

# Derivierte Kategorien und Funktoren

Wolfgang Soergel

22. Januar 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lokalisierung von Kategorien</b>	<b>3</b>
1.1	Die Pfadkategorie eines Köchers . . . . .	3
1.2	Lokalisierung von Kategorien . . . . .	4
1.3	Lokalisierung unter Ore-Bedingungen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Derivierte Kategorien</b>	<b>14</b>
2.1	Triangulierte Kategorien . . . . .	14
2.2	Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien . . . . .	21
2.3	Quotienten triangulierter Kategorien . . . . .	24
2.4	Derivierte Kategorien . . . . .	27
2.5	Vergleich verschiedener Kohomologieringe* . . . . .	33
2.6	Beschränkte derivierte Kategorien . . . . .	35
2.7	Die Gysinsequenz . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Derivierte Funktoren</b>	<b>41</b>
3.1	Limites in Funktorkategorien . . . . .	41
3.2	Derivierte Funktoren auf Ore-Lokalisierungen . . . . .	45
3.3	Derivierte Funktoren auf triangulierten Kategorien . . . . .	51
3.4	Derivierte Funktoren auf derivierten Kategorien . . . . .	53
3.5	Derivieren homologisch endlicher Funktoren . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Danksagung</b>	<b>61</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>62</b>
	<b>Index</b>	<b>63</b>

# 1 Lokalisierung von Kategorien

## 1.1 Die Pfadkategorie eines Köchers

1.1.1. Ich erinnere an die Begriffswelt der Köcher aus [LA2] 8.5. Ein **Köcher** ist ein Datum  $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$  bestehend aus zwei Mengen  $P, E$  und zwei Abbildungen  $a, e : P \rightarrow E$ . Wir nennen die Elemente von  $E$  die **Ecken** des Köchers und die Elemente von  $P$  seine **Pfeile**. Für einen Pfeil  $p \in P$  nennen wir  $a(p)$  seinen **Anfangspunkt** und  $e(p)$  seinen **Endpunkt**.

**Definition 1.1.2.** Gegeben ein Köcher  $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$  bilden wir seine **Pfadkategorie**  $\tilde{\mathcal{K}}$  wie folgt: Als Objekte nehmen wir die Ecken  $\text{Ob } \tilde{\mathcal{K}} := E$  des Köchers, als Menge von Morphismen von einer Ecke  $x$  in eine weitere Ecke  $y$  die Menge aller Folgen von Pfeilen  $p_1, \dots, p_n$  mit  $a(p_1) = x, e(p_n) = y$  und  $e(p_i) = a(p_{i+1})$  für  $1 \leq i < n$ , disjunkt vereinigt mit einem weiteren Element  $\text{Id}_x$  im Fall  $y = x$ . Die Verknüpfung ist das „Aneinanderhängen“, unsere Folge wäre also die Verknüpfung  $p_n \circ \dots \circ p_1 \in \tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ . Wir nennen die Morphismen in der Pfadkategorie  $\tilde{\mathcal{K}}$  die **Pfade** in unserem Köcher.

*Beispiel 1.1.3.* Gegeben ein Köcher  $\mathcal{K}$  mit nur einer Ecke ist seine Pfadkategorie die Ein-Objekt-Kategorie nach [LA2] 8.1.5 zum freien Monoid über der Menge  $P$  seiner Pfeile nach [TF] ???. Wir haben also in unseren Notationen einen natürlichen Isomorphismus von Kategorien  $[\text{Mon} \leftarrow P] \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{K}}$ .

1.1.4. Der offensichtliche Köchermorphismus von einem Köcher in seine Pfadkategorie  $\text{can} : \mathcal{K} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$  hat die folgende **universelle Eigenschaft**: Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Morphismus von Köchern, so gibt es genau einen Funktor  $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $\tilde{\varphi} \circ \text{can} = \varphi$ . Ist  $\mathcal{K}$  ein Köcher und  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so definiert die Restriktion sogar einen Isomorphismus von Kategorien  $\text{Cat}(\tilde{\mathcal{K}}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Car}(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ . Hier machen wir beide Seiten dadurch zu Kategorien, daß wir als Morphismen die Transformationen nehmen. In anderen Worten ist das Bilden der Pfadkategorie  $\text{Car} \rightarrow \text{Cat}$  der Linksadjungierte zum Vergessen der Verknüpfung  $\text{Cat} \rightarrow \text{Car}$ .

**Definition 1.1.5.** Gegeben eine Menge  $\mathcal{U}$  verstehen wir unter einem  **$\mathcal{U}$ -Köcher** einen Köcher  $\mathcal{K}$  derart, daß die Menge seiner Ecken eine Teilmenge von  $\mathcal{U}$  ist und die Menge aller Pfeile zwischen je zwei vorgegebenen Ecken ein Element von  $\mathcal{U}$ .

1.1.6. Eine  $\mathcal{U}$ -Kategorie im Sinne von [LA2] 8.9.1 ist damit dasselbe wie eine Kategorie, deren zugrundeliegender Köcher ein  $\mathcal{U}$ -Köcher ist.

*Ergänzung 1.1.7.* Gegeben eine Menge  $\mathcal{U}$  und ein Universum  $\mathfrak{V}$  mit  $\mathcal{U} \in \mathfrak{V}$  ist für jeden  $\mathcal{U}$ -Köcher seine Pfadkategorie eine  $\mathfrak{V}$ -Kategorie.

## 1.2 Lokalisierung von Kategorien

**Satz 1.2.1 (Lokalisierung von Kategorien).** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  eine Menge von Morphismen in  $\mathcal{C}$ . So gibt es ein Paar  $(\mathcal{C}_S, \text{can})$  bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{C}_S$  mitsamt einem Funktor  $\text{can} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  derart, daß gilt:

1. Jeder Morphismus aus  $S$  wird unter  $\text{can}$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{C}_S$ ;
2. Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  irgendein Funktor, der alle Morphismen aus  $S$  zu Isomorphismen macht, so gibt es genau einen Funktor  $\tilde{F} : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $F = \tilde{F} \circ \text{can}$ .

1.2.2. Natürlich ist ein derartiges Paar  $(\mathcal{C}_S, \text{can})$  in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir erlauben uns deshalb den bestimmten Artikel und nennen es die **Lokalisierung von  $\mathcal{C}$  an  $S$** . Manchmal verwenden wir auch die ausführlicheren Notationen  $\mathcal{C}_S = S^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{C}[S^{-1}]$ .

*Ergänzung 1.2.3.* Sind  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}$  Universen, so liefert unsere Konstruktion genauer für jede Menge von Morphismen  $S$  einer  $\mathfrak{U}$ -Kategorie  $\mathcal{C}$  als Lokalisierung eine  $\mathfrak{A}$ -Kategorie  $\mathcal{C}_S$ .

1.2.4 (**Herkunft der Terminologie**). Der Begriff der Lokalisierung kommt aus der Ringtheorie, in der man das formale Einführen von Inversen aus geometrischen Gründen als Lokalisierung bezeichnet, vergleiche [KAG] 3.3.4. Mehr zur Kategorientheorie findet man in [Bor94].

1.2.5 (**Lokalisierung von Monoiden als Spezialfall**). Man kann insbesondere zu jedem Paar  $G \supset S$  bestehend aus einem Monoid mit einer Teilmenge ein weiteres Monoid  $S^{-1}G$  mit einem Monoidhomomorphismus  $G \rightarrow S^{-1}G$  konstruieren derart, daß alle Elemente von  $S$  unter diesem Morphismus invertierbar werden und daß jeder Monoidhomomorphismus  $G \rightarrow H$ , unter dem alle Elemente von  $S$  invertierbar werden, auf genau eine Weise über  $G \rightarrow S^{-1}G$  faktorisiert. Die Ein-Objekt-Kategorie  $[S^{-1}G]$  ist in diesem Fall genau die Lokalisierung  $[G]_S$  der Ein-Objekt-Kategorie zu  $G$ .

*Beweis.* Wir vergrößern den unserer Kategorie  $\mathcal{C}$  zugrundeliegenden Köcher zu einem neuen Köcher  $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$ , indem wir für jeden Morphismus  $s : X \rightarrow Y$  aus  $S$  einen Pfeil  $\bar{s} : Y \rightarrow X$  neu hinzunehmen. Zu dem so vergrößerten Köcher bilden wir dann die **Pfadkategorie 1.1.2**. Wir notieren  $[p]$  den Morphismus in der Pfadkategorie zu einem Pfeil  $p$  aus dem Köcher  $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$  und  $\text{Id}_X$  beziehungsweise  $\text{id}_X$  die Identität auf einem Objekt  $X$  in unserer Pfadkategorie beziehungsweise in unserer ursprünglichen Kategorie  $\mathcal{C}$ . Nun betrachten wir auf der Menge der Morphismen unserer Pfadkategorie die kleinste Äquivalenzrelation  $\sim$  derart, daß gilt:

1.  $[s] \circ [\bar{s}] \sim \text{Id}_Y$  und  $[\bar{s}] \circ [s] \sim \text{Id}_X$  für alle  $s : X \rightarrow Y$  aus  $S$ ;
2.  $\text{Id}_X \sim [\text{id}_X]$  und  $[f] \circ [g] \sim [f \circ g]$  für alle verknüpfbaren Morphismen  $f$  und  $g$  aus  $\mathcal{C}$ ;
3.  $v \sim w \Rightarrow u \circ v \sim u \circ w$  und  $v \circ x \sim w \circ x$  für beliebige entsprechend verknüpfbare Morphismen  $u, v, w, x$  unserer Pfadkategorie.

Schließlich erklären wir die Kategorie  $\mathcal{C}_S$ , indem wir als Objekte die Objekte von  $\mathcal{C}$  nehmen, als Morphismen jedoch Äquivalenzklassen von Wegen in der Pfadkategorie des Köchers  $\mathcal{C} \sqcup S^{-1}$  unter unserer Äquivalenzrelation  $\sim$ . Die letzte Bedingung an unsere Äquivalenzrelation stellt dabei sicher, daß die Verknüpfung solcher Äquivalenzklassen wohldefiniert ist. Man folgert leicht, daß  $\mathcal{C}_S$  mit dieser Verknüpfung von Morphismen eine Kategorie ist. Bezeichne nun wie zuvor  $\tilde{\mathcal{K}}$  die Pfadkategorie eines Köchers  $\mathcal{K}$ . Die vorletzte Bedingung in unserer Definition der Äquivalenzrelation erzwingt, daß die Verknüpfung

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \sqcup S^{-1} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C} \sqcup S^{-1}} \rightarrow \mathcal{C}_S$$

von Morphismen von Köchern sogar ein Funktor ist, und die erste Bedingung erzwingt, daß jeder Morphismus aus  $S$  unter diesem Funktor ein Isomorphismus der Kategorie  $\mathcal{C}_S$  wird. Wir bezeichnen unseren Funktor mit  $\text{can} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  und überlassen den Nachweis der universellen Eigenschaft dem Leser.  $\square$

**Definition 1.2.6.** Ein Funktor  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt ein **Lokalisierungsfunktor**, wenn für die Menge  $S$  aller Morphismen von  $\mathcal{C}$ , die er zu Isomorphismen macht, der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien  $\tilde{Q} : \mathcal{C}_S \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}$  ist.

*Beispiel 1.2.7.* Der Funktor  $\text{Ab} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  gegeben durch  $M \mapsto \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$  ist ein Lokalisierungsfunktor. Gegeben ein Köcher mit zwei Ecken und nur einem Pfeil, der seinerseits von einer Ecke zur anderen Ecke geht, erhalten wir zwei Lokalisierungsfunktoren von der Kategorie der Darstellungen unseres Köchers in die Kategorie der abelschen Gruppen, indem wir jeder Darstellung den Wert an einer Feste unserer beiden Ecken zuordnen.

1.2.8. Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Lokalisierungsfunktor, so ist  $F$  surjektiv auf Isomorphieklassen von Objekten und jeder Morphismus in  $\mathcal{D}(FA, FB)$  läßt sich schreiben als eine Verknüpfung

$$F(g_1) \circ F(s_1)^{-1} \circ F(g_2) \circ F(s_2)^{-1} \circ \dots \circ F(g_n) \circ F(s_n)^{-1}$$

mit Morphismen  $g_i$  in  $\mathcal{C}$  und  $s_i \in S$ . Das folgt unmittelbar aus unseren Konstruktionen und Definitionen.

1.2.9. Wir nennen einen Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  **voll**dicht, wenn für jede weitere Kategorie  $\mathcal{C}$  das Vorschalten von  $F$  auf den Funktorkategorien einen volltreuen Funktor  $\mathcal{C}^{\mathcal{B}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$  liefert.

*Beispiele* 1.2.10. Jede Äquivalenz von Kategorien ist voll

Ist ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  bijektiv auf Objekten und läßt sich jeder Morphismus in  $\mathcal{B}$  darstellen als Verknüpfung von Bildern von Morphismen aus  $\mathcal{A}$  und Inversen derartiger Bilder, so ist  $F$  voll

Das folgt ohne größere Schwierigkeiten daraus, daß ein quadratisches Diagramm mit Isomorphismen in den Horizontalen kommutiert genau dann, wenn es kommutiert nach Ersetzen der Horizontalen durch ihre Inversen. Insbesondere ist nach 1.2.8 **jeder Lokalisierungsfunktor voll**dicht.

*Beispiel* 1.2.11 (**Fall der Ein-Objekt-Kategorien**). Ein Morphismus von Monoïden  $G \rightarrow H$  liefert einen voll

Ein Morphismus von Monoïden  $G \rightarrow H$  liefert einen voll

Nach [LA2] 8.3.16 haben wir einen natürlichen Isomorphismus von Kategorien  $G\text{-Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}^{[G]}$ . Spezialisieren wir  $\mathcal{C}$  aus 1.2.10 zu  $\text{Ens}$ , so besagt das insbesondere, daß unter den gegebenen Annahmen die Restriktion ein voll

Das scheint mir auch ohne die vorhergehenden Überlegungen unmittelbar einsichtig.

1.2.12. Die für uns wesentlichen allgemeinen Aussagen zur Lokalisierung von Kategorien faßt der folgende Satz zusammen, vergleiche auch [GZ67].

**Satz 1.2.13 (Eigenschaften von Lokalisierungen).** *Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  eine Menge von Morphismen in  $\mathcal{C}$  und  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  die Lokalisierung.*

1. *Ist  $A \in \mathcal{C}$  ein Objekt derart, daß der Funktor  $\mathcal{C}(A, \_ ) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  alle Morphismen aus  $S$  zu Bijektionen macht, so liefert unsere Lokalisierung für alle  $B \in \mathcal{C}$  Bijektionen*

$$\mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QA, QB)$$

2. *Besitzt der Lokalisierungsfunktor  $Q$  bei einem Objekt  $D \in \mathcal{C}_S$  einen partiellen Linksadjungierten  $L$ , so ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus  $D \xrightarrow{\sim} QLD$ . Insbesondere ist nach [TF] 4.4.7 jeder Linksadjungierte eines Lokalisierungsfunktors voll*
3. *Besitzt ein Funktor einen volltreuen globalen Rechts- oder Linksadjungierten, so ist er ein **Lokalisierungsfunktor**.*

1.2.14. Die in unserem Satz speziell für  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  formulierten Aussagen folgen unmittelbar für jeden Lokalisierungsfunktor.

**Beispiel 1.2.15 (Garbifizierung als Lokalisierung).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  ist die Garbifizierung  $\text{pEns}/_X \rightarrow \text{Ens}/_X$  ein Lokalisierungsfunktor, denn sie ist rechtsadjungiert zum volltreuen Einbettungsfunktor. Dasselbe gilt für die Garbifizierung  $\text{pAb}/_X \rightarrow \text{Ab}/_X$  von Prägarben abelscher Gruppen und analog für Prägarben von Ringen und dergleichen mehr. Dasselbe gilt auch für die von der Garbifizierung induzierten Funktoren  $\text{Ket}(\text{pAb}/_X) \rightarrow \text{Ket}(\text{Ab}/_X)$  und  $\text{Hot}(\text{pAb}/_X) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}/_X)$ .

*Beweis.* 1. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung gibt es für unser spezielles  $A$  genau einen Funktor  $F : \mathcal{C}_S \rightarrow \text{Ens}$  mit  $FQ = \mathcal{C}(A, \_)$ . Wir können nun eine inverse Abbildung zur im Satz behaupteten Bijektion explizit angeben durch die Abbildungsvorschrift  $g \mapsto (Fg)(\text{id}_A)$ . Etwas genauer liefert der Funktor zur Lokalisierung eine Transformation  $\tau : \mathcal{C}(A, \_) \Rightarrow \mathcal{C}_S(QA, \_) \circ Q$ , die wir für unser spezielles  $A$  als Isotransformation entlarven wollen. Das Element  $\text{id}_A \in F(A)$  liefert mit dem Yonedalemma [LA2] 8.9.2 eine Transformation  $\eta : \mathcal{C}_S(QA, \_) \Rightarrow F$ , und wir behaupten, daß die induzierte Transformation  $\eta Q : \mathcal{C}_S(QA, \_) \circ Q \Rightarrow FQ = \mathcal{C}(A, \_)$  invers ist zu  $\tau$ . Das folgt mit dem Yonedalemma aus unserer Erkenntnis 1.2.10, daß jeder Lokalisierungsfunktor volllicht ist.

2. Nach Teil 1 induziert der Lokalisierungsfunktor  $Q$  für unser  $D \in \mathcal{C}_S$  und alle  $B \in \mathcal{C}$  Isomorphismen  $\mathcal{C}(LD, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QLD, QB)$ . Da jedes Objekt in  $\mathcal{C}_S$  von einem Objekt  $B \in \mathcal{C}$  herkommt, ist damit der kanonische Morphismus ein Isomorphismus  $D \xrightarrow{\sim} QLD$  in  $\mathcal{C}_S$ .

3. Wir behandeln nur den Fall eines Rechtsadjungierten. Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  unser Funktor und  $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sein volltreuer Rechtsadjungierter. Sei  $S$  die Klasse aller Morphismen in  $\mathcal{C}$ , die unter  $F$  Isomorphismen werden. Erklären wir eine Kategorie  $\mathcal{C}_S$ , indem wir als Objekte dieselben nehmen wie die Objekte von  $\mathcal{C}$ , als Morphismen jedoch setzen  $\mathcal{C}_S(X, Y) := \mathcal{D}(FX, FY)$  mit der offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen, so ist der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz  $\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ , da ja gilt  $FRD \xrightarrow{\sim} D$  für alle  $D \in \mathcal{D}$  nach [TF] 4.4.7. Wenden wir diesen Isomorphismus an auf  $FX$  für  $X \in \mathcal{C}$ , so folgt mit [TF] 4.4.9, daß die Sequenz von kanonischen Morphismen  $FX \rightarrow FRFX \rightarrow FX$ , die man mithilfe der Adjunktion erhält, aus Isomorphismen besteht. Ist nun  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  ein Funktor, der Morphismen aus  $S$  zu Isomorphismen macht, so faktorisiert er über  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  mittels eines Funktors  $\tilde{G} : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{E}$ , wobei wir auf den Morphismen  $\tilde{G} : \mathcal{C}_S(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}(GX, GY)$  für  $f_S \in \mathcal{C}_S(X, Y)$  erklären durch die Kommutativität des Diagramms mit Isomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} GX & \longrightarrow & GY \\ \downarrow & & \downarrow \\ GRFX & \xrightarrow{GRf_S} & GRFY \end{array}$$

Diese Faktorisierung ist, wie man leicht sieht, auch die einzig mögliche.  $\square$

*Vorschau 1.2.16.* Gegeben Kategorien  $\mathcal{I}, \mathcal{C}$  und eine Menge von Morphismen  $S$  von  $\mathcal{C}$  können wir eine Menge  $S(\mathcal{I})$  von Morphismen in der Funktorkategorie  $\text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  erklären als diejenigen Transformationen  $\tau$  mit  $\tau_i \in S$  für alle  $i \in \mathcal{I}$ . Der Funktor des konstanten Systems  $\text{const} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  induziert dann einen Funktor auf den Lokalisierungen

$$\text{konst} : \mathcal{C}_S \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})_{S(\mathcal{I})}$$

Der linksadjungierte Funktor dazu hinwiederum heißt der **Homotopiekolimes** und wird  $\text{hocol}$  notiert. In diesem Fall ist, anders als bei normalen Kolimites, auch die Struktur von  $\mathcal{I}$  als Kategorie und nicht nur der zugrundeliegende Köcher relevant.

### 1.2.1 Übungen

*Übung 1.2.17.* Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  und darin ein System von Morphismen  $S$  ist der von  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  induzierte Funktor  $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow (\mathcal{C}_S)^{\text{opp}}$  eine Lokalisierung von  $\mathcal{C}^{\text{opp}}$  an  $S^{\text{opp}}$ . Gegeben zwei Kategorien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  und darin Systeme von Morphismen  $S, T$  ist das Produkt der Lokalisierungsfunktoren  $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_S \times \mathcal{D}_T$  eine Lokalisierung der Produktkategorie an  $S \times T$ . Die Verknüpfung von zwei Lokalisierungen ist auch selbst wieder eine Lokalisierung.

*Übung 1.2.18.* Jeder Lokalisierungsfunktor ist auch als Funktor zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien ein Lokalisierungsfunktor. Gegeben zwei Lokalisierungsfunktoren  $F : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$  ist auch ihr Produkt  $(F \times G) : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}}$  ein Lokalisierungsfunktor. Die Verknüpfung von zwei Lokalisierungsfunktoren ist auch selbst wieder ein Lokalisierungsfunktor.

## 1.3 Lokalisierung unter Ore-Bedingungen

1.3.1. Mit zusätzlichen Bedingungen an das System der zu invertierenden Morphismen erhält man feinere Aussagen über die Lokalisierung, wie wir im folgenden ausführen.

**Definition 1.3.2.** Eine Menge von Morphismen einer Kategorie heißt **multiplikativ** oder ein **multiplikatives System**, wenn sie stabil ist unter Verknüpfung und alle Identitäten enthält.

**Definition 1.3.3.** Eine Menge  $S$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt ein **Rechts-Ore-System**, wenn sie multiplikativ ist und zusätzlich die beiden folgenden Eigenschaften hat:



1. Gegeben  $E \xrightarrow{g} X \xleftarrow{s} D$  mit  $s \in S$  gibt es  $E \xleftarrow{t} W \xrightarrow{h} D$  mit  $t \in S$  und  $sh = gt$ ;
2. Gegeben  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  und  $s \in S$  mit  $sf = sg$  gibt es  $t \in S$  mit  $ft = gt$ .

Eine Menge  $S$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt ein **Links-Ore-System**, wenn sie ein Rechts-Ore-System in der opponierten Kategorie ist. Ein **Ore-System** in einer Kategorie ist ein System von Morphismen, das sowohl Rechts-Ore als auch Links-Ore ist.

*Ergänzung 1.3.4.* Hat unsere Kategorie nur ein Objekt und ist die Verknüpfung von Morphismen die Multiplikation einer Ringstruktur auf diesem Objekt, so sind diese Bedingungen Varianten der bei der Lokalisierung nichtkommutativer Ringe üblichen **Ore-Bedingungen**.

**Definition 1.3.5.** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechts-Oresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Wir betrachten für  $X, Y \in \mathcal{C}$  die Menge  $\mathcal{B}(X, Y)$  aller Diagramme  $D = (s, D, f)$  der Gestalt

$$X \xleftarrow{s} D \xrightarrow{f} Y$$

mit  $s \in S$  und nennen derartige Diagramme **Brüche** oder genauer **Rechtsbrüche von  $X$  nach  $Y$** . Wir sagen, ein Bruch  $(s, D, f)$  gehe hervor aus einem weiteren Bruch  $(s', D', f') \in \mathcal{B}(X, Y)$  durch **Kürzen** und schreiben  $D' \dashrightarrow D$ , wenn es einen Morphismus  $h : D' \rightarrow D$  gibt mit  $s' = sh$  und  $f' = fh$ . Bezeichne  $\bar{\mathcal{B}}(X, Y)$  die Menge aller Äquivalenzklassen von Brüchen von  $X$  nach  $Y$  unter der durch Kürzen erzeugten Äquivalenzrelation und bezeichne  $[s, D, f]$  die Äquivalenzklasse des Bruches  $(s, D, f)$ .

