Morphismen $iEj = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(j, i)$ und hoffentlich offensichtlicher Verknüpfung und dg-Struktur.

Definition 2.11.14. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Eine Menge von Komplexen $\mathcal{T} \subset \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ heiße **endazyklisch**, wenn für alle $T, T' \in \mathcal{T}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(T, [n]T') \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(T, [n]T')$$

zwischen Morphismen in der Homotopiekategorie und Morphismen in der derivierten Kategorie liefert.

Beispiele 2.11.15. Das von einer endazyklischen Menge von Komplexen erzeugte Verdiersystem ist nach dévissage auch selbst wieder endazyklisch. Die Mengen aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe injektiver Objekte und aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe projektiver Objekte sind endazyklisch. Allgemeiner sind die Mengen aller homotopieinjektiven Komplexe und aller homotopieprojektiven Komplexe, die wir bald kennenlernen werden, beide endazyklisch.

Satz 2.11.16 (Derivierte Kategorien und dg-Ringoide). Seien \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $T = (T_i)_{i \in I}$ eine endazyklische Familie in $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$ und $E = \text{End}_{\mathcal{A}}(T)$ das zugehörige dg-Ringoid über I . So liefert die Gesamtheit der $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T_i, _)$ eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\langle T_i | i \in I \rangle_{\Delta} \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-} E$$

Hierbei wird T_i auf iE abgebildet und das Erzeugnis $\langle T_i | i \in I \rangle_{\Delta}$ darf gleichbedeutend entweder in $\text{Der}_{\mathcal{A}}$ oder in $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$ verstanden werden.

Beweis. Analog zum Beweis von 2.10.3 und dem Leser überlassen. □

2.11.17 (**Kippen mit Kippfamilie**). Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Eine Familie $(K_i)_{i \in I}$ von Objekten von \mathcal{A} heißt eine **Kippfamilie**, wenn alle höheren Erweiterungen zwischen Objekten unserer Familie verschwinden, wenn also in Formeln gilt

$$\mathcal{A}^{[n]}(K_i, K_j) = 0 \quad \text{für } n > 0 \text{ und alle } i, j \in I.$$

Bezeichne nun E das Ringoid über I der Homomorphismen zwischen unseren Kippmoduln. Ich meine hier wirklich das Ringoid, nicht etwa ein dg-Ringoid. Unser Satz liefert dann Äquivalenzen von triangulierten Kategorien

$$\langle K_i | i \in I \rangle_{\Delta} \xrightarrow{\sim} \langle iE | i \in I \rangle_{\Delta} \subset \text{Der}(\text{Mod-} E)$$

Hierbei meint $\langle K_i | i \in I \rangle_{\Delta} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}$ die von den K_i erzeugte triangulierte Unterkategorie und $\langle iE | i \in I \rangle_{\Delta} \subset \text{Der}(\text{Mod-} E)$ die von den iE erzeugte triangulierte Unterkategorie.

2.11.18. Seien \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Eine Menge von Komplexen $\mathcal{T} \subset \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ heißt eine **Kippkategorie**, wenn sie eine endazyklische Teilmenge ist, eine volle additive Unterkategorie bildet, und es zwischen ihren Objekten keine Homomorphismen in von Null verschiedenen Graden gibt, in Formeln

$$\text{Der}_{\mathcal{A}}(T, [n]T') = 0 \quad \text{für } n \neq 0 \text{ und } T, T' \in \mathcal{T}.$$

Satz 2.11.19 (Kippen mit Kippkategorie). Seien \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und $\mathcal{T} \subset \text{Ket}_{\mathcal{A}}$ ein Kippkategorie. So läßt sich die Einbettung $\mathcal{T} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}$ fortsetzen zu einem volltreuen triangulierten Funktor

$$\text{Hot}^b(\mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}$$

Beweis. Bezeichnet $E := \text{End}_{\mathcal{A}} \mathcal{T}$ den Endomorphismenring der Familie aller Objekte unserer Kippkategorie mit seiner natürlichen Struktur als dg-Ringoid, so induziert unser Satz 2.11.16 eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\langle \mathcal{T} \rangle_{\Delta} \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-} E$$

In diesem Fall ist jedoch zusätzlich die Kohomologie von $E = \text{End}_{\mathcal{A}} T$ im Grad Null konzentriert. Jetzt können wir argumentieren wie im Fall eines einzigen Kippkomplexes. \square

3 Derivierte Funktoren

3.1 Limites in Funktorkategorien

3.1.1. Ich erinnere an Limites und Kolimites in Kategorien, wie sie in [TS] 7.1 eingeführt wurden.

3.1.2 (**Limites in Funktorkategorien**). Gegeben seien ein Köcher \mathcal{I} und Kategorien \mathcal{A}, \mathcal{D} und eine Darstellung $\mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{D}), i \mapsto F_i$. Existiert für alle $A \in \mathcal{A}$ der Kolimes $\text{col } F_i(A)$ in \mathcal{D} , so erhalten wir offensichtlich einen Kolimes der F_i in $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ durch die Vorschrift

$$(\text{col } F_i)(A) := \text{col}(F_i(A))$$

Dasselbe gilt, wenn wir col durch lim ersetzen, was auch formal durch Übergang zu opponierten Strukturen gefolgert werden kann.

3.1.3 (**Limites in Kategorien von Mengenfunktoren**). Nach 3.1.2 existiert insbesondere für jede Kategorie \mathcal{C} und jedes Mengensystem \mathcal{U} der Limes beziehungsweise der Kolimes in unserer Kategorie $\mathcal{C}^\wedge = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{U}\text{Ens})$ aller kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$ aus [LA2] 7.9.10 für jede Darstellung in \mathcal{C}^\wedge eines Köchers \mathcal{I} , solange der Limes beziehungsweise der Kolimes für alle Darstellungen unseres Köchers in $\mathcal{U}\text{Ens}$ existieren, etwa wenn \mathcal{U} ein Universum ist und die Punktmenge unseres Köchers ein Element von \mathcal{U} . Wir nennen so einen Köcher einen \mathcal{U} -**kleinen Köcher**. Weiter erhalten wir auch eine recht explizite Beschreibung dieser Limites und Kolimites. Ich erinnere dazu die volltreue Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ gegeben durch $X \mapsto \hat{X} = \mathcal{C}(_, X)$. Gegeben ein System $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$ aus $\text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ ist etwa der Limes des Systems $(\hat{C}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ aus $\text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C}^\wedge)$ als Objekt von \mathcal{C}^\wedge der Funktor

$$(\text{lim } \hat{C}_i) : Z \mapsto \text{lim } \hat{C}_i(Z) = \text{lim } \mathcal{C}(Z, C_i)$$

Das Symbol lim in der Mitte und rechts ist dabei in der Kategorie der Mengen zu verstehen. Ebenso ist der Kolimes des besagten Systems der Funktor

$$(\text{col } \hat{C}_i) : Z \mapsto \text{col } \hat{C}_i(Z) = \text{col } \mathcal{C}(Z, C_i)$$

Das Symbol col in der Mitte und rechts ist dabei wieder in der Kategorie der Mengen zu verstehen.

3.1.4 (**Verträglichkeit gewisser Limites mit Yoneda-Einbettungen**). Existiert der Limes des Systems $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$ in \mathcal{C} , so geht er unter dem offensichtlichen Morphismus isomorph auf den Limes des Bildsystems in \mathcal{C}^\wedge , in Formeln

$$(\text{lim } C_i)^\wedge \xrightarrow{\sim} \text{lim } \hat{C}_i$$

Beide Funktoren nehmen nämlich auf allen $Z \in \mathcal{C}$ denselben Wert $\lim \mathcal{C}(Z, C_i)$ an. In $\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^\vee := \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})^{\text{opp}}$ mit der volltreuen Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee$ gegeben durch $X \mapsto \check{X} = \mathcal{C}(X, _)$ sieht man dual, daß wenn der Kolimes des Systems $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$ in \mathcal{C} existiert, daß dann unter dem offensichtlichen Morphismus der Kolimes des Bildsystems in \mathcal{C}^\vee isomorph daraufgeht, in Formeln

$$\text{col } \check{C}_i \xrightarrow{\sim} (\text{col } C_i)^\vee$$

In der Tat nehmen beide Funktoren auf allen $Z \in \mathcal{C}$ denselben Wert $\lim \mathcal{C}(C_i, Z)$ an mit dem hier über ein System $\mathcal{I}^{\text{opp}} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ zu verstehenden Limes.

3.1.5 (Unverträglichkeit gewisser Limes mit Yoneda-Einbettungen). Im Gegensatz zu den im vorigen Punkt behandelten Fällen muß, wenn der Kolimes $\text{col } C_i$ existiert, die natürliche Transformation $\text{col } \hat{C}_i \rightarrow (\text{col } C_i)^\wedge$ keine Isotransformation sein, als da heißt, die natürliche Abbildung $\text{col } \mathcal{C}(Z, C_i) \rightarrow \mathcal{C}(Z, \text{col } C_i)$ muß keineswegs für alle Objekte Z eine Bijektion sein. Ein typisches Gegenbeispiel wäre der Fall der Kategorie der Vektorräume, in der wir jeden Raum V als Kolimes des Systems aller endlichdimensionalen Teilräume $C_i \subset V$ schreiben können: Der Kolimes der Homomorphismenräume geht dann isomorph auf den Raum der Homomorphismen endlichen Rangs und keineswegs isomorph auf den Raum aller Homomorphismen. Ein vielleicht noch typischeres Gegenbeispiel wäre der Fall direkter Summen von Vektorräumen: Die Identität auf einer direkten Summe mit unendlich vielen von Null verschiedenen Summanden landet nicht in einer endlichen Teilsumme.

3.1.6 (Notation für Limes in Funktorkategorien). Ich verwende für in der Kategorie \mathcal{C}^\wedge zu verstehende Kolimites die Notation $\text{c}\hat{\text{ol}}$ und im filtrierenden Fall die Notation $\text{c}\hat{\text{ol}}\text{f}$ und spreche im filtrierenden Fall von einem **Indkolimes**. Dual verwende ich die Notation $\text{l}\hat{\text{im}}$ und im kofiltrierenden Fall die Notation $\text{l}\hat{\text{im}}\text{f}$ für in der Kategorie \mathcal{C}^\vee zu verstehende Limes. Im kofiltrierenden Fall spreche ich auch von einem **Prolimes**.

3.1.7. In der Literatur findet man vielfach statt $\text{c}\hat{\text{ol}}$ die Notation “ \varinjlim ” mit Anführungsstrichlein für in der Kategorie \mathcal{C}^\wedge zu verstehende Kolimites und statt $\text{l}\hat{\text{im}}$ die Notation “ \varprojlim ” für in der Kategorie \mathcal{C}^\vee zu verstehende Limes.

3.1.8. Sei (D_j) ein Diagramm von Objekten einer Kategorie \mathcal{C} . Ein Morphismus eines Objekts $F \in \mathcal{C}^\vee$ in den Limes $\text{l}\hat{\text{im}} D_j$ ist per definitionem eine verträgliche Familie von Morphismen aus $\mathcal{C}^\vee(F, \check{D}_j)$ alias ein Element von $\text{lim}_j \mathcal{C}^\vee(F, \check{D}_j)$. Das Yoneda-Lemma [LA2] 7.9.2 liefert eine natürliche Bijektion zwischen dieser Menge und $\text{lim}_j F(D_j)$. Ist speziell $F = \text{l}\hat{\text{im}} C_i$ auch der Limes eines Systems (C_i) , so erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}^\vee(\text{l}\hat{\text{im}} C_i, \text{l}\hat{\text{im}} D_j) \xrightarrow{\sim} \text{lim}_j \text{col}_i \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Im übrigen dürfen Sie in Übung 3.1.18 zeigen, daß jedes Objekt von \mathcal{C}^\vee zu einem Objekt der Gestalt $\varinjlim C_i$ isomorph ist.

