

FUNDAMENTALGRUPPE UND ÜBERLAGERUNGSTHEORIE

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Homotopie und Fundamentalgruppe	4
1.1	Einführung in die algebraische Topologie	4
1.2	Definition der Fundamentalgruppe	9
1.3	Fundamentalgruppe der Kreislinie	15
1.4	Anwendungen und Beispiele	18
1.5	Homotopien zwischen stetigen Abbildungen	23
1.6	Kategorien und Funktoren	24
1.7	Homotopie und Fundamentalgruppe	30
1.8	Abelisierte Fundamentalgruppe*	37
1.9	Selbsthomotopien der Kreislinie	39
2	Beschreibung einiger Fundamentalgruppen	45
2.1	Produkte und Koprodukte in Kategorien	45
2.2	Kartesische Diagramme	47
2.3	Kokartesische Diagramme	50
2.4	Satz von Seifert und van Kampen	53
2.5	Freie Monoide und freie Gruppen	58
2.6	Push-out von Gruppen	65
2.7	Simplizialkomplexe und triangulierbare Flächen	66
2.8	Klassifikation der geschlossenen Flächen	74
2.9	Gruppen durch Erzeugende und Relationen	83
2.10	Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen	85
3	Überlagerungstheorie	88
3.1	Überlagerungen	88
3.2	Kategorien von Mengen mit Operation	93
3.3	Quotientenabbildungen als Überlagerungen	95
3.4	Lifts und Decktransformationen	98
3.5	Initiale und universelle Überlagerungen	103
3.6	Existenz universeller Überlagerungen	108
4	Überlagerungen und Gruppenwirkungen	113
4.1	Eigenschaften von Funktoren	113
4.2	Transformationen	114
4.3	Adjungierte Funktoren	117
4.4	Überlagerungen und Gruppenwirkungen	120
4.5	Überlagerungen und Fundamentalgruppe	124
4.6	Erzeuger und Relationen für $PSL(2; \mathbb{Z})^*$	133
4.7	Das Yoneda-Lemma*	135

4.8	Mehr zu adjungierten Funktoren*	137
5	Weiterführende Resultate	144
5.1	Die Zopfgruppe	144
5.2	Überlagerungen topologischer Gruppen*	151
5.3	Überlagerungen und Homotopie*	153
6	Danksagung	157
7	Vorlesung Topologie SS 22	158
	Literaturverzeichnis	161
	Indexvorwort	162
	Index	163

1 Homotopie und Fundamentalgruppe

1.1 Einführung in die algebraische Topologie

1.1.1. Ich erinnere an den vertrauten Begriff der Stetigkeit von Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen. Weiter bezeichne $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Skalarprodukt-norm, $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, und

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

die n -dimensionale **Kugelschale** oder n -**Sphäre**. Es ist also $S^{-1} = \emptyset$, $S^0 = \{+1, -1\}$, S^1 die Kreislinie, S^2 die Kugelschale und so weiter. Zur Motivation liste ich nun einige typische Probleme der Topologie auf.

1. Man zeige, daß es für $n \geq 0$ keine stetige Injektion $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ der n -dimensionalen Kugelschale in die n -dimensionale Ebene gibt. Als Übung empfehlen sich die Fälle $n = 0, 1$. Der Fall $n = 2$ wird in 1.9.10 erledigt, der allgemeine Fall ergibt sich als Konsequenz aus [TS] 3.3.17.
2. „Ein Igel läßt sich nicht kämmen ohne Wirbel“. In Formeln zeige man: Es gibt keine stetige Abbildung $\kappa : S^2 \rightarrow S^2$ derart, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2$. Wir zeigen das in 1.4.4.
3. Es bezeichne stets $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ die n -**dimensionale Vollkugel**. Es ist also D^0 ein Punkt, $D^1 = [-1, +1]$ ein kompaktes Intervall, D^2 die abgeschlossene Kreisscheibe und so weiter. Man zeige, daß jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ von einer abgeschlossenen Vollkugel in sich selber einen Fixpunkt hat. Diese Aussage heißt der **Brouwer'sche Fixpunktsatz**. Als Übung empfehlen sich wieder die Fälle $n = 0, 1$. Der Fall $n = 2$ wird in 1.4.3 behandelt, der allgemeine Fall in [TS] 2.3.12.

1.1.2. Gegeben Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ heißt eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt ein **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv ist und ihre Inverse $f^{-1} : B \rightarrow A$ auch stetig ist. Des weiteren heißen A und B **homöomorph**, wenn es einen Homöomorphismus von A nach B gibt. Wir schreiben kurz $A \cong B$ für die Aussage „ A ist homöomorph zu B “. Anschaulich bedeutet $A \cong B$, daß sich A durch „Verbeulen und Verbiegen“ aus B erhalten läßt. Zum Beispiel sind je zwei offene Intervalle in \mathbb{R} homöomorph, und „Die Oberfläche einer Kaffeetasse mit einem Henkel ist homöomorph zur Oberfläche eines Rettungsrings“. Man bezeichnet die Topologie deshalb auch scherzhaft als „Gummigeometrie“. Zur weiteren Motivation liste ich auch noch einige typische Probleme im Zusammenhang mit dem Homöomorphiebegriff auf.

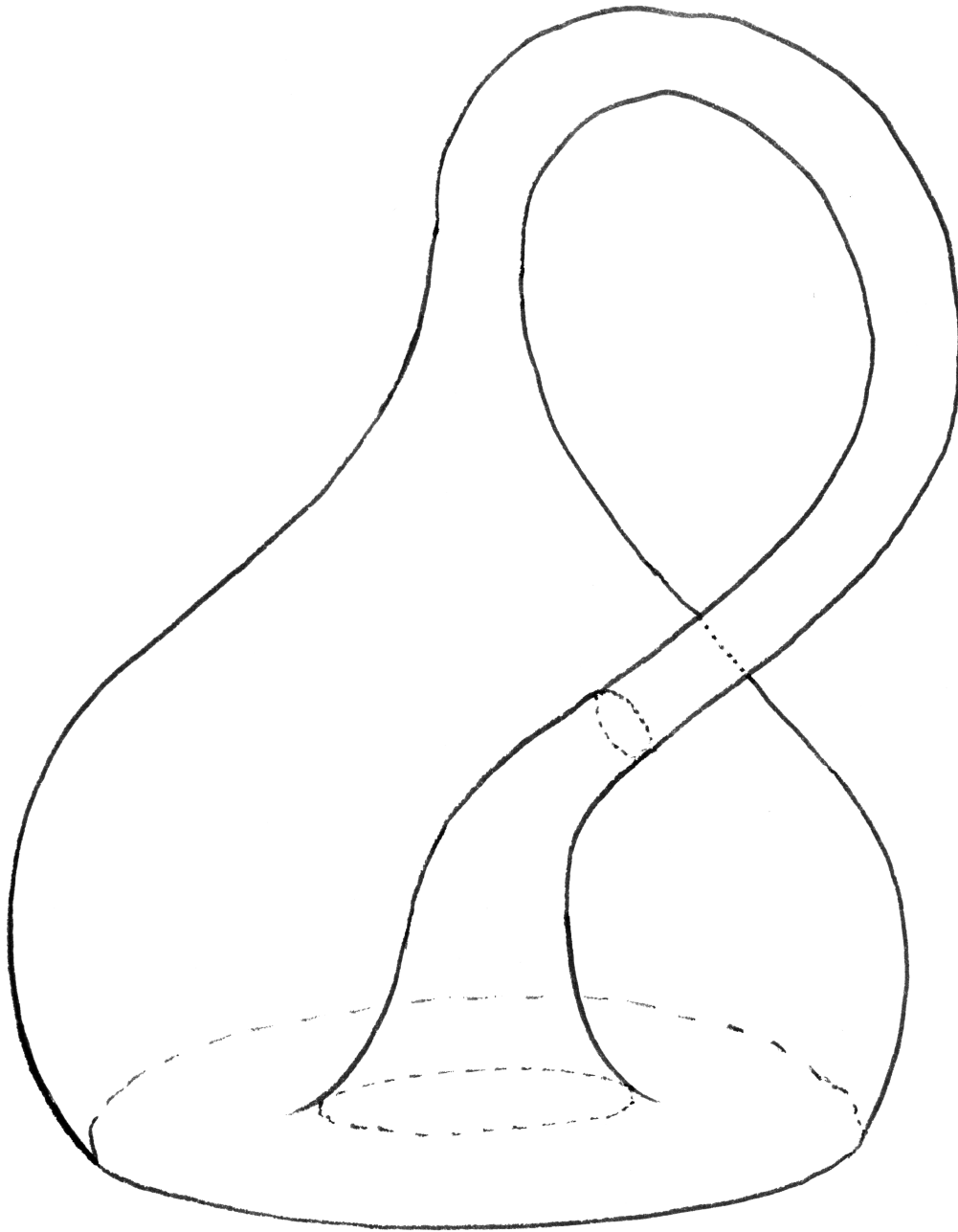
1. **Invarianz der Dimension:** Man zeige, daß für natürliche Zahlen $n, m \geq 0$ gilt $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Rightarrow n = m$. In Worten sind also endlichdimensionale reelle Räume verschiedener Dimension, wenn man sie mit ihrer natürlichen Topologie versieht, auch nicht homöomorph.
2. Man zeige, daß der Rettungsring, auch genannt der zweidimensionale **Torus** $S^1 \times S^1$, nicht homöomorph ist zur 2-Sphäre S^2 .
3. Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge der Ebene, die homöomorph ist zur Kreislinie, $S \cong S^1$. Man zeige, daß auch das Komplement von S homöomorph ist zum Komplement der Kreislinie, $\mathbb{R}^2 \setminus S \cong \mathbb{R}^2 \setminus S^1$. Der Beweis dieser Aussage gelingt erst unter Zuhilfenahme von Methoden der Analysis. Man kann sie etwa aus [TS] 3.3.11 zusammen mit [TS] 1.6.10 und dem „kleinen“ Riemann'schen Abbildungssatz [FT1] 6.5.1 der Funktionentheorie recht leicht folgern.

Ergänzung 1.1.3. Man kann für $S \subset \mathbb{R}^2$ homöomorph zur Kreislinie sogar zeigen, daß es einen Homöomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ gibt mit $f(S^1) = S$, aber den Beweis dieses **Satzes von Schönflies** werden wir nicht behandeln. Im übrigen erweisen sich die höherdimensionalen Analoga der Aussagen des letzten Punktes der vorangehenden Aufzählung sämtlich als falsch: Zum Beispiel ist die sogenannte **gehörnte Sphäre von Alexander** eine zur Kugelschale S^2 homöomorphe Teilmenge des Raums \mathbb{R}^3 , bei der eine Zusammenhangskomponente des Komplements noch nicht einmal schleifenfüllend ist.

1.1.4. In mathematisch nicht ganz so präziser Formulierung will ich auch noch die Klassifikation zusammenhängender geschlossener Flächen besprechen. Ich gebe zunächst eine Definition, die etwas unbeholfen ist, da sie die Sprache der Topologie noch weitgehend vermeidet.

Definition 1.1.5. Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine **geschlossene topologische in \mathbb{R}^n eingebettete d -Mannigfaltigkeit** genau dann, wenn F kompakt ist und es für jeden Punkt $p \in F$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $p \in U$ und $U \cap F \cong \mathbb{R}^d$.

1.1.6. Beispiele für geschlossene d -Mannigfaltigkeiten sind die Sphären S^d . Wir zeigen in [TM] 1.8.2, daß jede geschlossene 1-Mannigfaltigkeit homöomorph ist zu einer endlichen disjunkten Vereinigung von Kopien von S^1 . Eine geschlossene 2-Mannigfaltigkeit nennen wir auch eine **geschlossene Fläche**. Beispiele für geschlossene Flächen sind die Kugelschale S^2 , der Torus $S^1 \times S^1$, oder auch die Oberfläche einer massiven Acht, die homöomorph ist zur Oberfläche einer dickwandigen Suppentasse mit zwei Henkeln. Ein etwas komplizierteres Beispiel für eine geschlossene Fläche ist die sogenannte **Klein'sche Flasche**, die man erhält,



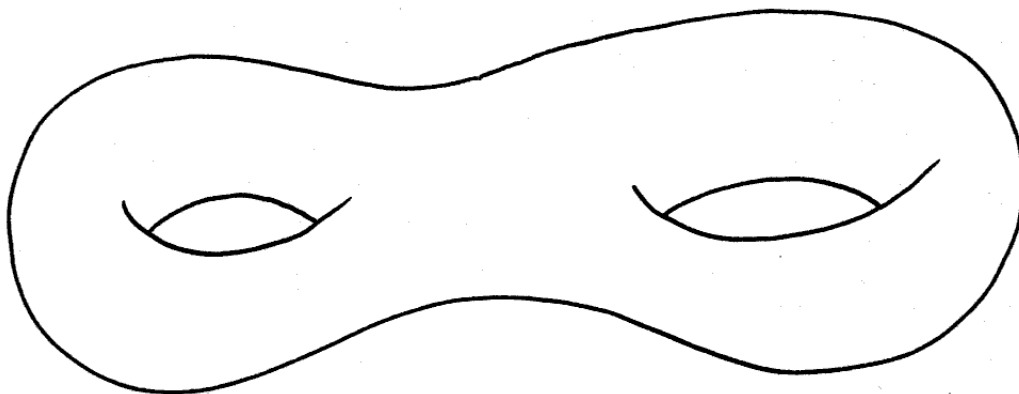
Die Klein'sche Flasche

indem man bei einer Flasche den Flaschenhals langzieht, umbiegt, ihn von aussen unter Durchdringung der Flaschenwand ins Innere der Flasche schiebt, dann ein kreisrundes Loch in den Boden der Flasche schneidet, und schließlich die Flaschenöffnung in das Loch unten am Boden einklebt. Genauer erhält man so in der Anschauung noch keine geschlossene Fläche in unserem Sinne, da sich unsere Fläche selbst überschneidet an der Stelle, an der der Flaschenhals in die Flasche eindringt. In der vierten Dimension jedoch kann man diese Selbstüberschneidung vermeiden. Stellen wir uns dazu die vierte Koordinate als Farbe vor und malen unsere Flasche changierend so an, daß der Flaschenhals und der Flaschenboden rot, der Flaschenkörper aber blau sind. Dann ist klar, daß unsere Fläche ohne Selbstüberschneidung im vierdimensionalen Raum liegt, und das ist dann wirklich unsere Klein'sche Flasche. Die Klein'sche Flasche ist nicht homöomorph zu einer Teilmenge des \mathbb{R}^3 , wie wir in ?? beweisen werden. Im folgenden Satz brauchen wir noch das berühmte Möbiusband, das man erhält, wenn man einen Papierstreifen einmal verdrillt zu einem Ring verklebt. Der Rand des Möbiusbandes ist eine einzige geschlossene Kreislinie.

Satz 1.1.7 (Klassifikation der geschlossenen Flächen). *Jede zusammenhängende geschlossene Fläche ist homöomorph zu genau einer der im folgenden beschriebenen Flächen:*

- *Man nehme die Kugelschale S^2 , schneide in diese $2g$ kreisrunde Löcher hinein und verbinde diese Löcher paarweise durch g hohle Henkel. Für $g = 0, 1, 2, \dots$ liefert das jeweils eine Fläche, die **orientierbare Fläche vom Geschlecht g** ;*
- *Man nehme die Kugelschale S^2 , schneide in diese g kreisrunde Löcher hinein und klebe Möbiusbänder in diese Löcher ein. Für $g = 1, 2, \dots$ liefert das jeweils eine Fläche, die **nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht g** .*

1.1.8. Die orientierbaren Flächen vom Geschlecht $g = 0, 1, 2$ sind die Kugelschale, der Torus und die Oberfläche einer Kaffeetasse mit zwei Henkeln oder auch eines Abseilachters, wie ihn Bergsteiger verwenden. Die nichtorientierbaren Flächen vom Geschlecht $g = 1, 2$ sind die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ aus [TM] 2.3 und die Klein'sche Flasche. Die nicht orientierbaren Flächen zeichnen sich dadurch aus, daß man bei einem Rundweg als Spaziergänger auf der Fläche unter Umständen „mit dem Kopf nach unten“ wieder am Ausgangspunkt ankommt. Statt des Einklebens von Möbiusbändern mag man sich gleichbedeutend auch das Ankleben sogenannter „Kreuzhauben“ vorstellen, wie sie auf Seite 82 vorgestellt werden. Zum Nachdenken hier noch eine Frage: Welche Fläche unserer Liste erhält man, wenn man an die Klein'sche Flasche einen Henkel anklebt? Die Antwort liefert die „Henkelelimination“ im Beweis des Klassifikationssatzes



Eine orientierbare kompakte Fläche vom Geschlecht zwei

2.8.11: Wir erhalten die nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht 4. Jetzt gilt es aber zunächst, einen präzisen und effektiven Begriffsapparat für die Behandlung derartiger Fragestellungen aufzubauen.

Übungen

Übung 1.1.9. Läßt man aus der Kugelschale S^n für $n \geq 0$ einen Punkt weg, so entsteht ein zu \mathbb{R}^n homöomorpher Raum. Hinweis: Stereographische Projektion.

1.2 Definition der Fundamentalgruppe

1.2.1. Ich erinnere daran, daß wir einen Weg in einem topologischen Raum in [AN1] ?? definiert hatten als eine stetige Abbildung eines mehrpunktigen kompakten reellen Intervalls in besagten Raum. Ist unser Intervall das Einheitsintervall $[0, 1]$, so reden wir von einem **normierten Weg** oder einfach von einem **Weg** in der Hoffnung, daß aus dem Kontext heraus klar wird, was gemeint ist.

Definition 1.2.2. Seien X ein topologischer Raum und $x, y \in X$ Punkte. Die Menge aller normierten Wege von x nach y bezeichnen wir mit

$$\Omega(X, x, y) := \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \mid \alpha \text{ ist stetig, } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

Für zwei Wege $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ und $\gamma \in \Omega(X, y, z)$, von denen der eine da aufhört wo der andere anfängt, erklären wir ihre **Verknüpfung** oder auch **Aneinanderhängung** $\gamma * \alpha \in \Omega(X, x, z)$ durch

$$(\gamma * \alpha)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2; \\ \gamma(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

1.2.3. Die Abbildung $\gamma * \alpha$ ist stetig nach [TM] 1.1.20, da es eine Überdeckung ihres Definitionsbereichs durch zwei abgeschlossene Mengen gibt derart, daß die Restriktion darauf jeweils stetig ist.

1.2.4. Anschaulich gesprochen entsteht der Weg $\gamma * \alpha$ dadurch, daß wir erst den Weg α und dann den Weg γ jeweils mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen, so daß wir insgesamt wieder einen normierten alias durch das Einheitsintervall parametrisierten Weg erhalten.

1.2.5. Sei X ein topologischer Raum. Wir erklären für $x \in X$ den **konstanten Weg** $\varepsilon_x \in \Omega(X, x, x)$ durch $\varepsilon_x(t) = x \forall t \in [0, 1]$. Wir erklären zu jedem Weg $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ den **umgekehrten Weg** $\bar{\alpha} \in \Omega(X, y, x)$ durch die Vorschrift $\bar{\alpha}(t) := \alpha(1 - t)$. Ein Weg, bei dem Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, heißt **geschlossen**.

Definition 1.2.6. Seien x, y Punkte eines topologischen Raums X . Zwei Wege α, β von x nach y heißen **homotop** oder präziser **homotop mit festen Randpunkten** und wir schreiben $\alpha \simeq \beta$, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- beziehungsweise Oberkante unseres Quadrats mit α beziehungsweise β übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also $h(t, 0) = \alpha(t)$ und $h(t, 1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sowie $h(0, \tau) = x$ und $h(1, \tau) = y$ für alle $\tau \in [0, 1]$. Wir schreiben unter diesen Umständen auch kurz

$$h : \alpha \simeq \beta$$

Definition 1.2.7. Ein geschlossener Weg heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg.

1.2.8. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie von Wegen dahingehend interpretieren, daß es eine durch $\tau \in [0, 1]$ parametrisierte Familie h_τ von normierten Wegen von x nach y geben soll derart, daß gilt $h_0 = \alpha$, $h_1 = \beta$ und daß unsere Familie stetig von τ abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung $[0, 1]^2 \rightarrow X$, $(t, \tau) \mapsto h_\tau(t)$ stetig ist.

Beispiel 1.2.9 (Konvexität impliziert Homotopie von Wegen). Gegeben $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $x, y \in X$ sind je zwei Wege $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$ homotop mittels $h(t, \tau) = (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$.

Beispiel 1.2.10 (Bilder homotoper Wege sind homotop). Ist genauer eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig, so folgt aus $h : \alpha \simeq \beta$ schon $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$.

Beispiel 1.2.11 (Umparametrisierungen liefern homotope Wege). Ein Weg ist homotop zu jeder seiner Umparametrisierungen. Ist genauer $v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $v(0) = 0$ und $v(1) = 1$ und ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg, so folgt $\gamma \simeq \gamma \circ v$. In der Tat finden wir erst $\text{id} \simeq v$ mit 1.2.9, da das eben beides Wege in der konvexen Teilmenge $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ sind, und dann $\gamma \circ \text{id} \simeq \gamma \circ v$, da nach 1.2.10 Bilder homotoper Wege homotop sind.

Lemma 1.2.12 (Homotopie ist eine Äquivalenzrelation). Für jeden topologischen Raum X und beliebige Punkte $x, y \in X$ ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\Omega(X, x, y)$ aller Wege von x nach y .

Beweis. Wir müssen zeigen, daß gilt erstens $\alpha \simeq \alpha$, zweitens $\alpha \simeq \beta \Rightarrow \beta \simeq \alpha$, und daß drittens aus $\alpha \simeq \beta$ und $\beta \simeq \gamma$ folgt $\alpha \simeq \gamma$. Wir überlassen dem Leser

den Beweis der beiden ersten Aussagen und zeigen nur die letzte Aussage. Seien also $h : \alpha \simeq \beta$ und $g : \beta \simeq \gamma$ Homotopien. Wir definieren $f : [0, 1]^2 \rightarrow X$ durch

$$f(t, \tau) = \begin{cases} h(t, 2\tau) & 0 \leq \tau \leq 1/2; \\ g(t, 2\tau - 1) & 1/2 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist in der Tat die Abbildung f stetig, denn ihre Restriktionen auf die abgeschlossenen Teilmengen $[0, 1] \times [0, 1/2]$ und $[0, 1] \times [1/2, 1]$ des Einheitsquadrats sind es und wir können [TM] 1.1.20 anwenden. Nach Konstruktion ist aber nun f eine Homotopie $f : \alpha \simeq \gamma$. \square

Definition 1.2.13. Äquivalenzklassen von Wegen unter der Äquivalenzrelation der Homotopie nennen wir **Homotopieklassen von Wegen**. Die Menge aller Homotopieklassen von Wegen von einem Punkt x zu einem Punkt y in einem Raum X notieren wir $\pi_1(X, x, y)$. In Formeln setzen wir also

$$\pi_1(X, x, y) := \Omega(X, x, y) / \simeq$$

Die Homotopieklasse eines Weges α notieren wir $[\alpha]$.

Definition 1.2.14. Ein **bepunkteter Raum** (X, x) ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten Punkt $x \in X$, seinem **Basispunkt**. Für einen bepunkteten Raum (X, x) vereinbaren wir die Abkürzungen $\Omega(X, x) := \Omega(X, x, x)$ für die Menge aller Wege mit unserem ausgezeichneten Punkt x als Anfangs- und Endpunkt sowie $\pi_1(X, x) := \pi_1(X, x, x)$ für die Menge aller Homotopieklassen derartiger Wege.

1.2.15 (Diskussion der Terminologie). In der Literatur nennt man einen bepunkteten Raum auch häufig einen „punktierten Raum“. Ich ziehe es vor, von einem bepunkteten Raum zu reden, da man wieder an anderer Stelle unter einer „punktierten Ebene“ oder einer „punktierten Kreisscheibe“ für gewöhnlich das Komplement eines Punktes in der Ebene oder das Komplement des Ursprungs in der Kreisscheibe versteht. Auf Englisch wird unterschieden zwischen „pointed space“ und „punctured plane“ oder auch „punctured disc“. Ich vermute sorglose Übersetzung als Grund für die unklare Terminologie im Deutschen.

Vorschau 1.2.16. Versehen wir die Menge $\Omega(X, x, y)$ mit der kompakt-offenen Topologie [TM] 1.9.1 und setzen $h(t, \tau) = h_\tau(t)$, so ist h nach dem Exponentialgesetz [TM] 1.9.9 stetig genau dann, wenn die Abbildung $[0, 1] \rightarrow \Omega(X, x, y)$, $\tau \mapsto h_\tau$ stetig ist. Mit dieser Topologie heißt $\Omega(X, x, y)$ ein **Wegeraum** und zwei Wege sind homotop genau dann, wenn sie zur selben Wegzusammenhangskomponente des Wegeraums gehören. Speziell heißt $\Omega(X, x)$ ein **Schleifenraum** und $\pi_1(X, x)$ ist die Menge der Wegzusammenhangskomponenten des Schleifenraums. Notieren wir $\pi_0(X)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten

eines topologischen Raums X , so haben wir demnach in Formeln $\pi_1(X, x) = \pi_0(\Omega(X, x))$ und Lemma 1.2.12 erweist sich als Spezialfall der allgemeinen Erkenntnis [TM] 1.3.14, daß auf jedem topologischen Raum die Wegverbindbarkeit eine Äquivalenzrelation ist.

Satz 1.2.17 (Fundamentalgruppe). *Gegeben ein bepunkteter Raum (X, x) induziert das Verknüpfen von Wegen eine Verknüpfung auf der Menge $\pi_1(X, x)$ aller Homotopieklassen von Wegen von x nach x und mit dieser Verknüpfung wird diese Menge eine Gruppe, die **Fundamentalgruppe unseres bepunkteten Raums***

$$\pi_1(X, x)$$

Beispiel 1.2.18. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge, so ist die Fundamentalgruppe von X nach 1.2.9 für jeden Basispunkt $x \in X$ trivial.

Beweis. Die beiden ersten Aussagen des anschließenden Lemmas 1.2.19 sagen uns, daß die Homotopieklasse der Verknüpfung von zwei Wegen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Wege abhängt. Die weiteren Aussagen liefern das neutrale Element, die Inversen und das Assoziativgesetz. \square

Lemma 1.2.19. *Wann immer die folgenden Verknüpfungen von Wegen in einem topologischen Raum X sinnvoll sind in dem Sinne, daß der eine aufhört wo der andere anfängt, gilt:*

1. $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta$
2. $\beta \simeq \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha * \beta'$
3. $\varepsilon * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * \varepsilon$
4. $\alpha * \bar{\alpha} \simeq \varepsilon, \bar{\alpha} * \alpha \simeq \varepsilon$
5. $\overline{(\alpha * \beta)} = \bar{\beta} * \bar{\alpha}$
6. $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$

Beweis. Wir zeigen nur beispielhaft die letzte Behauptung. Sicher gilt

$$\alpha * (\beta * \gamma) = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ v$$

für eine stetige Umparametrisierung alias eine stetige Abbildung $v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $v(0) = 0$ und $v(1) = 1$. Da nach 1.2.11 ein Weg homotop ist zu allen seinen derartigen Umparametrisierungen, folgt die Behauptung. \square

1.2.20. Ein topologischer Raum heißt **schleifenfüllend**, wenn jeder geschlossene Weg in unserem Raum zusammenziehbar ist. Er heißt **einfach wegzusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend und schleifenfüllend ist.

Satz 1.2.21 (Kriterium für schleifenfüllende Räume). *Kann ein topologischer Raum überdeckt werden durch zwei schleifenfüllende offene Teilmengen mit wegzusammenhängendem Schnitt, so ist er bereits selbst schleifenfüllend.*

Vorschau 1.2.22. Das Resultat wird sich später als ein Spezialfall des Satzes von Seifert-van Kampen 2.4.1 erweisen.

Beweis. Sei $X = U \cup V$ unser Raum mit seiner Überdeckung. Nach Übung 1.2.27 reicht es zu zeigen, daß $\pi_1(X, x)$ für $x \in U \cap V$ trivial ist. Sei dazu $\gamma \in \Omega(X, x)$ ein geschlossener Weg. Nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue [TM] 1.5.17 gibt es eine Unterteilung des Einheitsintervalls $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ derart, daß $[a_{i-1}, a_i]$ unter γ abwechselnd ganz in U oder ganz in V landet. Dann gilt $\gamma(a_i) \in U \cap V \forall i$ und wir finden für $0 < i < n$ Wege β_i , die in $U \cap V$ von x nach $\gamma(a_i)$ laufen. Bezeichnet andererseits $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow X$ den „auf dem Intervall $[a_{i-1}, a_i]$ reparametrisierten“ Weg $\gamma_i := \gamma \circ v_i$ für $v_i : [0, 1] \xrightarrow{\sim} [a_{i-1}, a_i]$ die Restriktion auf $[0, 1]$ der affinen Abbildung mit $v_i(0) = a_{i-1}$ und $v_i(1) = a_i$, so ist nach 1.2.11 unser Weg γ homotop zu $\gamma_n * \gamma_{n-1} * \dots * \gamma_2 * \gamma_1$, wobei es auf die Klammerung nach Lemma 1.2.19 nicht ankommt, da wir nur an „Wegen bis auf Homotopie“ interessiert sind. Nach Lemma 1.2.19 ist das nun weiter homotop zu

$$\gamma_n * (\beta_{n-1} * \bar{\beta}_{n-1}) * \gamma_{n-1} * (\beta_{n-2} * \bar{\beta}_{n-2}) * \dots * \gamma_2 * (\beta_1 * \bar{\beta}_1) * \gamma_1$$

und dann auch homotop zu

$$(\gamma_n * \beta_{n-1}) * (\bar{\beta}_{n-1} * \gamma_{n-1} * \beta_{n-2}) * \dots * (\bar{\beta}_2 * \gamma_2 * \beta_1) * (\bar{\beta}_1 * \gamma_1)$$

Da aber nach Annahme $\gamma_n * \beta_{n-1}$ beziehungsweise $\bar{\beta}_i * \gamma_i * \beta_{i-1}$ beziehungsweise $\bar{\beta}_1 * \gamma_1$ jeweils ein geschlossener Weg ist, der ganz in U oder ganz in V verläuft und somit homotop ist zum konstanten Weg ε_x nach Annahme, muß dann auch die ganze Verknüpfung homotop sein zum konstanten Weg ε_x . \square

Korollar 1.2.23. *Die Sphären S^n sind für $n \geq 2$ schleifenfüllend.*

1.2.24. Daß jeder Weg in einer n -Sphäre für $n \geq 2$, der nicht surjektiv ist, bereits zusammenziehbar sein muß, zeigt man leicht mit einer geeigneten stereographischen Projektion. Es gibt jedoch auch in höherdimensionalen Sphären surjektive Wege, die man etwa mit Hilfe der Hilbertkurve [AN1] ?? konstruieren kann. Der Beweis gilt diesen Fällen.

Beweis. Entfernen wir für $n \geq 0$ aus S^n einen Punkt, so erhalten wir einen topologischen Raum, der homöomorph ist zu \mathbb{R}^n mittels einer stereographischen Projektion und der insbesondere schleifenfüllend ist. Nehmen wir U das Komplement eines Punktes und V das Komplement eines anderen Punktes, so ist $S^n = U \cup V$ eine offene Überdeckung. Ab $n \geq 2$ ist außerdem $U \cap V$ wegzusammenhängend, und dann greift unser Kriterium 1.2.21 für schleifenfüllende Räume. \square

Vorschau 1.2.25. Die **Poincaré-Vermutung** besagt, daß jede wegzusammenhängende schleifenfüllende topologische kompakte 3-Mannigfaltigkeit ohne Rand homöomorph ist zur dreidimensionalen Sphäre S^3 . Sie wurde 2002 mit analytischen Methoden von G. Perelman bewiesen.

1.2.26 (Funktorialität der Fundamentalgruppe). Sei $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ein **Morphismus bepunkteter Räume** alias eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = y$. So erhält man einen Homomorphismus der Fundamentalgruppen $\pi_1(f) = f_{\#}$ durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \pi_1(f) = f_{\#} : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, y) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da nach 1.2.10 Bilder homotoper Wege homotop sind. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, da stets gilt $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$. Offensichtlich haben wir $\text{id}_{\#} = \text{id}$ und $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$ wann immer $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ und $g : (Y, y) \rightarrow (Z, z)$ Morphismen bepunkteter Räume sind. In der Terminologie, die wir gleich in 1.6 besprechen, ist die Fundamentalgruppe demnach ein „Funktorkonstrukt von der Kategorie der bepunkteten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen“.

Übungen

Übung 1.2.27. Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist genau dann schleifenfüllend, wenn seine Fundamentalgruppe in Bezug auf einen und gleichbedeutend jeden Basispunkt trivial ist.

Übung 1.2.28 (Komplemente von Geradenstücken im Raum). Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und eine echte Teilmenge eines Untervektorraums der Kodimension Zwei. So ist die Fundamentalgruppe des Komplements von I trivial, in Formeln $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus I, p) = 1$ für jeden Punkt p des Komplements. Ein Argument, das ohne die Bedingung I abgeschlossen auskommt, findet man in 1.7.12. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\emptyset \neq I \subsetneq 0 \times \mathbb{R}^{n-2}$. Jetzt lasse man die Sonne aus der Richtung der positiven ersten Koordinatenachse leuchten und betrachte die Menge U_+ aller Punkte, die nicht auf I oder im Schatten von I liegen, also

$$U_+ := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \leq 0 \Rightarrow (0, x_2, x_3, \dots, x_n) \notin I\}$$

Ähnlich erkläre man U_- durch Beleuchtung aus der Richtung der negativen ersten Koordinatenachse. So erhalten wir eine Überdeckung unseres Komplements durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen mit wegzusammenhängendem Schnitt.

Übung 1.2.29. Sei G ein topologischer Raum mit einer stetigen Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ und sei $e \in G$ ein neutrales Element. Man zeige, daß unter diesen Annahmen die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ kommutativ ist.

Ergänzende Übung 1.2.30 (Endlich erzeugte Fundamentalgruppen). Man zeige: Die Fundamentalgruppe einer bepunkteten kompakten Mannigfaltigkeit ist stets endlich erzeugt. Hinweis: Bezeichne $B = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1\}$ den 1-Ball um den Ursprung und $\bar{B} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ seinen Abschluß. Für unsere Mannigfaltigkeit X wähle man stetige Karten $\varphi_1, \dots, \varphi_r : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ derart, daß die $\varphi_i(B)$ schon X überdecken. Für jedes Paar von Indizes i, j mit $i \neq j$ wähle man eine endliche Überdeckung des Schnitts $\varphi_i(\bar{B}) \cap \varphi_j(\bar{B})$ durch zusammenhängende offene Teilmengen U_{ij}^ν von $\varphi_i(\mathbb{R}^n) \cap \varphi_j(\mathbb{R}^n)$. Für jedes ν wähle man einen Weg γ_{ij}^ν von $\varphi_j(0)$ nach $\varphi_i(0)$, der erst innerhalb von $\varphi_j(\mathbb{R}^n)$ nach U_{ij}^ν läuft und dann innerhalb von $\varphi_i(\mathbb{R}^n)$ nach $\varphi_i(0)$. Seien β_i Wege von $p := \varphi_1(0)$ nach $\varphi_i(0)$ mit der einzigen Einschränkung, daß β_1 der konstante Weg sein soll. So erzeugen die Verknüpfungen $\bar{\beta}_i * \gamma_{ij}^\nu * \beta_j$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, p)$.

Ergänzende Übung 1.2.31 (Abzählbare Fundamentalgruppen). Man zeige: Die Fundamentalgruppe einer bepunkteten abzählbar basierten Mannigfaltigkeit ist stets abzählbar. Hinweis: Man orientiere sich an den Hinweisen zur vorhergehenden Übung 1.2.30.

1.3 Fundamentalgruppe der Kreislinie

Satz 1.3.1 (Fundamentalgruppe der Kreislinie). Die Fundamentalgruppe der Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist isomorph zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen. Genauer ist die Abbildung, die jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Homotopieklasse des Weges $[0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi int)$ zuordnet, ein Isomorphismus

$$\begin{aligned} \text{wind} : \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1) \\ n &\mapsto [t \mapsto \exp(2\pi int)] \end{aligned}$$

1.3.2. Unter der **Umlaufzahl** eines Weges $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$ versteht man das Urbild seiner Homotopieklasse $[\gamma]$ unter diesem Isomorphismus. In anderen Worten ist also die Umlaufzahl von γ diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ homotop ist zum Weg $t \mapsto \exp(2\pi int)$.

Ergänzung 1.3.3. Arbeiten wir mit einem Körper \mathbb{C} von vergesslichen komplexen Zahlen im Sinne von [LA1] 2.7.7, so liefert uns die obige Konstruktion einen kanonischen Isomorphismus $2\pi i\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1)$, der jedem $a \in \ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$ eben den normierten Weg $t \mapsto \exp(ta)$ zuordnet. Man notiert diese Gruppe auch $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(1) := \ker(\exp)$ und nennt sie den **Tate-Twist von \mathbb{Z}** .

Beweis. Zur Vereinfachung betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Exp} : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

Mit der Euler'schen Formel können wir auch schreiben $\text{Exp}(t) = \exp(2\pi it)$. Das erklärt erstens unsere Notation und zweitens sieht man so leichter, daß Exp ein Gruppenhomomorphismus ist von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen der Länge 1. Anschaulich wickelt Exp die reelle Gerade auf die Kreislinie auf und aufgrund des Faktors 2π haben wir $\text{Exp}^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. In dieser Notation erhält die Abbildungsvorschrift aus unserem Satz die Gestalt

$$\text{wind} : n \mapsto [t \mapsto \text{Exp}(nt)]$$

Als erstes zeigen wir nun, daß sie einen Gruppenhomomorphismus definiert. Gegeben $m, n \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $(m + n \cdot)$ den normierten Weg $t \mapsto m + nt$ aus $\Omega(\mathbb{R}, m, m + n)$. Da je zwei Wege in \mathbb{R} mit denselben Endpunkten homotop sind, haben wir

$$(n + m \cdot) * (n \cdot) \simeq ((m + n) \cdot)$$

Diese Homotopie bleibt bestehen, wenn wir beide Seiten mit Exp verknüpfen. Dies Exp dürfen wir dann auf die beiden Faktoren des $*$ -Produkts verteilen und wegen $\text{Exp} \circ (n + m \cdot) = \text{Exp} \circ (m \cdot)$ erkennen wir, daß unsere Abbildungsvorschrift $\text{wind} : n \mapsto [\text{Exp} \circ (n \cdot)]$ in der Tat einen Gruppenhomomorphismus liefert. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, konstruieren wir eine inverse Abbildung. Der erste Schritt dazu ist die folgende Definition.

Definition 1.3.4. Gegeben Y ein topologischer Raum und $f : Y \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung heißt eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{Exp} \circ \tilde{f} = f$ ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von f .

Lemma 1.3.5 (Eindeutigkeit von Lifts). Seien Y zusammenhängend, $f : Y \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung und $\tilde{f}, \hat{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lifts von f . So gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{f}(y) = \tilde{f}(y) + k$ für alle $y \in Y$.

Beweis. Sicher gilt $\text{Exp}(\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)) = 1$, also $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y) \in \mathbb{Z}$ für alle $y \in Y$. Ist nun Y zusammenhängend, so muß $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)$ nach [ML] ?? konstant sein. \square

Lemma 1.3.6. Jede stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ besitzt einen Lift.

Beweis. Unser Exp liefert Homöomorphismen $\text{Exp}_x : (x, x + 1) \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus \text{Exp}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, siehe Übung [ML] ?? . Ist also f nicht surjektiv, liegt sagen wir $\text{Exp}(x)$ nicht in seinem Bild, so ist $\text{Exp}_x^{-1} \circ f = \tilde{f}$ ein Lift und wir sind fertig. Weil nun f gleichmäßig stetig ist, finden wir $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = 1$ derart, daß f auf allen Teilintervallen $[a_{i-1}, a_i]$ nicht surjektiv ist. Wir wählen nun

Lifts \tilde{f}_i von $f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ für $i = 1, \dots, k$ und können diese Lifts durch Addition von Elementen von \mathbb{Z} so abändern, daß stets gilt $\tilde{f}_i(a_i) = \tilde{f}_{i+1}(a_i)$. Dann erklären wir \tilde{f} durch $\tilde{f}|_{[a_i, a_{i+1}]} = \tilde{f}_i$ und sind fertig. \square

Lemma 1.3.7. *Jede stetige Abbildung $f : [0, 1]^2 \rightarrow S^1$ besitzt einen Lift.*

Beweis. Wir zerlegen zunächst unser Quadrat $[0, 1]^2$ in so kleine Schachfelder, daß das Bild keines unserer Felder ganz S^1 ist. Die Einschränkung von f auf jedes dieser Felder läßt sich wie im Beweis zuvor leicht liften. Als nächstes konzentrieren wir uns auf eine Zeile von Schachfeldern und ändern in dieser Zeile unsere Lifts so um Konstanten aus \mathbb{Z} ab, daß sie auf dem Schnitt benachbarter Felder zusammenpassen. So erhalten wir einen Lift auf der ganzen Zeile. Das machen wir für jede Zeile, passen dann diese Lifts wieder aneinander an, und erhalten so schließlich einen Lift auf unserem ganzen Quadrat. \square

1.3.8. Gegeben $x \in S^1$ und einen geschlossenen Weg $\alpha \in \Omega(S^1, x)$ erklären wir seine **Ganghöhe** $\text{gh}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ durch

$$\text{gh}(\alpha) := \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)$$

für einen und jeden Lift $\tilde{\alpha}$ von α . Am Ende des Beweises werden wir sehen, daß die Ganghöhe mit der Umlaufzahl übereinstimmt.

Proposition 1.3.9. *Geschlossene Wege in der Kreislinie sind homotop genau dann, wenn sie dieselbe Ganghöhe haben. In Formeln gilt für Wege $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ also*

$$\alpha \simeq \beta \Leftrightarrow \text{gh}(\alpha) = \text{gh}(\beta)$$

Beweis. \Rightarrow) Zu jeder Homotopie $h : \alpha \simeq \beta$ finden wir mit Lemma 1.3.7 einen Lift \tilde{h} . Sicher ist \tilde{h} auf der Unterkante des Einheitsquadrats ein Lift $\tilde{\alpha}$ von α und auf der Oberkante ein Lift $\tilde{\beta}$ von β . Weiter muß \tilde{h} auf der Vorder- und Hinterkante wie h selbst konstant sein. Insbesondere haben wir $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ und $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ und damit folgt $\text{gh}(\alpha) = \text{gh}(\beta)$.

\Leftarrow) Die Gleichheit der Ganghöhen $\text{gh}(\alpha) = \text{gh}(\beta)$ bedeutet, daß je zwei Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ von α und β mit demselben Anfangspunkt auch denselben Endpunkt haben. Als Wege in \mathbb{R} mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt sind dann aber besagte Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ homotop nach 1.2.9. Da Bilder homotoper Wege homotop sind nach 1.2.10, folgt $\alpha \simeq \beta$. \square

Unsere Ganghöhe $\text{gh} : \Omega(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ induziert nach der vorhergehenden Proposition 1.3.9 eine wohlbestimmte injektive Abbildung

$$\text{gh} : \pi_1(S^1, 1) \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

Es reicht zu zeigen, daß sie linksinvers ist zur Abbildung aus unserem Satz, in Formeln $\text{gh} \circ \text{wind} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Das prüft man ohne Schwierigkeiten. \square

1.3.10 (Fundamentalgruppe der punktierten Ebene). Geht man alle Argumente dieses Abschnitts noch einmal durch, so sieht man, daß wir überall statt S^1 genausogut \mathbb{C}^\times hätten schreiben können, wenn wir statt $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ eben $\text{Exp} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ betrachten. Wieder besitzt jeder Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ einen Lift, der bis auf eine additive Konstante $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt ist, und wieder erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \\ n &\mapsto [t \mapsto \exp(2\pi i n t)] \end{aligned}$$

und dessen Inverses wird durch die Ganghöhe gegeben. In 3.1.1 folgende werden wir sogenannte „Überlagerungen“ betrachten, denen sich diese beiden Situationen als Spezialfälle unterordnen.

Beispiel 1.3.11 (Unmöglichkeit komplexer Wurzelfunktionen). Mit den hier entwickelten Hilfsmitteln können wir sehr schnell sehen, daß es keine stetige Abbildung $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $q \circ w = \text{id}$ für $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ das Quadrieren. In der Tat gälte ja $q_\# \circ w_\# = \text{id}$ auf $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ und diese Gruppe ist isomorph zu \mathbb{Z} und wir haben $q_\#(c) = c^2$, wie Sie sich gleich in 1.3.13 überlegen dürfen. Es gibt jedoch, jetzt in additiver Notation, keine Abbildung $w_\# : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $2w_\#(n) = n \forall n \in \mathbb{Z}$.

Übungen

Übung 1.3.12. Sei (X, x) ein bepunkteter Raum. Ist $\alpha \in \Omega(X, x)$ ein geschlossener Weg, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$ mit $\alpha = \hat{\alpha} \circ \text{Exp}$, und die Verknüpfung von $\hat{\alpha}_\# : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(X, x)$ mit dem Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1)$ aus unserem Satz 1.3.1 wird gegeben durch $n \mapsto [\alpha]^n$.

Übung 1.3.13. Die Abbildung $[n] : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ induziert auf der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 1)$ die Abbildung $[n]_\# : c \mapsto c^n$ in multiplikativer Schreibweise, also $[n]_\# : c \mapsto nc$ in additiver Schreibweise.

Übung 1.3.14. Ist Y ein kartesisches Produkt von endlich vielen reellen Intervallen, so besitzt jede stetige Abbildung $Y \rightarrow S^1$ einen Lift.

Übung 1.3.15. Man zeige: Ein geschlossener Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ in $\mathbb{R}_{>0}$ und der Eigenschaft, daß es $a \in (0, 1)$ gibt mit $\gamma(a) \in \mathbb{R}_{<0}$ und $\text{Im}(\gamma(t)) \geq 0 \forall t \in [0, a]$ und $\text{Im}(\gamma(t)) \leq 0 \forall t \in [a, 1]$, hat die Umlaufzahl Eins um den Ursprung.

1.4 Anwendungen und Beispiele

Satz 1.4.1 (Retraktionen einer Kreisscheibe auf ihren Rand). *Es gibt keine stetige Abbildung von einer abgeschlossenen Kreisscheibe auf ihren Randkreis, deren Einschränkung auf besagten Randkreis die Identität ist.*

1.4.2. Ist $X \supset A$ ein topologischer Raum mit einer Teilmenge, so versteht man ganz allgemein unter einer **Retraktion von X auf A** eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$.

Beweis. Bezeichne $D = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$ ihren Randkreis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, es gäbe solch eine stetige Abbildung $r : D \rightarrow S^1$ mit $r(z) = z$ für alle $z \in S^1$. Bezeichne $i : S^1 \hookrightarrow D$ die Einbettung. Wir hätten also ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i} & D \\ & \searrow \text{id} & \downarrow r \\ & & S^1 \end{array}$$

und erhielten nach 1.2.26 mit π_1 ein kommutatives Diagramm von Gruppen

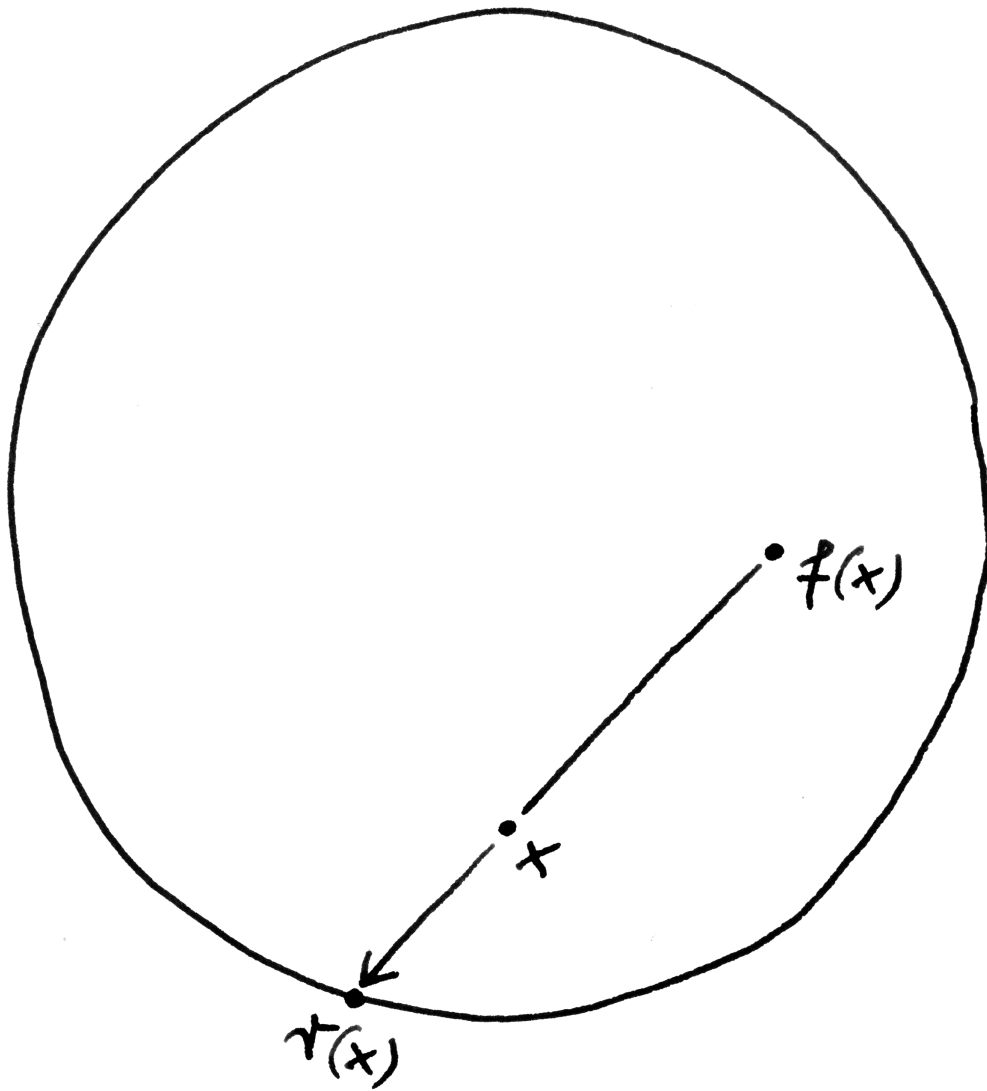
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(D, 1) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow r_\# \\ & & \pi_1(S^1, 1) \end{array}$$

Das ist aber unmöglich, da ja gilt $\pi_1(D, 1) \cong 1$ nach 1.2.9 und $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ nach 1.3.1. □

Satz 1.4.3 (Fixpunktsatz von Brouwer für die Kreisscheibe). *Jede stetige Abbildung von der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich selbst hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f : D \rightarrow D$ unsere stetige Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe D . Wäre $f : D \rightarrow D$ stetig mit $f(x) \neq x$ für alle $x \in D$, so könnten wir eine Abbildung $r : D \rightarrow S^1$ der Einheitskreisscheibe auf ihren Rand S^1 definieren durch die Vorschrift, daß sie jedem $x \in D$ denjenigen Punkt $r(x) \in S^1$ zuordnet, „in dem der Strahl, der in $f(x)$ beginnt und durch x läuft, die Kreislinie S^1 trifft“. Offensichtlich wäre r stetig und $r(z) = z$ für alle $z \in S^1$, als da heißt, r wäre eine Retraktion der Kreisscheibe auf ihren Rand, im Widerspruch zum vorhergehenden Satz 1.4.1. □

Satz 1.4.4 (vom Igel). *Es gibt keine stetige Selbstabbildung der Kugelschale $\kappa : S^2 \rightarrow S^2$ derart, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2$.*



Die Retraktion r aus dem Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer

1.4.5. Man stelle sich vor, die Abbildung κ ordne jedem Punkt x auf der Außenfläche eines kugelförmig zusammengerollten Igels die Richtung $\kappa(x)$ des dort entspringenden Stachels zu. Diese Vorstellung mag auf bei Nachvollziehen des anschließenden Beweises hilfreich sein. Die Bedingung „ $\kappa(x)$ steht senkrecht auf x “ bedeutet, daß die Stacheln flach anliegen müssen, und unser Satz sagt, daß sich ein Igel nicht „wirbelfrei kämmen läßt“. Man beachte jedoch, daß sich ein „Igel von der Form eines Rettungsrings“ durchaus wirbelfrei kämmen läßt.

Vorschau 1.4.6. Einen eleganteren Beweis einer allgemeineren Aussage werden wir mit singulärer Homologie in [TS] 4.1.3 geben können.