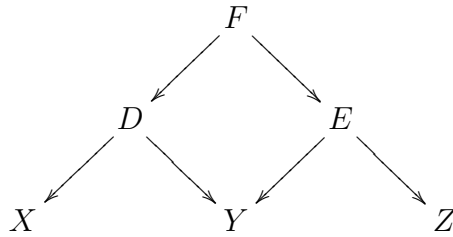
1.3.6. Ich komme mit Rechts und Links in diesem Zusammenhang leicht durcheinander. Als Eselsbrücke mag man sich einen Rechtsbruch als eine Komposition der Form  $f \circ s^{-1}$  denken, bei der der Nenner eben rechts steht. Der erste Teil der Rechtsorebedingung sagt dann, salopp gesprochen, daß man jeden Linksbruch zu einem Rechtsbruch umschreiben kann.

**Proposition 1.3.7 (Kategorien von Brüchen als Lokalisierung).** *Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . So liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(X, Y)$$

*zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von Rechtsbrüchen und der Menge der Morphismen in der lokalisierten Kategorie.*

*Beweis.* Gegeben Brüche mit Kürzungen  $D' \dashrightarrow D \dashleftarrow D''$  gibt es einen Bruch  $D'''$  mit Kürzungen  $D' \dashleftarrow D''' \dashrightarrow D''$ . In der Tat finden wir mit der ersten Bedingung in 1.3.3 Morphismen  $D' \leftarrow W \rightarrow D''$  mit  $W \rightarrow D''$  in  $S$  derart, daß mit den Morphismen nach  $D$  ein kommutatives Quadrat entsteht. Es folgt insbesondere, daß für die durch Kürzen erzeugte Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{B}(X, Y)$  zwei Brüche äquivalent sind genau dann, wenn sie durch Kürzen aus ein- und demselben Bruch hervorgehen. Wir erklären nun Verknüpfungen  $\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \times \bar{\mathcal{B}}(Y, Z) \rightarrow \bar{\mathcal{B}}(X, Z)$  wie folgt: Wir beginnen mit Verknüpfungen  $\mathcal{B}(X, Y) \times \mathcal{B}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{B}(X, Z)$  gegeben dadurch, daß  $((s, D, f), (t, E, g))$  abgebildet wird auf die Äquivalenzklasse eines Bruches der Gestalt



mit  $F \rightarrow D$  aus  $S$  und kommutierendem schiefen Quadrat. Die so gebildete Äquivalenzklasse ist unabhängig von der Wahl von  $F$  und den beiden von  $F$  ausgehenden Morphismen: Ist  $D \leftarrow F' \rightarrow E$  eine zweite Wahl, so vervollständigen wir  $F \rightarrow D \leftarrow F'$  durch  $F \leftarrow F'' \rightarrow F'$  zu einem kommutativen Quadrat mit  $F'' \rightarrow F'$  aus  $S$  und folgern aus  $F'' \rightarrow F' \rightarrow E \rightarrow Y = F'' \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow Y$  mit der zweiten Bedingung aus 1.3.3 die Existenz von  $F''' \rightarrow F''$  aus  $S$  mit  $F''' \rightarrow F'' \rightarrow F' \rightarrow E = F''' \rightarrow F'' \rightarrow F \rightarrow E$ . Es ist klar, daß unsere Verknüpfung unter Kürzen dieselbe bleibt und somit absteigt zu einer Verknüpfung  $\bar{\mathcal{B}}(X, Y) \times \bar{\mathcal{B}}(Y, Z) \rightarrow \bar{\mathcal{B}}(X, Z)$ . Schließlich zeigen wir noch, daß die Objekte von  $\mathcal{C}$  mit den Morphismenmengen  $\bar{\mathcal{B}}(X, Y)$  und der eben eingeführten Verknüpfung eine Kategorie bilden. Die Identitätsmorphismen sind hier unproblematisch, und die Assoziativität der Verknüpfung scheint mir auch recht offensichtlich. Aus der Konstruktion wird jedoch zusätzlich klar, daß die eben konstruierte Kategorie  $\bar{\mathcal{B}}$  dieselbe universelle Eigenschaft hat wie unsere Lokalisierung  $\mathcal{C}_S$ .  $\square$

**Satz 1.3.8 (Orelokalisierung und volltreue Einbettungen).** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit einem *Rechtsoresystem* von Morphismen  $S$ . Ist  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  eine volle Unterkategorie und  $S' \subset S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}'$  mit der Eigenschaft, daß es für alle  $s \in S$  mit Ziel in  $\mathcal{C}'$  einen Morphismus  $h$  gibt mit  $s \circ h \in S'$ , so ist der offensichtliche Funktor  $\mathcal{C}'_{S'} \rightarrow \mathcal{C}_S$  volltreu.

*Beweis.* Das erkennt man sofort an der Realisierung 1.3.7 der lokalisierten Kategorie als Kategorie von Brüchen.  $\square$

1.3.9. Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit einem Rechtsoresystem von Morphismen  $S$ , so lassen sich zwei Brüche  $(r, E, f) \in \mathcal{B}(X, Y)$  und  $(t, F, g) \in \mathcal{B}(X, Z)$  stets **auf einen Hauptnenner bringen**. In der Tat finden wir Morphismen von Objekten  $E \leftarrow D \rightarrow F$  so, daß  $D \rightarrow E$  zu  $S$  gehört und daß beide demselben Pfeil  $s : D \rightarrow X$  liefern, der dann notwendig auch zu  $S$  gehört. Damit entstehen unsere beiden Brüche durch Kürzen aus Brüchen der Gestalt  $(s, D, f')$  und  $(s, D, g')$ .

**Proposition 1.3.10 (Produkte in Orelokalisierungen).** *Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ , so vertauscht der Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  mit dem Bilden von endlichen Produkten und Egalisatoren [TS] 7.1.7.*

*Ergänzung 1.3.11.* Man zeigt allgemeiner in derselben Weise, daß unser Funktor mit dem Bilden von Limites über beliebige endliche Diagramme alias Darstellungen endlicher Köcher kommutiert.

*Beweis.* Wir konzentrieren uns darauf, das Kommutieren mit dem Produkt zweier Objekte zu prüfen. Wir dürfen und werden das nachweisen für die Kategorie von Brüchen  $\tilde{\mathcal{B}}$  aus 1.3.5 statt  $\mathcal{C}_S$ . Gegeben zwei Brüche in  $\tilde{\mathcal{B}}(X, A')$  und  $\tilde{\mathcal{B}}(X, A'')$  finden wir mit 1.3.9 Repräsentanten „mit demselben Nenner“, als da heißt, von der Form  $(s, D, f)$  und  $(s, D, g)$  mit  $f : D \rightarrow A'$  und  $g : D \rightarrow A''$ , und bilden dann den Bruch  $(s, D, (f, g))$  in das Produkt  $A' \times A''$ . Die Verknüpfung mit den Projektionen liefert dann natürlich die beiden ursprünglichen Brüche. Ist umgekehrt ein Morphismus  $[s', D', h] \in \tilde{\mathcal{B}}(X, A' \times A'')$  gegeben, der bei Nachschalten der Projektionen  $[s, D, f]$  und  $[s, D, g]$  liefert, so bringen wir zunächst alle drei Brüche auf einen Hauptnenner und dürfen dann auch für unseren Bruch in das Produkt einen Repräsentanten der Gestalt  $(s, D, h)$  annehmen. Gilt nun

$$[s, D, \text{pr}_1 \circ h] = [s, D, f] \text{ und } [s, D, \text{pr}_2 \circ h] = [s, D, g]$$

so können wir den Hauptnenner weiter vergrößern derart, daß gilt  $\text{pr}_2 \circ h = g$ ,  $\text{pr}_1 \circ h = f$ , und das zeigt dann  $h = (f, g)$ . Daß finale Objekte in finale Objekte übergehen und daß Egalisatoren zu Egalisatoren werden, zeigt man ähnlich aber einfacher.  $\square$

1.3.12. Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen. Jede additive Struktur auf  $\mathcal{C}$  im Sinne von ?? induziert eine additive Struktur auf  $\mathcal{C}_S$ , man addiert eben Brüche, indem man sie auf einen Hauptnenner bringt. Besitzt  $\mathcal{C}$  nur ein Objekt, so ist diese Konstruktion die sogenannte **Orelokalisierung** von nicht notwendig kommutativen Ringen.

**Proposition 1.3.13 (Orelokalisierung additiver Kategorien).** *Ist  $\mathcal{C}$  eine additive Kategorie und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen, so ist auch  $\mathcal{C}_S$  eine additive Kategorie und der kanonische Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  ist additiv.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus 1.3.12 und 1.3.10. □

*Ergänzung* 1.3.14. In ?? diskutieren wir Lokalisierungen abelscher Kategorien und zeigen insbesondere, daß die Lokalisierung einer abelschen Kategorie an einem Oresystem stets wieder abelsch ist.

1.3.15 (**Morphismen in einer Orelokalisierung**). Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . In der Terminologie aus [TS] 7.1.13 liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\mathcal{C}_S(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{colf } \mathcal{C}(D, Y)$$

mit dem filtrierenden Kolimes über das System aller Morphismen  $s : D \rightarrow X$  aus  $S$  in das Objekt  $X$ . Ist hier  $S$  ein Oresystem, so erhalten wir sogar ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C}_S(X, Y) & \\
 \swarrow \sim & & \searrow \sim \\
 \text{colf } \mathcal{C}(D, Y) & & \text{colf } \mathcal{C}(X, I) \\
 \searrow \sim & & \swarrow \sim \\
 & \text{colf } \mathcal{C}(D, I) &
 \end{array}$$

mit den filtrierenden Kolimites über das System aller Morphismen  $s : D \rightarrow X$  aus  $S$  in das Objekt  $X$ , das System aller Morphismen  $s : Y \rightarrow I$  aus  $S$  aus dem Objekt  $Y$ , und das System aller Paare derartiger Morphismen. Um das zu sehen, verwendet man die Transitivität von Kolimites [TS] 7.1.31 zusammen mit der Erkenntnis, daß der zweite Kolimes auf dem Weg nach unten jeweils über ein konstantes System gebildet wird.

**Definition 1.3.16.** Ein multiplikatives System  $S$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **gesättigt**, wenn für einen beliebigen Morphismus  $f$  gilt: Gibt es Morphismen  $g, h$  mit  $fg \in S$  und  $hf \in S$ , so folgt  $f \in S$ .

1.3.17. Der Begriff eines gesättigten Oresystems schien mir für die Diskussion triangulierter Kategorien praktisch. Für einzelne der im folgenden diskutierten Konsequenzen dieser Eigenschaft sind jedoch auch schwächere Bedingungen ausreichend.

*Beispiel* 1.3.18. Das System aller Isomorphismen einer Kategorie ist gesättigt. Das Urbild eines gesättigten multiplikativen Systems unter einem Funktor ist stets wieder ein gesättigtes multiplikatives System.

**Lemma 1.3.19.** *Gegeben ein gesättigtes Oresystem  $S$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist  $S$  genau die Menge aller Morphismen von  $\mathcal{C}$ , die unter dem Lokalisierungsfunktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  Isomorphismen werden.*

*Beweis.* Hat der Rechtsbruch  $f \operatorname{id}^{-1}$  ein Halbinverses  $gs^{-1}$ , so gibt es  $r \in S$  mit  $sr = fgr$ . Argumentiert man analog mit Linksbrüchen, so erkennt man, daß aus unserer Sättigungsbedingung bereits  $f \in S$  folgt.  $\square$

1.3.20. Lemma 1.3.19 impliziert insbesondere, daß jedes gesättigte Oresystem  $S$  die **Zwei-aus-drei-Eigenschaft** hat: Sind Morphismen  $f, g, h$  gegeben mit  $fg = h$  und gehören Zwei der drei Morphismen  $f, g, h$  zu  $S$ , so auch der Dritte.

### 1.3.1 Übungen

*Übung 1.3.21 (Liften kommutativer Diagramme).* Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechts-Oresystem von Morphismen. Gegeben Morphismen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  in der lokalisierten Kategorie  $\mathcal{C}_S$  gibt es Morphismen  $f' : X' \rightarrow Y'$  und  $g' : Y' \rightarrow Z$  in  $\mathcal{C}$  und Morphismen  $s : X' \rightarrow X, t : Y' \rightarrow Y$  aus  $S$  mit  $fs = tf', gt = g'$ . Salopp gesprochen ist also jedes kommutative Dreiecksdiagramm in  $\mathcal{C}_S$  isomorph zum Bild eines kommutativen Dreiecksdiagramms in  $\mathcal{C}$ . Ist hier  $gf$  bereits ein Morphismus in  $\mathcal{C}$ , so können wir sogar Morphismen  $f' : X \rightarrow Y'$  und  $g' : Y' \rightarrow Z$  in  $\mathcal{C}$  und einen Morphismus  $t : Y' \rightarrow Y$  aus  $S$  finden mit  $fs = tf'$  und  $gt = g'$ .

*Übung 1.3.22.* Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor mit einem volltreuen Rechtsadjungierten. Sei  $S$  das System der Morphismen in  $\mathcal{C}$ , die unter  $F$  zu Isomorphismen werden. Aus 1.2.13 mag man erinnern, daß dann  $F$  eine Äquivalenz  $\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$  induziert. Man zeige: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist  $S$  ein Links-Oresystem. Ein Beispiel für diese Situation ist der Garbifizierungsfunktor.

*Übung 1.3.23.* Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Links-Oresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Genau dann liefern Morphismen  $f, g : X \rightarrow Y$  aus  $\mathcal{C}$  denselben Morphismus in  $\mathcal{C}_S$ , wenn es  $s \in S$  gibt mit  $sf = sg$ .

## 2 Derivierte Kategorien

### 2.1 Triangulierte Kategorien

**Definition 2.1.1.** Eine  $\mathbb{Z}$ -Kategorie ist eine Kategorie  $\mathcal{A}$  mitsamt einem Automorphismus  $[1] : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ . Mit Automorphismus meine ich einen Isomorphismus der Kategorie zu sich selbst, nicht etwa bloß eine Äquivalenz von Kategorien. Ein  $\mathbb{Z}$ -Funktork  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  von  $\mathbb{Z}$ -Kategorien ist definiert als ein Paar  $(F, u)$  bestehend aus einem Funktor  $F$  nebst einer Isotransformation  $u : [1] \circ F \xrightarrow{\sim} F \circ [1]$ , die die  $\mathbb{Z}$ -Struktur unseres  $\mathbb{Z}$ -Funktors heißen möge.

2.1.2. Gegeben eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur  $u$  eines Funktors wie eben ist natürlich auch ihr Negatives  $(-u)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur für denselben Funktor.

*Vorschau 2.1.3.* Es gibt durchaus relevante Situationen, in denen man die hier entwickelten Begriffsbildungen auf den Fall erweitern muß, daß unsere Verschiebung  $[1] : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  nur eine Äquivalenz von Kategorien ist. Das weckt jedoch Elefanten der Notation, die ich nach Möglichkeit schlafen lassen will.

2.1.4. Die Menge aller  $\mathbb{Z}$ -Funktoren von einer  $\mathbb{Z}$ -Kategorie  $\mathcal{A}$  in eine  $\mathbb{Z}$ -Kategorie  $\mathcal{B}$  notieren wir  $\text{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Die Verknüpfung von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren sei definiert durch  $(F, u) \circ (G, v) = (F \circ G, uG \circ Fv)$ . Sie ist assoziativ. Gegeben ein Universum  $\mathcal{U}$  wie in [LA2] 8.2.24 bezeichne  $\mathcal{UCat}^{\mathbb{Z}}$  die Kategorie aller  $\mathbb{Z}$ -Kategorien, deren zugrundeliegende Kategorie eine  $\mathcal{U}$ -Kategorie ist. Als Morphismen von  $\mathcal{UCat}^{\mathbb{Z}}$  nehmen wir unsere  $\mathbb{Z}$ -Funktoren.

**Definition 2.1.5.** Eine **verträgliche Transformation**  $(F, u) \Rightarrow (G, v)$  zwischen  $\mathbb{Z}$ -Funktoren ist eine Transformation  $\tau : F \Rightarrow G$ , die mit den jeweiligen  $\mathbb{Z}$ -Strukturen verträglich ist in dem Sinne, daß das folgende Diagramm von Transformationen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [1] \circ F & \xrightarrow{u} & F \circ [1] \\ [1]\tau \downarrow & & \downarrow \tau[1] \\ [1] \circ G & \xrightarrow{v} & G \circ [1] \end{array}$$

Die Verknüpfung verträglicher Transformationen ist wieder verträglich und die Menge  $\text{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  wird mit diesen Transformationen als Morphismen eine Kategorie. Wir notieren die Menge der verträglichen Transformation

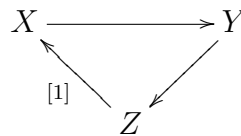
$$\text{Cat}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(F, G)$$

oder abkürzend  $\text{Trans}^{\mathbb{Z}}(F, G)$ . Eine Adjunktion  $(L, R)$  von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren nennen wir eine **verträgliche Adjunktion**, wenn die zugehörigen Transformationen

$\text{Id} \Rightarrow RL$  und  $LR \Rightarrow \text{Id}$  verträglich sind. Gegeben eine Adjunktion zwischen Funktoren zwischen zwei  $\mathbb{Z}$ -Kategorien existiert für jede  $\mathbb{Z}$ -Struktur auf einem der beiden genau eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur auf dem anderen derart, daß die Adjunktion mit diesen  $\mathbb{Z}$ -Strukturen verträglich ist.

*Vorschau 2.1.6.* Man kann auch allgemeiner für eine beliebige Gruppe  $\Gamma$  den Begriff einer  $\Gamma$ -Kategorie, eines  $\Gamma$ -Funktors und so weiter einführen, aber das will ich hier noch nicht weiter verfolgen.

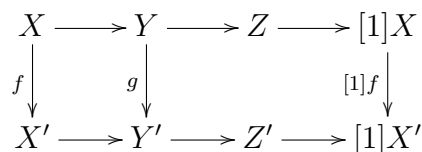
**Definition 2.1.7.** Unter einem **Dreieck** in einer  $\mathbb{Z}$ -Kategorie versteht man ein Diagramm der Gestalt  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{y} Z \xrightarrow{w} [1]X$ , das suggestiver aber weniger präzise auch in der Gestalt



geschrieben werden mag. Ein **Morphismus von Dreiecken** wird definiert wie in ??.

**Definition 2.1.8.** Eine **triangulierte Kategorie** ist eine additive  $\mathbb{Z}$ -Kategorie mit samt einer Vorschrift, die unter allen Dreiecken unserer  $\mathbb{Z}$ -Kategorie gewisse Dreiecke auszeichnet derart, daß die folgenden merkwürdigen durch ?? motivierten Axiome erfüllt sind:

1. Jedes Dreieck, das isomorph ist zu einem ausgezeichneten Dreieck, ist auch selbst ein ausgezeichnetes Dreieck;
2. Für jedes Objekt  $X$  ist das Dreieck  $X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow [1]X$  ausgezeichnet;
3. Jeder Morphismus  $X \rightarrow Y$  unserer Kategorie kann in ein ausgezeichnetes Dreieck  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  eingebettet werden. Es wird sich später herausstellen, daß hier  $Z$  eindeutig ist bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus, vergleiche Axiom 5. Wir gönnen ihm dennoch einen bestimmten Artikel nennen  $Z$  in Erinnerung an ?? auch im allgemeinen den **Abbildungskegel** über dem Morphismus  $X \rightarrow Y$ ;
4. Ein Dreieck  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  ist ausgezeichnet genau dann, wenn das „gedrehte“ Dreieck  $Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X \xrightarrow{-u} [1]Y$  ausgezeichnet ist;
5. Gegeben ein Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen und einem kommutativen Quadrat links



gibt es einen Morphismus  $h : Z \rightarrow Z'$  derart, daß die beiden dadurch in der Mitte und rechts entstehenden Quadrate kommutieren. Von diesem Morphismus  $h$  wird nur die Existenz und nicht die Eindeutigkeit gefordert;

6. (**Oktaederaxiom**) Gegeben ausgezeichnete Dreiecke

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow [1]X$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow [1]Y$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow [1]X$$

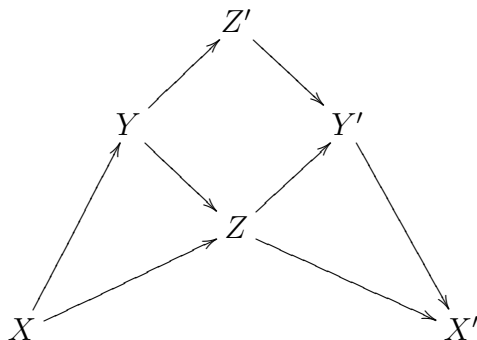
gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck  $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow [1]Z'$  derart, daß im nebenstehenden Oktaeder die beiden Quadrate im Schnitt mit senkrechten Ebenen kommutieren und die vier „zyklischen“ Dreiecke ausgezeichnete Dreiecke sind, wohingegen die anderen vier Dreiecke kommutieren.

Die ausgezeichneten Dreiecke einer triangulierten Kategorie heißen, nun, eben **ausgezeichnete Dreiecke**. Eingeführt wurden sie ursprünglich auf Französisch als **triangles distingués**. Auf Englisch nennt man sie **distinguished triangles**.

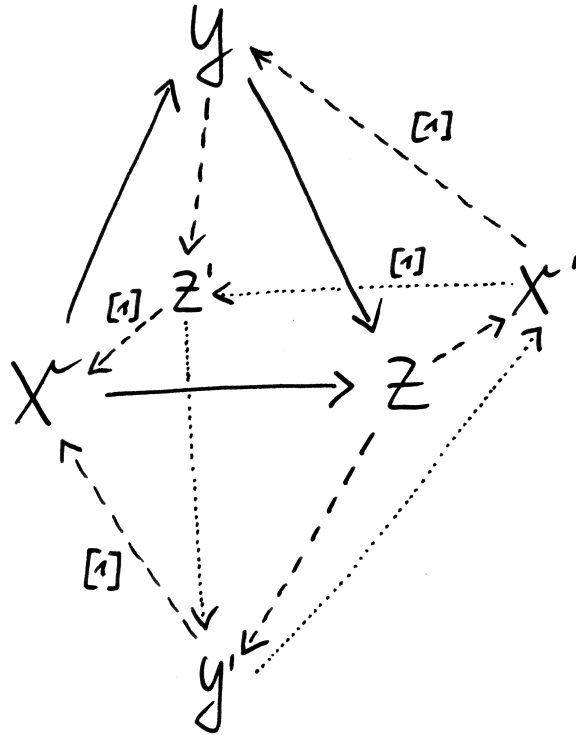
*Vorschau 2.1.9.* Der Definition einer triangulierten Kategorie haftet etwas Künstliches an, und sie ist es auch. Ich hoffe aber, Sie im folgenden davon zu überzeugen, daß diese Begriffsbildung für viele Argumentationen ein geschickter Rahmen ist. Einen noch natürlicheren Rahmen bilden die sogenannten „Derivatoren“, deren Diskussion ich vorerst vermeiden will.

2.1.10. Jede triangulierte Kategorie liefert eine weitere triangulierte Kategorie, wenn man statt der ausgezeichneten Dreiecken die sogenannten **antiausgezeichneten Dreiecke** auszeichnet, die aus ausgezeichneten Dreiecken durch das Ändern des Vorzeichens aller drei Morphismen entstehen.