3.1.9. Unter einem **Pro-Objekt** einer Kategorie \mathcal{C} versteht man ein kofiltrierendes System von Objekten von \mathcal{C} im Sinne von [TS] 7.1.11. Gegeben Pro-Objekte (C_i) und (D_j) erklärt man einen **Morphismus von Pro-Objekten** als ein Element der Menge

$$\limf_j \text{colf}_i \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Um die Komposition von Morphismen von Pro-Objekten zu erklären, bemerken wir, daß ein Morphismus repräsentiert werden kann durch eine mit j indizierte Familie von Morphismen $C_{i(j)} \rightarrow D_j$, die in der Weise verträglich sind, daß für jeden Systemmorphismus $D_k \rightarrow D_j$ und den zu k gehörigen Morphismus $C_{i(k)} \rightarrow D_k$ einen Index $i = i(j, k)$ mit Morphismen $i \rightarrow i(j)$ und $i \rightarrow i(k)$ gibt, für den $C_i \rightarrow C_{i(j)} \rightarrow D_j$ und $C_i \rightarrow C_{i(k)} \rightarrow D_k \rightarrow D_j$ übereinstimmen. Weiter repräsentiert eine zweite verträgliche Familie von Morphismen $C_{\tilde{i}(j)} \rightarrow D_j$ genau dann denselben Morphismus von Pro-Objekten, wenn wir für jedes j einen Index $\hat{i}(j)$ und Morphismen $\hat{i}(j) \rightarrow i(j)$ und $\hat{i}(j) \rightarrow \tilde{i}(j)$ so finden, daß die Kompositionen $C_{\hat{i}(j)} \rightarrow C_{i(j)} \rightarrow D_j$ und $C_{\hat{i}(j)} \rightarrow C_{\tilde{i}(j)} \rightarrow D_j$ übereinstimmen. Mit dieser Beschreibung von Morphismen scheint mir nun offensichtlich, wie Morphismen von Pro-Objekten zu komponieren sind. Wir erhalten so die Kategorie

$$\text{pro}(\mathcal{C})$$

der Pro-Objekte von \mathcal{C} . Nach dem Vorhergehenden liefert die Vorschrift $(C_i) \mapsto \limf_i C_i$ einen volltreuen Funktor

$$\text{pro}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee$$

Ergänzung 3.1.10. Die Pro-Objekte einer Kategorie \mathcal{C} bilden salopp gesprochen einen noch vergleichsweise gut zugänglichen Teil der Kategorie \mathcal{C}^\vee aller Mengenfunktoren. In \mathcal{C}^\vee haben zwar die Objekte und Morphismenmengen im wesentlichen dieselbe Beschreibung, aber ich kenne in dieser Allgemeinheit keine vernünftige Beschreibung für die Verknüpfung von Morphismen mehr.

3.1.11 (**Morphismen von Ind-Objekten**). Ein **Ind-Objekt** einer Kategorie \mathcal{C} ist dual ein filtrierendes System (C_i) in \mathcal{C} . Die Morphismen in ein weiteres Ind-Objekt erklären wir als Elemente der Menge

$$\limf_i \text{colf}_j \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Für die Kategorie $\text{ind}(\mathcal{C})$ liefert dann die Konstruktion $(C_i) \mapsto \text{côlf}_i C_i$ einen volltreuen Funktor

$$\text{ind}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$$

Jedes Element von $\text{colf}_j \mathcal{C}(C_i, D_j)$ wird repräsentiert durch einen Morphismus $\varphi_i : C_i \rightarrow D_b$ für ein b , das vom jeweiligen Morphismus abhängen wird. Dessen Klasse im Kolimes notieren wir $\bar{\varphi}_i$. Ein Morphismus von Ind-Objekten ist dann eine verträgliche Familie derartiger Klassen $\bar{\varphi}_i$.

Definition 3.1.12. Ein filtrierendes System (C_i) in einer Kategorie \mathcal{C} heißt **essentiell konstant**, wenn $\text{côlf } C_i$ isomorph ist zu einem Objekt im Bild der volltreuen Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ alias zu einem Funktor der Gestalt \hat{D} für ein Objekt $D \in \mathcal{C}$. Dual heißt ein kofiltrierendes System (C_i) **essentiell konstant**, wenn $\text{limf } C_i$ isomorph ist zu einem Objekt im Bild der volltreuen Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$.

3.1.13. Schreiben wir die Bedingung „essentiell konstant“ für côlf aus, so entspricht zunächst einmal ein Morphismus $\psi \in \mathcal{C}^\wedge(\text{côlf } C_i, \hat{D})$ einem verträglichen System von Morphismen $\psi_i \in \mathcal{C}(C_i, D)$ und ein Morphismus $\varphi \in \mathcal{C}^\wedge(\hat{D}, \text{côlf } C_i)$ hat die Gestalt $\varphi = \bar{\varphi}_j$ für ein $\varphi_j \in \mathcal{C}(D, C_j)$ und einen Index j . Die Bedingung $\psi \circ \varphi = \text{id}$ bedeutet dann schlicht $\psi_j \circ \varphi_j = \text{id}_D$ für diesen einen Index j und [TS] 7.1.30 zeigt, daß für das verträgliche System von Morphismen $\psi_i \in \mathcal{C}(C_i, D)$ unser D der Kolimes des Systems der C_i gewesen sein muß. Die Bedingung $\varphi \circ \psi = \text{id}$ bedeutet aber zusätzlich die Forderung, daß es für jedes a Systemmorphisme $s_{kj} : j \rightarrow k$ und $s_{ka} : a \rightarrow k$ gibt derart, daß die Verknüpfung

$$C_a \xrightarrow{\psi_a} D \xrightarrow{\varphi_j} C_j \xrightarrow{s_{kj}} C_k$$

zusammenfällt mit dem von s_{ka} induzierten Morphismus $C_a \rightarrow C_k$.

Beispiel 3.1.14. Das filtrierende System von \mathbb{R} -Vektorräumen, indiziert durch \mathbb{Z} und mit irgendwelchen Vektorräumen an jeder Stelle und Nullmorphisme für alle Morphisme ist essentiell konstant und isomorph zum durch das Nullobjekt dargestellten Funktor.

Beispiel 3.1.15. Gegeben ein Vektorraum W ist der Funktor, der jedem weiteren Vektorraum Z die Menge aller linearen Abbildungen endlichen Ranges von Z nach W zuordnet, ein Ind-Vektorraum, er kann nämlich als der Kolimes der endlichdimensionalen Teilräume von W in der Kategorie der kontravarianten Mengenfunktor beschrieben werden.

Beispiel 3.1.16. Gegeben ein Vektorraum V ist der Funktor, der jedem weiteren Vektorraum Z die Menge aller linearen Abbildungen endlichen Ranges von V nach Z zuordnet, ein Pro-Vektorraum, er kann nämlich als der Limes der endlichdimensionalen Quotienten von V in der Opponierten zur Kategorie der Mengenfunktor beschrieben werden.

Übungen

Übung 3.1.17 (Hinreichendes Kriterium für essentiell konstante Systeme). Sei $X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein filtrierendes System in einer Kategorie \mathcal{C} . Es gebe einen Index

$i \in \mathcal{I}$ derart, daß jeder von i ausgehende Systemmorphismus $s : i \rightarrow a$ in der Weise durch einen weiteren Systemmorphismus $t : a \rightarrow j$ verlängert werden kann, daß die Verknüpfung einen Isomorphismus $X(ts) : X_i \xrightarrow{\sim} X_j$ induziert. So ist der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$X_i \xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_j X_j$$

Daß diese Bedingung nicht notwendig ist, zeigt eine leichte Variation von Beispiel 3.1.14.

Übung 3.1.18. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $\mathcal{C}^\wedge := \operatorname{Cat}(\mathcal{C}^{\operatorname{opp}}, \operatorname{Ens})$ und $\mathcal{C} \mapsto \hat{\mathcal{C}}$ die volltreue Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$. Gegeben $X \in \mathcal{C}^\wedge$ betrachten wir die volle Unterkategorie $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{C}_X^\wedge$ aller Morphismen $\hat{C} \rightarrow X$ mit $C \in \mathcal{C}$ und den Funktor $V : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$, der den Morphismus nach X vergißt. So ist der natürliche Morphismus ein Isomorphismus $\operatorname{colim}_{\mathcal{C}_X} V \xrightarrow{\sim} X$ oder anders notiert

$$\operatorname{colim}_{\hat{C} \rightarrow X} \hat{C} \xrightarrow{\sim} X$$

Genauer liefert jeder Morphismus $\varphi : \operatorname{colim}_{\hat{C} \rightarrow X} \hat{C} \rightarrow Y$ mit $Y \in \mathcal{C}^\wedge$ ja für beliebige $A, C \in \mathcal{C}$ und $\psi : \hat{C} \rightarrow X$ eine Abbildung $\varphi(\psi, A) : \hat{C}(A) \rightarrow Y(A)$. Jedes $u \in X(A)$ entspricht nun einem $\hat{u} : \hat{A} \rightarrow X$ und liefert so $\varphi(\hat{u}, A) : \hat{A}(A) \rightarrow Y(A)$. Die Abbildung $X(A) \rightarrow Y(A)$ wird nun gegeben durch $u \mapsto \varphi(\hat{u}, A)(\operatorname{id}_A)$. Den Rest mag der Leser selber machen.

3.2 Derivierte Funktoren auf Ore-Lokalisierungen

3.2.1. Die Elemente einer ausgezeichneten Menge S von Morphismen einer Kategorie nennen wir im folgenden **S -Morphismen**.

3.2.2 (**Ore-Lokalisierung durch Pro-Objekte**). Seien \mathcal{C} eine Kategorie und S ein Rechts-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Nach 1.3.15 haben wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}_S(X, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{D \xrightarrow{S} X} \mathcal{C}(D, Y)$$

mit dem filtrierenden Kolimes über das System aller S -Morphismen $D \rightarrow X$ in das Objekt X . In der Terminologie von 3.1.9 ist diese Menge weiter in natürlicher Bijektion zu $\mathcal{C}^\vee(X^-, Y)$ für

$$X^- := \operatorname{limf}_{D \xrightarrow{S} X} D$$

mit dem filtrierenden Limes in der Funktorkategorie wieder über das System aller S -Morphismen $D \rightarrow X$ in das Objekt X . Damit aber induziert jeder S -Morphismus $t : C \rightarrow Y$ offensichtlich eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(X^-, C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee(X^-, Y)$ und die Vorschrift $X \mapsto X^-$ induziert wieder nach 3.1.9 einen volltreuen Funktor

$$\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \operatorname{pro}(\mathcal{C})$$

3.2.3 (**Ore-Lokalisierung durch Ind-Objekte**). Analog konstruiert man im Fall eines Links-Oresystems S einen volltreuen Funktor $\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \text{ind}(\mathcal{C})$, $X \mapsto X^+$.

Definition 3.2.4. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Links-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Der **universelle rechtsderivierte Funktor** RF von F oder kürzer **Rechtsderivierte** ist die Komposition

$$\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \text{ind}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ind}(\mathcal{D})$$

der volltreuen Einbettung aus 3.2.2 mit dem von F auf Ind-Objekten induzierten Funktor.