Beweis. Wir zeigen das durch Widerspruch und nehmen also an, es gäbe so eine Kämmung κ . Bezeichne S_+^2 beziehungsweise S_-^2 die nördliche beziehungsweise südliche abgeschlossene Hemisphäre und $S^1 = S_+^2 \cap S_-^2$ den Äquator. Für $p \in S_+^2$ bezeichne R_p^+ die Rotation mit Rotationsachse in der Äquatorebene, die p auf den Nordpol $(0, 0, 1)$ dreht. Dann ist $p \mapsto R_p^+(\kappa(p))$ eine stetige Abbildung $\kappa_+ : S_+^2 \rightarrow S^1$. Analog definieren wir $\kappa_- : S_-^2 \rightarrow S^1$. Offensichtlich gilt für alle p auf dem Äquator $p \in S^1$ die Beziehung

$$\kappa_+(p) = s_p(\kappa_-(p)),$$

mit $s_p : S^1 \rightarrow S^1$ der Spiegelung an der zu p senkrechten Geraden in der Äquatorebene, die also p auf $-p$ abbildet. Fassen wir $S^1 \subset \mathbb{C}$ auf als die komplexen Zahlen der Länge 1, so wird die Abbildung $s : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$, $(p, x) \mapsto s_p(x)$ beschrieben durch die Formel $(p, x) \mapsto -p^2 x^{-1}$. Wir erhalten also

$$-\kappa_+(p)\kappa_-(p) = p^2 \quad \forall p \in S^1$$

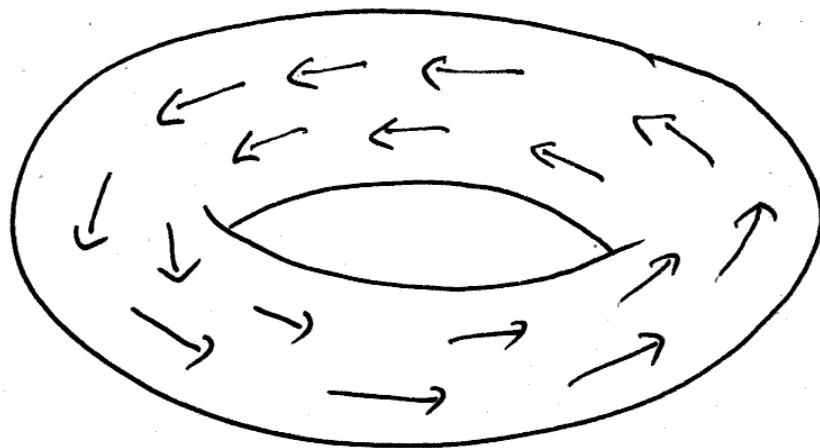
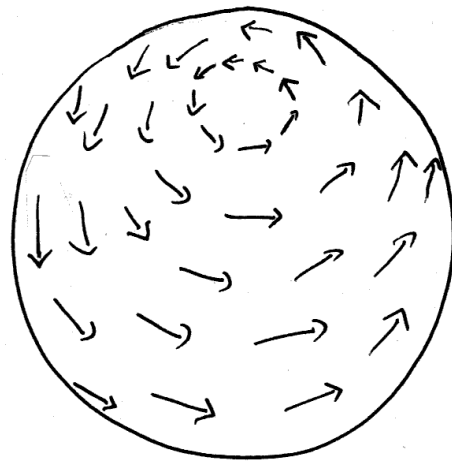
Das ist aber unmöglich, denn $p \mapsto p^2$ induziert auf $\pi_1(S^1, 1)$ nach 1.3.13 die Multiplikation mit 2, wohingegen die linke Seite auf $\pi_1(S^1, 1)$ eine konstante Abbildung liefert: In der Tat läßt sich die stetige Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$, $p \mapsto -\kappa_+(p)\kappa_-(p)$ ja faktorisieren in

$$S^1 \xrightarrow{\Delta} (S_+^2 \times S_-^2) \xrightarrow{\kappa_+ \times \kappa_-} (S^1 \times S^1) \xrightarrow{\text{mult}} S^1 \xrightarrow{(-1)} S^1$$

mit $\Delta(z) = (z, z)$. Die Fundamentalgruppe von $(S_+^2 \times S_-^2)$ ist jedoch trivial, da dieser Raum homöomorph ist zur konvexen Teilmenge $D \times D \subset \mathbb{R}^4$. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. \square

Übungen

Übung 1.4.7 (**Jeder Mensch hat einen Haarwirbel**). Wir gehen dabei davon aus, daß die Haare am Rand des Haarwuchses alle nach unten wachsen. Man zeige:



Satz vom Igel

Wirbelfreie Kämmung eines toridalen Igels

Es gibt keine stetige Abbildung $\kappa : S_+^2 \rightarrow S^2$ von der oberen Hemisphäre in die Sphäre, die den Äquator in die untere Hemisphäre abbildet und so, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S_+^2$.

Übung 1.4.8 (Die Fundamentalgruppe von einem Produkt). Man zeige: Für zwei bepunktete Räume (X, x) und (Y, y) induzieren die beiden Projektionen pr_1 und pr_2 von $X \times Y$ auf X und Y einen Isomorphismus

$$(\pi_1(\text{pr}_1), \pi_1(\text{pr}_2))^\top : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

und dessen Inverses wird gegeben durch $(\pi_1(\text{id}_X, y), \pi_1(x, \text{id}_Y))$ mit der Notation (id_X, y) für die Abbildung $X \rightarrow X \times Y$ gegeben durch $x \mapsto (x, y)$. Der Rettungsring $S^1 \times S^1$ hat also für jeden Basispunkt die Fundamentalgruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Anschaulich liefert ja auch jeder geschlossene Weg auf dem Rettungsring zwei Umlaufzahlen: „Wie oft der Weg um die Luftkammer läuft“ und „Wie oft er um den hypothetischen Matrosen im Ring läuft“.

1.5 Homotopien zwischen stetigen Abbildungen

Definition 1.5.1. Seien $f, g : Y \rightarrow X$ stetige Abbildungen. Eine **Homotopie von f nach g** ist eine stetige Abbildung

$$H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$$

derart, daß gilt $H(y, 0) = f(y)$ und $H(y, 1) = g(y)$ für alle $y \in Y$. Man sagt, die Abbildung f sei **homotop zu g** und schreibt $f \simeq g$, wenn es eine Homotopie von f nach g gibt.

1.5.2 (Diskussion der Terminologie). Dieser Begriff von Homotopie ist für Wege wesentlich verschieden von unserem Begriff aus 1.2.6, den wir deshalb genauer die **Homotopie mit festen Randpunkten** genannt haben. Es gibt jedoch eine gemeinsame Verallgemeinerung, bei der man zusätzlich eine Teilmenge $Z \subset Y$ festlegt und fordert, daß $H(z, \tau)$ für $z \in Z$ von τ unabhängig sein soll. Zwei Abbildungen $f, g : Y \rightarrow X$, die in dieser Weise homotop sind und die damit auf Z übereinstimmen müssen, heißen **homotop relativ zu Z** . Für $Y = [0, 1]$ und $Z = \{0, 1\}$ erhält man dann unsere Homotopie mit festen Randpunkten als Spezialfall.

Proposition 1.5.3. Gegeben topologische Räume X, Y ist die Relation \simeq eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\text{Top}(X, Y)$ aller stetigen Abbildungen von X nach Y .

Beweis. Wir überlassen den Nachweis der Symmetrie und Reflexivität dem Leser und zeigen nur die Transitivität ($f \simeq g$ und $g \simeq h$) \Rightarrow $f \simeq h$. Gegeben Homotopien F, G von f nach g beziehungsweise von g nach h erhält man eine Homotopie H von f nach h durch

$$H(x, \tau) = \begin{cases} F(x, 2\tau) & 0 \leq \tau \leq 1/2; \\ G(x, 2\tau - 1) & 1/2 \leq \tau \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

Definition 1.5.4. Die Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung f unter der Äquivalenzrelation der Homotopie bezeichnen wir mit $[f]$ und nennen sie die **Homotopieklasse von f** . Gegeben topologische Räume X, Y verwenden wir die beiden Notationen $\text{hTop}(X, Y) = [X, Y]$ für die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von X nach Y .

1.5.5. Bei dieser Notation ist Vorsicht geboten, denn für Wege α hat nun das Symbol $[\alpha]$ zwei verschiedene Bedeutungen. Im Zweifelsfall ist bei Wegen immer die Homotopieklasse von α unter Homotopie mit festen Randpunkten gemeint.

Beispiel 1.5.6. Gegeben $D \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und Y ein beliebiger topologischer Raum sind je zwei stetige Abbildungen $f, g : Y \rightarrow D$ homotop. In der Tat ist $H(y, \tau) = \tau f(y) + (1 - \tau)g(y)$ eine Homotopie.

Proposition 1.5.7. Seien $f, g : Y \rightarrow X$ stetige homotope Abbildungen, in Formeln $f \simeq g$. So gilt auch $h \circ f \simeq h \circ g$ für jede stetige Abbildung $h : X \rightarrow Z$ und $f \circ h \simeq g \circ h$ für jede stetige Abbildung $h : Z \rightarrow Y$.

Beweis. Ist $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie von f nach g , so ist die Abbildung $h \circ H : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ eine Homotopie von $h \circ f$ nach $h \circ g$ und die Abbildung $H \circ (h \times \text{id}) : Z \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie von $f \circ h$ nach $g \circ h$. \square

1.5.8. Da nach Proposition 1.5.7 die Homotopieklasse einer Verknüpfung von stetigen Abbildungen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Abbildungen abhängt, können wir eine **Verknüpfung von Homotopieklassen** definieren durch die Vorschrift $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

1.6 Kategorien und Funktoren

1.6.1. An dieser Stelle möchte ich damit beginnen, in die Sprache der Kategorien und Funktoren einzuführen, die auch in [LA2] 7.1.1 in größerer Ausführlichkeit und vor einem anderen Hintergrund besprochen wird.

Definition 1.6.2. Eine **Kategorie \mathcal{C}** ist ein Datum bestehend aus:

- a. einer Menge von **Objekten** $\text{Ob } \mathcal{C}$;

- b. einer Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ von **Morphismen** für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$;
- c. einer Abbildung $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$, $(f, g) \mapsto g \circ f$ für je drei Objekte $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, genannt die **Verknüpfung** von Morphismen,

derart, daß folgende Axiome erfüllt sind:

1. Die Morphismenmengen sind paarweise disjunkt;
2. Die Verknüpfung ist **assoziativ**, als da heißt, es gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für Morphismen f, g und h , wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind;
3. Für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$, die **Identität auf X** , so daß gilt $\text{id}_X \circ f = f$ und $g \circ \text{id}_X = g$ für Morphismen f und g wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind. Die üblichen Argumente zeigen, daß es für jedes X höchstens einen derartigen Morphismus geben kann, womit auch die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt wäre.

1.6.3. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ Objekte. Statt $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ sagen wir auch, f sei ein **Morphismus von X nach Y** und schreiben kurz

$$f : X \rightarrow Y$$

Statt id_X schreiben wir oft nur id . Statt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ schreiben wir oft kürzer $X \in \mathcal{C}$. Statt $\mathcal{C}(X, X)$ schreibe ich gerne kürzer $\mathcal{C}(X)$ und nenne diese Menge mit ihrer Verknüpfung das **Monoid der Endomorphismen von X** .

Beispiel 1.6.4 (Kategorie der topologischen Räume). Als erstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie $\mathcal{C} = \text{Top}$ aller topologischen Räume eingeführt, mit topologischen Räumen als Objekten und stetigen Abbildungen als Morphismen. Das ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, da die „Gesamtheit aller Mengen“ nach [GR] 1.3.9 nicht als Menge angesehen werden darf, und da wir von unseren Kategorien stets annehmen, daß ihre Objekte eine Menge bilden sollen. Um diese Untiefen der Logik zu umschiffen, betrachten wir feiner ein Mengensystem alias eine Menge \mathcal{U} von Mengen und die Kategorie

$$\mathcal{U}\text{Top}$$

aller topologischen Räume X , die als Menge betrachtet Elemente unseres Mengensystems \mathcal{U} sind, in Formeln $X \in \mathcal{U}$. Meist wird das Mengensystem \mathcal{U} in der Notation dann aber doch weggelassen und nur insgeheim dazugedacht. So wollen wir es im folgenden meist auch halten.

1.6.5 (**Morphismen versus Abbildungen**). Das vorhergehende Beispiel ist zwar typisch, aber man lasse sich davon nicht in die Irre führen. Bei einer allgemeinen Kategorie müssen die Objekte a priori keineswegs Mengen mit Zusatzstruktur sein und die Morphismen keineswegs strukturerhaltenden Abbildungen.

1.6.6. In vielen Quellen fordert man stattdessen, daß die Objekte einer Kategorie eine „Klasse“ bilden sollen. Mir gefällt die hier gegebene Formulierung besser, da sie im Rahmen der Terminologie der Mengenlehre bleibt. Statt mit „Klassen“ werden wir zu gegebener Zeit mit „Universen“ arbeiten. Das hat den zusätzlichen Vorteil, daß man, wenn es einmal nötig sein sollte und man etwa die Kategorie aller Kategorien betrachten will, noch zu höheren Universen aufsteigen kann. Es hat den Nachteil, beim Aufbau im Rahmen der Mengenlehre, wie er hier jedenfalls im Hintergrund mitgedacht wird, recht starke zusätzliche Axiome der Mengenlehre zu benötigen, die Existenz sogenannter „unerreichbarer Kardinalzahlen“.

Beispiel 1.6.7 (Homotopiekategorie der topologischen Räume). Wir betrachten die Kategorie hTop aller topologischen Räume mit Homotopieklassen stetiger Abbildungen als Morphismen, also

$$\text{hTop}(X, Y) := \text{Top}(X, Y) / \simeq$$

Die Verknüpfung von Abbildungen kommt dabei von 1.5.8 her. Die Axiome einer Kategorie sind offensichtlich erfüllt. Für die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen zwei Räumen ist auch die Notation $\text{hTop}(X, Y) = [X, Y]$ gebräuchlich.

Beispiel 1.6.8 (Kategorie der Mengen). Wir betrachten die Kategorie aller Mengen Ens oder genauer die Kategorie

$$\mathfrak{U}\text{Ens}$$

aller Mengen $X \in \mathfrak{U}$ für ein vorgegebenes Mengensystem \mathfrak{U} . Ihre Objekte sind beliebige Mengen $X \in \mathfrak{U}$. Für zwei Mengen $X, Y \in \mathfrak{U}$ ist die Morphismenmenge $\text{Ens}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y . Die Verknüpfung ordnet jedem Paar (f, g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu, und $\text{id}_X \in \text{Ens}(X)$ ist schlicht die identische Abbildung $\text{id}_X(x) = x \forall x \in X$.

Beispiel 1.6.9 (Kategorie der Gruppen). Wir betrachten die Kategorie Grp aller Gruppen mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Definition 1.6.10. 1. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie heißt ein **Isomorphismus** oder **Iso** und als Adjektiv **iso**, wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$. Wir notieren Isomorphismen oft $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

2. Zwei Objekte X und Y einer Kategorie heißen **isomorph**, wenn es einen Iso $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt. Man schreibt dann auch kurz $X \cong Y$.

Beispiele 1.6.11. Isomorphismen in der Kategorie der Mengen nennt man Bijektionen, Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume Homöomorphismen, Isomorphismen in der Kategorie der Gruppen Isomorphismen von Gruppen. Stetige Abbildungen, die Isomorphismen in der Homotopiekategorie der topologischen Räume repräsentieren, heißen **Homotopieäquivalenzen**. Zwei topologische Räume heißen **homotopieäquivalent**, wenn es eine Homotopieäquivalenz vom einen zum anderen gibt.

1.6.12. In der Linearen Algebra erklärt man oft Isomorphismen als „bijektive Homomorphismen“. Das ist in meinen Augen didaktisch verwerflich, da es zwar im Fall der Kategorien der Mengen, Gruppen, Vektorräume, Ringe und Körper eine alternative Beschreibung der Isomorphismen im Sinne der Kategorientheorie liefert, aber die korrekte Definition im Fall allgemeiner Kategorien nicht vorspart, sondern eher verdeckt.

1.6.13. Eine stetige Abbildung heißt **nullhomotop**, wenn sie homotop ist zu einer einwertigen Abbildung alias konstanten Abbildung mit nichtleerem Bild, wenn sie also in der Homotopiekategorie über den einpunktigen Raum faktorisiert. Ein Raum X heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotopieäquivalent ist zu einem Punkt. Das ist gleichbedeutend dazu, daß die Identität auf X nullhomotop ist.

1.6.14. Ausgeschrieben ist ein topologischer Raum X also zusammenziehbar genau dann, wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ und eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $H(x, 0) = x_0$ und $H(x, 1) = x$ für alle $x \in X$. Zum Beispiel ist jede konvexe Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar.

1.6.15. Eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist, heißt ein **Gruppoid**. Man erklärt zu jedem topologischen Raum X das **fundamentale Gruppoid** $\mathcal{W} = \mathcal{W}_X = \mathcal{W}(X)$. Seine Objekte sind die Punkte von X , in Formeln $\text{Ob}(\mathcal{W}) = X$, und die Morphismenmenge $\mathcal{W}(x, y)$ besteht aus allen Homotopieklassen von Wegen mit Anfangspunkt x und Endpunkt y , in Formeln

$$\mathcal{W}(x, y) := \pi_1(X, x, y)$$

Die Verknüpfung von Morphismen ist das Aneinanderhängen von Wegen. Man benutzt Lemma 1.2.19, um die Axiome einer Kategorie zu prüfen. Unsere Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ ist damit genau das Monoid der Endomorphismen des Punktes x im fundamentalen Gruppoid, in Formeln $\pi_1(X, x) = \mathcal{W}_X(x)$.

Definition 1.6.16. Ein **Funktor** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ von einer Kategorie \mathcal{A} in eine Kategorie \mathcal{B} ist ein Datum bestehend aus:

- a. einer Abbildung $F : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}, X \mapsto FX$;
- b. einer Abbildung $F : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(FX, FY), f \mapsto Ff$ für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$,

derart, daß gilt:

- 1. $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$ für beliebige verknüpfbare Morphismen f und g aus der Kategorie \mathcal{A} ;
- 2. $F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$ für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$.

Ich nenne in diesem Zusammenhang \mathcal{A} die **Ausgangskategorie** und \mathcal{B} die **Zielkategorie** des Funktors F .

1.6.17. Man gibt bei einem Funktor F meist nur die Abbildung $X \mapsto FX$ auf den Objekten an in der Hoffnung, daß dadurch vom Leser erraten werden kann, welche Abbildung $f \mapsto Ff$ auf den Morphismen gemeint ist.

Beispiel 1.6.18 (Die Fundamentalgruppe als Funktor). Man betrachte die Kategorie Top^* der bepunkteten topologischen Räume alias topologischen Räume mit einem ausgezeichnetem Punkt, dem **Basispunkt**. Morphismen sind stetige Abbildungen, die den ausgezeichnetem Punkt in den ausgezeichnetem Punkt überführen. Das Bilden der Fundamentalgruppe ist dann ein Funktor

$$\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$$

Jedem bepunkteten Raum $(X, x) \in \text{Top}^*$ wird eine Gruppe $\pi_1(X, x) \in \text{Grp}$ zugeordnet und jeder stetigen basispunkterhaltenden Abbildung $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ein Gruppenhomomorphismus $f_{\#} = \pi_1(f) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$. Daß diese Daten die Eigenschaften eines Funktors haben, steht in 1.2.26. Jetzt haben wir allerdings den Ärger, daß für ein beliebig vorgegebenes Mengensystem \mathcal{U} die Fundamentalgruppe keineswegs einen Funktor $\pi_1 : \mathcal{U}\text{Top}^* \rightarrow \mathcal{U}\text{Grp}$ zu induzieren braucht. Diesem Ärger kann man jedoch entgehen, indem man annimmt, daß das zugrundeliegende Mengensystem ein „Universum“ im Sinne von [LA2] 7.11.3 sein soll, vergleiche auch [LA2] 7.11.6. Im weiteren will ich diese Feinheiten schlicht ignorieren.

Beispiel 1.6.19 (Vorschub als Funktor der fundamentalen Gruppoide). Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ liefert einen Funktor zwischen den zugehörigen fundamentalen Gruppoiden $f_{\#} : \mathcal{W}(X) \rightarrow \mathcal{W}(Y)$, der ein Objekt $x \in X$ auf das Objekt $f(x) \in Y$ abbildet und einen Morphismus $[\gamma]$ auf den Morphismus $[f \circ \gamma]$.

Beispiel 1.6.20 (Wegzusammenhangskomponenten als Funktor). Das Bilden der Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums ist

ein Funktor $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Ens}$. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist dabei $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ zu verstehen als die Abbildung, die jeder Wegzusammenhangskomponente $Z \in \pi_0(X)$ von X diejenige Wegzusammenhangskomponente $W \in \pi_0(Y)$ von Y zuordnet, für die gilt $f(Z) \subset W$.

Vorschau 1.6.21. Man mag die **Homotopiekategorie bepunkteter Räume** betrachten mit bepunkteten Räumen als Objekten und Homotopieklassen für basispunkterhaltende Homotopie alias Homotopie relativ zum Basispunkt im Sinne von 1.5.2 als Morphismen. Wir notieren sie hTop^* . So wird die Fundamentalgruppe, aufgefaßt als Funktor $\pi_1 : \text{hTop}^* \rightarrow \text{Ens}$, dargestellt im Sinne von [LA2] 7.10.7 durch die bepunktete Kreislinie. Die bepunktete Kreislinie kann im Übrigen versehen werden mit der Struktur eines „Gruppenobjekts“ in $(\text{hTop}^*)^{\text{opp}}$ im Sinne von [AAG] 1.2.1. Das liefert in diesem Kontext die Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x)$.

Übungen

Übung 1.6.22. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn es Morphismen $g, h \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $h \circ f = \text{id}_X$, und unter diesen Voraussetzungen gilt bereits $g = h$. Wir nennen diesen Morphismus dann den **inversen Morphismus zu f** und notieren ihn f^{-1} .

Übung 1.6.23. Gegeben Morphismen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ in einer Kategorie derart, daß $f \circ g$ und $g \circ f$ Isomorphismen sind, müssen f und g bereits selbst Isomorphismen sein.

Übung 1.6.24. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus. Man zeige, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Vorschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Z)$ induziert. Man zeige dual, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Nachschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Z, Y)$ induziert. Genauere Aussagen in dieser Richtung macht das sogenannte Yoneda-Lemma [LA2] 7.10.2.

Übung 1.6.25. Man zeige, daß eine stetige Abbildung $S^n \rightarrow X$ von einer Sphäre in einen topologischen Raum X genau dann nullhomotop ist, wenn sie sich stetig auf das Innere der Sphäre fortsetzen läßt.

Übung 1.6.26. Man zeige, daß eine stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn sie einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen $\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^\times, f(1))$ induziert.

Übung 1.6.27. Ist Y beliebig und X zusammenziehbar, so sind je zwei Abbildungen $f, g : Y \rightarrow X$ homotop. Ist zusätzlich Y wegzusammenhängend, so sind auch je zwei Abbildungen $X \rightarrow Y$ homotop.

Übung 1.6.28. Jeder zusammenziehbare Raum ist wegzusammenhängend.

Übung 1.6.29. Die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist eine Homotopieäquivalenz. Allgemeiner zeige man, daß für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und jedes $r \geq 0$ mit $r + \|y\| < 1$ die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus A(y; r)$ eine Homotopieäquivalenz ist, für $A(y; r) = \{x \mid \|x - y\| \leq r\}$ der abgeschlossene Ball. Ebenso zeige man, daß für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und jedes $r > 0$ mit $r + \|y\| \leq 1$ die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus B(y; r)$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Übung 1.6.30 (Funktoeren erhalten Isomorphie). Ein Funktor bildet stets Isomorphismen auf Isomorphismen ab. Insbesondere haben isomorphe Objekte unter einem Funktor stets isomorphe Bilder.

Übung 1.6.31. Homotope Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ induzieren dieselben Abbildungen auf der Menge der Wegzusammenhangskomponenten, in Formeln $f \cong g \Rightarrow \pi_0(f) = \pi_0(g) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$. Das Bilden der Menge der Wegzusammenhangskomponenten liefert mithin sogar einen Funktor

$$\pi_0 : \mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{Ens}$$

1.7 Homotopie und Fundamentalgruppe

1.7.1. Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und Homotopie. Zunächst interessieren wir uns dafür, wie die Fundamentalgruppe vom Basispunkt abhängt. Falls es keinen Weg von x nach y gibt, haben $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, y)$ nichts miteinander zu tun. Gibt es aber einen Weg, so erhalten wir isomorphe Gruppen. Genauer gilt:

Satz 1.7.2 (Wechsel des Basispunkts). *Gegeben Punkte x, y eines topologischen Raums X liefert jeder stetige Weg γ von x nach y einen Isomorphismus*

$$\begin{aligned} i_\gamma : \pi_1(X, x) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, y) \\ [\alpha] &\mapsto [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}] \end{aligned}$$

1.7.3. Hier und im folgenden kürzen wir $\alpha * (\beta * \gamma)$ mit $\alpha * \beta * \gamma$ ab, für verknüpfbare Wege α, β und γ . Wann immer wir diese Notation verwenden, wird es eh nicht auf die Klammern ankommen, da wir Wege nur bis auf Homotopie betrachten.

Beweis. $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \gamma * \alpha * \bar{\gamma} \simeq \gamma * \alpha' * \bar{\gamma}$ nach Lemma 1.2.19, also ist i_γ wohldefiniert. Wegen $\bar{\gamma} * \gamma \simeq \varepsilon_x$ und $\gamma * \bar{\gamma} \simeq \varepsilon_y$ ist $i_{\bar{\gamma}}$ invers zu i_γ und insbesondere i_γ eine Bijektion. Um zu prüfen, daß i_γ auch ein Gruppenhomomorphismus ist, rechnen wir

$$\begin{aligned} i_\gamma([\alpha] * [\beta]) &= [\gamma * (\alpha * \beta) * \bar{\gamma}] \\ i_\gamma([\alpha]) * i_\gamma([\beta]) &= [(\gamma * \alpha * \bar{\gamma}) * (\gamma * \beta * \bar{\gamma})] \end{aligned}$$

und sehen, daß auf der rechten Seite in der oberen und unteren Zeile dieselbe Homotopieklasse steht. \square

Alternativer Beweis in der Sprache der Kategorien. Ist $\gamma : A \xrightarrow{\sim} B$ ein Isomorphismus zwischen zwei Objekten einer Kategorie \mathcal{C} , so erhalten wir offensichtlich einen Isomorphismus zwischen den Monoiden der Endomorphismen unserer beiden Objekte

$$i_\gamma : \mathcal{C}(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(B)$$

durch die Vorschrift $i_\gamma : \alpha \mapsto \gamma\alpha\gamma^{-1}$. Unser Satz 1.7.2 und sein Beweis spezialisieren diese Erkenntnis auf den Fall des fundamentalen Gruppoids eines topologischen Raums. \square

Satz 1.7.4 (Homotopie und Fundamentalgruppe). *Seien stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ gegeben und sei H eine Homotopie von f nach g . Sei $x \in X$ ein fest gewählter Basispunkt und bezeichne γ den Weg $\gamma(t) = H(x, t)$ von $f(x)$ nach $g(x)$. So gilt $g_\# = i_\gamma \circ f_\#$, als da heißt, es kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y, f(x)) \\ \parallel & & \wr \downarrow i_\gamma \\ \pi_1(X, x) & \xrightarrow{g_\#} & \pi_1(Y, g(x)) \end{array}$$

Vorschau 1.7.5. Eine noch etwas allgemeinere und natürlichere Aussage dürfen Sie als Übung 4.2.9 selbst zeigen: Jede Homotopie $H : f \cong g$ induziert eine „Isotransformation“ $H_\# : f_\# \xrightarrow{\sim} g_\#$ zwischen den auf den fundamentalen Gruppoiden induzierten Funktoren.

Beweis. Es gilt zu zeigen $\bar{\gamma} * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq (f \circ \alpha)$ für alle $\alpha \in \Omega(X, x)$. Es reicht dazu, eine Homotopie $\bar{\gamma} * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq \varepsilon * (f \circ \alpha) * \varepsilon$ anzugeben. Zunächst ist $H \circ \alpha : [0, 1]^2 \rightarrow Y$ auf der unteren Kante $f \circ \alpha$, auf der oberen Kante $g \circ \alpha$ und auf der linken und rechten Kante γ . Weiter ist $[0, 1]^2 \rightarrow Y$ gegeben durch $(t, \tau) \mapsto \gamma(t\tau)$ auf der oberen und auf der rechten Kante γ , auf der unteren und linken Kante dahingegen konstant $f(x)$. Schließlich ist $[0, 1]^2 \rightarrow Y$ gegeben durch $(t, \tau) \mapsto \gamma((1-t)\tau)$ auf der der rechten Kante γ , auf der oberen Kante $\bar{\gamma}$ und auf der unteren und linken Kante konstant $f(x)$. Setzen wir unsere drei Quadrate richtig nebeneinander, so verkleben unsere Abbildungen längs der senkrechten Kanten zu einer stetigen Abbildung $[0, 3] \times [0, 1] \rightarrow Y$ und Umparametrisieren in x -Richtung liefert die gesuchte Homotopie. Unsere Zwischenwege bestehen anschaulich darin, daß wir erst γ ein Stück weit gehen, dann das mit der Homotopie deformierte $f \circ \alpha$ herumgehen und anschließend wieder mit γ zurückgehen. \square

Korollar 1.7.6 (Fundamentalgruppen homotopieäquivalenter Räume). *Jede Homotopieäquivalenz induziert Isomorphismen auf den Fundamentalgruppen. Jede nullhomotope Abbildung induziert die konstante Abbildung auf den Fundamentalgruppen. Die Fundamentalgruppe eines zusammenziehbaren Raums ist trivial.*

Beweis. Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$, die homotop ist zur Identität, induziert die Identität auf der Menge der Wegzusammenhangskomponenten. Das folgt formal aus Übung 1.6.31 und ist auch so klar. Sie induziert auch Isomorphismen $f_{\#} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, f(x))$ nach unserem Satz 1.7.4 über Homotopie und Fundamentalgruppe. Ist $u : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so gibt es per definitionem eine Abbildung $v : Y \rightarrow X$ mit $u \circ v \simeq \text{id}$ und $v \circ u \simeq \text{id}$. Also liefern $(u \circ v)_{\#} = u_{\#} \circ v_{\#}$ und $(v \circ u)_{\#} = v_{\#} \circ u_{\#}$ Isomorphismen $\pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, v(u(x)))$ und $\pi_1(Y, y) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, u(v(y)))$. Daraus folgt aber sofort, daß $v_{\#} : \pi_1(Y, u(x)) \rightarrow \pi_1(X, v(u(x)))$ für alle $x \in X$ injektiv und surjektiv, mithin ein Isomorphismus sein muß. Ist $y \in Y$ beliebig, so gibt es nach 1.6.31 einen Punkt $x \in X$ und einen Weg γ von y nach $u(x)$ und da offensichtlich gilt $v_{\#} \circ i_{\gamma} = i_{v \circ \gamma} \circ v_{\#} : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, v(u(x)))$ muß schließlich $v_{\#} : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, v(y))$ für alle $y \in Y$ ein Isomorphismus sein. Die anderen Aussagen des Korollars sind offensichtlich. \square

Beispiel 1.7.7 (Fundamentalgruppe der punktierten Ebene). Wir können nun ein weiteres Mal beweisen, daß die Fundamentalgruppe des Komplements eines Punktes in der Ebene zu \mathbb{Z} isomorph ist: Die Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ ist nämlich nach Übung 1.6.29 eine Homotopieäquivalenz und induziert folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen. In derselben Weise folgt, daß für $x \neq z$ zwei Punkte der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} der Weg $t \mapsto z + x \exp(2\pi it)$ einen Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{C} \setminus z, x)$ repräsentiert.

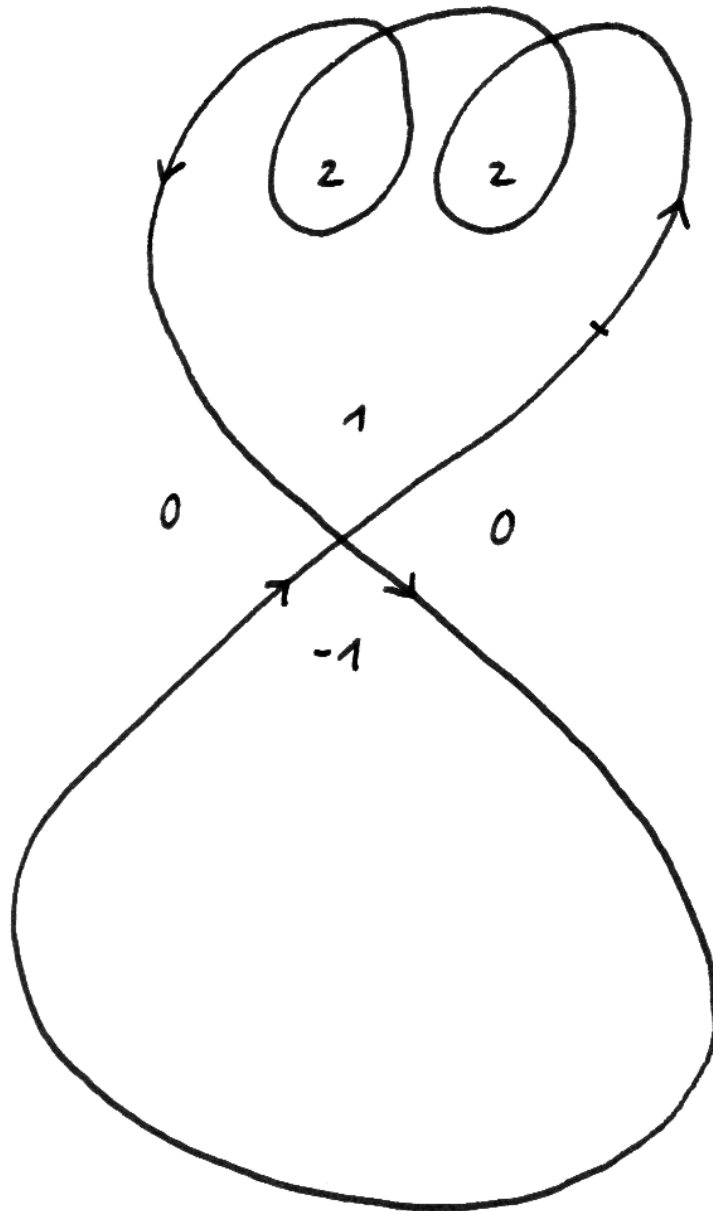
1.7.8. Gegeben $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in der komplexen Zahlenebene und $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ ein Punkt, der nicht auf besagtem Weg liegt, erklären wir die **Umlaufzahl**

$$\text{Um}(\gamma, z)$$

von unserem Weg γ um unseren Punkt z als diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ als Weg in $\mathbb{C} \setminus z$ homotop ist zum Weg $t \mapsto z + (\gamma(0) - z) \exp(2\pi int)$. Nach dem vorhergehenden gibt es stets genau eine solche Zahl.

Proposition 1.7.9 (Stetigkeit der Umlaufzahl). Gegeben ein geschlossener Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene liefert die Umlaufzahl eine stetige Abbildung $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{Z}$, $z \mapsto \text{Um}(\gamma, z)$, die auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ verschwindet.

Beweis. Gegeben eine offene Kreisscheibe von endlichem Radius $D \Subset \mathbb{C}$ und $z \in D$ ist $\mathbb{C} \setminus D \hookrightarrow \mathbb{C} \setminus z$ eine Homotopieäquivalenz und induziert folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen. Trifft unser geschlossener Weg γ die Kreisscheibe D nicht und ist zusätzlich der Durchmesser von D kleiner als der Abstand von D zu $\gamma(0)$, so kann die Umlaufzahl $\text{Um}(\gamma, z)$ mithin beschrieben werden als diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ als Weg in $\mathbb{C} \setminus D$ homotop ist



In jede Zusammenhangskomponente aus dem Komplement des hier gezeichneten Weges habe ich hier die Umlaufzahl des besagten Weges um einen und jeden Punkt aus besagter Zusammenhangskomponente geschrieben.

zum Weg $t \mapsto z + (\gamma(0) - z) \exp(2\pi int)$. Alle diese Wege für verschiedene $z \in D$ sind jedoch offensichtlich zueinander homotop in $\mathbb{C} \setminus D$. Das zeigt, daß die Umlaufzahl von γ um alle Punkte von D dieselbe sein muß. Liegt schließlich z außerhalb einer Kreisscheibe K , die das Bild unseres Weges umfaßt, so ist unser Weg in K und erst recht in $\mathbb{C} \setminus z$ zusammenziehbar und muß um z die Umlaufzahl Null haben. \square

Satz* 1.7.10 (Umlaufzahlen kreuzungsfreier Wege in der Ebene). *Ein geschlossener Weg in der punktierten Ebene $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$, der in der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ weder das neutrale Element noch einen Erzeuger repräsentiert, kann nicht auf $(0, 1]$ injektiv sein.*

1.7.11. Einen alternativen Beweis, der auch höherdimensionale Analoga unserer Aussage zeigt, geben wir in [TG] 4.10.26.

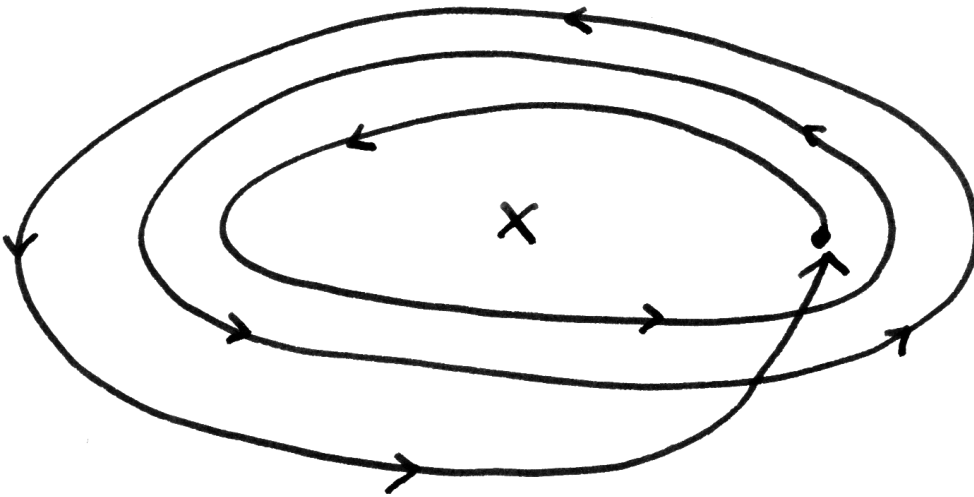
Beweis. Repräsentiert ein Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ das n -fache eines Erzeugers der Fundamentalgruppe und gilt $n \neq 0$, so können wir nach 1.3.10 einen Lift $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ finden alias eine stetige Abbildung mit $\text{Exp} \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, und dann ist $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $\alpha(t) = \text{Exp} \circ \tilde{\gamma}(t/n)$ ein geschlossener Weg mit $\gamma(t) = \alpha(t)^n$ für alle t . Induzierte nun γ eine Einbettung $\hat{\gamma} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$, so hätte die von α induzierte Abbildung $\hat{\alpha} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ die Eigenschaft $z \neq w \Rightarrow \hat{\alpha}(z) \neq \zeta \hat{\alpha}(w)$ für jede n -te Einheitswurzel $\zeta \neq 1$. Wir erhielten mithin für jede n -te Einheitswurzel $\zeta \neq 1$ eine stetige Abbildung

$$\varphi = \varphi_\zeta : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

durch die Vorschrift $\varphi(z, w) = \hat{\alpha}(z) - \zeta \hat{\alpha}(w)$. Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^1 & & \\ & \searrow^{(\text{id}, 1)} & \\ S^1 & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & S^1 \times S^1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^\times \\ & \nearrow_{(1, \text{id})} & \\ S^1 & & \end{array}$$

Ich behaupte, daß darin alle drei Kompositionen Homotopieäquivalenzen sind alias, nach Übung 1.6.26 gleichbedeutend, daß sie Isomorphismen auf den Fundamentalgruppen induzieren. Zunächst induziert nach Konstruktion $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen und ist also eine Homotopieäquivalenz. Dasselbe gilt für die mittlere Komposition $z \mapsto (1 - \zeta) \hat{\alpha}(z)$, denn sie ist zu $\hat{\alpha}$ homotop. Die obere Komposition hinwiederum ist homotop zu $z \mapsto \hat{\alpha}(z) - \zeta \hat{\alpha}(w)$ für alle $w \in S^1$. Wählen wir w_0 mit $|\hat{\alpha}(w_0)|$ kleinstmöglich,



Ein geschlossener Weg in der punktierten Ebene mit Umlaufzahl Drei um den als Kreuz eingezeichneten Punkt, der „so injektiv ist wie irgend möglich“.

so liegt $\zeta \hat{\alpha}(w_0)$ in derselben Komponente von $\mathbb{C} \setminus \hat{\alpha}(S^1)$ wie der Ursprung. Aus der Stetigkeit der Umlaufzahl 1.7.9 folgt $\text{Um}(\alpha, \zeta \hat{\alpha}(w_0)) = \text{Um}(\alpha, 0) = 1$ und damit ist $z \mapsto \hat{\alpha}(z) - \zeta \hat{\alpha}(w)$ eine Homotopieäquivalenz erst für $w = w_0$ und dann für alle w , insbesondere auch für $w = 1$. Für die untere Komposition argumentiert man genauso, also haben wir in der Tat drei Homotopieäquivalenzen vor uns. Das aber widerspricht der Tatsache, daß nach 1.4.8 für $c \in \pi_1(S^1, 1)$ gilt

$$(\text{id}, 1)_{\#}c + (1, \text{id})_{\#}c = (\text{id}, \text{id})_{\#}c$$

und damit $\varphi_{\#}(\text{id}, 1)_{\#}c + \varphi_{\#}(1, \text{id})_{\#}c = \varphi_{\#}(\text{id}, \text{id})_{\#}c$ in $\pi_1(\mathbb{C}^{\times}, 1)$ im Widerspruch dazu, daß für jeden Erzeuger c von $\pi_1(S^1, 1)$ alle diese drei Elemente nach dem bereits Bewiesenen Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{C}^{\times}, 1)$ sein müssen. \square

Proposition* 1.7.12 (Schleifenfüllende Komplemente). *Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $W \subset V$ ein Teilraum der Kodimension zwei. So ist für $I \subsetneq W$ eine echte Teilmenge das Komplement $V \setminus I$ schleifenfüllend, für alle Punkte $*$ unseres Komplements gilt also in Formeln*

$$\pi_1(V \setminus I, *) = 1$$

Beweis. Den Fall $I \not\subset W$ haben Sie bereits in 1.2.28 behandelt. Um das im allgemeinen zu sehen, dürfen wir $V = \mathbb{C} \times Y$ annehmen mit einem endlichdimensionalen Vektorraum Y und $W = 0 \times Y$. Es gilt für irgendeinen Basispunkt $*$ zu zeigen, daß gilt $\pi_1(V \setminus I, *) = 1$, etwa für den Basispunkt $* := (1, 0)$. Es reicht zu zeigen, daß jeder geschlossene Weg von $*$ nach $*$ homotop ist in $V \setminus W$, denn die Abbildung $\pi_1(V \setminus W, *) \rightarrow \pi_1(V \setminus I, *)$ ist sicher konstant. Es reicht also zu zeigen, daß jeder Weg $\gamma \in \Omega(V \setminus I, *)$, der W trifft, homotop ist zum konstanten Weg. Wir schreiben dazu $\gamma(t) = (z(t), y(t))$. Auf $U := \{t \in [0, 1] \mid z(t) \neq 0\}$ können wir dann $\varphi : U \rightarrow S^1$ erklären durch $\varphi(t) = z(t)/|z(t)|$. Nun gilt $U \ni [0, 1]$ und $0, 1 \in U$, aber nach Annahme $U \neq [0, 1]$. Mithin existiert ein stetiger Lift $\tilde{\varphi} : U \rightarrow i\mathbb{R}$ mit $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}(1) = 0$ und $\varphi(t) = \exp(\tilde{\varphi}(t))$ für alle $t \in U$. Es gilt also $z(t) = \exp(\tilde{\varphi}(t))|z(t)|$ für alle $t \in U$. Jetzt erklären wir $h : [0, 1]^2 \rightarrow V \setminus I$ durch die Vorschrift

$$h(t, \tau) = \begin{cases} (\exp(\tilde{\varphi}(\tau t))|z(t)|, y(t)) & \text{falls } t \in U, \\ (0, y(t)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist sicher stetig an allen Stellen (t, τ) mit $t \in U$. An Stellen (t, τ) mit $t \notin U$ kann man die Stetigkeit aber auch zeigen, da in einer Umgebung von $t \notin U$ unser $|z(t)|$ sehr klein sein muß. Damit ist $h(t, \tau)$ eine Homotopie in $V \setminus I$ zwischen unserem Weg γ und dem Weg $t \mapsto (|z(t)|, y(t))$, der seinerseits offensichtlich in $V \setminus I$ zusammenziehbar ist. \square

Übungen

Ergänzende Übung 1.7.13. Feiner liefert der Beweis von 1.7.10 bei Betrachtung aller n -ten Einheitswurzeln $\zeta \neq 1$, daß der in gewisser Weise die Zahl der Selbstüberkreuzungen messende Ausdruck $\sum_{p \in \gamma[0,1]} (|\gamma^{-1}(p)| - 1)$ mindestens so groß sein muß wie der Betrag der Umlaufzahl. Das mag der Leser zur Übung ausarbeiten.

Übung 1.7.14. Für die Basispunktwechselisomorphismen i_γ aus 1.7.2 zeige man: Homotope Wege liefern denselben Isomorphismus, in Formeln $\gamma \simeq \delta \Rightarrow i_\gamma = i_\delta$. Außerdem gilt $i_{\gamma*\delta} = i_\gamma \circ i_\delta$ für verknüpfbare Wege γ, δ , für γ ein Weg von x zu sich selbst ist $i_\gamma = \text{int } \gamma$ die Konjugation mit γ , und für den konstanten Weg $\varepsilon = \varepsilon_x$ ist speziell i_ε die Identität auf $\pi_1(X, x)$.

Übung 1.7.15 (Fundamentalgruppe und freie Homotopie). Gegeben ein bepunkteter wegzusammenhängender Raum (X, x) zeige man, daß die Abbildung $\Omega(X, x) \rightarrow \text{hTop}(S^1, X)$, die jedem geschlossenen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ die Homotopieklasse der induzierten Abbildung $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow X$ zuordnet, eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen in $\pi_1(X, x)$ und $\text{hTop}(S^1, X)$ induziert.

Übung 1.7.16 (Fundamentalsatz der Algebra). Man zeige den Fundamentalsatz der Algebra mit den hier entwickelten Methoden. Man zeige also in anderen Worten, daß jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten eine Nullstelle hat. Hinweis: Hat unsere Polynomfunktion $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ keine Nullstelle, so sind die Abbildungen $P_\tau : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto P(\tau z)$ alle homotop zur konstanten Abbildung P_0 .

Übung 1.7.17. Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Komplements einer Gerade im \mathbb{R}^3 isomorph ist zu \mathbb{Z} . Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Raums, der entsteht, wenn man aus dem \mathbb{R}^3 die z -Achse sowie den Einheitskreis in der xy -Ebene herausnimmt, isomorph ist zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hinweis: 1.4.8. Eventuell benötigte Homotopien sollen anschaulich plausibel gemacht werden, eine formelhafte Ausarbeitung ist nicht gefordert.

1.8 Abelisierte Fundamentalgruppe*

Definition 1.8.1. Gegeben eine Gruppe G definiert man ihren **maximalen kommutativen Quotienten**, auch genannt ihre **Abelisierung**, als den Quotienten

$$G^{\text{ab}} := G/(G, G)$$

nach dem Normalteiler $(G, G) \subset G$, der von allen **Kommutatoren** $ghg^{-1}h^{-1}$ mit $g, h \in G$ erzeugt wird. Die Untergruppe (G, G) heißt im übrigen die **derivierte Gruppe** von G .

1.8.2 (**Diskussion der Notation**). Die Notation (G, G) geht zurück auf die in der Gruppentheorie übliche Notation $ghg^{-1}h^{-1} = : (g, h)$ für den Kommutator. Im Sinne unserer allgemeinen Konvention [GR] 2.1.3 sollte natürlich (G, G) eigentlich nur die Menge aller Kommutatoren aus G bezeichnen und der davon erzeugte Normalteiler sollte $\langle\langle(G, G)\rangle\rangle$ notiert werden. Da aber letzteres Konzept soviel häufiger vorkommt, ist es üblich, hier eine Ausnahme zu machen und mit (G, G) kurzerhand den von den Kommutatoren erzeugten Normalteiler zu bezeichnen, der nebenbei bemerkt mit der von den Kommutatoren erzeugten Untergruppe übereinstimmt.

Lemma 1.8.3 (Universelle Eigenschaft der Abelisierung). *Für jede Gruppe G ist ihre Abelisierung G^{ab} eine abelsche Gruppe, und jeder Morphismus von G in eine abelsche Gruppe faktorisiert über G^{ab} . In Formeln liefert also für jede abelsche Gruppe A das Verknüpfen mit der Projektion $G \rightarrow G^{\text{ab}}$ eine Bijektion*

$$\text{Grp}(G^{\text{ab}}, A) \xrightarrow{\sim} \text{Grp}(G, A)$$

Beweis. Dem Leser überlassen. □

1.8.4. Ist X ein wegzusammenhängender Raum und sind $x, y \in X$ Punkte, so liefern nach 1.7.2 je zwei Wege γ von x nach y denselben Isomorphismus $i_\gamma : \pi_1(X, x)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, y)^{\text{ab}}$, den wir dann auch i_{yx} nennen dürfen, und für je drei Punkte x, y, z gilt $i_{zx} = i_{zy}i_{yx}$. Folglich können wir für jeden wegzusammenhängenden Raum X die **basispunktfreie abelierte Fundamentalgruppe** erklären als die Untergruppe

$$\pi_1(X)^{\text{ab}} \subset \prod_{x \in X} \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

aller Tupel $(\alpha_x)_{x \in X}$ mit $i_{yx}(\alpha_x) = (\alpha_y)$ für alle $x, y \in X$. Die Projektion auf den entsprechenden Faktor liefert dann für jeden Punkt einen kanonischen Isomorphismus $\pi_1(X)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$. Sind alle Fundamentalgruppen eh abelsch, so schreiben wir statt $\pi_1(X)^{\text{ab}}$ auch kürzer $\pi_1(X)$. Ist weiter $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung von wegzusammenhängenden Räumen, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $f_\# : \pi_1(X)^{\text{ab}} \rightarrow \pi_1(Y)^{\text{ab}}$, der für alle $x \in X$ mit unseren $f_\# : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ verträglich ist in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Wir erhalten so einen Funktor $X \mapsto \pi_1(X)^{\text{ab}}$ von der Kategorie der wegzusammenhängenden topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Vorschau 1.8.5 (Umlaufzahl und Orientierung). Wir betrachten die Kategorie $\text{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^\times$ mit zweidimensionalen reellen Vektorräumen als Objekten und Vektorraumisomorphismen als Morphismen. Wir erhalten einen Funktor

$$\text{dreh} : \text{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^\times \rightarrow \text{Ens}$$

durch die Vorschrift, daß wir jedem zweidimensionalen reellen Vektorraum V die Menge der beiden Erzeuger der basispunktfreien abelsierten Fundamentalgruppe $\pi_1(V \setminus 0)^{\text{ab}}$ des Komplements des Ursprungs zuordnen. Andererseits erinnern wir den Funktor $\text{or} : \text{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^{\times} \rightarrow \text{Ens}$ aus [LA1] 6.5.3, der jedem zweidimensionalen reellen Vektorraum die Menge seiner beiden Orientierungen zuordnet. Es gibt nun offensichtlich genau zwei Transformationen $\text{or} \Rightarrow \text{dreh}$ und ebenso offensichtlich sind sie beide Isotransformationen. Wir vereinbaren, daß wir von nun an diejenige dieser beiden Transformationen als die **Standardtransformation**

$$\text{std} : \text{or} \xrightarrow{\cong} \text{dreh}$$

auszeichnen, die unserer Standardorientierung von \mathbb{C} mittels der angeordneten Basis $(1, i)$ den durch $t \mapsto \exp(2\pi it)$ repräsentierten Erzeuger der Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus 0$ zuordnet. Mit dem **durch eine Orientierung gegebenen Drehsinn** meinen wir den durch diese Standardtransformation unserer Orientierung zugeordneten Drehsinn.

1.9 Selbsthomotopien der Kreislinie

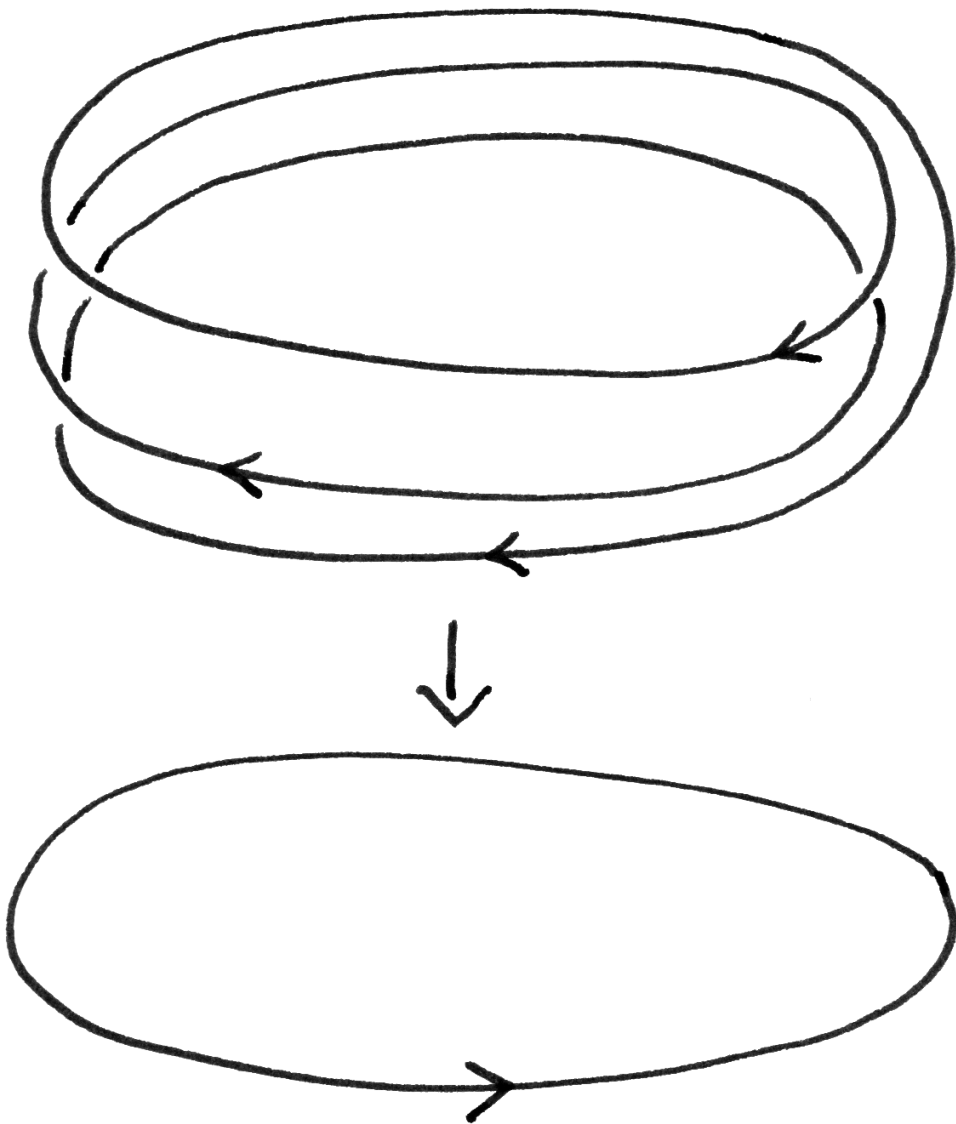
Satz 1.9.1 (Selbstabbildungen der Kreislinie bis auf Homotopie). *Man erhält eine Bijektion zwischen der Menge der ganzen Zahlen und der Menge aller Homotopieklassen von Selbstabbildungen der Kreislinie, indem man jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Homotopieklasse des n -fachen Potenzierens $S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$ zuordnet. In Formeln haben wir also eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & \text{hTop}(S^1, S^1) \\ n & \mapsto & [z \mapsto z^n] \end{array}$$

1.9.2. Mit dem **Abbildungsgrad** $\text{grad}(f)$ einer stetigen Selbstabbildung der Kreislinie $f : S^1 \rightarrow S^1$ meint man das Urbild ihrer Homotopieklasse unter dieser Bijektion. In anderen Worten ist also der Abbildungsgrad einer stetigen Selbstabbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die f homotop ist zu $z \mapsto z^n$. In [TS] 4.3.13 führen wir allgemeiner den Abbildungsgrad stetiger Abbildungen zwischen „kompakten orientierten zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten derselben Dimension“ ein.