2.1.11. Wir notieren Oktaeder oft vereinfacht in der Form





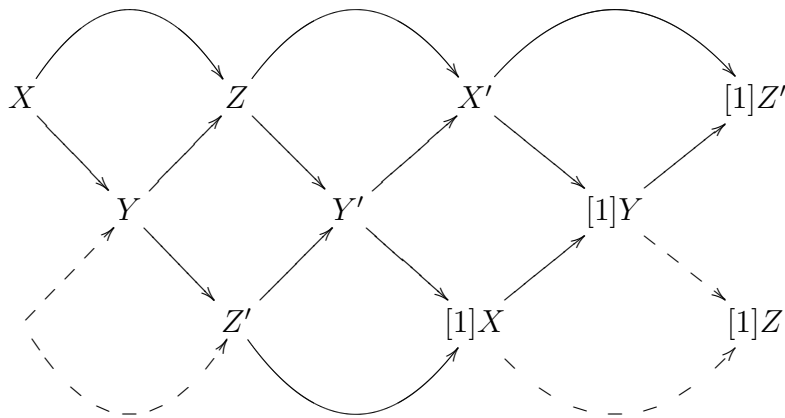


Die Struktur der Pfeile soll den Aufbau eines solchen Oktaeders verdeutlichen:  
 Man beginnt mit zwei verknüpfbaren Morphismen und ihrer Komposition, dargestellt durch durchgehende Pfeile zwischen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ . Jeden dieser Morphismen ergänzt man zu einem ausgezeichneten Dreieck, angedeutet durch die gestrichelten Pfeile. Und dann fordert man die Existenz von gepunkteten Pfeilen, die die drei eben konstruierten Objekte zu einem vierten ausgezeichneten Dreieck verbinden, die drei anderen so entstehenden Dreiecke zum Kommutieren bringen (was den horizontalen gepunkteten Pfeil im übrigen bereits eindeutig festlegt), und die beiden in Schnitten unseres Oktaeders mit geeigneten senkrechten Ebenen entstehenden Quadrate zum Kommutieren bringen. Von zwei gegenüberliegenden Flächen ist also stets eine ein kommutatives Diagramm und die andere ein ausgezeichnetes Dreieck. Unser Oktaederdiagramm hat weitaus weniger Symmetrien als ein echter Oktaeder, genauer ist die Symmetriegruppe eine zyklische Gruppe der Ordnung vier, erzeugt vom Drehen um die senkrechte Achse um einen rechten Winkel gefolgt vom Vertauschen der oberen und der unteren Ecke.

In dieser Gestalt sind alle vier ausgezeichneten Dreiecke als lediglich gerade Pfeilsequenzen erkennbar, einige kommutative Dreiecke und ein kommutatives Quadrat sind jedoch nicht sichtbar. Eine andere Darstellung ist

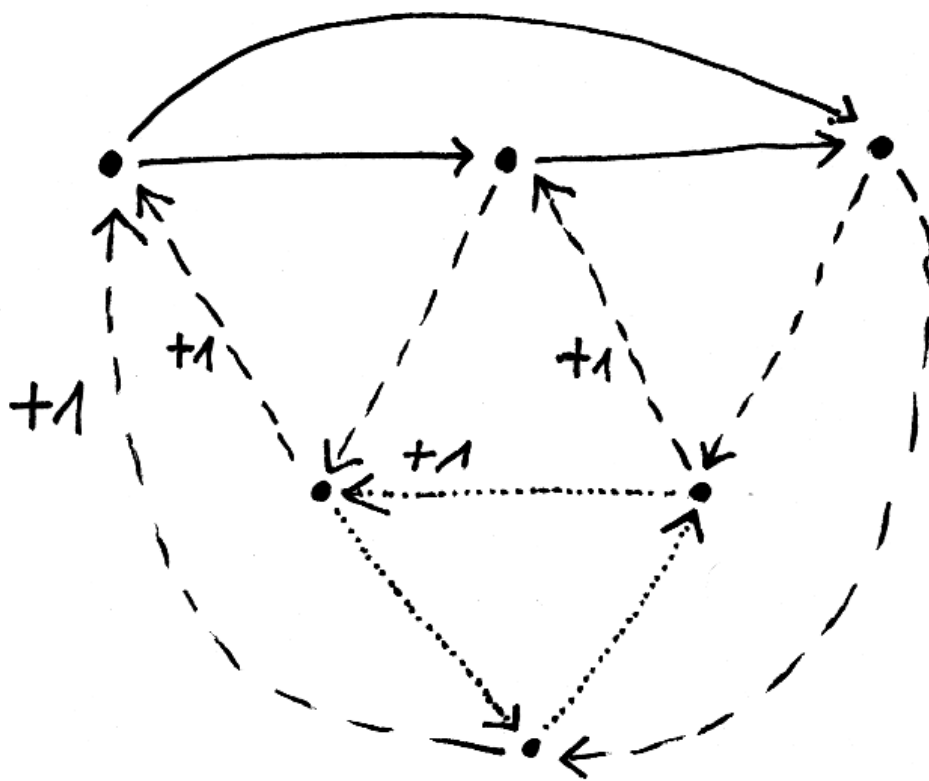
$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & [1]X \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & [1]X \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & [1]Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 Z' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & [1]Z'
 \end{array}$$

mit einigen Identitäten in den Vertikalen, kommutativen Quadraten und ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen. In dieser Darstellung sehen wir alle Information unseres Oktaeders: Alle vier ausgezeichneten Dreiecke als Zeilen, alle vier kommutativen Dreiecke als Quadrate mit einer ist-gleich-Seite, davon eines sogar doppelt, und beide kommutativen Quadrate, davon eines sogar doppelt. Als letzte Variante gebe ich



Dies Diagramm soll man sich periodisch nach rechts und links fortgesetzt denken. Alle vier ausgezeichneten Dreiecke sind hier gut als eckenlose Wege erkennbar, und die vier kommutativen Dreiecke ebenso wie die beiden kommutativen Vierecke sind gleichfalls gut zu sehen.

2.1.12. Aus ?? folgt, daß jeder Isomorphismus zwischen additiven Kategorien additiv ist. Insbesondere brauchen wir die Additivität des Funktors  $[1]$  einer triangulierten Kategorie nicht extra zu fordern.



Noch eine andere Darstellung eines Oktaeders

2.1.13 (**Komposition von Morphismen in einem Dreieck**). In einem ausgezeichneten Dreieck ist die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen Null. In der Tat gibt es für jedes ausgezeichnete Dreieck  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow$  notwendig einen Morphismus von Dreiecken nach  $0 \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow$  der Gestalt  $(?, v, \text{id})$  mit  $v : Y \rightarrow Z$  dem zweiten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks. Folglich ist  $(0, v, \text{id})$  ein Morphismus von Dreiecken, und damit gilt  $v \circ u = 0$  für  $u : X \rightarrow Y$  den ersten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks.

**Lemma 2.1.14.** *Ist  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie und  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  darin ein ausgezeichnetes Dreieck, so bilden für jedes Objekt  $W \in \mathcal{T}$  die Morphismen nach  $W$  eine lange exakte Sequenz von abelschen Gruppen*

$$\dots \leftarrow \mathcal{T}(X, W) \leftarrow \mathcal{T}(Y, W) \leftarrow \mathcal{T}(Z, W) \leftarrow \mathcal{T}([1]X, W) \leftarrow \dots$$

*Dasselbe gilt dual auch für die Morphismen von  $W$  in die Objekte unseres ausgezeichneten Dreiecks.*

*Beweis.* Fast gleich zum Beweis von ?? und dem Leser überlassen. □

## Übungen

*Übung 2.1.15.* Sind bei einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken zwei der Abbildungen Isomorphismen, so auch die Dritte. Hinweis: 2.1.14 und Fünferlemma und Yoneda-Lemma.

*Übung 2.1.16 (Morphismen von ausgezeichneten Dreiecken, Eindeutigkeit).* Sei  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie. Gegeben ein kommutatives Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' & \rightarrow & [1]X' \end{array}$$

gibt es nach Annahme einen Morphismus  $Z \rightarrow Z'$ , der es kommutativ vervollständigt. Man zeige, daß sowohl unter der Annahme  $\mathcal{T}([1]X, Z') = 0$  als auch unter der Annahme  $\mathcal{T}(Z, Y') = 0$  dieser Morphismus  $Z \rightarrow Z'$  sogar eindeutig bestimmt ist. Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das ?. Hinweis: Dieser Morphismus  $Z \rightarrow Z'$  ist sogar bereits dadurch eindeutig bestimmt, daß er das linke beziehungsweise das rechte durch ihn neu entstehende Quadrat zum Kommutieren bringt.

*Übung 2.1.17 (Morphismen in ausgezeichneten Dreiecken, Eindeutigkeit).* Sei  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie. Gibt es zu einem Morphismus aus einem ausgezeichneten Dreieck keinen von Null verschiedenen Morphismus in die Gegenrichtung, so wird der fragliche Morphismus bereits durch die beiden anderen eindeutig

festgelegt. Sind also in Formeln  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{r,s} [1]X$  ausgezeichnete Dreiecke für zwei Morphismen  $r, s : Z \rightarrow [1]X$  und gilt  $\mathcal{T}([1]X, Z) = 0$ , so folgt  $r = s$ . Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das ??.

*Übung 2.1.18.* Wenn man in einem ausgezeichneten Dreieck bei zwei Morphismen das Vorzeichen ändert, entsteht wieder ein ausgezeichnetes Dreieck.

*Übung 2.1.19.* Die opponierte Kategorie einer triangulierten Kategorie ist mit der entgegengesetzten homologischen Verschiebung und „denselben“ ausgezeichneten Dreiecken versehen auch eine triangulierte Kategorie. Sie heißt die **opponierte triangulierte Kategorie**.

## 2.2 Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien

**Satz 2.2.1 (Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien).** Für jede additive Kategorie  $\mathcal{I}$  ist ihre Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  mit ihrer durch Verschiebung und Negativieren der Differentiale ?? erklärten  $\mathbb{Z}$ -Operation und den in ?? durch Abbildungskegel erklärten ausgezeichneten Dreiecken eine triangulierte Kategorie.

*Beweis.* Alle Axiome mit Ausnahme des Oktaederaxioms sind entweder offensichtlich erfüllt oder werden in ?? bewiesen. Um auch noch das Oktaederaxiom zu prüfen, reicht es zu zeigen, daß für Morphismen von Komplexen  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  die Sequenz

$$\text{Keg}(f) \xrightarrow{u} \text{Keg}(g \circ f) \xrightarrow{v} \text{Keg}(g) \xrightarrow{w} [1] \text{Keg}(f)$$

ein ausgezeichnetes Dreieck ist, wenn diese Komplexe und Morphismen gegeben werden durch

$$\begin{array}{ccccccc} X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y^{n+1} \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \\ \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ g \circ f & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ g & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ -f & -\partial \end{pmatrix} \\ X^{n+2} \oplus Y^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & X^{n+3} \oplus Y^{n+2} \end{array}$$

Hier und im Folgenden verwenden wir die Konvention [KAG] 1.4.17, nach der Elemente von direkten Summen als Spaltenmatrizen aufgefaßt werden, mit den vorne stehenden Komponenten oben, und Morphismen zwischen direkten Summen durch Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden, die durch Matrixmultiplikation von links operieren. Um zu zeigen, daß dies Dreieck ausgezeichnet ist, gilt es, eine Homotopieäquivalenz  $h : \text{Keg}(g) \xrightarrow{\sim} \text{Keg}(u)$  anzugeben

derart, daß

$$\begin{array}{ccccc} \text{Keg}(g \circ f) & \xrightarrow{v} & \text{Keg}(g) & \xrightarrow{w} & [1] \text{Keg}(f) \\ \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ \text{Keg}(g \circ f) & \longrightarrow & \text{Keg}(u) & \longrightarrow & [1] \text{Keg}(f) \end{array}$$

in der Homotopiekategorie kommutiert. Nun haben wir ja

$$\text{Keg}(u)^n = X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

mit Randoperator

$$\begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 & 0 \\ f & -\partial & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\partial & 0 \\ 0 & g & g \circ f & \partial \end{pmatrix}$$

und es reicht zu zeigen, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : Y^{n+1} \oplus Z^n \rightarrow X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

eine Homotopieäquivalenz  $h$  mit den gewünschten Eigenschaften liefert. Explizite Rechnung zeigt, daß sie eine Kettenabbildung definiert und das rechte Quadrat unseres Diagramms der sechs Komplexe von eben zum Kommutieren bringt. Definieren wir eine Abbildung in die Gegenrichtung  $k : \text{Keg}(u) \rightarrow \text{Keg}(g)$  durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n \rightarrow Y^{n+1} \oplus Z^n$$

so erhalten wir auch eine Kettenabbildung, von der klar ist, daß sie das linke Quadrat mit umgekehrtem Mittelpfeil zum Kommutieren bringt. Weiter gilt offensichtlich  $k \circ h = \text{id}$ , so daß nur zu zeigen bleibt, daß  $h \circ k$  homotop ist zur Identität auf  $\text{Keg}(u)$ . Solch eine Homotopie wird jedoch gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

**Definition 2.2.2.** Ein **triangulierter Funktor** von einer triangulierten Kategorien in eine weitere ist ein additiver  **$\mathbb{Z}$ -Funktors**, der ausgezeichnete Dreiecke zu ausgezeichneten Dreiecken macht.

**Definition 2.2.3.** Eine Menge von Objekten einer triangulierten Kategorie heißt ein **trianguliertes System**, wenn gilt:

1. Das Nullobjekt gehört zu unserer Menge;
2. Mit je zwei Objekten eines ausgezeichneten Dreiecks gehört auch das Dritte zu unserer Menge;

Ein trianguliertes System, das mit jedem Objekt auch alle seine direkten Summanden enthält, nennen wir ein **Verdiersystem**.

2.2.4. Nach der Definition einer triangulierten Kategorie 2.1.8 haben wir für jedes Objekt  $X$  ein ausgezeichnetes Dreieck  $(X, 0, [1]X)$  und jeder Isomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} Y$  paßt in ein ausgezeichnetes Dreieck  $(X, Y, 0)$ . Folglich gehören zu einem gegebenen triangulierten System mit einem Objekt  $X$  auch alle seine Shifts und alle zu ihm isomorphen Objekte.

2.2.5 (**Diskussion der Terminologie**). Kashiwara und Schapira verwenden in [KS90] die Bezeichnung **Nullsystem** für das, was ich ein trianguliertes System nenne. Der Terminologie von Kashiwara und Schapira folge ich nicht, da ich derartige Systeme keineswegs nur betrachten will, um sie wegzuteilen. Die Bezeichnung als „Verdiersystem“ ist nicht üblich. Verdier selbst benutzt die Bezeichnung **souscatégorie épaisse**.

2.2.6. Verstehen wir ein trianguliertes System als volle Unterkategorie, so erbt es in natürlicher Weise die Struktur einer triangulierten Kategorie. Diejenigen Objekte, die von einem triangulierten Funktor zu Null gemacht werden, bilden offensichtlich sogar ein Verdiersystem. Das kleinste triangulierte System beziehungsweise Verdiersystem, das eine vorgegebene Menge von Objekten umfaßt, bezeichnen wir als das **von dieser Menge erzeugte triangulierte System** beziehungsweise **Verdiersystem**. Das von einer Menge von Objekten  $\mathcal{N}$  erzeugte triangulierte System notieren wir  $\langle \mathcal{N} \rangle = \langle {}_t\mathcal{N} \rangle_{\Delta}$ , wobei wir einen unteren Index  $\Delta$  verwenden, wenn wir betonen wollen, daß das triangulierte Erzeugnis gemeint ist, und in Anlehnung an unsere Vereinbarung aus [AL] 3.5.1 das untere Ausrufezeichen, wenn wir betonen wollen, daß das Symbol in der Klammer nicht einen einzelnen Erzeuger meint, sondern ein ganzes System von Erzeugern. Besteht  $\mathcal{N}$  aus einem einzigen Objekt  $N$ , so schreiben wir auch kürzer  $\langle N \rangle$  oder  $\langle N \rangle_{\Delta}$ . Für das von was auch immer erzeugte Verdiersystem verwenden wir analog die Notation  $\langle \rangle_{\Delta \ominus}$ .

*Beispiel 2.2.7.* In der Homotopiekategorie der Kategorie der Vektorräume über einem Körper  $k$  besteht das von  $k^2$  erzeugte Verdiersystem aus allen in beide Richtungen beschränkten Komplexen mit endlichdimensionalen Einträgen. Das von  $k^2$  erzeugte triangulierte System enthält jedoch nur beschränkte Komplexe

mit endlichdimensionalen Einträgen und gerader Eulercharakteristik, wir haben also  $\langle k^2 \rangle_{\Delta} \neq \langle k^2 \rangle_{\Delta \ominus}$ .

2.2.8. Ist ein triangulierter Funktor volltreu auf einer vollen Unterkategorie, so ist er auch volltreu auf dem von dieser Unterkategorie erzeugten Verdiersystem. Das folgt sofort aus 2.1.14 und dem Fünferlemma. Das Anwenden dieser Erkenntnis bezeichnet man oft als **dévissage**, französisch für „Aufschrauben“.

## Übungen

*Übung 2.2.9.* Ist ein triangulierter Funktor eine Äquivalenz von Kategorien, so ist auch jeder dazu quasiinverse Funktor trianguliert. In anderen Worten kann man unter keinen Umständen in einer triangulierten Kategorie noch zusätzliche Dreiecke auszeichnen derart, daß man wieder eine triangulierte Kategorie erhält.

*Übung 2.2.10.* Man betrachte den Funktor  $\mathbb{D}$ , der jedem Komplex  $C$  von abelschen Gruppen seinen dualen Komplex  $\mathbb{D}C := C^*$  im Sinne von [TG] ?? zuordnet, und versehe ihn mit der  $\mathbb{Z}$ -Struktur, die durch diejenigen Morphismen  $[1]\mathbb{D}C \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}[1]C$  erklärt wird, die auf der Komponente vom Grad  $n$  beider Komplexe das  $(-1)^n$ -fache der offensichtlichen Identifikation sind. Mit dieser  $\mathbb{Z}$ -Struktur ist  $\mathbb{D}$  ein triangulierter Funktor

$$\mathbb{D} : \text{Hot}_{\text{Ab}} \rightarrow \text{Hot}_{\text{Ab}}^{\text{opp}}$$

## 2.3 Quotienten triangulierter Kategorien

2.3.1. Seien  $\mathcal{T}$  eine **triangulierte Kategorie** und  $\mathcal{N}$  eine Menge von Objekten von  $\mathcal{T}$ . Im folgenden konstruieren wir ein Paar  $(\mathcal{T}/\mathcal{N}, \text{can})$  bestehend aus einer triangulierten Kategorie  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$  und einem **triangulierten Funktor**  $\text{can} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  derart, daß gilt:

1. Jedes Objekt aus  $\mathcal{N}$  wird unter  $\text{can}$  ein Nullobjekt in  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ ;
2. Ist  $\mathcal{D}$  eine weitere triangulierte Kategorie und  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  ein triangulierter Funktor, der alle Objekte aus  $\mathcal{N}$  zu Null macht, so gibt es genau einen triangulierten Funktor  $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $F = \tilde{F} \circ \text{can}$ .

Ein derartiges Paar ist in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen es den **Quotienten von  $\mathcal{T}$  nach  $\mathcal{N}$** .

2.3.2. Ist  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  ein triangulierter Funktor in eine weitere triangulierte Kategorie, der die Objekte aus  $\mathcal{N}$  zu Null macht und für den der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien  $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$  ist, so nenne ich  $F$  einen **Quotientenfunktor** oder genauer, wenn ich Verwechslungen mit Quotientenfunktoren



im Kontext abelscher Kategorien vermeiden will, einen **triangulierten Quotientenfunktor**. Man erinnere, daß nach 2.2.9 in diesem Fall jeder Quasiinverse zu unserer Äquivalenz auch trianguliert ist.

**Satz 2.3.3 (Konstruktion triangulierter Quotienten).** *Seien  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie und  $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$  ein **Verdiersystem**. So gilt:*

1. Die Menge  $S(\mathcal{V})$  aller Morphismen mit Abbildungskegel in  $\mathcal{V}$  ist ein **Oresystem**;
2. Die an  $S(\mathcal{V})$  **lokalisierte Kategorie**  $\mathcal{T}_{S(\mathcal{V})}$  wird eine triangulierte Kategorie, wenn wir sie mit der von  $\mathcal{T}$  induzierten  $\mathbb{Z}$ -Operation [1] versehen und als ausgezeichnete Dreiecke alle Dreiecke nehmen, die isomorph sind zu Bildern ausgezeichneter Dreiecke von  $\mathcal{T}$ ;
3. Der kanonische Funktor  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_{S(\mathcal{V})}$  ist ein Quotient von  $\mathcal{T}$  nach  $\mathcal{V}$ , die davon annullierten Objekte sind genau die Objekte von  $\mathcal{V}$ , und die davon zu Isomorphismen gemachten Morphismen sind genau die Morphismen mit Abbildungskegel in  $\mathcal{V}$ , die mithin sogar ein **gesättigtes Oresystem** bilden.

2.3.4. Mit diesem Satz ist auch klar, daß für jede Menge von Objekten  $\mathcal{N}$  einer triangulierten Kategorie  $\mathcal{T}$  der Quotient  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$  existiert: Man wendet schlicht die Konstruktion aus dem Satz an auf das von dieser Menge erzeugte Verdiersystem  $\langle \mathcal{N} \rangle_{\Delta \ominus}$  und setzt also in Formeln

$$\mathcal{T}/\mathcal{N} := \mathcal{T}_{S(\langle \mathcal{N} \rangle_{\Delta \ominus})}$$

Zusätzlich zeigt unser Satz dann, daß die von  $\text{can} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  zu Null gemachten Objekte genau die Objekte des von  $\mathcal{N}$  erzeugten Verdiersystems sind.

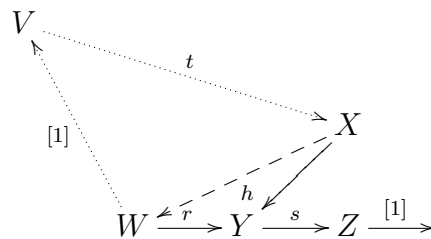
*Beweis.* 1. Daß unser System  $S := S(\mathcal{V})$  stabil ist unter Verknüpfung, folgt sofort aus dem Oktaederaxiom. Daß sich jeder Winkel

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow s \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

mit  $s \in S$  ergänzen läßt zu einem kommutativen Diagramm

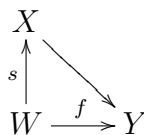
$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

mit  $t \in S$  folgt auch aus dem Oktaederaxiom, indem man nämlich erst das Dreieck  $X \rightarrow Z \rightarrow N \rightarrow$  über  $s$  bildet und damit den Oktaeder zur Komposition  $Y \rightarrow Z \rightarrow N$ . Dessen untere Ecke, also die dritte Ecke des Dreiecks über der Komposition, ist dann das gesuchte  $W$ . Sind schließlich  $f, g : X \rightarrow Y$  gegeben und  $s \in S$  und  $sf = sg$ , also  $s \circ (f - g) = 0$ , so betrachten wir das ausgezeichnete Dreieck über  $s$  und folgern mit 2.1.14 die Existenz von  $h : X \rightarrow W$  mit  $(f - g) = r \circ h$ .



Bilden wir nun, wie durch die gepunkteten Pfeile angedeutet, das ausgezeichnete Dreieck über  $h$ , so haben wir  $t \in S$  und  $(f - g) \circ t = 0$ . Damit haben wir gezeigt, daß unser System rechts-Ore ist im Sinne von 1.3.3. Daß es auch links-Ore sein muß, folgt durch Übergang zur opponierten Kategorie.