3.2.5. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Links-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Explizit wird unser Rechtsderivierter gegeben durch die Vorschrift

$$(\text{RF})(A) := \text{côlf}_{A \xrightarrow{S} X} FX$$

Der **Indkolimes** ist dabei zu verstehen über die filtrierende Kategorie aller S -Morphismen $A \rightarrow X$ in \mathcal{C} . Für $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ die Lokalisierung und $V : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\wedge$ die Yoneda-Einbettung erhält man aus der Konstruktion zusätzlich eine natürliche Transformation

$$\tau : V \circ F \Rightarrow (\text{RF}) \circ Q$$

Definition 3.2.6. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Links-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ heißt **entfaltet** oder genauer **F - S -rechtsentfaltet**, wenn sich jeder S -Morphismus $X \rightarrow B$ so durch einen weiteren Morphismus $B \rightarrow Y$ verlängern läßt, daß die Komposition ein S -Morphismus ist und einen Isomorphismus $FX \xrightarrow{\sim} FY$ induziert. Ein Objekt X ist in anderen Worten entfaltet, wenn in der filtrierenden Kategorie der von X ausgehenden S -Morphismen diejenigen Morphismen, die unter F zu Isomorphismen werden, eine konfinale Unterkategorie bilden.

3.2.7. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Links-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Nach 3.1.17 liefert für jedes entfaltete Objekt $X \in \mathcal{C}$ unsere Transformation τ aus 3.2.5 einen Isomorphismus

$$\tau_X : VFX \xrightarrow{\sim} (\text{RF})(QX)$$

Deligne nennt noch allgemeiner ein Objekt X **déployé**, wann immer τ_X einen Isomorphismus $\tau_X : VFX \xrightarrow{\sim} (\text{RF})(QX)$ liefert. Ich will vermeiden, in dieser Allgemeinheit zu arbeiten.

Definition 3.2.8. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Links-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ heißt **entfaltbar**, wenn es einen S -Morphismus $A \rightarrow X$ von A in ein **entfaltetes** Objekt X gibt. Die vollen Unterkategorien der entfalteten beziehungsweise entfaltbaren Objekte notieren wir $\mathcal{C}_{(F)} \subset \mathcal{C}_F \subset \mathcal{C}$ und die vollen Unterkategorien ihrer Bilder in der Lokalisierung entsprechend $\mathcal{C}_{S,(F)} \subset \mathcal{C}_{S,F} \subset \mathcal{C}_S$. Unter dem **Rechtsderivierten** oder genauer dem **zahmen Rechtsderivierten von F** verstehen wir den von unserem universellen Rechtsderivierten auf der Unterkategorie der entfaltbaren Objekte induzierten Funktor

$$RF : \mathcal{C}_{S,F} \rightarrow \mathcal{D}$$

mit der von seiner Konstruktion herkommenden Transformation $\tau : F \Rightarrow RF \circ Q$ von Funktoren $\mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{D}$.

Ergänzung 3.2.9. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Links-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Deligne nennt allgemeiner ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ **dérivable**, wann immer das Ind-Objekt $(RF)(A)$ zum wesentlichen Bild der volltreuen Einbettung $V : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\wedge$ gehört. Ich will vermeiden, in dieser Allgemeinheit zu arbeiten.

3.2.10 (Charakterisierung des Rechtsderivierten). Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein Links-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Man sieht leicht, daß der zahme Rechtsderivierte (RF, τ) charakterisiert werden kann als das bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmte Paar (R, τ) bestehend aus einem Funktor $R : \mathcal{C}_{S,F} \rightarrow \mathcal{D}$ und einer Transformation $\tau : F \Rightarrow RQ$ von Funktoren $\mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{D}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes entfaltete Objekt $X \in \mathcal{C}_{(F)}$ unsere Transformation einen Isomorphismus $\tau_X : FX \xrightarrow{\sim} RQX$ liefert. Die Frage, inwieweit $\mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{C}_{S,F}$ ein Lokalisierungsfunktor ist, lassen wir dabei unberührt.

Beispiel 3.2.11 (Derivieren durch injektive Auflösungen). Seien \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und $F : \text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor in eine weitere Kategorie \mathcal{D} und S das System der Quasiisomorphismen in $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$. So ist jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex I von injektiven Objekten von \mathcal{A} entfaltet. In der Tat finden wir zu jedem Quasiisomorphismus $I \xrightarrow{\sim} A$ in $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$ einen Quasiisomorphismus $A \xrightarrow{\sim} I$ derart, daß die Komposition die Identität auf I ist. Wir wiederholen dies Argument in **3.2.12** nocheinmal in der ihm angemessenen Allgemeinheit. Betrachten wir nun eine weitere abelsche Kategorie \mathcal{B} und einen additiven Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und spezialisieren zu $\mathcal{D} := \text{Der}_{\mathcal{B}}$ und bezeichnen den von F induzierten Funktor $\text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{B}}$ auch mit F und nehmen an, daß \mathcal{A} genügend Injektive hat, so ist für jedes $A \in \mathcal{A}$ der Komplex $A[0]$ entfaltetbar und wir finden natürliche Isomorphismen

$$(R^i F)(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i((RF)(A[0]))$$

Beispiel 3.2.12 (Entfaltung durch Rechtsadjungierte). Seien \mathcal{C} eine Kategorie mit einem gesättigten Links-Oresystem S und $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Besitzt der

Quotientenfunktor $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ bei QA einen partiellen Rechtsadjungierten R , so ist die natürliche Abbildung $A \rightarrow RQA$ eine F -Entfaltung für jeden Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in eine weitere Kategorie \mathcal{D} . In der Tat ist $QA \rightarrow QRQA \rightarrow QA$ nach [TF] 4.8.11 die Identität und der zweite Morphismus nach 1.2.13.2 ein Isomorphismus und nach 1.4.4 ist folglich $A \rightarrow RQA$ ein S -Morphismus. Ist weiter $RQA \rightarrow B$ ein beliebiger S -Morphismus, so kommt er her von einem Isomorphismus $QA \xrightarrow{\sim} QB$, und der Inverse dazu liefert einen Morphismus $B \rightarrow RQA$ mit der Eigenschaft, daß die Verknüpfung die Identität auf RQA ist.

3.2.13 (Verknüpfung derivierter Funktoren). Seien (\mathcal{A}, S) und (\mathcal{B}, T) Kategorien mit gesättigten Links-Oresystemen (*Genau durchgehen, wo gesättigt nötig ist und warum!*) und sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor. Bezeichne Q die Lokalisierungsfunktoren. Ich erinnere daran, daß T nach 1.4.4 aus allen Morphismen besteht, die unter Q Isomorphismen werden. Ist $A \in \mathcal{A}$ entfaltet für QF , so bilden im filtrierenden System A^+ der von A ausgehenden S -Morphismen diejenigen Morphismen, die unter F zu T -Morphismen werden, nach 3.2.6 eine konfinale Unterkategorie A^{++} . Sei nun $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ ein weiterer Funktor. Wir erhalten eine Transformation

$$\tau : R(GF) \Rightarrow RG \circ R(QF)$$

von Funktoren $\mathcal{A}_{S,(QF)} \rightarrow \mathcal{D}^\wedge$, indem wir einerseits den kanonischen Isomorphismus $R(GF)(A) \xrightarrow{\sim} \text{côlf}_{X \in A^{++}} GFX$ betrachten und andererseits beachten, daß F einen Funktor $F : A^{++} \rightarrow (FA)^+$ induziert und damit einen Morphismus

$$\text{côlf}_{X \in A^{++}} GFX \rightarrow \text{côlf}_{Y \in (FA)^+} GY$$

Die rechte Seite ist aber schlicht $(RG)(FA)$ alias $(RG)(R(QF)(A))$. Besagte Transformation besitzt eine eindeutig bestimmte Ausdehnung zu einer Transformation zwischen den entsprechenden auf der vollen Unterkategorie der QF -entfaltbaren Objekte definierten derivierten Funktoren. Gibt es weiter für ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ einen S -Morphismus $A \rightarrow X$, der sowohl eine QF - S -Entfaltung als auch eine GF - S -Entfaltung ist und für den FX seinerseits G - T -entfaltet ist, so liefert unsere Transformation offensichtlich einen Isomorphismus

$$\tau_A : (R(GF))(A) \xrightarrow{\sim} (RG)(R(QF)(A))$$

3.2.14. Seien dual $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und S ein gesättigtes Rechts-Oresystem von Morphismen von \mathcal{C} . Der **linksderivierte Funktor von F** ist der Funktor $LF : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}^\vee$ von der Lokalisierung von \mathcal{C} in die Kategorie der Pro-Objekte von \mathcal{D} gegeben durch

$$(LF)(A) := \lim_{X \xrightarrow{S} A} FX$$

Der Limes ist dabei zu verstehen über die kofiltrierende Kategorie aller S -Morphismen $X \rightarrow A$ in \mathcal{C} . Wir haben $(LF)^{\text{opp}} = R(F^{\text{opp}}) : \mathcal{C}_S^{\text{opp}} \rightarrow (\mathcal{D}^{\text{opp}})^\wedge = (\mathcal{D}^\vee)^{\text{opp}}$. Alle für rechtsderivierte Funktoren bewiesenen Aussagen übertragen sich unmittelbar auf linksderivierte Funktoren.

3.2.15 (Adjunktion von derivierten Funktoren). Seien adjungierte Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ gegeben und seien S ein gesättigtes Rechts-Oresystem in \mathcal{C} und T ein gesättigtes Links-Oresystem in \mathcal{D} . So erhalten wir natürliche Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}_S)^\wedge(X, R(QG)Y) & & (\mathcal{D}_T)^\vee(L(QF)X, Y) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 \text{colf}_{Y \xrightarrow{T} I} \mathcal{C}_S(X, QGI) & & \text{colf}_{P \xrightarrow{S} X} \mathcal{D}_T(QFP, Y) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 \text{colf}_{Y \xrightarrow{T} I, P \xrightarrow{S} X} \mathcal{C}(P, GI) & \xrightarrow{\sim} & \text{colf}_{P \xrightarrow{S} X, Y \xrightarrow{T} I} \mathcal{D}(FP, I)
 \end{array}$$

Hier bezeichnet $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ und $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_T$ die jeweilige Lokalisierung. Sind speziell das ind-Objekt $R(QG)Y$ und das pro-Objekt $L(QF)X$ essentiell konstant, so erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}_S(X, R(QG)Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_T(L(QF)X, Y)$$

Ist etwa QF auf allen Objekten von \mathcal{C} entfaltbar, so ist $R(QG)$ der partielle Rechtsadjungierte zu $L(QF)$, wo immer QG entfaltbar ist.

3.2.16. Ich erinnere daran, daß wir in [TF] 4.8.3 einen partiell definierten Funktor als einen auf einer vollen Unterkategorie definierten Funktor erklärt hatten. Gegeben Kategorien \mathcal{A}, \mathcal{B} und partiell definierte Funktoren $L : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{A}$ verstehe ich unter einer **partiellen Adjunktion** (L, R) eine Isotransformation

$$\alpha_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$$

von Funktoren $\mathcal{A}_L \times \mathcal{B}_R \rightarrow \text{Ens}$ vom Produkt der Definitionsbereiche unserer jeweiligen Funktoren. In dieser Terminologie induziert also mit den Notationen der vorherigen Bemerkung 3.2.15 jede Adjunktion (F, G) von Funktoren zwischen Kategorien mit ausgezeichneten Oresystemen eine partielle Adjunktion der derivierten Funktoren $(L(QF), R(QG))$.

3.3 Derivierte Funktoren auf triangulierten Kategorien

3.3.1. Ist \mathcal{T} eine triangulierte Kategorie und $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ ein Verdiersystem, so ist das System $S = S_{\mathcal{V}}$ aller Morphismen mit Kegel in \mathcal{V} ein gesättigtes Oresystem

und wir haben per definitionem $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}/\mathcal{V}$. Statt S -entfaltet beziehungsweise S -entfaltbar sagen wir in diesem Kontext auch \mathcal{V} -entfaltet beziehungsweise \mathcal{V} -entfaltbar.