1.9.3. Eine Selbstabbildung der Kreislinie, die nicht surjektiv ist, ist nullhomotop. Eine nicht nullhomotope Selbstabbildung der Kreislinie muß also surjektiv sein.

Beweis. Das folgt sofort aus Übung 1.7.15 über den Zusammenhang zwischen freier Homotopie geschlossener Wege und Fundamentalgruppe. \square



Eine Selbstabbildung der Kreislinie vom Abbildungsgrad (-3) .

Zweiter Beweis. Wir konstruieren explizit eine Inverse zur Zuordnung aus unserem Satz. Dazu erinnern wir an unsere Abbildung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi it)$. Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig. Da wir den Begriff des Abbildungsgrads eben schon vergeben haben, erklären wir nur für diesen Beweis die **Ganghöhe** $\text{gh}(f) \in \mathbb{Z}$ von f durch die Formel $\text{gh}(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$, wo $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ein beliebiger Lift von $f \circ \text{Exp} : [0, 1] \rightarrow S^1$ ist, als da heißt eine Abbildung derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Nach 1.3.6 gibt es stets solch ein \tilde{f} und es ist sogar eindeutig bis auf eine additive Konstante aus \mathbb{Z} . Folglich ist die Ganghöhe $\text{gh}(f)$ wohldefiniert.

Lemma 1.9.4. *Genau dann sind zwei Selbstabbildungen der Kreislinie homotop, wenn sie dieselbe Ganghöhe haben.*

Beweis. Seien $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ gegeben und sei $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ eine Homotopie von f nach g . Nach unseren Erkenntnissen 1.3.7 zum Liften von auf dem Einheitsquadrat definierten Abbildungen finden wir $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{H}} & \mathbb{R} \\ \text{Exp} \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ S^1 \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & S^1 \end{array}$$

Es folgt $\tilde{H}(0, \tau) - \tilde{H}(1, \tau) \in \mathbb{Z} \quad \forall \tau$, mithin ist diese Abbildung konstant und wir erhalten $\text{gh}(f) = \text{gh}(g)$. Also haben homotope Selbstabbildungen der Kreislinie dieselbe Ganghöhe. Seien umgekehrt $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ zwei stetige Selbstabbildungen der Kreislinie mit derselben Ganghöhe. Es gilt zu zeigen, daß sie homotop sind. Seien dazu $\tilde{f}, \tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gewählt wie in der Definition der Ganghöhe. Wir erklären $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\tilde{H}(t, \tau) = (1 - \tau)\tilde{f}(t) + \tau\tilde{g}(t)$$

Aus $\text{gh}(f) = \text{gh}(g)$ folgt nun $\tilde{H}(0, \tau) + \text{gh}(f) = \tilde{H}(1, \tau)$, also $(\text{Exp} \circ \tilde{H})(0, \tau) = (\text{Exp} \circ \tilde{H})(1, \tau)$ für alle τ . Folglich gibt es eine Abbildung von Mengen H wie in der unteren Zeile des obigen Diagramms derart, daß das Diagramm kommutiert. Da $\text{Exp} \times \text{id} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$ nach [TM] 1.7.17 final ist, ist H sogar stetig. Das ist dann die gesuchte Homotopie von f nach g . \square

Nach Lemma 1.9.4 liefert unsere Ganghöhe eine Injektion

$$\text{gh} : \text{hTop}(S^1, S^1) \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

Aus den Definitionen folgt mühelos, daß $z \mapsto z^n$ die Ganghöhe n hat. Der Satz ist bewiesen und wir haben zusätzlich gezeigt, daß der Abbildungsgrad mit der Ganghöhe übereinstimmt, in Formeln $\text{grad}(f) = \text{gh}(f)$. \square

1.9.5. Wir nennen eine Abbildung f **gerade** beziehungsweise **ungerade**, wenn gilt $f(-x) = f(x)$ beziehungsweise $f(-x) = -f(x)$ für alle x , und das in großer Allgemeinheit und einem vorsätzlich offen gelassenen Kontext.

Proposition 1.9.6. *Jede stetige ungerade Selbstabbildung der Kreislinie hat ungeraden Abbildungsgrad und ist insbesondere nie nullhomotop.*

1.9.7 (**Versuch einer Veranschaulichung**). Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ unsere stetige ungerade Selbstabbildung der Kreislinie. Das Urbild

$$\tilde{\Gamma} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Exp}(y) = f(\text{Exp}(x))\}$$

des Graphen von f unter $\text{Exp} \times \text{Exp}$ ist dann stabil unter der Verschiebung mit den Vektoren $\pm(1, 0)$, $\pm(0, 1)$ und $\pm(1/2, 1/2)$ und zu jedem x haben je zwei y, z mit $(x, y), (x, z) \in \tilde{\Gamma}$ ganzzahlige Differenz $y - z \in \mathbb{Z}$.

Beweis. In Formeln gilt es zu zeigen, daß für $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig mit $f(-x) = -f(x) \forall x$ der Abbildungsgrad von f notwendig ungerade ist. Nach 1.3.6 finden wir stets $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig derart, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Aus $f(-x) = -f(x)$ folgt $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) \in \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ für alle t , es gibt also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + k \forall t \in \mathbb{R}$. Wir erhalten insbesondere

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1) &= \tilde{f}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + k \\ &= \tilde{f}(0) + 1 + 2k \end{aligned}$$

und folglich $\text{grad}(f) = \text{gh}(f) = 1 + 2k$. \square

Satz 1.9.8 (Borsuk-Ulam). *Jede stetige ungerade Abbildung von der Kugelschale in die Ebene hat eine Nullstelle.*

1.9.9. Versuchen wir einmal, uns das vorzustellen. Eine ungerade Abbildung $f_1 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die nicht identisch verschwindet, nimmt an einer Stelle einen positiven Wert an und gegenüber einen negativen Wert. Denken wir uns ihre Nullstellenmenge als die Menge der Punkte auf einem Globus, an denen Land ist und nicht Meer, so könnten wir nicht mit einem Schiff vom Norpol zum Südpol segeln. Es ist dann zumindest anschaulich klar, daß es auf unserer Landmasse zwei gegenüberliegende Städte geben sollte derart, daß wir trockenen Fußes von der einen zur anderen wandern können, mit beliebig kleiner positiv vorgegebener erlaubter Schrittweite. Hätten wir nun eine zweite ungerade Funktion f_2 und hätten f_1, f_2 keine gemeinsame Nullstelle, so könnten wir von einer dieser Städte zur anderen gehen ohne Nullstellen von f_2 zu treffen. Das stünde jedoch im Widerspruch zur Stetigkeit von f_2 . Ein ähnliches Resultat wird in [TS] 7.4.10 diskutiert. Diese Überlegungen mögen den Satz anschaulicher machen, dürfen aber nicht als Beweisskizze geschweige denn als Beweis mißverstanden werden.

Beweis. Gegeben $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig mit $f(-x) = -f(x) \forall x \in S^2$ gilt es zu zeigen, daß ein $x \in S^2$ existiert mit $f(x) = 0$. Sonst wäre jedoch $x \mapsto f(x)/\|f(x)\|$ eine stetige ungerade Abbildung $g : S^2 \rightarrow S^1$. Die Einschränkung von g auf den Äquator $S^1 \subset S^2$ wäre also nicht nullhomotop nach Proposition 1.9.6, aber sie faktorisiert über die zusammenziehbare nördliche Hemisphäre $S_+^2 \subset S^2$. Widerspruch! \square

Korollar 1.9.10 (Das Plattdrücken einer Kugelschale ist nie injektiv). *Für jede stetige Abbildung der Kugelschale in die Ebene gibt es sogar ein Paar von gegenüberliegenden Punkten der Kugelschale, die auf denselben Punkt der Ebene abgebildet werden.*

1.9.11. Daß eine stetige Abbildung von der Kugelschale in die Ebene nie injektiv sein kann, ist Ihnen hoffentlich anschaulich sofort klar. Ich kenne jedoch keinen einfacheren Beweis.

Beweis. Sei $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ unsere stetige Abbildung. Gäbe es kein $x \in S^2$ mit $h(x) = h(-x)$, so wäre $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = h(x) - h(-x)$ stetig und ungerade ohne Nullstelle, im Widerspruch zum Satz 1.9.8 Borsuk-Ulam. \square

Korollar 1.9.12 (Satz vom Butterbrot mit Schinken). *Gegeben drei kompakte Teilmengen des Raums gibt es stets eine Ebene, die sie alle drei in jeweils zwei volumengleiche Teile teilt.*

1.9.13. Ist also ein Butterbrot mit Schinken gegeben und betrachtet man die Mengen der Punkte des Raums, an denen sich Schinken beziehungsweise Butter beziehungsweise Brot befindet, so kann man mit einem Schnitt das Brot so teilen, daß zwei Hungrige jeweils gleichviel sowohl vom Schinken, als auch von der Butter als auch vom Brot erhalten.

Beweis. Um dieses Korollar zu beweisen, formulieren wir es zunächst einmal um. Seien $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$ unsere drei Kompakta. Sicher finden wir eine stetige Abbildung $\alpha : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß für alle $x \in S^2$ die Ebene durch den Punkt $\alpha(x)x$ mit Normalenvektor x die Menge A halbiert: Hat A nicht Volumen Null, so ordnen wir zum Beispiel jedem x das maximal mögliche $\alpha(x)$ zu, sonst dürfen wir $\alpha(x)$ eh beliebig wählen. Sicher dürfen wir weiter sogar α ungerade annehmen, indem wir sonst α durch $(\alpha(x) - \alpha(-x))/2$ ersetzen. Ebenso finden wir stetige ungerade $\beta, \gamma : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für B und C , und es gilt zu zeigen, daß wir $x \in S^2$ finden mit $\alpha(x) = \beta(x) = \gamma(x)$. Nach dem Satz 1.9.8 von Borsuk-Ulam hat aber jede stetige ungerade Abbildung von der Kugelschale in die Ebene eine Nullstelle, insbesondere also auch die Abbildung

$$\begin{aligned} f : S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (\alpha(x) - \beta(x), \beta(x) - \gamma(x)) \end{aligned} \quad \square$$

Korollar* 1.9.14 (Lusternik-Schnirelmann). *Gegeben eine Überdeckung der Kugelschale durch drei abgeschlossene Teilmengen enthält mindestens eine unserer drei Mengen ein Paar von gegenüberliegenden Punkten.*

Beweis. Wäre $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ein Gegenbeispiel, so könnten wir stetige ungerade Funktionen $f_i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ finden mit $f_i(x) = 1$ für $x \in A_i$, zum Beispiel indem wir mit den Funktionen $d(A_i, \cdot)$ spielen, oder indem wir nach Tietze's Erweiterungsslemma [TM] 3.1.5 eine stetige Funktion g_i finden mit $g_i(\pm x) = \pm 1$ für $x \in A_i$ und dann $f_i(y) = (g_i(y) - g_i(-y))/2$ setzen für alle y . Dann könnten wir den Satz von Borsuk-Ulam 1.9.8 anwenden auf $f = (f_1, f_2) : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und fänden $x \in S^2$ mit $\pm x \notin A_1, \pm x \notin A_2$, also notwendig $x, -x \in A_3$. \square

Übungen

Übung 1.9.15. Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig. Für alle $z \in S^1$ enthält $f^{-1}(z)$ mindestens $|\text{grad } f|$ Punkte.

Übung 1.9.16. Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig, $z \in S^1$. So kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, z) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(S^1, f(z)) \\ \text{Um} \downarrow & & \downarrow \text{Um} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{(\text{grad } f)_*} & \mathbb{Z} \end{array}$$

wo in der unteren Horizontale die Multiplikation mit $(\text{grad } f)$ gemeint ist. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $f(z) = z^n$ zurück.

2 Beschreibung einiger Fundamentalgruppen

2.1 Produkte und Koproducte in Kategorien

Definition 2.1.1. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und A, B Objekte von \mathcal{C} . Ein **Produkt** von A und B ist ein Datum (P, p, q) bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p : P \rightarrow A$ und $q : P \rightarrow B$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $T \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f : T \rightarrow A, g : T \rightarrow B$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $h : T \rightarrow P$ mit $p \circ h = f$ und $q \circ h = g$. Wir notieren diesen Morphismus dann $h = (f, g)$ oder, ganz pedantisch und wenn wir ihn von den Morphismen aus einem Koproduct absetzen wollen, als Spalte $h = (f, g)^\top$.

Beispiele 2.1.2. In der Kategorie der Mengen ist $P = A \times B$ mit p, q den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt von A und B . Dasselbe gilt in der Kategorie der topologischen Räume, wenn wir $A \times B$ mit der Produkttopologie versehen.

2.1.3 (Eindeutigkeit von Produkten). Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer (P, p, q) und $(\tilde{P}, \tilde{p}, \tilde{q})$ zwei mögliche Produkte der Objekte A und B , so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $h : \tilde{P} \rightarrow P$ mit $p \circ h = \tilde{p}$ und $q \circ h = \tilde{q}$ und ebenso genau ein $\tilde{h} : P \rightarrow \tilde{P}$ mit $\tilde{p} \circ \tilde{h} = p$ und $\tilde{q} \circ \tilde{h} = q$. Weiter gibt es auch genau ein $i : P \rightarrow P$ mit $p \circ i = p$ und $q \circ i = q$, und da sowohl $i = \text{id}$ als auch $i = h \circ \tilde{h}$ diese Bedingung erfüllen, folgt $h \circ \tilde{h} = \text{id}$. Ebenso erhalten wir $\tilde{h} \circ h = \text{id}$, mithin sind c und d zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$(A \times B, \text{pr}_A, \text{pr}_B)$$

Sind schließlich Morphismen $u : A \rightarrow X, v : B \rightarrow Y$ gegeben und existieren die Produkte $A \times B$ und $X \times Y$, so benutzen wir die Abkürzung $(u \circ \text{pr}_A, v \circ \text{pr}_B) = u \times v$ und nennen diesen Morphismus den **Produktmorphismus**

$$u \times v : A \times B \rightarrow X \times Y$$

2.1.4. Analoge Definitionen sind auch für größere Familien von Objekten ein- und derselben Kategorie sinnvoll, vergleiche [LA2] 7.7.8.

Beispiel 2.1.5. Für jede Kategorie \mathcal{C} bildet man die **opponierte Kategorie** \mathcal{C}^{opp} wie folgt: Man setzt

$$\text{Ob } \mathcal{C}^{\text{opp}} := \text{Ob } \mathcal{C} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}^{\text{opp}}(A, B) := \mathcal{C}(B, A)$$

und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in \mathcal{C}^{opp} wie folgt: Man notiert einen Morphismus f als f° , wenn er in der opponierten Kategorie aufgefaßt werden soll, und setzt $g^\circ \circ f^\circ := (f \circ g)^\circ$.

2.1.6. Produkte in der opponierten Kategorie heißen „Koprodukte“. Im folgenden sprechen wir diese Definition gleich für Familien explizit aus.

Definition 2.1.7. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus \mathcal{C} . Ein **Koprodukt** der A_i ist ein Datum $(K, (\text{in}_i)_{i \in I})$ bestehend aus einem Objekt $K \in \mathcal{C}$ und Morphismen $\text{in}_i : A_i \rightarrow K$ derart, daß gilt: Ist $T \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f_i : A_i \rightarrow T$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $f : K \rightarrow T$ mit $f \circ \text{in}_i = f_i \quad \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann auch $(f_i)_{i \in I}$ und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann damit ein Morphismus aus einem Koprodukt und wann ein Morphismus in ein Produkt gemeint ist. Wenn es drauf ankommt, mag ein Morphismus in ein Produkt eben als Spalte mit einem hochgestellten \top notiert werden und ein Morphismus aus einem Koprodukt als Zeile. Wir notieren Koprodukte $\bigsqcup_{i \in I} A_i$, bei endlich vielen Faktoren auch $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$.

Beispiele 2.1.8. In der Kategorie der Mengen ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} A_i$, vergleiche [LA2] 7.7.17. In der Kategorie der topologischen Räume gilt dasselbe. Kategorie der bepunkteten topologischen Räume ist das Koprodukt die **Einpunktverbindung** $\bigvee_{i \in I} A_i = \bigsqcup A_i / \sim$, wo die Äquivalenzrelation \sim dadurch erklärt sei, daß alle Basispunkte der verschiedenen A_i unter \sim eine Äquivalenzklasse bilden und die anderen Äquivalenzklassen einelementig sind.

Definition 2.1.9. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **verträglich mit beliebigen Produkten** genau dann, wenn für jedes Produkt $(P, (p_i)_{i \in I})$ einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Objekten von \mathcal{A} das Datum $(F(P), (F(p_i))_{i \in I})$ ein Produkt in \mathcal{B} der Familie $(F(A_i))_{i \in I}$ ist. Gilt das nur für Produkte endlicher Familien, so sagen wir, unser Funktor sei **verträglich mit endlichen Produkten**. Dual erklären wir die Verträglichkeit mit beliebigen beziehungsweise endlichen Koprodukten.

Beispiel 2.1.10. Der vergeßliche Funktor $\text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ ist verträglich mit beliebigen Produkten, aber nicht mit beliebigen, ja noch nicht einmal mit endlichen Koprodukten. Der Funktor der Fundamentalgruppe $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$ ist verträglich mit endlichen Produkten nach 1.4.8, ja er ist sogar mit derselben Argumentation verträglich mit beliebigen Produkten.

Übungen

Übung 2.1.11. Gegeben Objekte X, Y, Z einer Kategorie derart, daß das iterierte Produkt $(X \times Y) \times Z$ existiert, zeige man, daß es zusammen mit den Abbildungen $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_1, \text{pr}_2 \circ \text{pr}_1$ und pr_2 die universelle Eigenschaft hat, die das Produkt $X \times Y \times Z$ charakterisiert.

Übung 2.1.12. Sei k ein Körper. Man zeige daß der Dualraumfunktork $\text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k^{\text{opp}}$ verträglich ist mit endlichen Produkten aber nicht mit beliebigen Produkten.

Übung 2.1.13. Man zeige, daß das Bilden der Fundamentalgruppe $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$ verträglich ist mit beliebigen Produkten.

2.2 Kartesische Diagramme

Definition 2.2.1. Ein Diagramm in einer Kategorie \mathcal{C} der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & A \\ \downarrow q & & \downarrow a \\ B & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

heißt **kartesisch** oder ein **pull-back-Diagramm**, wenn es kommutativ ist, in Formeln $ap = bq$, und wenn es für ein beliebiges Objekt $T \in \mathcal{C}$ und Morphismen $f : T \rightarrow A$ und $g : T \rightarrow B$ mit $af = bg$ genau einen Morphismus $h : T \rightarrow P$ gibt mit $f = hp$ und $g = hq$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & P & \xrightarrow{\quad} & A \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

Definition 2.2.2. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erklären wir die Kategorie \mathcal{C}_X der **Objekte von \mathcal{C} über X** . Objekte von \mathcal{C}_X sind Paare (A, a) mit $A \in \mathcal{C}$ und $a \in \mathcal{C}(A, X)$, Morphismen in \mathcal{C}_X von einem Objekt (A, a) in ein weiteres Objekt (B, b) sind Morphismen $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} mit $b \circ f = a$, in Formeln

$$\mathcal{C}_X(A, B) := \{f \in \mathcal{C}(A, B) \mid bf = a\}$$

mit der abkürzenden Notation A, B für $(A, a), (B, b)$ auf der linken Seite. Wir nennen sie auch die **Morphismen über X** .

2.2.3 (Kartesische Diagramme als Produkte). Ein kommutatives Quadrat wie oben ist genau dann kartesisch, wenn mit dem diagonalen Morphismus $d := ap = bq : P \rightarrow X$ das Tripel $((P, d), p, q)$ in der Kategorie \mathcal{C}_X der Objekte über X ein Produkt von (A, a) und (B, b) ist. Das zeigt insbesondere, daß darin (P, p, q) durch (A, a, B, b, X) bereits eindeutig festgelegt ist bis auf eindeutigen Isomorphismus in derselben Weise, wie wir es für Produkte ausformuliert hatten.

Definition 2.2.4. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erklären wir opponiert die Kategorie \mathcal{C}^X der **Objekte von \mathcal{C} unter X** . Objekte von \mathcal{C}^X sind Paare (a, A) mit $A \in \mathcal{C}$ und $a \in \mathcal{C}(X, A)$, Morphismen in \mathcal{C}^X von einem Objekt (a, A) in ein weiteres Objekt (b, B) sind Morphismen $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} mit $f \circ a = b$, in Formeln

$$\mathcal{C}^X(A, B) := \{f \in \mathcal{C}(A, B) \mid fa = b\}$$

mit der abkürzenden Notation A, B für $(a, A), (b, B)$ auf der linken Seite. Wir nennen sie auch die **Morphismen unter X** .

2.2.5. Wir erhalten einen Isomorphismus von Kategorien $(\mathcal{C}^{\text{opp}})_X \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^X)^{\text{opp}}$ durch die Vorschrift $(A, a^\circ) \mapsto (a, A)$ auf Objekten und $f^\circ \mapsto f$ auf Morphismen. Bei der Diskussion allgemeiner Aussagen können wir uns deshalb meist auf einen dieser beiden Fälle beschränken.

Beispiele 2.2.6. Die Kategorie der bepunkteten topologischen Räume Top^* ist die „Kategorie der topologischen Räume unter dem einpunktigen Raum“. Die Kategorie der Körpererweiterungen eines Körpers k ist die „Kategorie aller Körper unter k “.

2.2.7. Daß ein Diagramm kartesisch ist, mag man auch durch das Symbol \lrcorner in seiner Mitte notieren, etwa in der Form

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dies Symbol deutet an, aus welchem Winkel unser Diagramm durch pullback entsteht.

2.2.8. Ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

nennen wir ein **Winkeldiagramm** oder kurz einen **Winkel**. In einer beliebigen Kategorie läßt sich nicht jeder Winkel zu einem kartesischen Diagramm vervollständigen, aber wenn er sich vervollständigen läßt, dann ist diese Vervollständigung als ein Produkt in \mathcal{C}_Y im wesentlichen eindeutig. Wir erlauben uns deshalb den bestimmten Artikel, schreiben

$$W = X \times_Y Z$$

und nennen dieses Objekt das **Faserprodukt** von X mit Z über Y . Vom Morphismus $X \times_Y Z \rightarrow Z$ sagen wir, er entstehe aus f durch **Zurückholen mit p** oder gleichbedeutend durch **Basiswechsel**.

2.2.9 (Herkunft der Terminologie). Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $y \in Y$ ein Punkt, so nennt man sein Urbild $X_y = f^{-1}(y)$ vielfach auch die „Faser“ über y . Das Faserprodukt in der Kategorie der Mengen können wir nun verstehen als ein „faserweises Produkt“, in der Kategorie der Mengen ist nämlich

$$X \times_Y Z := \{(x, z) \in Y \times Z \mid f(x) = p(z)\}$$

mit den offensichtlichen Projektionen ein Rückzug und wir haben insbesondere $(X \times_Y Z)_y = X_y \times Z_y$ für alle $y \in Y$. Im Fall einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ topologischer Räume denken wir uns die Fasern X_y mit ihrer induzierten Topologie versehen und verstehen so unsere Abbildung als eine durch $y \in Y$ indizierte „topologische Familie topologischer Räume über der Basis Y “. Der Übergang zur Abbildung $X \times_Y Z \rightarrow Z$ bedeutet in diesem semantischen Umfeld dann einen „Wechsel der Basis“.

Übungen

Übung 2.2.10 (Transitivität des Rückzugs). Sei in einer Kategorie ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z \end{array}$$

gegeben mit einem kartesischen Quadrat rechts. Man zeige, daß dann das linke Quadrat genau dann kartesisch ist, wenn das einhüllende Rechteck kartesisch ist, mit den horizontalen Verknüpfungen als horizontalen Pfeilen.

Übung 2.2.11. Man zeige: Ist $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung eines Teilraums und $f : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist das folgende Diagramm kartesisch in der Kategorie der topologischen Räume:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \hookrightarrow & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Übung 2.2.12. Gegeben zwei kartesische Quadrate ist auch das „Produktquadrat“, bei dem an jeder Ecke das Produkt der zugehörigen Objekte aus unseren beiden Ausgangsquadraten steht, ein kartesisches Quadrat, wenn diese vier Produkte alle existieren.

Übung 2.2.13. Seien ein kartesisches Diagramm in einer Kategorie

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

und ein Objekt V gegeben, dessen Produkte mit den Objekten der unteren Horizontale existieren. So erhalten wir für jeden Morphismus $h : X \rightarrow V$ ein weiteres kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q} & X \\ (g,hq) \downarrow & & \downarrow (f,h) \\ W \times V & \xrightarrow{p \times \text{id}} & Y \times V \end{array}$$

Übung 2.2.14. Gegeben ein kartesisches Diagramm in der Kategorie der topologischen Räume zeige man: Ist eine Ausgangskante offen, so auch die gegenüberliegende Kante aus dem Faserprodukt. Ist eine Ausgangskante surjektiv, so auch die gegenüberliegende Kante aus dem Faserprodukt.

Übung 2.2.15. Gegeben $G \supset H$ eine topologische Gruppe mit einer Untergruppe erhalten wir ein kartesisches Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} G \times H & \xrightarrow{\text{mult}} & G \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

2.3 Kokartesische Diagramme

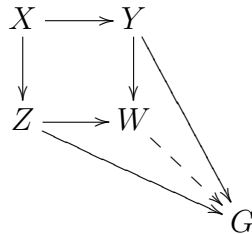
Definition 2.3.1. Kartesische Diagramme in der opponierten Kategorie heißen **kokartesische Diagramme** oder auch **push-out-Diagramme**. Ausgeschrieben heißt ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow c_y \\ Z & \xrightarrow{c_z} & W \end{array}$$

also kokartesisch, wenn es kommutiert und wenn es für jedes andere kommutative Diagramm

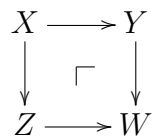
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

genau einen Morphismus $u : W \rightarrow G$ gibt mit $f = u \circ c_y$ und $g = u \circ c_z$. Man mag diese verschiedenen Daten auch zusammenfassen im Diagramm



Unsere Eindeutigkeitsaussagen 2.2.8 für kartesische Diagramme gelten entsprechend auch für kokartesische Diagramme. Winkeldiagramme in der opponierten Kategorie nennen wir **Kowinkeldiagramme** oder kurz **Kowinkel**.

2.3.2. Daß ein Diagramm kokartesisch ist, notiert man auch durch das Symbol \sqsupset in seiner Mitte, etwa in der Form



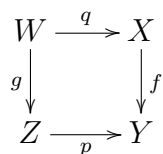
Dies Symbol deutet an, aus welchen Kowinkel unser Diagramm durch pushout entsteht.

Übungen

Übung 2.3.3. Man beschreibe den push-out in der Kategorie der Mengen. Hinweis: $W = (Z \sqcup Y) / \sim$ für \sim die Äquivalenzrelation, die von $\text{in}_Y(f(x)) \sim \text{in}_Z(g(x))$ für $x \in X$ erzeugt wird. Ist f injektiv, so ist diese Relation bereits eine Äquivalenzrelation. Dann können wir uns den pushout vorstellen als den Raum, der entsteht, indem wir Y an Z ankleben längs $f(X) \subset Y$ in der durch $g \circ f^{-1} : f(X) \rightarrow Z$ spezifizierten Weise.

Übung 2.3.4. Ist in einem kartesischen oder kokartesischen Diagramm ein Ursprungspfeil ein Isomorphismus, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem pull-back beziehungsweise in den push-out.

Ergänzende Übung 2.3.5 (Mengentheoretischer Basiswechsel). In einem kartesischen Diagramm von Mengen



gilt für jede Teilmenge $A \subset X$ die Gleichheit $p^{-1}(f(A)) = g(q^{-1}(A))$ von Teilmengen von Z . In einem kokartesischen Diagramm gilt das im allgemeinen nicht mehr. Es gilt jedoch unter der Zusatzannahme, daß q oder g injektiv sind.

Übung 2.3.6 (Pushout und pullback für abelsche Gruppen). In der Kategorie der abelschen Gruppen ist ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

kartesisch beziehungsweise kokartesisch genau dann, wenn die Sequenz $W \rightarrow X \oplus Z \rightarrow Y$ mit Morphismen $(q, g)^T$ und $(f, -p)$ linksexakt beziehungsweise rechtsexakt ist. Insbesondere läßt sich jeder Winkel beziehungsweise Kowinkel zu einem kartesischen beziehungsweise kokartesischen Diagramm vervollständigen. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen von zwei parallelen Pfeilen einer eine Surjektion, so auch der andere. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen ein Ursprungspfeil eine Injektion, so auch der gegenüberliegende Pfeil in den push-out. Hinweis: Man argumentiere mit einer expliziten Konstruktion des push-out. Wer spickeln will, vergleiche [TS] 6.6.8. Ein allgemeines Argument wird in [TD] 1.5.11 gegeben.

Ergänzende Übung 2.3.7 (Basiswechsel für Untergruppen). Sowohl in einem kartesischen als auch in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

gilt für jede Untergruppe $A \subset X$ die Gleichheit $p^{-1}(f(A)) = g(q^{-1}(A))$ von Untergruppen von Z . Hinweis: Jedes kartesische Diagramm von abelschen Gruppen ist kartesisch als Diagramm von Mengen. Jedes kokartesische Diagramm von abelschen Gruppen wird kartesisch, wenn wir seine obere linke Ecke ersetzen durch ihren Quotienten nach dem Schnitt der Kerne der von ihr ausgehenden Morphismen. So kann man sich auf 2.3.5 zurückziehen. In der größerer Allgemeinheit der „abelschen Kategorien“ diskutieren wir das in [TG] 6.3.30.

Übung 2.3.8. Jeder Rückzug einer offenen Abbildung von topologischen Räumen ist offen. Hinweise: Mengentheoretischer Basiswechsel 2.3.5. Produkte offener Abbildungen sind offen. Die Einbettung des Definitionsbereichs einer stetigen Abbildung in ihren Graphen ist initial.

Ergänzende Übung 2.3.9 (Pushout von Krings). Die algebraisch Gebildeten unter Ihnen mögen sich überlegen, daß in der Kategorie **Kring** der kommutativen Ringe alle Diagramme der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} C & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrow & A \otimes_C B \end{array}$$

kokartesisch sind, mit beliebigen Ringhomomorphismen $C \rightarrow A$ und $C \rightarrow B$, der hoffentlich offensichtlichen Multiplikation auf dem Tensorprodukt, und den hoffentlich offensichtlichen Ringhomomorphismen in das Tensorprodukt.

Ergänzende Übung 2.3.10. In der Kategorie der Mengen ist das Faserprodukt zweier Objekte über ihrem Koproduct stets das initiale Objekt alias die leere Menge. Der Pushout eines Produkts dahingegen ist nur dann das finale Objekt alias die einpunktige Menge, wenn keiner der beiden Faktoren die leere Menge ist.

2.4 Satz von Seifert und van Kampen

Satz 2.4.1 (Seifert-van Kampen). *Sei ein topologischer Raum X die Vereinigung zweier offener Teilmengen $U, V \subseteq X$. Ist der Schnitt $U \cap V$ wegzusammenhängend, so bilden für jeden Basispunkt $x \in U \cap V$ die Vorschübe der Fundamentalgruppen ein kokartesisches Diagramm von Gruppen*

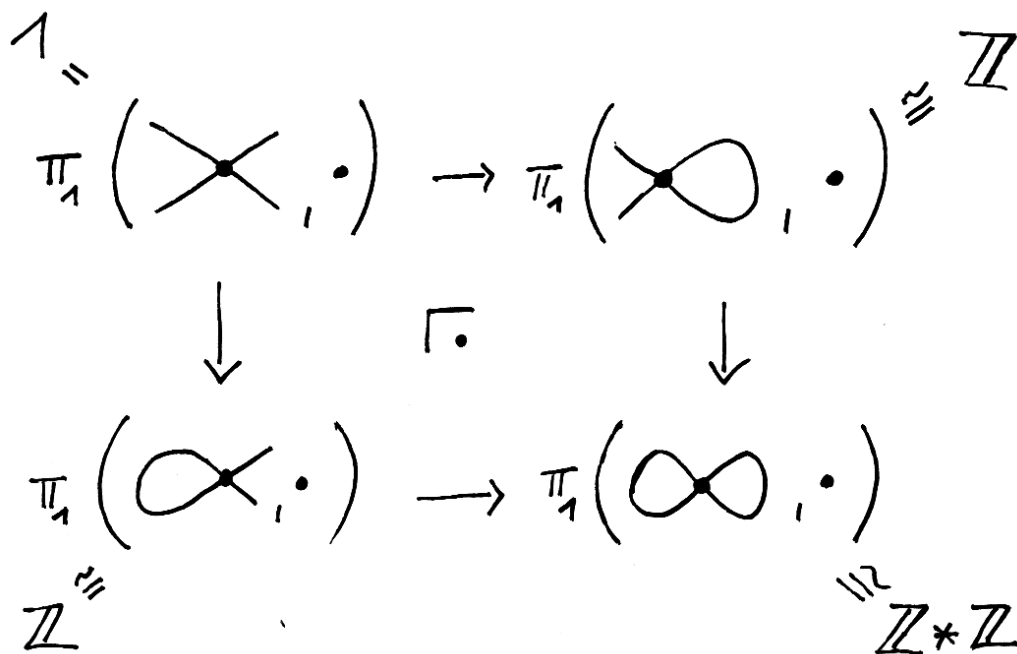
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \longrightarrow & \pi_1(V, x) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \pi_1(U, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

2.4.2. Der Beweis dieses Satzes wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. In 2.6.4 diskutieren wir ganz allgemein, daß und wie sich jeder Kowinkel von Gruppen zu einem kokartesischen Diagramm ergänzen läßt. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

2.4.3 (**Die Kategorie der Kategorien**). Die Gesamtheit aller Kategorien bildet mit Funktoren als Morphismen selbst eine Kategorie

Cat

Etwas sorgfältiger sollte man ein Universum \mathcal{U} festhalten und dann etwa die Kategorie $\mathcal{U}\text{Cat}$ aller Kategorien betrachten, deren Morphismenmengen und Objektmenge Elemente von \mathcal{U} sind, aber diese Feinheiten sind hier nicht relevant.



Berechnung der Fundamentalgruppe der Figur 8 mit Seifert-van Kampen. Das Symbol in der Mitte soll andeuten, daß wir ein push-out-Diagramm vor uns haben. Die Formel $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ meint das Koprodukt von Gruppen, wie es in 2.6.2 noch ausführlicher besprochen werden wird. Ich hoffe, es verwirrt nicht zu sehr, daß die triviale Gruppe darin multiplikativ notiert ist als 1, wohingegen die freie Gruppe mit einem Erzeuger darin \mathbb{Z} notiert wird, also in additiver Notation mit dem neutralen Element 0.

2.4.4. Wir erinnern aus 1.6.15 das fundamentale Gruppoid $\mathcal{W}_X = \mathcal{W}(X)$ eines topologischen Raums X . Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist die Objektabbildung eines Funktors $f : \mathcal{W}(X) \rightarrow \mathcal{W}(Y)$, dessen Effekt auf Morphismen durch $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ gegeben wird.

Satz 2.4.5 (Seifert-van Kampen für das fundamentale Gruppoid). *Gegeben ein topologischer Raum X mit einer Überdeckung $X = U \cup V$ durch zwei offene Teilmengen $U, V \Subset X$ erhalten wir mit den durch die Einbettungen gegebenen Funktoren in der Kategorie der Kategorien ein kokartesisches Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(U \cap V) & \longrightarrow & \mathcal{W}(V) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{W}(U) & \longrightarrow & \mathcal{W}(X) \end{array}$$

Beweis. Für den Beweis verwenden wir eine andere Schreibweise und setzen $U = U_+$ und $V = U_-$ und $U \cap V = U_+ \cap U_-$. Jeder Morphismus in $\mathcal{W}(X)$ läßt sich als Verknüpfung von Morphismen schreiben, die von $\mathcal{W}(U_+)$ oder von $\mathcal{W}(U_-)$ herkommen. In der Tat gibt es für jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r = 1$ des Einheitsintervalls derart, daß für $1 \leq \rho \leq r$ gilt $\gamma[a_{\rho-1}, a_\rho] \subset U_+$ oder $\gamma[a_{\rho-1}, a_\rho] \subset U_-$. Das folgt etwa aus dem Überdeckungssatz von Lebesgue [AN2] 5.1.7 angewandt auf die offene Überdeckung des Kompaktums $[0, 1]$ durch $\gamma^{-1}(U_+)$ und $\gamma^{-1}(U_-)$. Ein Funktor $F : \mathcal{W}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ in eine weitere Kategorie \mathcal{C} wird also bereits eindeutig festgelegt durch die Funktoren $F \circ i_+ : \mathcal{W}(U_+) \rightarrow \mathcal{C}$ und $F \circ i_- : \mathcal{W}(U_-) \rightarrow \mathcal{C}$, wobei $i_\pm : U_\pm \hookrightarrow X$ ebenso die Einbettungen wie die zugehörigen Funktoren auf den fundamentalen Gruppoiden bezeichnen. Es bleibt zu zeigen, daß es für eine weitere Kategorie \mathcal{C} und Funktoren $I_\pm : \mathcal{W}(U_\pm) \rightarrow \mathcal{C}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(U_\cap) & \longrightarrow & \mathcal{W}(U_-) \\ \downarrow & & \downarrow I_- \\ \mathcal{W}(U_+) & \xrightarrow{I_+} & \mathcal{C} \end{array}$$

kommutiert, auch in der Tat einen Funktor $F : \mathcal{W}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ gibt mit $F \circ i_\pm = I_\pm$. Konstruieren wir also einen derartigen Funktor F . Auf Objekten ist klar, welche Abbildungsvorschrift wir nehmen können und müssen. Es ist auch klar, daß der Funktor F , wenn es ihn denn gibt, auf einem Morphismus $g \in \mathcal{W}_X(x, y)$ wie folgt berechnet werden kann: Man wählt einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von x nach y mit $g = [\gamma]$, wählt dazu eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r = 1$ wie oben, wählt für jedes ρ ein Vorzeichen $\varepsilon(\rho)$ mit $\gamma[a_{\rho-1}, a_\rho] \subset U_{\varepsilon(\rho)}$, bezeichnet mit $\gamma_\rho : [0, 1] \rightarrow U_{\varepsilon(\rho)}$ den zugehörigen auf das Einheitsintervall umparametrisierten

Weg, bezeichnet mit $[\gamma_\rho]_{\varepsilon(\rho)}$ den zugehörigen Morphismus in $\mathcal{W}(U_{\varepsilon(\rho)})$, und hat dann

$$F(g) = (I_{\varepsilon(r)}[\gamma_r]_{\varepsilon(r)}) \circ \dots \circ (I_{\varepsilon(2)}[\gamma_2]_{\varepsilon(2)}) \circ (I_{\varepsilon(1)}[\gamma_1]_{\varepsilon(1)})$$

Es ist schließlich klar, daß wir einen Funktor F mit den gesuchten Eigenschaften durch diese Vorschrift konstruieren können, wenn es gelingt zu zeigen, daß $F(g)$ unabhängig ist von allen diesen Wahlen. Daß es auf die Wahl der jeweiligen Vorzeichen $\varepsilon(\rho)$ nicht ankommt, folgt aus unserer Annahme der Kommutativität des letzten Diagramms. Daß es auf die Wahl der Unterteilung von γ nicht ankommt, erkennt man, indem man bei zwei Wahlen zu einer gemeinsamen Verfeinerung übergeht und die Annahme ausnutzt, daß unsere I_\pm Funktoren sind. Damit liefert jeder Repräsentant γ von g schon mal ein wohldefiniertes $F_\gamma(g)$. Bleibt zu zeigen, daß es auch auf die Wahl des Repräsentanten γ der Homotopieklasse g nicht ankommt. Aber sei sonst ψ ein weiterer Repräsentant und $h : \gamma \simeq \psi$ eine Homotopie mit festen Endpunkten. Wieder nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue gibt es Unterteilungen $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r = 1$ und $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_s = 1$ derart, daß jedes Feld $[a_{\rho-1}, a_\rho] \times [b_{\sigma-1}, b_\sigma]$ unter unserer Homotopie h ganz nach U_+ oder ganz nach U_- abgebildet wird. Sind p, q benachbarte Ecken eines Feldes, so bezeichnen wir mit $d_{p,q} : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ die affine Abbildung mit $d_{p,q}(0) = q$, $d_{p,q}(1) = p$ und setzen $\gamma_{p,q} = h \circ d_{p,q}$. Für ein von h ganz nach U_ε abgebildetes Feld mit Ecken

$$\begin{pmatrix} y & z \\ x & w \end{pmatrix}$$

sind die Wege $\gamma_{z,w} * \gamma_{w,x}$ und $\gamma_{z,y} * \gamma_{y,x}$ dann in U_ε homotop. In der Tat folgt aus 1.2.9 sofort die Homotopie $d_{z,w} * d_{w,x} \simeq d_{z,y} * d_{y,x}$ in $\Omega(\text{Feld}, x, z)$. Betrachten wir nun irgendeinen Weg ϕ im Einheitsquadrat, dem Definitionsbereich unserer Homotopie h , der mit konstanter absoluter Geschwindigkeit auf den Kanten unserer Felder von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ läuft und dabei immer nach rechts oder nach oben läuft. Nach dem vorhergehenden ist $F_{h \circ \phi}(g)$ unabhängig von ϕ . Andererseits gilt, jetzt mit der Notation ε für konstante Wege, offensichtlich $\varepsilon * \gamma = h \circ \phi_1$ für ϕ_1 das ϕ , das erst die Unterkante entlangläuft und dann die rechte Seite hoch, und $\psi * \varepsilon = h \circ \phi_2$ für ϕ_2 das ϕ , das erst die linke Seite hochläuft und dann die Oberkante entlang. So aber folgt

$$F_\gamma(g) = F_{\varepsilon * \gamma}(g) = F_{h \circ \phi_1}(g) = F_{h \circ \phi_2}(g) = F_{\psi * \varepsilon}(g) = F_\psi(g) \quad \square$$

Beweis von Seifert-van Kampen. Gegeben ein Monoid M bezeichne $[M]$ die zugehörige **Ein-Objekt-Kategorie** mit einem einzigen Objekt, dessen Monoid von Endomorphismen gerade M ist. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} und ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ haben wir stets einen tautologischen Funktor $[\mathcal{C}(A)] \rightarrow \mathcal{C}$, der das einzige Objekt auf das Objekt A abbildet. Ein Gruppoid heißt **zusammenhängend**, wenn es

zwischen je zwei seiner Objekte mindestens einen Morphismus gibt. Ist \mathcal{W} ein zusammenhängendes Gruppoid und wählen wir ein Objekt $x \in \mathcal{W}$ und für jedes $y \in \mathcal{W}$ einen ausgezeichneten Morphismus $g_y : x \rightarrow y$, so erhalten wir umgekehrt einen Funktor $\mathcal{W} \rightarrow [\mathcal{W}(x)]$ durch die Vorschrift $f \mapsto g_z^{-1} \circ f \circ g_y$ für alle Morphismen $f : y \rightarrow z$. Ist dabei speziell $g_x = \text{id}_x$, so ist die Verknüpfung

$$[\mathcal{W}(x)] \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow [\mathcal{W}(x)]$$

unserer beiden eben diskutierten Funktoren der Identitätsfunktor. Beim Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen dürfen wir nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit außer $U \cap V$ auch U und V und damit X wegzusammenhängend annehmen, indem wir andernfalls jeweils zur Wegzusammenhangskomponente unseres Basispunkts x übergehen. Dann können wir für jeden Punkt $y \in X$ einen Weg von x nach y wählen so, daß unser Weg der konstante Weg ist im Fall $y = x$ und ganz in U beziehungsweise V verläuft, falls y in U beziehungsweise V liegt. Mit diesen Wahlen erhalten wir nach dem vorhergehenden im Schaubild

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(U \cap V) & \longrightarrow & \mathcal{W}(V) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{W}(U) & \longrightarrow & \mathcal{W}(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [\pi_1(U \cap V, x)] & \longrightarrow & [\pi_1(V, x)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\pi_1(U, x)] & \longrightarrow & [\pi_1(X, x)] \end{array}$$

Funktoren von allen vier Ecken des linken in alle vier Ecken des rechten Diagramms. Sie lassen sogar einen kommutativen Würfel entstehen und sind halbunivers zu den offensichtlichen Einbettungen. Da das linke Diagramm kokartesisch ist, folgt dasselbe für das rechte Diagramm. Ist genauer G eine Gruppe, so liefert jede Ergänzung des Kowinkels im rechten Diagramm zu einem kommutativen Quadrat

$$\begin{array}{ccc} [\pi_1(U \cap V, x)] & \longrightarrow & [\pi_1(V, x)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\pi_1(U, x)] & \longrightarrow & [G] \end{array}$$

eine Ergänzung des Kowinkels im linken Diagramm zu einem kommutativen Quadrat mit $[G]$ als rechter unterer Ecke. Diese Ergänzung muß von einem Funktor $\mathcal{W}(X) \rightarrow [G]$ herkommen, der dann hinwiederum einen möglichen Funktor $[\pi_1(X, x)] \rightarrow [G]$ liefert, der zu dem ursprünglichen kommutativen Quadrat führt. Jeder derartige Funktor hinwiederum kommt von einem eindeutig bestimmten Funktor $\mathcal{W}(X) \rightarrow [G]$ her und ist damit auch selbst eindeutig bestimmt. \square

Übungen

Übung 2.4.6. Ist M eine zusammenhängende d -Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 3$ und $E \subset M$ eine endliche Teilmenge, so induziert die Einbettung $M \setminus E \hookrightarrow$

M einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen.

Übung 2.4.7. Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Komplements einer Kreislinie im \mathbb{R}^3 isomorph ist zu \mathbb{Z} . Hinweis: Die Fundamentalgruppe ändert sich nach 2.4.6 nicht, wenn wir den \mathbb{R}^3 durch Hinzufügen eines Punktes zur S^3 machen. Dann kann man 1.7.17 anwenden.

2.5 Freie Monoide und freie Gruppen

Satz 2.5.1. 1. Gegeben eine Menge X existiert ein Paar (W, ε) bestehend aus einem Monoid W und einer Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow W$ derart, daß für jedes weitere Monoid M das Vorschalten von ε eine Bijektion

$$(\circ\varepsilon) : \text{Mon}(W, M) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, M)$$

zwischen der Menge aller Monoidhomomorphismen $W \rightarrow M$ und der Menge aller Abbildungen $X \rightarrow M$ induziert. Wir nennen solch ein ε eine **universelle Mengen-Monoid-Abbildung**;

2. Gegeben zwei universelle Mengen-Monoid-Abbildungen $\varepsilon : X \rightarrow W$ und $\tau : X \rightarrow V$ existiert genau ein Monoidhomomorphismus $c : W \rightarrow V$ mit $c \circ \varepsilon = \tau$ und genau ein Monoidhomomorphismus $d : V \rightarrow W$ mit $d \circ \tau = \varepsilon$, und diese Abbildungen c und d sind zueinander inverse Isomorphismen.

2.5.2. Unsere Paare (W, ε) sind nach Teil 2 eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Eine universelle Mengen-Monoid-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow W$ verdient damit den bestimmten Artikel. Man nennt (W, ε) das **freie Monoid über X** . Wir verwenden für die universelle Mengen-Monoid-Abbildung aus einer Menge X die Notation

$$\varepsilon : X \rightarrow \text{Mon}^{\wedge} X$$

2.5.3. Die charakterisierende Eigenschaft einer universellen Mengen-Monoid-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow W$ bedeutet in anderen Worten: Ist M ein Monoid und $\varphi : X \rightarrow M$ eine Abbildung von Mengen, so soll es genau einen Monoidhomomorphismus $\hat{\varphi} : W \rightarrow M$ geben mit $\hat{\varphi} \circ \varepsilon = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon} & W \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \hat{\varphi} \\ & & M \end{array}$$

Beispiele 2.5.4. Für das einelementige Monoid $\{1\}$ ist die Abbildung $\emptyset \rightarrow \{1\}$ universell. Das freie Monoid über der leeren Menge besteht in anderen Worten nur aus dem neutralen Element. Für das additive Monoid $(\mathbb{N}, +)$ ist die Abbildung $\{*\} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $* \mapsto 1$ universell. Das freie Monoid über der einelementigen Menge ist in anderen Worten das additive Monoid der natürlichen Zahlen.

Beweis. Gegeben eine Menge X konstruieren wir eine universelle Abbildung von X in ein Monoid W wie folgt: Für $n = 0, 1, 2, \dots$ betrachten wir zunächst die Mengen $W_n := \text{Ens}(\{1, \dots, n\}, X)$. Wir notieren unsere Abbildungen $a : \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ als $a : i \mapsto a_i$ und interpretieren Elemente $a \in W_n$ als endliche Wörter $a_1 a_2 \dots a_n$ aus Elementen von X . Die Menge W_0 besteht insbesondere nur aus einem Wort, dem „leeren“ Wort, notiert e . Wir betrachten dann die „Menge aller Wörter“ $W := \bigsqcup_{n \geq 0} W_n$ und erklären darauf die Verknüpfung des „Hinter-einanderschreibens von Wörtern“

$$\begin{aligned} W \times W &\rightarrow W \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

Diese Verknüpfung ist offensichtlich assoziativ, die Längen von Wörtern addieren sich beim Verknüpfen und das leere Wort ist ein neutrales Element. Die Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow W$, die jedem Element $x \in X$ das Wort $x \in W_1$ bestehend aus x als einzigem Buchstaben zuordnet, ist dann offensichtlich eine universelle Mengen-Monoid-Abbildung. Die Argumentation ist beim Beweis von Teil 2 sehr ähnlich wie beim Nachweis der Eindeutigkeit von Produkten bis auf eindeutigen Isomorphismus 2.1.3 und bleibe dem Leser überlassen. Formal sind alle diese Aussagen Spezialfälle der Eindeutigkeit darstellender Objekte [LA2] 7.10.17. \square

Satz 2.5.5. 1. Gegeben eine Menge X existiert ein Paar (F, ε) bestehend aus einer Gruppe F und einer Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ derart, daß für jede weitere Gruppe G das Vorschalten von ε eine Bijektion

$$(\circ\varepsilon) : \text{Grp}(F, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, G)$$

zwischen der Menge aller Gruppenhomomorphismen $F \rightarrow G$ und der Menge aller Abbildungen $X \rightarrow G$ induziert. Wir nennen solch ein ε eine **universelle Mengen-Gruppen-Abbildung**;

2. Gegeben zwei universelle Mengen-Gruppen-Abbildungen $\varepsilon : X \rightarrow F$ und $\tau : X \rightarrow H$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $c : F \rightarrow H$ mit $c \circ \varepsilon = \tau$ und genau ein Gruppenhomomorphismus $d : H \rightarrow F$ mit $d \circ \tau = \varepsilon$, und diese Abbildungen c und d sind zueinander invers.

2.5.6. Unsere Paare (F, ε) sind nach Teil 2 „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie existieren. Eine universelle Mengen-Gruppen-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ verdient damit den bestimmten Artikel. Man nennt (F, ε) die **freie Gruppe über X** . Wir verwenden für die universelle Mengen-Gruppen-Abbildung aus einer Menge X die Notation

$$\varepsilon : X \rightarrow \text{Grp}^\wedge X$$

2.5.7. Die charakterisierende Eigenschaft einer universellen Mengen-Gruppen-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ bedeutet in anderen Worten: Ist G eine Gruppe und $\varphi : X \rightarrow G$ eine Abbildung von Mengen, so soll es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : F \rightarrow G$ geben mit $\tilde{\varphi} \circ \varepsilon = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon} & F \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & G \end{array}$$

Beispiele 2.5.8. Für die einelementige Gruppe $\{1\}$ ist die Abbildung $\emptyset \rightarrow \{1\}$ universell. Die freie Gruppe über der leeren Menge besteht in anderen Worten nur aus dem neutralen Element. Für die additive Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist sowohl die Abbildung $\{*\} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto 1$ als auch die Abbildung $\{*\} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto -1$ universell.

Beweis. Gegeben eine Menge X konstruieren wir eine universelle Mengen-Gruppen-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ wie folgt: Wir beginnen mit dem freien Monoid

$$W^\pm := \text{Mon}^\wedge(X \times \{+1, -1\})$$

über dem kartesischen Produkt $X \times \{+1, -1\}$. Wir interpretieren Elemente a dieses Monoids als endliche Wörter $a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots a_n^{\sigma_n}$ mit $a_i \in X$ und $\sigma_i \in \{+1, -1\}$. Ein typisches Element unseres Monoids wäre etwa das Wort $xyx^{-1}xy^{-1}$ mit $x, y \in X$. Sei nun \sim die kleinste Äquivalenzrelation auf W^\pm derart, daß mit unserer Notation e für das leere Wort gilt:

1. $xx^{-1} \sim e \sim x^{-1}x \quad \forall x \in X$;
2. $a \sim b \Rightarrow ca \sim cb$ und $ac \sim bc \quad \forall a, b, c \in W^\pm$.