2. Nach 1.3.13 ist unsere lokalisierte Kategorie  $\mathcal{T}_S$  additiv und der kanonische Funktor  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_S$  desgleichen. Die  $\mathbb{Z}$ -Operation geht ohne Schwierigkeiten auf die Lokalisierung über. Daß unsere in 2.3.3 ausgezeichneten Dreiecke die Lokalisierung sogar zu einer triangulierten Kategorie machen, scheint mir klar, da sich ja jeder Morphismus  $X \rightarrow Y$  der lokalisierten Kategorie einbetten läßt in ein kommutatives Diagramm



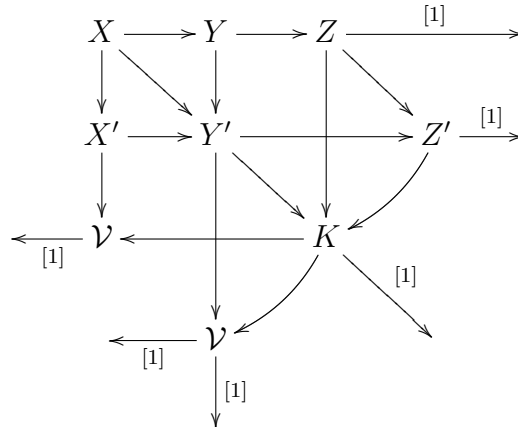
mit der Eigenschaft, daß  $s$  und  $f$  von Morphismen in  $\mathcal{T}$  herkommen und daß  $s$  in  $\mathcal{T}_S$  ein Isomorphismus wird. Und nun muß man nur 2.3.5 anwenden und erinnern, daß nach 1.3.21 jedes kommutative Dreieck oder Viereck in der lokalisierten Kategorie bis auf Isomorphismus von einem kommutativen Dreieck oder Viereck in der ursprünglichen Kategorie herkommt.

3. Die universelle Eigenschaft scheint mir evident. Geht ein Objekt unter dem Quotientenfunktor nach Null, so muß die Identität darauf zur Nullabbildung werden. Schreiben wir diese Bedingung in der Kategorie der Brüche, so impliziert sie leicht, daß unser Objekt direkter Summand eines Objekts von  $\mathcal{N}$  sein muß. Aufgrund unserer Definition eines Verdiersystems gehört unser Objekt dann aber sogar selbst bereits zu  $\mathcal{N}$ .  $\square$

**Lemma 2.3.5.** Sei  $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$  ein Verdiersystem in einer triangulierten Kategorie.

Haben bei einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken zwei der Objekt-morphismen Kegel in  $\mathcal{V}$ , so auch der Dritte.

*Beweis.* Wir argumentieren anhand des folgenden Diagramms:



Es entsteht durch zweimaliges Anwenden des Oktaederaxioms auf die beiden Kompositionen im Rechteck oben links und zeigt, daß sowohl  $Z \rightarrow K$  als auch  $Z' \rightarrow K$  Kegel in  $\mathcal{V}$  haben. Mit nochmaligem Anwenden des Oktaederaxioms folgt dann, daß auch  $Z \rightarrow Z'$  Kegel in  $\mathcal{V}$  hat.  $\square$

## 2.4 Derivierte Kategorien

**Definition 2.4.1.** Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie, so bezeichnen wir den Quotienten im Sinne von 2.3.3 der zugehörigen Homotopiekategorie nach dem Verdiersystem aller exakten Komplexe mit

$$\text{Der}_{\mathcal{A}} = \text{Der}(\mathcal{A}) := \text{Hot}(\mathcal{A}) / (\text{exakte Komplexe})$$

und nennen diese triangulierte Kategorie die **derivierte Kategorie von  $\mathcal{A}$** .

2.4.2. Nach der in 2.3.3 gegebenen Konstruktion ist die derivierte Kategorie also genau die Lokalisierung der Homotopiekategorie an den Quasiisomorphismen aus ???. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert uns folglich Funktoren

$$\mathcal{H}^i : \text{Der}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

mit der Eigenschaft, daß jedes ausgezeichnete Dreieck eine lange exakte Sequenz liefert und daß ein Morphismus ein Isomorphismus ist genau dann, wenn er Isomorphismen auf allen  $\mathcal{H}^i$  induziert. Ich werde Isomorphismen in der derivierten Kategorie selbst dann manchmal  $\xrightarrow{\sim}$  notieren, wenn sie nicht durch eine Kettenabbildung repräsentiert werden können und diese Notation noch nicht bereits durch unsere Konvention ??? abgedeckt ist.

2.4.3. Wir verwenden für einen Ring  $A$  auch gerne die Notationen  $\text{Der}_A = \text{Der}(A\text{-Mod})$  und  $\text{Der}_{-A} = \text{Der}(\text{Mod } A)$  für die derivierten Kategorien der entsprechenden Kategorien von  $A$ -Moduln.

2.4.4. Gegeben eine kurze exakte Sequenz  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  von Komplexen in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  bilden wir in  $\text{Der}(\mathcal{A})$  das **der kurzen exakten Sequenz zugeordnete ausgezeichnete Dreieck**

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$$

wie folgt: Wir beachten im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & \text{Keg}(f) & \rightarrow & [1]X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & & [1]X \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ [-1]\text{Keg}(g) & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & \text{Keg}(g) \end{array}$$

mit dritter oberer Vertikale  $(0, g)$  und unterer erster Vertikale  $(f, 0)^\top$ , daß diese Vertikalen Quasiisomorphismen sind. Das erkennt man für die dritte Vertikale an der langen exakten Homologiesequenz der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$\text{Keg}(\text{id}_X) \hookrightarrow \text{Keg}(f) \xrightarrow{(0, g)} Z$$

In der Tat prüft man leicht, daß die Homologie von  $\text{Keg}(\text{id}_X)$  verschwindet. Weiter erkennt man, daß die linken und mittleren Quadrate kommutieren, wohingegen das rechte Rechteck in der Homotopiekategorie kommutiert. So erhalten wir sogar zwei ausgezeichnete Dreiecke und einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen den beiden. Diese Konstruktion liefert sogar einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Komplexen in die Kategorie der ausgezeichneten Dreiecke der derivierten Kategorie.

2.4.5. Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{I}$  betrachten wir in der triangulierten Kategorie  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  das Verdiersystem  $\text{Hot}^+(\mathcal{I})$  aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe.

**Proposition 2.4.6 (Derivierte Kategorie und Auflösungen).** *Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $i\mathcal{A}$  die volle additive Unterkategorie der injektiven Objekte. So restringiert der Quotientenfunktor zu einem Isomorphismus auf sein Bild*

$$\text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{A})$$

und der inverse Funktor ist ein partieller Rechtsadjungierter des Quotientenfunktors  $Q : \text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$ .

2.4.7. Diese Aussage wird sich als ein Spezialfall von 2.4.14 erweisen. Genauer folgt sie in der dort verwendeten Notation aus der Erkenntnis  $\text{Hot}^+(i\text{Ab}) \subset (\text{exakte Komplexe})^\perp$ , die ihrerseits aus dem Hauptlemma der homologischen Algebra folgt.

*Beweis.* Das Hauptlemma der homologischen Algebra zeigt für  $I \in \text{Hot}^+(i\mathcal{A})$  und einen azyklischen Komplex  $N \in \text{Hot}(\mathcal{A})$  das Verschwinden des Morphismenraums  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(N, I) = 0$ . Gegeben ein Quasiisomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} B$  in  $\text{Hot}(\mathcal{A})$  ist der Abbildungskegel ein azyklischer Komplex und er induziert folglich eine Bijektion

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(B, I) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, I)$$

Aufgrund von 1.2.13.1 oder auch durch explizite Inspektion im Fall einer Lokalisierung unter Ore-Bedingungen liefert der Quotientenfunktor  $Q$  also für alle  $X \in \text{Hot}(\mathcal{A})$  eine Bijektion

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(X, I) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(QX, QI) \quad \square$$

2.4.8 (**Erweiterungen als Morphismen**). Sind  $A, B \in \mathcal{A}$  Objekte einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven, so erhalten wir eine Bijektion

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(A, B) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B)$$

durch die Wahl einer injektiven Auflösung  $B \hookrightarrow I^\triangleleft$  und die natürlichen Isomorphismen  $\mathcal{H}^q \mathcal{A}(A, I^\triangleleft) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, [q]I^\triangleleft) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]I^\triangleleft) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, [q]B)$  nach 2.4.6 für den mittleren Isomorphismus. Man prüft auch leicht, daß unsere Bijektion oben unabhängig ist von der Wahl der injektiven Auflösung von  $B$ . Hat  $\mathcal{A}$  nicht genug Injektive, so vereinbaren wir den entsprechenden Morphismenraum in der derivierten Kategorie als Definition von  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(A, B)$ .

2.4.9 (**Erweiterungen der Grade Null und Eins**). Natürlich haben wir speziell  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{[0]}(M, N) = \mathcal{A}(M, N)$ . Wie im Fall abelscher Gruppen [TS] 6.5.6 konstruiert man auch im allgemeinen eine Bijektion zwischen  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{[1]}(M, N)$  und der Menge aller Isomorphieklassen von kurzen exakten Sequenzen  $N \hookrightarrow E \rightarrow M$  in  $\mathcal{A}$ .

2.4.10 (**Selbsterweiterungen**). Gegeben ein Objekt  $A \in \mathcal{A}$  einer abelschen Kategorie bilden insbesondere seine Selbsterweiterungen mit der Komposition von Morphismen der derivierten Kategorie als Multiplikation einen nichtnegativ graduierten Ring

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, A) = \bigoplus_{q \geq 0} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(A, A)$$

Wir nennen ihn den **Ring der Selbsterweiterungen von  $A$** .

*Beispiel 2.4.11.* Ist speziell  $X$  ein topologischer Raum und bezeichnet  $\text{Ab}/_X$  wie in ?? die Kategorie aller abelschen Garben auf  $X$ , so haben wir für alle  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  kanonische Isomorphismen  $\Gamma\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{Ab}/_X(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F})$  und mit ?? ergeben sich kanonische Isomorphismen  $H^i(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{Ab}/_X}^i(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F})$  und insbesondere ein Isomorphismus

$$H^*(X; \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{Ab}/_X}^*(\mathbb{Z}_X, \mathbb{Z}_X)$$

Auf diese Weise erhält die Garbenkohomologie in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Rings. Wir nennen ihn den **garbentheoretischen Kohomologiering**, um ihn von unserem singulären Kohomologiering aus [TS] 6.8.2 zu unterscheiden. Offensichtlich trägt die Kohomologie jeder abelschen Garbe in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Rechtsmoduls über dem garbentheoretischen Kohomologiering.

2.4.12 (**Kohomologie eines Komplexes als Morphismenraum**). Gegeben ein Ring  $R$  und ein Komplex  $L \in \text{Hot}(R\text{-Mod})$  erhalten wir speziell mit [TS] 1.4.11 und der dualen Aussage zu 2.4.6 kanonische Isomorphismen von  $R$ -Moduln

$$\mathcal{H}^q L \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_R([-q]R, L) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_R([-q]R, L)$$

2.4.13. Gegeben eine triangulierte Kategorie  $\mathcal{T}$  und darin eine Menge von Objekten  $\mathcal{N}$  setzen wir

$$\mathcal{N}^\perp := \{I \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(N, I) = 0 \quad \forall N \in \mathcal{N}\}$$

und bezeichnen die Objekte von  $\mathcal{N}^\perp$  als  $\mathcal{N}$ -**injektiv**. Offensichtlich ist  $\mathcal{N}^\perp$  stets ein **Verdiersystem**.

**Satz 2.4.14 (Triangulierte Quotienten über Auflösungen).** *Gegeben eine triangulierte Kategorie  $\mathcal{T}$  und darin eine Menge von Objekten  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  ist der restringierte Lokalisierungsfunktor ein volltreuer Funktor  $\mathcal{N}^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}/\mathcal{N}$  und induziert eine Äquivalenz auf die volle Unterkategorie derjenigen Objekte des Quotienten, auf denen der partielle Rechtsadjungierte des Lokalisierungsfunktors existiert.*

2.4.15. Diese Aussage wird sich als ein Spezialfall von 3.2.19?? erweisen. Durch Übergang zu den opponierten Kategorien folgert man in offensichtlicher Weise eine duale Aussage.

2.4.16. Ist der partielle Rechtsadjungierte  $R$  von  $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  bei  $B$  definiert, so ist mithin die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $QRB \xrightarrow{\sim} B$ , und gilt zusätzlich  $B = QA$ , so liegt nach [TF] 4.8.11 der Kegel über der Einheit der Adjunktion  $A \rightarrow RQA$  in  $\mathcal{N}$ .

*Beweis.* Aufgrund von 1.2.13.1 oder auch durch explizite Inspektion im Fall einer Lokalisierung unter Ore-Bedingungen liefert für alle  $I \in \mathcal{N}^\perp$  und  $Y \in \mathcal{T}$

der Quotientenfunktor eine Bijektion  $\mathcal{T}(Y, I) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{N})(Y, I)$ . Also ist die Restriktion des Quotientenfunktors auf  $\mathcal{N}^\perp$  volltreu. Existiert umgekehrt für ein Objekt  $A \in \mathcal{T}/\mathcal{N}$  ein Objekt  $RA = I \in \mathcal{T}$  nebst in  $Y$  natürlichen Bijektionen  $\mathcal{T}(Y, I) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{N})(Y, A)$ , so folgt unmittelbar  $I \in \mathcal{N}^\perp$ . Nach 1.2.13.2 induziert schließlich für partielle Adjungierte von Lokalisierungsfunktoren die Adjunktion einen Isomorphismus  $QI = QRA \xrightarrow{\sim} A$ . Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

2.4.17. **WOHIN?** Unter dem **wesentlichen Bild** eines Funktors  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  versteht man die volle Unterkategorie aller Objekte von  $\mathcal{B}$ , die isomorph sind zu Objekten der Gestalt  $F(A)$  für  $A \in \mathcal{A}$ .

2.4.18 (**Derivierte Kategorie zu einem Hauptidealring**). Gegeben ein Hauptidealring gibt es für alle Komplexe  $C \in \text{Der}(A\text{-Mod})$  Isomorphismen  $C \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{H}^k C)[-k]$  in  $\text{Der}(A\text{-Mod})$  zwischen  $C$  und dem Komplex seiner Kohomologiegruppen mit verschwindendem Differential, die beim Übergang zur Kohomologie den offensichtlichen Isomorphismus  $\mathcal{H}C \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}\mathcal{H}C$  induzieren. In der Tat können wir nach ?? ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß wir einen Komplex von freien Moduln vor uns haben. Dann finden wir Spaltungen der kurzen exakten Sequenzen  $\ker \partial \hookrightarrow C^k \twoheadrightarrow \text{im } \partial$  und die zugehörigen Kompositionen  $C^k \twoheadrightarrow \ker \partial \rightarrow \mathcal{H}^k C$  induzieren einen Quasiisomorphismus der gesuchten Art.

2.4.19. Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  heißt das Supremum

$$\text{hdim}(\mathcal{A}) := \sup\{i \mid \exists M, N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{A}^{[i]}(M, N) \neq 0\}$$

die **homologische Dimension von**  $\mathcal{A}$ . Im Fall  $\text{hdim}(\mathcal{A}) < \infty$  sagen wir auch, unsere abelsche Kategorie habe **endliche homologische Dimension**. Homologische Dimension  $-\infty$  haben genau die **Nullkategorien**, als da heißt, diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle Objekte Nullobjekte sind. Homologische Dimension  $\leq 0$  haben genau diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle kurzen exakten Sequenzen spalten. Derartige Kategorien heißen **halbeinfach**. Abelsche Kategorien einer homologischen Dimension  $\leq 1$  bezeichnet man gleichbedeutend auch als **erbliche Kategorien**, da sich bei ihnen die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt. Diese Terminologie ist allerdings gefährlich, denn es gibt durchaus abelsche Kategorien, die nicht von homologischer Dimension  $\leq 1$  sind, bei denen sich aber dennoch die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt, etwa weil sie außer der Null gar keine projektiven Objekte besitzen.

2.4.20 (**Derivierte Kategorien erblicher Kategorien**). Unsere Beschreibung 2.4.18 der derivierten Kategorie zu einem Hauptidealring gilt analog für Komplexe in einer beliebigen abelschen Kategorie einer homologischen Dimension höchstens Eins mit genug Projektiven oder genug Injektiven. Für Vektorräume oder allgemeiner für Komplexe in einer beliebigen abelschen Kategorie einer homologischen Dimension höchstens Null gilt Analoges sogar für die Homotopiekategorie

und die fragliche Homotopieäquivalenz ist eindeutig bestimmt, vergleiche [TS] 1.4.13.

*Ergänzung 2.4.21.* Ich sehe keinen Grund, aus dem der natürliche Funktor von der Homotopiekategorie zur derivierten Kategorie mit unendlichen Produkten oder Koprodukten verträglich sein sollte.

## Übungen

*Übung 2.4.22.* Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und sei  $z \in \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{A})(\text{id}, \text{id})$  eine natürliche Transformation des Identitätsfunktors zu sich selbst. So gilt für alle  $M, N \in \mathcal{A}$  und jede Erweiterung  $f \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, N)$  in  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, N)$  die Identität  $z_N \circ f = f \circ z_M$ . Speziell gilt für die Kategorie  $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$  der Moduln über einem Ring und  $z \in Z(R)$  ein Element des Zentrums stets  $(z \cdot) \circ f = f \circ (z \cdot)$ .

*Übung 2.4.23.* Gegeben ein kommutatives Diagramm von kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc} B' & \hookrightarrow & C' & \twoheadrightarrow & D' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \end{array}$$

in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  erhalten wir einen ausgezeichneten Homomorphismus von dem nach 2.4.4 der ersten Sequenz zugeordneten ausgezeichneten Dreieck in das einmal verdrehte der zweiten Sequenz zugeordnete ausgezeichnete Dreieck, indem wir vom offensichtlichen Homomorphismus von Dreiecken

$$\begin{array}{ccccccc} [-1] \text{Keg}' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & \text{Keg}' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [-1] \text{Keg} & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & \text{Keg} \end{array}$$

ausgehen und vom oberen und unteren dieser Dreiecke jeweils den in 2.4.4 gegebenen Isomorphismus zu dem unseren jeweiligen Sequenzen zugeordneten Dreieck verwenden.

*Übung 2.4.24 (Derivieren durch Lokalisieren der Komplexkategorie).* Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Man prüfe, daß Kettenabbildungen  $f, g \in \text{Ket}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  genau dann homotop sind, wenn es eine Kettenabbildung  $h : S\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X \rightarrow Y$  gibt mit  $f = h \circ \delta_0$  und  $g = h \circ \delta_1$ . Hier meint  $S\Delta_1$  den Komplex der Simplicialketten des eindimensionalen Standardsimplex. Andererseits sind im Diagramm

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \end{array} S\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X \xrightarrow{p} X$$



beide Kompositionen die Identität und  $p$  ist eine Homotopieäquivalenz. Jeder Funktor, der Homotopieäquivalenzen zu Isomorphismen macht, muß also über  $\text{Ket}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{A}}$  faktorisieren. Andererseits werden unter diesem Funktor auch alle Homotopieäquivalenzen Isomorphismen. Bezeichnet also  $H$  die Menge der Homotopieäquivalenzen, so liefert der offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$H^{-1} \text{Ket}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}$$

Bezeichnet weiter  $Q$  die Menge aller Quasiisomorphismen in  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$  und  $\bar{Q}$  die Menge aller Quasiisomorphismen in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$ , so liefert demnach der offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$Q^{-1} \text{Ket}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \bar{Q}^{-1} \text{Hot}_{\mathcal{A}}$$

Damit erhalten wir eine alternative Konstruktion der derivierten Kategorie  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$  als Lokalisierung der Kategorie  $\text{Ket}_{\mathcal{A}}$  der Komplexe nach Quasiisomorphismen.

## 2.5 Vergleich verschiedener Kohomologieringe\*

2.5.1. Ist  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie und sind  $I^*, J^* \in \text{Ket}_{\mathcal{I}}$  Komplexe in  $\mathcal{I}$ , so bilden wir analog wie in [TS] 1.4.11 den Komplex von abelschen Gruppen  $\text{Hom}_{\mathcal{I}}(I^*, J^*)$ . Speziell wird  $\text{End}_{\mathcal{I}}(I^*)$  unter der Verknüpfung von Morphismen ein dg-Ring.

**Satz 2.5.2 (Abstrakte Interpretation des cup-Produkts).** *Ist  $X$  ein lokal singular-azyklischer Raum, so ist unser Vergleichsisomorphismus aus ?? ein Ringisomorphismus zwischen dem singulären Kohomologiering und dem garbentheoretischen Kohomologiering*

$$H_{\text{sing}}^*(X) \xrightarrow{\sim} H_{\text{garb}}^*(X)$$

2.5.3. Wir führen zunächst eine geeignete Terminologie ein. Unter einem **Quasiisomorphismus** von einem dg-Ring  $A$  in einen dg-Ring  $B$  verstehen wir einen Homomorphismus von dg-Ringen, der einen Isomorphismus auf der Kohomologie induziert. Unter einem **Morphismenbimodul** von einem dg-Ring  $A$  in einen dg-Ring  $B$  verstehen wir ein Paar  $(M, c)$  bestehend aus einem  $A$ - $B$ -dg-Bimodul  $M$  nebst einer Klasse  $c \in \mathcal{H}^0 M$ , die eine Basis von  $\mathcal{H}M$  als  $\mathcal{H}B$ -Rechtsmodul bildet. Wir sagen dann auch,  $c$  sei eine **Quasibasis** des  $B$ -dg-Moduls  $M$ . Ist zusätzlich  $c$  auch eine Basis von  $\mathcal{H}M$  als  $\mathcal{H}A$ -Linksmodul, so nennen wir unseren Morphismenbimodul  $(M, c)$  einen **Isobimodul**. Jeder Morphismenbimodul zwischen dg-Ringen liefert einen Homomorphismus zwischen ihren Kohomologieringen, der dadurch charakterisiert werden kann, daß  $a \mapsto b$  gleichbedeutend ist

zu  $ac = cb$ . Ist unser Morphismenbimodul ein Isobimodul, so ist besagter Homomorphismus sogar ein Isomorphismus. Jeder Quasiisomorphismus liefert einen Isobimodul in offensichtlicher Weise. Was an dieser Stelle noch fehlt, ist eine wie auch immer geartete Verknüpfung von Morphismenbimoduln, und die ist im allgemeinen auch nicht unproblematisch. Im Fall von dg-Ringen, die torsionsfrei sind über  $\mathbb{Z}$ , wird das in ?? diskutiert.