Satz 3.3.2 (Rechtsderivierter eines triangulierten Funktors). *Seien $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$ ein triangulierter Funktor und $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ ein Verdiersystem. So gilt:*

1. Die F - \mathcal{V} -entfalteten Objekte von \mathcal{T} bilden eine volle triangulierte Unterkategorie $\mathcal{T}_{(F)} \subset \mathcal{T}$;
2. Die F - \mathcal{V} -entfaltbaren Objekte von \mathcal{T} bilden volle triangulierte Unterkategorien $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$ und $(\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \subset \mathcal{T}/\mathcal{V}$;
3. Der rechtsderivierte Funktor $\mathbf{R}F$ von F im Sinne von 3.2.10 besitzt genau eine \mathbb{Z} -Struktur, für die $\tau : F \Rightarrow (\mathbf{R}F)Q$ eine verträgliche Transformation von \mathbb{Z} -Funkoren ist, und versehen mit dieser \mathbb{Z} -Struktur ist $\mathbf{R}F$ ein triangulierter Funktor

$$\mathbf{R}F : (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \rightarrow \mathcal{D}$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß die entfaltenen Objekte eine volle triangulierte Unterkategorie $\mathcal{T}_{(F)} \subset \mathcal{T}$ bilden. Dazu argumentieren wir anhand des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
 \mathcal{V} \downarrow & & \mathcal{V} \downarrow 1 & & \mathcal{V} \downarrow 2 & & \\
 X & \xrightarrow{1} & Y & \xrightarrow{2} & Z & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
 \parallel & & \mathcal{V} \downarrow 3 & & \mathcal{V} \downarrow 4 & & \\
 X & \xrightarrow{3} & Y' & \xrightarrow{4} & Z' & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
 \mathcal{V} \downarrow 6 & & \parallel & & \mathcal{V} \downarrow 5 & & \\
 X'' & \xrightarrow{6} & Y' & \xrightarrow{5} & Z'' & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow
 \end{array}$$

Wir gehen aus von einem ausgezeichneten Dreieck in der obersten Horizontale, in dem wir B und C als entfaltet annehmen, und von einer beliebigen \mathcal{V} -Auflösung $A \rightarrow X$. Sicher können wir in einem ersten Schritt (1) den Kowinkel oben links durch die Morphismen so kommutativ ergänzen, daß wie angedeutet auch $B \rightarrow Y$ eine \mathcal{V} -Auflösung ist. Dann vervollständigen wir in Schritt (2) die zweite Horizontale zu einem ausgezeichneten Dreieck und ergänzen die beiden linken Vertikalen zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken durch einen Morphismus $C \rightarrow Z$, dessen Kegel nach 2.4.5 wie angedeutet in \mathcal{V} liegen muß. In Schritt (3) wählen wir $Y \rightarrow Y'$ mit Kegel in \mathcal{V} so, daß die Komposition $FB \rightarrow FY \rightarrow FY'$

ein Isomorphismus ist. In Schritt (4) ergänzen wir wieder zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken. In Schritt (5) wählen wir $Z' \rightarrow Z''$ mit Kegel in \mathcal{V} so, daß die Komposition $FC \rightarrow FZ \rightarrow FZ' \rightarrow FZ''$ ein Isomorphismus ist. In Schritt (6) ergänzen wir ein letztes Mal zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken. Lassen wir nun F auf das ganze Diagramm los, so werden beide Kompositionen der mittleren und rechten Vertikalen Isomorphismen, also auch die Komposition in der linken Vertikale. Nun zeigen wir, daß auch die entfaltbaren Objekte eine volle triangulierte Unterkategorie $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$ bilden. Diesmal argumentieren wir anhand des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccccc}
A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
\parallel & & \downarrow \nu_1 & & \downarrow \nu_2 & & \\
A & \xrightarrow{1} & X & \xrightarrow{2} & Y & \xrightarrow{2} & \xrightarrow{[1]} \\
\downarrow \nu_4 & & \parallel & & \downarrow \nu_3 & & \\
Z & \xrightarrow{4} & X & \xrightarrow{3} & Y' & \xrightarrow{4} & \xrightarrow{[1]}
\end{array}$$

Hier wählen wir im Schritt (1) eine Entfaltung von B , bilden im Schritt (2) das ausgezeichnete Dreieck, wählen in Schritt (3) mithilfe von ?? eine Entfaltung von Y und bilden in Schritt (4) wieder das Dreieck. Nach dem bereits bewiesenen besteht dann das unterste Dreieck aus entfalteten Objekten. Für $\mathcal{V}_{(F)} := \mathcal{T}_{(F)} \cap \mathcal{V}$ ist nun der offensichtliche Funktor $\mathcal{T}_{(F)}/\mathcal{V}_{(F)} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{V}$ volltreu nach dem allgemeinen Resultat 1.3.8 über Lokalisierung und volltreue Einbettungen. In der Tat ist die Definition einer Entfaltung genau auf die für dieses Resultat benötigte Bedingung abgestimmt. Unser Funktor liefert folglich eine Äquivalenz

$$E : \mathcal{T}_{(F)}/\mathcal{V}_{(F)} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F$$

mit der vollen Unterkategorie aller derjenigen Objekte von \mathcal{T}/\mathcal{V} , die in \mathcal{T} entfaltbar sind, und insbesondere ist diese volle Unterkategorie von \mathcal{T}/\mathcal{V} auch trianguliert. Nun zeigen wir, daß gilt $F(X) = 0$ für alle $X \in \mathcal{V}_{(F)}$. Per definitionem ist für $X \in \mathcal{V}$ ja der Nullmorphismus $X \rightarrow 0$ eine Auflösung, und ist X zusätzlich entfaltet, so muß sie sich verlängern lassen durch eine Auflösung $0 \rightarrow Y$ derart, daß die Komposition einen Isomorphismus $FX \xrightarrow{\sim} FY$ liefert. Das ist aber offensichtlich nur möglich, wenn bereits gilt $FX = 0$. Die Einschränkung von F auf $\mathcal{T}_{(F)} \subset \mathcal{T}$ faktorisiert also über einen triangulierten Funktor $\bar{F} : \mathcal{T}_{(F)}/\mathcal{V}_{(F)} \rightarrow \mathcal{D}$. Jede Wahl eines Quasiinversen U der Äquivalenz E liefert so einen triangulierten Funktor

$$R := \bar{F}U : (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \rightarrow \mathcal{D}$$

nebst einer verträglichen Transformation $\tau : F \Rightarrow RQ$, die zusammen die charakterisierende Eigenschaft eines Rechtsderivierten aus 3.2.10 haben. Die Eindeutigkeit des Paares (R, τ) bis auf eindeutigen Isomorphismus zeigt auch, daß die \mathbb{Z} -Struktur auf R durch die Bedingungen im Satz bereits eindeutig festgelegt wird. \square

3.4 Derivierte Funktoren auf derivierten Kategorien

Definition 3.4.1. Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Den rechtsderivierten Funktor an die Verknüpfung $Q \circ \text{Hot}(F) : \text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Hot}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{B})$ in Bezug auf das gesättigte Oresystem S der Quasiisomorphismen alias das Verdiersystem der azyklischen Komplexe von $\text{Hot}(\mathcal{A})$ im Sinne von 3.2.8 nennen wir kurz den **rechtsderivierten Funktor zu F** und notieren ihn vereinfachend RF statt $R(Q \circ \text{Hot}(F))$. Weiter sagen wir in diesem Zusammenhang **F -entfaltbar** statt „ $Q \circ \text{Hot}(F)$ -entfaltbar“ und bezeichnen die Kategorie aller F -entfaltbaren Objekte mit $\text{Der}(\mathcal{A})_F := \text{Der}(\mathcal{A})_{Q \circ \text{Hot}(F)}$. Unser derivierter Funktor RF ist in diesen Notationen also ein triangulierter Funktor

$$RF : \text{Der}(\mathcal{A})_F \rightarrow \text{Der}(\mathcal{B})$$

von der vollen triangulierten Unterkategorie der F -entfaltbaren Komplexe in die derivierte Kategorie von \mathcal{B} . Die volle Unterkategorie der F -entfaltbaren im Grad Null konzentrierten Komplexe alias Objekte $A \in \mathcal{A}$ notieren wir \mathcal{A}_F . Die **höheren derivierten Funktoren von F** erklären wir dann als die Funktoren

$$R^i F := \mathcal{H}^i RF : \mathcal{A}_F \rightarrow \mathcal{B}$$

Schließlich nennen wir ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ ein **F -azyklisches Objekt**, wenn der Komplex $A[0]$ ein F -entfalteter Komplex ist.

3.4.2. Nach 3.2.11 sind gegen die Pfeile beschränkte Komplexe von injektiven Objekten stets entfaltet. Folglich verallgemeinern die hier definierten höheren derivierten Funktoren unsere durch injektive Auflösungen definierten höheren derivierten Funktoren.

3.4.3. Analoge Sprechweisen vereinbaren wir auch für linksderivierte Funktoren und setzen zur Vermeidung von Vorzeichen $L_i F := \mathcal{H}^{-i} LF$.

Lemma 3.4.4 (Rechtsderivieren erhält Positivität). Seien $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und $X \in \text{Der}(\mathcal{A})_F$ ein entfaltbarer Komplex. So gilt

$$X \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad RF(X) \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$$

Beweis. Nach Annahme gibt es einen Quasiisomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ zu einem entfalteten Komplex $Y \in \text{Hot}(\mathcal{A})$. Der Quasiisomorphismus $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0}Y$ muß sich dann so durch einen Quasiisomorphismus $\tau^{\geq 0}Y \xrightarrow{\sim} Z$ fortsetzen lassen, daß die Komposition einen Quasiisomorphismus $FY \xrightarrow{\sim} FZ$ induziert. Es folgt unmittelbar $\mathcal{H}^i R F(X) = \mathcal{H}^i F Y = 0$ für $i < 0$. \square

Proposition 3.4.5 (Der nullte Derivierte eines linksexakten Funktors). *Ist $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien, so liefert die kanonische Transformation $F \Rightarrow R F$ für jedes entfaltbare Objekt $A \in \mathcal{A}$ einen Isomorphismus*

$$F A \xrightarrow{\sim} R^0 F(A)$$

Beweis. Ist $A \rightarrow X$ eine Entfaltung, so ist $A \rightarrow \tau^{\geq 0}X$ ein Quasiisomorphismus und folglich besitzt auch $\tau^{\geq 0}X$ eine Entfaltung $\tau^{\geq 0}X \rightarrow Y$. Nun betrachten wir die Sequenz

$$F A \rightarrow \mathcal{H}^0 F X \rightarrow \mathcal{H}^0 F \tau^{\geq 0} X \rightarrow \mathcal{H}^0 F Y$$

Die linksexakte Sequenz $A \hookrightarrow X^0 / (\text{im } d) \rightarrow X^1$ zeigt nach Anwenden von F , daß die Komposition der beiden linken Morphismen dieser Sequenz ein Isomorphismus ist. Die Komposition der beiden rechten Morphismen ist ein Isomorphismus nach Konstruktion. Damit müssen dann alle drei Morphismen Isomorphismen sein. \square

Lemma 3.4.6 (Derivieren mit azyklischen Auflösungen). *Ist $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und $A \in \mathcal{A}$ derivierbar und $A \hookrightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots$ eine Auflösung durch einen Komplex azyklischer Objekte $X^i \in \mathcal{A}$, so ist der Komplex X^* bereits selbst entfaltet und der Quasiisomorphismus $A \xrightarrow{\sim} X^*$ induziert Isomorphismen*

$$R F(A) \xrightarrow{\sim} F X^* \quad \text{sowie} \quad R^i F(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i F X^*.$$