Bezeichne $F := W^\pm / \sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Die Klasse von $a \in W^\pm$ heiße $[a]$. Offensichtlich definiert die Verknüpfung auf W^\pm eine Verknüpfung auf F . Das Assoziativgesetz gilt schon in W^\pm , also erst recht in F . Das leere Wort e ist schon neutral in W^\pm , also ist erst recht $[e]$ neutral in F . Um die Existenz von Inversen nachzuweisen, betrachte man zu $a = a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots a_n^{\sigma_n}$ das Wort $b = a_n^{-\sigma_n} \dots a_2^{-\sigma_2} a_1^{-\sigma_1}$ oder in Formeln zu $a : \{1, \dots, n\} \rightarrow (X \times \{+1, -1\})$ das Wort b gegeben durch $b(i) = (a_{n-i}, -\sigma_{n-i})$. Ist zum Beispiel $a = xyx^{-1}yx^{-1}$, so nehmen wir $b = x^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}$. Dann gilt offensichtlich $[b][a] = [a][b] = [e]$. Mithin ist F eine Gruppe. Wir betrachten nun die Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ gegeben durch $x \mapsto [x]$ und zeigen sie universell ist. Seien dazu G eine Gruppe und $\varphi : X \rightarrow G$ eine Abbildung. Man definiere $\hat{\varphi} : W^\pm \rightarrow G$ durch

$$\hat{\varphi}(a_1^{\sigma_1} \dots a_n^{\sigma_n}) = \varphi(a_1)^{\sigma_1} \dots \varphi(a_n)^{\sigma_n}$$

Betrachten wir auf W^\pm die Äquivalenz-Relation $a \sim_\varphi b \Leftrightarrow \hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}(b)$, so erfüllt \sim_φ sicher die Bedingungen 1 und 2 an unsere Äquivalenzrelation auf W^\pm . Also ist $\hat{\varphi}$ konstant auf den Äquivalenzklassen zu \sim und definiert eine Abbildung $\tilde{\varphi} : F \rightarrow G$ mit $\tilde{\varphi}([a]) = \hat{\varphi}(a)$. Damit ist die Existenz von $\tilde{\varphi}$ gezeigt. Die Eindeutigkeit ist klar, unsere Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ ist also in der Tat universell. Die Argumentation ist beim Beweis von Teil 2 sehr ähnlich wie beim Nachweis der Eindeutigkeit von Produkten bis auf eindeutigen Isomorphismus 2.1.3 und bleibe dem Leser überlassen. Formal sind alle diese Aussagen Spezialfälle der Eindeutigkeit darstellender Objekte [LA2] 7.10.17. \square

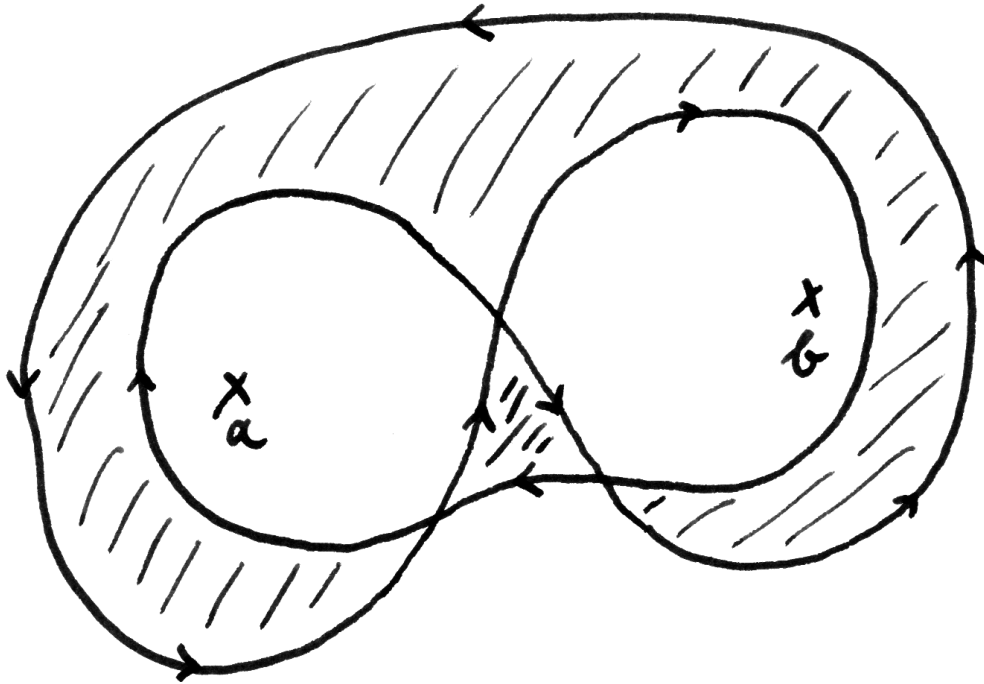
Vorschau 2.5.9. Die Notationen $\text{Mon}^\wedge X$ und $\text{Grp}^\wedge X$ werden in 4.8.7 verallgemeinert auf beliebige Kategorien \mathcal{C} mit einem ausgezeichneten Funktor in die Kategorie der Mengen $v : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$. Auch in dieser Situation erklären wir eine „universelle Mengen- \mathcal{C} -Abbildung“ als eine Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow vC$ mit $X \in \text{Ens}$ und $C \in \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft, daß das Anwenden von v und Vorschalten von ε für alle $D \in \mathcal{C}$ eine Bijektion $(\circ\varepsilon) : \mathcal{C}(C, D) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, vD)$ liefert. Auch in dieser Allgemeinheit notieren wir C dann gerne $C \setminus X$.

Beispiel 2.5.10 (Fundamentalgruppe koendlicher Teilmengen der Ebene). Gegeben $E \subset \mathbb{C}$ eine endliche Teilmenge und $* \in \mathbb{C} \setminus E$ ein Basispunkt derart, daß keine zwei Punkte aus E mit $*$ kollinear sind, erhalten wir einen Isomorphismus

$$\text{Grp}^\wedge E \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C} \setminus E, *)$$

durch die Vorschrift $p \mapsto [\alpha_p]$ mit α_p einem Weg, der erst auf geradem Wege von $*$ so nah an p herangeht, daß man näher bei p ist als bei allen anderen $q \in E$, dann einmal im Gegenuhrzeigersinn um p herum, und dann wieder auf geradem Wege zu $*$ zurück“. Das folgert man induktiv mit Seifert-van Kampen und Übung 2.5.16 und der offenen Überdeckung, die wir erhalten, indem wir erst die Ebene von $*$ ausgehend so in Kuchenstücke aufschneiden, daß in jedem Kuchenstück genau ein Punkt von E liegt, und dann diese Kuchenstücke etwas aufdicken, indem wir alle Punkte mit einem Abstand $< \varepsilon$ vom gegebenen Kuchenstück mit dazunehmen und dabei $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß auch in jedem dieser aufgedickten Kuchenstücke nur genau ein Punkt von E liegt. Im Fall eines allgemeinen Basispunktes können wir uns mit unseren Erkenntnisse zum Wechsel des Basispunktes 1.7.2 unschwer auf den bereits behandelten Fall zurückziehen.

Ergänzung 2.5.11. Gegeben eine Menge X kann man die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}X$ aller derjenigen Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{Z}$ betrachten, die an höchstens endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annehmen. Die Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{Z}X$, die jedem Element von X seine charakteristische Funktion zuordnet, hat dann die universelle Eigenschaft, daß das Vorschalten dieser Abbildung für jede abelsche



Ein geschlossener nicht zusammenziehbarer Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Denken wir uns das Mittelkreuz als Basispunkt und bezeichnet α beziehungsweise β in der Fundamentalgruppe das Umrunden gegen den Uhrzeigersinn von a beziehungsweise b , so ist unser Fundamentalgruppe nach 2.5.10 frei erzeugt von α und β und unser Weg repräsentiert das Element $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ in der Fundamentalgruppe. Denken wir uns an den beiden Kreuzen je einen Nagel in die Wand geschlagen, bleibt unsere Schnur hängen, weil sie eben ein nichttriviales Element der Fundamentalgruppe repräsentiert. Sobald wir einen der beiden Nägel herausziehen, wird jedoch die Fundamentalgruppe des Komplements des verbleibenden Nagels kommutativ und die Schnur fällt herunter.

Gruppe A eine Bijektion

$$(\circ\varepsilon) : \text{Ab}(\mathbb{Z}X, A) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, A)$$

zwischen der Menge aller Homomorphismen von abelschen Gruppen $\mathbb{Z}X \rightarrow A$ und der Menge aller Abbildungen $X \rightarrow A$ induziert. Sie ist also eine universelle Mengen-(abelsche-Gruppen)-Abbildung. Aufgrund dieser universellen Eigenschaft heißt $\mathbb{Z}X$ die **freie abelsche Gruppe über X** und wir notieren sie auch $\text{Ab}^\wedge X$ und notieren unsere universelle Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow \text{Ab}^\wedge X$. Wieder legt diese universelle Eigenschaft unser Paar $(\varepsilon, \mathbb{Z}X)$ bereits bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig fest. So erkennen wir, daß der durch das letztere ε induzierte Gruppensomorphismus $\tilde{\varepsilon} : \text{Grp}^\wedge X \rightarrow \text{Ab}^\wedge X$ einen Isomorphismus

$$(\text{Grp}^\wedge X)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \text{Ab}^\wedge X$$

von der Abelisierung im Sinne von 1.8.1 der freien Gruppe über X in die freie abelsche Gruppe über X induzieren muß. Das hinwiederum zeigt, daß die freien Gruppen über zwei Mengen X, Y nur dann isomorph sein können, wenn gilt $|X| = |Y|$, denn für $A := \text{Ab}^\wedge X$ können wir das daraus folgern, daß $A/2A$ in Bijektion ist zur Menge aller endlichen Teilmengen von X . Wir nennen die Kardinalität von X den **Rang** der freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge X$.

Vorschau 2.5.12. Da die Vorschrift $X \mapsto \mathbb{Z}X$ einen kovarianten Funktor $\text{Ens} \rightarrow \text{Ab}$ liefert, ist es richtiger, die Elemente von $\mathbb{Z}X$ als eine Art „kompakt getragener Maße“ auf X aufzufassen. Wenn wir diesen Gesichtspunkt betonen wollen, verwenden wir die Notation $\mathbb{Z}X = \text{Maß}_i(X)$ und $\varepsilon(x) = \delta_x$.

Ergänzung 2.5.13 (Freie Untergruppen einer Matrixgruppe). Man kann sich mit Möbiusgeometrie anschaulich leicht klar machen, daß die Gruppe $\text{GL}(2; \mathbb{C})$, ja selbst die Gruppe $\text{PGL}(2; \mathbb{C})$ freie Untergruppen von beliebigem endlichem Rang besitzt. Dazu betrachtet man ihre Operation auf der Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Für jedes Paar von abgeschlossenen Kreisscheiben $K, L \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $K \subset L^\circ$ findet man $\gamma \in \text{PGL}(2; \mathbb{C})$ mit $\gamma(K^\circ) = L^\circ$. Erinnert man etwa $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ und nimmt zwei konzentrische Kreisscheiben in \mathbb{C} , so wäre etwa eine geeignete Streckung ein mögliches γ . Wählt man nun endlich viele paarweise disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben $K_i \subset L^\circ$ und betrachtet das Untergruppenerzeugnis $\Gamma := \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle$ der zugehörigen γ_i , so erhält man eine freie Gruppe vom Rang r . In der Tat, betrachtet man die Menge A aller Translate des $A := \Gamma(\partial L)$ des Randkreises von L und die Menge $E := \text{Zus}(A)$ ihrer Zusammenhangskomponenten und verbindet je zwei Elemente $p, q \in E$ durch eine Kante, wenn die entsprechenden Kreise im Abschluß derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus A$ liegen. So erhält man einen zykliefreien eindimensionalen Simplizialkomplex alias Baum, bei dem von jeder Ecke $2r$ Kanten ausgehen. Die induzierte Operation

von Γ auf diesem Simplicialkomplex geschieht in der Weise, daß unsere Erzeuger γ_i und ihre Inversen jede Ecke $p \in E$ auf alle ihre $2r$ Nachbarn schieben. So kann man zumindest anschaulich gut einsehen, daß Γ eine freie Gruppe vom Rang r sein muß. Diese freien Untergruppen von $\text{PGL}(2; \mathbb{C})$ heißen **Schottky-Gruppen**.

Übungen

Übung 2.5.14 (Freie Gruppe als Menge unkürzbarer Worte). Sei X eine Menge. Man zeige, daß jedes Element der freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge X$ über X genau einen Repräsentanten kürzester Länge im freien Monoid $\text{Mon}^\wedge(X \times \{+1, -1\})$ hat, und daß diese Repräsentanten genau die „unkürzbaren Worte“ aus diesem freien Monoid sind. Hinweis: Man konstruiere eine Operation der Gruppe $\text{Grp}^\wedge X$ auf der Menge aller unkürzbaren Worte.

Übung 2.5.15. Man zeige, daß x und $a := yxyx^{-1}y^{-1}$ in der freien Gruppe über den beiden Symbolen x, y eine echte Untergruppe erzeugen, die surjektiv auf die Abelianisierung unserer freien Gruppe abbildet. Hinweis: 2.5.14.

Übung 2.5.16. Jede Abbildung von Mengen $\varphi : X \rightarrow Y$ setzt sich auf genau eine Weise fort zu einer Abbildung von Gruppen $\text{Grp}^\wedge X \rightarrow \text{Grp}^\wedge Y$, und unser Grp^\wedge ist so in natürlicher Weise ein Funktor von den Mengen in die Gruppen. Man zeige, daß dieser Funktor Grp^\wedge kokartesische Diagramme von Mengen zu kokartesischen Diagrammen von Gruppen macht. Das wird später zu 4.3.12 verallgemeinert. Sind insbesondere X und Y zwei Mengen, so ist das folgende Diagramm kokartesisch in der Kategorie der Gruppen:

$$\begin{array}{ccc} \text{Grp}^\wedge(X \cap Y) & \rightarrow & \text{Grp}^\wedge X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grp}^\wedge Y & \rightarrow & \text{Grp}^\wedge(X \cup Y) \end{array}$$

Übung 2.5.17. Man zeige, daß wir einen Isomorphismus zwischen der freien Gruppe über einer endlichen Menge I und der Fundamentalgruppe der Einpunktverbindung $\bigvee_{i \in I} S^1$ von Kopien der bepunkteten Räume $(S^1, 1)$ erhalten, wenn wir jedem $i \in I$ das „einfache Durchlaufen der i -ten Kreislinie“ zuordnen.

Übung 2.5.18 (Verschlungene und nicht verschlungene Kreislinien). Die Fundamentalgruppe des Komplements der Vereinigung von zwei „nicht ineinander verschlungenen“ Kreislinien in \mathbb{R}^3 ist isomorph zur freien Gruppe in zwei Erzeugern. Hinweis: 2.4.7. Die Fundamentalgruppe des Komplements von zwei „ineinander verschlungenen“ Kreislinien in \mathbb{R}^3 ist isomorph zur freien abelschen Gruppe in zwei Erzeugern. Hinweis: \mathbb{R}^3 mithilfe von 2.4.6 zu S^3 ergänzen, 1.7.17 anwenden. Es gibt also keinen Homöomorphismus des \mathbb{R}^3 mit sich selber, der ein Paar von verschlungenen Kreislinien zu einem Paar von nicht verschlungenen Kreislinien macht.

Übung 2.5.19. Man bestimme die Fundamentalgruppe des Komplements einer Acht in \mathbb{R}^3 .

2.6 Push-out von Gruppen

2.6.1. Schon beim Satz von Seifert und van Kampen wird sich der Leser gefragt haben, ob sich jedes Kowinkeldiagramm von Gruppen zu einem kokartesischen Diagramm vervollständigen läßt. Das ist in der Tat der Fall und soll nun bewiesen werden. Wir beginnen mit einem besonders einfachen Fall.

Satz 2.6.2 (Koprodukte von Gruppen). *In der Kategorie der Gruppen existiert zu je zwei Gruppen ein Koprodukt.*

Ergänzung 2.6.3. Man zeigt ähnlich, daß für eine beliebige Familie von Gruppen ein Koprodukt in der Kategorie der Gruppen existiert.

Beweis. Das Koprodukt von zwei Gruppen G_1 und G_2 heißt auch das **freie Produkt** der Gruppen G_1 und G_2 und wird notiert als

$$G_1 * G_2$$

Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge G$ über der Menge G haben wir für jede Gruppe G genau einen Gruppenhomomorphismus $\eta = \eta_G : \text{Grp}^\wedge G \rightarrow G$, dessen Verknüpfung mit $\varepsilon : G \rightarrow \text{Grp}^\wedge G$ die Identität auf G ist. Den Kern $RG \subset \text{Grp}^\wedge G$ dieses Gruppenhomomorphismus nennen wir die „Relationen von G “. Wir definieren die Gruppe $G_1 * G_2$ als den Quotienten der freien Gruppe über der disjunkten Vereinigung unserer beiden Gruppen nach dem von den Relationen in beiden Gruppen erzeugten Normalteiler, in Formeln

$$G_1 * G_2 := \text{Grp}^\wedge(G_1 \sqcup G_2) / \langle\langle RG_1 \cup RG_2 \rangle\rangle$$

Hier haben wir der Einfachheit halber das Bild von RG_i unter der von der Inklusion induzierten Abbildung $\text{Grp}^\wedge G_i \rightarrow \text{Grp}^\wedge(G_1 \sqcup G_2)$ auch mit RG_i bezeichnet. Wir behaupten nun, daß diese Gruppe $G_1 * G_2$ mit den offensichtlichen Abbildungen $\text{can}_i : G_i \rightarrow G_1 * G_2$ ein Koprodukt ist. In der Tat, ist irgendeine Gruppe H gegeben mitsamt Abbildungen $f_1 : G_1 \rightarrow H$ und $f_2 : G_2 \rightarrow H$, so erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $f : \text{Grp}^\wedge(G_1 \sqcup G_2) \rightarrow H$. Ist zusätzlich f_i ein Gruppenhomomorphismus, so liegt RG_i im Kern von f . Sind f_1, f_2 Gruppenhomomorphismen, so definiert f mithin einen Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : G_1 * G_2 \rightarrow H$. \square

Korollar 2.6.4. *Jedes Kowinkeldiagramm von Gruppen läßt sich zu einem push-out-Diagramm vervollständigen.*

2.6.5. Man nennt so einen push-out auch ein **amalgamiertes Produkt** und bezeichnet ihn mit $G_1 *_G G_2$.

Beweis. Sei

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_2} & G_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \\ G_1 & & \end{array}$$

unser Kowinkeldiagramm. Wir konstruieren dann unseren Pushout als den Quotienten $G_1 *_G G_2 / \langle\langle \varphi_1(x)^{-1} \varphi_2(x) \mid x \in G \rangle\rangle$ und überlassen es dem Leser, die universelle Eigenschaft zu prüfen. \square

Übungen

Übung 2.6.6. Ist in einem kokartesischen Diagramm von Gruppen einer der Ausgangspfeile eine Surjektion, so auch der parallele Pfeil in den Pushout. Hinweis: Sein Bild hat die universelle Eigenschaft.

Übung 2.6.7 (Explizite Beschreibung des freien Produkts). Seien G_1, G_2 Gruppen. Man zeige, daß sich jedes Element des freien Produkts $G_1 *_G G_2$ in eindeutiger Weise als ein Produkt $g_1 g_2 \dots g_n$ schreiben läßt mit $n \geq 0$ und $g_k \in G_{\varepsilon(k)}$ nicht das neutrale Element und $\varepsilon(k) \neq \varepsilon(k+1)$ für $1 \leq k < n$. Wie üblich soll hier das leere Produkt mit $n = 0$ das neutrale Element von $G_1 *_G G_2$ darstellen. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von Übung 2.5.14.

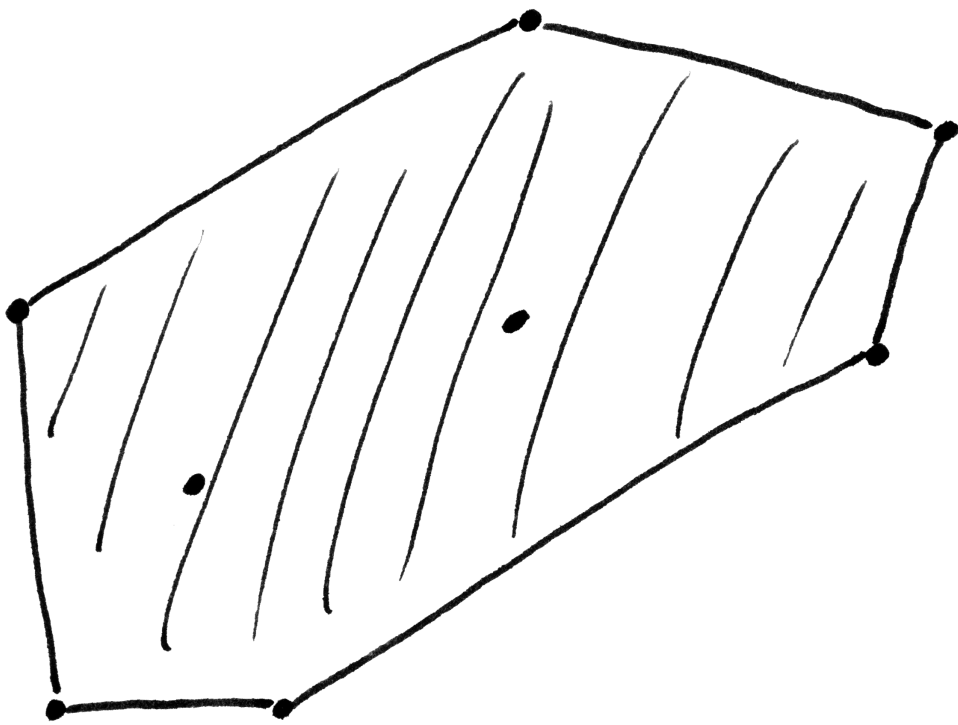
2.7 Simplicialkomplexe und triangulierbare Flächen

2.7.1. Gegeben V ein reeller Raum und $M \subset V$ eine Teilmenge definiert man die **konvexe Hülle von M** als den Schnitt aller konvexen Teilmengen von V , die M umfassen. Explizit wird die konvexe Hülle einer nichtleeren Menge im Fall eines Vektorraums gegeben durch die Vorschrift

$$\text{konv}(M) := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i p_i \mid n \geq 0, p_i \in M, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

Im Fall eines affinen Raums gilt dieselbe Formel, wenn man die Summe interpretiert als $q + \sum_{i=0}^n t_i (p_i - q)$ für irgendeinen Punkt q .

Definition 2.7.2. Ich erinnere daran, daß eine nichtleere Familie (p_0, \dots, p_n) von Punkten eines reellen affinen Raums **affin unabhängig** heißt, wenn es keinen $(n-1)$ -dimensionalen affinen Teilraum gibt, der alle ihre Punkte enthält. Dann nennt man ihre konvexe Hülle $\text{konv}(p_0, \dots, p_n)$ den **vollen Simplex mit Ecken p_0, \dots, p_n** .



Eine endliche Teilmenge der Ebene, dargestellt durch fette Punkte, und ihre konvexe Hülle, dargestellt als schraffierter Bereich.

Beispiele 2.7.3. Ein einzelner Punkt p ist stets affin unabhängig und wir haben $\text{konv}(p) = \{p\}$. Ein Zweitupel (p, q) von Punkten ist affin unabhängig genau dann, wenn die beiden Punkte verschieden sind, und in diesem Fall ist $\text{konv}(p, q)$ das „abgeschlossene Streckenstück zwischen p und q “, das wir manchmal auch $[p, q]$ notieren. Ein Dreitupel (p, q, r) von Punkten ist affin unabhängig genau dann, wenn die drei Punkte nicht auf einer affinen Gerade liegen, und in diesem Fall ist $\text{konv}(p, q, r)$ die „abgeschlossene Fläche des Dreiecks mit den Ecken p, q und r “.

2.7.4 (Diskussion der Terminologie). Die Bezeichnung „Simplex“ kann wohl zurückgeführt werden auf denselben Wortstamm wie „simpel“. In jedem Fall werden volle Simplizes verwendet als einfachste Grundbausteine bei der Konstruktion komplizierterer Räume. Die Konstruktionsvorschrift ist dabei ein rein kombinatorisches Datum, das wir gleich definieren und einen „Simplizialkomplex“ nennen werden. Den zugehörigen topologischen Raum nennen wir dann seine „topologische Realisierung“.

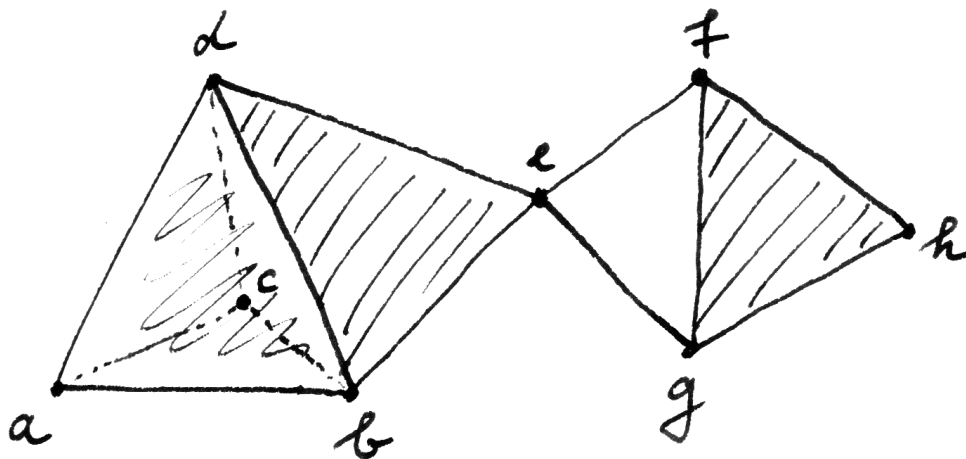
Definition 2.7.5. Ein **Simplizialkomplex** $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ist eine Menge E mit samt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen von E , das unter dem Bilden von nichtleeren Teilmengen stabil ist und alle einelementigen Teilmengen von E enthält. In Formeln ausgedrückt fordern wir von unserem Mengensystem $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ also:

1. $0 < |K| < \infty \forall K \in \mathcal{K}$;
2. $(K \in \mathcal{K} \text{ und } \emptyset \neq L \subset K) \Rightarrow L \in \mathcal{K}$;
3. $\{e\} \in \mathcal{K} \forall e \in E$.

Wir nennen die Elemente von E die **Ecken** und die Elemente von \mathcal{K} die **Simplizes** oder ausführlicher **kombinatorischen Simplizes** unseres Simplizialkomplexes. Die Simplizes der Kardinalität $(n + 1)$ nennen wir **n -Simplizes** und die Menge aller n -Simplizes notieren wir \mathcal{K}_n . Wir identifizieren oft stillschweigend die Menge E der Ecken mit der Menge \mathcal{K}_0 der 0-Simplizes.

Vorschau 2.7.6 (Diskussion der Terminologie). Wenn in der Literatur von einem Simplizialkomplex die Rede ist, ist auch oft eine „Menge mit einer simplizialen Teilordnung“ im Sinne von Übung 2.7.19 gemeint. Wir diskutieren dort, inwiefern das „im wesentlichen dasselbe Datum“ ist wie ein Simplizialkomplex.

Beispiel 2.7.7. Jede Menge E ist mit dem System $\mathcal{K} = \mathcal{M}_E$ all ihrer nichtleeren endlichen Teilmengen ein Simplizialkomplex $\mathcal{M}_E = (E, \mathcal{M}_E)$. Ich nenne ihn den **maximalen Simplizialkomplex mit Eckenmenge E** .



Versuch der graphischen Darstellung der topologischen Realisierung eines
 Simplicialkomplexes mit acht Ecken $E = \{a, b, \dots, h\}$, einem 3-Simplex
 $\{a, b, c, d\}$, sechs 2-Simplizes $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, d, e\}$,
 $\{f, g, h\}$, und dreizehn 1-Simplizes.

Definition 2.7.8. Wir ordnen jedem Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ einen topologischen Raum $\Delta(\mathcal{K})$ zu, den wir seine **topologische Realisierung** oder kurz **Realisierung** nennen. Als zugrundeliegende Menge nehmen wir

$$\Delta(\mathcal{K}) := \left\{ t : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \begin{array}{l} \text{Es gibt einen kombinatorischen Simplex } \sigma \in \mathcal{K} \\ \text{mit } (\text{supp } t) = \sigma \text{ und es gilt } \sum_{e \in E} t(e) = 1 \end{array} \right\}$$

Hier verwenden wir die übliche Notation $\text{supp } t := \{e \in E \mid t(e) \neq 0\}$ für den Träger oder englisch und französisch „support“ von t . Unsere Menge $\Delta(\mathcal{K})$ ist enthalten im Vektorraum $\mathbb{R}E$ aller Abbildungen $E \rightarrow \mathbb{R}$ mit endlichem Träger. Für $\sigma \in \mathcal{K}$ betrachten wir nun die Teilmenge $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ aller t mit Träger in σ . Bezeichnen wir für $e \in E$ mit $1e = \delta_e \in \mathbb{R}E$ das zugehörige Element der Standardbasis und besteht σ aus den $n + 1$ Ecken $e_0, \dots, e_n \in E$, so ist $\Delta(\sigma)$ gerade die konvexe Hülle der $1e_i$, in Formeln

$$\Delta(\sigma) = \text{konv}(1e_0, \dots, 1e_n)$$

Unsere topologische Realisierung ist die Vereinigung aller dieser vollen Simplexes. Ist E endlich, so nehmen wir als Topologie auf $\Delta(\mathcal{K})$ schlicht die Topologie, die induziert wird von der natürlichen Topologie auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}E$. Im allgemeinen verstehen wir $\Delta(\mathcal{K})$ mit der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$ von Realisierungen endlicher Unterkomplexe $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ oder gleichbedeutend der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ der vollen Simplexes zu $\sigma \in \mathcal{K}$. In Übung 2.7.17 wird erklärt, warum wir unsere Menge nicht mit der Kofinaltopologie zur Familie der Auswertungen an allen Ecken E unseres Komplexes verstehen wollen.

Ergänzung 2.7.9. Für die Realisierung eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} ist statt $\Delta(\mathcal{K})$ auch die Notation $|\mathcal{K}|$ gängig. Ob im Zweifelsfall die Kardinalität der Menge \mathcal{K} oder die Realisierung des Simplizialkomplexes \mathcal{K} gemeint ist, muß der Leser dann aus dem Kontext erschließen.

Ergänzung 2.7.10. Ein grundlegendes und weitgehend ungelöstes Problem der Topologie ist die Klassifikation aller Realisierungen endlicher Simplizialkomplexe bis auf Homotopie, vergleiche zum Beispiel den Artikel von Baues in [Jam95].

2.7.11 (Sparsame Realisierung von Simplizialkomplexen). Wir können die Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines Simplizialkomplexes (E, \mathcal{K}) oft auch in affine Räume X einer Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X < |E|$ einbetten. Ist genauer $E \rightarrow X, e \mapsto \bar{e}$ irgendeine Abbildung der Ecken unseres Simplizialkomplexes in einen reellen affinen Raum X , so gibt es genau eine affine Abbildung $\{t \in \mathbb{R}E \mid \sum t(e) = 1\} \rightarrow X$ mit $e \mapsto \bar{e}$. Ist diese Abbildung darüber hinaus injektiv auf $\Delta(\mathcal{K})$ und ist X endlichdimensional und unser Simplizialkomplex endlich, so induziert unsere Abbildung nach [TM] 1.5.13 einen Homöomorphismus von der geometrischen Realisierung

unseres Simplicialkomplexes mit ihrem Bild. Dasselbe gilt mit [TM] 1.7.30, wenn wir statt $|\mathcal{K}| < \infty$ schwächer nur fordern, daß die Bilder der vollen Simplizes eine lokal endliche Überdeckung des Bildes von $\Delta(\mathcal{K})$ bilden. Notwendig und hinreichend für die Injektivität ist, daß (1) für jeden Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ die Familie $(\bar{p})_{p \in \sigma}$ affin unabhängig ist in X und daß (2) gegeben zwei Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ für die vollen Simplizes $\text{konv}(\bar{\sigma}) \subset X$ gilt $\text{konv}(\bar{\sigma}) \cap \text{konv}(\bar{\tau}) = \text{konv}(\overline{\sigma \cap \tau})$.

Definition 2.7.12. Eine **simpliciale Abbildung** φ von einem Simplicialkomplex (E, \mathcal{K}) in einen Simplicialkomplex (F, \mathcal{L}) ist eine Abbildung auf den Ecken $\varphi : E \rightarrow F$ derart, daß gilt $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \varphi(\sigma) \in \mathcal{L}$. So eine simpliciale Abbildung liefert eine stetige Abbildung $\Delta(\varphi) : \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{L})$ zwischen den zugehörigen topologischen Räumen durch „affine Fortsetzung auf das Innere der vollen Simplizes“, in Formeln $\Delta(\varphi) : t \mapsto s$ mit

$$s(f) := \sum_{\varphi(e)=f} t(e) \quad \forall f \in F$$

Wir nennen $\Delta(\varphi)$ die **topologische Realisierung** unserer simplicialen Abbildung und schreiben oft einfacher φ statt $\Delta(\varphi)$.

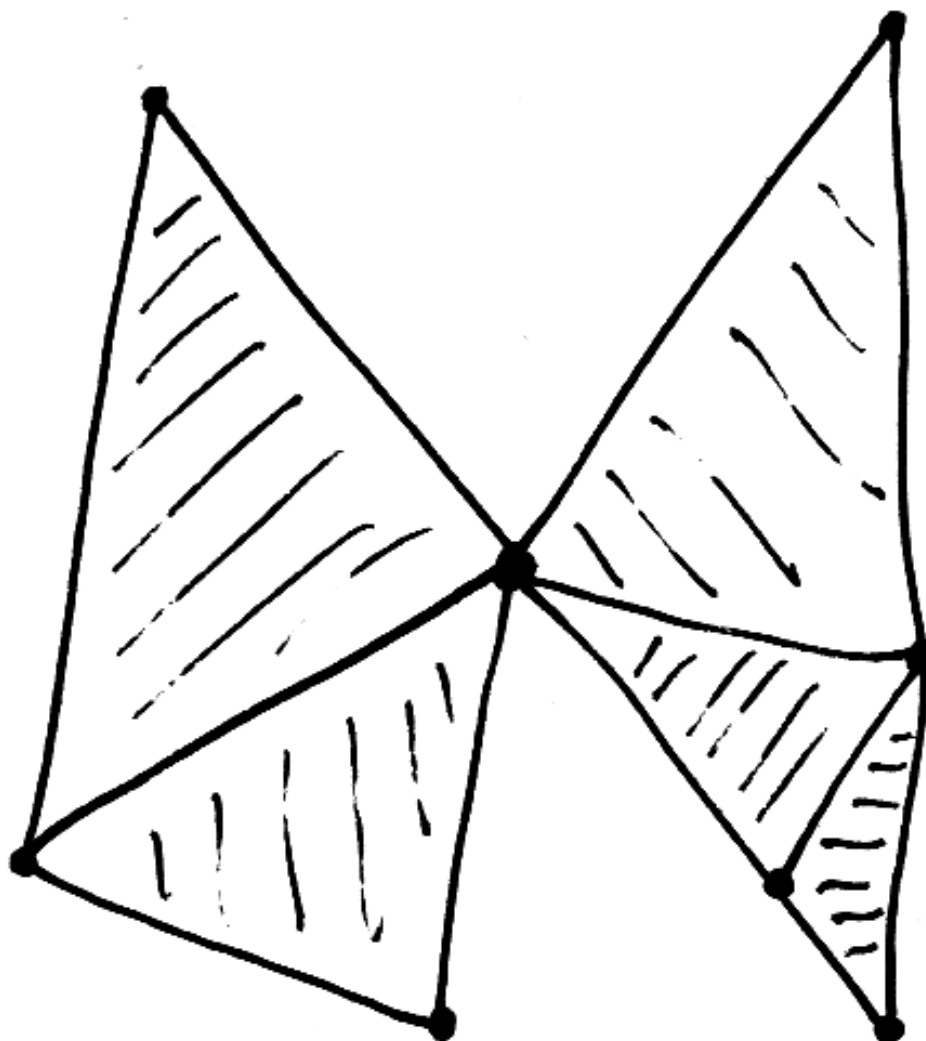
Definition 2.7.13. Eine **kombinatorische Fläche** ist ein endlicher Simplicialkomplex \mathcal{F} derart, daß gilt:

1. Jeder Simplex liegt in einem 2-Simplex;
2. Jeder 1-Simplex liegt in höchstens zwei 2-Simplizes;
3. Alle 2-Simplizes, die einen gegebenen 0-Simplex enthalten, lassen sich so durchnummerieren als $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, daß jeweils σ_i und σ_{i+1} eine Kante gemeinsam haben, in Formeln $|\sigma_i \cap \sigma_{i+1}| = 2$ für $1 \leq i < r$.

Diejenigen 1-Simplizes, die nur zu einem einzigen 2-Simplex gehören, nennen wir die **Randkanten** unserer kombinatorischen Fläche. Gehört sogar jeder 1-Simplex zu genau zwei 2-Simplizes, so nennen wir unseren Simplicialkomplex eine **geschlossene kombinatorische Fläche** oder auch eine **kombinatorische Fläche ohne Rand**.

2.7.14. Es ist leicht zu sehen und auch nicht schwer zu beweisen, daß die topologische Realisierung einer geschlossenen kombinatorischen Fläche \mathcal{F} eine geschlossene Fläche $\Delta(\mathcal{F})$ alias eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit im Sinne unserer Definition 1.1.5 ist.

Definition 2.7.15. Eine **Triangulierung** einer geschlossenen Fläche X ist ein Paar bestehend aus einer geschlossenen kombinatorischen Fläche \mathcal{F} und einem Homöomorphismus $\Delta(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} X$.



Dieser Simplicialkomplex ist keine kombinatorische Fläche, da im „mittleren Punkt“ die dritte Bedingung unserer Definition 2.7.13 verletzt ist.

Ergänzung 2.7.16. Rado [?, ?] hat gezeigt, daß jede geschlossene Fläche eine Triangulierung besitzt. Der Beweis ist nicht ganz einfach. In höheren Dimensionen gibt es kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, die nicht homöomorph sind zur Realisierung eines Simplicialkomplexes, die also „nicht triangulierbar“ sind.

Übungen

Übung 2.7.17. Die Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines Simplicialkomplexes (E, \mathcal{K}) ist stets Hausdorff und jede kompakte Teilmenge $A \subset \Delta(\mathcal{K})$ ist schon enthalten in einer Vereinigung von endlich vielen vollen Simplex. Hinweis: Eine Teilmenge von $\Delta(\mathcal{K})$, die jeden Simplex in höchstens endlich vielen Punkten trifft, ist stets abgeschlossen und diskret. Besteht unser Simplicialkomplex aus abzählbar vielen Kanten, die in einen zentralen Punkt hereinlaufen, so gälte diese Aussage nicht für die von den Auswertungen an allen Ecken induzierte Initialtopologie.

Übung 2.7.18. Ein Simplicialkomplex heißt **lokal endlich**, wenn jede seiner Ecken nur zu endlich vielen Simplex gehört. Man zeige, daß ein Simplicialkomplex genau dann lokal endlich ist, wenn seine topologische Realisierung lokal kompakt ist. Hinweis: 2.7.17.

Übung 2.7.19. Ein Teilordnung \leq auf Menge K heiße **simplizial**, wenn gilt:

1. K hat ein kleinstes Element;
2. Jede zweielementige Teilmenge von K besitzt eine größte untere Schranke;
3. Die Menge aller Elemente kleinergleich einem beliebig vorgegebenen Element ist als teilgeordnete Menge isomorph zum System aller Teilmengen einer endlichen Menge.

Gegeben ein Simplicialkomplex (E, \mathcal{K}) setzen wir $\tilde{\mathcal{K}} := \mathcal{K} \sqcup \{\emptyset\}$ und nennen diese Menge seine **Augmentierung**. Dann ist für jeden Simplicialkomplex im Sinne von 2.7.5 die auf seiner Augmentierung $\tilde{\mathcal{K}}$ durch die Inklusion gegebenen Teilordnung simplizial. Man zeige, daß auch umgekehrt jede Menge mit einer simplizialen Teilordnung isomorph ist zur Augmentierung eines bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmten Simplicialkomplexes im Sinne von 2.7.5.

Ergänzende Übung 2.7.20. Gegeben eine Menge E nennen wir die topologische Realisierung $\Delta(\mathcal{M}_E)$ des maximalen Simplicialkomplexes \mathcal{M}_E mit Eckenmenge E den **vollen Simplex mit Eckenmenge E** . Man zeige, daß für $E \neq \emptyset$ der volle Simplex $\Delta(\mathcal{M}_E)$ zusammenziehbar ist.

2.8 Klassifikation der geschlossenen Flächen

2.8.1. Wir werden im folgenden den in 1.1.7 formulierten Satz unter der Zusatzannahme der „Triangulierbarkeit“ beweisen, wir klassifizieren also die triangulierbaren geschlossenen Flächen bis auf Homöomorphie. Dieser Abschnitt nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als die Argumentation nicht so weit in die formalen Details getrieben wird wie in den übrigen Abschnitten.

Definition 2.8.2. Sei \mathcal{F} eine kombinatorische Fläche. Eine **Zerschneidung von \mathcal{F}** ist eine kombinatorische Fläche \mathcal{Z} mit einer simplizialen Abbildung $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{F}$, die auf den 2-Simplizes eine Bijektion $\varphi : \mathcal{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_2$ induziert. Umgekehrt sagen wir in dieser Situation auch, \mathcal{F} entstehe durch **Verklebung von \mathcal{Z}** .

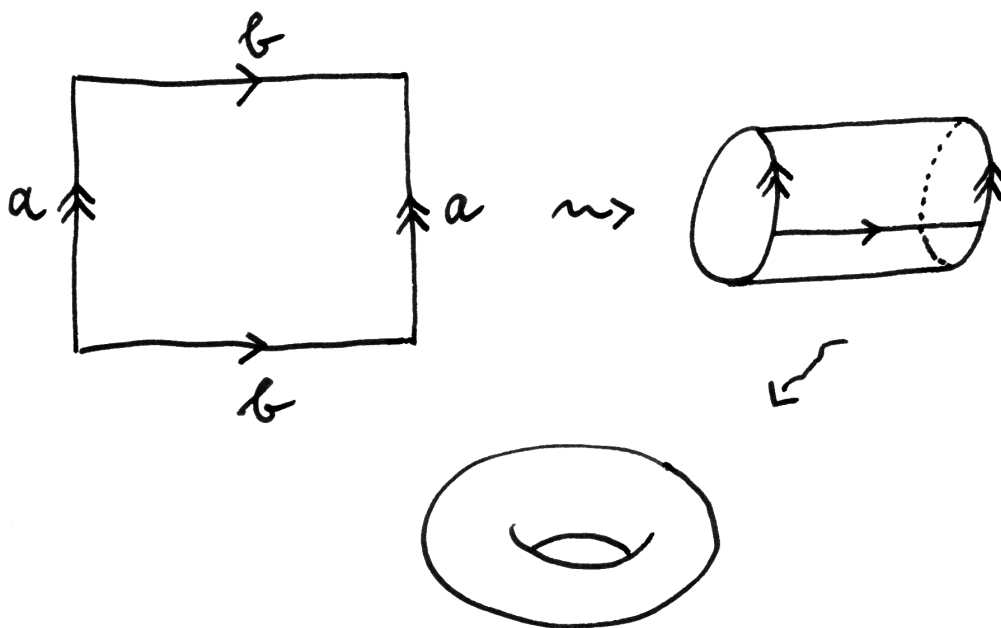
Definition 2.8.3. Eine kombinatorische Fläche \mathcal{Z} heiße ein **Vieleck**, wenn ihre topologische Realisierung $\Delta(\mathcal{Z})$ homöomorph ist zur abgeschlossenen Kreisscheibe $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Lemma 2.8.4. *Ist eine kombinatorische Fläche \mathcal{Z} ein Vieleck und $\varphi : D^2 \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{Z})$ ein Homöomorphismus, so ist das Bild der Kreislinie $\varphi(S^1)$ die Vereinigung der Randkanten von \mathcal{Z} im Sinne von 2.7.13.*

Beweis. Das Komplement von S^1 kann man in der Kreisscheibe D^2 charakterisieren als die Menge aller Punkte z , die eine zusammenziehbare Umgebung U besitzen derart, daß $U \setminus z$ nichttriviale Fundamentalgruppe hat. Das Komplement der Vereinigung der Randkanten in $\Delta(\mathcal{Z})$ kann man genauso charakterisieren. \square

Lemma 2.8.5. *Jede zusammenhängende kombinatorische Fläche besitzt eine Zerschneidung zu einem Vieleck.*

Beweis. Sei \mathcal{F} unsere kombinatorische Fläche. Sicher gibt es eine Zerschneidung von \mathcal{F} in eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Vielecke. Sei $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{F}$ eine solche Zerschneidung mit der kleinstmöglichen Zahl von Zusammenhangskomponenten. Nehmen wir einmal an, es gäbe hier mehr als eine Komponente. Dann könnten wir also 2-Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{F}_2$ finden, die von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von \mathcal{Z} herkommen. Da \mathcal{F} zusammenhängend ist, könnten wir σ, τ in \mathcal{F} durch eine Kette von 2-Simplizes $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r = \tau$ verbinden derart, daß gilt $\sigma_i \cap \sigma_{i+1} \neq \emptyset$. Aufgrund unserer Annahmen an eine kombinatorische Fläche können wir sogar annehmen, daß $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ jeweils ein 1-Simplex ist. Dann finden wir aber notwendig ein i derart, daß σ_i und σ_{i+1} von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von \mathcal{Z} herkommen. Verkleben wir nun diese beiden Zusammenhangskomponenten entlang der Randkante $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$, so erhalten wir eine Zerschneidung von \mathcal{F} in weniger Vielecke, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität. \square



Dieses Bild zeigt eine Zerschneidung des Schwimmrings alias Torus zu einem Viereck. In der demnächst eingeführten Terminologie wird es auch die Definition der Fläche $F(aba^{-1}b^{-1})$ anschaulich machen. Verkleben wir nur längs der b -Kanten, so entsteht eine Klopapierrolle. Verkleben weiter längs der a -Kanten, so entsteht ein Schwimmring alias Torus.

2.8.6. Seien \mathcal{F} eine geschlossene kombinatorische Fläche und $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{F}$ eine Zerschneidung zu einem Vieleck. Sicher werden unter φ die Randkanten von \mathcal{Z} paarweise identifiziert. Insbesondere ist also die Zahl der Randkanten unseres Vielecks gerade. Im folgenden führen wir eine Notation für mögliche Identifizierungsvorschriften der Randkanten eines Vielecks mit einer geraden Anzahl von Kanten ein.

Definition 2.8.7. Sei A eine endliche Menge, die wir in diesem Zusammenhang unser „Alphabet“ nennen, mit $|A| = r \geq 0$ Elementen, den „Buchstaben“. Ein **Flächenwort** im Alphabet A ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3, \dots, 2r\} &\rightarrow A \times \{1, -1\} \\ i &\mapsto (a(i), \varepsilon(i)) \end{aligned}$$

derart, daß jeder Buchstabe genau zweimal als ein $a(i)$ vorkommt.

2.8.8. Wir schreiben Flächenworte in der Form $a(1)^{\varepsilon(1)} \dots a(2r)^{\varepsilon(2r)}$ und nennen $2r$ die „Länge“ so eines Flächenworts. Beispiele für Flächenworte im Alphabet $A = \{a, b\}$ sind etwa die Ausdrücke $aabb^{-1}$ und $aba^{-1}b$.

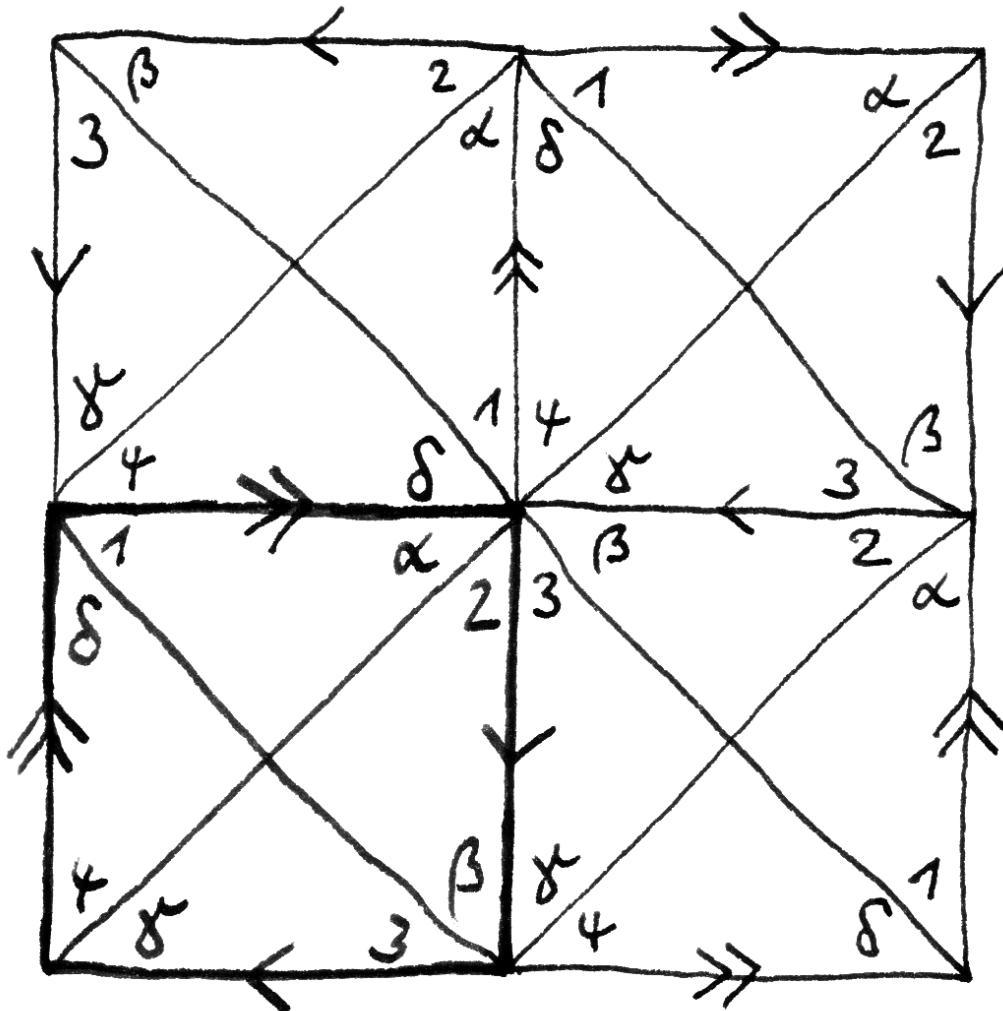
2.8.9. Gegeben ein Flächenwort w in $r \geq 2$ Buchstaben konstruieren wir einen topologischen Raum

$$F(w)$$

wie folgt: Wir betrachten ein regelmäßiges $2r$ -Eck, mit $2r$ der Länge unseres Flächenworts, und schreiben die Buchstaben unseres Flächenworts der Reihe nach an seine Kanten. Weiter versehen jede Kante mit einem Pfeil im Gegenuhrzeigersinn beziehungsweise im Uhrzeigersinn, je nachdem ob der Exponent ihres Buchstabens 1 beziehungsweise -1 ist. Dann verkleben wir jeweils die Kanten mit den gleichen Buchstaben so, daß die Spitzen der Pfeile identifiziert werden. Im Fall $r = 1$ erlauben wir dem 2-Eck krumme Kanten und erhalten so zum Beispiel $F(aa) \cong \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ und $F(aa^{-1}) \cong S^2$. Im Fall $r = 0$ setzen wir $F(\) = S^2$.

Lemma 2.8.10 (Fläche zu einem Flächenwort). *Der auf diese Weise zu einem Flächenwort w konstruierte topologische Raum $F(w)$ ist stets eine geschlossene Fläche.*

Beweis. Die größte Schwierigkeit scheint mir hierbei der Nachweis, daß auch die Bilder der Ecken unseres Vielecks im verklebten Raum $F(w)$ eine zu einer offenen Kreisscheibe homöomorphe offene Umgebung besitzen. Um das zu sehen, muß man sich überlegen, daß lokal um das Bild einer Ecke schlicht „mehrere Winkelsegmente zu einer Kreisscheibe verklebt werden“. Wir überlassen die Details dem Leser. \square



Dieses Bild soll die Definition der Fläche $F(aabb)$ anschaulich machen. Statt die zu jeweils zu verklebenden Randkanten mit denselben Buchstaben zu benennen, habe ich sie jeweils mit demselben Typ von Pfeilen, hier Doppelpfeilen beziehungsweise einfachen Pfeilen, gekennzeichnet. Verklebt wird eigentlich nur das fett eingezeichnete Viereck. Ich finde, man erkennt in der Mitte recht gut, wie das Verkleben eine Fläche liefert, in der alle vier Eckpunkte unseres Quadrats dasselbe Bild haben. Es ist jedoch nicht so leicht zu sehen, daß diese Fläche homöomorph ist zur Klein'schen Flasche. Um sich das zu überlegen, sollte man wohl am besten die Klein'sche Flasche zerschneiden: Einmal rund um den Flaschenhals, ein zweites Mal in Längsrichtung Flasche und Hals.

Satz 2.8.11 (Klassifikation der geschlossenen Flächen). *Jede zusammenhängende triangulierbare geschlossene Fläche ist homöomorph zur Fläche $F(w)$ für genau ein Flächenwort w aus der folgenden Liste:*

1. $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ mit $g \geq 0$;
2. $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$ mit $g \geq 1$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die „Ausschöpfung“, daß also jede zusammenhängende triangulierbare geschlossene Fläche homöomorph ist zu mindestens einer Fläche unserer Liste. Die „Minimalität“ unserer Liste, daß also keine zwei der gelisteten Flächen homöomorph sind, zeigen wir erst als letzten Punkt von Abschnitt 2.10. □

2.8.12. Dieser Satz präzisiert die in der Einleitung besprochene Klassifikation der geschlossenen Flächen 1.1.7. Wenn wir den Satz von Rado glauben, können wir hier sogar auf die Annahme der Triangulierbarkeit verzichten, da nach diesem Satz jede zusammenhängende geschlossene Fläche triangulierbar ist.