*Beweis von 2.5.2.* Wir wählen eine injektive Auflösung  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  und faktorisieren sie mithilfe von ?? über die Auflösung durch lokale singuläre Koketten  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^*$  als  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^* \rightarrow \mathcal{I}^*$ . Nach 2.5.3 reicht es zu zeigen, daß unsere Faktorisierung  $\mathcal{S}_X^* \rightarrow \mathcal{I}^*$  eine Quasibasis des Komplexes

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{S}_X^*, \mathcal{I}^*)$$

ist, und zwar sowohl für die Linksoperation von  $\mathrm{End} \mathcal{I}^*$  als auch für die Rechtsoperation von  $S^*X$ , die vom dg-Ring-Homomorphismus  $S^*X \rightarrow \mathrm{End} \mathcal{S}_X^*$ ,  $c \mapsto c \cup$  induziert wird. Der erste Teil dieser Behauptung folgt mit ?? aus dem Quasiisomorphismus  $\mathcal{S}_X^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^*$ . Für den zweiten Teil betrachten wir das kommutative Diagramm von Komplexen

$$\begin{array}{ccc} S^*X & = & S^*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_X^*, \mathcal{S}_X^*) & & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{S}_X^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_X^*, \mathcal{I}^*) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{I}^*) \end{array}$$

Hier ist die obere linke Vertikale durch  $c \mapsto c \cup$  gegeben und die anderen Pfeile sind hoffentlich selbsterklärend. Nach ?? ist die Komposition in der rechten Vertikale ein Quasiisomorphismus. Nach ?? ist auch die unterste Horizontale ein Quasiisomorphismus. Folglich ist auch die Verknüpfung in der linken Vertikalen ein Quasiisomorphismus. Des weiteren haben alle Komplexe der linken Vertikale natürliche Strukturen als dg-Rechtsmoduln über  $S^*X$  und die Morphismen sind mit diesen Strukturen verträglich. Das zeigt den zweiten Teil der Behauptung. Auf diese Weise vermittelt also unser dg-Bimodul in der Tat einen Isomorphismus zwischen den beiden fraglichen Kohomologieringen. Es ist dann nicht schwer zu sehen, daß dieser Isomorphismus übereinstimmt mit dem in ?? konstruierten Vergleichsisomorphismus.  $\square$

## 2.6 Beschränkte derivierte Kategorien

**Definition 2.6.1.** Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{I}$  betrachten wir in der triangulierten Kategorie  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  die Verdiersysteme

$$\begin{aligned} \text{Hot}_{\mathcal{I}}^+ &= \text{Hot}^+(\mathcal{I}) && \text{aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe;} \\ \text{Hot}_{\mathcal{I}}^- &= \text{Hot}^-(\mathcal{I}) && \text{aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe;} \\ \text{Hot}_{\mathcal{I}}^b &= \text{Hot}^b(\mathcal{I}) && \text{aller beidseitig beschränkten Komplexe.} \end{aligned}$$

Im Fall einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  schreiben wir kurz

$$\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\sharp} = \text{Der}^{\sharp}(\mathcal{A})$$

mit  $\sharp \in \{+, -, b\}$  für die Quotienten dieser triangulierten Kategorien nach dem Verdiersystem aller azyklischen Komplexe in der jeweiligen Kategorie von Komplexen.

**Lemma 2.6.2.** Für jede abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  liefern die offensichtlichen Funktoren volltreue Einbettungen

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Der}^+(\mathcal{A}) & & \\ & \nearrow \sim & \hookrightarrow & \searrow \sim & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\sim} & \text{Der}^b(\mathcal{A}) & & \text{Der}(\mathcal{A}) \\ & \searrow \sim & \hookrightarrow & \nearrow \sim & \\ & & \text{Der}^-(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

Des Weiteren ist ein Komplex im  $\text{Der}(\mathcal{A})$  isomorph zum Bild eines Objekts unter einer unserer Einbettungen genau dann, wenn seine Kohomologie nach oben beschränkt beziehungsweise nach unten beschränkt beziehungsweise beschränkt beziehungsweise nur im Grad Null konzentriert ist.

2.6.3. Oft bezeichnen wir später mit  $\text{Der}^{\sharp}(\mathcal{A})$  auch das essentielle Bild unserer volltreuen Einbettungen.

*Beweis.* Wir verwenden die Abschneidefunktoren, wie sie in 2.6.4 eingeführt werden. Um zu zeigen, daß  $\text{Der}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$  volltreu ist, wenden wir 1.3.8 an: Ist  $s : X \rightarrow Y$  ein Quasiisomorphismus mit  $Y \in \text{Hot}^-(\mathcal{A})$ , so ist für hinreichend großes  $n$  der Morphismus  $h : \tau^{\leq n} X \rightarrow X$  ein Quasiisomorphismus und leistet das Gewünschte. Die anderen Fälle mit Ausnahme der Einbettung von  $\mathcal{A}$  behandelt man ähnlich. Im Fall der Einbettung von  $\mathcal{A}$  zeigt der Funktor  $\mathcal{H}^0$ , daß sie treu ist. Ist andererseits  $X$  ein Komplex, dessen Kohomologie nur im Grad Null lebt, so

liefern die Quasiisomorphismen  $X \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0} X \xleftarrow{\sim} \tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X$  einen Isomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 X$  in der derivierten Kategorie, wo wir  $\mathcal{H}^0 X$  als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen. Also ist jeder Komplex mit trivialer Kohomologie außerhalb von Null in der derivierten Kategorie isomorph zu seiner Kohomologie. Damit gilt es nur noch zu zeigen, daß die Einbettung  $\mathcal{A} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$  surjektiv ist auf Morphismen. Dazu stellen wir für  $A, B \in \mathcal{A}$  einen Morphismus als Bruch  $A \xleftarrow{\sim} X \rightarrow B$  in der Homotopiekategorie dar mit  $A \xleftarrow{\sim} X$  einem Quasiisomorphismus. Wenden wir nun die Abschneidefunktionen in der Homotopiekategorie auf unseren Bruch an, so erhalten wir einen Bruch  $A \xleftarrow{\sim} \tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X \rightarrow B$ , der offensichtlich denselben Morphismus darstellt. Nun steht jedoch links ein echter Isomorphismus und wir sind fertig.  $\square$

**2.6.4 (Abschneidefunktionen).** Gegeben ein Komplex  $X = (X^n, d^n)$  in einer abelschen Kategorie erklären wir für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Komplexe

$$\begin{array}{cccccccc} \tau^{\leq n} X & \dots \rightarrow & X^{n-1} & \rightarrow & \ker d^n & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\ \tau^{< n+1} X & \dots \rightarrow & X^{n-1} & \rightarrow & X^n & \rightarrow & \text{im } d^n & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\ \tau^{> n} X & \dots \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{im } d^n & \rightarrow & X^{n+1} & \rightarrow & X^{n+2} & \rightarrow & \dots \\ \tau^{\geq n+1} X & \dots \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{cok } d^n & \rightarrow & X^{n+2} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Der Buchstabe  $\tau$  steht für englisch „truncated“ oder französisch „tronqué“. Wir haben ein offensichtliches kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Quasiisomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccccc} \tau^{< n+1} X & \hookrightarrow & X & \twoheadrightarrow & \tau^{\geq n+1} X \\ \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\ \tau^{\leq n} X & \hookrightarrow & X & \twoheadrightarrow & \tau^{> n} X \end{array}$$

Sicher gilt  $\mathcal{H}^i(\tau^{\leq n} X) = \mathcal{H}^i(\tau^{< n+1} X) = 0$  für  $i > n$  und die offensichtlichen Morphismen  $\tau^{\leq n} X \rightarrow \tau^{< n+1} X \rightarrow X$  induzieren für  $i \leq n$  Isomorphismen auf den  $i$ -ten Kohomologiegruppen. Der offensichtliche Morphismus ist also stets ein Isomorphismus  $\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{< n+1} X$  in der derivierten Kategorie, und verschwinden alle  $\mathcal{H}^i X$  für  $i > n$ , so liefern die offensichtlichen Morphismen in der derivierten Kategorie Isomorphismen  $\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{< n+1} X \xrightarrow{\sim} X$ . Analoges gilt für das andere Abschneiden. Offensichtlich machen alle diese Abschneidefunktionen homotope Abbildungen zu homotopen Abbildungen und Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen und induzieren folglich Abschneidefunktionen sowohl auf der Homotopiekategorie als auch auf der derivierten Kategorie. Wir verwenden für diese induzierten Funktoren dieselbe Notation.

**2.6.5.** Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  setzen wir

$$\begin{aligned} \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} &:= \{X \in \text{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i > n\} \\ \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} &:= \{X \in \text{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i < n\} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n+1}$  und  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \supset \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$ .

**Proposition 2.6.6 (über Abschneidefunktoren).** *Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $n \in \mathbb{Z}$ . So haben wir:*

1. Für alle  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$  und  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$  gilt  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$ ;
2. Die Einbettung  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$  besitzt stets einen Rechtsadjungierten  $\tau^{\leq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$ ;
3. Die Einbettung  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$  besitzt stets einen Linksadjungierten  $\tau^{\geq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n}$ ;
4. Die Einheit beziehungsweise Koeinheit zu diesen Adjunktionen lassen sich für jedes  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$  auf genau eine Weise ergänzen zu einem ausgezeichneten Dreieck

$$\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n+1} X \rightarrow [1]\tau^{\leq n} X$$

und dieses Dreieck ist funktoriell in  $X$ .

*Beweis.* Jeder Morphismus aus  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  läßt sich natürlich darstellen als ein Bruch  $X \leftarrow Z \rightarrow Y$  von Morphismen in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  mit einem Quasiisomorphismus  $Z \xrightarrow{\sim} X$ . Unter der Annahme  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}(\mathcal{A})$  können wir diesen Bruch erweitern durch den Quasiisomorphismus  $\tau^{\leq n} Z \xrightarrow{\sim} Z$ . Unter der Annahme  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}(\mathcal{A})$  dürfen wir weiter aufgrund des Quasiisomorphismus  $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq n+1} Y$  annehmen, daß  $Y$  durch einen Komplex dargestellt wird, der Null ist in Graden  $\leq n$ . Die erste Aussage folgt nun wegen  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(\tau^{\leq n} Z, Y) = 0$ , es gibt ja noch nicht einmal von Null verschiedene Kettenabbildungen zwischen diesen beiden Komplexen. Wir erhalten mit den Abschneidefunktoren aus 2.6.4 nun offensichtlich eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $\tau^{\leq n} X \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/\tau^{\leq n} X$  nebst einem offensichtlichen Quasiisomorphismus  $X/\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq n+1} X$  und so mit 2.4.4 ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n+1} X \rightarrow [1]\tau^{\leq n} X$$

in der derivierten Kategorie  $\text{Der}(\mathcal{A})$ . Die Eindeutigkeit des dritten Morphismus folgt mit 2.1.17 aus Teil 1. Um nun die erste Adjunktion zu zeigen, müssen wir für  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$  und  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$  zeigen  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(Y, \tau^{\leq n} X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(Y, X)$ . Das folgt jedoch sofort aus den bereits bewiesenen Teilen. Die andere Adjunktion zeigt man genauso.  $\square$

## Übungen

*Übung 2.6.7.* Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $Y \in \text{Der}(\mathcal{A})$  und  $n \in \mathbb{Z}$ . Man zeige: Genau dann gilt  $Y \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{A})$ , wenn gilt  $\text{Der}(X, Y) = 0$  für alle  $X \in \text{Der}^{\leq n-1}(\mathcal{A})$ . Man formuliere und zeige auch die duale Aussage.

*Ergänzende Übung 2.6.8.* Man zeige: Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{I}$  mit der Karoubi-Eigenschaft liefert die Einbettung der mit Grad Null endenden Komplexe  $\text{Hot}^{\leq 0}(\mathcal{I}) \subset \text{Hot}^+(\mathcal{I})$  eine Äquivalenz mit der Kategorie aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe  $T$  mit  $\text{Hot}(I[0], T[n]) = 0$  für alle  $n > 0$  und alle  $I \in \mathcal{I}$ . Ebenso liefert die Einbettung der mit Grad Null beginnenden Komplexe  $\text{Hot}^{\geq 0}(\mathcal{I}) \subset \text{Hot}^-(\mathcal{I})$  eine Äquivalenz mit der Kategorie aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe  $T$  mit  $\text{Hot}(T[n], I[0]) = 0$  für alle  $n < 0$  und alle  $I \in \mathcal{I}$ .

*Übung 2.6.9 (Ausgezeichnete Dreiecke als kurze exakte Sequenzen).* Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  liefert der Funktor  $\mathcal{H}^0$  eine Äquivalenz zwischen der Kategorie derjenigen ausgezeichneten Dreiecke  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow$  in  $\text{Der}(\mathcal{A})$ , bei denen die Objekte zum Bild von  $\mathcal{A}$  gehören, und der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in  $\mathcal{A}$ . Ein quasiinverser Funktor kann wie in 2.4.4 beschrieben konstruiert werden.

*Übung 2.6.10.* Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  und ein ausgezeichnetes Dreieck  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow$  in  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$  mit  $\tau^{\leq 0}Y \xrightarrow{\sim} Y$  erhalten wir mit den offensichtlichen Morphismen ein ausgezeichnetes Dreieck  $\tau^{\leq 1}X \rightarrow Y \rightarrow \tau^{\leq 0}Z \rightarrow$ . Ebenso erhalten wir unter der Annahme  $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0}Y$  mit den offensichtlichen Morphismen ein ausgezeichnetes Dreieck  $\tau^{\geq 0}X \rightarrow Y \rightarrow \tau^{\geq -1}Z \rightarrow$ . Hinweis: Fünferlemma.

*Übung 2.6.11.* Gegeben ein linksnoetherscher Ring  $A$  liefert die Einbettung einen volltreuen Funktor  $\text{Der}^-(A\text{-modfg}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^-(A\text{-mod})$ .

*Übung 2.6.12.* Gegeben ein nichtnegativ  $\mathbb{Z}$ -graduierter Ring  $A$  mit halbeinfacher Nullkomponente  $A^0$  und allen  $A^n$  von endlicher Länge als  $A^0$ -Linksmoduln liefert die Einbettung Kategorie der graduierten Moduln endlicher Länge einen volltreuen Funktor  $\text{Der}^b(A\text{-modfl}^{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^b(A\text{-modfg}^{\mathbb{Z}})$ . Hinweis: Man verwende das Kriterium 1.3.8 für die volltreue Einbettung von Ore-Lokalisierungen und das „Abschneiden oberhalb eines geeigneten Grades“.

## 2.7 Die Gysinsequenz

2.7.1. Unter einem **Sphärenbündel** auf einem topologischen Raum  $X$  versteht man ein Faserbündel  $\pi : E \rightarrow X$  mit einer Sphäre  $S^n$  als Faser. Unter einer **Orientierung** eines Sphärenbündels einer Faserdimension  $\geq 1$  versteht man die Vorgabe einer Orientierung auf jeder Faser derart, daß es einen Bündelatlas gibt,

unter dessen Bündelkarten  $U \times S^n \rightarrow E$  diese Orientierung stets derselben Orientierung auf  $S^n$  entspricht. Ein Sphärenbündel, das mindestens eine Orientierung zuläßt, heißt **orientierbar**.

**Satz 2.7.2 (Gysin-Sequenz).** *Gegeben  $\pi : E \rightarrow X$  ein orientierbares Sphärenbündel einer Faserdimension  $n \geq 1$  gibt es eine Klasse  $c \in H^{n+1}(X)$  und eine lange exakte Sequenz der Gestalt*

$$\dots \rightarrow H^q(X) \rightarrow H^q(E) \rightarrow H^{q-n}(X) \rightarrow H^{q+1}(X) \rightarrow \dots$$

mit dem Rückzug als erstem und dem cup-Produkt mit  $c$  als drittem Morphismus.

2.7.3. Wenn der folgende Beweis auf Sie noch etwas unbeholfen wirkt, so ist das durchaus in meinem Sinne. Er soll nämlich unter anderem die Sprache der „derivierten Funktoren  $R\pi_* : \text{Der}(\text{Ab}_{/E}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$ “ motivieren, die wir im kommenden Abschnitt 3 einführen und in der er einfacher zu formulieren sein wird.

*Beweis.* Sei  $\mathbb{Z}_E \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$  eine injektive Auflösung. Wir haben also natürliche Isomorphismen  $R^q\pi_*\mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q\pi_*\mathcal{I}^\triangleleft$ . Da unsere Sphären zusammenhängend sind, liefert Adjunktion den ersten Isomorphismus einer Sequenz von natürlichen Isomorphismen

$$\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathbb{Z}_E$$

Derivierter eigentlicher Basiswechsel ?? zeigt weiter, daß  $R^n\pi_*\mathbb{Z}_E$  lokal isomorph ist zu  $\mathbb{Z}_X$  und daß gilt  $R^q\pi_*\mathbb{Z}_E = 0$  für  $q \neq 0$ . Unser Abschneidefunktoren 2.6.6 liefern so ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\mathbb{Z}_X \rightarrow \pi_*\mathcal{I}^\triangleleft \rightarrow [-n](R^n\pi_*\mathbb{Z}_E) \rightarrow [1]\mathbb{Z}_X$$

in  $\text{Der}^+(\text{Ab}_{/X})$ . Wählen wir einen Isomorphismus zu einem ausgezeichneten Dreieck in  $\text{Hot}^+(i\text{Ab}_{/X})$ , so liefert der Funktor der globalen Schnitte eine ausgezeichnetes Dreieck in  $\text{Hot}^+(\text{Ab})$  und dessen lange exakte Kohomologiesequenz hat die Gestalt

$$\dots \rightarrow H^q(X) \rightarrow H^q(E) \rightarrow H^{q-n}(X; R^n\pi_*\mathbb{Z}_E) \rightarrow H^{q+1}(X) \rightarrow \dots$$

mit dem Zurückholen auf der Kohomologie unter  $\pi$  als erster Abbildung. Ist unser Bündel orientierbar und wählen wir eine Orientierung sowie einen Erzeuger von  $H^n(S^n)$ , so liefern diese Wahlen einen Isomorphismus  $R^n\pi_*\mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$  mit der konstanten Garbe auf  $X$  und wir erhalten unsere Gysin-Sequenz. Die Konstruktion zeigt, daß die dritte Abbildung darin das Cup-Produkt mit derjenigen Klasse in  $c \in H^{n+1}(X)$  ist, die durch den entsprechenden Morphismus  $[-n]\mathbb{Z}_X \rightarrow [1]\mathbb{Z}_X$  in der derivierten Kategorie  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  aus dem ersten ausgezeichneten Dreieck bestimmt wird.  $\square$

**2.7.4 (Kohomologierung der komplex projektiven Räume).** Die Kohomologiegruppen der komplex projektiven Räume kennen wir bereits aus ???. Hier berechnen wir nun ihren Kohomologierung. Wir betrachten dazu die Sphäre  $E = S^{2a+1} \subset \mathbb{C}^{a+1}$  und das  $S^1$ -Bündel  $\pi : S^{2a+1} \rightarrow \mathbb{P}^a\mathbb{C}$ . Es ist offensichtlich orientierbar und wir erhalten so eine Klasse  $c \in H^2(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$  derart, daß die Multiplikation mit dieser Klasse Isomorphismen

$$H^0(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} H^{2a}(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$$

induziert und ebenso Isomorphismen

$$0 = H^{-1}(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} H^{2a-1}(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$$

Insgesamt erhalten wir so einen Isomorphismus  $\mathbb{Z}[c]/\langle c^{a+1} \rangle \xrightarrow{\sim} H^*(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$  mit  $c$  homogen vom Grad Zwei.



## 3 Derivierte Funktoren

### 3.1 Limites in Funktorkategorien

3.1.1. Ich erinnere an Limites und Kolimites in Kategorien, wie sie in [TS] 7.1 eingeführt wurden.

3.1.2 (**Limites in Funktorkategorien**). Gegeben seien ein Köcher  $\mathcal{I}$  und Kategorien  $\mathcal{A}, \mathcal{D}$  und eine Darstellung  $\mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{D}), i \mapsto F_i$ . Existiert für alle  $A \in \mathcal{A}$  der Kolimes  $\text{col } F_i(A)$  in  $\mathcal{D}$ , so erhalten wir offensichtlich einen Kolimes der  $F_i$  in  $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  durch die Vorschrift

$$(\text{col } F_i)(A) := \text{col}(F_i(A))$$

Dasselbe gilt, wenn wir  $\text{col}$  durch  $\text{lim}$  ersetzen, was auch formal durch Übergang zu opponierten Strukturen gefolgert werden kann.

3.1.3 (**Limites in Kategorien von Mengenfunktoren**). Nach 3.1.2 existiert insbesondere für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  und jedes Mengensystem  $\mathcal{U}$  der Limes beziehungsweise der Kolimes in unserer Kategorie  $\mathcal{C}^\wedge = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{U}\text{Ens})$  aller kontravarianten Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$  aus [LA2] 8.9.10 für jede Darstellung in  $\mathcal{C}^\wedge$  eines Köchers  $\mathcal{I}$ , solange der Limes beziehungsweise der Kolimes für alle Darstellungen unseres Köchers in  $\mathcal{U}\text{Ens}$  existieren, etwa wenn  $\mathcal{U}$  ein Universum ist und die Punktmenge unseres Köchers ein Element von  $\mathcal{U}$ . Wir nennen so einen Köcher einen  $\mathcal{U}$ -**kleinen Köcher**. Weiter erhalten wir auch eine recht explizite Beschreibung dieser Limites und Kolimites. Ich erinnere dazu die volltreue Yoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$  gegeben durch  $X \mapsto \hat{X} := \mathcal{C}(\_, X)$ . Gegeben ein System  $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$  aus  $\text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  ist etwa der Limes des Systems  $(\hat{C}_i)_{i \in \mathcal{I}}$  aus  $\text{Car}(\mathcal{I}, \mathcal{C}^\wedge)$  als Objekt von  $\mathcal{C}^\wedge$  der Funktor

$$(\text{lim } \hat{C}_i) : Z \mapsto \text{lim } \hat{C}_i(Z) = \text{lim } \mathcal{C}(Z, C_i)$$

Das Symbol  $\text{lim}$  in der Mitte und rechts ist dabei in der Kategorie der Mengen zu verstehen. Ebenso ist der Kolimes des besagten Systems der Funktor

$$(\text{col } \hat{C}_i) : Z \mapsto \text{col } \hat{C}_i(Z) = \text{col } \mathcal{C}(Z, C_i)$$

Das Symbol  $\text{col}$  in der Mitte und rechts ist dabei wieder in der Kategorie der Mengen zu verstehen.

3.1.4 (**Verträglichkeit gewisser Limites mit Yoneda-Einbettungen**). Existiert der Limes des Systems  $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$  in  $\mathcal{C}$ , so geht er unter dem offensichtlichen Morphismus isomorph auf den Limes des Bildsystems in  $\mathcal{C}^\wedge$ , in Formeln

$$(\text{lim } C_i)^\wedge \xrightarrow{\sim} \text{lim } \hat{C}_i$$

Beide Funktoren nehmen nämlich auf allen  $Z \in \mathcal{C}$  denselben Wert  $\lim \mathcal{C}(Z, C_i)$  an. In  $\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^\vee := \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{U}\text{Ens})^{\text{opp}}$  mit der volltreuen Yoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee$  gegeben durch  $X \mapsto \check{X} := \mathcal{C}(X, \_)$  sieht man dual, daß wenn der Kolimes des Systems  $(C_i)_{i \in \mathcal{I}}$  in  $\mathcal{C}$  existiert, daß dann unter dem offensichtlichen Morphismus der Kolimes des Bildsystems in  $\mathcal{C}^\vee$  isomorph daraufgeht, in Formeln

$$\text{col } \check{C}_i \xrightarrow{\sim} (\text{col } C_i)^\vee$$

In der Tat nehmen beide Funktoren auf allen  $Z \in \mathcal{C}$  denselben Wert  $\lim \mathcal{C}(C_i, Z)$  an mit dem hier über ein System  $\mathcal{I}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$  zu verstehenden Limes.

**3.1.5 (Unverträglichkeit gewisser Limites mit Yoneda-Einbettungen).** Im Gegensatz zu den im vorigen Punkt behandelten Fällen muß, wenn der Kolimes  $\text{col } C_i$  existiert, die natürliche Transformation  $\text{col } \check{C}_i \rightarrow (\text{col } C_i)^\wedge$  keine Isotransformation sein, als da heißt, die natürliche Abbildung  $\text{col } \mathcal{C}(Z, C_i) \rightarrow \mathcal{C}(Z, \text{col } C_i)$  muß keineswegs für alle Objekte  $Z$  eine Bijektion sein. Ein typisches Gegenbeispiel ist der Fall der Kategorie der Vektorräume, in der wir jeden Raum  $V$  als Kolimes des Systems aller endlichdimensionalen Teilräume  $C_i \subset V$  schreiben können: Der Kolimes der Homomorphismenräume geht dann isomorph auf den Raum der Homomorphismen endlichen Rangs und keineswegs isomorph auf den Raum aller Homomorphismen. Ein vielleicht noch typischeres Gegenbeispiel ist der Fall direkter Summen von Vektorräumen: Die Identität auf einer direkten Summe mit unendlich vielen von Null verschiedenen Summanden landet nicht in einer endlichen Teilsumme.