Beweis. Jeder Komplex von entfalteten Objekten von \mathcal{A} mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen ist entfaltet, da die entfalteten Komplexe nach 3.3.2 eine volle triangulierte Unterkategorie bilden. Ist A entfaltbar, so kann der Quasiisomorphismus $A \xrightarrow{\sim} X$ zumindest durch eine Entfaltung $X \xrightarrow{\sim} Y$ fortgesetzt werden. Für $n \geq 0$ betrachten wir nun den ab der $(n+1)$ -ten Stelle durch Null fortgesetzten Komplex $X^{\leq n}$ und das ausgezeichnete Dreieck $A \rightarrow X^{\leq n} \rightarrow I$. Da $X^{\leq n}$ entfaltet ist, liefert es ein ausgezeichnetes Dreieck

$$R F(A) \rightarrow F X^{\leq n} \rightarrow R F(I) \xrightarrow{[1]}$$

Aus $I \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{A})$ folgt mit 3.4.4 unmittelbar $R F(I) \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$ und somit induziert $R F(A) \rightarrow F X^{\leq n}$ Isomorphismen auf der Kohomologie in allen Graden

$< n$. Andererseits induziert $R^0F(A) \rightarrow FY$ Isomorphismen auf der Kohomologie in allen Graden und folglich induziert $FX \rightarrow FY$ Isomorphismen auf der Kohomologie in allen Graden und X ist auch entfaltet. \square

3.4.7 (Lange exakte Sequenz der höheren Derivierten). Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Nach 3.4.4 verschwinden auf jedem entfaltbaren Objekt von \mathcal{A} alle negativen Rechtsderivierten. Nach 2.5.4 gehört jede kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ zu einem wohlbestimmten ausgezeichneten Dreieck und führt folglich, wenn denn alle drei Objekte entfaltbar sind, auch in dieser Allgemeinheit zu einer langen exakten Sequenz

$$R^0F(A') \hookrightarrow R^0F(A) \rightarrow R^0F(A'') \rightarrow R^1F(A') \rightarrow R^1F(A) \rightarrow R^1F(A'') \rightarrow \dots$$

Es reicht im übrigen auch schon zu fordern, daß zwei Objekte unserer kurzen exakten Sequenz entfaltbar sind: Dann ist das Dritte nach 3.3.2 notwendig auch entfaltbar. Ist F linksexakt, so zeigt 3.4.5, daß wir in unserer langen exakten Sequenz sogar R^0F durch F ersetzen dürfen.

3.4.8 (Adjunktion derivierter Funktoren auf derivierten Kategorien). Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} abelsche Kategorien und (F, G) ein Paar von adjungierten Funktoren

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$$

So sind LF und RG partiell adjungiert im Sinne von 3.2.16, wir haben also eine explizite Isotransformation

$$\eta_{A,B} : \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, RGB) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{B}}(LFA, B)$$

von Funktoren $\text{Der}(\mathcal{A})_F \times \text{Der}(\mathcal{B})_G \rightarrow \text{Ens}$, die wir wie folgt konstruieren: Gegeben Komplexe $A \in \text{Hot } \mathcal{A}$ und $I \in \text{Hot } \mathcal{B}$ liefert unsere Adjunktion (F, G) ja natürliche Isomorphismen $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, GB) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{B}}(FA, B)$. Unsere Isotransformation ergibt sich damit aus der allgemeinen Diskussion zur Adjunktion derivierter Funktoren in 3.2.15.

Beispiel 3.4.9 (Spezialfall der Garbenkohomologie). Gegeben ein topologischer Raum X und der linksexakte Funktor der globalen Schnitte $\Gamma : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}$ liefert unsere Theorie, da die Kategorie $\text{Ab}_{/X}$ genug Injektive hat, einen rechtsderivierten Funktor $R\Gamma : \text{Der}^+(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Der}^+(\text{Ab})$. Gegeben ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex \mathcal{F} von abelschen Garben setzt man

$$\mathbb{H}^i(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^i(R\Gamma)\mathcal{F}$$

Diese Gruppe heißt die *i*-te **Hyperkohomologie von X mit Koeffizienten in \mathcal{F}** . Besteht der Komplex $\mathcal{F} = \mathcal{G}[0]$ aus einer Garbe \mathcal{G} im Grad Null und Nullen in allen anderen Graden, so erhalten wir unsere Garbenkohomologie zurück, in Formeln gilt also $\mathbb{H}^i(X; \mathcal{G}[0]) = H^i(X; \mathcal{G})$.

3.4.10 (**Grothendieck's Spektralsequenz im Fall derivierter Kategorien**). Seien abelsche Kategorien $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ gegeben und additive Funktoren $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ sowie $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Haben \mathcal{B} und \mathcal{C} genug Injektive, so sind auf den gegen die Pfeile beschränkten derivierten Kategorien jeweils die rechtsderivierten Funktoren definiert. Diese Daten fassen wir zusammen im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hot}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{F} & \text{Hot}^+(\mathcal{C}) & \xrightarrow{G} & \text{Hot}^+(\mathcal{D}) \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 \text{Der}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{RF} & \text{Der}^+(\mathcal{C}) & \xrightarrow{RG} & \text{Der}^+(\mathcal{D})
 \end{array}$$

Andererseits können wir auch den derivierten Funktor der Verknüpfung $R(G \circ F)$ betrachten. Unsere allgemeinen Argumente aus 3.2.13 liefern dann eine wohldefinierte Transformation $R(G \circ F) \Rightarrow RG \circ RF$. Macht unser Funktor F zusätzlich injektive Objekte zu G -azyklischen Objekten, so ist diese Transformation wieder nach 3.2.13 sogar eine Isotransformation

$$R(G \circ F) \xrightarrow{\sim} RG \circ RF$$

3.5 Derivieren homologisch endlicher Funktoren

Definition 3.5.1. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien heißt **homologisch rechtsendlich**, wenn alle $A \in \mathcal{A}$ unter F entfaltbar sind und es eine Schranke N gibt mit $R^i F(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $i > N$. Das Infimum über alle möglichen derartigen Schranken N heißt dann die **homologische Rechtsdimension** unseres Funktors.

3.5.2. Analog definieren wir über den linksderivierten Funktor die Begriffe **homologisch linksendlich** und **homologische Linksdimension**. Meist spricht man kürzer von **homologisch endlichen** Funktoren und ihrer **homologischen Dimension** und überläßt es dem Leser, aus dem Kontext zu erschließen, ob das nun von Links oder von Rechts gemeint sein soll.

Beispiel 3.5.3. Der Nullfunktork hat die homologische Rechtsdimension $-\infty$. Ein linksexakter Funktor ist homologisch rechtsendlich von der homologischen Dimension Null genau dann, wenn er exakt aber nicht der Nullfunktork ist. Gegeben ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist der Funktor der globalen Schnitte $\Gamma : \text{Ab}/I \rightarrow \text{Ab}$ nach ?? homologisch rechtsendlich von der homologischen Dimension $-\infty$ für $I = \emptyset$, von der homologischen Dimension 0 für I einpunktig, und von der homologischen Dimension 1 für I mehrpunktig.

Satz 3.5.4 (Unbeschränktes Derivieren). Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter homologisch rechtsendlicher Funktor zwischen abelschen Kategorien derart, daß sich jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ in ein F -azyklisches Objekt einbetten läßt. So gilt:

1. Es gibt von jedem Komplex einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex von F -azyklischen Objekten;
2. Jeder Komplex von F -azyklischen Objekten ist F -entfaltet;
3. Ist d die homologische Dimension von F , so bildet der derivierte Funktor RF die Unterkategorie $\text{Der}^{\leq n}(\mathcal{A})$ in die Unterkategorie $\text{Der}^{\leq n+d}(\mathcal{B})$ ab.

3.5.5. Der Satz gilt analog und mit demselben Beweis für Familien $F = (F_i)_{i \in I}$ linksexakter Funktoren, die sogar in verschiedenen abelschen Kategorien landen dürfen, also $F_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i$. Wir müssen dazu nur vereinbaren, daß „ F -azyklisch“ zu verstehen ist als „ F_i -azyklisch für alle i “ und müssen die homologische Endlichkeitsbedingung dahingehend verstehen, daß es eine Schranke N gibt, die die homologische Rechtsdimension aller unserer Funktoren F_i beschränkt. Formal mag man das auch folgern, indem man die Aussage des Satzes auf den Funktor $F = (F_i) : \mathcal{A} \rightarrow \prod \mathcal{B}_i$ anwendet.

Beweis. Sei $X = (X^n, d)$ ein Komplex in \mathcal{A} . Wir wählen Injektionen in azyklische Objekte $i^n : X^n \hookrightarrow Z^n$. Die Injektionen $(i^n, i^{n+1}d)^\top : X^n \hookrightarrow Z^n \oplus Z^{n+1}$ bilden eine Kettenabbildung, wenn wir als Differential rechts die Abbildung $(z^n, z^{n+1}) \mapsto (z^{n+1}, 0)$ nehmen. Indem wir den Kokern unserer Kettenabbildung bilden, erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$X \hookrightarrow T \twoheadrightarrow Q$$

mit $T^n = Z^n \oplus Z^{n+1}$. Betrachten wir nun in der Homotopiekategorie das ausgezeichnete Dreieck $\text{Keg}(T \twoheadrightarrow Q) \rightarrow [1]T \rightarrow [1]Q$, so ist klar, daß der offensichtliche Morphismus $[1]X \rightarrow [1]T$ über einen Morphismus $[1]X \rightarrow \text{Keg}(T \twoheadrightarrow Q)$ faktorisiert, dessen Kegel in der derivierten Kategorie Null wird, da er nach dem Oktaederaxiom und 2.5.4 der Kegel über der Identität auf $[1]Q$ ist. Ist nun $r > 0$ fest und verschwinden alle $R^i F(X^n)$ für alle $i > r$ und alle n , so verschwinden für $Y := \text{Keg}(T \twoheadrightarrow Q)$ nach der langen exakten Sequenz unsere $R^i F(Y^n)$ für alle $i \geq r$ und alle n . Induktiv folgt so die erste Aussage. Um die zweite Aussage zu zeigen, sei Z ein Komplex von azyklischen Objekten und $Z \xrightarrow{\sim} X$ ein Quasiisomorphismus. Nach der ersten Aussage können wir ihn verlängern durch einen Quasiisomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ in einen weiteren Komplex von azyklischen Objekten. Es gilt zu zeigen, daß der induzierte Morphismus ein Quasiisomorphismus $FZ \xrightarrow{\sim} FY$ ist. Es gilt durch Übergang zum Kegel in der Homotopiekategorie $K := \text{Keg}(Z \rightarrow Y)$ gleichbedeutend zu zeigen, daß für jeden exakten Komplex K von azyklischen Objekten auch FK azyklisch ist. Nun ist $\ker d^n \hookrightarrow K^n \rightarrow K^{n+1} \rightarrow \dots$ für jedes n eine azyklische Auflösung von $\ker d^n$ und mit 3.4.6 folgt für $i > 0$ sofort $\mathcal{H}^{n+i} FK = R^i F(\ker(d^n))$. Diese Objekte verschwinden jedoch für i oberhalb der homologischen Dimension von F , und da

das für alle n gilt, muß FK ein exakter Komplex sein. Der Beweis der letzten Aussage sei dem Leser überlassen. \square

AB HIER VERLEGEN!