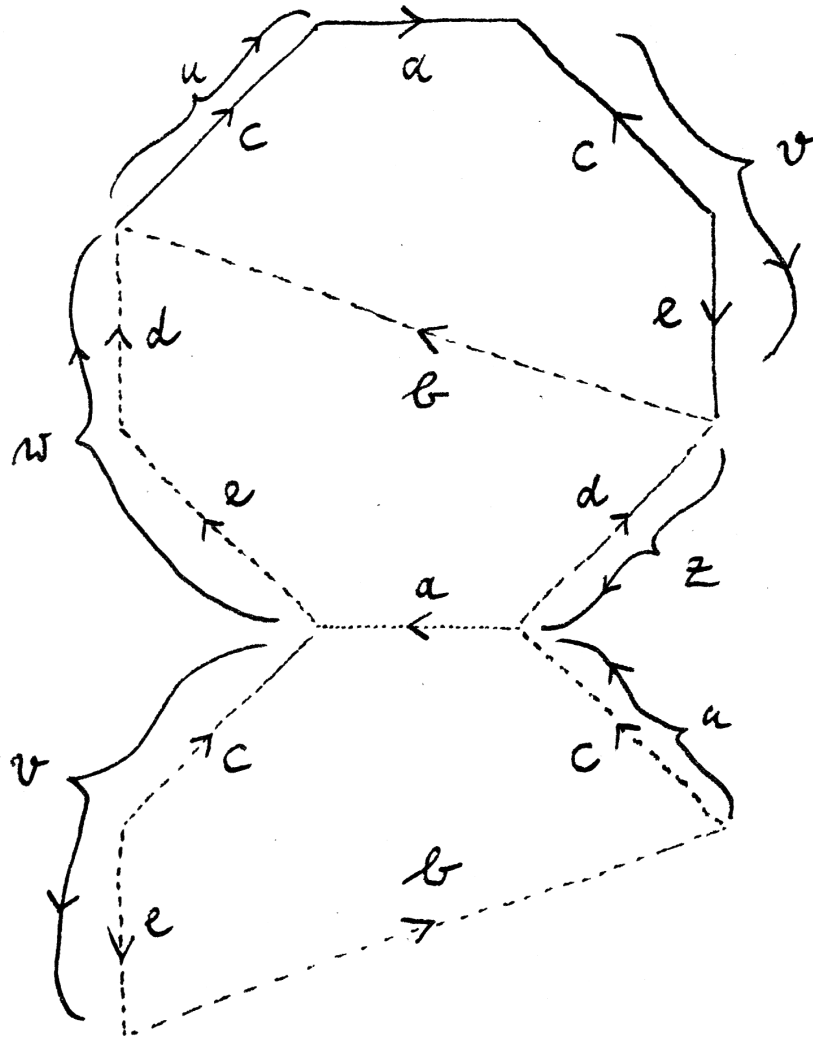
2.8.13. Zur Vorbereitung des Beweises listen wir zunächst einmal einige fundamentale Operationen auf der Menge aller Flächenwörter auf, die offensichtlich den Homöomorphietyp der zugehörigen Fläche nicht ändern. In den folgenden Formeln bedeuten a, b, c, d mit und ohne Hut stets Buchstaben unseres Alphabets A , dahingegen bedeuten u, v, w, z Abschnitte von Flächenwörtern.

1. „Zyklisches Vertauschen“ und „von hinten nach vorne Lesen“, in Formeln $F(vw) \cong F(wv)$ und $F(w) \cong F(w^{-1})$;
2. „Substituieren“ von a^{-1} für a , in Formeln $F(va^\varepsilon wa^\eta z) \cong F(va^{-\varepsilon} wa^{-\eta} z)$;
3. „Aufschneiden des Vielecks längs der Gerade zwischen zwei Ecken und Zusammenkleben längs einer äußeren Kante“ wie im nebenstehenden Bild dargestellt, in Formeln

$$\begin{aligned} F(uavza^{-1}w) &\cong F(uw\hat{a}^{-1}zv\hat{a}) \\ F(uavzaw) &\cong F(uz^{-1}\hat{a}w^{-1}v\hat{a}) \end{aligned}$$

Bei der Notation versuche ich, das Nachvollziehbarkeit zu erleichtern, in dem ich dem neu entstehenden Kantenpaar denselben Buchstaben gebe wie der durch Verkleben verschwundenen Kante, ihn aber mit einem Hut versehen. Bei der Richtung der neu entstehenden Kanten lege ich mich fest.

4. „Kürzen“, in Formeln $F(uava^{-1}) \cong F(uv)$ unter der Annahme, daß die beiden Enden der a -Kanten verschiedene Bilder in der verklebten Fläche



Dieses Bild soll die zweite Regel $F(uavzaw) \cong F(uz^{-1}bw^{-1}vb)$ zum Aufschneiden und Verkleben anschaulich machen. Kleben wir das darin enthaltene achteckige „Stoppschild“ zu einer Fläche zusammen, so entsteht dieselbe Fläche wie beim Zusammenkleben des mit gestricheltem Rand gezeichneten „Schmetterlings“. Hierbei könnten wir etwa konkret an ein Flächenwort in vier Buchstaben a, c, d, e denken und etwa $u = c, v = c^{-1}e, z = d^{-1}$ und $w = ed$ setzen, dieser Fall ist als Beispiel eingezeichnet.

haben. Sind hier u oder v leer, so haben die Enden der a -Kanten automatisch verschiedene Bilder und die Formel scheint mir offensichtlich. Sind u und v nicht leer, so betrachten wir in unserem Vieleck das Viereck mit den beiden a -Kanten als gegenüberliegenden Seiten. Sein Bild in der verklebten Fläche ist ein Zylinder, den wir zu einer Kreislinie identifizieren können, ohne den Homöomorphietyp der verklebten Fläche zu ändern.

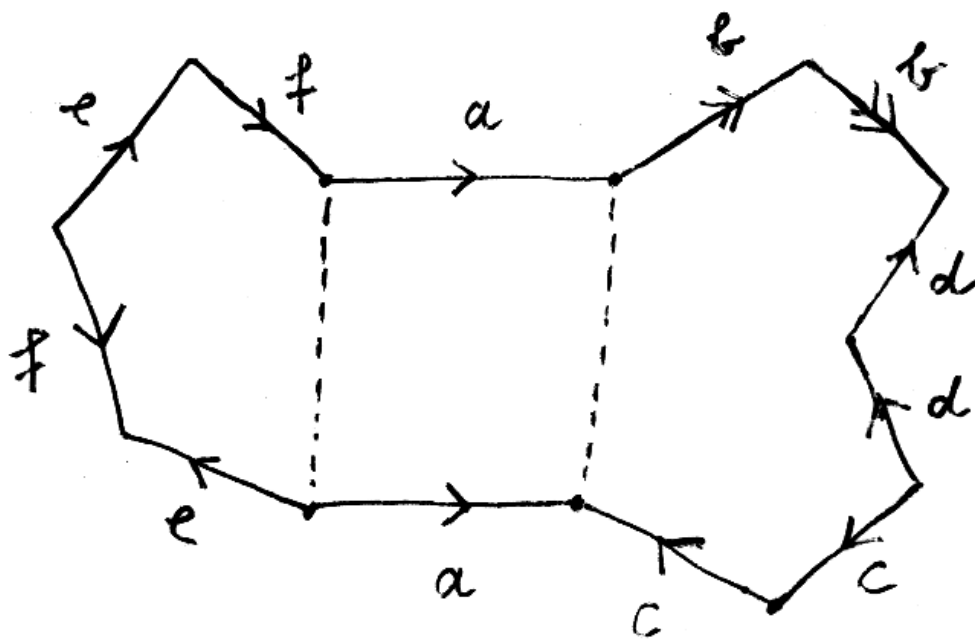
2.8.14. Zu jedem Flächenwort w erklären wir seine **Eckenzahl** als die Zahl der Punkte in der zugehörigen Fläche $F(w)$, die Bilder von Ecken unseres Vielecks sind. Kombinatorisch betrachtet man auf der Menge der Ecken die kleinste Äquivalenzrelation, unter der je zwei Ecken mit einer Ausgangskante zum selben Buchstaben oder einer Eingangskante zum selben Buchstaben äquivalent sind, und kann dann die Eckenzahl verstehen als die Kardinalität der Äquivalenzklassen. Die Eckenzahl des leeren Worts sei Eins.

Lemma 2.8.15 (Eckenreduktion). *Für jedes vorgegebene Flächenwort w gibt es ein Flächenwort v mit Eckenzahl Eins und $F(w) \cong F(v)$.*

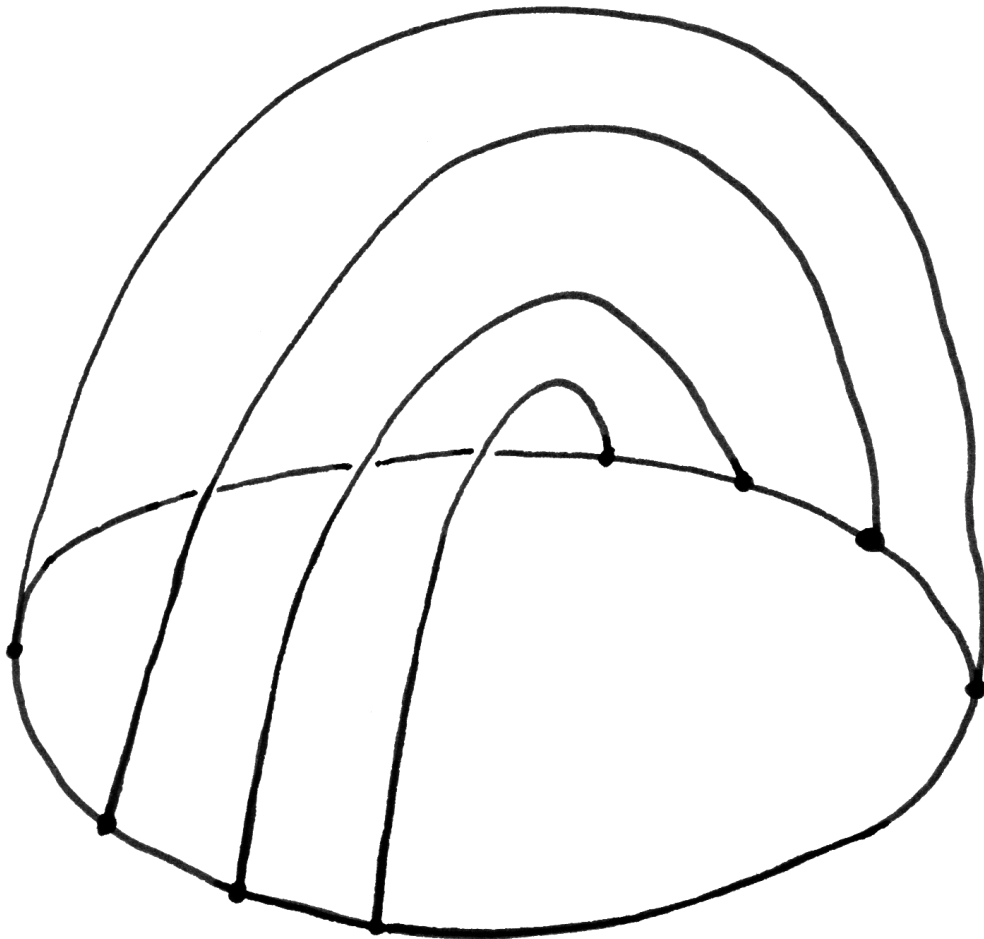
Beweis. Sei w ein Flächenwort mit Eckenzahl ≥ 2 und mehr als einem Buchstaben. Wir wählen einen Punkt P in $F(w)$, der das Bild einer Ecke unseres Vielecks ist, und nennen diejenigen Ecken unseres Vielecks „gut“, die nach P gehen. Die übrigen Ecken nennen wir „schlecht“ und geben ein Verfahren an, das entweder die Zahl der Ecken überhaupt oder die Zahl der schlechten Ecken unseres Eckenworts verringert, ohne die zugehörige Fläche zu ändern. Sei in der Tat a eine Kante von einer guten Ecke zu einer schlechten Ecke. Zwei Fälle sind möglich:

1. Die beiden a -Kanten unseres Vielecks erscheinen mit demselben Exponenten. In diesem Fall können sich nach unserer Annahme die a -Kanten nicht berühren. Wir schneiden dann zwischen den guten Enden der a -Kanten auf und verkleben längs der a -Kanten. So verringert sich die Zahl der schlechten Ecken um Eins.
2. Die beiden a -Kanten unseres Vielecks erscheinen mit verschiedenen Exponenten. In diesem Fall können wir sie kürzen und so die Eckenzahl um Eins verringern. Das zeigt das Lemma. □

Beweis des Klassifikationssatzes 2.8.11, Ausschöpfung. Nach der Eckenreduktion 2.8.15 ist jede triangulierbare Fläche homöomorph zu einer Fläche $F(w)$ für ein Flächenwort w mit Eckenzahl 1. Wir bemerken für das folgende, daß sich die Eckenzahl beim Aufschneiden und Verkleben nicht ändert. Wir können uns also im Weiteren auf Worte der Eckenzahl 1 beschränken und werden von nun an nur noch solche Worte betrachten. Man beachte nun als Spezialfälle des Aufschneidens und Verklebens die beiden folgenden Regeln:



Dieses Bild soll die vierte Regel zum „Kürzen“ anschaulich machen.



Man erhält eine stetige Abbildung des Möbiusbands nach $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mittels der Formel $(t, \tau) \mapsto (\tau e^{\pi i t}, \sqrt{1 - \tau^2} \cos^2 \pi t)$. Anschaulich gesprochen verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte des Einheitskreises durch einen Bogen mit variierender mittlerer Höhe. Das Bild ist eine sich selbst durchdringende räumliche Fläche, bei der man sich die Selbstdurchdringung leicht wegdenken kann. Man nennt sie auch die **Kreuzhaube**. In dieser Anschauung für das Möbiusband bezahlt man in gewisser Weise mit der Selbstdurchdringung für die gute Sichtbarkeit des Randkreises.

Kreuzhaubennormierung: Man findet $F(ubvbw) \cong F(uv^{-1}\hat{b}\hat{b}w)$ durch Aufschneiden zwischen den Enden von b und Verkleben längs b . Die Bezeichnung rührt daher, daß wir wie auf Seite 82 erklärt ein Möbiusband auch als eine sogenannte Kreuzhaube realisieren können.

Henkelnormierung: Man findet $F(uavbwa^{-1}zb^{-1}x) \cong F(u\hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}zwx)$. In der Tat, Aufschneiden zwischen den Enden von a und Verkleben längs b liefert $u\hat{b}^{-1}zwa^{-1}\hat{b}avx$. Nochmaliges Aufschneiden zwischen den Anfangspunkten der Kanten \hat{b} und Verkleben längs a liefert das gewünschte Ergebnis.

Unter Verwendung der ersten Regel normieren wir zunächst Kreuzhauben, bis wir ein Wort erreicht haben, bei dem jeder Buchstabe entweder als normierte Kreuzhaube aa beziehungsweise $a^{-1}a^{-1}$ oder in der Form $\dots a \dots a^{-1} \dots$ vorkommt. Im letzteren Fall finden wir ein b derart, daß unser Wort feiner sogar die Form

$$\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$$

hat, denn sonst müßten alle Buchstaben entweder doppelt oder gar nicht zwischen a und a^{-1} vorkommen, und dann hätten Anfangs- und Endpunkt der a -Kanten verschiedene Bilder in der Fläche, im Widerspruch zu unserer Annahme der Eckenzahl 1. Mit sukzessiven Henkelnormierungen landen wir also bei einem Wort, das eine Verkettung von Kreuzhauben cc und Henkeln $aba^{-1}b^{-1}$ ist. Henkelnormierung rückwärts und dann mehrfaches Anwenden der Kreuzhaubennormierung liefert aber auch die sogenannte **Henkelelimination**, in Formeln und unter mehrfacher Verwendung der Aufschneidesymbole \hat{a}, \hat{b} für unterschiedliche Kanten

$$\begin{aligned} F(u\hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}ccx) &\cong F(uabca^{-1}cb^{-1}x) \\ &\cong F(uaba\hat{c}\hat{c}b^{-1}x) \\ &\cong F(ub^{-1}\hat{a}\hat{a}\hat{c}\hat{c}b^{-1}x) \\ &\cong F(u(\hat{a}\hat{a}\hat{c}\hat{c})^{-1}\hat{b}\hat{b}x) \end{aligned}$$

Folglich liefert jede Verkettung von Kreuzhauben und Henkeln, in der mindestens eine Kreuzhaube auftritt, dieselbe Fläche wie ein reines Produkt von Kreuzhauben. Damit ist gezeigt, daß jede triangulierbare Fläche homöomorph ist zu mindestens einer Fläche, die durch ein Flächenwort aus unserer Liste beschrieben wird. Wir zeigen in 2.10, daß diese Flächen paarweise nichtisomorphe Fundamentalgruppen haben. Daraus folgt, daß sie paarweise nicht homöomorph sind, und das beendet dann den Beweis des Klassifikationssatzes. \square

2.9 Gruppen durch Erzeugende und Relationen

2.9.1. Ist G eine Gruppe und $T \subset G$ eine Teilmenge, so hatten wir in [LA1] 4.3.5 den Schnitt über alle Untergruppen von G , die T umfassen, die „von T erzeugte

Untergruppe“ genannt und mit $\langle T \rangle$ bezeichnet.

Definition 2.9.2. Seien G eine Gruppe und $T \subset G$ eine Teilmenge. Der Schnitt über alle Normalteiler von G , die T umfassen, heißt der **von T in G erzeugte Normalteiler** $\langle\langle T \rangle\rangle_G = \langle\langle T \rangle\rangle$. Er kann auch beschrieben werden als die Untergruppe $\langle\langle T \rangle\rangle = \langle gtg^{-1} \mid g \in G, t \in T \rangle$, die von der Elementen $t \in T$ und allen ihren Konjugierten erzeugt wird.

2.9.3 (**Schwierigkeiten der Terminologie**). Hier treffen wir auf die semantische Schwierigkeit, daß „der von T erzeugte Normalteiler“ ja auch bedeuten könnte, daß wir die von T erzeugte Untergruppe nehmen und daß diese zusätzlich ein Normalteiler ist. In Formelsprache sollte jedoch klar werden, was jeweils gemeint ist.

Lemma 2.9.4. Seien $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $T \subset G$ eine Teilmenge mit $\varphi(T) \subset \{e\}$. So gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : G/\langle\langle T \rangle\rangle \rightarrow G'$ mit $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/\langle\langle T \rangle\rangle \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G' \end{array}$$

Beweis. Nach Annahme gilt $T \subset \ker \varphi$. Da $\ker \varphi$ stets ein Normalteiler ist, folgt $\langle\langle T \rangle\rangle \subset \ker \varphi$. Jetzt folgt die Aussage aus der universellen Eigenschaft der Restklassengruppe [LA2] 4.2.1. \square

Definition 2.9.5. Sei X eine Menge und $R \subset \text{Grp}^{\setminus} X$ eine Teilmenge der freien Gruppe über X . Der Quotient $\text{Grp}^{\setminus} X/\langle\langle R \rangle\rangle$ der freien Gruppe über X nach dem von R erzeugten Normalteiler heißt die **von der Menge X mit den Relationen R erzeugte Gruppe**. Meist werden die Relationen in der Form $a_i = b_i$ mit Wörtern $a_i, b_i \in \text{Mon}^{\setminus} X$ angegeben. Gemeint ist dann $R = \{[a_i][b_i]^{-1}\}$.

Beispiel 2.9.6. Die von zwei Elementen x und y mit der Relation $xy = yx$ erzeugte Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2.9.7. Die Darstellung einer Gruppe durch Erzeugende und Relationen ist nicht „effektiv“ : Es gibt nachweislich keinen Algorithmus, der bestimmt, ob so eine Gruppe trivial ist, also nur aus einem Element besteht.

Übungen

Übung 2.9.8. Sei eine Menge X die Vereinigung zweier Teilmengen $X = X_1 \cup X_2$ mit Schnitt $X_0 = X_1 \cap X_2$. Seien $R_i \subset \text{Grp}^{\setminus} X_i$ Relationen, $i = 0, 1, 2$. Gilt

zusätzlich $R_0 \subset \langle\langle R_i \rangle\rangle$ für $i = 1, 2$, so ist das folgende Diagramm ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc} \text{Grp} \wedge X_0 / \langle\langle R_0 \rangle\rangle & \rightarrow & \text{Grp} \wedge X_1 / \langle\langle R_1 \rangle\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grp} \wedge X_2 / \langle\langle R_2 \rangle\rangle & \rightarrow & \text{Grp} \wedge X / \langle\langle R_1 \cup R_2 \rangle\rangle \end{array}$$

Übung 2.9.9. Die symmetrische Gruppe \mathcal{S}_n kann beschrieben werden als die Gruppe mit Erzeugern s_1, \dots, s_{n-1} und den Relationen $s_i^2 = 1$, $s_i s_j = s_j s_i$ für $|i - j| > 1$, $(s_i s_{i+1})^3 = 1$. Die Tetraedergruppe alias die alternierende Gruppe A_4 kann beschrieben werden als die Gruppe erzeugt von zwei Elementen s, t mit Relationen $s^2 = t^3 = (st)^3 = 1$. Die Ikosaedergruppe alias die die alternierende Gruppe A_5 kann beschrieben werden als die Gruppe erzeugt von zwei Elementen u, v mit Relationen $u^2 = v^3 = (uv)^5 = 1$.

Übung 2.9.10. Die Abelisierung der freien Gruppe über einer Menge ist kanonisch isomorph zur freien abelschen Gruppe über besagter Menge.

2.10 Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

Satz 2.10.1 (Fundamentalgruppen geschlossener Flächen). *Gegeben ein Flächenwort w im Alphabet A mit Eckenzahl Eins wird die Fundamentalgruppe der zugehörigen Fläche $F(w)$ erzeugt von der Menge A mit dem Flächenwort w als einziger Relation. Bezeichnet genauer $*$ $\in F(w)$ das Bild der Ecken unseres Vielecks, so erhalten wir einen Isomorphismus*

$$(\text{Grp} \wedge A) / \langle\langle w \rangle\rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(F(w), *)$$

dadurch, daß wir jedem Buchstaben das Bild der entsprechenden Kante mit der durch den Exponenten unseres Buchstabens gegebenen Durchlaufrichtung zuordnen.

Beweis. Sei $v : Z \rightarrow F$ die Verklebung unseres Vielecks $Z \subset \mathbb{R}^2$ zur Fläche $F = F(w)$. Das Bild $v(\partial Z)$ vom Rand unseres Vielecks in unserer Fläche F besteht aus $|A|$ Kreislinien, die alle in einem Punkt zusammengeklebt sind. Solch einen Raum nennt man ein **Bouquet von Kreislinien**. Bezeichne nun Z° das Innere unseres Vielecks und sei $z \in Z^\circ$ sein Mittelpunkt. Unter der Verklebung v geht Z° homöomorph auf eine offene Teilmenge unserer Fläche $z : Z^\circ \xrightarrow{\sim} v(Z^\circ) \subseteq F$. Wir wenden den Satz von Seifert und van Kampen 2.4.1 an auf die offene Überdeckung

$$F = (F \setminus z) \cup v(Z^\circ)$$

unserer Fläche. Nehmen wir einen Punkt $e \in Z^\circ$, der auf dem offenen Geraden-segment von z zur „Ausgangsecke q unseres Flächenworts w “ liegt, und setzen

$\bar{e} := v(e)$, so liefert Seifert-van-Kampen 2.4.1 ein kokartesisches Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z^\circ \setminus z, e) & \rightarrow & \pi_1(Z^\circ, e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(F \setminus z, \bar{e}) & \rightarrow & \pi_1(F, \bar{e}) \end{array}$$

Nun verwenden wir den Weg, der radial von e nach q läuft, und noch genauer sein Bild in F , um die Fundamentalgruppen in der unteren Zeile mit den entsprechenden Fundamentalgruppen zum Basispunkt $*$ zu identifizieren. Weiter zeigt das „radial nach außen schieben“ von Punkten aus $Z \setminus z$, daß die Einbettung unseres Bouquets von Kreislinien $p(\partial Z) \hookrightarrow F \setminus z$ eine Homotopieäquivalenz ist und folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen zum Basispunkt $*$ induziert. Die Fundamentalgruppe solch eines Bouquets haben Sie bereits in 2.5.17 mit der freien Gruppe über A identifiziert. Nun muß man sich überzeugen, daß unter den beschriebenen Identifikationen

$$\pi_1(F \setminus z, \bar{e}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(F \setminus z, *) \xleftarrow{\sim} \pi_1(p(\partial Z), *) \xleftarrow{\sim} \text{Grp}^\wedge A$$

das Bild eines der beiden Erzeuger von $\pi_1(Z^\circ \setminus z, e)$ gerade auf das Wort w geht, aufgefaßt als Element der freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge A$. So ergibt sich ein kokartesisches Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grp}^\wedge A & \rightarrow & \pi_1(F, *) \end{array}$$

Die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Grp}^\wedge A$ bildet darin die $1 \in \mathbb{Z}$ gerade auf das Flächenwort w unserer Fläche in $\text{Grp}^\wedge A$ ab und die untere Horizontale unseres Diagramms induziert mithin den gesuchten Isomorphismus $(\text{Grp}^\wedge A) / \langle\langle w \rangle\rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(F, *)$, vergleiche Übung 2.10.3. \square

Beweis des Klassifikationssatzes 2.8.11, Minimalität. Sicher wird jedes kokartesische Diagramm in der Kategorie der Gruppen unter der Abelsonierung 1.8.1 ein kokartesisches Diagramm in der Kategorie der abelschen Gruppen und die Abelsonierung einer freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge A$ ist die freie abelsche Gruppe $\text{Ab}^\wedge A = \mathbb{Z}A$ aller endlichen formalen Linearkombinationen von Elementen von A mit ganzzahligen Koeffizienten. Für den maximalen kommutativen Quotienten π_1^{ab} der Fundamentalgruppe einer der Flächen unserer in 2.8.11 angegebenen Liste erhalten wir damit $\pi_1^{\text{ab}}(F(w)) = \mathbb{Z}A \cong \mathbb{Z}^{2g}$ im Fall von g Henkeln und

$$\pi_1^{\text{ab}}(F(w)) = \mathbb{Z}A / 2\mathbb{Z}(c_1 + \dots + c_g) \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{g-1}$$

im Fall von g Kreuzhauben. Da diese Gruppen paarweise nicht isomorph sind, nach [LA2] 4.4.4 oder auch elementar durch Zählen der Elemente endlicher Ordnung und Berechnung der Dimensionen der Vektorräume aller Gruppenhomomorphismen nach \mathbb{Q} , sind auch die zugehörigen Flächen paarweise nicht homöomorph. Das beendet den Beweis des Klassifikationssatzes. \square

Übungen

Übung 2.10.2. Gegeben X eine zusammenhängende geschlossene Fläche vom Geschlecht g und $E \subset X$ eine endliche nichtleere Teilmenge ist $\pi_1(X \setminus E, *)$ frei in $2g + |E| - 1$ Erzeugern.

Übung 2.10.3. Gegeben eine Gruppe H und ein Element $w \in H$ ist das Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \rightarrow & H/\langle\langle w \rangle\rangle \end{array}$$

mit $1 \mapsto w$ in der linken Vertikale stets kokartesisch.

3 Überlagerungstheorie

3.1 Überlagerungen

Definition 3.1.1. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{U} \rightarrow U$ heißt eine **triviale Überlagerung**, wenn U nicht leer ist und es einen diskreten Raum D mitsamt einem Homöomorphismus $\tau : D \times U \xrightarrow{\sim} \tilde{U}$ gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D \times U & \xrightarrow{\sim} & \tilde{U} \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

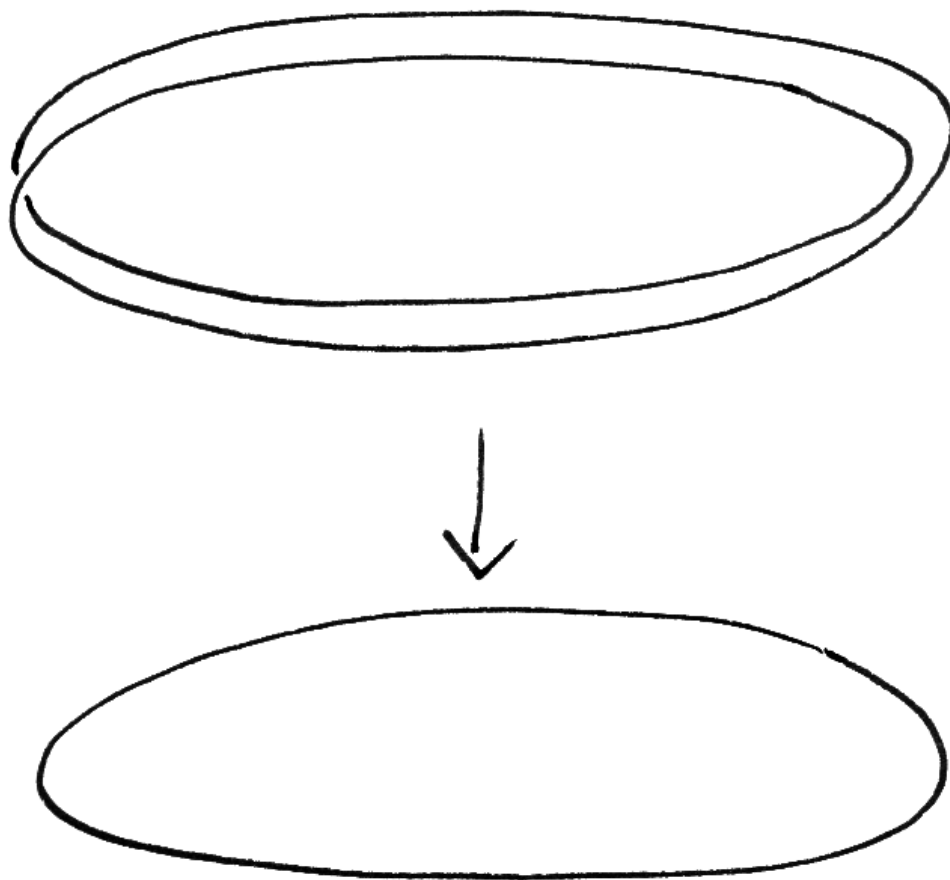
kommutiert. Solch ein Homöomorphismus heißt dann eine **Trivialisierung** unserer trivialen Überlagerung.

Definition 3.1.2. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ heißt eine **Überlagerung**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß die induzierte Abbildung $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$ eine triviale Überlagerung ist. Wir nennen U dann eine **trivial überlagerte Umgebung von x** . Der Definitionsbereich \tilde{X} von p heißt der **Totalraum** unserer Überlagerung, der Wertebereich X ihre **Basis**.

3.1.3. Ich erinnere daran, daß gegeben eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und ein Punkt $y \in Y$ sein Urbild $f^{-1}(y)$ die **Faser von f über y** heißt.

3.1.4 (**Diskussion der Terminologie**). Wir fordern nicht, daß eine Überlagerung surjektiv sein muß. Insbesondere ist für uns $\emptyset \rightarrow X$ stets eine Überlagerung. Wir fordern auch nicht, daß die Fasern einer Überlagerung konstante Kardinalität haben müssen. Eine Überlagerung mit dieser Eigenschaft nennen wir eine **Faserung mit diskreter Faser**. In der Funktionentheorie arbeitet man oft mit einem etwas allgemeineren Überlagerungsbegriff, in dem etwa die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$ noch als eine „im Ursprung verzweigte Überlagerung“ durchgehen würde. Die Überlagerungen im Sinne der obigen Definition heißen in der in der Funktionentheorie üblichen Terminologie **unverzweigte Überlagerungen**.

Beispiele 3.1.5. Die Abbildung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi it) = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$ aus dem Beweis von 1.3.1, die die Zahlengerade auf den Einheitskreis aufwickelt, ist eine Überlagerung. Ebenso sind $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ und die Projektion $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ Überlagerungen und für jeden diskreten Raum F ist die Projektion $\text{pr}_2 : F \times X \rightarrow X$ eine Überlagerung. Als weiteres Beispiel betrachte man $\text{Exp} \times \text{Exp} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$. Sind allgemeiner $f : \tilde{X} \rightarrow X$ und $g : \tilde{Y} \rightarrow Y$ Überlagerungen, so auch $f \times g : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$.



Eine zweifache Überlagerung der Kreislinie.

3.1.6 (Lokalkonstanz der Faserkardinalität). Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, so ist die Kardinalität der Fasern $p^{-1}(x)$ konstant auf den Zusammenhangskomponenten von X . Genauer sind für jede Menge E die Mengen $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |E|\}$ beziehungsweise $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| \neq |E|\}$ aller Punkte $x \in X$, deren Fasern $p^{-1}(x)$ dieselbe beziehungsweise nicht dieselbe Kardinalität wie E haben, offen in X , da sie mit jedem Punkt auch jede trivial überlagerte Umgebung des besagten Punktes umfassen. Ist X zusammenhängend, so nennt man die Zahl der Elemente einer und gleichbedeutend jeder Faser die **Blätterzahl** der Überlagerung.

Lemma 3.1.7 (Komponenten von Überlagerungen). Die Einschränkung einer Überlagerung eines lokal zusammenhängenden Raums auf eine Zusammenhangskomponente ihres Totalraums ist auch selbst wieder eine Überlagerung.

Beispiel 3.1.8. Die Menge \mathbb{Q} mit ihrer von \mathbb{R} induzierten Topologie ist nicht lokal zusammenhängend und für die Überlagerung $\text{id} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sind die Einschränkungen auf Zusammenhangskomponenten von \mathbb{Q} alias Punkte keine Überlagerungen mehr. Ein Beispiel mit zusammenhängender Basis ist $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_p \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}$ für p prim und \mathbb{Z}_p die sogenannten „ p -adischen Zahlen“ und die diagonale \mathbb{Z} -Operation.

Vorschau 3.1.9. Es wird sich im folgenden mehr und mehr erweisen, daß die Überlagerungstheorie eigentlich eine Theorie der Überlagerungen lokal zusammenhängender Räume ist. Ich erinnere daran, daß ein lokal zusammenhängender Raum in unserer Terminologie ein Raum ist, bei dem sich jede Umgebung eines jeden Punktes zu einer zusammenhängenden Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt.

Beweis. Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ unsere Überlagerung und $Z \subset \tilde{X}$ eine Zusammenhangskomponente. Gegeben $z \in Z$ finden wir eine trivial überlagerte zusammenhängende Umgebung $U \subset X$ von $p(z)$. Gegeben eine Trivialisierung $\tau : D \times U \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ unserer Überlagerung über U sind die $\tau(\{d\} \times U)$ für $d \in D$ zusammenhängend. Jede dieser Mengen ist damit entweder enthalten in Z oder disjunkt zu Z . Das zeigt, daß auch $Z \rightarrow X$ eine Überlagerung ist. \square

Definition 3.1.10. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **étale**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt derart, daß die Restriktion $f : U \rightarrow Y$ eine offene Einbettung ist.

3.1.11. Das Wort „étale“ kommt aus dem Französischen und bedeutet „ausgebreitet“. Jede étale Abbildung ist offen, jede surjektive étale Abbildung ist nach [TM] 1.7.16 also final.

3.1.12. Ich erinnere daran, daß in unserer Terminologie eine Einbettung eine stetige Abbildung ist, die einen Homöomorphismus mit ihrem Bild induziert. Weiter

heißt eine Abbildung offen, wenn sie offene Mengen zu offenen Mengen macht. Für Einbettungen ist letztere Bedingung gleichbedeutend dazu, offenes Bild zu haben.

Beispiele 3.1.13. Jede Überlagerungsabbildung ist étale. Die Projektion unserer Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt $\mathbb{R} \sqcup \{\tilde{0}\}$ aus [TM] 1.4.8 auf die Gerade \mathbb{R} ist étale. Jede Einbettung einer offenen Teilmenge ist étale. Jede Verknüpfung étaler Abbildungen ist étale. Eine Abbildung auf einen Punkt ist genau dann étale, wenn sie von einem Raum mit diskreter Topologie ausgeht.

Lemma 3.1.14. *Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen und sind g und gf étale, so ist auch f étale.*

Beweis. Sei $x \in X$ gegeben. Nach Annahme besitzt $f(x)$ eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ derart, daß $g : V \rightarrow Z$ eine offene Einbettung ist. Nach Annahme besitzt x eine offene Umgebung $U \subseteq X$ derart, daß $gf : U \rightarrow Z$ eine offene Einbettung ist. Indem wir andernfalls U ersetzen durch $U \cap f^{-1}(V)$ dürfen wir $f(U) \subset V$ annehmen. Für die von f und g induzierten Abbildungen $U \rightarrow V \rightarrow Z$ sind damit sowohl $gf : U \rightarrow Z$ als auch $g : V \rightarrow Z$ offene Einbettungen. Dann aber ist notwendig $f : U \rightarrow V$ initial mit offenem Bild $f(U) = g^{-1}((gf)(U))$ alias eine offene Einbettung und damit auch $f : U \rightarrow Y$. \square

Definition 3.1.15. Wir nennen einen Raum **überlagerungstrivial**, wenn jede Überlagerung unseres Raums **trivial** ist.

3.1.16. Jeder überlagerungstriviale Raum ist zusammenhängend, da eine disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen stets nichttriviale Überlagerungen besitzt. Der leere Raum ist nicht überlagerungstrivial, da Überlagerungen der leeren Menge in unserer Terminologie keine trivialen Überlagerungen sind.

Beispiel 3.1.17 (Das Einheitsintervall ist überlagerungstrivial). Ist in der Tat $p : \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$ eine Überlagerung, so finden wir mit dem Überdeckungssatz von Lebesgue Punkte $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = 1$ derart, daß $[a_{i-1}, a_i]$ jeweils trivial überlagert ist. Wir finden also Trivialisierungen

$$\tau_i : [a_{i-1}, a_i] \times D_i \xrightarrow{\sim} p^{-1}([a_{i-1}, a_i])$$

Diese induzieren für $2 \leq i \leq r$ Bijektionen $D_i \xrightarrow{\sim} p^{-1}(a_{i-1}) \xrightarrow{\sim} D_{i-1}$, die wir verwenden können, um alle D_i so mit einer festen Menge D zu identifizieren, daß unsere Trivialisierungen zu einer Bijektion

$$\tau : [0, 1] \times D \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$$

verkleben. Diese ist stetig, da sie aus endlich vielen stetigen Abbildungen auf abgeschlossenen Teilmengen zusammengeklebt ist. Sie ist offen und sogar étale nach Lemma 3.1.14 und folglich ein Homöomorphismus alias eine Trivialisierung unserer Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow [0, 1]$.

Vorschau 3.1.18. In 5.3.2 zeigen wir, daß das Produkt zweier überlagerungstrivialer Räume wieder überlagerungstrivial sein muß, falls einer der Faktoren zusätzlich lokal zusammenhängend ist.

3.1.19. Wir nennen einen topologischen Raum **wegetrivial**, wenn er zusammenhängend, schleifenfüllend und lokal wegzusammenhängend ist.

Satz 3.1.20 (Wegetrivial impliziert überlagerungstrivial). *Jeder wegetriviale Raum ist überlagerungstrivial.*

Beispiel 3.1.21. Insbesondere ist jede zusammenhängende schleifenfüllende offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene überlagerungstrivial. Diese Erkenntnis wird in der Funktionentheorie meist implizit verwendet und in den jeweils benötigten Spezialfällen separat bewiesen.

Beispiel 3.1.22. Ersetzen wir im Rand des Quadrats $[-1, 1] \times [0, 2]$ das Stück $(0, \pi^{-1}]$ durch ein Stück der Sinuskurve des Topologen [TM] 1.3.23, genauer durch den Graphen von $(0, \pi^{-1}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(1/x)$, so erhalten wir einen schleifenfüllenden zusammenhängenden Raum, der nicht überlagerungstrivial ist. Er ist aber nicht lokal wegzusammenhängend, deshalb liefert er kein Gegenbeispiel zu unserem Satz.

Beweis. Sei X unser Raum. Wäre X nicht überlagerungstrivial, so hätte X eine nichttriviale Überlagerung. Deren Zusammenhangskomponenten wären nach 3.1.7, da unser Raum lokal zusammenhängend ist, auch Überlagerungen und insbesondere offene Teilmengen und wären nach [TM] 1.3.15 sogar wegzusammenhängend. Mindestens eine von ihnen müßte eine nichttriviale Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ sein, sonst wäre unsere Überlagerung ja trivial. Es gäbe also $x \in X$ und zwei verschiedene Punkte $\tilde{x}_0 \neq \tilde{x}_1$ der Faser über x und einen Weg $\tilde{\gamma}$ von \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 . Der geschlossene Weg $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ in X kann dann nicht zusammenziehbar alias nullhomotop sein, da man nach Übung 3.1.23 den Lift $\tilde{\gamma}$ von γ zu einem Lift der ganzen Homotopie erweitern könnte und da dieser Lift konstant sein müßte auf drei Kanten des Quadrats $[0, 1]^2$, womit $\tilde{\gamma}$ doch geschlossen wäre. \square

Übungen

Übung 3.1.23. Das Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ ist überlagerungstrivial.

Übung 3.1.24 (**Pullback von étalen Abbildungen**). Ist $\tilde{X} \rightarrow X$ étale und $Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist auch der pullback $\tilde{X} \times_X Y \rightarrow Y$ étale.

Übung 3.1.25 (**Pullback von Überlagerungen**). Ist $\tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist auch der pullback $\tilde{X} \times_X Y \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Das wird in 3.4.13 für die Existenz von Lifts gebraucht.

Übung 3.1.26. Sind $\tilde{X} \rightarrow X$ und $\hat{X} \rightarrow X$ Überlagerungen, so auch ihr Faserprodukt $\tilde{X} \times_X \hat{X} \rightarrow X$. Des weiteren hat die Diagonale $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \times_X \hat{X}$ abgeschlossenes Bild alias jede Überlagerung ist separiert im Sinne von [TM] 2.4.9. Das brauchen wir beim Beweis von 3.4.10.

Übung 3.1.27. Sind $p : X \rightarrow Y$ und $q : Y \rightarrow Z$ Überlagerungen und besitzt jeder Punkt $z \in Z$ eine überlagerungstriviale Umgebung, so ist auch $q \circ p$ eine Überlagerung.

Ergänzung 3.1.28. Dasselbe kann man für beliebiges Z zeigen, wenn die Fasern von q endlich sind, aber diese Variante ist für uns im folgenden nebensächlich.

Ergänzende Übung 3.1.29. Jede étale Abbildung von einem kompakten Hausdorffraum in einen Hausdorffraum ist eine Überlagerung. Besonders Mutige zeigen: Eine eigentliche separierte étale Abbildung ist dasselbe wie eine Überlagerung mit endlichen Fasern.

Ergänzende Übung 3.1.30. Gegeben $f : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung mit endlichen Fasern und $X = U \sqcup V$ eine Zerlegung von X in zwei offene Teilmengen sind auch die Restriktionen von f auf U und V Überlagerungen.

3.2 Kategorien von Mengen mit Operation

3.2.1. Wir gehen nun davon aus, daß der Leser mit den grundlegenden Begriffsbildungen zu Operationen von Gruppen und allgemeiner von Monoiden vertraut ist, wie sie zum Beispiel in [LA2] 5.1.1 entwickelt werden.

Definition 3.2.2. Sei G ein Monoid. Eine Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ von einer G -Menge X in eine G -Menge Y heißt ein **G -Morphismus** oder auch **G -äquivariant**, wenn gilt $\phi(gx) = g\phi(x) \forall g \in G, x \in X$. Mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden die G -Mengen eine Kategorie, die wir mit G -Ens oder $\text{Ens}_{G\setminus}$ bezeichnen. In derselben Weise bilden auch die G -Rechtsmengen eine Kategorie, die wir mit $\text{Ens}_{\setminus G}$ oder $\text{Ens}_{\setminus G}$ bezeichnen.

Ergänzung 3.2.3. Im Rahmen der Kategorientheorie können wir die Kategorie der G -Mengen auch beschreiben als die Kategorie G -Ens = $\text{Cat}([G], \text{Ens})$ aller Funktoren von der Ein-Objekt-Kategorie $[G]$ aus [LA2] 7.1.6 in die Kategorie der Mengen.

Übungen

Ergänzende Übung 3.2.4. Ich erinnere daran, daß wir unter einem „homogenen Raum“ für eine vorgegebene Gruppe eine Menge mit einer transitiven Wirkung unserer Gruppe verstehen. Man zeige: Genau dann stimmen für einen gegebenen

homogenen Raum alle Standgruppen überein, wenn er isomorph ist zum Quotienten der Gruppe nach einem Normalteiler. Wir sagen dann auch, der homogene Raum sei **normal**. Hinweis: [LA2] 5.2.2.

Übung 3.2.5. Jede Gruppe operiert auf der Menge aller ihrer Untergruppen durch Konjugation. Die Bahnen dieser Operation nennt man **Konjugationsklassen von Untergruppen**. Man zeige, daß für jede Gruppe G das Bilden der Gesamtheit aller Standgruppen eine Bijektion liefert

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Transitive } G\text{-Mengen,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugationsklassen von} \\ \text{Untergruppen von } G \end{array} \right\}$$

$$X \qquad \mapsto \qquad \{G_x \mid x \in X\}$$

Im übrigen ist das schlicht die von der Äquivalenz von Kategorien 3.2.8 auf Isomorphieklassen von Objekten induzierte Bijektion.

Übung 3.2.6. Man zeige, daß die Linksoperation eines Monoids G auf sich selbst einen Isomorphismus induziert zwischen dem Monoid G und dem Monoid der Endomorphismen der G -Rechtsmenge G , in Formeln also einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} (\text{Ens-}G)(G)$, $g \mapsto (g \cdot)$. Ebenso induziert die Rechtsoperation eines Monoids G auf sich selbst einen Isomorphismus $G^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})(G)$, $g^\circ \mapsto (\cdot g)$.

Übung 3.2.7. Der **Normalisator** einer Untergruppe H in einer Gruppe G ist definiert als die Untergruppe $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ von G . Man zeige, daß die Zuordnung $g \mapsto (\cdot g^{-1})$, die also jedem $g \in G$ die Multiplikation von rechts mit g^{-1} zuordnet, einen Isomorphismus

$$N_G(H)/H \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})^\times(G/H)$$

induziert zwischen der Quotientengruppe $N_G(H)/H$ und der Automorphismengruppe der G -Menge G/H . In derselben Weise erhält man durch die Abbildung $g \mapsto (\cdot g)$, immer noch für $G \supset H$ eine Gruppe mit einer Untergruppe einen Isomorphismus

$$(\{g \in G \mid Hg \subset gH\}/H)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})(G/H)$$

von Monoiden. Betrachtet man in $G = \text{SL}(2; \mathbb{Q})$ die Untergruppe H aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale und einem ganzzahligen Eintrag in der oberen rechten Ecke, und nimmt als g eine geeignete Diagonalmatrix, so erhält man ein Beispiel mit $Hg \subsetneq gH$.

Übung 3.2.8 (Die Untergruppenkategorie). Sei G eine Gruppe. Wir machen die Menge UGr_G aller Untergruppen von G zu einer Kategorie durch die Vorschrift

$$\text{UGr}_G(H, K) := \{gK \in G/K \mid HgK = gK\}$$

mit der Verknüpfung $\text{UGr}_G(H, K) \times \text{UGr}_G(K, M) \rightarrow \text{UGr}_G(H, M)$ gegeben durch $(gK, fM) \mapsto gKfM = gfM$. Man zeige, daß wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{UGr}_G \xrightarrow{\cong} \{\text{Transitive } G\text{-Mengen}\}$$

erhalten, indem wir jeder Untergruppe $H \subset G$ den homogenen Raum G/H zuordnen und jedem Morphismus $gK \in \text{UGr}_G(H, K)$ die G -äquivalente Abbildung $G/H \rightarrow G/K$, $aH \mapsto aHgK = agK$. Diese Übung ist wichtig für gewisse Formulierungen der Überlagerungstheorie.

Ergänzende Übung 3.2.9. Gegeben Gruppen H, G bezeichne H -Ens- G die Kategorie aller Mengen X mit einer Linksoperation von H und einer Rechtsoperation von G derart, daß gilt $(hx)g = h(xg)$ für alle $h \in H, x \in X$ und $g \in G$. Man erkläre, in welcher Weise diejenigen Objekte dieser Kategorie, auf denen die Rechtsoperation von G frei und transitiv ist, klassifiziert werden durch G -Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen $H \rightarrow G$.

Übung 3.2.10. Ist \mathcal{C} eine Kategorie, $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $G = \mathcal{C}(A, A)$ das Monoid seiner Endomorphismen, so erhalten wir stets einen Funktor $\mathcal{C}(A, _): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens-}G$, indem wir setzen $fg = f \circ g$ für $B \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(A, B)$ und $g \in \mathcal{C}(A, A)$.

3.3 Quotientenabbildungen als Überlagerungen

Definition 3.3.1. Unter einer **Operation eines Monoids auf einem Objekt einer Kategorie** versteht man einen Homomorphismus von besagtem Monoid in das Monoid der Endomorphismen von besagtem Objekt.

3.3.2. Eine Operation eines Monoids M auf einem topologischen Raum X ist also ein Monoidhomomorphismus $\varphi: M \rightarrow \text{Top}(X, X)$. Unter der durch das Exponentialgesetz gegebenen Bijektion

$$\text{Ens}(M, \text{Ens}(X, X)) \xrightarrow{\cong} \text{Ens}(M \times X, X)$$

entsprechen die Monoidhomomorphismen $\varphi: M \rightarrow \text{Top}(X, X)$ denjenigen Abbildungen $\tilde{\varphi}: M \times X \rightarrow X$, für die mit der vereinfachenden Notation $gx := \tilde{\varphi}(g, x)$ und der durch Hintereinanderschreiben notierten Verknüpfung in M und $1 \in M$ dem neutralen Element gilt $(hg)x = h(gx) \forall h, g \in M, x \in X$ sowie $1x = x \forall x \in X$ und für die $x \mapsto gx$ für alle $g \in M$ eine stetige Abbildung $X \rightarrow X$ ist. Oft versteht man unter einer **Operation eines Monoids M auf einem topologischen Raum X** auch direkt eine Abbildung

$$M \times X \rightarrow X$$

mit den eben aufgeführten Eigenschaften.

3.3.3. Ich erinnere daran, daß eine Operation einer Gruppe auf einer Menge **frei** heißt, wenn außer dem neutralen Element kein Element unserer Gruppe irgendeinen Punkt unserer Menge festhält.

Definition 3.3.4. Eine Operation einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt **topologisch frei**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, für die die Operation eine Injektion $G \times U \hookrightarrow X$ liefert.

3.3.5 (**Terminologisches**). In der Literatur heißen unsere topologisch freien Operationen meist **freie eigentlich diskontinuierliche Operationen**.

Beispiele 3.3.6. Die Gruppe \mathbb{Z}^n operiert topologisch frei durch Addition auf \mathbb{R}^n . Die Gruppe $\{+1, -1\}$ operiert topologisch frei durch Multiplikation auf S^n und $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Für festes k operiert die Gruppe $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^k = 1\}$ der k -ten Einheitswurzeln topologisch frei auf $\mathbb{C}^n \setminus 0$. Die Operation von \mathbb{Q} auf \mathbb{R} durch Addition ist frei, aber nicht topologisch frei.

Ergänzung 3.3.7. Ist G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine diskrete Untergruppe, so ist die Operation von H auf G durch Linkstranslation topologisch frei. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die Operation durch Rechtstranslation. Sie durften das im Zusammenhang mit topologischen Gruppen als Übung [TM] 2.1.25 zeigen.

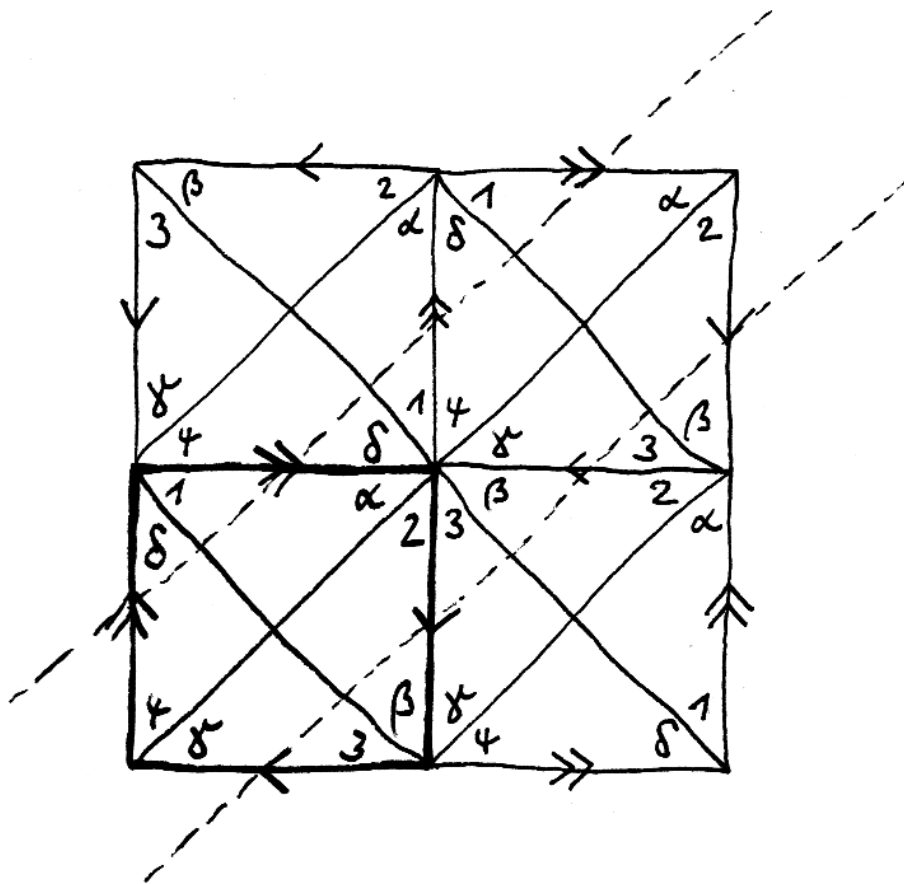
Ergänzung 3.3.8. Seien G eine Hausdorffgruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe. So bilden nach [TM] 2.4.21 die Punkte $\bar{x} \in G/K$ des Quotienten mit trivialer Standgruppe $\Gamma_{\bar{x}} = 1$ eine offene Teilmenge $V \subseteq G/K$, auf der Γ topologisch frei operiert.

3.3.9 (**Bahnenraum**). Ist X ein topologischer Raum mit einer Operation einer Gruppe G , so geben wir dem Bahnenraum X/G die Quotiententopologie bezüglich der Surjektion $X \twoheadrightarrow X/G$. Wie wir in [TM] 2.2.4 gesehen haben, ist in diesem Fall sogar für einen beliebigen weiteren Raum Y die Abbildung $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times (X/G)$ final, die offensichtliche Abbildung liefert mithin einen Homöomorphismus $(Y \times X)/G \xrightarrow{\sim} Y \times (X/G)$.