**3.1.6 (Notation für Limites in Funktorkategorien).** Ich verwende für in der Kategorie  $\mathcal{C}^\wedge$  zu verstehende Kolimites die Notation  $\text{c}^\wedge\text{ol}$  und im filtrierenden Fall die Notation  $\text{c}^\wedge\text{ol}_f$  und spreche im filtrierenden Fall von einem **Indkolimes**. Dual verwende ich die Notation  $\text{lim}$  und im kofiltrierenden Fall die Notation  $\text{lim}_f$  für in der Kategorie  $\mathcal{C}^\vee$  zu verstehende Limites. Im kofiltrierenden Fall spreche ich auch von einem **Prolimes**.

**3.1.7 (Alternative Notationen).** In der Literatur findet man vielfach statt  $\text{c}^\wedge\text{ol}$  die Notation " $\varinjlim$ " mit Anführungsstrichlein für in der Kategorie  $\mathcal{C}^\wedge$  zu verstehende Kolimites und statt  $\text{lim}$  die Notation " $\varprojlim$ " für in der Kategorie  $\mathcal{C}^\vee$  zu verstehende Limites.

**3.1.8.** Sei  $(D_j)$  ein Diagramm von Objekten einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Ein Morphismus eines Objekts  $F \in \mathcal{C}^\vee$  in den Limes  $\text{lim } D_j$  ist per definitionem eine verträgliche Familie von Morphismen aus  $\mathcal{C}^\vee(F, \check{D}_j)$  alias ein Element von  $\text{lim}_j \mathcal{C}^\vee(F, \check{D}_j)$ . Das Yoneda-Lemma [LA2] 8.9.2 liefert eine natürliche Bijektion zwischen dieser Menge und  $\text{lim}_j \mathcal{C}(F, D_j)$ . Ist speziell  $F = \text{lim } C_i$  auch der Limes eines Systems  $(C_i)$ , so erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}^\vee(\text{lim } C_i, \text{lim } D_j) \xrightarrow{\sim} \text{lim}_j \text{col}_i \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Im übrigen dürfen Sie in Übung 3.1.18 zeigen, daß jedes Objekt von  $\mathcal{C}^\vee$  zu einem Objekt der Gestalt  $\varinjlim C_i$  isomorph ist.

3.1.9. Unter einem **Pro-Objekt** einer Kategorie  $\mathcal{C}$  versteht man ein kofiltrierendes System von Objekten von  $\mathcal{C}$  im Sinne von [TS] 7.1.11. Gegeben Pro-Objekte  $(C_i)$  und  $(D_j)$  erklärt man einen **Morphismus von Pro-Objekten** als ein Element der Menge

$$\limf_j \text{colf}_i \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Um die Komposition von Morphismen von Pro-Objekten zu erklären, bemerken wir, daß ein Morphismus repräsentiert werden kann durch eine mit  $j$  indizierte Familie von Morphismen  $C_{i(j)} \rightarrow D_j$ , die in der Weise verträglich sind, daß für jeden Systemmorphismus  $D_k \rightarrow D_j$  und den zu  $k$  gehörigen Morphismus  $C_{i(k)} \rightarrow D_k$  einen Index  $i = i(j, k)$  mit Morphismen  $i \rightarrow i(j)$  und  $i \rightarrow i(k)$  gibt, für den  $C_i \rightarrow C_{i(j)} \rightarrow D_j$  und  $C_i \rightarrow C_{i(k)} \rightarrow D_k \rightarrow D_j$  übereinstimmen. Weiter repräsentiert eine zweite verträgliche Familie von Morphismen  $C_{\tilde{i}(j)} \rightarrow D_j$  genau dann denselben Morphismus von Pro-Objekten, wenn wir für jedes  $j$  einen Index  $\hat{i}(j)$  und Morphismen  $\hat{i}(j) \rightarrow i(j)$  und  $\hat{i}(j) \rightarrow \tilde{i}(j)$  so finden, daß die Kompositionen  $C_{\hat{i}(j)} \rightarrow C_{i(j)} \rightarrow D_j$  und  $C_{\hat{i}(j)} \rightarrow C_{\tilde{i}(j)} \rightarrow D_j$  übereinstimmen. Mit dieser Beschreibung von Morphismen scheint mir nun offensichtlich, wie Morphismen von Pro-Objekten zu komponieren sind. Wir erhalten so die Kategorie

$$\text{pro}(\mathcal{C})$$

der Pro-Objekte von  $\mathcal{C}$ . Nach dem Vorhergehenden liefert die Vorschrift  $(C_i) \mapsto \limf_i C_i$  einen volltreuen Funktor

$$\text{pro}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee$$

*Ergänzung 3.1.10.* Die Pro-Objekte einer Kategorie  $\mathcal{C}$  bilden salopp gesprochen einen noch vergleichsweise gut zugänglichen Teil der Kategorie  $\mathcal{C}^\vee$  aller Mengenfunktoren. In  $\mathcal{C}^\vee$  haben zwar die Objekte und Morphismenmengen im wesentlichen dieselbe Beschreibung, aber ich kenne in dieser Allgemeinheit keine vernünftige Beschreibung für die Verknüpfung von Morphismen mehr.

3.1.11 (**Morphismen von Ind-Objekten**). Ein **Ind-Objekt** einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist dual ein filtrierendes System  $(C_i)$  in  $\mathcal{C}$ . Die Morphismen in eine weiteres Ind-Objekt erklären wir als Elemente der Menge

$$\limf_i \text{colf}_j \mathcal{C}(C_i, D_j)$$

Für die Kategorie  $\text{ind}(\mathcal{C})$  liefert dann die Konstruktion  $(C_i) \mapsto \text{côlf}_i C_i$  einen volltreuen Funktor

$$\text{ind}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$$

Jedes Element von  $\text{colf}_j \mathcal{C}(C_i, D_j)$  wird repräsentiert durch einen Morphismus  $\varphi_i : C_i \rightarrow D_b$  für ein  $b$ , das vom jeweiligen Morphismus abhängen wird. Dessen Klasse im Kolimes notieren wir  $\bar{\varphi}_i$ . Ein Morphismus von Ind-Objekten ist dann eine verträgliche Familie derartiger Klassen  $\bar{\varphi}_i$ .

**Definition 3.1.12.** Ein filtrierendes System  $(C_i)$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **essentiell konstant**, wenn  $\text{côlf } C_i$  isomorph ist zu einem Objekt im Bild der volltreuen Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$  alias zu einem Funktor der Gestalt  $\hat{D}$  für ein Objekt  $D \in \mathcal{C}$ . Dual heißt ein kofiltrierendes System  $(C_i)$  **essentiell konstant**, wenn  $\text{limf } C_i$  isomorph ist zu einem Objekt im Bild der volltreuen Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$ .

3.1.13. Schreiben wir die Bedingung „essentiell konstant“ für  $\text{côlf}$  aus, so entspricht zunächst einmal ein Morphismus  $\psi \in \mathcal{C}^\wedge(\text{côlf } C_i, \hat{D})$  einem verträglichen System von Morphismen  $\psi_i \in \mathcal{C}(C_i, D)$  und ein Morphismus  $\varphi \in \mathcal{C}^\wedge(\hat{D}, \text{côlf } C_i)$  hat die Gestalt  $\varphi = \bar{\varphi}_j$  für ein  $\varphi_j \in \mathcal{C}(D, C_j)$  und einen Index  $j$ . Die Bedingung  $\psi \circ \varphi = \text{id}$  bedeutet dann schlicht  $\psi_j \circ \varphi_j = \text{id}_D$  für diesen einen Index  $j$  und [TS] 7.1.32 zeigt, daß für das verträgliche System von Morphismen  $\psi_i \in \mathcal{C}(C_i, D)$  unser  $D$  der Kolimes des Systems der  $C_i$  gewesen sein muß. Die Bedingung  $\varphi \circ \psi = \text{id}$  bedeutet aber zusätzlich die Forderung, daß es für jedes  $a$  Systemmorphisme  $s_{kj} : j \rightarrow k$  und  $s_{ka} : a \rightarrow k$  gibt derart, daß die Verknüpfung

$$C_a \xrightarrow{\psi_a} D \xrightarrow{\varphi_j} C_j \xrightarrow{s_{kj}} C_k$$

zusammenfällt mit dem von  $s_{ka}$  induzierten Morphismus  $C_a \rightarrow C_k$ .

*Beispiel 3.1.14.* Das filtrierende System von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen, indiziert durch  $\mathbb{Z}$  und mit irgendwelchen Vektorräumen an jeder Stelle und Nullmorphisme für alle Morphisme ist essentiell konstant und isomorph zum durch das Nullobjekt dargestellten Funktor.

*Beispiel 3.1.15.* Gegeben ein Vektorraum  $W$  ist der Funktor, der jedem weiteren Vektorraum  $Z$  die Menge aller linearen Abbildungen endlichen Ranges von  $Z$  nach  $W$  zuordnet, ein Ind-Vektorraum, er kann nämlich als der Kolimes der endlichdimensionalen Teilräume von  $W$  in der Kategorie der kontravarianten Mengenfunktor beschrieben werden.

*Beispiel 3.1.16.* Gegeben ein Vektorraum  $V$  ist der Funktor, der jedem weiteren Vektorraum  $Z$  die Menge aller linearen Abbildungen endlichen Ranges von  $V$  nach  $Z$  zuordnet, ein Pro-Vektorraum, er kann nämlich als der Limes der endlichdimensionalen Quotienten von  $V$  in der Opponierten zur Kategorie der Mengenfunktor beschrieben werden.

## Übungen

*Übung 3.1.17 (Hinreichendes Kriterium für essentiell konstante Systeme).* Sei  $X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  ein filtrierendes System in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Es gebe einen Index

$i \in \mathcal{I}$  derart, daß jeder von  $i$  ausgehende Systemmorphismus  $s : i \rightarrow a$  in der Weise durch einen weiteren Systemmorphismus  $t : a \rightarrow j$  verlängert werden kann, daß die Verknüpfung einen Isomorphismus  $X(ts) : X_i \xrightarrow{\sim} X_j$  induziert. So ist der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$X_i \xrightarrow{\sim} \text{côlf}_j X_j$$

Daß diese Bedingung nicht notwendig ist, zeigt eine leichte Variation von Beispiel 3.1.14.

**Übung 3.1.18 (Beliebige Mengenfunkoren als Kolimites).** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\mathcal{C}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \text{Ens})$  und  $C \mapsto \hat{C}$  die volltreue Yoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ . Gegeben  $X \in \mathcal{C}^\wedge$  betrachten wir die volle Unterkategorie  $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{C}_X^\wedge$  aller Morphismen  $\hat{C} \rightarrow X$  mit  $C \in \mathcal{C}$  und den Funktor  $V : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$ , der den Morphismus nach  $X$  vergißt. So ist der natürliche Morphismus ein Isomorphismus  $\text{côl}_{\mathcal{C}_X} V \xrightarrow{\sim} X$  oder anders notiert

$$\text{côl}_{\hat{C} \rightarrow X} \hat{C} \xrightarrow{\sim} X$$

Genauer liefert jeder Morphismus  $\varphi : \text{côl}_{\hat{C} \rightarrow X} \hat{C} \rightarrow Y$  mit  $Y \in \mathcal{C}^\wedge$  für beliebige  $A, C \in \mathcal{C}$  und  $\psi : \hat{C} \rightarrow X$  eine Abbildung  $\varphi(\psi, A) : \hat{C}(A) \rightarrow Y(A)$ . Jedes  $u \in X(A)$  entspricht nun einem  $\hat{u} : \hat{A} \rightarrow X$  und liefert so  $\varphi(\hat{u}, A) : \hat{A}(A) \rightarrow Y(A)$ . Die Abbildung  $X(A) \rightarrow Y(A)$  wird nun gegeben durch  $u \mapsto \varphi(\hat{u}, A)(\text{id}_A)$ . Den Rest mag der Leser selber machen.

## 3.2 Derivierte Funktoren auf Ore-Lokalisierungen

3.2.1. Die Elemente einer ausgezeichneten Menge  $S$  von Morphismen einer Kategorie nennen wir im folgenden  **$S$ -Morphismen**.

3.2.2 (**Ore-Lokalisierung durch Pro-Objekte**). Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Nach 1.3.15 haben wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}_S(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{colf}_{D \xrightarrow{S} X} \mathcal{C}(D, Y)$$

zwischen dem Morphismenraum  $\mathcal{C}_S(X, Y)$  in der Lokalisierung und dem filtrierenden Kolimes über das System aller  $S$ -Morphismen  $D \rightarrow X$  in das Objekt  $X$  der Morphismenräume  $\mathcal{C}(D, Y)$ . In der Terminologie von 3.1.9 ist diese Menge weiter in natürlicher Bijektion zu  $\mathcal{C}^\vee(X^-, Y)$  für

$$X^- := \limf_{D \xrightarrow{S} X} D$$

mit dem filtrierenden Limes in der Funktorkategorie über das System aller  $S$ -Morphismen  $D \rightarrow X$  in das Objekt  $X$ . Damit aber induziert jeder  $S$ -Morphismus

$t : C \rightarrow Y$ , da wir die analoge Aussage ja in  $\mathcal{C}_S$  bereits kennen, eine Bijektion  $\mathcal{C}^\vee(X^-, C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee(X^-, Y)$ . Die Vorschrift  $X \mapsto X^-$  induziert mithin, wieder nach 3.1.9, einen volltreuen Funktor

$$\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \text{pro}(\mathcal{C})$$

**3.2.3 (Ore-Lokalisierung durch Ind-Objekte).** Analog konstruiert man im Fall eines Linksoresystems  $S$  einen volltreuen Funktor  $\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \text{ind}(\mathcal{C})$ ,  $X \mapsto X^+$ .

**Definition 3.2.4.** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Der **universelle rechtsderivierte Funktor**  ${}_{\mathcal{U}}\text{R}F$  von  $F$  ist die Komposition

$$\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \text{ind}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ind}(\mathcal{D})$$

der volltreuen Einbettung aus 3.2.2 mit dem von  $F$  auf Ind-Objekten induzierten Funktor.

**3.2.5.** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Explizit wird unser universeller Rechtsderivierter gegeben durch die Vorschrift

$$({}_{\mathcal{U}}\text{R}F)(A) := \text{côlf}_{A \xrightarrow{S} X} FX$$

Der **Indkolimes** ist dabei zu verstehen über die filtrierende Kategorie aller  $S$ -Morphismen  $A \rightarrow X$  in  $\mathcal{C}$ . Für  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  die Lokalisierung und  $V : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \text{ind}(\mathcal{D})$  der offensichtliche volltreue Funktor erhält man aus der Konstruktion zusätzlich eine ausgezeichnete Transformation

$$\tau : V \circ F \Rightarrow {}_{\mathcal{U}}\text{R}F \circ Q$$

*Beispiel 3.2.6.* Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit einem ausgezeichneten Linksoresystem  $S$ . Gegeben ein Objekt  $B \in \mathcal{C}$  ordnet der universelle Rechtsderivierte des Yoneda-funktors  $\check{B} := \mathcal{C}(B, \_ ) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  einem Objekt  $A$  die Ind-Menge  $({}_{\mathcal{U}}\text{R}\check{B})(A) = \text{côlf}_{A \xrightarrow{S} X} \mathcal{C}(B, X)$  zu. Ist sie essentiell konstant, so ist sie nach 3.1.13 in natürlicher Bijektion zur Menge  $\mathcal{C}_S(B, A) = \text{colf}_{A \xrightarrow{S} X} \mathcal{C}(B, X)$ .

**Definition 3.2.7.** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Ein Objekt  $A \in \mathcal{C}$  heißt **entfaltet** und ausführlicher  **$F$ - $S$ -rechtsentfaltet**, wenn sich jeder  $S$ -Morphismus  $A \rightarrow X$  so durch einen weiteren Morphismus  $X \rightarrow B$  verlängern läßt, daß die Komposition ein  $S$ -Morphismus ist und einen Isomorphismus  $FA \xrightarrow{\sim} FB$  induziert.

**3.2.8.** Ein Objekt  $A$  ist in anderen Worten entfaltet, wenn in der filtrierenden Kategorie der von  $A$  ausgehenden  $S$ -Morphismen diejenigen  $S$ -Morphismen  $A \rightarrow X$ , die unter  $F$  zu Isomorphismen werden, eine konfinale Unterkategorie bilden.

3.2.9. Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Nach 3.1.17 liefert für jedes entfaltete Objekt  $A \in \mathcal{C}$  unsere Transformation  $\tau$  aus 3.2.5 einen Isomorphismus

$$\tau_A : VFA \xrightarrow{\sim} {}_uR F(QA)$$

3.2.10 (**Diskussion der Literatur**). Deligne nennt noch allgemeiner ein Objekt  $A \in \mathcal{C}$  **déployé** und ausführlicher **déployé à droite pour  $F$  et  $S$** , wann immer  $\tau_A$  einen Isomorphismus  $\tau_A : VFA \xrightarrow{\sim} {}_uR F(QA)$  liefert. Ich will es vermeiden, in dieser Allgemeinheit zu arbeiten.

**Definition 3.2.11.** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  heißt **entfaltbar** und ausführlicher  **$F$ - $S$ -rechtsentfaltbar**, wenn es einen  $S$ -Morphismus  $X \rightarrow A$  von  $X$  in ein **entfaltetes** Objekt  $A$  gibt. Die vollen Unterkategorien der entfalteten beziehungsweise entfaltbaren Objekte notieren wir  $\mathcal{C}_{[F]} \subset \mathcal{C}_F \subset \mathcal{C}$  und die vollen Unterkategorien ihrer Bilder in der Lokalisierung entsprechend  $\mathcal{C}_{S,[F]} \subset \mathcal{C}_{S,F} \subset \mathcal{C}_S$ .

3.2.12. Die Frage, inwieweit  $\mathcal{C}_{[F]} \rightarrow \mathcal{C}_{S,[F]}$  oder  $\mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{C}_{S,F}$  Lokalisierungsfunktor sind, lassen wir unberührt.

**Satz 3.2.13 (Zahmer Rechtsderivierter).** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . So gibt es bis auf eindeutigen Isomorphismus genau ein Paar  $(R, \tau)$  bestehend aus einem Funktor

$$R : \mathcal{C}_{S,F} \rightarrow \mathcal{D}$$

und einer Transformation  $\tau : F \Rightarrow RQ$  von Funktoren  $\mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{D}$  derart, daß für jedes entfaltete Objekt  $A \in \mathcal{C}_{[F]}$  unsere Transformation einen Isomorphismus  $\tau_A : FA \xrightarrow{\sim} RQA$  liefert.

3.2.14. Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Das Paar  $(R, \tau)$  aus unserem Satz nennen wir den **Rechtsderivierten** oder genauer den **zahmen Rechtsderivierten von  $F$**  und notieren diesen Funktor

$$R F : \mathcal{C}_{S,F} \rightarrow \mathcal{D}$$

3.2.15. Ist in der Situation des Satzes allgemeiner eine volle Unterkategorie  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_F$  gegeben, die mit jedem Objekt auch eine Entfaltung des besagten Objekts enthält, so gibt es auch bis auf eindeutigen Isomorphismus genau ein Paar  $(R, \tau)$  mit  $R : Q(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{D}$  und  $\tau : F \Rightarrow RQ$  derart, daß  $\tau_A$  für alle entfalteten Objekte von  $\mathcal{U}$  ein Isomorphismus ist. Das folgt aus unserem Beweis des Satzes gleich mit.



*Beweis.* Per definitionem macht unser **universeller rechtsderivierter Funktor** entfaltbare Objekte zu essentiell konstanten induktiven Systemen. Bezeichnen wir etwa mit  $\text{ind}_{\text{ek}}(\mathcal{D})$  die Kategorie der essentiell konstanten Systeme, so schränkt  $(\text{uR}F, \tau)$  ein zu einem Paar derselben Art in der unteren Horizontale des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}_S & \xrightarrow{\text{uR}F} & \text{ind}(\mathcal{D}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{C}_F & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}_{S,F} & \xrightarrow{\text{uR}F} & \text{ind}_{\text{ek}}(\mathcal{D}) \xleftarrow{\approx} \mathcal{D} \end{array}$$

Wir können dann ein mögliches Paar  $(R, \tau)$  konstruieren, indem wir für die Äquivalenz von Kategorien unten rechts ein Quasiinverses wählen. Sei nun  $(R', \tau')$  ein weiteres mögliches Paar. Indem wir die Äquivalenz  $\mathcal{D} \xrightarrow{\approx} \text{ind}_{\text{ek}}(\mathcal{D})$  nachschalten, müssen wir nur zeigen, daß es genau eine Transformation  $\kappa : R' \Rightarrow \text{uR}F$  gibt mit  $\tau' = \tau \circ \kappa Q$  und daß diese Transformation  $\kappa$  eine Isotransformation ist. Das alles folgt aber unmittelbar aus unseren Annahmen und der Tatsache, daß die Einbettung eine Äquivalenz  $\mathcal{C}_{S,[F]} \xrightarrow{\approx} \mathcal{C}_{S,F}$  ist.  $\square$

**3.2.16 (Diskussion der Literatur).** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Deligne nennt noch allgemeiner ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  **dérivable**, wann immer das Ind-Objekt  $(\text{R}F)(X)$  zum wesentlichen Bild der volltreuen Einbettung  $V : \mathcal{D} \xrightarrow{\simeq} \text{ind}(\mathcal{D})$  gehört. Ich will vermeiden, in dieser Allgemeinheit zu arbeiten.

*Beispiel 3.2.17 (Derivieren durch injektive Auflösungen).* Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $F : \text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor in eine weitere Kategorie  $\mathcal{D}$  und  $S$  das System der Quasiisomorphismen in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$ . So ist jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex  $I$  von injektiven Objekten von  $\mathcal{A}$  entfaltet. In der Tat finden wir zu jedem Quasiisomorphismus  $I \xrightarrow{\simeq} A$  in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  einen Quasiisomorphismus  $A \xrightarrow{\simeq} I$  derart, daß die Komposition die Identität auf  $I$  ist. Wir wiederholen dies Argument in 3.2.19 noch einmal in der ihm angemessenen Allgemeinheit. Betrachten wir nun eine weitere abelsche Kategorie  $\mathcal{B}$  und einen additiven Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und spezialisieren unsere Erkenntnisse zu  $\mathcal{D} := \text{Der}_{\mathcal{B}}$  und bezeichnen den von  $F$  induzierten Funktor  $\text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{B}}$  auch mit  $F$  und nehmen an, daß  $\mathcal{A}$  genügend Injektive besitzt, so ist für jedes  $A \in \mathcal{A}$  der Komplex  $A[0]$  entfaltbar und wir finden natürliche Isomorphismen

$$(\text{R}^i F)(A) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}^i((\text{R}F)(A[0]))$$

Sie zeigen die Beziehung unserer höheren derivierten Funktoren aus ?? mit den hier in größerer Allgemeinheit erklärten derivierten Funktoren.