Beispiel 3.5.6. Ist $p : Z \rightarrow Y$ eigentlich und separiert, so ist die kohomologische Dimension des linksexakten Funktors $p_* : \text{Ab}/Z \rightarrow \text{Ab}/Y$ nach ?? das Supremum der kohomologischen Dimensionen von $\Gamma : \text{Ab}/p^{-1}(y) \rightarrow \text{Ab}$ für $y \in Y$. Insbesondere hat nach ?? für jeden Raum X das zur Projektion $\pi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ gehörige direkte Bild $\pi_* : \text{Ab}/X \times [0, 1] \rightarrow \text{Ab}/X$ eine kohomologische Dimension kleinergleich Eins. Mithin ist sein Rechtsderivierter ein auf der ganzen derivierten Kategorie definierter Funktor

$$R\pi_* : \text{Der}(\text{Ab}/X \times [0, 1]) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/X)$$

Nach 3.4.8 ist er rechtsadjungiert zu $\pi^* : \text{Der}(\text{Ab}/X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/X \times [0, 1])$. Nach ?? und ?? wissen wir weiter, daß das Zurückholen $\pi^* : \text{Ab}/X \rightarrow \text{Ab}/X \times [0, 1]$ jede Garbe zu einer π_* -azyklischen Garbe macht und nach 3.5.4 damit jeden Komplex von abelschen Garben zu einem π_* -entfalteten Komplex. Nun ist nach ?? für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$ die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_* \pi^* \mathcal{F}$. Also ist auch für alle Komplexe $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$ die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (R\pi_*)\pi^* \mathcal{F}$$

3.5.7. Ich wüßte gerne, ob für einen zusammenziehbaren Raum Z und seine Projektion π auf einen Punkt pt der Funktor $R\pi_*$ auf allen Komplexen im Bild von π^* definiert ist und dort Analoges gilt. Die Schwierigkeiten beginnen, wenn Ab/Z nicht von endlicher homologischer Dimension ist.

3.6 Garbenazyklische Morphismen

Definition 3.6.1. Eine stetige Abbildung topologischer Räume $f : X \rightarrow Y$ heiße **garbenazyklisch**, wenn für jeden gegen die Pfeile beschränkten Komplex $\mathcal{F} \in \text{Der}^+(\text{Ab}/Y)$ der Morphismus aus der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_* f^* \mathcal{F}$$

liefert. Sie heiße **basisfest garbenazyklisch**, wenn sie unter jedem Basiswechsel eine garbenazyklische Abbildung liefert, wenn also in Formeln für jede stetige Abbildung $Z \rightarrow Y$ die induzierte Abbildung $X \times_Y Z \rightarrow Z$ azyklisch ist. Ein topologischer Raum X heiße **garbenazyklisch** beziehungsweise **basisfest garbenazyklisch**, wenn die konstante Abbildung $X \rightarrow \text{pt}$ die entsprechende Eigenschaft hat.

3.6.2. Ein garbenazyklischer topologischer Raum muß insbesondere zusammenhängend sein und alle seine höheren Kohomologiegruppen in der Garbenkohomologie mit Werten in konstanten Garben müssen verschwinden.

Satz 3.6.3. *Jeder zusammenziehbare Raum ist basisfest garbenazyklisch.*

Ergänzung 3.6.4. Mit etwas mehr Mut zur Logik kann man zeigen, daß es in der Kategorie aller Komplexe von abelschen Garben auf einem gegebenen topologischen Raum von jedem Komplex einen Quasiisomorphismus zu einem homotopieinjektiven Komplex gibt, vergleiche etwa [Spa88, Bek00]. Wenn man das annimmt, zeigt der folgende Beweis für je zwei topologische Räume Z, S mit Z zusammenziehbar, daß für alle $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/S})$ die Einheit der Adjunktion zur Projektion $p : Z \times S \rightarrow S$ ein Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_*p^*\mathcal{F}$ ist.

Beweis. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $b : Y \rightarrow S$ stetige Abbildungen und bezeichne $a = bf$ ihre Verknüpfung. Wir fassen f als einen Morphismus in Top_S auf und a, b spielen die Rolle, die in ?? unsere konstanten Abbildungen $\text{fin}_X, \text{fin}_Y$ auf den Punkt hatten, der hier zu einer allgemeineren Basis S verallgemeinert wird. Für jede abelsche Garbe, ja jeden Komplex $\mathcal{G} \in \text{Der}^+(S)$ erhalten wir aus der Adjunktion $\text{id} \Rightarrow f_*f^*$ einen natürlichen Morphismus

$$f^\# : b_*b^*\mathcal{G} \rightarrow a_*a^*\mathcal{G}$$

Diese Morphismen bilden in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$f^\# : b_*b^* \Rightarrow a_*a^*$$

als die Verknüpfung $b_*b^* \Rightarrow b_*f_*f^*b^* \xrightarrow{\sim} a_*a^*$, wobei die erste Transformation von der Einheit der Adjunktion $\text{id} \Rightarrow f_*f^*$ herkommt und die Zweite von $bf = a$. Sicher gilt $\text{id}^\# = \text{id}$ und $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$ für $g : Y \rightarrow Z$ einen weiteren Morphismus in Top_S . Für $p : X \times [0, 1] \rightarrow X$ ist $p^\#$ eine Isotransformation nach 3.5.6. Für $i_t : X \rightarrow X \times [0, 1], x \mapsto (x, t)$ folgt, daß $i_t^\#$ nicht von t abhängt. Damit ergibt sich

$$f^\# = g^\# : b_*b^* \xrightarrow{\sim} a_*a^*$$

falls $f, g : X \rightarrow Y$ homotop sind über S , falls es also $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ über S gibt mit $f = hi_0$ und $g = hi_1$. Ist insbesondere Z zusammenziehbar, so ist $p : Z \times S \rightarrow S$ eine „Homotopieäquivalenz über S “ und es folgt sofort, daß $p^\#$ alias die Einheit der Adjunktion eine Isotransformation $\text{id} \xrightarrow{\sim} p_*p^*$ ist. \square

3.6.5 (Permanenzeigenschaften garbenazyklischer Abbildungen). Jede Verknüpfung garbenazyklischer Abbildungen ist garbenazyklisch. Ist $g \circ f$ garbenazyklisch und f garbenazyklisch, so ist auch g garbenazyklisch. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und besitzt Y eine Überdeckung durch offene Teilmengen $U \subseteq Y$ derart,

daß $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jeweils garbenazyklisch ist, so ist schon $f : X \rightarrow Y$ selbst garbenazyklisch. Insbesondere ist jedes Faserbündel mit basisfest garbenazyklischer Faser basisfest garbenazyklisch.

Definition 3.6.6. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Wir sagen, $\mathcal{F} \in \text{Der}(X)$ **kommt her von** Y , wenn es $\mathcal{G} \in \text{Der}(Y)$ gibt mit $\mathcal{F} \cong f^*\mathcal{G}$.

Lemma 3.6.7. Seien $f : X \rightarrow Y$ garbenazyklisch und $\mathcal{F} \in \text{Der}^+(X)$ ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex. So sind gleichbedeutend:

1. \mathcal{F} kommt her von Y ;
2. Die kanonische Abbildung aus der Adjunktion liefert einen Isomorphismus $f^*f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$;
3. Es gibt eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(Y)$ von Y derart, daß für alle $U \in \mathcal{U}$ die Einschränkung $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}$ von U herkommt.

Beweis. Die Definition garbenazyklischer Abbildungen und formale Eigenschaften adjungierter Funktoren nach [TF] 4.4.9 liefern $1 \Leftrightarrow 2$. Formulieren wir 3 um vermittels dieser Erkenntnis, so erhalten wir auch $2 \Leftrightarrow 3$. \square

3.7 Totalkomplexe und deren Exaktheit

Definition 3.7.1. Gegeben ein Doppelkomplex $A = (A^{p,q})$ von abelschen Gruppen mit Differentialen $\partial : A^{p,q} \rightarrow A^{p+1,q}$ und $\delta : A^{p,q} \rightarrow A^{p,q+1}$ derart, daß an jeder Stelle gilt $\delta\partial = \partial\delta$, bilden wir vier Komplexe, deren homogene Komponenten gegeben werden durch

$$\begin{aligned} (\text{tot}^{\oplus\oplus} A)^n &= \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q} && \text{für das **Summentotal**,} \\ (\text{tot}^{\pi\pi} A)^n &= \prod_{p+q=n} A^{p,q} && \text{für das **Produkttotal** sowie} \\ (\text{tot}^{\oplus\pi} A)^n &= \bigoplus_{p < 0} A^{p,q} \oplus \prod_{p \geq 0} A^{p,q} && \text{für das **Summenprodukttotal**,} \\ (\text{tot}^{\pi\oplus} A)^n &= \prod_{p < 0} A^{p,q} \oplus \bigoplus_{p \geq 0} A^{p,q} && \text{für das **Produktsummentotal**.} \end{aligned}$$

Das Symbol $\text{tot}^{\pi\oplus}$ soll zum Beispiel andeuten, daß auf den Diagonalen $p + q = n$ „in Richtung fallender erster Indizes das Produkt zu nehmen ist, in Richtung wachsender erster Indizes jedoch die direkte Summe“. Die Differentiale werden alle gegeben durch $da = \partial a + (-1)^p \delta a$ für $a \in A^{p,q}$ und die offensichtlichen Erweiterungen dieser Regel.

3.7.2. In der Literatur wird meist nur das Summentotal betrachtet und heißt der **Totalkomplex**. Wir denken uns meist den ersten Index p nach rechts und den zweiten Index q nach oben aufgetragen.

Lemma 3.7.3 (Exaktheitskriterien für Totalkomplexe). *Wir denken uns in der Formulierung dieses Lemmas Doppelkomplexe mit Differentialen nach oben und rechts, und zwar soll der erste Index nach rechts wachsen und der zweite Index nach oben.*

1. *Gegeben ein Doppelkomplex von abelschen Gruppen mit exakten Zeilen ist das Produktsummentotal exakt;*
2. *Sind zusätzlich die Zeilen aus der Kohomologie der Spaltenkomplexe alle exakt, so ist auch das Summenprodukttotal exakt;*
3. *Sind zusätzlich sogar die Kerne oder gleichbedeutend die Bilder der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen alle exakt, so sind auch das Summentotal und das Produkttotal exakt.*

3.7.4. Dies Lemma verallgemeinert ?? und ?. Beim Beweis von Teil 3 folgt die Aussage über das Summentotal leicht aus Teil 1, wohingegen die Aussage über das Produkttotal Teil 2 benötigt.

3.7.5. Dieses Lemma gilt im allgemeinen nicht mehr für Doppelkomplexe von Objekten aus beliebigen abelschen Kategorien anstelle von abelschen Gruppen. Ich würde gerne genauer, inwieweit seine Aussagen aus allgemeinen Sätzen über Spektralsequenzen folgen. Die Forderungen in Teil 1 und 3 implizieren übrigens die Forderung in Teil 2, denn mit den Kernen der Morphismen der Zeilenkomplexe und den Zeilenkomplexen selber sind auch die Bilder der Morphismen der Zeilenkomplexe exakt und dann auch die Zeilen aus den Quotienten der Kerne nach den Bildern.