Satz 3.3.10 (Quotientenabbildungen als Überlagerungen). *Ist X ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G , so ist die Surjektion auf den Bahnenraum $p : X \twoheadrightarrow X/G$, $x \mapsto Gx$ eine Überlagerung.*

Beweis. Gegeben $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x mit $G \times U \hookrightarrow X$ sind sowohl $p : U \rightarrow p(U)$ als auch $G \times U \rightarrow p^{-1}(p(U))$ Homöomorphismen, da diese Abbildungen beide bijektiv, offen und stetig sind. Folglich ist $p(U)$ eine trivial überlagerte Umgebung von Gx . \square

Beispiel 3.3.11. Die Klein'sche Flasche kann realisiert werden als der Quotient der Ebene nach einer topologisch frei operierenden Gruppe, wie nebenstehendes Bild illustriert.



Dieses Bild der Fläche $F(aabb)$ von Seite 77 kann gelesen werden als eine Darstellung der Klein'schen Flasche als der Quotient der Ebene nach einer topologisch frei operierenden Gruppe, die von zwei Gleitspiegelungen mit parallelen Achsen und demselben Verschiebungsvektor erzeugt wird. Die Gleitspiegelachsen zweier erzeugender Gleitspiegelungen sind hier gestrichelt eingezeichnet.

Übungen

Übung 3.3.12. Jede freie Operation einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorffraum ist topologisch frei.

Übung 3.3.13 (Quotient einer Überlagerung). Ist $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung eines lokal zusammenhängenden Raums Y und operiert eine Gruppe G topologisch frei auf X und stabilisiert die Fasern von p , so ist auch $X/G \rightarrow Y$ eine Überlagerung.

Übung 3.3.14. Seien G eine Gruppe und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige G -äquivariante Abbildung von topologischen Räumen mit G -Operation. Man zeige: Operiert G topologisch frei auf Y , so auch auf X . Operiert G topologisch frei auf Y , so liefert das Bilden des Bahnenraums eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Top}_Y^G \xrightarrow{\cong} \text{Top}_{Y/G}$$

zwischen der Kategorie der topologischen Räume über Y mit einer äquivarianten G -Operation und der Kategorie der topologischen Räume über Y/G . Hinweis: Man mag einen Quasiinversen konstruieren als das Faserprodukt mit Y über Y/G . Unter diesen zueinander inversen Äquivalenzen bleiben alle Eigenschaften erhalten, die lokal sind in der Basis.

3.4 Lifts und Decktransformationen

Definition 3.4.1. Seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und $f : Y \rightarrow X$ stetige Abbildungen. Eine stetige Abbildung $h : Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ h = f$ heißt ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von f .

3.4.2. In der Kategorientheorie hatten wir so einen Lift einen „Morphismus über X “ genannt. Der Begriff Lift ist insbesondere dann gebräuchlich, wenn $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung ist. Man mag sich einen Lift durch das folgende kommutative Diagramm veranschaulichen, das gleichzeitig auch die Terminologie erklärt:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

3.4.3. Sind $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und $q : \hat{X} \rightarrow X$ Überlagerungen eines topologischen Raums X , so heißt ein Lift von q alias eine stetige Abbildung $h : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ h = q$ eine **Decktransformation** zwischen unseren Überlagerungen. Wir erhalten so die Kategorie

$$\text{Üb}_X$$

der Überlagerungen von X mit Überlagerungen als Objekten und Decktransformationen als Morphismen. Wir bezeichnen die Menge aller Decktransformationen zwischen zwei Überlagerungen \hat{X} und \tilde{X} eines Raums X nach unseren Konventionen mit $\text{Top}_X(\hat{X}, \tilde{X})$. Die Automorphismen einer Überlagerung heißen auch ihre **Deckbewegungen**. Wir schreiben nach unseren Konventionen $\text{Top}_X^\times(\tilde{X})$ für die Gruppe der Deckbewegungen von \tilde{X} über X .

Beispiele 3.4.4. Die Deckbewegungen unserer Überlagerung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ sind genau die Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Ist allgemeiner X zusammenhängend und operiert die Gruppe G topologisch frei auf X , so sind die Abbildungen $x \mapsto gx$ für $g \in G$ genau die Deckbewegungen der Überlagerung $X \rightarrow G \backslash X$. Das folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit von Lifts auf zusammenhängenden Räumen 3.4.10.

3.4.5. Da jede Überlagerungsabbildung étale ist, muß nach 3.1.14 auch jede Decktransformation étale sein. Insbesondere ist also jede Decktransformation offen und jede bijektive Decktransformation ein Isomorphismus von Überlagerungen.

Satz 3.4.6 (Decktransformationen als Überlagerungen). *Jede Decktransformation zwischen Überlagerungen eines lokal zusammenhängenden Raums ist bereits selbst eine Überlagerungsabbildung.*

3.4.7. Insbesondere hat jede Decktransformation zwischen Überlagerungen eines lokal zusammenhängenden Raums offenes und abgeschlossenes Bild, denn nach der Lokalkonstanz der Faserkardinalität 3.1.6 gilt das für jede Überlagerungsabbildung.

Beweis. Seien $q : \hat{X} \rightarrow X$ und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ unsere Überlagerungen und $h : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ unsere Decktransformation. Gegeben $\tilde{x} \in \tilde{X}$ hat sein Bild $x \in X$ eine zusammenhängende Umgebung U , auf der unsere beiden Überlagerungen Trivialisierungen $\kappa : U \times \hat{D} \xrightarrow{\sim} q^{-1}(U)$ und $\tau : U \times \tilde{D} \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ besitzen. Wir dürfen weiter annehmen, daß $\tilde{D} = \tilde{p}^{-1}(x)$ die Faser über x ist und daß gilt $\tau(x, \tilde{d}) = \tilde{d}$ für alle $\tilde{d} \in \tilde{D}$ und entsprechend für die erste Überlagerung. Dann gilt notwendig $h(\kappa(z, \hat{d})) = \tau(z, h(\hat{d}))$ und das zeigt, daß auch h eine Überlagerung ist. \square

Ergänzung 3.4.8. Mir ist nicht klar, ob im Fall einer beliebigen Basis jede Decktransformation bereits selbst eine Überlagerungsabbildung sein muß. Ich erwarte eher ein Gegenbeispiel.

3.4.9. Eine Decktransformation einer Überlagerung auf sich selber muß keine Deckbewegung sein. Man findet leicht Gegenbeispiele mit unzusammenhängendem Totalraum. Es gibt sogar Gegenbeispiele mit zusammenhängendem Totalraum für absolut vernünftige Räume, vergleiche 4.4.4. Eine Überlagerung muß auch

durchaus nicht der Quotient nach einer Gruppenwirkung sein. Wir sehen bald absolut vernünftige Gegenbeispiele.

Satz 3.4.10 (Eindeutigkeit von Lifts). *Seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Y \rightarrow X$ stetig und $g, h : Y \rightarrow \tilde{X}$ zwei Lifts von f . Ist Y zusammenhängend und gibt es $y \in Y$ mit $g(y) = h(y)$, so gilt $g = h$.*

Ergänzung 3.4.11. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir von f nur fordern, daß es étale und separiert sein soll.

Beweis. Nach 3.1.26 ist $\tilde{X} \times_X \tilde{X}$ eine Überlagerung von X und die Diagonale $\Delta : \tilde{X} \hookrightarrow \tilde{X} \times_X \tilde{X}$ hat abgeschlossenes Bild. Da Δ eine Decktransformation ist, muß aber das Bild auch offen sein. Die Abbildung $(g, h) : Y \rightarrow \tilde{X} \times_X \tilde{X}$ ist nun stetig und das Urbild der Diagonale unter dieser Abbildung ist folglich offen und abgeschlossen in Y . Für Y zusammenhängend muß dies Urbild also entweder leer sein oder ganz Y . Da es y enthält, ist es nicht leer und es folgt $g = h$. \square

Elementarer Beweis. Wir zeigen, daß die Mengen $Y_1 := \{z \in Y \mid g(z) = h(z)\}$ und $Y_2 := \{z \in Y \mid g(z) \neq h(z)\}$ beide offen sind. Aus $y \in Y_1$ und Y zusammenhängend folgt dann $Y_2 = \emptyset$. Sei also $z \in Y$ ein Punkt. Man wähle eine trivial überlagerte Umgebung U von $f(z)$ und eine Trivialisierung $\tau : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} D \times U$ von p auf U . Gilt $\tau g(z) \in \{d\} \times U$, so besitzt z eine Umgebung V mit $g(V) \subset p^{-1}(U)$ und sogar $\tau g(V) \subset \{d\} \times U$. Analoges gilt für h . Also sind Y_1 und Y_2 beide offen. \square

3.4.12. Ein **bepunkteter Raum** ist ein Paar (X, x) aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x \in X$, dem **Basispunkt** unseres bepunkteten Raums. Von einer stetigen Abbildung $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ bepunkteter Räume fordern wir stets implizit $f(x) = y$.

Satz 3.4.13 (Existenz von Lifts). *Seien $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ eine stetige Abbildung und $(\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$ eine Überlagerung. Ist Y überlagerungstrivial, so besitzt f genau einen Lift $\hat{f} : (Y, y) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz 3.4.10 über die Eindeutigkeit von Lifts, da ja Y zusammenhängend ist nach 3.1.16. Die wesentliche neue Aussage betrifft die Existenz. Wir betrachten dazu das pull-back-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \hat{X} & \rightarrow & \hat{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \rightarrow & X \end{array}$$

Nach Übung 3.1.25 ist auch die linke Vertikale eine Überlagerung. Wenn Y überlagerungstrivial ist, muß die linke Vertikale eine triviale Überlagerung sein. Wir finden also eine stetige Abbildung $Y \rightarrow Y \times_X \hat{X}$ mit $y \mapsto (y, \hat{x})$. Verknüpfen mit der oberen Horizontale gibt den gesuchten Lift. \square

Beispiel 3.4.14. Ist $U \subset \mathbb{C}$ überlagerungstrivial und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ohne Nullstelle, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine stetige Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $g(z)^n = f(z)$ für alle $z \in U$. Weiter gibt es $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $\exp(g(z)) = f(z)$ für alle $z \in U$. Beide Behauptungen bedeuten ja nur die Existenz eines Lifts in Bezug auf die Überlagerung $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ beziehungsweise die Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Sind wir in der Funktionentheorie und ist U zusätzlich offen, so zeigt der Umkehrsatz für holomorphe Funktionen [FT1] 4.4.1, daß mit f auch g holomorph sein muß.

Proposition 3.4.15 (Freiheit der Operation der Deckbewegungsgruppe). *Gegeben eine Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum operiert ihre Deckbewegungsgruppe stets topologisch frei auf dem Totalraum.*

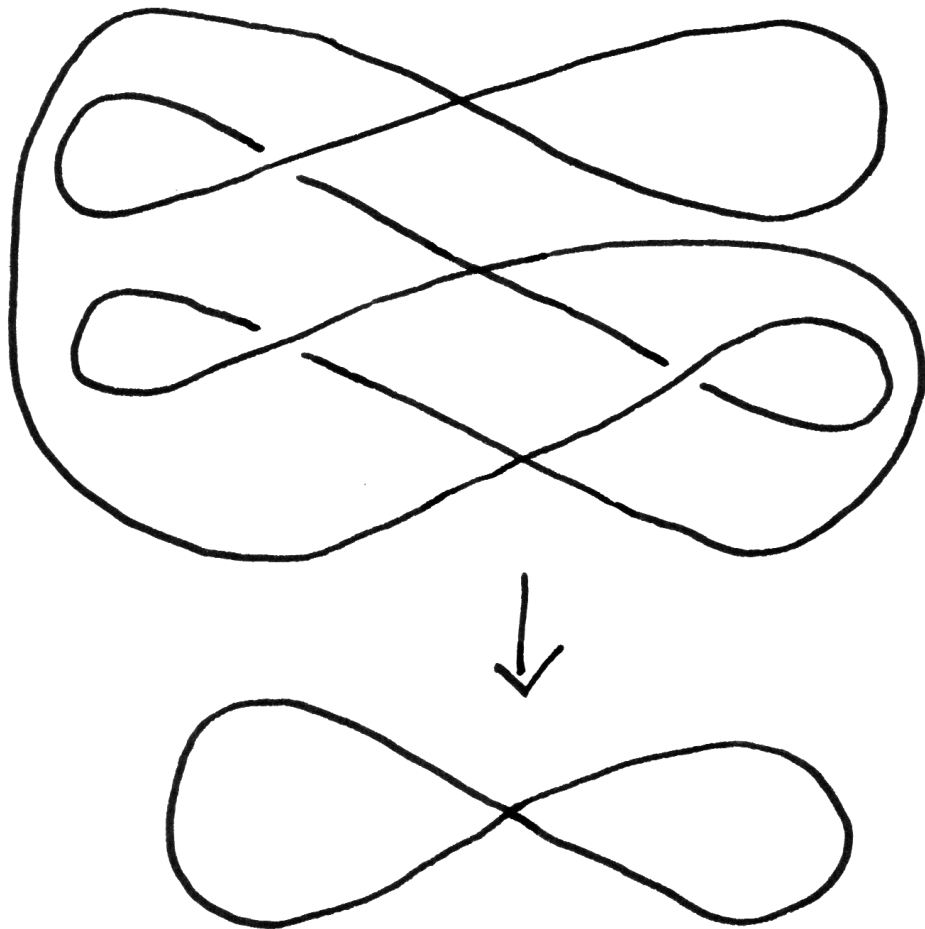
Beweis. Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ unsere Überlagerung und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ein Punkt und $x \in X$ sein Bild. Es hat eine trivial überlagerte offene Umgebung $U \Subset X$ und gegeben eine Trivialisierung $\tau : U \times D \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ gibt es ein $d \in D$ mit $\tau(x, d) = \tilde{x}$. Ich behaupte, daß dann die Operation eine Injektion $G \times \tau(U \times \{d\}) \hookrightarrow \tilde{X}$ induziert. In der Tat folgt aus $g\tau(u, d) = h\tau(v, d)$ durch Anwenden von p sofort $u = v$ und daraus $\tau(u, d) = \tau(v, d)$ und mit dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts schließlich $g = h$ wie gewünscht. \square

Definition 3.4.16. Eine zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ derart, daß für jeden Punkt $x \in X$ die Gruppe der Deckbewegungen transitiv auf der Faser $p^{-1}(x)$ operiert, nennen wir eine **Galois-Überlagerung** oder **galois**.

3.4.17 (**Diskussion der Terminologie**). Statt „galois“ sagt man auch **normal** oder **regulär**. Ich ziehe galois vor, denn normalerweise ist eine Überlagerung keineswegs galois.

Übungen

Übung 3.4.18 (Normale Hülle). Man zeige, daß jede endliche zusammenhängende lokal zusammenhängende surjektive Überlagerung selbst eine endliche Überlagerung besitzt derart, daß die Verknüpfung der beiden Überlagerungsabbildungen eine normale Überlagerung ist. Hinweis: Man bilde über der Basis das Faserprodukt einiger Kopien unserer Überlagerung mit sich selbst und nehme darin eine geeignete Zusammenhangskomponente. Man zeige auch, daß es zu je zwei endlichen zusammenhängenden lokal zusammenhängenden surjektiven Überlagerungen eine weitere endlichen zusammenhängende Überlagerung gibt, die über beide als Überlagerungsabbildung faktorisiert.



Versuch der bildlichen Darstellung einer dreiblättrigen Überlagerung der Acht, die keine nichttrivialen Decktransformationen zuläßt. Diese Überlagerung ist also nicht galois.

3.5 Initiale und universelle Überlagerungen

Definition 3.5.1. Eine bepunktete Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ heißt **initial** oder ausführlich eine **initiale bepunktete Überlagerung**, wenn es für jede weitere bepunktete Überlagerung $(\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$ ihrer Basis genau eine basispunkterhaltende Decktransformation $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$ gibt.

Beispiele 3.5.2 (Initialität bei überlagerungstrivialem Totalraum). Nach unseren Sätzen 3.4.10 und insbesondere 3.4.13 über die Existenz und Eindeutigkeit von Lifts ist jede Überlagerung durch einen überlagerungstrivialen Raum bepunktet initial für jede mögliche Bepunktung. Da nach 3.1.20 jeder wegetriviale Raum bereits überlagerungstrivial sein muß, ist etwa $\exp : (\mathbb{R}, x) \rightarrow (S^1, \exp(x))$ eine initiale bepunktete Überlagerung für alle $x \in \mathbb{R}$.

3.5.3. Eine initiale bepunktete Überlagerung ist stets zusammenhängend. In der Tat, wäre andernfalls $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \sqcup \tilde{X}_2$ eine Zerlegung in zwei nichtleere offene Teilmengen, so könnten wir leicht zwei verschiedene Decktransformationen $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \sqcup \tilde{X}$ angeben, unter denen \tilde{x} dasselbe Bild hat. Das Bild $p(\tilde{X}) \subset X$ ist also zusammenhängend und nach unseren Erkenntnissen zur Kardinalität der Fasern einer Überlagerung 3.1.6 ist es auch offen und abgeschlossen in X .

3.5.4 (**Eindeutigkeit initialer bepunkteter Überlagerungen**). In kategorientheoretischer Terminologie ist eine initiale bepunktete Überlagerung eines bepunkteten Raums ein initiales Objekt in der Kategorie aller seiner bepunkteten Überlagerungen. Insbesondere ist sie eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, weshalb wir guten Gewissens mit einem bestimmten Artikel von der initialen bepunkteten Überlagerung reden dürfen.

Satz 3.5.5 (Eigenschaften initialer bepunkteter Überlagerungen). *Gegeben eine initiale bepunktete Überlagerung $u : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ eines zusammenhängenden lokal zusammenhängenden Raums gilt:*

1. *Jede Decktransformation von \tilde{X} zu sich selbst ist bereits eine Deckbewegung, in Formeln $\text{Top}_X^\times(\tilde{X}) = \text{Top}_X(\tilde{X})$;*
2. *Die Deckbewegungsgruppe $G := \text{Top}_X^\times(\tilde{X})$ operiert topologisch frei auf dem Totalraum \tilde{X} ;*
3. *Unsere Überlagerungsabbildung induziert einen Homöomorphismus*

$$\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$$

4. *Für jeden Punkt $\tilde{z} \in \tilde{X}$ ist auch $u : (\tilde{X}, \tilde{z}) \rightarrow (X, u(\tilde{z}))$ eine initiale bepunktete Überlagerung.*

Beweis. 1. Jede Decktransformation $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ ist surjektiv nach 3.4.6, weil wir unsere Basis lokal zusammenhängend angenommen hatten. Es gibt also $\hat{x} \in \tilde{X}$ mit $\varphi(\hat{x}) = \tilde{x}$. Aufgrund der Initialität gibt es dann auch eine Decktransformation $\psi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $\psi(\tilde{x}) = \hat{x}$. Sowohl $\psi\varphi$ als auch $\varphi\psi$ sind Decktransformationen, die einen Punkt festhalten, also nach der Eindeutigkeit von Lifts die Identität. Also ist jede Decktransformation eine Deckbewegung.

2. Da jede initiale bepunktete Überlagerung \tilde{X} zusammenhängend ist, operiert nach 3.4.15 die Deckbewegungsgruppe topologisch frei auf \tilde{X} .

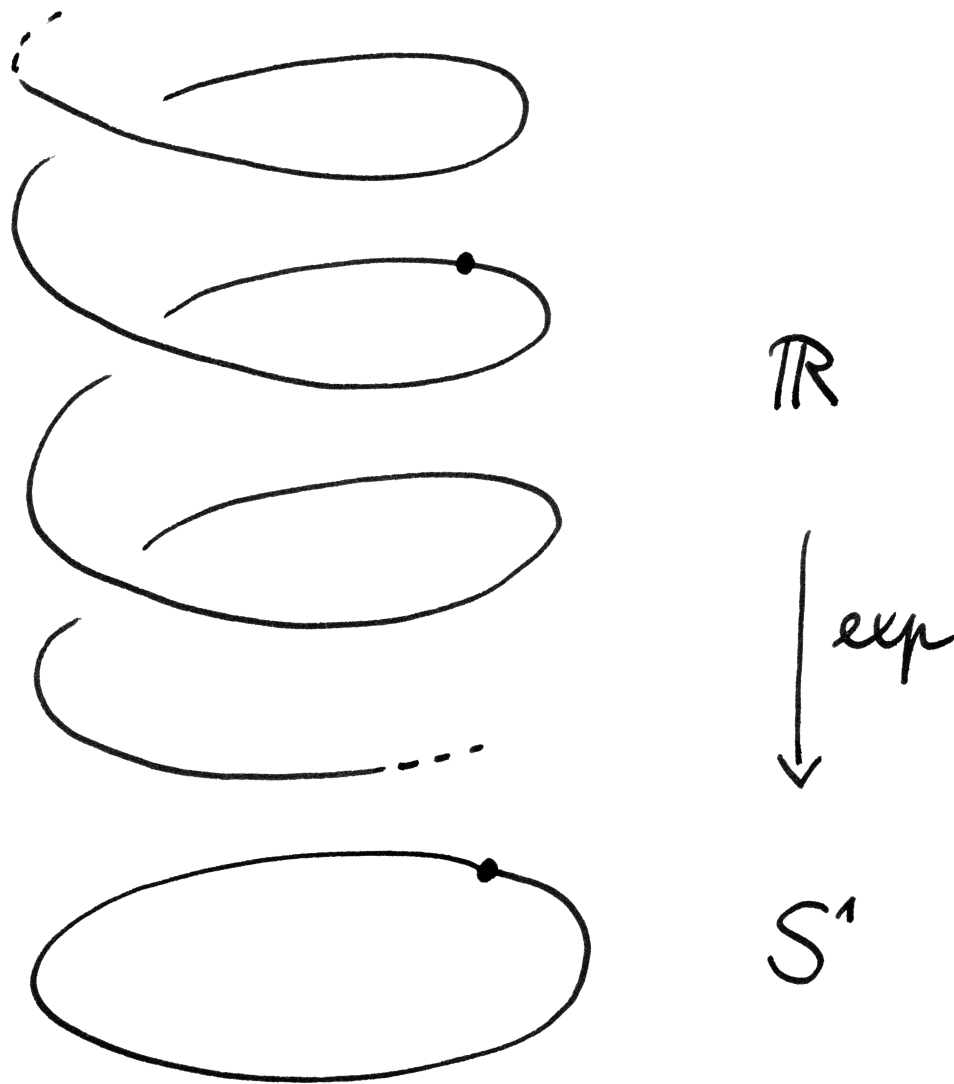
3. Da X lokal zusammenhängend angenommen war, muß $\tilde{X}/G \rightarrow X$ nach Übung 3.3.13 ebenfalls eine Überlagerung sein. Nun besteht aber bei letzterer Überlagerung die Faser über unserem Basispunkt x nur aus einem Punkt, da nach dem ersten Teil alle Decktransformationen bereits Deckbewegungen sind und die Deckbewegungsgruppe mithin und aufgrund der Initialität transitiv auf $p^{-1}(x)$ operiert. Da nach 3.1.6 die Faserkardinalität lokal konstant ist und X zusammenhängend angenommen war, muß diese Überlagerung einblättrig und damit ein Homöomorphismus $\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$ sein.

4. Sei $(\hat{X}, \hat{z}) \rightarrow (X, u(\hat{z}))$ eine bepunktete Überlagerung. Wir müssen zeigen, daß es genau eine bepunktete Decktransformation $(\tilde{X}, \tilde{z}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{z})$ gibt. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit von Lifts. Um die Existenz zu zeigen, dürfen wir \hat{X} durch die Zusammenhangskomponente von \hat{z} ersetzen, die nach 3.1.7 unter unseren Annahmen auch eine Überlagerung von X sein muß, und dürfen damit \hat{X} zusammenhängend annehmen. Nach ?? ist $\hat{X} \rightarrow X$ surjektiv. Aufgrund der Initialität von \tilde{X} gibt es damit eine Decktransformation $d : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ und diese ist nach 3.4.7 surjektiv und wir finden $\tilde{z} \in \tilde{X}$ mit $d(\tilde{z}) = \hat{z}$. Wegen $u(\tilde{z}) = u(\hat{z})$ gibt es aber nach Teil 3 ein $g \in G$ mit $g(\tilde{z}) = \tilde{z}$ und dann ist dg die gesuchte Decktransformation mit $\tilde{z} \mapsto \hat{z}$. \square

Definition 3.5.6. Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eines zusammenhängenden Raums heißt eine **universelle Überlagerung**, wenn \tilde{X} nicht leer ist und wenn für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Überlagerung von bepunkteten Räumen $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, p(\tilde{x}))$ bepunktet initial ist.

3.5.7. Jede initiale bepunktete Überlagerung eines zusammenhängenden und lokal zusammenhängenden Raums ist nach 3.5.5 universell. Die Bezeichnung „universell“ bezieht sich auf die „universelle Eigenschaft“, die wir „bepunktet initial“ genannt hatten und die wir bei universellen Überlagerungen stärker sogar für alle Punkte des Totalraums fordern.

3.5.8 (**Eindeutigkeit universeller Überlagerungen**). Universelle Überlagerungen haben keine vernünftige universelle Eigenschaft und sind nur eindeutig bis



Versuch der graphischen Darstellung einer universellen Überlagerung einer
 gepunkteten Kreislinie. Gemeint ist eine nach oben und unten unendliche
 Spirale, die vertikal auf die Kreislinie projiziert wird.

auf nicht-eindeutigen Isomorphismus, was man leicht aus der Eindeutigkeit im bepunkteten Fall folgert. Wir erlauben uns dennoch auch in dieser Situation den bestimmten Artikel.

Beispiel 3.5.9. Die Überlagerung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ist nach 3.5.2 universell.

3.5.10 (Deckbewegungen universeller Überlagerungen). Gegeben eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$ ist jede Decktransformation $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ bereits eine Deckbewegung, die Deckbewegungsgruppe G operiert topologisch frei auf \tilde{X} und die Überlagerungsabbildung induziert einen Homöomorphismus $\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$. Das alles folgt genau wie im bepunkteten Fall 3.5.5, nur daß wir die Bedingung „lokal zusammenhängend“ aufgrund der stärkeren Annahmen nicht mehr benötigen.

Lemma 3.5.11. *Ein Raum ist überlagerungstrivial genau dann, wenn die Identität auf unserem Raum eine universelle Überlagerung ist.*

Beweis. Daß die Identität auf jedem überlagerungstrivialen Raum eine universelle Überlagerung ist, folgt sofort aus der Existenz und Eindeutigkeit von Lifts 3.4.13. Ist umgekehrt die Identität auf einem Raum Y eine universelle Überlagerung, so ist nach unseren Definitionen Y nicht leer. Wählen wir also $y \in Y$. Ist dann $p : \hat{Y} \rightarrow Y$ eine Überlagerung, so finden wir für jedes $\hat{y} \in p^{-1}(y)$ genau einen Lift $s_{\hat{y}} : (Y, y) \rightarrow (\hat{Y}, \hat{y})$ von p und in ihrer Gesamtheit liefern diese Lifts eine stetige Abbildung

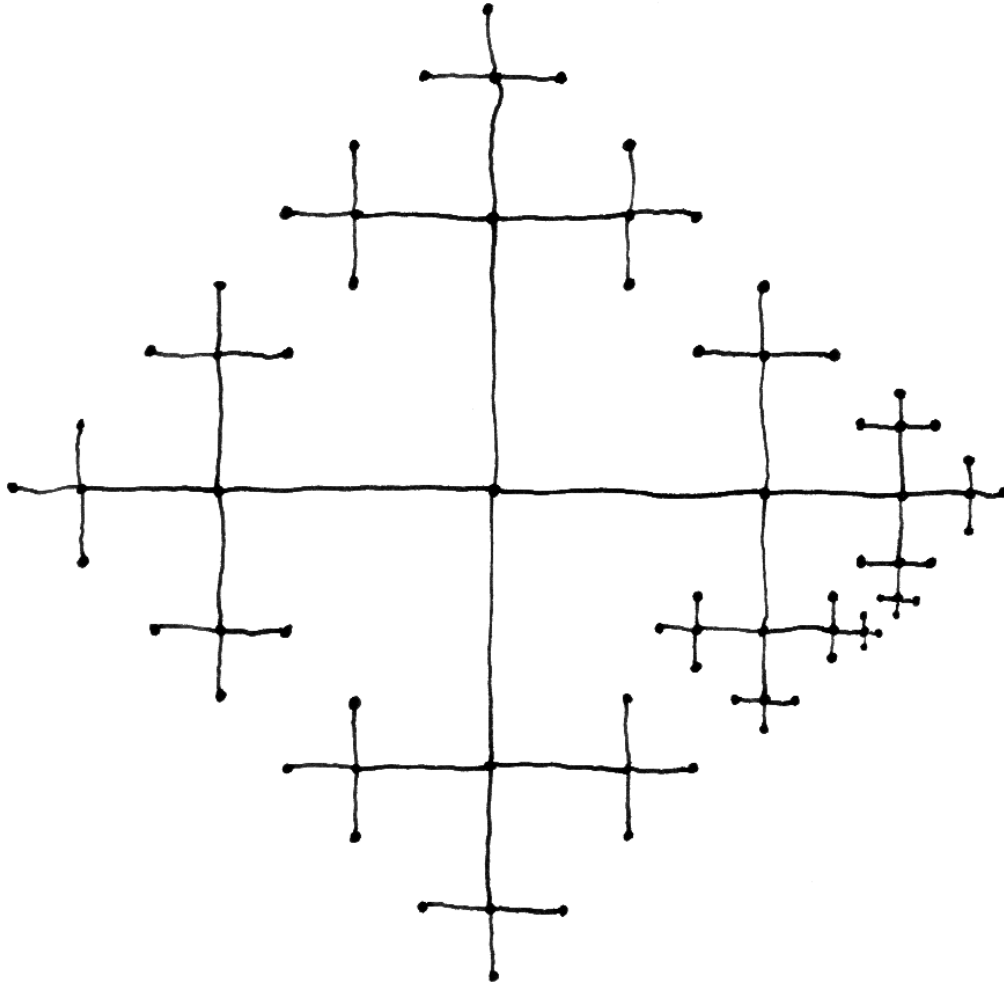
$$\tau : Y \times p^{-1}(y) \rightarrow \hat{Y}$$

gegeben durch $(z, \hat{y}) \mapsto s_{\hat{y}}(z)$. Als Decktransformation ist τ nach 3.4.5 auch offen, ja sogar étale. Wenden wir die Annahme des Lemmas auf die anderen Punkte von Y an, so erkennen wir unschwer, daß unsere Abbildung zusätzlich injektiv und surjektiv ist und damit die Überlagerung $\hat{Y} \rightarrow Y$ trivialisiert. \square

Beispiel 3.5.12 (Universelle Überlagerung der Figur 8). Will man nicht nur Bilder malen, muß man zunächst spezifizieren, was die Figur 8 sein soll. Wir definieren sie hier noch etwas unbeholfen als die geometrische Realisierung des Simplicialkomplexes $\mathcal{K}(8)$ mit fünf Ecken $\mathcal{K}(8)_0 := \{a, b, c, d, e\}$ und sechs Kanten $\mathcal{K}(8)_1 := \{\{c, a\}, \{c, b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$. Die universelle Überlagerung können wir dann ähnlich als geometrische Realisierung eines unendlichen Simplicialkomplexes konstruieren.

Wir definieren sie als die geometrische Realisierung der semisimplizialen Menge $\mathcal{K}(8)$ mit einem Nullsimplex $\mathcal{K}(8)_0$ und zwei Einssimplizes $\mathcal{K}(8)_1 := \{a, b\}$ nach ??.

Satz 3.5.13 (Überlagerungen mit überlagerungstrivialelem Totalraum). *Eine Überlagerung eines zusammenhängenden lokal überlagerungstrivialen Raums ist genau dann universell, wenn sie einen überlagerungstrivialen Totalraum hat.*



Graphische Darstellung eines Teils einer universellen Überlagerung der Figur 8.

Jede vertikale Kante dieses Bildes geht unter der Überlagerungsabbildung homöomorph auf die obere Schlaufe der 8, jede horizontale Kante auf die untere Schlaufe der 8, und zwar soll das Durlaufen von unten nach oben

beziehungsweise von rechts nach links dabei jeweils dem Durchlaufen im Uhrzeigersinn entsprechen. Es gilt also salopp gesagt, „sich alle Kanten dieses Bildes gleich lang zu denken“. Die Kreuzungspunkte sind nach ?? in Bijektion zu den Elementen der freien Gruppe in zwei Erzeugern x und y , indem man etwa von der Mitte ausgehend jedes x interpretiert als „gehe nach rechts zum nächsten Kreuzungspunkt“, jedes x^{-1} als „gehe nach links“, jedes y als „gehe nach oben“ und y^{-1} als „gehe nach unten“.

Ergänzung 3.5.14. Ich erinnere daran, daß nach unseren allgemeinen Konventionen „lokal überlagerungstrivial“ bedeutet, daß jede Umgebung jedes Punktes verkleinert werden kann zu einer überlagerungstrivialen Umgebung desselben Punktes. Ich weiß nicht, ob jede universelle Überlagerung eines beliebigen Raums einen überlagerungstrivialen Totalraum haben muß.

Beweis. Das Liften bei überlagerungstrivialem Definitionsbereich 3.4.13 zeigt, daß eine Überlagerung eines zusammenhängenden Raums durch einen überlagerungstrivialen Raum stets universell ist. Für den Beweis der anderen Implikation sei X unser Raum und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung. Ist $q : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ eine Überlagerung dieser universellen Überlagerung, so ist nach Übung 3.1.27 auch die Verknüpfung $pq : \hat{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Gegeben $\hat{x} \in \hat{X}$ mit Bild $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gibt es mithin genau eine Decktransformation $d : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$ über X . Wegen $qd(\tilde{x}) = \tilde{x}$ gilt nach der Eindeutigkeit von Lifts $qd = \text{id}_{\tilde{X}}$ und q ist sogar eine Decktransformation über \tilde{X} . Wir sehen so, daß die Identität auf \tilde{X} eine universelle Überlagerung von \tilde{X} ist. Damit aber ist \tilde{X} überlagerungstrivial nach 3.5.11. \square

Beispiel 3.5.15. Die Klein'sche Flasche hat nach 3.3.11 als universelle Überlagerung die Ebene, denn diese ist überlagerungstrivial nach dem Schleifenkriterium 3.1.20. Dasselbe gilt im Übrigen für alle unsere kompakten zusammenhängenden Flächen mit Ausnahme der Kugelschale S^2 und des zweidimensionalen reellprojektiven Raums $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

3.6 Existenz universeller Überlagerungen

Satz 3.6.1 (Universelle Überlagerung lokal überlagerungstrivialer Räume). *Jeder zusammenhängende lokal überlagerungstriviale Raum besitzt eine überlagerungstriviale universelle Überlagerung.*

Beweis. Jede initiale bepunktete Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ eines zusammenhängenden und lokal zusammenhängenden Raums ist nach Satz 3.5.5 bereits eine universelle Überlagerung und jede universelle Überlagerung eines zusammenhängenden lokal überlagerungstrivialen Raums ist nach 3.5.13 überlagerungstrivial. Es reicht demnach zu zeigen, daß unser Raum X für einen Punkt $x \in X$ eine initiale bepunktete Überlagerung besitzt. Wir beginnen damit, eine obere Abschätzung für die Kardinalität $|\tilde{X}|$ einer zusammenhängenden bepunkteten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ herzuleiten. Wir wählen dazu für jeden Punkt $y \in X$ eine überlagerungstriviale Umgebung $U(y)$. Zu jedem Punkt $\tilde{y} \in \tilde{X}$ und jeder Folge $p(\tilde{y}) = x_0, z_0, x_1, z_1, \dots, x_r$ in X mit $z_i \in U(x_i) \cap U(x_{i+1})$ erhalten wir eine wohlbestimmte Folge $\tilde{x}_0, \tilde{z}_0, \tilde{x}_1, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{x}_r$ in \tilde{X} mit $\tilde{x}_0 = \tilde{y}$, die unter p auf unsere ursprüngliche Folge abgebildet wird und so, daß \tilde{z}_i in derselben

Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U(x_i))$ liegt wie \tilde{x}_i und in derselben Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U(x_{i+1}))$ wie \tilde{x}_{i+1} falls $i \neq r$. Es ist klar, daß alle \tilde{x}_r , die wir auf diese Weise für irgendein $r \geq 0$ erhalten, eine offene zusammenhängende Teilmenge $Z(\tilde{y}) \subseteq \tilde{X}$ bilden, die \tilde{y} enthält. Es ist auch klar, daß diese $Z(\tilde{y})$ eine Partition von \tilde{X} bilden. Ist also \tilde{X} zusammenhängend, so folgt $\tilde{X} = Z(\tilde{x})$ und das liefert uns die gewünschte obere Schranke für die Kardinalität einer zusammenhängenden bepunkteten Überlagerung von (X, x) . Sei nun Ω eine Menge echt größerer Kardinalität. Wir betrachten die Gesamtheit I aller Quadrupel (Z, z, τ, q) mit $Z \subset \Omega$ einer Teilmenge, $z \in Z$ einem Punkt, $\tau \subset \text{Pot}(Z)$ einer Topologie auf Z und $q : Z \rightarrow X$ einer in Bezug auf die Topologie τ stetigen Abbildung, unter der (Z, z) eine bepunktete Überlagerung von (X, x) wird. Das durch $i \in I$ gegebene Quadrupel notieren wir (Z_i, z_i, τ_i, q_i) . Wir betrachten weiter die Menge

$$T \subset \prod_{i \in I} Z_i$$

aller Tupel $t = (t_i)$ derart, daß für jede Decktransformation von bepunkteten Überlagerungen $d : (Z_i, z_i) \rightarrow (Z_j, z_j)$ gilt $d(t_i) = t_j$. Die Menge T besitzt einen ausgezeichneten Punkt $z := (z_i)$ und eine offensichtliche ausgezeichnete Abbildung von bepunkteten Mengen $\text{pr} : (T, z) \rightarrow (X, x)$ mit $q_i \circ \text{pr}_i = \text{pr} \ \forall i \in I$. Unsere Menge T versehen wir nun mit einer Topologie, indem wir ein Fundamentalsystem von Umgebungen für jeden Punkt $t \in T$ angeben derart, daß die davon erzeugten Filter die in [TM] 3.2.17 gegebenen Axiome erfüllen. Gegeben $U \subset V \subset X$ eine zusammenhängende Umgebung U von $\text{pr}(t)$, die in einer überlagerungstrivialen Teilmenge V von X liegt, besitzt ja jede Überlagerung $q_i : Z_i \rightarrow X$ genau einen stetigen Schnitt $s_i : V \rightarrow Z_i$, dessen Bild t_i enthält, und a fortiori genau einen stetigen Schnitt $s_i : U \rightarrow Z_i$, dessen Bild t_i enthält. Diese Schnitte liefern in ihrer Gesamtheit eine Abbildung $s : U \rightarrow T$ mit $s(\text{pr}(t)) = t$ und die so erhaltenen Teilmengen $s(U) \subset T$ nehmen wir als unsere Fundamentalsysteme von Umgebungen von $t \in T$. Es ist klar, daß wir so eine Topologie auf T erhalten und daß $\text{pr} : (T, z) \rightarrow (X, x)$ eine bepunktete Überlagerung ist. Die Zusammenhangskomponente $\tilde{X} \subset T$ von z ist dann nach 3.1.7 auch eine bepunktete Überlagerung von (X, x) und ist initial nach Konstruktion. \square

3.6.2. Wir nennen einen topologischen Raum nach 3.1.19 **wegetrivial**, wenn er zusammenhängend, schleifenfüllend und lokal wegzusammenhängend ist.

Satz 3.6.3 (Universelle Überlagerung lokal wegetrivialer Räume). *Jeder zusammenhängende lokal wegetriviale Raum besitzt eine wegetriviale universelle Überlagerung.*

Beweis. Wir wählen $x \in X$ fest und betrachten die Menge \tilde{X} aller Homotopie-klassen von Wegen mit Anfangspunkt x unter Homotopie mit festen Randpunkten,

in Formeln,

$$\tilde{X} := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma \text{ ist stetig, } \gamma(0) = x\} / \simeq$$

Äquivalent und vielleicht suggestiver aber komplizierter könnten wir \tilde{X} auch erklären als die Menge aller Paare (g, y) bestehend aus einem Punkt $y \in X$ und einer Homotopieklasse von Wegen $g \in \mathcal{W}(x, y)$. Die Homotopieklasse eines Weges γ heiße wieder $[\gamma]$. Insbesondere haben wir also eine Abbildung $u : \tilde{X} \rightarrow X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, die jeder Homotopieklasse von Wegen ihren gemeinsamen Endpunkt zuordnet. Sie ist surjektiv, da X wegzusammenhängend ist. Wir erklären nun auf \tilde{X} eine Topologie. Für jeden stetigen Weg γ mit Anfangspunkt x und jede offene Umgebung V seines Endpunktes $\gamma(1)$ setzen wir dazu

$$U(\gamma, V) := \{[\beta * \gamma] \mid \beta : [0, 1] \rightarrow V \text{ ist stetig mit } \beta(0) = \gamma(1)\}$$

und betrachten auf \tilde{X} die von allen $U(\gamma, V)$ erzeugte Topologie. Offensichtlich ist $u : \tilde{X} \rightarrow X$ stetig, das Urbild von V ist ja gerade die Vereinigung der $U(\gamma, V)$ über alle Wege γ mit Endpunkt in V . Wir müssen zeigen, daß u eine Überlagerung ist. Für $z \in X$ wählen wir dazu eine offene wegzusammenhängende Umgebung V von z , die ganz in einer schleifenfüllenden Umgebung enthalten ist. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\Phi : u^{-1}(z) \times V \rightarrow \tilde{X}, \quad ([\gamma], v) \mapsto [\beta * \gamma]$$

Hier meint $\beta : [0, 1] \rightarrow V$ irgendeinen Weg von z nach v , der ganz in V verläuft. Aufgrund unserer Voraussetzungen an V ist Φ wohldefiniert und eine Injektion mit Bild $u^{-1}(V)$. Wir zeigen, daß Φ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

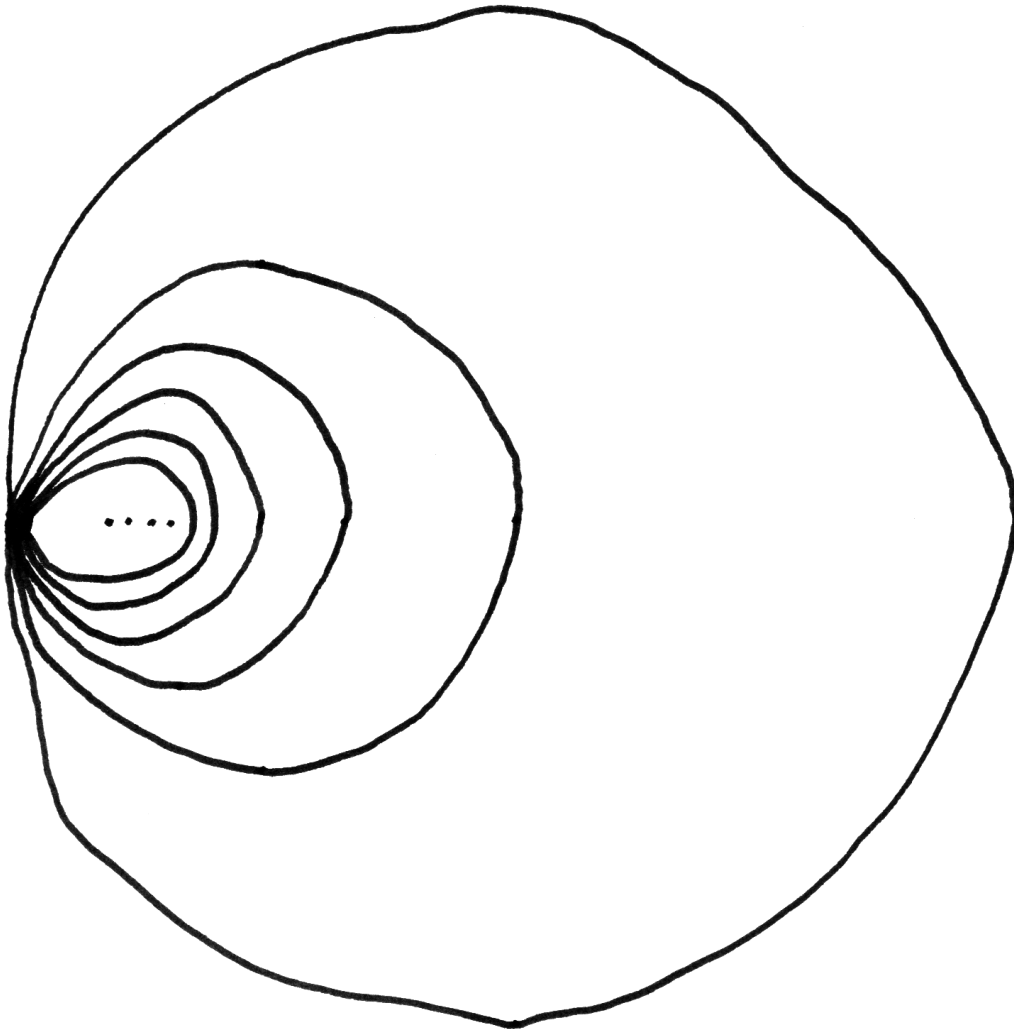
1. Φ ist stetig. In der Tat, liegt $\Phi([\gamma], v)$ in $U(\alpha, W)$, so auch $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1)$ für jede offene wegzusammenhängende Umgebung V_1 von v in $V \cap W$;
2. Φ ist offen. In der Tat, für wegzusammenhngendes offenes $V_1 \subset V$ gilt $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1) = U(\beta * \gamma, V_1)$ für jeden Weg $\beta : [0, 1] \rightarrow V$ mit $\beta(0) = z$, $\beta(1) \in V_1$.

Also ist $u : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und wir müssen nur noch zeigen, daß \tilde{X} wegzusammenhängend und schleifenfüllend ist. Bezeichne $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Klasse des konstanten Weges x . Jeder Weg $\omega : ([0, 1], 0) \rightarrow (X, x)$ mit Anfangspunkt x hat als Lift zum Anfangspunkt \tilde{x} den Weg $\tilde{\omega} : ([0, 1], 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$ gegeben durch $\tilde{\omega}(s) = [\omega_s]$ mit $\omega_s(t) = \omega(st)$. Die Wege $\omega_s : [0, 1] \rightarrow X$ sind also Anfangsstücke von ω , die so langsam durchlaufen werden, daß gilt $\omega_s(1) = \omega(s)$. Offensichtlich hat $\tilde{\omega}$ den Endpunkt $[\omega]$. Mit X ist also auch \tilde{X} wegzusammenhängend. Jeder geschlossene Weg $\tilde{\alpha} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x})$ von unserem Punkt \tilde{x} zu sich selber

schließlich ist umgekehrt der Lift seines Bildes $\alpha \in \Omega(X, x)$ zum Anfangspunkt \tilde{x} und hat nach dem vorhergehenden folglich den Endpunkt $[\alpha]$. Aus $[\alpha] = \tilde{x}$ folgt aber, daß es eine Homotopie $h : \alpha \simeq \varepsilon_x$ zum konstanten Weg gibt. Diese können wir liften nach 3.4.13, da $[0, 1]^2$ überlagerungstrivial ist, und erhalten so $\tilde{h} : \tilde{\alpha} \simeq \tilde{\varepsilon}_x = \varepsilon_{\tilde{x}}$. Also ist jeder geschlossene Weg in \tilde{X} zusammenziehbar und \tilde{X} ist eine wegetriviale Überlagerung. Dann ist sie aber nach 3.1.20 auch überlagerungstrivial sowie lokal überlagerungstrivial und nach 3.5.13 eine universelle Überlagerung. \square

Übungen

Übung 3.6.4. Für $n \geq 1$ betrachte man den Kreis $K_n \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $1/n$, der rechts von der y -Achse liegt und diese im Ursprung berührt. Man zeige, daß der Raum $X = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ keine einfach wegzusammenhängende Überlagerung besitzt. Dieser sogenannte **Kreisraum** dient oft als Gegenbeispiel.



Versuch der graphischen Darstellung des Kreisraums. Man muß sich dabei allerdings noch unendlich viele immer kleinere Kreise hinzudenken.

4 Überlagerungen und Gruppenwirkungen

4.1 Eigenschaften von Funktoren

4.1.1. Ich erinnere einige Begriffe zu Funktoren aus [LA2] 7.2.19.

- Definition 4.1.2.**
1. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **treu**, wenn er auf den Morphismen Injektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$;
 2. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **volltreu**, wenn er auf den Morphismen Bijektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FA, FA')$ induziert. Ich notiere volltreue Funktoren \hookrightarrow ;
 3. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn er volltreu ist und zusätzlich eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert, wenn es also in Formeln für alle $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $FA \cong B$. Ich notiere Äquivalenzen von Kategorien $\xrightarrow{\sim}$. Die doppelte Schlange soll andeuten, daß dieser Begriff schwächer ist als der Begriff eines Isomorphismus von Kategorien, wie er im Anschluß eingeführt wird;
 4. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt ein **Isomorphismus von Kategorien**, wenn er bijektiv ist auf Objekten und auf Morphismen, wenn er also ein Isomorphismus ist in der Kategorie der Kategorien aus 4.7.1. Ich notiere Isomorphismen von Kategorien $\xrightarrow{\cong}$.

Beispiel 4.1.3. Sei k ein Körper. Wir betrachten die Kategorie Modf_k aller endlichdimensionalen alias endlich erzeugten k -Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Das Kürzel steht für „finitely generated k -Module“, eine andere Bezeichnung für dasselbe Objekt. Weiter betrachten wir, und zwar sogar für einen beliebigen Ring k , die **Matrixkategorie** $\text{Mat} = \text{Mat}_k$ mit Objekten $\text{Ob}(\text{Mat}) := \mathbb{N}$ und Matrizen mit Einträgen in k des entsprechenden Formats als Morphismen, in Formeln $\text{Mat}(m, n) := \text{Mat}(n \times m; k)$. Die Verknüpfung von Morphismen in Mat schließlich sei die Matrixmultiplikation. Im Fall eines Körpers k ist dann der offensichtliche Funktor $n \mapsto k^n$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Mat}_k \xrightarrow{\sim} \text{Modf}_k$$

zwischen unserer Matrixkategorie Mat_k und der Kategorie der endlich erzeugten k -Vektorräume, aber ist natürlich kein Isomorphismus von Kategorien. Diese Aussage faßt eine Vielzahl von Aussagen der linearen Algebra zusammen und illustriert meines Erachtens recht gut die Kraft und Eleganz der Sprache der Kategorientheorie. Wenn unser Ring k selbst durch einen größeren Ausdruck gegeben ist, schreiben wir für unsere Matrixkategorie statt Mat_k auch manchmal $\text{Mat}(k)$.

Übungen

Übung 4.1.4. Jede Äquivalenz von Kategorien induziert eine Bijektion zwischen den zugehörigen Isomorphieklassen von Objekten. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen k -Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, alias durch Elemente von \mathbb{N} , alias durch Isomorphieklassen der Matrixkategorie.

4.2 Transformationen

4.2.1. Ich erinnere nun an das Konzept einer Transformation von Funktoren, wie es in [LA2] 7.4 ausführlicher besprochen wird.

Definition 4.2.2. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Funktoren. Eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ ist eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathcal{A}$ einen Morphismus $\tau_X \in \mathcal{B}(FX, GX)$ zuordnet derart, daß für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{A} das folgende Diagramm in \mathcal{B} kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\tau_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\tau_Y} & GY \end{array}$$

In Formeln meint dies „Kommutieren“ die Gleichheit $(Gf) \circ \tau_X = \tau_Y \circ (Ff)$ in der Morphismenmenge $\mathcal{B}(FX, GY)$. Ob ein Doppelpfeil eine Transformation von Funktoren oder vielmehr eine Implikation meint, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sind alle τ_X Isomorphismen, so nenne ich τ eine **Isotransformation** und notiere sie $\xrightarrow{\cong}$. Gibt es zwischen zwei Funktoren eine Isotransformation, so heißen sie **isomorph**.

4.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere Transformationen meist „natürliche Transformationen“. Diese Terminologie schien mir jedoch unnötig umständlich und entspricht auch nicht meinem Sprachempfinden: Ich möchte zum Beispiel unter der „natürlichen“ Transformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie aller \mathbb{R} -Vektorräume in den Bidualraumfunktoren gerne die in 4.2.4 gegebene Transformation verstehen, die zwar keineswegs die einzige Transformation zwischen diesen Funktoren ist, aber vielleicht schon die „natürlichste“. In der Literatur heißen unsere Isotransformationen auch und sogar meist **Isomorphismen von Funktoren** oder **Äquivalenzen von Funktoren**.

Beispiel 4.2.4 (Bidualraum und Identitätsfunktoren). Seien k ein Körper und $B : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$ der Funktor, der jedem k -Vektorraum V seinen Bidualraum $BV := V^{\text{TT}}$ zuordnet. So liefern die Evaluationen $\text{ev}_V : V \rightarrow V^{\text{TT}}$, $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ eine Transformation $\text{ev} : \text{Id} \Rightarrow B$ und eine Isotransformation

zwischen den Restriktionen dieser Funktoren auf die Kategorie der endlichdimensionalen k -Vektorräume, vergleiche [LA1] 2.9.26. Oft formalisiert man Situationen dieser Art nicht bis ins Letzte aus und spricht etwa von **kanonischen Abbildungen** oder **kanonischen Isomorphismen**, wenn bei formaler Betrachtung Abbildungen oder Isomorphismen $\tau_X : FX \rightarrow GX$ gemeint sind, die in ihrer Gesamtheit eine Transformation beziehungsweise Isotransformation von Funktoren $\tau : F \xrightarrow{\sim} G$ bilden.