**3.2.18 (Derivieren einer Verknüpfung).** Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Linksoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Gegeben ein weiterer Funktor  $G :$



$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  ist offensichtlich jedes  $F$ -entfaltete Objekt auch  $GF$ -entfaltete. Es gibt mithin nach 3.2.15 genau eine Transformation  $\alpha : R(GF)|_{\mathcal{C}_{S,F}} \Rightarrow G(RF)$  mit  $(\alpha Q) \circ (G\tau_F) = \tau_{GF}$  und diese ist eine Isotransformation

$$R(G \circ F)|_{\mathcal{C}_{S,F}} \xrightarrow{\cong} G \circ RF$$

**Proposition 3.2.19 (Entfaltung durch Rechtsadjungierte).** *Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit einem Linksoresystem  $S$ .*

1. *Auf der vollen Unterkategorie  $\mathcal{C}_{[\text{id}]}$  der für den Identitätsfunktoren entfaltenen Objekte ist der Lokalisierungsfunktor  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  volltreu und der Inverse zu  $Q : \mathcal{C}_{[\text{id}]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{S,[\text{id}]}$  ist ein partieller Rechtsadjungierter von  $Q$ ;*
2. *Genau dann existiert der partielle Rechtsadjungierte von  $Q$  bei  $C \in \mathcal{C}_S$ , wenn  $C$  isomorph ist zu einem Objekt von  $\mathcal{C}_{S,[\text{id}]}$ ;*
3. *Ist  $S$  sogar ein gesättigtes Oresystem und besitzt der Lokalisierungsfunktor bei  $QA$  einen partiellen Rechtsadjungierten  $P$ , so ist die natürliche Abbildung  $A \rightarrow PQA$  eine Entfaltung für den Identitätsfunktoren auf  $\mathcal{C}$ .*

3.2.20. Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit einem Linksoresystem  $S$ . Nach 3.2.18 ist ein Objekt von  $\mathcal{C}_{[\text{id}]}$  entfaltet für jeden Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Nach 3.2.18 ist weiter unter den Annahmen in Teil 3 der Proposition  $A \rightarrow PQA$  eine Entfaltung für den Funktor  $\text{id} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  und damit für jeden Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .

*Vorschau 3.2.21.* Typische Beispiele sehen wir in 3.2.17, 3.3.3 und 3.4.2.

*Beweis.* Ist  $B \in \mathcal{C}$  gegeben und ist  $E \in \mathcal{C}$  entfaltet für den Funktor  $\check{B} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ , so liefert 3.2.6 einen Isomorphismus  $\mathcal{C}(B, E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(QB, QE)$ . Ist  $E$  entfaltet für alle  $\check{B}$ , so erhalten wir einen partiellen Rechtsadjungierten des Lokalisierungsfunktors  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  bei  $QE$  durch die Vorschrift  $QE \mapsto E$ . Aufgrund unserer volltreuen Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$  ist aber  $E$  genau dann entfaltet für alle  $\check{B}$ , wenn es entfaltet ist für den Identitätsfunktoren auf  $\mathcal{C}$ . Damit sind die beiden ersten Aussagen bewiesen. Ist unser Linksoresystem  $S$  sogar ein gesättigtes Oresystem, so besteht es nach 1.3.19 genau aus allen Morphismen, die in der Lokalisierung Isomorphismen werden. Sei nun  $A \in \mathcal{C}$  ein Objekt, bei dem der Quotientenfunktor  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  bei  $QA$  einen partiellen Rechtsadjungierten  $P$  besitzt. so ist  $QA \rightarrow QPQA \rightarrow QA$  nach [TF] 4.8.11 die Identität und der zweite Morphismus nach 1.2.13.2 ein Isomorphismus und nach 1.3.19 ist folglich  $A \rightarrow PQA$  ein  $S$ -Morphismus. Ist weiter  $PQA \rightarrow B$  ein beliebiger  $S$ -Morphismus, so kommt er her von einem Isomorphismus  $QA \xrightarrow{\sim} QB$ , und der Inverse dazu liefert einen Morphismus  $B \rightarrow PQA$  mit der Eigenschaft, daß die Verknüpfung die Identität auf  $PQA$  ist. Mithin ist die natürliche Abbildung  $A \rightarrow PQA$  eine Entfaltung für den Identitätsfunktoren auf  $\mathcal{C}$  in Bezug auf  $S$ .  $\square$

3.2.22. Seien dual  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein Rechtsoresystem von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Der **linksderivierte Funktor von  $F$**  ist der Funktor  $LF : \mathcal{C}_S \rightarrow \text{pro}(\mathcal{D})$  von der Lokalisierung von  $\mathcal{C}$  in die Kategorie der pro-Objekte von  $\mathcal{D}$  gegeben durch

$$(LF)(A) := \lim_{X \xrightarrow{S} A} FX$$

Der Limes ist dabei zu verstehen über die kofiltrierende Kategorie aller  $S$ -Morphismen  $X \rightarrow A$  in  $\mathcal{C}$ . Wir haben  $(LF)^{\text{opp}} = R(F^{\text{opp}}) : \mathcal{C}_S^{\text{opp}} \rightarrow \text{ind}(\mathcal{D}^{\text{opp}}) = (\text{pro}(\mathcal{D}))^{\text{opp}}$ . Alle für rechtsderivierte Funktoren bewiesenen Aussagen übertragen sich unmittelbar auf linksderivierte Funktoren.

3.2.23 (**Adjunktion von derivierten Funktoren**). Seien adjungierte Funktoren  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gegeben und seien  $S$  ein gesättigtes Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$  und  $T$  ein gesättigtes Linksoresystem in  $\mathcal{D}$ . So erhalten wir natürliche Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}_S)^\wedge(X, R(QG)Y) & & (\mathcal{D}_T)^\vee(L(QF)X, Y) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \text{colf}_{Y \xrightarrow{T} I} \mathcal{C}_S(X, QGI) & & \text{colf}_{P \xrightarrow{S} X} \mathcal{D}_T(QFP, Y) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \text{colf}_{Y \xrightarrow{T} I, P \xrightarrow{S} X} \mathcal{C}(P, GI) & \xrightarrow{\sim} & \text{colf}_{P \xrightarrow{S} X, Y \xrightarrow{T} I} \mathcal{D}(FP, I) \end{array}$$

Hier bezeichnet  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  und  $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_T$  die jeweilige Lokalisierung. Sind speziell das ind-Objekt  $R(QG)Y$  und das pro-Objekt  $L(QF)X$  essentiell konstant, so erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\mathcal{C}_S(X, R(QG)Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_T(L(QF)X, Y)$$

Ist etwa  $QF$  auf allen Objekten von  $\mathcal{C}$  entfaltbar, so ist  $R(QG)$  der partielle Rechtsadjungierte zu  $L(QF)$ , wo immer  $QG$  entfaltbar ist.

3.2.24. Ich erinnere daran, daß wir in [TF] 4.8.3 einen partiell definierten Funktor als einen auf einer vollen Unterkategorie definierten Funktor erklärt hatten. Gegeben Kategorien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  und partiell definierte Funktoren  $L : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$  und  $R : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{A}$  verstehe ich unter einer **partiellen Adjunktion**  $(L, R)$  eine Isotransformation

$$\alpha_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$$

von Funktoren  $\mathcal{A}_L \times \mathcal{B}_R \rightarrow \text{Ens}$  vom Produkt der Definitionsbereiche unserer jeweiligen Funktoren. In dieser Terminologie induziert also mit den Notationen der vorherigen Bemerkung 3.2.23 jede Adjunktion  $(F, G)$  von Funktoren zwischen Kategorien mit ausgezeichneten Oresystemen eine partielle Adjunktion der derivierten Funktoren  $(L(QF), R(QG))$ .

### 3.2.1 Übungen

*Übung 3.2.25.* Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $S$  ein gesättigtes Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$ . Gegeben ein  $F$ - $S$ -rechtsentfaltbares Objekt  $X \in \mathcal{C}$  bilden die entsprechenden Entfaltungen  $A \rightarrow X$  ein Pro-Objekt. Hinweis: Es lohnt sich, beim Malen der entsprechenden Diagramme eine Kurznotation vorzusehen für  $S$ -Morphismen, die unter  $F$  Isomorphismen werden.

## 3.3 Derivierte Funktoren auf triangulierten Kategorien

3.3.1. Ist  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie und  $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$  ein Verdiersystem, so ist das System  $S = S_{\mathcal{V}}$  aller Morphismen mit Kegel in  $\mathcal{V}$  ein gesättigtes Oresystem und wir haben per definitionem  $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}/\mathcal{V}$ . Statt  $S$ -entfaltet beziehungsweise  $S$ -entfaltbar sagen wir in diesem Kontext auch  $\mathcal{V}$ -entfaltet beziehungsweise  $\mathcal{V}$ -entfaltbar.

**Satz 3.3.2 (Rechtsderivierter eines triangulierten Funktors).** Seien  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  ein triangulierter Funktor und  $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$  ein Verdiersystem. So gilt:

1. Die  $F$ - $\mathcal{V}$ -rechtsentfalteten Objekte von  $\mathcal{T}$  bilden eine volle triangulierte Unterkategorie  $\mathcal{T}_{[F]} \subset \mathcal{T}$ ;
2. Die  $F$ - $\mathcal{V}$ -rechtsentfaltbaren Objekte von  $\mathcal{T}$  bilden volle triangulierte Unterkategorien  $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$  und  $(\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \subset \mathcal{T}/\mathcal{V}$ ;
3. Der **zahme rechtsderivierte Funktor**  $R_F$  von  $F$  besitzt genau eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur, für die  $\tau : F \Rightarrow (R_F)Q$  eine verträgliche Transformation von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren ist, und versehen mit dieser  $\mathbb{Z}$ -Struktur ist  $R_F$  ein triangulierter Funktor

$$R_F : (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \rightarrow \mathcal{D}$$

3.3.3. Die  $\text{id}$ - $\mathcal{V}$ -rechtsentfalteten Objekte von  $\mathcal{T}$  sind per definitionem genau unsere  $\mathcal{V}$ -injektiven Objekte aus 2.4.13, also genau die Objekte unseres Verdiersystems  $\mathcal{T}_{[\text{id}]} = \mathcal{V}^{\perp}$  aller Objekte  $I \in \mathcal{T}$  mit  $\mathcal{T}(V, I) = 0$  für alle  $V \in \mathcal{V}$ . Diese Objekte sind also rechtsentfaltet für jeden Funktor  $F$  und  $Q : \mathcal{V}^{\perp} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{V}$  ist volltreu und 3.2.19 liefert eine eindeutig bestimmte Isotransformation

$$R_F \xrightarrow{\cong} F \circ Q^{-1}$$

zwischen dem auf  $Q(\mathcal{V}^{\perp})$  eingeschränkten derivierten Funktor  $Q(\mathcal{V}^{\perp}) \rightarrow \mathcal{D}$  und der Verknüpfung von  $F$  mit dem Inversen des Isomorphismus von Kategorien  $Q : \mathcal{V}^{\perp} \xrightarrow{\cong} Q(\mathcal{V}^{\perp})$ .

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, daß die entfalteten Objekte eine volle triangulierte Unterkategorie  $\mathcal{T}_{[F]} \subset \mathcal{T}$  bilden. Dazu argumentieren wir anhand des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
 \mathcal{V} \downarrow & & \mathcal{V} \downarrow 1 & & \mathcal{V} \downarrow 2 & & \\
 X & \xrightarrow{1} & Y & \xrightarrow{2} & Z & \xrightarrow{2} & \xrightarrow{[1]} \\
 \parallel & & \mathcal{V} \downarrow 3 & & \mathcal{V} \downarrow 4 & & \\
 X & \xrightarrow{3} & Y' & \xrightarrow{4} & Z' & \xrightarrow{4} & \xrightarrow{[1]} \\
 \mathcal{V} \downarrow 6 & & \parallel & & \mathcal{V} \downarrow 5 & & \\
 X'' & \xrightarrow{6} & Y' & \xrightarrow{5} & Z'' & \xrightarrow{6} & \xrightarrow{[1]}
 \end{array}$$

Wir gehen aus von einem ausgezeichneten Dreieck in der obersten Horizontale, in dem wir  $B$  und  $C$  als entfaltet annehmen, und von einer beliebigen  $\mathcal{V}$ -Auflösung  $A \rightarrow X$ . Sicher können wir in einem ersten Schritt (1) den Kowinkel oben links durch die Morphismen so kommutativ ergänzen, daß wie angedeutet auch  $B \rightarrow Y$  eine  $\mathcal{V}$ -Auflösung ist. Dann vervollständigen wir in Schritt (2) die zweite Horizontale zu einem ausgezeichneten Dreieck und ergänzen die beiden linken Vertikalen zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken durch einen Morphismus  $C \rightarrow Z$ , dessen Kegel nach 2.3.5 wie angedeutet in  $\mathcal{V}$  liegen muß. In Schritt (3) wählen wir  $Y \rightarrow Y'$  mit Kegel in  $\mathcal{V}$  so, daß die Komposition  $FB \rightarrow FY \rightarrow FY'$  ein Isomorphismus ist. In Schritt (4) ergänzen wir wieder zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken. In Schritt (5) wählen wir  $Z' \rightarrow Z''$  mit Kegel in  $\mathcal{V}$  so, daß die Komposition  $FC \rightarrow FZ \rightarrow FZ' \rightarrow FZ''$  ein Isomorphismus ist. In Schritt (6) ergänzen wir ein letztes Mal zu einem Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken. Lassen wir nun  $F$  auf das ganze Diagramm los, so werden beide Kompositionen der mittleren und rechten Vertikalen Isomorphismen, also auch die Komposition in der linken Vertikale. Nun zeigen wir, daß auch die entfaltbaren Objekte eine volle triangulierte Unterkategorie  $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}$  bilden. Diesmal argumentieren wir anhand des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \xrightarrow{[1]} & \longrightarrow \\
 \parallel & & \mathcal{V} \downarrow 1 & & \mathcal{V} \downarrow 2 & & \\
 A & \xrightarrow{1} & X & \xrightarrow{2} & Y & \xrightarrow{2} & \xrightarrow{[1]} \\
 \mathcal{V} \downarrow 4 & & \parallel & & \mathcal{V} \downarrow 3 & & \\
 Z & \xrightarrow{4} & X & \xrightarrow{3} & Y' & \xrightarrow{4} & \xrightarrow{[1]}
 \end{array}$$

Hier wählen wir im Schritt (1) eine Entfaltung von  $B$ , bilden im Schritt (2) das ausgezeichnete Dreieck, wählen in Schritt (3) mithilfe von ?? eine Entfaltung von

$Y$  und bilden in Schritt (4) wieder das Dreieck. Nach dem bereits bewiesenen besteht dann das unterste Dreieck aus entfalteten Objekten. Für  $\mathcal{V}_{[F]} := \mathcal{T}_{[F]} \cap \mathcal{V}$  ist nun der offensichtliche Funktor  $\mathcal{T}_{[F]}/\mathcal{V}_{[F]} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{V}$  volltreu nach dem allgemeinen Resultat 1.3.8 über Lokalisierung und volltreue Einbettungen. In der Tat ist die Definition einer Entfaltung genau auf die für dieses Resultat benötigte Bedingung abgestimmt. Unser Funktor liefert folglich eine Äquivalenz

$$E : \mathcal{T}_{[F]}/\mathcal{V}_{[F]} \xrightarrow{\cong} (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F$$

mit der vollen Unterkategorie aller derjenigen Objekte von  $\mathcal{T}/\mathcal{V}$ , die in  $\mathcal{T}$  entfaltetbar sind, und insbesondere ist diese volle Unterkategorie von  $\mathcal{T}/\mathcal{V}$  auch trianguliert. Nun zeigen wir, daß gilt  $F(X) = 0$  für alle  $X \in \mathcal{V}_{[F]}$ . Per definitionem ist für  $X \in \mathcal{V}$  ja der Nullmorphismus  $X \rightarrow 0$  eine Auflösung, und ist  $X$  zusätzlich entfaltet, so muß sie sich verlängern lassen durch eine Auflösung  $0 \rightarrow Y$  derart, daß die Komposition einen Isomorphismus  $FX \xrightarrow{\cong} FY$  liefert. Das ist aber offensichtlich nur möglich, wenn bereits gilt  $FX = 0$ . Die Einschränkung von  $F$  auf  $\mathcal{T}_{[F]} \subset \mathcal{T}$  faktorisiert also über einen triangulierten Funktor  $\bar{F} : \mathcal{T}_{[F]}/\mathcal{V}_{[F]} \rightarrow \mathcal{D}$ . Jede Wahl eines Quasiinversen  $U$  der Äquivalenz  $E$  liefert so einen triangulierten Funktor

$$R := \bar{F}U : (\mathcal{T}/\mathcal{V})_F \rightarrow \mathcal{D}$$

nebst einer verträglichen Transformation  $\tau : F \Rightarrow RQ$ , die zusammen die charakterisierende Eigenschaft eines Rechtsderivierten aus 3.2.13 haben. Die Eindeutigkeit des Paares  $(R, \tau)$  bis auf eindeutigen Isomorphismus zeigt auch, daß die  $\mathbb{Z}$ -Struktur auf  $R$  durch die Bedingungen im Satz bereits eindeutig festgelegt wird.  $\square$

### 3.4 Derivierte Funktoren auf derivierten Kategorien

**Definition 3.4.1.** Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Den rechtsderivierten Funktor an die Verknüpfung  $Q \circ \text{Hot}(F) : \text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Hot}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{B})$  in Bezug auf das gesättigte Oresystem  $S$  der Quasiisomorphismen alias das Verdiersystem der azyklischen Komplexe von  $\text{Hot}(\mathcal{A})$  im Sinne von 3.2.14 nennen wir abkürzend den **rechtsderivierten Funktor zu  $F$**  und notieren ihn vereinfachend  $\text{R}F$  statt  $\text{R}(Q \circ \text{Hot}(F))$ . Weiter sagen wir in diesem Zusammenhang  **$F$ -entfaltbar** statt „ $Q \circ \text{Hot}(F)$ -entfaltbar“ und bezeichnen die Kategorie aller  $F$ -entfaltbaren Objekte mit  $\text{Der}(\mathcal{A})_F := \text{Der}(\mathcal{A})_{Q \circ \text{Hot}(F)}$ . Unser derivierter Funktor  $\text{R}F$  ist in diesen Notationen also ein triangulierter Funktor

$$\text{R}F : \text{Der}(\mathcal{A})_F \rightarrow \text{Der}(\mathcal{B})$$

von der vollen triangulierten Unterkategorie der  $F$ -entfaltbaren Komplexe in die derivierte Kategorie von  $\mathcal{B}$ . Die volle Unterkategorie der  $F$ -entfaltbaren im Grad Null konzentrierten Komplexe alias Objekte  $A \in \mathcal{A}$  notieren wir  $\mathcal{A}_F$ . Die **höheren derivierten Funktoren von  $F$**  erklären wir dann als die Funktoren

$$R^i F := \mathcal{H}^i R F : \mathcal{A}_F \rightarrow \mathcal{B}$$

Schließlich nennen wir ein Objekt  $A \in \mathcal{A}$  ein  **$F$ -azyklisches Objekt**, wenn der Komplex  $A[0]$  ein  $F$ -entfalteter Komplex ist.

3.4.2. Nach 3.2.17 sind gegen die Pfeile beschränkte Komplexe von injektiven Objekten stets entfaltet. Folglich verallgemeinern die hier definierten höheren derivierten Funktoren unsere durch injektive Auflösungen definierten höheren derivierten Funktoren. Allgemeiner sind nach 3.3.3 diejenigen Komplexe  $I$  rechtsentfaltet für alle Funktoren, für die gilt  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(N, I) = 0$  für jeden exakten Komplex  $N$ , also die Objekte  $I \in (\text{exakte Komplexe})^{\perp}$ . Wir nennen sie die **homotopie-injektiven Komplexe**.

3.4.3. Analoge Sprechweisen vereinbaren wir auch für linksderivierte Funktoren und setzen zur Vermeidung von Vorzeichen  $L_i F := \mathcal{H}^{-i} L F$ .

**Lemma 3.4.4 (Rechtsderivieren erhält Positivität).** *Seien  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und  $X \in \text{Der}(\mathcal{A})_F$  ein entfaltbarer Komplex. So gilt*

$$X \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad R F(X) \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$$

*Beweis.* Nach Annahme gibt es einen Quasiisomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} Y$  zu einem entfaltetem Komplex  $Y \in \text{Hot}(\mathcal{A})$ . Der Quasiisomorphismus  $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0} Y$  muß sich dann so durch einen Quasiisomorphismus  $\tau^{\geq 0} Y \xrightarrow{\sim} Z$  fortsetzen lassen, daß die Komposition einen Quasiisomorphismus  $F Y \xrightarrow{\sim} F Z$  induziert. Es folgt unmittelbar  $\mathcal{H}^i R F(X) = \mathcal{H}^i F Y = 0$  für  $i < 0$ .  $\square$

**Proposition 3.4.5 (Der nullte Derivierte eines linksexakten Funktors).** *Ist  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien, so liefert die kanonische Transformation  $F \Rightarrow R F$  für jedes entfaltbare Objekt  $A \in \mathcal{A}$  einen Isomorphismus*

$$F A \xrightarrow{\sim} R^0 F(A)$$

*Beweis.* Ist  $A \rightarrow X$  eine Entfaltung, so ist  $A \rightarrow \tau^{\geq 0} X$  ein Quasiisomorphismus und folglich besitzt auch  $\tau^{\geq 0} X$  eine Entfaltung  $\tau^{\geq 0} X \rightarrow Y$ . Nun betrachten wir die Sequenz

$$F A \rightarrow \mathcal{H}^0 F X \rightarrow \mathcal{H}^0 F \tau^{\geq 0} X \rightarrow \mathcal{H}^0 F Y$$

Die linksexakte Sequenz  $A \hookrightarrow X^0/(\text{im } d) \rightarrow X^1$  zeigt nach Anwenden von  $F$ , daß die Komposition der beiden linken Morphismen dieser Sequenz ein Isomorphismus ist. Die Komposition der beiden rechten Morphismen ist ein Isomorphismus nach Konstruktion. Damit müssen dann alle drei Morphismen Isomorphismen sein.  $\square$

**Lemma 3.4.6 (Derivieren mit azyklischen Auflösungen).** *Ist  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und  $A \in \mathcal{A}$  ein  $F$ -entfaltbares Objekt und  $A \hookrightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots$  eine Auflösung durch einen Komplex  $F$ -azyklischer Objekte  $X^i \in \mathcal{A}$ , so ist der Komplex  $X$  bereits selbst entfaltet und der Quasiisomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} X$  induziert Isomorphismen*

$$RF(A) \xrightarrow{\sim} FX \quad \text{sowie} \quad R^i F(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i FX.$$

*Beweis.* Jeder Komplex von entfaltenen Objekten von  $\mathcal{A}$  mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen ist entfaltet, da die entfaltenen Komplexe nach 3.3.2 eine volle triangulierte Unterkategorie bilden. Ist  $A$  entfaltbar, so kann der Quasiisomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} X$  zumindest durch eine Entfaltung  $X \xrightarrow{\sim} Y$  fortgesetzt werden. Für  $n \geq 0$  betrachten wir nun den ab der  $(n+1)$ -ten Stelle durch Null fortgesetzten Komplex  $X^{\leq n}$  und das ausgezeichnete Dreieck  $A \rightarrow X^{\leq n} \rightarrow I$ . Da  $X^{\leq n}$  entfaltet ist, liefert es ein ausgezeichnetes Dreieck

$$RF(A) \rightarrow FX^{\leq n} \rightarrow RF(I) \xrightarrow{[1]}$$

Aus  $I \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{A})$  folgt mit 3.4.4 unmittelbar  $RF(I) \in \text{Der}^{\geq n}(\mathcal{B})$  und somit induziert  $RF(A) \rightarrow FX^{\leq n}$  Isomorphismen auf der Kohomologie in allen Graden  $< n$ . Andererseits induziert  $RF(A) \rightarrow FY$  Isomorphismen auf der Kohomologie in allen Graden und folglich induziert  $FX \rightarrow FY$  Isomorphismen auf der Kohomologie in allen Graden und  $X$  ist auch entfaltet.  $\square$

**3.4.7 (Lange exakte Sequenz der höheren Derivierten).** Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Nach 3.4.4 verschwinden auf jedem entfaltbaren Objekt von  $\mathcal{A}$  alle negativen Rechtsderivierten. Nach 2.4.4 gehört jede kurze exakte Sequenz  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  zu einem wohlbestimmten ausgezeichneten Dreieck und führt folglich, wenn denn alle drei Objekte entfaltbar sind, auch in dieser Allgemeinheit zu einer langen exakten Sequenz

$$R^0 F(A') \hookrightarrow R^0 F(A) \rightarrow R^0 F(A'') \rightarrow R^1 F(A') \rightarrow R^1 F(A) \rightarrow R^1 F(A'') \rightarrow \dots$$

Es reicht im übrigen auch schon zu fordern, daß zwei Objekte unserer kurzen exakten Sequenz entfaltbar sind: Dann ist das Dritte nach 3.3.2 notwendig auch entfaltbar. Ist  $F$  linksexakt, so zeigt 3.4.5, daß wir in unserer langen exakten Sequenz sogar  $R^0 F$  durch  $F$  ersetzen dürfen.