Beweis. Es reicht jeweils zu zeigen, daß jeder Nullzykel ein Rand ist. So ein Nullzykel ist eine Folge von Elementen $\dots, a_{-1}, a_0, a_1 \dots$ mit $a_i \in A^{i, -i}$ und $\partial a_i + (-1)^{i+1} \delta a_{i+1} = 0$ für alle i , von der je nach dem behandelten Fall noch die eine oder andere Art von Verschwinden gefordert wird. Gesucht ist eine Folge $\dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots$ von Elementen $b_i \in A^{i, -i-1}$ mit derselben Art des Verschwindens und mit $a_i = \partial b_{i-1} + (-1)^i \delta b_i$ für alle i . Zunächst einmal säubern wir dies Problem von Vorzeichen. Ändern wir genauer unsere Folge ab zu

$$\dots, a_0, a_1, -a_2, -a_3, a_4, a_5, -a_6, -a_7, \dots$$

so lautet die Bedingung an unsere neue Folge $\dots, c_0, c_1, c_2, \dots$ einfacher $\partial c_i = \delta c_{i+1}$ und gesucht ist eine Folge $\dots, d_0, d_1, d_2, \dots$ mit $c_i = \partial d_{i-1} + \delta d_i$ für alle i , aus der wir dann die ursprünglich gesuchte Folge der b_i durch geeignete Vorzeichenänderungen erhalten als $\dots, d_0, -d_1, -d_2, d_3, d_4, -d_5, -d_6, \dots$. Jetzt behandeln wir die verschiedenen Fälle der Reihe nach. Ist (A, ∂, δ) unser Doppelkomplex, so behauptet Teil 1 in Formeln

$$\mathcal{H}(A, \partial) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}(\text{tot}^{\pi^{\oplus}} A) = 0$$

Wie oben erklärt können wir ausgehen von einer Familie $\dots, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots$ mit $c_i \in A^{i,-i}$ und $c_i = 0$ für $i \gg 0$ sowie $\partial c_i = \delta c_{i+1}$ für alle i . Der Einfachheit halber nehmen wir für die weitere Argumentation an, es gälte bereits $c_i = 0$ für $i > 0$. Dann folgt $\partial c_0 = 0$ und nach Annahme finden wir $d_0 \in A^{-1,0}$ mit $\partial d_0 = c_0$. Es folgt

$$\partial c_{-1} = \delta c_0 = \delta \partial d_0 = \partial \delta d_0,$$

also $\partial(\delta d_0 - c_{-1}) = 0$. Also gibt es $d_{-1} \in A^{-2,1}$ mit $\partial d_{-1} = \delta d_0 - c_{-1}$ oder $c_{-1} = \delta d_0 - \partial d_{-1}$. Indem wir so „die Treppe hinaufgehen“ finden wir eine Folge $(\dots, d_{-1}, d_0, 0, 0, \dots)$ wie gewünscht und Teil 1 ist erledigt. Jetzt folgern wir erst einmal die Aussage von Teil 3 für das Summentotal. Sind die Kerne der Morphismen zwischen den Zeilenkomplexen exakt, so können wir die Erkenntnis aus Teil 1 ja anwenden auf die Doppelkomplexe, die entstehen durch Ersetzen einer Zeile durch den Kernkomplex zum Morphismus in die darüberliegende Zeile und Ersetzen der höheren Zeilen durch Null. Das Summentotal ist dann exakt als der filtrierende Kolimes der Summentotalen dieser Teilkomplexe, die in dem von uns bereits behandelten Rahmen liegen. Jetzt diskutieren wir Teil 2. Er behauptet in Formeln

$$\mathcal{H}(A, \partial) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}(\text{tot}^{\oplus \pi} A) = 0$$

unter der zusätzlichen Annahme, daß die aus der Spaltenkohomologie gebildeten Zeilen exakt sind. Wie oben erklärt, können wir auch hier wieder ausgehen von einer Familie $\dots, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots$ mit $c_i \in A^{i,-i}$ und $c_i = 0$ für $i \ll 0$ sowie $\partial c_i = \delta c_{i+1}$ für alle i . Der Einfachheit halber nehmen wir für die weitere Argumentation an, es gälte bereits $c_i = 0$ für $i < 0$. Wir beginnen unsere Argumentation mit der Erkenntnis $\delta c_0 = 0$. Wegen $\partial c_0 = \delta c_1$ geht der δ -Zykel c_0 unter ∂ auf die Null der δ -Kohomologie, also gibt es einen δ -Zykel $z_{-1} \in A^{-1,0}$ und $e_0 \in A^{0,-1}$ mit $\partial z_{-1} + \delta e_0 = c_0$. Dann haben wir $\delta(c_1 - \partial e_0) = 0$ und $\partial(c_1 - \partial e_0) = \delta c_2$, also ist $c_1 - \partial e_0$ ein δ -Zykel, dessen δ -Kohomologiekategorie unter ∂ nach Null geht, also ist er bis auf einen δ -Rand das ∂ -Bild eines δ -Zykels, d.h. es gilt

$$c_1 - \partial e_0 = \partial z_0 + \delta e_1$$

für einen δ -Zykel $z_0 \in A^{0,-1}$ und $e_1 \in A^{1,-2}$. Wir haben also

$$\begin{aligned} \delta(z_{-1} + 0) &= 0 \\ \partial(z_{-1} + 0) + \delta(z_0 + e_0) &= c_0 \\ \partial(z_0 + e_0) &= c_1 - \delta e_1 \end{aligned}$$

Nun folgt $\delta(c_2 - \partial e_1) = \delta(c_1 - \delta e_1) = \delta^2(z_0 + e_0) = 0$, womit $c_2 - \partial e_1$ ein δ -Zykel ist, der wegen $\partial(c_2 - \partial e_1) = \delta c_3$ bis auf δ -Rand von einem δ -Zykel $z_1 \in A^{1,-2}$ herkommt, also $c_2 - \partial e_1 = \partial z_1 + \delta e_2$. Wir haben also

$$\begin{aligned} \partial(z_0 + e_0) + \delta(z_1 + e_1) &= c_1 \\ \partial(z_1 + e_1) &= c_2 - \delta e_2 \end{aligned}$$

und indem wir so „die Treppe heruntergehen“ finden wir auch hier wieder eine Folge $(\dots, 0, z_{-1}, z_0 + e_0, z_1 + e_1, \dots)$ wie gewünscht. Schließlich besprechen wir noch Teil 3 für das Produkttotal. Dazu betrachten wir die Doppelkomplexe, die entstehen durch Ersetzen einer Zeile durch den Bildkomplex zum Morphismus in die nächsthöhere Zeile und Ersetzen aller Zeilen darunter durch Null. Das Produkttotal ist dann exakt nach [TS] 7.1.42 als der inverse Limes über das surjektive inverse System der Produkttotalen dieser Quotientenkomplexe, die in dem von uns in Teil 2 bereits behandelten Rahmen liegen. \square

3.8 Derivieren von Tensor und Hom

Definition 3.8.1. Die **Torsionsdimension** eines Rings k erklären wir als das Supremum aller $q \in \mathbb{N}$ derart, daß es einen k -Rechtsmodul M und einen k -Linksmodul N gibt mit $\mathrm{Tor}_q^k(M, N) = 0$. Wir sagen, ein Ring k habe **endliche Torsionsdimension**, wenn seine Torsionsdimension nicht ∞ ist. Der Nullring hat Torsionsdimension $-\infty$ und hat insbesondere in unseren Konventionen auch endliche Torsionsdimension.

Lemma 3.8.2 (Deriviertes Tensorprodukt). *Sei k ein Ring von endlicher Torsionsdimension. So gilt:*

1. Der Funktor $\otimes_k : \mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}\text{-}k) \times \mathrm{Hot}(k\text{-}\mathrm{Mod}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ besitzt einen zahmen Linksderivierten

$$\otimes_k^L : \mathrm{Der}(\mathrm{Mod}\text{-}k) \times \mathrm{Der}(k\text{-}\mathrm{Mod}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$$

2. Gegeben ein Komplex von k -Moduln $Y \in \mathrm{Hot}(k\text{-}\mathrm{Mod})$ besitzt der Funktor $(\otimes_k Y) : \mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}\text{-}k) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ ebenfalls einen zahmen Linksderivierten $L(\otimes_k Y) : \mathrm{Der}(\mathrm{Mod}\text{-}k) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ und der natürliche Morphismus vom größeren Limes zum kleineren Limes ist stets ein Isomorphismus

$$X \otimes_k^L Y \xrightarrow{\sim} (L(\otimes_k Y))(X)$$

Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor;

3. Alle Paare von Komplexen, bei denen einer der beiden Komplexe aus flachen Moduln besteht, sind bereits entfaltet.

3.8.3. Bis auf die letzte Aussage gilt das ganz allgemein für beliebige Ringe k , vergleiche [Spa88]. Allerdings kenne ich in dieser Allgemeinheit keinen so einfachen Beweis. Daß alle Paare unbeschränkter Komplexe flacher Moduln für \otimes entfaltet sind, ist dahingegen für allgemeine Ringe nicht mehr richtig. So gilt es etwa nicht für den Ring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3.8.4. Meines Erachtens ist dieses Lemma eine ganz wesentliche Motivation für den Aufbau des Formalismus der derivierten Kategorien. In der Tat zeigt es einen Weg, auf dem das derivierte Tensorprodukt von Garben unter geeigneten Annahmen sinnvoll definiert werden kann, obwohl es in Kategorien von Garben im allgemeinen nicht genug projektive Objekte gibt.

Beweis. Nach 3.5.5 gibt es für jeden Komplex C von k -Rechtsmoduln einen Quasiisomorphismus $F \xrightarrow{\sim} C$, der von einem Komplex von flachen Moduln ausgeht. Es reicht nun zu zeigen, daß gegeben ein Quasiisomorphismus $G \xrightarrow{\sim} F$ von Komplexen flacher k -Rechtsmoduln und ein beliebiger Komplex Y von k -Moduln die induzierte Abbildung ein Quasiisomorphismus $G \otimes_k Y \xrightarrow{\sim} F \otimes_k Y$ ist. Indem wir von unserem Quasiisomorphismus $G \xrightarrow{\sim} F$ den Kegel E bilden, reicht es zu zeigen, daß das Tensorprodukt eines exakten Komplexes flacher Moduln E mit einem beliebigen Komplex Y exakt ist. Der Tensorkomplex ist per definitionem der Totalkomplex eines Doppelkomplexes $E^p \otimes_k Y^q$. Nun sind nach 3.5.4 die Zeilenkomplexe dieses Doppelkomplexes für jedes q exakt, und dasselbe gilt für die Bilder der Kettenabbildungen zwischen den Zeilenkomplexen. Also ist nach 3.7.3.3 das Summentotal alias der Tensorproduktkomplex exakt. \square

Lemma 3.8.5 (Derivierter Homomorphismenkomplex). *Sei k ein Ring, dessen Kategorie von Linksmoduln **endliche homologische Dimension** hat. So gilt:*

1. *Der Funktor $\mathrm{Hom}_k : \mathrm{Hot}(k\text{-Mod})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Hot}(k\text{-Mod}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ besitzt einen zahmen Rechtsderivierten*

$$\mathrm{RHom}_k : \mathrm{Der}(k\text{-Mod})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Der}(k\text{-Mod}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$$

2. *Gegeben ein Komplex von k -Moduln $X \in \mathrm{Hot}(k\text{-Mod})$ besitzt der Funktor $\mathrm{Hom}_k(X, _) : \mathrm{Hot}(k\text{-Mod}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ ebenfalls einen zahmen Rechtsderivierten $\mathrm{R}(\mathrm{Hom}_k(X, _)) : \mathrm{Der}(k\text{-Mod}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ und der natürliche Morphismus vom kleineren Kolimes zum größeren Kolimes ist stets ein Isomorphismus*

$$\mathrm{R}(\mathrm{Hom}_k(X, _))(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_k(X, Y)$$

3. *Gegeben ein Komplex von k -Moduln $Y \in \mathrm{Hot}(k\text{-Mod})$ besitzt der Funktor $\mathrm{Hom}_k(_ , Y) : \mathrm{Hot}(k\text{-Mod})^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ ebenfalls einen zahmen Rechtsderivierten $\mathrm{R}(\mathrm{Hom}_k(_ , Y)) : \mathrm{Der}(k\text{-Mod})^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ und der natürliche Morphismus vom kleineren Kolimes zum größeren Kolimes ist stets ein Isomorphismus*

$$\mathrm{R}(\mathrm{Hom}_k(_ , Y))(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_k(X, Y)$$

4. Alle Paare von Komplexen, bei denen der Erste aus projektiven Moduln oder der Zweite aus injektiven Moduln besteht, sind bereits entfaltet.