Beispiel 4.2.5 (Dualraum und Transponieren). Sei k ein Körper. Wir betrachten den Dualraumfunktork $D : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k^{\text{opp}}$, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet. Sei $T : \text{Mat}_k \rightarrow \text{Mat}_k^{\text{opp}}$ der Funktor auf der Matrizenkategorie Mat_k aus 4.1.3, der die Objekte festhält und Matrizen transponiert. Sei schließlich noch $R : \text{Mat}_k \rightarrow \text{Mod}_k$ unser Realisierungsfunktork $n \mapsto k^n$ aus 4.1.3. So erhalten wir eine Isotransformation

$$\tau : R^{\text{opp}}T \xrightarrow{\sim} DR$$

dadurch, daß wir jeder natürlichen Zahl alias jedem Objekt $n \in \text{Mat}_k$ den offensichtlichen Isomorphismus $\tau_n : k^n \xrightarrow{\sim} (k^n)^\top$ zuordnen. Es kann hilfreich sein, durch Doppelpfeile in Diagrammen von Kategorien und Funktoren klarzumachen, zwischen welchen Funktoren eine Transformation gemeint ist. So wäre etwa in diesem Beispiel unser τ ein möglicher Doppelpfeil im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_k & \xrightarrow{T} & \text{Mat}_k^{\text{opp}} \\ R \downarrow & \swarrow \tau & \downarrow R^{\text{opp}} \\ \text{Mod}_k & \xrightarrow{D} & \text{Mod}_k^{\text{opp}} \end{array}$$

In diesem Fall könnten wir zusätzlich unseren Doppelpfeil noch mit einer Schlange versehen, da er ja einen Isomorphismus von Funktoren darstellt.

Beispiel 4.2.6. Sind $\tau : F \Rightarrow G$ und $\sigma : G \Rightarrow H$ Transformationen, so ist auch $\sigma \circ \tau : F \Rightarrow H$ gegeben durch $(\sigma \circ \tau)_X := \sigma_{FX} \circ \tau_X$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie von F eine Transformation. Des weiteren gibt es für jeden Funktor F die **identische Transformation** $\text{id} = \text{id}_F$ von besagtem Funktor zu sich selber, gegeben durch $(\text{id}_F)_X := \text{id}_{FX}$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie unseres Funktors. Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien, so bilden die Funktoren $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ selbst eine Kategorie, mit Funktoren als Objekten und Transformationen als Morphismen. Ich verwende für diese **Funktorkategorie** die beiden Notation $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, so daß etwa für Funktoren $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ die Menge der Transformationen

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(F, G) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F, G)$$

notiert werden kann. Werden die Kategorien selber durch größere Ausdrücke gegeben, so sind für die Menge der Transformationen auch abkürzende Notationen

wie etwa $\text{Trans}(F, G)$ sinnvoll und üblich. Unsere Isotransformationen sind genau die Isomorphismen der Funktorkategorie.

Beispiel 4.2.7. Seien $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Funktoren und $\tau : F \Rightarrow G$ eine Transformation. Gegeben ein weiterer Funktor $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ erhalten wir eine Transformation $H\tau : HF \Rightarrow HG$ durch $(H\tau)_X := H(\tau_X)$. Gegeben ein weiterer Funktor $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ erhalten wir eine Transformation $\tau K : FK \Rightarrow GK$ durch $(\tau K)_W := \tau_{KW}$. Offensichtlich liefern diese Konstruktionen ihrerseits Funktoren $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ und $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ zwischen den entsprechenden Funktorkategorien, die wir als **Nachschaten von H** beziehungsweise **Vorschalten von K** bezeichnen.

4.2.8 (Schwierigkeiten der Notation). Die Notationen τK und $H\tau$ führen leicht zu Verwirrung, sobald nicht aus der Art der Symbole klar ist, welche Symbole Funktoren und welche Transformationen darstellen. Ich kenne keine generelle Lösung für diese Schwierigkeiten der Notation. Hier versuche ich, eine gewisse Übersichtlichkeit dadurch zu erreichen, daß ich systematisch lateinische Großbuchstaben für Funktoren und kleine griechische Buchstaben für Transformationen verwende.

Übungen

Übung 4.2.9 (Homotopie und fundamentales Gruppoid). Gegeben stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ liefert jede Homotopie $H : f \simeq g$ eine Isotransformation $H_{\#} : f_{\#} \xrightarrow{\cong} g_{\#}$ zwischen den auf den Wegekategorien induzierten Funktoren $f_{\#}, g_{\#} : \mathcal{W}_X \rightarrow \mathcal{W}_Y$ mittels der Isomorphismen $(H_{\#})_x = [H(x, t)] \in \mathcal{W}_Y(f(x), g(x))$.

Übung 4.2.10. Sind zwei Funktoren isomorph und ist der eine eine Äquivalenz von Kategorien, so auch der andere.

Übung 4.2.11. Sei G ein Monoid. Die G -Mengen mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden dann eine Kategorie $G\text{-Ens}$. Bilden wir zu unserem Monoid G die Ein-Objekt-Kategorie $[G]$, so liefert der hoffentlich offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$G\text{-Ens} \xrightarrow{\cong} \text{Cat}([G], \text{Ens})$$

Übung 4.2.12. Man zeige: Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es eine Äquivalenz von Kategorien in die Gegenrichtung $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ gibt nebst einer Isotransformation $\tau : \text{Id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\cong} GF$. Die Äquivalenz G oder genauer das Paar (G, τ) heißt dann ein **quasiinverser Funktor zu F** . Man zeige weiter: Zu jedem Paar (G, τ) wie eben gibt es genau eine Isotransformation $\eta : FG \xrightarrow{\cong} \text{Id}_{\mathcal{A}}$ mit $(\eta F) \circ (F\tau) = \text{id}_F$.

Übung 4.2.13. Man zeige: Genau dann ist ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ gibt derart, daß FG isomorph ist zum Identitätsfunktor auf \mathcal{B} und GF isomorph zum Identitätsfunktor auf \mathcal{A} .

Übung 4.2.14. Man zeige: Gegeben eine Äquivalenz von Kategorien $F : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ und ein Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ nebst einer Isotransformation $\tau : FG \xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathcal{A}}$ ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien und (G, τ) quasiinvers zu F .

Übung 4.2.15 (Äquivalenzen von Funktorkategorien). Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und ist $K : \mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Vorschalten von K eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich $H : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von H eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

Ergänzende Übung 4.2.16 (Exponentialgesetz für Kategorien). Man zeige, daß man für je drei Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ einen Isomorphismus von Kategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \text{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

erhält durch die Vorschrift $F \mapsto \tilde{F}$ mit $\tilde{F}(A, B) = (F(A))(B)$ auf Objekten und eine vom Leser zu spezifizierende Vorschrift auf Morphismen.

4.3 Adjungierte Funktoren

4.3.1. Das Konzept adjungierter Funktoren gehört zu den Grundbegriffen der Kategorientheorie. Die Terminologie kommt vermutlich vom Fall der Restriktions- und Induktionsfunktoren aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen her, die ein Paar von adjungierten Funktionen bilden und deren Effekte auf Charakteren adjungierte lineare Abbildungen im Sinne der linearen Algebra sind.

Definition 4.3.2. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren. Eine **Adjunktion** α von L mit R oder in Kurzschreibweise $\alpha : L \dashv R$ ist eine Isotransformation

$$\alpha : \mathcal{B}(L, _) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(_, R)$$

von Funktoren $\mathcal{A}^{\text{opp}} \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Ens}$, also explizit eine Familie von Bijektionen $\alpha_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$ für $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ mit gewissen Natürlichkeitseigenschaften, genauer mit $\alpha(\varphi \circ Lf) = \alpha(\varphi) \circ f$ sowie $\alpha(g \circ \varphi) = Rg \circ \alpha(\varphi)$ für $f : A' \rightarrow A$ und $\varphi : LA \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow B'$.

Beispiel 4.3.3 (Freie Gruppen als adjungierter Funktor). Der Vergißfunktor von den Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie Gruppe über besagter Menge zuordnet, wie sie in 2.5.6 eingeführt wird. Mit der Notation $v : \text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ für den vergeßlichen Funktor haben wir für jede Gruppe G und jede Menge X eine natürliche Bijektion

$$\text{Grp}(\text{Grp}^{\wedge} X, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, vG)$$

Der Vergißfunktor von den abelschen Gruppen in die Mengen hat ähnlich als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie abelsche Gruppe über besagter Menge zuordnet, für die wir die Notationen $\text{Ab}^{\wedge} X = \mathbb{Z}X$ verwenden.

Beispiel 4.3.4 (Das Exponentialgesetz als Adjunktion). Gegeben eine Menge Z ist der Funktor $(Z \times) : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$ linksadjungiert zum Funktor $\text{Ens}(Z,) : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$ mittels der kanonischen Bijektionen

$$\text{Ens}(Z \times X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, \text{Ens}(Z, Y))$$

aus dem Exponentialgesetz [GR] 1.6.5. Weiter ist der Funktor $\text{Ens}(, Z) : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$ linksadjungiert zum Funktor $\text{Ens}(, Z)^{\text{opp}} : \text{Ens}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ens}$ mittels der in derselben Weise konstruierten kanonischen Bijektionen

$$\text{Ens}^{\text{opp}}(\text{Ens}(X, Z), Y) = \text{Ens}(Y, \text{Ens}(X, Z)) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, \text{Ens}(Y, Z))$$

Beispiele 4.3.5 (Adjunktionen mit Hom und \otimes). Gegeben ein Körper k und ein k -Vektorraum E ist der Funktor $E \otimes_k : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$ linksadjungiert zu $\text{Hom}_k(E,) : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$ und der Funktor $\text{Hom}_k(, E) : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k^{\text{opp}}$ hat als Rechtsadjungierten den Funktor $\text{Hom}_k(, E)^{\text{opp}} : \text{Mod}_k^{\text{opp}} \rightarrow \text{Mod}_k$. Ausgezeichnete derartige Adjunktionen werden in [LA2] 6.1.19 und [LA1] 2.3.16 angegeben. Sie sind als Spezialfälle der Adjunktionen [TSK] 1.4.12 und [TSK] 1.4.13 in Schmelzkategorien.

4.3.6 (Einheit und Koeinheit einer Adjunktion). Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren. Gegeben eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ von Funktoren erhalten wir Transformationen $\hat{\alpha} : \text{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$ und $\check{\alpha} : LR \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{B}}$ durch $\hat{\alpha}_A := \alpha(\text{id}_{LA})$ und $\check{\alpha}_B := \alpha^{-1}(\text{id}_{RB})$. Sie heißen die **Einheit** und **Koeinheit** der Adjunktion. Oft versteht sich die zugrundeliegende Adjunktion α von selbst und wir brauchen dafür gar keine Notation vorzusehen. Dann notieren wir die Einheit und Koeinheit meist $\varepsilon_A : A \rightarrow RLA$ und $\eta_B : LRB \rightarrow B$.

Beispiel 4.3.7 (Einheit und Koeinheit im Fall freier Gruppen). Unsere Adjunktion $\text{Grp}(\text{Grp}^{\wedge} X, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, vG)$ hat als Einheit die kanonischen Abbildungen $\varepsilon_X : X \rightarrow v \text{Grp}^{\wedge} X$ und als Koeinheit die kanonischen Gruppenhomomorphismen $\eta_G : \text{Grp}^{\wedge}(vG) \rightarrow G$ aus dem Beweis von 2.6.2.

Beispiel 4.3.8. Der Funktor $\text{Spek} : \text{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Top}$ aus [TM] 3.4 ist rechtsadjungiert zum Funktor $\mathcal{C} : \text{Top} \rightarrow \text{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\text{opp}}$. Diese Aussage ist der Kern der Argumentation in [TM] 3.4.6.

Lemma 4.3.9 (Äquivalenz durch Adjunktion). *Seien $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren und $\alpha : L \dashv R$ eine Adjunktion.*

1. *Genau dann besteht die Einheit der Adjunktion $\hat{\alpha}$ aus Isomorphismen $\hat{\alpha}_X : X \xrightarrow{\sim} RLX$, wenn der Funktor L volltreu ist;*
2. *Genau dann besteht die Koeinheit der Adjunktion $\check{\alpha}$ aus Isomorphismen $\check{\alpha}_Y : LRY \xrightarrow{\sim} Y$, wenn der Funktor R volltreu ist;*
3. *Genau dann bestehen $\hat{\alpha}$ und $\check{\alpha}$ beide aus Isomorphismen, wenn L und R Äquivalenzen von Kategorien sind. Man nennt L und R dann zueinander **quasiinverse Funktoren** und versteht dabei die Adjunktion als einen Teil des Datums. In diesem Fall liefern $\hat{\alpha}^{-1}$ und $\check{\alpha}^{-1}$ auch eine Adjunktion (R, L) .*

Beweis. Aus unseren Erkenntnissen zu Einheiten und Koeinheiten von Adjunktionen 4.8.1 folgt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(X, Y) & \xrightarrow{L} & \mathcal{B}(LX, LY) \\ \hat{\alpha}_Y \circ \downarrow & & \downarrow \alpha_{X, LY} \\ \mathcal{A}(X, RLY) & \equiv & \mathcal{A}(X, RLY) \end{array}$$

Das zeigt die erste Aussage. Die zweite Aussage zeigt man genauso. Für die dritte Aussage bemerkt man, daß unter der Annahme $\check{\alpha}_B : LRB \xrightarrow{\sim} B$ jedes $B \in \mathcal{B}$ isomorph ist zu einem Objekt der Gestalt LX . \square

Beispiel 4.3.10 (Der Dualraumfunktors als sein eigener Adjungierter). Der Rechtsadjungierte des Dualraumfunktors $D : k\text{-Mod} \rightarrow k\text{-Mod}^{\text{opp}}$ ist der Funktor $D^{\text{opp}} : k\text{-Mod}^{\text{opp}} \rightarrow k\text{-Mod}$, der durch dieselbe Abbildungsvorschrift gegeben wird, vermittelt der Adjunktion, die gegeben wird durch die kanonischen Identifikationen

$$\text{Hom}_k(V, DW) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}_k^{(2)}(V, W; k) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(DW, V)$$

Vorschau 4.3.11. Mehr zu adjungierten Funktoren diskutieren wir in 4.8.

Übungen

Übung 4.3.12. Besitzt ein Funktor einen Rechtsadjungierten, so vertauscht er mit Koprodukten und macht kokartesische Diagramme zu kokartesischen Diagrammen. Besitzt ein Funktor einen Linksadjungierten, so vertauscht er mit Produkten und macht er kartesische Diagramme zu kartesischen Diagrammen. Stärker zeigen Sie etwa in [TS] 7.1.30, daß Linksadjungierte mit „Kolimites“ vertauschen und Rechtsadjungierte mit „Limites“.

Ergänzende Übung 4.3.13 (Adjunktionen auf Funktorkategorien). Seien Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gegeben. Man zeige, daß jedes Paar (L, R) von adjungierten Funktoren $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ auch ein Paar $(L \circ, R \circ)$ von adjungierten Funktoren zwischen den Funktorkategorien $(L \circ) : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ und $(R \circ) : \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ liefert.

Übung 4.3.14 (Opponierete Adjunktionen). Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren. Jede Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ kann auch als Adjunktion $\alpha^{\text{opp}} : R^{\text{opp}} \dashv L^{\text{opp}}$ der zugehörigen Funktoren $L^{\text{opp}} : \mathcal{A}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{opp}}$ und $R^{\text{opp}} : \mathcal{B}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{opp}}$ zwischen den jeweiligen opponierten Kategorien aufgefaßt werden. Ich nenne α^{opp} die **opponierte Adjunktion**.

4.4 Überlagerungen und Gruppenwirkungen

4.4.1. Gegeben \mathcal{C} eine Kategorie, $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $G := \mathcal{C}(A)$ das Monoid seiner Endomorphismen erhalten wir stets einen Funktor in die Kategorie der G -Rechtsmengen

$$\mathcal{C}(A, _) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens-}G$$

Wir setzen dazu $fg := f \circ g$ für alle $B \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$ und $g \in \mathcal{C}(A)$. Man beachte für das Folgende, daß das Monoid der Endomorphismen einer universellen Überlagerung nach 3.5.5 stets eine Gruppe ist.

Satz 4.4.2 (Überlagerungen und Gruppenwirkungen). *Gegeben eine universelle Überlagerung $u : \tilde{X} \rightarrow X$ mit Deckbewegungsgruppe $G := \text{Top}_X^{\times}(\tilde{X})$ liefert der Funktor $T := \text{Top}_X(\tilde{X}, _)$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der G -Rechtsmengen*

$$T : \text{Üb}_X \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/G}$$

Beispiel 4.4.3. Man überlege sich die Bedeutung des Satzes zunächst im Fall der universellen Überlagerung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ der Kreislinie. In diesem Fall erhalten wir für die Deckbewegungsgruppe einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ durch $g \mapsto g(0)$.

Beweis. Wir konstruieren zunächst einen Funktor in die Rückrichtung. Gegeben eine G -Rechtsmenge M konstruieren wir eine stetige Abbildung

$$M \times_{/G} \tilde{X} \rightarrow X$$

Wir betrachten dazu auf $M \times \tilde{X}$ die Operation von G gegeben durch $g(m, \tilde{x}) = (mg^{-1}, g\tilde{x})$. Die Bahn von (m, \tilde{x}) notieren wir $[m, \tilde{x}]$. Da G topologisch frei operiert auf \tilde{X} nach 3.4.15, operiert es erst recht topologisch frei auf $M \times \tilde{X}$. Nach 3.3.13 ist also der Bahnenraum $M \times_{/G} \tilde{X}$ eine Überlagerung von X . Den in dieser Weise konstruierten Funktor in die Rückrichtung bezeichnen wir mit A , in Formeln

$$A := (\times_{/G} \tilde{X}) : \text{Ens}_{/G} \rightarrow \text{Üb}_X$$

Als nächstes erklären wir eine Adjunktion $A \dashv T$. Gegeben eine G -Rechtsmenge M und eine Überlagerung $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow X$ gilt es, eine natürliche Bijektion

$$\text{Ens}_{/G}(M, \text{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \text{Top}_X(M \times_{/G} \tilde{X}, \hat{X})$$

zwischen der Menge der G -äquivalenten Abbildungen links und der Menge der stetigen Abbildungen über X rechts anzugeben. Man erhält sie durch Einschränken der offensichtlichen Bijektion

$$\text{Ens}(M, \text{Top}(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(M \times \tilde{X}, \hat{X})$$

auf die Fixpunkte einer geeigneten G -Operation auf beiden Seiten. Jetzt müssen wir nach 4.3.9 nur noch zeigen, daß die durch unsere Adjunktion definierten Transformationen $\text{Id} \Rightarrow TA$ und $AT \Rightarrow \text{Id}$ Isotransformationen sind. Die Erste spezialisiert auf einer G -Menge M zur Abbildung $M \rightarrow \text{Top}_X(\tilde{X}, M \times_{/G} \tilde{X})$ gegeben durch $m \mapsto (z \mapsto [m, z])$ und ist eine Bijektion aufgrund der universellen Eigenschaft der universellen Überlagerung. Die Zweite spezialisiert auf einer Überlagerung \hat{X} zur Abbildung $\text{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X}) \times_{/G} \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ gegeben durch $[d, z] \mapsto d(z)$ und ist ebenfalls bijektiv aufgrund der universellen Eigenschaft der universellen Überlagerung. Als bijektive Decktransformation muß sie dann sogar ein Homöomorphismus sein. \square

4.4.4 (Zusammenhängende Überlagerungen und Untergruppen). Gegeben eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$ ist \tilde{X} nach 3.5.7 stets zusammenhängend. Für die Gruppe G der Decktransformationen und eine G -Rechtsmenge M ist also $M \times_{/G} \tilde{X}$ genau dann zusammenhängend, wenn M eine transitive G -Menge ist. In Worten induziert also unser Funktor $T := \text{Top}_X(\tilde{X}, \)$ aus 4.4.2 auch eine Äquivalenz

$$\{\hat{X} \in \text{Üb}_X \mid \hat{X} \text{ zusammenhängend}\} \xrightarrow{\sim} \{M \in \text{Ens}_{/G} \mid M \text{ transitiv}\}$$

zwischen der Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen von X und der Kategorie der transitiven G -Rechtsmengen. Nach 3.2.5 werden also die zusammenhängenden Überlagerungen von X klassifiziert durch Konjugationsklassen von Untergruppen von G und man prüft leicht, daß dabei die Klasse der Untergruppe $H \subset G$ auf die Isomorphieklasse der Überlagerung $\tilde{X}/H \rightarrow X$ geht. Genauer erhalten wir mit 3.2.8 eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen von X und der opponierten Untergruppenkategorie zu G aus 3.2.8.

Ergänzung 4.4.5 (Bezug zur Galoistheorie). Die hier vorgestellte Theorie ist strukturell eng verwandt mit der Galoistheorie. Ist \tilde{K}/K eine endliche Galois-erweiterung, so kann man den Hauptsatz der Galoistheorie [AL] 4.3.1 nämlich dahingehend interpretieren, daß der Funktor $\text{Kring}^K(_, \tilde{K})$ der K -linearen Körperhomomorphismen nach \tilde{K} eine Äquivalenz von Kategorien

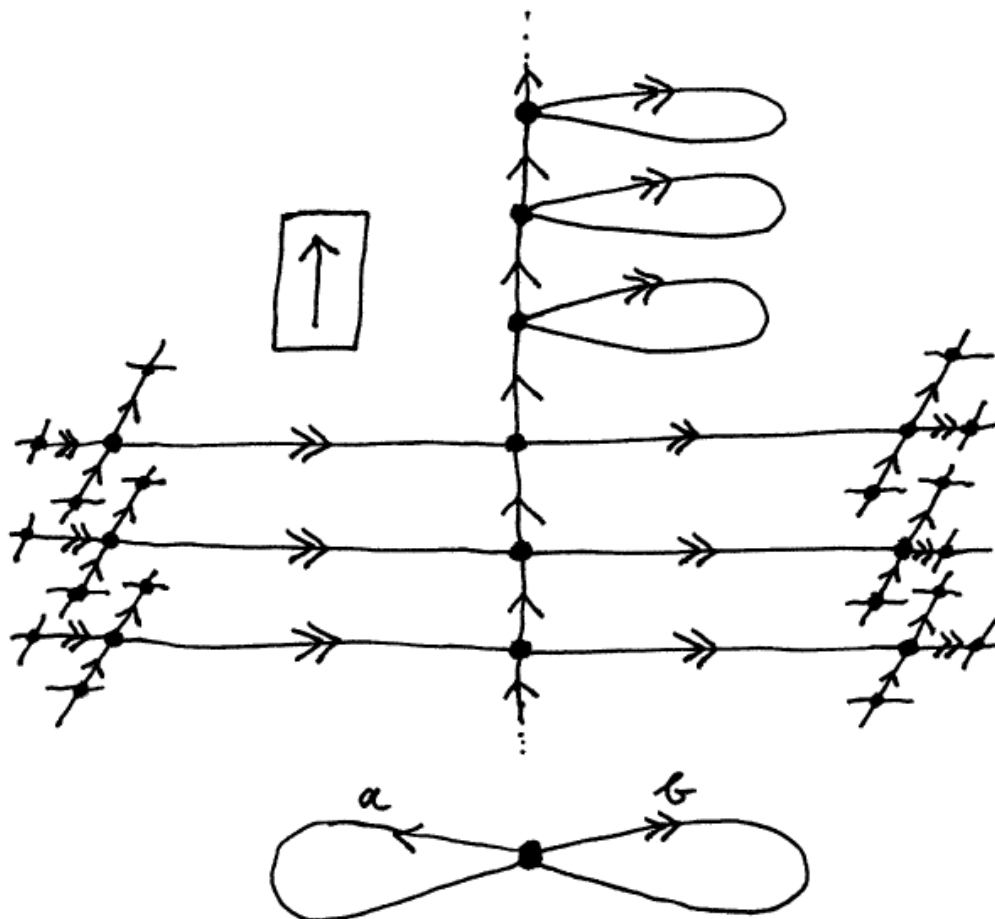
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Körpererweiterungen von } K, \\ \text{die sich in } \tilde{K} \text{ einbetten lassen} \end{array} \right\}^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \{ \text{transitive Gal}(\tilde{K}/K)\text{-Mengen} \}$$

liefert, für $\text{Gal}(\tilde{K}/K) = (\text{Kring}^K)^{\times}(\tilde{K})$ die Galoisgruppe. Die Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen kann im Licht von 4.4.2 also aufgefaßt werden als ein geometrisches Analogon zur opponierten Kategorie unserer Kategorie von Körpererweiterungen. Noch besser würde die Analogie, wenn wir auch nur alle zusammenhängenden Überlagerungen betrachten würden, die eine Decktransformation von einer fest gewählten Galois-Überlagerung empfangen können.

Ergänzung 4.4.6 (Die Kategorie der G -Mengen bestimmt die Gruppe G). Gegeben eine Gruppe G kennt die Kategorie der G -Mengen bereits die Gruppe G bis auf Isomorphismus. Wir betrachten genauer eine Menge \mathcal{C} von G -Mengen, die die Gruppe G selbst enthält und mindestens je eine einelementige und eine zweielementige Menge mit der trivialen G -Operation, und betrachten die Kategorie \mathcal{C} all dieser G -Mengen. Darin gibt es nach unseren Annahmen ein finales Objekt pt und ein Koproduct $\text{pt} \sqcup \text{pt}$ dieses finalen Objekts mit sich selbst. Sicher ist unsere Kategorie \mathcal{C} eine \mathfrak{M} -Kategorie für ein geeignetes Mengensystem \mathfrak{M} . Man überzeugt sich leicht, daß ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ genau dann ein homogener Raum ist, wenn für den dadurch dargestellten Funktor $F := \mathcal{C}(X, _) : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{M}\text{Ens}$ die kanonische Abbildung eine Bijektion

$$F(\text{pt}) \sqcup F(\text{pt}) \xrightarrow{\sim} F(\text{pt} \sqcup \text{pt})$$

liefert. Weiter ist die G -Operation auf einem homogenen Raum X genau dann frei, gilt $\mathcal{C}(X, G) \neq \emptyset$ alias wenn es von X zu jedem Objekt von \mathcal{C} einen Morphismus gibt. Die G -Torsoren können somit als Objekte der Kategorie \mathcal{C} unter alleiniger Verwendung der Struktur dieser Kategorie charakterisiert werden. Die Gruppe G erhält man dann bis auf Isomorphismus als die Opponiente der Automorphismengruppe eines jeden solchen G -Torsors.



Graphische Darstellung einer Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum, bei der nicht jede Decktransformation eine Deckbewegung ist. Überlagert wird die Figur einer Acht. Die fragliche Decktransformation schiebt „um eins nach oben“ und „faltet die beiden obersten der sich ins unendliche verzweigenden Äste über den Rest“. Die Fundamentalgruppe der Überlagerung für den zentralen Punkt als Basispunkt ist die von den Lifts aller $a^{-n}ba^n$ für $n > 0$ erzeugte Untergruppe $H \subset G$ der Fundamentalgruppe der Basis und unsere Decktransformation entspricht der durch $(\cdot a)$ induzierten Abbildung $G/H \rightarrow G/H$.

4.5 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

Definition 4.5.1. Seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $\gamma \in \Omega(X, x, y)$ ein Weg. Der **Transport durch Wegelifts**

$$\langle \gamma \rangle : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$$

längs des Weges γ von der Faser bei x in die Faser bei y wird erklärt als diejenige Abbildung, die jedem Punkt $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ den Endpunkt des Lifts $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ unseres Weges γ mit Anfangspunkt $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$ zuordnet, in Formeln $\langle \gamma \rangle(\tilde{x}) := \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)$. Hier verwenden wir, daß nach 3.1.17 das Intervall $[0, 1]$ überlagerungstrivial ist und daß damit nach 3.4.13 unser Weg genau einen Lift hat mit Anfangspunkt \tilde{x} .

Lemma 4.5.2 (Eigenschaften des Wegeliftungstransports). Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung.

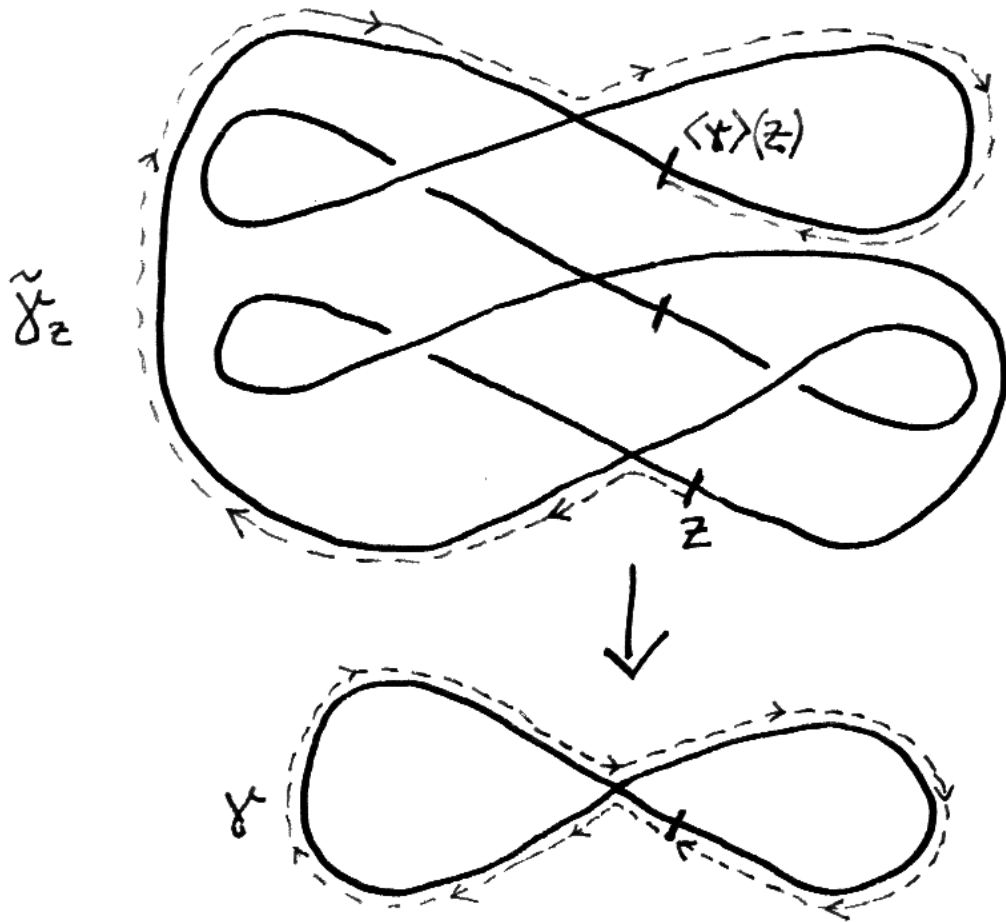
Homotopieinvarianz: *Homotope Wege in der Basis liefern denselben Transport durch Wegelifts auf den Fasern, in Formeln $\gamma \simeq \beta \Rightarrow \langle \gamma \rangle = \langle \beta \rangle$. Insbesondere ist auch für jede Homotopieklasse γ von Wegen die Abbildung $\langle \gamma \rangle$ wohldefiniert;*

Funktorialität: *Der Transport durch Wegelifts längs des konstanten Weges ε_x bei $x \in X$ ist die identische Abbildung $\langle \varepsilon_x \rangle = \text{id}$ auf der Faser $p^{-1}(x)$. Sind β und γ verknüpfbare Wege in X , so gilt $\langle \beta \rangle \circ \langle \gamma \rangle = \langle \beta * \gamma \rangle$;*

Natürlichkeit: *Ist $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ eine weitere Überlagerung und sind $f : X \rightarrow Y$ und $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ stetige Abbildungen mit $q \circ \tilde{f} = f \circ p$ und ist γ ein Weg in X , so gilt $\tilde{f} \circ \langle \gamma \rangle = \langle \tilde{f}\gamma \rangle \circ \tilde{f}$.*

Ergänzung 4.5.3. Man mag den zweiten Punkt dahingehend zusammenfassen, daß jede Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ einen Funktor $[\tilde{X}] : \mathcal{W}_X \rightarrow \text{Ens}$ des fundamentalen Gruppoids von X in die Kategorie der Mengen liefert mittels der Vorschrift $x \mapsto p^{-1}(x)$ auf Objekten und $\gamma \mapsto \langle \gamma \rangle$ auf Morphismen. Der letzte Punkt besagt in dieser Sprache, daß die von f auf den Fasern induzierte Abbildung eine Transformation unseres Funktors $[\tilde{Y}] : \mathcal{W}_Y \rightarrow \text{Ens}$ zur Verknüpfung des Funktors $f_{\#} : \mathcal{W}_Y \rightarrow \mathcal{W}_X$ mit dem Funktor $[\tilde{X}] : \mathcal{W}_X \rightarrow \text{Ens}$ ist, in Formeln also eine Transformation $[\tilde{Y}] \Rightarrow [\tilde{X}] \circ f_{\#}$.

Beweis. Wir zeigen nur die Homotopieinvarianz, die anderen Eigenschaften sind klar nach den Definitionen. Sei $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen unseren Wegen. Auf der vorderen beziehungsweise hinteren Kante unseres Quadrats haben wir also $h(0, t) = \gamma(t)$ beziehungsweise $h(1, t) = \beta(t)$, und auf der oberen und der unteren Kante ist H konstant. Da



Eine dreiblättrige Überlagerung der Acht, ein Punkt unten und die drei Punkte der Faser darüber, ein geschlossener Weg unten und die zugehörige Operation auf der Faser am Beispiel des „untersten“ Punktes der Faser, der in diesem Fall auf den „obersten“ Punkt der Faser geschoben wird.

unser Quadrat nach 3.1.23 überlagerungstrivial ist, gibt es für alle $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ einen Lift $\tilde{h} : [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ von h mit $\tilde{h}(0, 0) = \tilde{x}$. Nach dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts ist dieser Lift konstant \tilde{x} auf der unteren Kante, folglich ist er auf der vorderen beziehungsweise hinteren Kante der Lift mit Anfangspunkt \tilde{x} von γ beziehungsweise β . Da aber unser Lift auch konstant sein muß auf der oberen Kante, folgt $\langle \gamma \rangle(\tilde{x}) = \langle \beta \rangle(\tilde{x})$. \square

4.5.4. Gegeben eine Menge F bezeichnen wir die Gruppe aller Permutationen von F mit $\text{Ens}^\times(F)$. Das ist auch die Menge der invertierbaren Elemente des Monoids $\text{Ens}(F)$ aller Abbildungen von F in sich selber.

Satz 4.5.5. 1. Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $x \in X$ ein Punkt, so liefert der Wegeliftungstransport eine Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ auf der Faser $p^{-1}(x)$, die **Wegeliftungsoperation**;

2. Ist $q : \hat{X} \rightarrow X$ eine weitere Überlagerung und $d : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ eine Decktransformation, so ist deren Einschränkung $d : p^{-1}(x) \rightarrow q^{-1}(x)$ auf die Fasern eine $\pi_1(X, x)$ -äquivalente Abbildung.

Beweis. Das folgt alles sofort aus den im vorhergehenden Lemma 4.5.2 gezeigten Eigenschaften des Wegeliftungstransports. \square

4.5.6. Für jeden bepunkteten topologischen Raum (X, x) erhalten wir damit einen Funktor von der Kategorie seiner Überlagerungen in die Kategorie der Mengen mit Operation der Fundamentalgruppe, indem wir jeder Überlagerung von X ihre Faser bei x zuordnen. Dieser sogenannte **Faserfunktork** $F = F_x$ wird in Formeln gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{array}{ccc} F : \text{Üb}_X & \rightarrow & \pi_1(X, x)\text{-Ens} \\ p & \mapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

Satz 4.5.7 (Fundamentalgruppe einer Überlagerung).

1. Jede Überlagerung bepunkteter Räume $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ induziert eine Injektion $p_\# : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \hookrightarrow \pi_1(X, x)$ auf den Fundamentalgruppen und das Bild dieser Injektion ist die Standgruppe von \tilde{x} unter der Wegeliftungsoperation, in Formeln

$$\text{im } p_\# = \{ \gamma \in \pi_1(X, x) \mid \langle \gamma \rangle(\tilde{x}) = \tilde{x} \}$$

2. Ist zusätzlich unsere Überlagerung \tilde{X} wegzusammenhängend, so operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ transitiv auf der Faser über dem Basispunkt $p^{-1}(x)$.

Beweis. Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ beliebig und $x, y \in X$ ihre Bilder. So liefert nach unseren Definitionen und wegen der Eindeutigkeit von Lifts 3.4.10 das Nachschalten von p eine Bijektion

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{\sim} \{\gamma \in \Omega(X, x, y) \mid \langle \gamma \rangle(\tilde{x}) = \tilde{y}\}$$

Diese Bijektion induziert dann eine Bijektion auf Homotopieklassen. Setzen wir $\tilde{y} = \tilde{x}$, so ergibt sich der erste Teil. Läßt sich jeder Punkt \tilde{y} aus der Faser $p^{-1}(x)$ in \tilde{X} durch einen Weg α mit \tilde{x} verbinden, so liegt die Homotopieklasse von $\gamma = p \circ \alpha$ in $\pi_1(X, x)$ und wir haben $\tilde{y} = \langle \gamma \rangle(\tilde{x})$. \square

Proposition 4.5.8. *Gegeben X ein Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G erhalten wir für jeden Punkt $x \in X$ durch die Vorschrift $c_x(\gamma)^{-1}x = \langle \gamma \rangle x$ einen Gruppenhomomorphismus, den **Faserwirkungsvergleich***

$$c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \rightarrow G$$

Beweis. Bezeichne $p : X \rightarrow X/G$ die Quotientenabbildung. Nach 3.3.10 ist sie eine Überlagerung. Per definitionem operiert G frei und transitiv auf der Faser $p^{-1}(\bar{x})$ über $\bar{x} := p(x)$ und nach 4.5.5 kommutiert diese Operation mit der Operation von $\pi_1(X/G, \bar{x})$ durch Wegeliften. Das anschließende algebraische Lemma 4.5.9 beendet den Beweis. \square

Lemma 4.5.9 (Homomorphismen durch Torsoren). *Sei F eine Menge mit einer Linksoperation einer Gruppe H und einer freien transitiven Rechtsoperation einer Gruppe G , die in dem Sinne kommutieren, daß gilt $(hf)g = h(fg) \forall h \in H, f \in F, g \in G$. So liefert jedes Element $f \in F$ einen Gruppenhomomorphismus*

$$c_f : H \rightarrow G$$

durch die Vorschrift $hf = fc_f(h)$. Ist die Operation von H frei, so ist c_f injektiv. Ist die Operation von H transitiv, so ist c_f surjektiv.

Ergänzung 4.5.10. Analoges gilt für Monoide, wenn wir zusätzlich f so wählen, daß die Operation von G eine Bijektion $G \xrightarrow{\sim} X, g \mapsto fg$ liefert.

Beweis. Wir überlassen die formale Rechnung dem Leser und versuchen stattdessen eher informell, die Aussage transparent zu machen. Da G frei und transitiv operiert, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\rightarrow F \\ g &\mapsto fg \end{aligned}$$

eine G -äquivalente Bijektion. Die G -äquivalenten Abbildungen $\phi : G \rightarrow G$, also die Abbildungen ϕ mit $\phi(xg) = \phi(x)g \forall x, g \in G$, sind nun genau die Linksmultiplikationen mit Elementen $c \in G$ und entsprechen unter unserer Bijektion

$G \xrightarrow{\sim} F$ den Abbildungen $fg \mapsto fcg$. Insbesondere gilt das für die Abbildungen $\phi = (h \cdot)$. Das ist der strukturelle Grund für unser Lemma, das sich so als unmittelbare Konsequenz der Übung 3.2.6 erweist. \square

4.5.11 (Fundamentalgruppe von Bahnräumen). Operiert eine Gruppe G topologisch frei auf einem wegzusammenhängenden schleifenfüllenden Raum X , so ist der Faserwirkungsvergleich 4.5.8 für alle $x \in X$ ein Isomorphismus

$$c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \xrightarrow{\sim} G$$

In der Tat operiert nach 4.5.7 die Fundamentalgruppe $\pi_1(X/G, \bar{x})$ frei und transitiv auf der Faser über \bar{x} und dasselbe gilt per definitionem für G und die Behauptung folgt damit aus unserem algebraischen Lemma 4.5.9. Eine Variante für allgemeine Räume X wird in Übung 4.5.20 besprochen.

Beispiele 4.5.12. Aus 4.5.11 folgt insbesondere $\pi_1(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) = \pi_1(S^n / \{\pm 1\}) = \{\pm 1\}$ für $n \geq 2$ und $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

4.5.13 (Fundamentalgruppe als Deckbewegungsgruppe). Hat ein Raum X eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und ist diese wegzusammenhängend und schleifenfüllend, so ist der Faserwirkungsvergleich 4.5.8 für alle $x \in X$ und $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ ein Isomorphismus

$$c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} G$$

In der Tat operiert nach 3.5.10 die Deckbewegungsgruppe G jeder universellen Überlagerung topologisch frei und die Überlagerungsabbildung induziert einen Homöomorphismus $\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$, so daß wir 4.5.11 anwenden können. Ich erinnere daran, daß nach 3.6.3 jeder zusammenhängende lokal wegetriviale Raum eine wegetriviale universelle Überlagerung besitzt.

Satz 4.5.14 (über den Faserfunktork). Gegeben ein zusammenhängender lokal wegetriviale bepunkteter Raum (X, x) liefert der Faserfunktork $F = F_x : p \mapsto p^{-1}(x)$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der $\pi_1(X, x)$ -Mengen

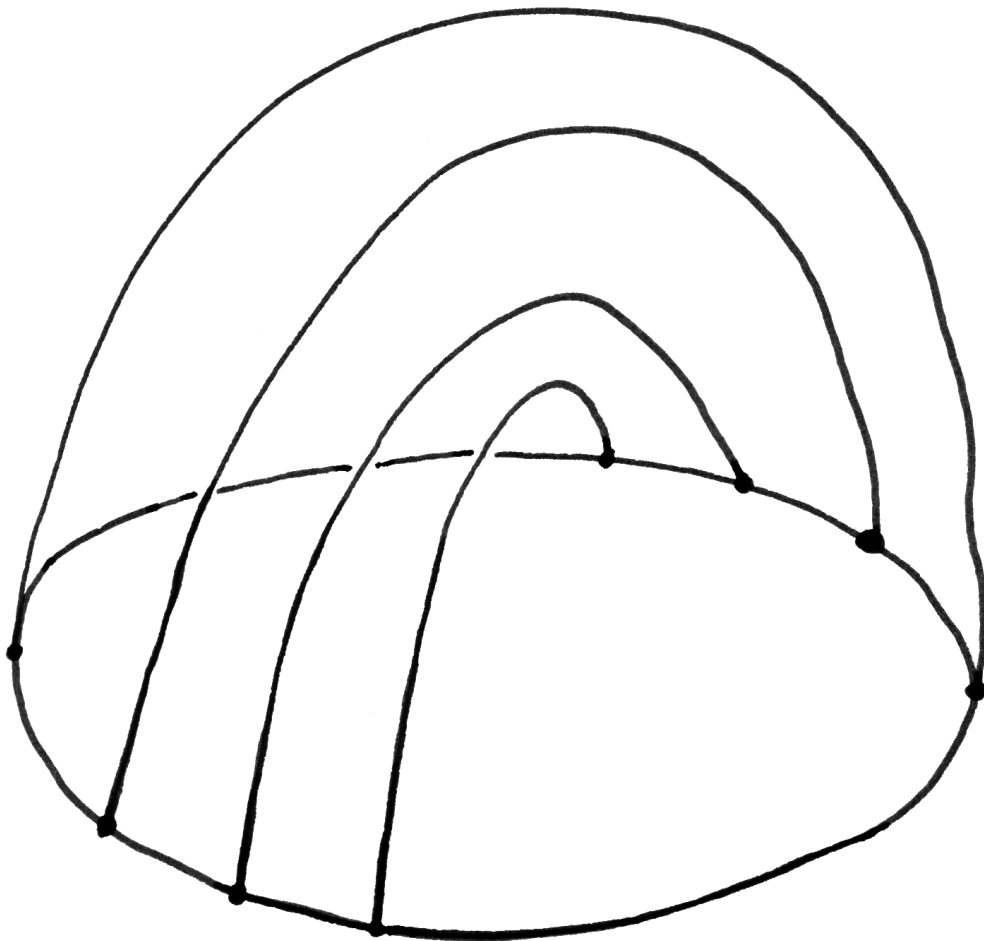
$$F : \text{Üb}_X \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x)\text{-Ens}$$

Beweis. Ich erinnere aus 4.4.2 die Äquivalenz von Kategorien

$$T : \text{Üb}_X \xrightarrow{\cong} \text{Ens-}G$$

für $T = \text{Top}_X(\tilde{X}, \cdot)$ und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung und G ihre Deckbewegungsgruppe. Ich erinnere weiter aus 4.5.13 den Faserwirkungsvergleich $c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} G$ für $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Er liefert eine Äquivalenz

$$C = C_{\tilde{x}} : \text{Ens-}G \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x)\text{-Ens}$$



Anschaulich gesprochen kann es passieren, daß man bei einem Rundweg auf $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ „mit dem Kopf nach unten wieder am Ausgangspunkt ankommt“. Diese Rundwege sind genau die nichtzusammenziehbaren Rundwege auf $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Um wieder in sein Auto einsteigen zu können, muß man sie noch ein zweites Mal gehen. Um das zu sehen, mag man sich $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ vorstellen als Kugelschale, in die ein Kreisrundes Loch geschnitten wurde, um dort ein Möbiusband alias eine Kreuzhabe einzukleben, wie ich sie hier gezeichnet habe.

vermittels der Vorschrift, daß wir erst die G -Rechtsoperation durch Inversenbildung in eine Linksoperation verwandeln und diese G -Linksoperation dann mithilfe von $c_{\tilde{x}}$ in eine Linksoperation von $\pi_1(X, x)$. Wir erhalten nun eine Isotransformation $\tau = \tau_{\tilde{x}} : CT \xrightarrow{\sim} F$ wie im Doppelpfeil des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \text{Üb}_X & \xrightarrow{T} & \text{Ens-}G \\ \parallel & \swarrow \tau & \downarrow C \\ \text{Üb}_X & \xrightarrow{F} & \pi_1(X, x)\text{-Ens} \end{array}$$

angedeutet durch die Isomorphismen $\tau_{\hat{X}} : CT\hat{X} \xrightarrow{\sim} F\hat{X}$, $d \mapsto d(\tilde{x})$ von Mengen mit $\pi_1(X, x)$ -Operation, wie der Leser leicht prüfen kann. Da C und T Äquivalenzen von Kategorien sind, muß auch F eine Äquivalenz von Kategorien sein. \square

Beispiel 4.5.15. Das nebenstehende Bild zeigt eine Überlagerung der Figur 8. Die Fundamentalgruppe dieser Überlagerung ist offensichtlich eine nicht endlich erzeugte Untergruppe der Fundamentalgruppe der Figur 8, die ihrerseits durchaus endlich erzeugt ist.

Satz* 4.5.16 (Liftbarkeitskriterium). *Seien $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ eine Überlagerung, (Y, y) ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender bepunkteter Raum und $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ stetig. Genau dann existiert ein Lift \tilde{f} von f , wenn in $\pi_1(X, x)$ die Inklusion $\text{im } f_{\#} \subset \text{im } p_{\#}$ gilt.*

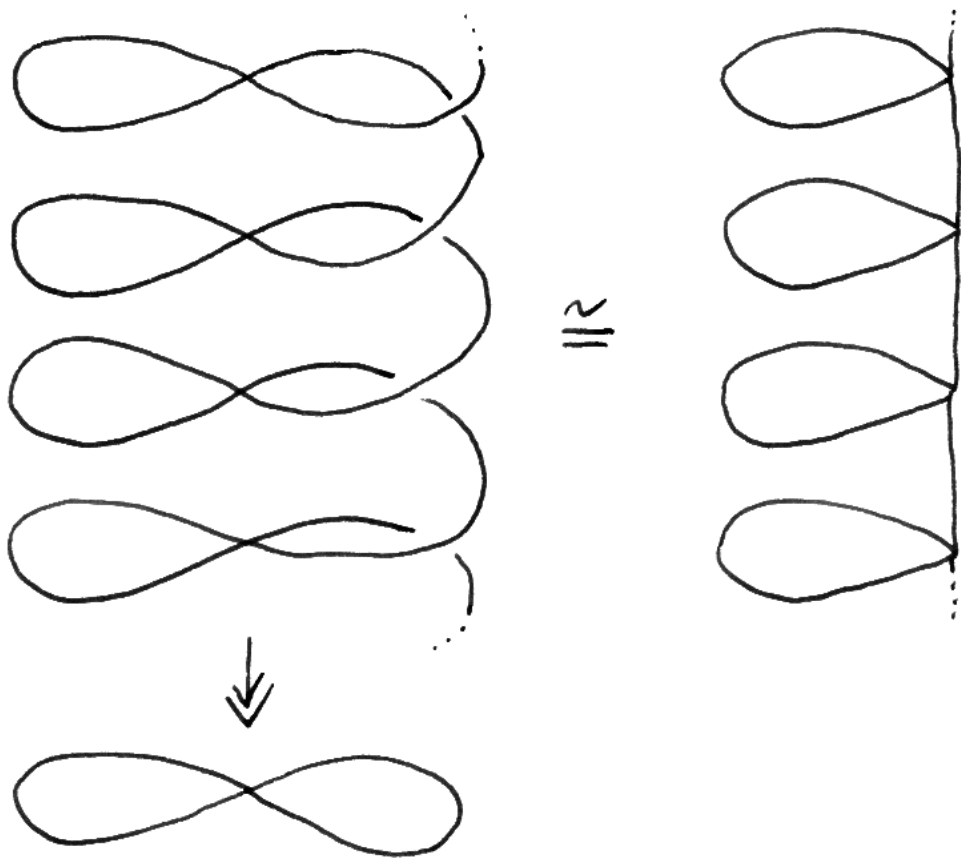
Beweis. Wir veranschaulichen uns die Situation mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

Existiert ein Lift \tilde{f} , so folgt $p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#} = f_{\#}$ und damit $\text{im } f_{\#} \subset \text{im } p_{\#}$. Um die andere Richtung zu zeigen, bilden wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{Y}, \tilde{y}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

und behaupten, daß unter unseren Annahmen $q_{\#} : \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ surjektiv ist. Sonst gäbe es nämlich nach unserer Beschreibung 4.5.7 der Fundamentalgruppe einer Überlagerung als Standgruppe einen geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(Y, y)$



Eine Überlagerung der Figur 8 mit nicht endlich erzeugter Fundamentalgruppe.

mit $\langle \gamma \rangle(\tilde{y}) \neq \tilde{y}$. Es folgte $\langle f \circ \gamma \rangle(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$, da ja die obere Horizontale in unserem Quadrat eine Bijektion $q^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x)$ induziert, nochmal nach 4.5.7 also $[f \circ \gamma] \notin \text{im } p_{\sharp}$ im Widerspruch zur Annahme. Da wir Y lokal wegzusammenhängend angenommen hatten, folgt andererseits mit 3.1.7, daß die Zusammenhangskomponenten von \tilde{Y} selbst schon Überlagerungen von Y und darüberhinaus wegzusammenhängend sind. Nach 4.5.7 bildet dann die Zusammenhangskomponente von \tilde{y} in \tilde{Y} eine einblättrige Überlagerung von Y , und die schenkt uns dann schließlich den gesuchten Lift. \square

Übungen

Übung 4.5.17 (Klassifikation bepunkteter Überlagerungen, Variante). Gegeben ein zusammenhängender lokal wegetrivialer bepunkteter Raum (X, x) erhalten eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen zusammenhängender bepunkteter Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ und der Menge der Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ mittels der Zuordnung

$$p \mapsto \text{im} \left(p_{\sharp} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x) \right)$$

Übung 4.5.18 (Klassifikation von Überlagerungen, Variante). Gegeben ein zusammenhängender lokal wegetrivialer bepunkteter Raum (X, x) induziert die Umkehrabbildung unserer Bijektion aus 4.5.17 eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ und der Menge der Isomorphieklassen zusammenhängender Überlagerungen von X .

Übung 4.5.19. Man erkläre die Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern im Fall der auf Seite 102 dargestellten Überlagerung der Acht.

Übung 4.5.20 (Fundamentalgruppe eines Bahnenraums, Variante). Operiert eine Gruppe G topologisch frei auf einem Raum X , so erhalten wir eine linksexakte Sequenz

$$\pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1(X/G, \bar{x}) \rightarrow G$$

mit dem Faserwirkungsvergleich 4.5.8 als zweiter Abbildung. Ist $y \in X$ ein weiterer Punkt derselben Faser und ist $\beta \in \pi_1(X/G, \bar{x})$ ein Weg mit $\langle \beta \rangle(x) = y$, so gilt $c_x = c_y \circ \text{int}(\beta)$ alias $c_x(\gamma) = c_y(\beta\gamma\beta^{-1})$. Ist X wegzusammenhängend, so ist der Faserwirkungsvergleich sogar surjektiv und unsere Sequenz eine kurze exakte Sequenz

$$\pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1(X/G, \bar{x}) \twoheadrightarrow G$$

Übung 4.5.21 (Funktorialität des Faserwirkungsvergleichs). Seien X ein Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G und Y ein weiterer Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe H . Sei weiter (f, φ) ein Paar

bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ mit $f(gx) = \varphi(g)f(x)$ für alle $x \in X$ und $g \in G$. So kommutiert für jedes $x \in X$ mit Bild $y := f(x)$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X/G, \bar{x}) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y/H, \bar{y}) \\ c_x \downarrow & & \downarrow c_y \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

für die durch Faserwirkungsvergleich erklärten Gruppenhomomorphismen in den Vertikalen.

Übung 4.5.22. Gegeben eine zusammenhängende Überlagerung $(\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$ eines zusammenhängender lokal wegetrivialen Raums X ist die Gruppe der Deckbewegungen $\text{Top}_X^\times(\hat{X})$ isomorph zu $N/\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ mit $N \subset \pi_1(X, x)$ dem Normalisator von $\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ in $\pi_1(X, x)$. Hinweis: 3.2.7.

Weiterführende Übung 4.5.23. Seien F und X topologische Räume. Ein **Faserbündel mit Faser F auf X** ist ein topologischer Raum $p : E \rightarrow X$ über X derart, daß jeder Punkt von X eine Umgebung U besitzt, für die $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$ als topologischer Raum über U isomorph ist zu $\text{pr}_U : U \times F \rightarrow U$. Unser Raum X heißt dann die **Basis** des Faserbündels. Ein derartiger Isomorphismus heißt eine **Bündelkarte auf U** . Ein System von Bündelkarten auf offenen Teilmengen der Basis, die eine Überdeckung unserer Basis bilden, heißt ein **Bündelatlas** unseres Faserbündels. Ein Faserbündel mit diskreter endlicher Faser F der Kardinalität n ist dasselbe wie eine n -blättrige Überlagerung. Seien nun $f : E \rightarrow X$ ein Faserbündel und $e \in E$ ein Punkt mit Bild $x := f(e) \in X$. Ist die Faser $F = f^{-1}(x)$ wegzusammenhängend, so folgt aus $\pi_1(E, e) = 1$ bereits $\pi_1(X, x) = 1$. Später werden Sie diese Aussage als Spezialfall der sogenannten „langen exakten Homotopiesequenz“ verstehen lernen.