3.4.8 (**Adjunktion derivierter Funktoren auf derivierten Kategorien**). Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  abelsche Kategorien und  $(F, G)$  ein Paar von adjungierten Funktoren

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$$

So sind  $LF$  und  $RG$  partiell adjungiert im Sinne von 3.2.24, wir haben also eine explizite Isotransformation

$$\eta_{A,B} : \text{Der}_{\mathcal{A}}(A, RGB) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{B}}(LFA, B)$$

von Funktoren  $\text{Der}(\mathcal{A})_F \times \text{Der}(\mathcal{B})_G \rightarrow \text{Ens}$ , die wir wie folgt konstruieren: Gegeben Komplexe  $A \in \text{Hot } \mathcal{A}$  und  $I \in \text{Hot } \mathcal{B}$  liefert unsere Adjunktion  $(F, G)$  ja natürliche Isomorphismen  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, GB) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{B}}(FA, B)$ . Unsere Isotransformation ergibt sich damit aus der allgemeinen Diskussion zur Adjunktion derivierter Funktoren in 3.2.23.

*Beispiel 3.4.9 (Spezialfall der Garbenkohomologie)*. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und der linksexakte Funktor der globalen Schnitte  $\Gamma : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}$  liefert unsere Theorie, da die Kategorie  $\text{Ab}_{/X}$  genug Injektive hat, einen rechtsderivierten Funktor  $R\Gamma : \text{Der}^+(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Der}^+(\text{Ab})$ . Gegeben ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex  $\mathcal{F}$  von abelschen Garben setzt man

$$\mathbb{H}^i(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^i(R\Gamma)(\mathcal{F})$$

Diese Gruppe heißt die *i*-te **Hyperkohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$** . Besteht der Komplex  $\mathcal{F} = \mathcal{G}[0]$  aus einer Garbe  $\mathcal{G}$  im Grad Null und Nullen in allen anderen Graden, so erhalten wir unsere Garbenkohomologie zurück. In Formeln gilt also  $\mathbb{H}^i(X; \mathcal{G}[0]) = H^i(X; \mathcal{G})$ .

3.4.10. Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  mit genug Injektiven und ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Ket}^+ \mathcal{A}$  und ein additiver Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$  in die Kategorie der abelschen Gruppen können wir  $\mathcal{H}^n(RF)(\mathcal{F})$  beschreiben als den Grenzwert einer Spektralsequenz mit  $E_1$ -Term  $(R^p F)(\mathcal{F}^q)$ , indem wir eine simultane Auflösung unseres Komplexes wie in ?? wählen und darauf  $F$  loslassen auf dem so entstehenden Totalkomplex die offensichtliche  $(\geq q)$ -Filtrierung und dann die allgemeine Theorie der Spektralsequenzen ?? anwenden. Analoges gilt für einen additiven Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  in eine beliebige weitere abelsche Kategorie, man muß dafür nur den Formalismus der Spektralsequenzen auf allgemeine abelsche Kategorien verallgemeinern, was keine ernsthaften Schwierigkeiten aufwirft. Im übrigen kann besagte Filtrierung auf  $\mathcal{H}^n(RF)(\mathcal{F})$  unabhängig von der Wahl einer Auflösung beschrieben werden als die Filtrierung durch die Bilder der Hyperkohomologie der Teilkomplexe  $\mathcal{H}^n(RF)(\mathcal{F}^{\geq q})$ , bei denen wir alle  $\mathcal{F}^i$  mit  $i < q$  durch Nullen ersetzen.



*Beispiel 3.4.11.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und  $\mathcal{F} \in \text{Ket}^+(\text{Ab}/X)$  kann die Hyperkohomologie  $\mathbb{H}^n(X; \mathcal{F})$  mit ihrer Filtrierung durch die Bilder der  $\mathbb{H}^n(X; \mathcal{F}^{\geq q})$  nach 3.4.10 beschrieben werden durch eine Spektralsequenz mit  $E_1$ -Term  $H^p(X; \mathcal{F}^q)$ .

*Vorschau 3.4.12.* Sei  $X$  eine kompakte komplex-analytische Kähler-Varietät und  $\mathcal{F} = \text{hol}\Omega_X^*$  der holomorphen garbige de-Rham-Komplex

$$\mathcal{O}_X = \text{hol}\Omega_X^0 \rightarrow \text{hol}\Omega_X^1 \rightarrow \text{hol}\Omega_X^2 \rightarrow \dots$$

So ist die Spektralsequenz aus 3.4.11 bereits bei  $E_1$  ausgeartet und liefert mithilfe des offensichtlichen Isomorphismus  $H^n(X; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^n(X; \text{hol}\Omega_X^*)$  eine Filtrierung von  $H^n(X; \mathbb{C})$  durch komplexe Untervektorräume  $F^{\geq q} \subset H^n(X; \mathbb{C})$  und Isomorphismen der Subquotienten mit  $H^p(X; \text{hol}\Omega_X^q)$  für  $p + q = n$ . Man erkennt das, indem man vom offensichtlichen Isomorphismus  $\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{T}X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}X$  des holomorphen Tangentialbündels mit dem glatten Tangentialbündel  $\mathbb{T}X$  der reellen Mannigfaltigkeit  $X$  ausgeht, der für  $X \subseteq \mathbb{C}^n$  nicht weiter erklärt werden muß und funktoriell ist für offene Einbettungen. Nun erhalten wir für komplexe Vektorräume  $V$  in hoffentlich offensichtlicher Weise natürliche komplexlineare Abbildungen

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V, \mathbb{C}) \xleftarrow{\sim} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^*$$

Die  $\mathbb{C}$ -Operation wird dabei im Zweifelsfalle stets durch das Nachschalten einer Multiplikation erklärt und ist auf den restringierten Räumen ein für allemal vergessen. Erklären wir für einen reellen Vektorraum  $W$  eine schieflineare Involution  $\bar{\cdot} \otimes \text{id}$  auf  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$  durch Fortsetzen der Konjugation  $\bar{\cdot}$  auf  $\mathbb{C}$  und notieren sie durch einen Querstrich, so führt unsere Einbettung von  $V^*$  zu einer Zerlegung als interne direkte Summe

$$V^* \oplus \overline{V^*} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^*$$

Der zweite Summand entspricht dabei in der Mitte unserer Morphismenkette von oben dem Raum aller schieflinearen Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{C}$ . Dieser funktorielle Isomorphismus liefert zusammen mit unserem Isomorphismus  $\text{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{T}X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}X$  einen Isomorphismus komplexer Vektorbündel

$$\mathbb{T}^*X \oplus \overline{\mathbb{T}^*X} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}^*X$$

Wenn wir für glatte komplexwertige Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ihr Differential  $df$  in der offensichtlichen Weise als Schnitt von  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}^*X$  erklären, so haben wir unter unserem Isomorphismus  $(dz, 0) \mapsto dz$  und  $(0, \overline{dz}) \mapsto d\bar{z}$ . Unsere Zerlegung des komplexifizierten reellen Kotangentialbündels induziert nun mit [LA2] 8.3.20

Zerlegungen seiner äußeren Potenzen. So können wir den komplexifizierten garbigen de-Rham-Komplex  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_X^k$  der  $X$  zugrundeliegenden glatten reellen Mannigfaltigkeit realisieren als den Totkomplex eines garbigen Doppelkomplexes weicher Garben von komplexen Vektorräumen

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_X^k \xrightarrow{\sim} \text{tot}(\Omega_X^{p,q}, \partial, \bar{\partial})$$

Die Spaltenkomplexe dieses Doppelkomplexes sind nun Auflösungen der Garben  $\text{hol } \Omega_X^p$  holomorpher Formen und der horizontale Kernkomplex ist genau der holomorphe de-Rham-Komplex. Nimmt man globale Schnitte, so findet man mit den sogenannten „harmonischen Formen“ repräsentierende Untervektorräume für die Kohomologie der Spaltenkomplexe, auf denen das horizontale Differential bereits im ursprünglichen Doppelkomplex verschwindet, weshalb in unserer Spektralsequenz alle höheren Differentiale verschwinden. Also ist unsere Spektralsequenz bereits bei  $E_1$  ausgeartet. Wir erhalten so wie bereits erwähnt die **Hodge-Filtrierung** auf der Kohomologie  $H^n(X; \mathbb{C})$ . Unsere Argumente zeigen, daß sie unabhängig ist von der Wahl einer Kähler-Metrik, obwohl die harmonischen Formen durchaus von dieser Wahl abhängen.

**3.4.13 (Grothendieck's Spektralsequenz im Fall derivierter Kategorien).** Seien abelsche Kategorien  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  gegeben und additive Funktoren  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Haben  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  genug Injektive, so sind auf den gegen die Pfeile beschränkten derivierten Kategorien jeweils die rechtsderivierten Funktoren definiert. Diese Daten fassen wir zusammen im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hot}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{F} & \text{Hot}^+(\mathcal{C}) & \xrightarrow{G} & \text{Hot}^+(\mathcal{D}) \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \text{Der}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{RF} & \text{Der}^+(\mathcal{C}) & \xrightarrow{RG} & \text{Der}^+(\mathcal{D}) \end{array}$$

Andererseits können wir auch den derivierten Funktor der Verknüpfung  $R(G \circ F)$  betrachten. Unsere allgemeinen Argumente aus ?? liefern dann eine wohldefinierte Transformation  $R(G \circ F) \Rightarrow RG \circ RF$ . Macht unser Funktor  $F$  zusätzlich injektive Objekte zu  $G$ -azyklischen Objekten, so ist diese Transformation wieder nach ?? sogar eine Isotransformation

$$R(G \circ F) \xrightarrow{\sim} RG \circ RF$$

### 3.5 Derivieren homologisch endlicher Funktoren

**Definition 3.5.1.** Ein additiver Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen abelschen Kategorien heißt **homologisch rechtsendlich**, wenn alle  $A \in \mathcal{A}$  unter  $F$  entfaltbar sind

und es eine Schranke  $N$  gibt mit  $R^i F(A) = 0$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  und alle  $i > N$ . Das Infimum über alle möglichen derartigen Schranken  $N$  heißt dann die **homologische Rechtsdimension** unseres Funktors.

3.5.2. Analog definieren wir über den linksderivierten Funktor die Begriffe **homologisch linksendlich** und **homologische Linksdimension**. Meist spricht man kürzer von **homologisch endlichen** Funktoren und ihrer **homologischen Dimension** und überläßt es dem Leser, aus dem Kontext zu erschließen, ob das nun von Links oder von Rechts gemeint sein soll.

*Beispiel 3.5.3.* Der Nullfunktorkomplex hat die homologische Rechtsdimension  $-\infty$ . Ein linksexakter Funktor ist homologisch rechtsendlich von der homologischen Dimension Null genau dann, wenn er exakt aber nicht der Nullfunktorkomplex ist. Gegeben ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  ist der Funktor der globalen Schnitte  $\Gamma : \text{Ab}/I \rightarrow \text{Ab}$  nach ?? homologisch rechtsendlich von der homologischen Dimension  $-\infty$  für  $I = \emptyset$ , von der homologischen Dimension 0 für  $I$  einpunktig, und von der homologischen Dimension 1 für  $I$  mehrpunktig.

**Satz 3.5.4 (Unbeschränktes Derivieren homologisch endlicher Funktoren).**

Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter homologisch rechtsendlicher Funktor zwischen abelschen Kategorien derart, daß sich jedes Objekt  $A \in \mathcal{A}$  in ein  $F$ -azyklisches Objekt einbetten läßt. So gilt:

1. Es gibt von jedem Komplex einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex von  $F$ -azyklischen Objekten;
2. Jeder Komplex von  $F$ -azyklischen Objekten ist  $F$ -entfaltet;
3. Ist  $d$  die homologische Dimension von  $F$ , so bildet der derivierte Funktor  $R F$  die Unterkategorie  $\text{Der}^{\leq n}(\mathcal{A})$  in die Unterkategorie  $\text{Der}^{\leq n+d}(\mathcal{B})$  ab.

3.5.5. Der Satz gilt analog und mit demselben Beweis für Familien  $F = (F_i)_{i \in I}$  linksexakter Funktoren, die sogar in verschiedenen abelschen Kategorien landen dürfen, also  $F_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i$ . Wir müssen dazu nur vereinbaren, daß „ $F$ -azyklisch“ zu verstehen ist als „ $F_i$ -azyklisch für alle  $i$ “ und müssen die homologische Endlichkeitsbedingung dahingehend verstehen, daß es eine Schranke  $N$  gibt, die die homologische Rechtsdimension aller unserer Funktoren  $F_i$  beschränkt. Formal mag man das auch folgern, indem man die Aussage des Satzes auf den Funktor  $F = (F_i) : \mathcal{A} \rightarrow \prod \mathcal{B}_i$  anwendet.

*Beweis.* Sei  $X = (X^n, d)$  ein Komplex in  $\mathcal{A}$ . Wir wählen Injektionen in azyklische Objekte  $i^n : X^n \hookrightarrow Z^n$ . Die Injektionen  $(i^n, i^{n+1}d)^\top : X^n \hookrightarrow Z^n \oplus Z^{n+1}$  bilden eine Kettenabbildung, wenn wir als Differential rechts die Abbildung

$(z^n, z^{n+1}) \mapsto (z^{n+1}, 0)$  nehmen. Indem wir den Kokern unserer Kettenabbildung bilden, erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$X \hookrightarrow T \twoheadrightarrow Q$$

mit  $T^n = Z^n \oplus Z^{n+1}$ . Betrachten wir nun in der Homotopiekategorie das ausgezeichnete Dreieck  $\text{Keg}(T \rightarrow Q) \rightarrow [1]T \rightarrow [1]Q$ , so ist klar, daß der offensichtliche Morphismus  $[1]X \rightarrow [1]T$  über einen Morphismus  $[1]X \rightarrow \text{Keg}(T \rightarrow Q)$  faktorisiert, dessen Kegel in der derivierten Kategorie Null wird, da er nach dem Oktaederaxiom und 2.4.4 der Kegel über der Identität auf  $[1]Q$  ist. Ist nun  $r > 0$  fest und verschwinden alle  $R^i F(X^n)$  für alle  $i > r$  und alle  $n$ , so verschwinden für  $Y := \text{Keg}(T \rightarrow Q)$  nach der langen exakten Sequenz unsere  $R^i F(Y^n)$  für alle  $i \geq r$  und alle  $n$ . Induktiv folgt so die erste Aussage. Um die zweite Aussage zu zeigen, sei  $Z$  ein Komplex von azyklischen Objekten und  $Z \xrightarrow{\sim} X$  ein Quasiisomorphismus. Nach der ersten Aussage können wir ihn verlängern durch einen Quasiisomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} Y$  in einen weiteren Komplex von azyklischen Objekten. Es gilt zu zeigen, daß der induzierte Morphismus ein Quasiisomorphismus  $FZ \xrightarrow{\sim} FY$  ist. Es gilt durch Übergang zum Kegel in der Homotopiekategorie  $K := \text{Keg}(Z \rightarrow Y)$  gleichbedeutend zu zeigen, daß für jeden exakten Komplex  $K$  von azyklischen Objekten auch  $FK$  azyklisch ist. Nun ist  $\ker d^n \hookrightarrow K^n \rightarrow K^{n+1} \rightarrow \dots$  für jedes  $n$  eine azyklische Auflösung von  $\ker d^n$  und mit 3.4.6 folgt für  $i > 0$  sofort  $\mathcal{H}^{n+i} FK = R^i F(\ker(d^n))$ . Diese Objekte verschwinden jedoch für  $i$  oberhalb der homologischen Dimension von  $F$ , und da das für alle  $n$  gilt, muß  $FK$  ein exakter Komplex sein. Der Beweis der letzten Aussage sei dem Leser überlassen.  $\square$

## 4 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich vielen, insbesondere Olaf Schnürer und Bernhard Link. Der Inhalt geht im wesentlichen zurück auf Grothendieck und Deligne, [Gro72]. Sehr nützlich waren mir die Darstellungen von Godement [?] und Kashiwara-Schapira [KS90] und Skripten von Milicic und Hörmann zu derivierten Kategorien. Die Argumente zu unbeschränkten Auflösungen kommen aus [Spa88, Bek00]. Hilfreich waren auch die Texte des Stacks-Projektes.

## Literatur

- [AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie*;
- [Bek00] Tibor Beke, *Sheafifiable homotopy model categories*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **129** (2000), no. 3, 447–475.
- [Bor94] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra 1-3*, Encyclopaedia of Mathematics, Cambridge University Press, 1994.
- [Gro72] Alexander Grothendieck, *SGA 4*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer, 1972.
- [GZ67] Peter Gabriel and Michel Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, 1967.
- [KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie*;
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren, vol. 292, Springer, 1990.
- [LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*;
- [Spa88] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Math. **65** (1988), no. 2, 121–154.
- [TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*;
- [TG] *Skriptum Garbenkohomologie*;
- [TS] *Skriptum Singuläre Homologie*;

## Index

- $\langle \rangle = \langle \rangle_{\Delta}$  trianguliertes Erzeugnis, 23
- $\langle \rangle = \langle \rangle_{\Delta^{\ominus}}$  Verdier-Erzeugnis, 23
- $\xrightarrow{\sim}$ 
  - Isomorphismus in  $\text{Der}$ , 27
- $\mathcal{C} | S^{-1}$  Lokalisierung einer Kategorie, 4
- $\mathcal{N}^{\perp}$  relativ Injektive, 30
- $\tilde{\mathcal{K}}$  Pfadkategorie von  $\mathcal{K}$ , 3
- Abbildungskegel
  - in triangulierter Kategorie, 15
- Abschneidefunktoren, 36
- Adjunktion
  - partielle, 50
- Anfangspunkt, 3
- antiausgezeichnetes Dreieck, 16
- ausgezeichnet
  - Dreieck, 16
- azyklisch
  - Objekt, 54
- Bild
  - wesentliches, 31
- Brüche, 9
- $\text{c\^o}l$  Kolimes in Funktorkategorie, 42
- $\text{c\^o}l$  filtrierender Kolimes in Funktorkategorie, 42
- déployé, 47
- dérivable, 48
- $\text{Der}$ , 27
- $\text{Der}^{\#}$  für  $\# \in \{+, -, b\}$ , 35
- $\text{Der}_A = \text{Der}(A\text{-Mod})$ , 28
- derivierte Kategorie, 27
- Derivierter Funktor
  - zahmer, 47
- derivierter Funktor  $R^i F$ , 54
- derivierter Funktor  $RF$ , 53
- dévissage, 24
- Dimension
  - homologische, 31
- distingué
  - triangle, 16
- distinguished
  - triangle, 16
- Dreieck, 15
  - ausgezeichnetes, 16
- Ecken, 3
- Endpunkt, 3
- entfaltbar, 47
  - Objekt, 53
- entfaltet, 46
- épaisse
  - souscatégorie, 23
- erblich
  - abelsche Kategorie, 31
- erzeugt
  - Verdiersystem, 23
- essentiell konstant, 44
- $\text{Ext}_A^q(A, B)$  Erweiterungen, 29
- garbentheoretischer Kohomologiering, 30
- gesättigt
  - multiplikatives System, 12
- $\mathbb{H}^i$  Hyperkohomologie, 56
- halbeinfach
  - abelsche Kategorie, 31
- hdim homologische Dimension, 31
- hocol Homotopiekolimes, 8
- Hodge-Filtrierung, 58
- homologische Dimension, 31
  - endliche, 31
- homotopie-injektiv, 54
- Homotopiekolimes, 8
- $\text{Hot}^+$ , 28, 35

$\text{Hot}^-$ , 35  
 $\text{Hot}^b$ , 35  
 Hyperkohomologie, 56  
 $\text{ind}(\mathcal{C})$  Ind-Objekte, 43  
 Ind-Objekt, 43  
 Indkolimes, 42  
 injektiv  
      $\mathcal{N}$ -injektiv, 30  
 Isobimodul von dg-Ringen, 33  
 Kategorie  
     triangulierte, 15  
 Köcher, 3  
      $\mathcal{U}$ -kleiner, 41  
      $\mathcal{U}$ -Köcher, 3  
 Kohomologiering  
     garbentheoretischer, 30  
 Kürzen, 9  
 $\varinjlim$  Limes in Funktorkategorie, 42  
 $\varinjlim$  Kolimes in Funktorkategorie, 42  
 $\overrightarrow{\lim}$ , 42  
 $\overleftarrow{\lim}$ , 42  
 $\varinjlim$  kofiltrierender Limes in Funktorkategorie, 42  
 Links-Ore-System, 9  
 linksderiviert  
     Funktorkategorie, 50  
 Lokalisierung  
     einer Kategorie, 4  
 Lokalisierungsfunktorkategorie, 5  
 Morphismenbimodul, 33  
 Morphismus von Dreiecken, 15  
 multiplikativ  
     in Kategorie, 8  
 multiplikatives System  
     in Kategorie, 8  
 Nullkategorie, 31  
 Nullsystem, 23  
 Oktaederaxiom, 16  
 opponiert  
     triangulierte Kategorie, 21  
 Ore-Bedingung, 9  
 Ore-System, 9  
 Orelokalisierung, 11  
 orientierbar  
     Sphärenbündel, 39  
 Orientierung  
     von Sphärenbündel, 38  
 partiell  
     Adjunktion, 50  
 Pfad  
     in Köcher, 3  
 Pfadkategorie, 3  
 Pfeile, 3  
 $\text{pro}(\mathcal{C})$  Pro-Objekte, 43  
 Pro-Objekt, 43  
 Prokolimes, 42  
 Quasibasis, 33  
 Quasiisomorphismus  
     von dg-Ringen, 33  
 Quotient  
     von triangulierter Kategorie, 24  
 Quotientenfunktorkategorie, 25  
 $\mathbb{R}F$  universeller Rechtsderivierter, 46  
 Rechts-Ore-System, 8  
 Rechtsbrüche, 9  
 Rechtsderivierter  
     universeller, 46  
 Rechtsdimension  
     homologische, 59  
 rechtsendlich  
     homologisch, 58  
 $R^i F$  Rechtsderivierter von  $F$ , 47  
 Selbsterweiterungen, 29  
 Sphärenbündel, 38



System  
     trianguliertes, 23

$\tau^{\leq n}, \tau^{< n}, \tau^{\geq n}, \tau^{> n}$  Abschneidefunktoren,  
     36

$\text{Trans}^{\mathbb{Z}}$  verträgliche Transformationen,  
     14

Transformation  
     verträgliche  
         von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren, 14

triangle  
     distingué, 16  
     distinguished, 16

trianguliert  
     Funktorkategorie, 22  
     Kategorie, 15  
     Kategorie, opponierte, 21  
     System, 23

$\mathcal{U}$ -kleiner Köcher, 41

Verdiersystem, 23

verträglich  
     Transformation von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren, 14

verträgliche Adjunktion, 14

volllicht  
     Funktorkategorie, 6

wesentlich  
     Bild, 31

$\mathbb{Z}$ -Funktorkategorie, 14  
 $\mathbb{Z}$ -Kategorie, 14  
 $\mathbb{Z}$ -Struktur, 14