3.8.6. Die Existenz eines Derivierten gilt ganz allgemein für beliebige Ringe k , vergleiche [Spa88]. Allerdings kenne ich in dieser Allgemeinheit keinen so einfachen Beweis. Daß alle Paare wie im letzten Punkt für Hom_k entfaltet sind, ist dahingegen für allgemeine Ringe nicht mehr richtig. So gilt es etwa nicht für den Ring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3.8.7. Ist k ein kommutativer Ring, so meinen wir mit RHom_k meist den Rechtsderivierten von $\text{Hom}_k : \text{Hot}(k\text{-Mod})^{\text{opp}} \times \text{Hot}(k\text{-Mod}) \rightarrow \text{Der}(k\text{-Mod})$, der offensichtlich unter Vergessen der k -Operation genau unseren Funktor RHom_k aus dem Lemma liefert.

Beweis. Nach 3.5.4 gibt es für jeden Komplex X von k -Moduln einen Quasiisomorphismus $P \xrightarrow{\sim} X$, der von einem Komplex von projektiven Moduln ausgeht. Es gilt zu zeigen, daß für jeden Quasiisomorphismus $Q \xrightarrow{\sim} P$, der ebenfalls von einem Komplex von projektiven Moduln ausgeht, und jeden beliebigen Komplex Y die induzierte Abbildung ein Quasiisomorphismus

$$\text{Hom}_k(P, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(Q, Y)$$

ist. Indem wir zum Kegel C über $Q \rightarrow P$ übergehen, müssen wir nur zeigen, daß für jeden exakten Komplex C projektiver Moduln auch der Komplex $\text{Hom}_k(C, Y)$ exakt ist. Er ist nun das Produkttotal des Doppelkomplexes $\text{Hom}_k(C^{-p}, Y^q)$ und nach 3.5.4 ist darin für jedes q die entsprechende Zeile exakt und auch die Bilder der Zeilenkomplexe sind exakt. Mithin ist auch das Produkttotal exakt nach 3.7.3.3. In der anderen Variablen argumentieren wir analog. \square

Übungen

Übung 3.8.8. Man zeige: Gegeben ein Kring k endlicher homologischer Dimension und $X \in \text{Der}(k\text{-Mod})$ ist $\otimes_k^L X$ linksadjungiert zu $\text{RHom}_k(X, _)$.

Übung 3.8.9. Gegeben eine abelsche Kategorie \mathcal{A} erhalten wir für alle Objekte $X, Y \in \text{Hot}_{\mathcal{A}}$, für die der zahme Rechtsderivierte $\text{RHom}_{\mathcal{A}}$ des Funktors $\text{Hom}_{\mathcal{A}} : \text{Hot}_{\mathcal{A}}^{\text{opp}} \times \text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$ definiert ist, einen natürlichen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathcal{H}^0 \text{RHom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

im Kolimes der Isomorphismen $\mathcal{H}^0 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}(P, Y)$ aus [TS] 1.4.10 über alle Quasiisomorphismen $P \xrightarrow{\sim} X$.

4 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich vielen, insbesondere Olaf Schnürer und Bernhard Link. Der Inhalt geht im wesentlichen zurück auf Grothendieck und Deligne, [Gro72]. Sehr nützlich waren mir die Darstellungen von Godement [] und Kashiwara-Shapira [] und Skripten von Milicic und Hörmann zu derivierten Kategorien. Hilfreich waren auch die Texte des Stacks-Projektes.

Literatur

- [AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie*;
- [Bek00] Tibor Beke, *Sheafifiable homotopy model categories*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **129** (2000), no. 3, 447–475.
- [Bor94] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra 1-3*, Encyclopaedia of Mathematics, Cambridge University Press, 1994.
- [Gro72] Alexander Grothendieck, *SGA 4*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer, 1972.
- [GZ67] Peter Gabriel and Michel Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, 1967.
- [KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie*;
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren, vol. 292, Springer, 1990.
- [LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*;
- [Spa88] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Math. **65** (1988), no. 2, 121–154.
- [TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*;
- [TG] *Skriptum Garbenkohomologie*;
- [TS] *Skriptum Singuläre Homologie*;

Index

- $\langle \rangle = \langle \rangle_{\Delta}$ trianguliertes Erzeugnis, 23
- $\langle \rangle = \langle \rangle_{\Delta \ominus}$ Verdier-Erzeugnis, 23
- $\xrightarrow{\sim}$
 - Isomorphismus in Der , 33
- $\mathcal{C} | S^{-1}$ Lokalisierung einer Kategorie, 4
- \mathcal{N}^{\perp} relativ Injektive, 40
- $\tilde{\mathcal{K}}$ Pfadkategorie von \mathcal{K} , 3
- ${}^{\perp}\mathcal{N}$ relativ Projektive, 40
- Abbildungskegel
 - in triangulierter Kategorie, 15
- Abschneidefunktoren, 37
- Adjunktion
 - partielle, 66
- Anfangspunkt, 3
- antiausgezeichnetes Dreieck, 16
- ausgezeichnet
 - Dreieck, 16
- azyklisch
 - Objekt, 69
- basisfest
 - garbenazyklisch, 74
- biadditiv
 - Funktor, 28
- Bild
 - wesentliches, 40
- Brüche, 9
- $\text{c\^o}l$ Kolimes in Funktorkategorie, 59
- $\text{c\^o}l$ filtrierender Kolimes in Funktorkategorie, 59
- déployé, 63
- dérivable, 64
- Der , 33
- $\text{Der}^{\#}$ für $\# \in \{+, -, b\}$, 36, 37
- $\text{Der}_A = \text{Der}(A\text{-Mod})$, 34
- derivierte Kategorie, 33
- derivierte Kategorie der dg-Moduln, 34
- Derivierter Funktor
 - zahmer, 64
- derivierter Funktor $R^i F$, 69
- derivierter Funktor RF , 69
- dévissage, 24
- dg-Ringoid, 55
- dgDer, 34
- dgFrei, 25
- dgPer, 25
- differentiell
 - graduierter Modul, über Ringoid, 55
 - graduiertes Ringoid, 55
- Dimension
 - homologische, 35
- direkter Limes
 - \mathbb{N} -direkter Limes, 47
- distingué
 - triangle, 16
- distinguished
 - triangle, 16
- Doppelkomplexfunktor, 26
- Dreieck, 15
 - ausgezeichnetes, 16
- Ecken, 3
- endazyklisch, 51, 55
- endlich
 - Torsionsdimension, 79
- Endpunkt, 3
- entfaltbar, 64
 - Objekt, 69
- entfaltet, 63
- épaisse
 - souscatégorie, 23
- erblich
 - abelsche Kategorie, 35

erzeugt
 Verdiersystem, 23
essentiell konstant, 61

Filtrierung
 angeordnete, 48
freie triangulierte Kategorie, 25

garbenzyklisch
 basisfest, 74
 stetige Abbildung, 74
 topologischer Raum, 74
gesättigt
 multiplikatives System, 13

 \mathbb{H}^i Hyperkohomologie, 71
halbeinfach
 abelsche Kategorie, 35
halbkippender Komplex, 52
hdim homologische Dimension, 35
hocol Homotopiekolimes, 8
homologische Dimension, 35
 endliche, 35
Homomorphismus
 von Ringoiden, 53
homotopieinjektiv, 40, 44
Homotopiekolimes, 8
homotopieprojektiv, 40, 44
 Hot^+ , 36
 Hot^- , 36
 Hot^b , 36
Hyperkohomologie, 71

 $i\mathcal{A}$ Injektive von \mathcal{A} , 41
Idempotente
 ausgezeichnete, 54
 $\text{ind}(\mathcal{C})$ Ind-Objekte, 60
Ind-Objekt, 60
Indkolimes, 59
injektiv
 \mathcal{N} -injektiv, 40
injektive Auflösung, 42

Kategorie
 triangulierte, 15
Kippfamilie, 56
Kippfunktorkomplex, 52
Kippobjekt, 52
Köcher, 3
 \mathcal{U} -kleiner, 58
 \mathcal{U} -Köcher, 3
Kürzen, 9

 \lim Limes in Funktorkategorie, 59
 \varinjlim Kolimes in Funktorkategorie, 59
“ \varinjlim ”, 59
“ \varprojlim ”, 59
 \varinjlim kofiltrierender Limes in Funktorkategorie, 59
Links-Ore-System, 9
linksaflösend, 45
linksderiviert
 Funktorkomplex, 65
Lokalisierung
 einer Kategorie, 4
Lokalisierungsfunktorkomplex, 5

Modul
 eines Ringoids, 54
Morphismus von Dreiecken, 15
Multiplikation
 bei Ringoiden, 54
multiplikativ
 in Kategorie, 8

nichtnegativ erweiternd, 26
Nullkategorie, 35
Nullsystem, 23

objekt basculant, 52
Oktaederaxiom, 16
opponiert
 triangulierte Kategorie, 21
Ore-Bedingung, 9

Ore-Lokalisierung, 11
 Ore-System, 9
 $p\mathcal{A}$ Projektive von \mathcal{A} , 41
 partiell
 Adjunktion, 66
 perfekt
 Komplex, 25
 triangulierte Kategorie, 25
 Pfad
 in Köcher, 3
 Pfadkategorie, 3
 Pfeile, 3
 $\text{pro}(\mathcal{C})$ Pro-Objekte, 60
 Pro-Objekt, 60
 Produktsummentotal, 76
 Produkttotal, 76
 projektiv
 \mathcal{N} -projektiv, 40
 Prolimes, 59
 Quotient
 von triangulierter Kategorie, 30
 Quotientenfunktor
 triangulierter, 31

 Rechts-Ore-System, 8
 Rechtsbrüche, 9
 rechtsderiviert
 Funktor, 63
 Rechtsdimension
 homologische, 72
 rechtsendlich
 homologisch, 72
 RF Rechtsderivierter Funktor von F , 64
 Ringoid, 53
 differentielles graduiertes, 55
 opponiertes, 53
 über Menge, 53

 Spektralsequenz
 ausgeartete unbeschränkte, 77

 Summenprodukttotal, 76
 Summentotal, 76
 System
 trianguliertes, 23

 $\tau^{\leq n}, \tau^{< n}, \tau^{\geq n}, \tau^{> n}$ Abschneidefunktionen,
 37
 tilting object, 52
 Torsionsdimension, 79
 Totalkomplex, 76
 $\text{Trans}^{\mathbb{Z}}$ verträgliche Transformationen,
 14
 Transformation
 verträgliche
 von \mathbb{Z} -Funktoeren, 14
 triangle
 distingué, 16
 distinguished, 16
 trianguliert
 Funktor, 22
 Kategorie, 15
 Kategorie, opponierte, 21
 System, 23

 \mathcal{U} -kleiner Köcher, 58

 Verdiersystem, 23
 verträglich
 Transformation von \mathbb{Z} -Funktoeren, 14
 verträgliche Adjunktion, 14
 volllicht
 Funktor, 5

 wesentlich
 Bild, 40

 \mathbb{Z} -Funktor, 14
 \mathbb{Z} -Kategorie, 14
 \mathbb{Z} -Struktur, 14