Übung 4.5.24. Je zwei nicht nullhomotope Abbildungen $S^1 \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ haben mindestens einen Bildpunkt gemeinsam. Hinweis: Man ziehe sich darauf zurück zu zeigen, daß je zwei schiefsymmetrische Abbildungen $S^1 \rightarrow S^2$ einen gemeinsamen Bildpunkt haben.

4.6 Erzeuger und Relationen für $\text{PSL}(2; \mathbb{Z})^*$

4.6.1. Wir erinnern aus [TM] 2.3.16 die Operation von $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ auf der offenen oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ durch

$$g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto gz := \frac{az + b}{cz + d}$$

Lemma 4.6.2 (Fundamentaltbereiche in der oberen Halbebene).

1. Unter der Operation von $SL(2; \mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} trifft jede Bahn die Menge $D := \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1/2 \text{ und } |z| \geq 1\}$;
2. Genau dann gehören zwei verschiedene Punkte von D zur selben Bahn, wenn sie „auf dem Rand von D liegen“ und durch Spiegelung an der imaginären Achse auseinander hervorgehen;
3. Die Gruppe $SL(2; \mathbb{Z})$ wird erzeugt von $s := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $t := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
4. Die einzigen Elemente von D mit nichttrivialer Standgruppe in $PSL(2; \mathbb{Z})$ sind die beiden „unteren Spitzen“ $\exp(2\pi i/6)$ und $\exp(4\pi i/6)$ sowie i ;
5. Die Menge \mathbb{H}_{sing} der Punkte mit nichttrivialer Standgruppe von \mathbb{H} ist diskret und abgeschlossen;
6. Der Quotient $\mathbb{H}_{\text{reg}}/PSL(2; \mathbb{Z})$ des Komplements $\mathbb{H}_{\text{reg}} := \mathbb{H} \setminus \mathbb{H}_{\text{sing}}$ ist homöomorph zum Komplement von zwei Punkten in der Ebene.

Beweis. 1. Jeder Punkt der oberen Halbebene, der in der Einheitskreisscheibe liegt, wird durch die Transformation $S : z \mapsto -(1/z)$ auf einen Punkt mit echt größerem Imaginärteil abgebildet, und jeder Punkt außerhalb des Streifens $\{z \in \mathbb{C} \mid -1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1/2\}$ kann durch Addieren einer ganzen Zahl in diesen Streifen verschoben werden. Bezeichnet T die Translation $T : z \mapsto (z+1)$, so kann demnach jeder Punkt sogar durch Anwenden eines Elements der von S und T erzeugten Untergruppe auf ein Element von D abgebildet werden: Andernfalls erhielten wir nämlich in einer Bahn besagter Untergruppe eine Folge von Elementen des besagten Streifens mit Betrag kleiner als Eins und streng monoton wachsendem Imaginärteil und das widerspricht der Formel $\operatorname{Im}(gz) = \operatorname{Im}(z)/|cz+d|^2$, da $|cz+d|^2$ bei festem z nur endlich viele Werte < 1 annehmen kann.

2. Für $z \in D$ folgt aus $gz \in D$ sofort $|c| \leq 1$. Dann muß man die verschiedenen Fälle durchgehen.

3. Für $z \in \mathbb{H}$ gilt $sz = S(z)$ und $tz = T(z)$. Da $PSL(2; \mathbb{Z})$ treu auf \mathbb{H} operiert, folgt aus dem vorhergehenden bereits $PSL(2; \mathbb{Z}) = \langle \bar{s}, \bar{t} \rangle$. Aus $s^2 = -I$ folgt dann die Behauptung.

4.– 6. können dem Leser überlassen werden. □

4.6.3. Auf $X := \mathbb{H}_{\text{reg}}$ operiert $G := PSL(2; \mathbb{Z})$ nach 3.3.8 topologisch frei und der Quotientenraum X/G ist nach 4.6.1 homöomorph zum Komplement von zwei Punkten in der Ebene. Wenden wir auf diese Situation die kurze exakte Sequenz

$\pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1(X/G, \bar{x}) \twoheadrightarrow G$ aus Übung 4.5.20 an mit irgendeinem Punkt $x = z \in D^\circ$, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$\pi_1(\mathbb{H}_{\text{reg}}, z) \hookrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$$

Hier vereinbaren wir, daß der Erzeuger 1 des ersten \mathbb{Z} in der Mitte einmal das Bild von i in $\mathbb{H}/\text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ umläuft und der Erzeuger 1 des zweiten \mathbb{Z} einmal das Bild von $\exp(4\pi i/6)$ und zwar „im positiven Drehsinn“ für die „offensichtliche“ Orientierung. In $\text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ gehen unsere Erzeuger also auf \bar{s} und $\bar{s}\bar{t}$. Das Bild von $\pi_1(\mathbb{H}_{\text{reg}}, z)$ ist nun der vom Quadrat des ersten Erzeugers und der dritten Potenz des zweiten Erzeugers erzeugte Normalteiler und so erhalten wir den behaupteten Gruppenisomorphismus

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$$

4.7 Das Yoneda-Lemma*

4.7.1. Manchmal ist es wichtig, die verwendeten Universen zu spezifizieren. Wir deuten durch ein vorgestelltes \mathfrak{U}_ϵ beziehungsweise \mathfrak{U}_C um an, daß die Menge der Objekte ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems \mathfrak{U} ist. Wir deuten ähnlich durch ein vorgestelltes $\vec{\mathfrak{U}}_\epsilon$ beziehungsweise $\vec{\mathfrak{U}}_C$ an, daß die Menge der Morphismen zwischen zwei beliebig vorgegebenen Objekten ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems \mathfrak{U} ist. Gegeben Mengensysteme $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ ist etwa eine $\vec{\mathfrak{V}}_\epsilon$ -**Kategorie** eine Kategorie \mathcal{C} mit $\mathcal{C}(X, Y) \in \vec{\mathfrak{V}}$ für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ und von einer \mathfrak{U}_C - $\vec{\mathfrak{V}}_\epsilon$ -**Kategorie** fordern wir zusätzlich $\text{Ob}(\mathcal{C}) \subset \mathfrak{U}$.

4.7.2. Ich wiederhole [LA2] 7.10.1 folgende. Einen Funktor von einer Kategorie \mathcal{C} in eine Kategorie von Mengen nennen wir kurz einen **Mengenfunktor auf \mathcal{C}** . Jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ liefert einen derartigen Mengenfunktor $\check{X} : Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$. Gegeben ein Mengensystem \mathfrak{U} und eine Kategorie \mathcal{C} bildet die Menge aller Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ mit den Transformationen als Morphismen wieder eine Kategorie $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})$.

Proposition 4.7.3 (Yoneda-Lemma). *Seien \mathfrak{U} ein Mengensystem, \mathcal{C} eine $\vec{\mathfrak{U}}_\epsilon$ -Kategorie, $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ ein Mengenfunktor auf \mathcal{C} . So liefert die Abbildungsvorschrift $\tau \mapsto \tau_X(\text{id}_X)$ eine Bijektion*

$$\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})(\check{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

zwischen der Menge aller Transformationen $\check{X} \Rightarrow F$ und der Menge $F(X)$.

4.7.4. Sei \mathcal{U} ein Mengensystem. Die zur Kategorie dieser Mengenfunktoren auf einer $\vec{\mathcal{U}}_\epsilon$ -Kategorie \mathcal{C} opponierte Kategorie

$$\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^\vee := \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{U}\text{Ens})^{\text{opp}}$$

kann man als eine Art „Vervollständigung“ von \mathcal{C} interpretieren. In der Tat liest sich unser Yoneda-Lemma in dieser geschickt abgekürzten Notation als eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(F, \check{X}) \xrightarrow{\sim} F(X)$. Spezialisieren wir zu $F = \check{Y}$, so erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Y, X)$, von der man leicht zeigt, daß sie die Inverse zur offensichtlichen Abbildung $\mathcal{C}(Y, X) \rightarrow \mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X})$ ist. So folgt, daß die Vorschrift $X \mapsto \check{X}$ einen volltreuen Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee$ induziert.

Ergänzung 4.7.5. Die hier verwendeten Notationen \mathcal{C}^\vee und das später eingeführte \mathcal{C}^\wedge sind genau umgekehrt wie in [KS90]. Dafür stimmt die Notation \mathcal{C}^\wedge dann mit der in [Gro72] verwendeten Notation überein.

4.7.6 (**Das Yoneda-Lema im Fall einer Ein-Objekt-Kategorie**). Im Spezialfall einer Ein-Objekt-Kategorie $\mathcal{C} = [G]$ mit einzigem Objekt X ist diese Aussage besonders leicht einzusehen: Sie besagt dann im Lichte von 4.2.11, daß die äquivarianten Abbildungen von einem Monoid G in eine beliebige G -Menge F festgelegt und festlegbar sind durch das Bild des neutralen Elements. Im weiteren lassen wir das Mengensystem \mathcal{U} wieder in den Hintergrund treten und ignorieren es meist in unserer Notation.

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die andere Richtung. Für beliebiges $a \in F(X)$ betrachten wir dazu die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \tau_Y : \mathcal{C}(X, Y) & \rightarrow & F(Y) \\ f & \mapsto & (Ff)(a) \end{array}$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie eine Transformation $\tau : \check{X} \Rightarrow F$ bilden, die wir mit $\hat{\tau}(a)$ bezeichnen. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß die Abbildung $a \mapsto \hat{\tau}(a)$ invers ist zu unserer Abbildung $\tau \mapsto \hat{a}(\tau) := \tau_X(\text{id}_X)$ aus der Proposition. Dafür müssen wir also prüfen, daß gilt $a = \hat{a}(\hat{\tau}(a))$ für alle $a \in F(X)$ und $\tau = \hat{\tau}(\hat{a}(\tau))$ für alle Transformationen $\tau : \check{X} \Rightarrow F$. Das überlassen wir dem Leser. □

Definition 4.7.7. Diejenigen Mengenfunktoren auf \mathcal{C} , die isomorph sind zu Mengenfunktoren im Bild von $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\vee$, heißen **darstellbare Funktoren**. Ist ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ isomorph zu $\check{X} = \mathcal{C}(X, _)$ für ein $X \in \mathcal{C}$, so sagen wir, der **Funktor F werde dargestellt durch das Objekt X** . Ist noch genauer $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ ein Mengenfunktor und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $a \in F(X)$ ein Element, das unter der Bijektion aus dem Yoneda-Lemma einer Isotransformation $\mathcal{C}(X, _) \xrightarrow{\sim} F$ entspricht, so sagen wir, der **Funktor F werde strikt dargestellt durch das Paar (X, a)** . Ausgeschrieben bedeutet das, daß die Vorschrift

$f \mapsto (Ff)(a)$ für alle $Y \in \mathcal{C}$ eine Bijektion $\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{\sim} F(Y)$ liefert. Oft lassen wir das „strikt“ aber auch weg.

Beispiel 4.7.8. Der Vergißfunktork $\text{Mod}_k \rightarrow \text{Ens}$ von den k -Vektorräumen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar $(k, 1)$ oder auch durch jeden anderen ein-dimensionalen Vektorraum zusammen mit einem beliebigen von Null verschiedenen Element.

Beispiel 4.7.9. Der Vergißfunktork $\text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ von den Gruppen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar $(\mathbb{Z}, 1)$ oder auch durch jedes andere Paar (Z, e) bestehend aus einer unendlich zyklischen Gruppe und einem Erzeuger.

4.7.10. In derselben Weise kann man für jede \mathcal{U} -Kategorie \mathcal{C} auch die Kategorie

$$\mathcal{C}^\wedge = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{U}\text{Ens})$$

aller kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$ betrachten und erhält mit $X \mapsto \hat{X} := \mathcal{C}(_, X)$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$. Wieder heißen die Funktoren im Bild dieser Einbettung **darstellbare Funktoren**. Die Objekte von \mathcal{C}^\wedge werden Ihnen sehr viel später vielleicht einmal unter der Bezeichnung als „mengenwertige Prägarben auf \mathcal{C} “ wieder begegnen. Diesmal liefert das Auswerten auf id_X eine Bijektion $\mathcal{C}^\wedge(\hat{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

Ergänzung 4.7.11. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} kann man leicht Isomorphismen von Kategorien $(\mathcal{C}^\vee)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{opp}})^\wedge$ und $(\mathcal{C}^\wedge)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{opp}})^\vee$ angeben. In diesem Sinne sind unsere beiden Konzepte zueinander opponiert.

4.8 Mehr zu adjungierten Funktoren*

Satz 4.8.1 (Adjunktion durch Einheit und Koeinheit). *Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren und $\alpha : L \dashv R$ eine Adjunktion.*

1. *Die Einheit und Koeinheit unserer Adjunktion 4.3.6 erfüllen die **Dreiecksidentitäten** $\check{\alpha}L \circ L\hat{\alpha} = \text{id}_L$ sowie $R\check{\alpha} \circ \hat{\alpha}R = \text{id}_R$ von Transformationen $L \Rightarrow LRL \Rightarrow L$ beziehungsweise $R \Rightarrow RLR \Rightarrow R$;*
2. *Gegeben Transformationen $\varepsilon : \text{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$ und $\eta : LR \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{B}}$, die die Dreiecksidentitäten $\eta L \circ L\varepsilon = \text{id}_L$ und $R\eta \circ \varepsilon R = \text{id}_R$ erfüllen, gibt es genau eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ mit Einheit $\hat{\alpha} = \varepsilon$ und Koeinheit $\check{\alpha} = \eta$.*

Beweis. Wir beginnen mit einem Lemma und führen danach den Beweis. □

Lemma 4.8.2. *Gegeben \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren erhalten wir eine Bijektion*

$$\text{Cat}(\mathcal{A}^{\text{opp}} \times \mathcal{B}, \text{Ens})(\mathcal{B}(L, _), \mathcal{A}(_, R)) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{A})(\text{Id}_{\mathcal{A}}, RL)$$

durch die Vorschrift $\alpha \mapsto \varepsilon^\alpha$ mit $\varepsilon_A^\alpha := \alpha(\text{id}_{LA}) : A \rightarrow RLA$ mit Umkehrabbildung $\varepsilon \mapsto \alpha^\varepsilon$ gegeben durch $\alpha_{A,B}^\varepsilon(h) := (Rh) \circ \varepsilon_A : A \rightarrow RB$ für $h : LA \rightarrow B$.

Beweis des Lemmas. Da ist eine ganze Menge zu prüfen. Als erstes zeigen wir, daß für fest vorgegebenes α unser ε^α in der Tat eine Transformation ist, daß also für jeden Morphismus $f : X \rightarrow A$ in \mathcal{A} gilt $\varepsilon_A^\alpha \circ f = RL(f) \circ \varepsilon_X^\alpha$. Der Trick ist zu zeigen, daß beide Seiten gleich sind zu $\alpha_{X,LA}(Lf)$, und das kann dem Leser überlassen bleiben. Damit haben wir zumindest gezeigt, daß die Abbildung sinnvoll definiert ist, von der wir behaupten, daß sie eine Bijektion sein soll. Als nächstes zeigen wir, daß für fest vorgegebenes ε unser α^ε in der Tat eine Transformation ist, daß also für jeden Morphismus $f : X \rightarrow A$ in \mathcal{A} und beliebige Morphismen $g : B \rightarrow Y$ sowie $h : LA \rightarrow B$ in \mathcal{B} gilt

$$Rg \circ \alpha_{A,B}^\varepsilon(h) \circ f = \alpha_{X,Y}^\varepsilon(g \circ h \circ Lf)$$

Ausgeschrieben gilt es zu zeigen $Rg \circ Rh \circ \varepsilon_A \circ f = R(g \circ h \circ Lf) \circ \varepsilon_X$ und das folgt sofort aus $\varepsilon_A \circ f = RL(f) \circ \varepsilon_X$. Damit ist auch die behauptete Umkehrabbildung sinnvoll definiert und es bleibt nur zu zeigen $\varepsilon = \varepsilon^{\alpha^\varepsilon}$ und $\alpha = \alpha^{\varepsilon^\alpha}$, was wir dem Leser zur Übung überlassen. \square

Beweis des Satzes. Um die erste Dreiecksidentität zu zeigen, also $\check{\alpha}_{LX} \circ L(\hat{\alpha}_X) = \text{id}_{LX}$ für alle $X \in \mathcal{A}$, setzen wir in die Definitionen ein und müssen zeigen $\alpha^{-1}(\text{id}_{RLX}) \circ L(\alpha(\text{id}_{LX})) = \text{id}_{LX}$. Wenden wir darauf α an und verwenden die Natürlichkeit nach 4.3.2, so ist gleichbedeutend $\text{id}_{RLX} \circ \alpha(\text{id}_{LX}) = \alpha(\text{id}_{LX})$ und das ist klar. Die andere Dreiecksidentität zeigt man ebenso. Um den dritten Teil zu zeigen, müssen wir nur prüfen, daß unter der Annahme der Dreiecksidentitäten die aus dem Lemma entstehenden Transformationen $\alpha = \alpha^\varepsilon$ und die durch Übergang zu den opponierten Kategorien entstehende Transformation $\beta = \beta^\eta$ in die Gegenrichtung zueinander invers sind. Diese Rechnung sei wieder dem Leser überlassen. \square

4.8.3 (Eindeutigkeit der Adjungierten). Gegeben Kategorien \mathcal{A}, \mathcal{B} erhalten wir mit der kategoriellen Fassung des Exponentialgesetzes [LA2] 7.4.13 für die obere Horizontale und den Yoneda-Einbettungen $Y = Y_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens})$ für die Vertikalen ein Diagramm von Kategorien

$$\begin{array}{ccccc} \text{Cat}(\mathcal{A}, \text{Cat}(\mathcal{B}, \text{Ens})) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cat}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \text{Ens}) & \xleftarrow{\sim} & \text{Cat}(\mathcal{B}, \text{Cat}(\mathcal{A}, \text{Ens})) \\ \uparrow & \text{can}_1 & & \text{can}_2 & \uparrow \\ \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}^{\text{opp}}) & & & & \text{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^{\text{opp}}) \end{array}$$

mit volltreuen Einbettungen als Vertikalen. Eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ zwischen einem Funktor $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{opp}}$ und dem Funktor $R : \mathcal{B}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}$, ist eine Isotransformation $\alpha : \text{can}_1(YL) \xrightarrow{\sim} \text{can}_2(YR^{\text{opp}})$. Das Diagramm zeigt, daß gegeben L

ein Paar (α, R) bestehend aus einem Funktor in die Gegenrichtung und einer Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ eindeutig bestimmt ist bis auf eindeutigen Isomorphismus. Man benutzt deshalb meist den bestimmten Artikel und nennt R den **rechtsadjungierten Funktor** zu L , wobei eigentlich nicht nur der Funktor R gemeint ist, sondern das Paar (α, R) . Ebenso wird auch das Paar (α, L) durch R im wesentlichen eindeutig festgelegt und man nennt L den **linksadjungierten Funktor** zu R . Spricht man von einem **adjungierten Paar** $L \dashv R$, so ist der Leser gefordert, die vom Autor gemeinte Adjunktion α von L und R aus dem Kontext zu erschließen.

4.8.4. Ist \mathcal{U} ein Mengensystem und sind \mathcal{A}, \mathcal{B} beide \mathcal{U} -Kategorien, so können wir zu jedem Funktor $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ den **maximalen partiellen rechtsadjungierten Funktor** R bilden, der eben nur auf der vollen Unterkategorie $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ derjenigen Objekte $B \in \mathcal{B}$ erklärt ist, für die der Mengenfunktor $\mathcal{A}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$, $X \mapsto \mathcal{B}(LX, B)$ darstellbar ist im Sinne von 4.7.10. Wieder ist das Paar (α, R) bestehend aus dem Funktor $R : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ und der Isotransformation

$$\alpha \in \text{Cat}(\mathcal{A}^{\text{opp}} \times \mathcal{B}_0, \text{Ens})(\mathcal{B}(L, _), \mathcal{A}(_, R))$$

eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir sagen dann auch, der „rechtsadjungierte Funktor sei bei B definiert“. Wollen wir speziell betonen, daß ein rechtsadjungierter Funktor überall definiert ist, so sprechen wir von einem **globalen Rechtsadjungierten**. Jede Restriktion eines maximalen partiellen Rechtsadjungierten nennen wir einen **partiellen Rechtsadjungierten**. Analoge Begriffsbildungen vereinbaren wir für Linksadjungierte.

4.8.5. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien. Unter einem **partiell definierten Funktor** verstehe ich einen Funktor von einer vollen Unterkategorie von \mathcal{A} nach \mathcal{B} . Ich notiere partiell definierte Funktoren auch $F : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$. Zum Beispiel ist der maximale partielle Rechtsadjungierte eines beliebigen Funktors $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein partiell definierter Funktor $\mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{A}$.

Vorschau 4.8.6. Betrachten wir wie in 4.7.10 die Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \text{Ens})$. Ein Funktor im Bild heißt ein „darstellbarer Funktor“. Auch wenn ein Funktor $F \in \mathcal{C}^\wedge$ nicht darstellbar ist, kann immerhin der Rechtsadjungierte der Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ bei F definiert sein. Das entsprechende Objekt $R(F) \in \mathcal{C}$ mag man dann als eine „bestmögliche Approximation an ein darstellendes Objekt“ verstehen. Ein Beispiel für solche Konstruktionen sind die sogenannten **groben Modulräume**.

Definition 4.8.7. Ist allgemein \mathcal{C} eine Kategorie mit einem ausgezeichneten Funktor $v : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ in die Kategorie der Mengen, als da heißt eine Kategorie über Ens , so nennen wir den Wert des möglicherweise partiellen Linksadjungierten auf einer Menge X das **freie Objekt von \mathcal{C} über X** und notieren dies freie Objekt im allgemeinen

$$\mathcal{C} \wedge X$$

und notieren $\varepsilon : X \rightarrow v(\mathcal{C}^{\wedge} X)$ die durch Einheit der Adjunktion gegebene Abbildung.

Beispiel 4.8.8 (Freie Gruppen und freie abelsche Gruppen). Der Vergißfunktorkon von den Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie Gruppe über besagter Menge zuordnet, wie sie in 2.5.6 eingeführt wird. Der Vergißfunktorkon von den abelschen Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie abelsche Gruppe über besagter Menge zuordnet. Für diese Gruppe verwenden wir die Notation $\text{Ab}^{\wedge} X = \mathbb{Z}X$.

Beispiel 4.8.9 (Es gibt keine freien Körper). Der Vergißfunktorkon von den Körpern in die Mengen hat keinen Linksadjungierten. Es gibt also salopp gesprochen keine sinnvolle Definition eines „freien Körpers über einer vorgegebenen Menge“.

Beispiel 4.8.10. Der Vergißfunktorkon von den k -Vektorräumen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge X den freien k -Vektorraum über der Menge X zuordnet, also den Vektorraum aller Abbildungen $X \rightarrow k$, die nur an endlich vielen Stellen $x \in X$ verschieden sind von Null. Wir verwenden für diesen Vektorraum die abkürzende Notation

$$k\text{-Mod}^{\wedge} X = k\langle X \rangle$$

Ist allgemeiner k ein Ring, so verwenden wir dieselbe Notation auch für den freien k -Modul über X .

Beispiel 4.8.11. Gegeben ein kommutativer Ring k ist der freie k -Kring über einer Menge von Veränderlichen schlicht der Polynomring in diesen Veränderlichen, in Formeln gilt also zum Beispiel

$$(\text{Kring}^k)^{\wedge} \{T_1, \dots, T_n\} = k[T_1, \dots, T_n]$$

mit derjenigen Abbildung $\varepsilon : \{T_1, \dots, T_n\} \rightarrow k[T_1, \dots, T_n]$ als universeller Mengen- k -Kringalgebren-Abbildung, die eben T_i auf T_i abbildet.

Übungen

Ergänzende Übung 4.8.12 (Partielle Dreiecksidentitäten). Sei $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor. Man zeige: Gegeben ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ derart, daß der partielle Rechtsadjungierte R bei LA definiert ist, ist die Verknüpfung $LA \rightarrow LRLA \rightarrow LA$ der von der Einheit $A \rightarrow RLA$ und der Identität $RLA \rightarrow RLA$ herrührenden Morphismen die Identität auf LA . Gegeben ein Objekt $B \in \mathcal{B}$ derart, daß der partielle Rechtsadjungierte R bei B und LRB definiert ist, ist weiter die entsprechende Verknüpfung $RB \rightarrow RLRB \rightarrow RB$ die Identität auf RB .

Übung 4.8.13. Seien $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Paar (L, R) adjungierter Funktoren. So gilt für den Isomorphismus $\mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$ stets $f \mapsto Rf \circ \varepsilon_A$ und für seine Umkehrabbildung gilt $g \mapsto \eta_B \circ Lg$. Des weiteren können wir $\mathcal{B}(LA, LA_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RLA_1)$ beschreiben durch die Vorschrift $f \mapsto Rf \circ \varepsilon_A$ und $\mathcal{A}(RB_1, RB) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(LRB_1, B)$ durch die Vorschrift $g \mapsto \eta_B \circ Lg$. Für letzere Aussagen mögen die Dreiecksidentitäten helfen.

Übung 4.8.14. Sei $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor und R sein Rechtsadjungierter. So ist die Restriktion von R auf die volle Unterkategorie $L(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ der Rechtsadjungierte von $L : \mathcal{A} \rightarrow L(\mathcal{A})$. Analoges gilt für Linksadjungierte.

Übung 4.8.15 (Äquivalenz durch Adjunktion). Gegeben ein Funktor $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ betrachte man seinen partiellen Rechtsadjungierten R und die vollen Unterkategorien

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \{A \in \mathcal{A} \mid RLA \text{ ist definiert und die Einheit ist ein Iso } A \xrightarrow{\sim} RLA\} \\ \mathcal{B}_0 &:= \{B \in \mathcal{B} \mid RB \text{ ist definiert und die Koeinheit ist ein Iso } LRB \xrightarrow{\sim} B\} \end{aligned}$$

Man zeige, daß L eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{A}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_0$ mit Quasiinversem R induziert. Hinweis: 4.8.12.

Ergänzende Übung 4.8.16 (Volltreueheit von Adjungierten). Besitzt ein Funktor F einen volltreuen Linksadjungierten L , so ist für jedes Objekt Y , auf dem der partielle Rechtsadjungierte von F definiert ist, der Adjunktionsmorphismus ein Isomorphismus $FRY \xrightarrow{\sim} Y$ und der partielle Rechtsadjungierte von F ist ebenfalls volltreu. Hinweis: Für $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ beachte man die kanonischen Isomorphismen

$$\mathcal{B}(X, FRY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(LX, RY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FLX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(X, Y)$$

In [TD] 1.3.9 werden wir diese Aussage als Konsequenz einer größeren Theorie verstehen können: Jeder Funktor mit einem volltreuen Linksadjungierten oder volltreuen Rechtsadjungierten ist ein „Lokalisierungsfunktor“ und die beiden partiellen Adjungierten eines Lokalisierungsfunktors sind stets volltreu.

Übung 4.8.17 (Adjungierte zur Restriktion von Gruppenwirkungen). Ist $\varphi : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus, so besitzt der offensichtliche Funktor $\text{res}_G^H : G\text{-Ens} \rightarrow H\text{-Ens}$ einen Linksadjungierten, den wir prod_H^G notieren und der einer H -Menge X die G -Menge

$$G \times_{/H} X$$

aller H -Bahnen in $G \times X$ unter der Operation $h(g, x) = (gh^{-1}, hx)$ zuordnet. Ebenso besitzt er einen Rechtsadjungierten $\text{ind}_H^G : X \mapsto \text{Ens}_{H \setminus}(G, X)$.

4.8.18 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißt $G \times_{/H} X$ meist die „von X induzierte G -Menge“. Wir werden jedoch von der **von X koinduzierten G -Menge** reden, um mit anderen Begriffsbildungen kompatibel zu bleiben. Ist etwas allgemeiner H eine Gruppe und X eine H -Menge und Y eine H -Rechtsmenge, so erklärt man analog ihr **balanciertes Produkt**

$$Y \times_{/H} X$$

als die Menge aller H -Bahnen in $Y \times X$ unter der Operation $h(y, x) = (yh^{-1}, hx)$. Die Bahn von (y, x) notieren wir $[y, x]$. Oft werden balancierte Produkte statt $Y \times_{/H} X$ einfacher $Y \times_H X$ notiert. Das kann leider auch ein Faserprodukt bedeuten und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, welche Bedeutung jeweils gemeint ist.

Übung 4.8.19. Ist G eine Gruppe mit Untergruppen H, K und ist $S = H \cap K$ ihr Schnitt, so induziert die Multiplikation eine Bijektion $H \times_{/S} K \xrightarrow{\sim} HK$.

Ergänzende Übung 4.8.20. Ist G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe und $y \in G$ ein Element und $S = H \cap yHy^{-1}$, so erhalten wir einen Isomorphismus $H \times_S H \xrightarrow{\sim} HyH$ von $(H \times H)$ -Mengen mit der Rechtsoperation von $s \in S$ auf H durch Rechtsmultiplikation und der Linksoperation von $s \in S$ auf H durch Linksmultiplikation mit $y^{-1}sy$ mittels der Abbildung $[h, k] \mapsto hyk$. Hinweis: Man wende 4.8.19 an mit $K = yHy^{-1}$.

Ergänzende Übung 4.8.21. Sei $\varphi : H \rightarrow G$ ein Homomorphismus topologischer Gruppen. Bezeichnet Top^G die Kategorie der topologischen Räume mit einer stetigen G -Operation, so besitzt der offensichtliche Funktor $\text{Top}^G \rightarrow \text{Top}^H$ einen Linksadjungierten, den wir prod_H^G notieren und der einem H -Raum X den G -Raum $G \times_{/H} X$ mit seiner Quotiententopologie zuordnet. Die Stetigkeit der Operation von G folgt hier zum Beispiel mit 3.3.9.

Übung 4.8.22 (Adjungierter einer Verknüpfung). Der Adjungierte einer Verknüpfung ist die Verknüpfung der Adjungierten, als da heißt: Gegeben Funktoren $R_* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $S_* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ mit Linksadjungierten R^* und S^* erhalten wir eine Adjunktion $(R^* \circ S^*) \dashv (S_* \circ R_*)$ in kanonischer Weise.

Übung 4.8.23 (Transformationen zwischen Adjungierten). Jede Transformation von einem Funktor zu einem weiteren Funktor induziert ein natürlicher Weise eine Transformation in der Gegenrichtung zwischen ihren Links- beziehungsweise ihren Rechtsadjungierten, soweit diese existieren.

Übung 4.8.24 (Transformationen zwischen Adjungierten, Variante). Gegeben adjungierte Paare (L, R) und (L', R') von Funktoren zwischen Kategorien \mathcal{A}, \mathcal{B} beziehungsweise $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ und Funktoren $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ sowie $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ konstruiere man eine natürliche Bijektion

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')(L'F, GL) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{A}')(FR, R'G)$$

Übung 4.8.25 (Kompatibilitäten). Sei F ein Funktor mit Linksadjungiertem E und Rechtsadjungiertem G , so daß wir adjungierte Paare (E, F) und (F, G) haben. Die Einheit der Adjunktion $\varepsilon : \text{Id} \Rightarrow FE$ induziert durch Übergang zu den Rechtsadjungierten mit 4.8.22 und 4.8.23 eine Transformation $FG \Rightarrow \text{Id}$. Man zeige, daß sie mit der Koeinheit der Adjunktion (F, G) zusammenfällt.

Ergänzung 4.8.26 (Adjunktionen einiger Funktoren von G -Mengen). Gegeben $H \subset G$ eine Untergruppe und X eine H -Menge bezeichne $[g, x] \in G \times_{/H} X$ die Bahn von (g, x) . Ist X die Restriktion einer G -Menge, so definiert die Abbildung $[g, x] \mapsto (gH, gx)$ eine G -äquivalente Bijektion

$$G \times_{/H} X \xrightarrow{\sim} (G/H) \times X$$

Hier ist auf der rechten Seite das Produkt des G -Mengen (G/H) und X in der Kategorie der G -Mengen gemeint, also mit der „diagonalen“ G -Operation. Allgemeiner ist für jede G -Menge E der Funktor $(E \times) : G\text{-Ens} \rightarrow G\text{-Ens}$ linksadjungiert zum Funktor $\text{Ens}(E, _) : G\text{-Ens} \rightarrow G\text{-Ens}$ mittels der kanonischen Bijektionen aus [GR] 1.6.5, wenn wir die G -Operation auf einem Raum von Abbildungen $\text{Ens}(E, M)$ erklären durch die Konjugation, so daß in Formeln gf erklärt sei durch $(gf)(x) = g(f(g^{-1}x))$. Gegeben $M \in H\text{-Ens}$ und $E \in G\text{-Ens}$ haben wir kanonische Isomorphismen von G -Mengen

$$\begin{aligned} \text{prod}_H^G(E \times M) &\xrightarrow{\sim} E \times (\text{prod}_H^G M) \\ \text{ind}_H^G \text{Ens}(E, M) &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}(E, \text{ind}_H^G M) \\ \text{ind}_H^G \text{Ens}(M, E) &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}(\text{prod}_H^G M, E) \end{aligned}$$

Ganz allgemein ist nach 4.8.22 der Adjungierte einer Verknüpfung von Funktoren die Verknüpfung der Adjungierten, wenn sie existieren. Diese Erkenntnis gilt es nun anzuwenden auf die kommutativen Diagramme von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} G\text{-Ens} & \xrightarrow{E \times} & G\text{-Ens} & & G\text{-Ens} & \xrightarrow{\text{Ens}(E, _)} & G\text{-Ens} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H\text{-Ens} & \xrightarrow{E \times} & H\text{-Ens} & & H\text{-Ens} & \xrightarrow{\text{Ens}(E, _)} & H\text{-Ens} \\ & & & & G\text{-Ens} & \xrightarrow{\text{Ens}(_, E)} & G\text{-Ens}^{\text{opp}} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & H\text{-Ens} & \xrightarrow{\text{Ens}(_, E)} & H\text{-Ens}^{\text{opp}} \end{array}$$

mit den Restriktionen als Vertikalen und der Adjunktion $(E \times, \text{Ens}(E, _))$ beziehungsweise der Tatsache, daß der Rechtsadjungierte der Horizontalen $\text{Ens}(_, E)$ im Diagramm ganz rechts wieder $\text{Ens}(_, E)$ ist, nur diesmal aufgefaßt als Funktor in der Gegenrichtung, also präziser der Funktor $\text{Ens}(_, E)^{\text{opp}}$.

5 Weiterführende Resultate

5.1 Die Zopfgruppe

Definition 5.1.1. Sei X_n die Menge aller Teilmengen von \mathbb{C} mit genau n Elementen. Wir geben X_n die Finaltopologie für die die Reihenfolge vergessende Abbildung $\mathbb{C}^n \setminus \Delta \rightarrow X_n$ mit $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ der **großen Diagonale** alias der Menge aller n -Tupel komplexer Zahlen, in denen mindestens eine Zahl doppelt vorkommt. Die Fundamentalgruppe von X_n heißt die **Zopfgruppe in n Strängen**, englisch **braid group**, französisch **groupe de tresses**. Als Basispunkt nehmen wir meist $*$ = $\{1, 2, \dots, n\}$.

5.1.2. Die Elemente der Zopfgruppe kann man durch Bilder darstellen wie etwa das nebenstehende Bild für ein Element $\gamma \in \pi_1(X_3)$. Dies Bild stellt im Raum $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ die Menge $\{(z, t) \mid z \in \gamma(t)\}$ dar, mit t als senkrechter Koordinate und mit der Konvention, daß Punkte mit größerem Imaginärteil weiter hinten liegen mögen. Die Verknüpfung in unserer Zopfgruppe bedeutet in dieser Anschauung das „Aneinanderhängen“ solcher „Zöpfe“.

Notation 5.1.3. Bezeichne $s_\nu \in \pi_1(X_n, *)$ für $1 \leq \nu \leq n - 1$ die Klasse des Weges, unter dem der Punkt ν durch die untere Halbebene nach $\nu + 1$ wandert und gleichzeitig der Punkt $\nu + 1$ durch die obere Halbebene nach ν . Alle anderen Punkte sollen unter s_ν auf ihren Plätzen bleiben. Ein Repräsentant dieser Klasse wäre etwa der Weg

$$s_\nu(t) = \{1, \dots, \nu - 1, (\nu + 1/2 - e^{\pi i t} / 2), (\nu + 1/2 + e^{\pi i t} / 2), \nu + 2, \dots, n\}$$

Satz 5.1.4 (Erzeuger und Relationen der Zopfgruppe). Die Zopfgruppe in n Strängen wird dargestellt durch die Erzeuger s_1, \dots, s_{n-1} mit den sogenannten **Zopfrelationen**

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i && \text{falls } |i - j| > 1; \\ s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j && \text{falls } |i - j| = 1. \end{aligned}$$

5.1.5. In der Anschauung überzeugt man sich leicht, daß die s_i die Zopfgruppe erzeugen und die Zopfrelationen erfüllen. Hier verstellt das formale Argument eher den Blick. Das eigentliche Problem besteht darin, zu zeigen, daß nicht noch weitere Relationen benötigt werden.

Beweis des Satzes. Wir beginnen mit dem Fall $n = 3$ und berechnen zunächst die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$ einer Überlagerung von X_3 . Wir interpretieren Elemente von $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$ als die Angabe von drei paarweise verschiedenen Punkten in der Ebene \mathbb{C} , wobei wir jedoch im Unterschied zu X_3 noch wissen, welcher Punkt hier der Erste beziehungsweise der Zweite beziehungsweise der Dritte ist.

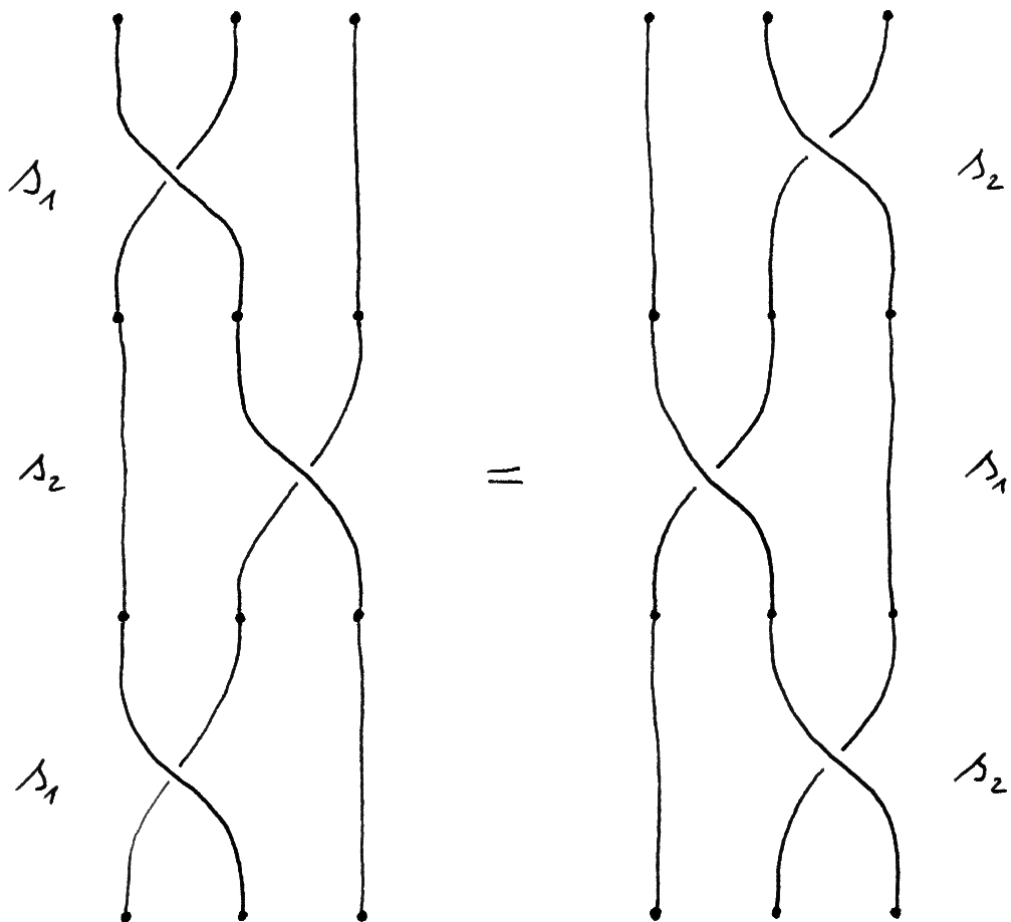


Illustration der Zopfrelation $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$. In der Tat geht bei beiden Bildern der Faden von links oben nach rechts unten „auf der obersten Ebene“, der Faden von rechts oben nach links unten „auf der untersten Ebene“, und der Faden von der Mitte zur Mitte auf einer „mittleren Ebene“.

Wir ändern die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$ nicht, wenn wir den zweiten Punkt festhalten, formal ist genauer die Einbettung

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid x \neq y\} &\hookrightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \Delta \\ (x, y) &\mapsto (x, 0, y) \end{aligned}$$

eine Homotopieäquivalenz. Wir geben der linken Seite den Namen M und betrachten die Überdeckung $M = M_+ \cup M_-$ durch die offenen Teilmengen

$$\begin{aligned} M_+ &:= M \setminus \{(x, \lambda x) \mid 0 < \lambda < 1\} \\ M_- &:= M \setminus \{(\lambda y, y) \mid 0 < \lambda < 1\} \end{aligned}$$

mit Schnitt $M_+ \cap M_- = \{(x, y) \in M \mid \mathbb{R}_{>0}x \neq \mathbb{R}_{>0}y\}$. Stellen wir uns den festen Punkt als die Sonne vor und x beziehungsweise y als die Erde beziehungsweise den Mond, die sich jedoch in einer Ebene völlig unabhängig voneinander bewegen dürfen, so ist M_+ die Menge aller Konstellationen „ohne Sonnenfinsternis“ und M_- die Menge aller Konstellationen „ohne Mondfinsternis“. Jetzt haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\rightarrow M_+, & (z, w) &\mapsto (z, 2w) \\ S^1 \times S^1 &\rightarrow M_-, & (z, w) &\mapsto (2z, w) \\ S^1 &\rightarrow M_+ \cap M_-, & z &\mapsto (-z, z) \end{aligned}$$

Wenn wir Basispunkte $1 \in S^1$, $(1, 1) \in S^1 \times S^1$ und $(-1, 1) \in M$ wählen, erhalten wir mit etwas komplizierteren Ausdrücken auch basispunkterhaltende Homotopieäquivalenzen, indem „wir Erde und Mond um geeignete Punkte p auf der reellen Achse kreisen lassen“, in Formeln

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\rightarrow M_+, & (z, w) &\mapsto (-p - z(1-p), -p + w(1+p)) \\ S^1 \times S^1 &\rightarrow M_-, & (z, w) &\mapsto (p - z(1+p), p + w(1-p)) \end{aligned}$$

für beliebig fest gewähltes p mit $0 < p < 1/2$. Unsere dritte Homotopieäquivalenz $S^1 \rightarrow M_+ \cap M_-$ von oben erhält schon die Basispunkte. Wie man anschaulich schnell einsieht und unschwer formalisiert, kommutieren mit unserer Wahl von Basispunkten nun die beiden nur durch ein Vorzeichen unterschiedenen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(M_+ \cap M_-) \\ \text{diag} \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) & \xleftarrow{\sim} \pi_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\sim} & \pi_1(M_\pm) \end{array}$$

und wir erhalten isomorphe pushout-Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M_+ \cap M_-) & \longrightarrow & \pi_1(M_+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(M_-) & \longrightarrow & \pi_1(M) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{diag}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \text{diag} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) \end{array}$$

Man sieht so, daß $\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$ erzeugt wird von den Klassen g, u_+, u_- der drei Wege

$$\begin{aligned} \tilde{g} : t &\mapsto (-e^{2\pi it} & , & 0, & e^{2\pi it}) \\ \tilde{u}_+ : t &\mapsto (-1 & , & 0, & p + (1-p)e^{2\pi it}) \\ \tilde{u}_- : t &\mapsto (-p - (1-p)e^{2\pi it} & , & 0, & 1) \end{aligned}$$

für beliebiges festes p mit $0 < p < 1/2$, wo wir nur die beiden Kommutationsrelationen $gu_+ = u_+g$ und $gu_- = u_-g$ fordern müssen. Wir behaupten, daß die Bilder unserer drei Wege in der Zopfgruppe $\pi_1(X_3)$ gegeben werden durch

$$\begin{aligned} u_+ &\mapsto s_1^2 \\ u_- &\mapsto s_2^2 \\ g &\mapsto (s_1s_2)^3 = (s_2s_1)^3 \end{aligned}$$

Das scheint mir anschaulich evident. Formal kann man zum Beispiel in $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$ den Weg $\tilde{g}_{1/2}$ von $(-1, 0, 1)$ nach $(1, 0, -1)$ betrachten mit $\tilde{g}_{1/2}(t) = \tilde{g}(2t)$ sowie die Wege \tilde{s}_1 und \tilde{s}_2 gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 : t &\mapsto (-1/2 - e^{\pi it} / 2 & , & -1/2 + e^{\pi it} / 2 & , & 1) \\ \tilde{s}_2 : t &\mapsto (-1 & , & 1/2 - e^{\pi it} / 2 & , & 1/2 + e^{\pi it} / 2) \end{aligned}$$

und linear interpolieren zwischen den Wegen $\tilde{g}_{1/2}$ und $(\tau \circ \tilde{s}_1) * (\sigma \circ \tilde{s}_2) * \tilde{s}_1$ für Permutationen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_3$ der drei Koordinaten derart, daß die Wege verküpfbar sind. Dasselbe gilt symmetrisch, wenn wir die Indizes 1 und 2 vertauschen. Drücken wir diese linearen Homotopien dann herunter auf X_3 und verküpfen, so ergibt sich die Dritte und komplizierteste der obigen Behauptungen, d.h. $g \mapsto (s_1s_2)^3 = (s_2s_1)^3$. Jetzt betrachten wir formal die Gruppe B_3 , die erzeugt wird von zwei Elementen s und t mit den Relationen $sts = tst$, und nenne sie für die Dauer dieses Beweises die **abstrakte Zopfgruppe**. Es tut mir leid, den Buchstaben t erst als Parameter eines Weges und nun gleich darauf in dieser völlig anderen Bedeutung zu verwenden. Beide Notationen sind jedoch derart gebräuchlich, daß diese Kollision mir ein kleineres Übel scheint, als es eine gänzlich unübliche Wahl der Bezeichnungen wäre. Mit unseren Erkenntnissen zur Fundamentalgruppe von Bahnräumen 4.5.20 und den Formeln $t^2(st)^3 = (st)^3t^2$ und

$s^2(st)^3 = (st)^3s^2$ in der abstrakten Zopfgruppe B_3 erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) & \rightarrow & B_3 & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) & \hookrightarrow & \pi_1(X_3) & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \end{array}$$

mit $s \mapsto s_1$ und $t \mapsto s_2$ in der mittleren Vertikale und hoffentlich sonst offensichtlichen Morphismen. Als erstes folgt, daß die Horizontale oben links eine Injektion ist. Weiter ist klar, daß die Verknüpfung in der oberen Horizontale trivial ist. Als nächstes überlegt man sich explizit, daß in der oberen Horizontale das Bild des linken Pfeils genau der Kern von $B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3$ ist. Um zu erkennen, ob die Klasse eines Gruppenworts in $\ker(B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3)$ liegt, müssen wir nur alle Potenzen s^m für $m \in \mathbb{Z}$ reduzieren zu s beziehungsweise e falls $m \in 2\mathbb{Z}$ beziehungsweise $m \notin 2\mathbb{Z}$ und analog für t , bis wir bei einem Wort ankommen, bei dem keine negativen Potenzen auftreten und bei dem die Buchstaben s und t alternieren. Unser ursprüngliches Wort war im Kern genau dann, wenn dieses alternierende Wort eine durch 6 teilbare Länge hat. Nun zeigen wir erst einmal, daß unser Bild normal ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß die Konjugierten von Erzeugern des Bildes unter Erzeugern der abstrakten Zopfgruppe wieder im Bild liegen. Das hinwiederum zeigen die Identitäten

$$ts^2t^{-1} = (st)^3s^{-2}t^{-2} \quad \text{und} \quad t(st)^3t^{-1} = (ts)^3 = (st)^3$$

und ihre Varianten mit s und t vertauscht. Also ist das Bild normal. Jetzt beachten wir, daß für einen Normalteiler N einer Gruppe G und $a, b \in G, x \in N$ gilt

$$axb \in N \Leftrightarrow axa^{-1}ab \in N \Leftrightarrow ab \in N$$

Unsere Beschreibung des Kerns zeigt dann, da eben das Bild normal ist, die schwierige Inklusion \supset und damit die Gleichheit

$$\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) = \ker(B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3)$$

So folgt durch Diagrammjagd in der Tat $B_3 \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_3)$ und der Fall $n = 3$ ist erledigt. Jetzt unterbrechen wir den Beweis durch einige allgemeine Überlegungen zu Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten, die im Fall von allgemeinem n benötigt werden. \square

Definition 5.1.6. Seien $n \leq d$ natürliche Zahlen. Eine Teilmenge N einer d -Mannigfaltigkeit M heißt eine **n -dimensionale Untermannigfaltigkeit** genau dann, wenn es für jeden Punkt $y \in N$ eine offene Umgebung $U \Subset M$ gibt und einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ mit $U \cap N \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \times 0$. Ein derartige offene Menge U nennen wir eine **plättbare Ball-Umgebung** von $y \in N$. Die Differenz $d - n$ heißt die **Kodimension** der Untermannigfaltigkeit N in M .

Satz 5.1.7 (Fundamentalgruppe von Mannigfaltigkeitskomplement). Seien $M \supseteq N \supseteq A$ eine Mannigfaltigkeit mit einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit einer Kodimension ≥ 3 und einer abgeschlossenen Teilmenge derselben. So induziert für beliebiges $p \in M \setminus A$ die Einbettung einen Isomorphismus

$$\pi_1(M \setminus A, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(M, p)$$

Im Fall einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit $N \subsetneq M$ der Kodimension 2 ist diese Abbildung zumindest noch eine Surjektion $\pi_1(M \setminus A, p) \twoheadrightarrow \pi_1(M, p)$.

Ergänzung 5.1.8. Stützt man sich beim Beweis statt auf 1.2.28 auf die etwas allgemeinere aber mühsamer zu beweisende Aussage 1.7.12, so zeigt der hier gegebene Beweis die Behauptung des Satzes sogar für $A \subset N$ eine beliebige Teilmenge unserer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir unsere Mannigfaltigkeit M zusammenhängend annehmen. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Seien $A \subsetneq N$ eine abgeschlossene Teilmenge, $U \subset M$ eine plättbare Ball-Umgebung eines Punktes von N und $p \in U \setminus A$. Nach Seifert-van-Kampen 2.4.1 haben wir ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \setminus A, p) & \rightarrow & \pi_1(U, p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(M \setminus A, p) & \rightarrow & \pi_1((M \setminus A) \cup U, p) \end{array}$$

Da nach 1.2.28 die obere Horizontale ein Isomorphismus beziehungsweise im Fall der Kodimension 2 eine Surjektion ist, muß dasselbe nach 2.3.4 beziehungsweise 2.6.6 auch für die untere Horizontale gelten. Da unsere Räume wegzusammenhängend sind, gilt das dann auch für einen beliebigen Basispunkt p aus $M \setminus A$. Man beachte für das folgende auch, daß gilt $(M \setminus A) \cup U = M \setminus B$ für $B \subset N$ die Teilmenge $B = N \setminus U$. Jetzt zeigen wir die Surjektivität von $\pi_1(M \setminus A, p) \rightarrow \pi_1(M, p)$ im allgemeinen. Ist in der Tat $\gamma \in \Omega(M, p)$ ein Weg, so wird $\gamma[0, 1] \cap N$ überdeckt von endlich vielen plättbaren Ball-Umgebungen U_1, \dots, U_r . Nach unserer Vorüberlegung haben wir dann für $p \in M \setminus A$ eine Surjektion

$$\pi_1(M \setminus A, p) \twoheadrightarrow \pi_1((M \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_r, p)$$

Unser $[\gamma] \in \pi_1(M, p)$ liegt aber sicher im Bild der rechten Seite unter der von der Inklusion induzierten Abbildung der Fundamentalgruppen. Also liegt $[\gamma]$ auch im Bild von $\pi_1(M \setminus A, p)$. Ähnlich zeigen wir die Injektivität im Fall einer Kodimension ≥ 3 . Dann ist ja unsere Surjektion sogar ein Isomorphismus. Ist nun $\gamma \in \Omega(M \setminus A, p)$ nullhomotop in M , sagen wir vermittelt $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$, so läßt sich eine Homotopie mit dem konstanten Weg sicher in einem geeigneten $(M \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_r$ realisieren, mit plättbaren Ball-Umgebungen U_i von

Punkten von N , und dann ist γ nach unserem Isomorphismus sogar nullhomotop in $M \setminus A$. \square

Beweis des Satzes über Zopfgruppen 5.1.4. Wir halten nun n fest, schreiben kurz $X_n = X$, und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} k : X &\rightarrow \mathbb{N} \\ E &\mapsto n - |\operatorname{Re}(E)| \end{aligned}$$

für $|\operatorname{Re}(E)|$ die Kardinalität der Projektion von E auf die reelle Achse. In X betrachten wir die Teilmengen $Z_\nu = k^{-1}(\nu)$ sowie $Z_{\leq \nu} = k^{-1}(\{0, 1, \dots, \nu\})$. Zum Beispiel besteht Z_0 aus allen n -elementigen Teilmengen von \mathbb{C} derart, daß die Realteile ihrer Elemente paarweise verschieden sind, und Z_1 besteht aus allen n -elementigen Teilmengen, in denen es genau zwei Punkte gibt mit demselben Realteil. Offensichtlich ist Z_0 zusammenziehbar, alle $Z_{\leq \nu}$ sind offen, und Z_ν ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension ν in $Z_{\leq \nu}$. Proposition 5.1.7 liefert uns damit für einen beliebigen Basispunkt in Z_0 eine Surjektion und viele Isomorphismen

$$\pi_1(Z_{\leq 1}) \twoheadrightarrow \pi_1(Z_{\leq 2}) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} \pi_1(Z_{\leq n-1}) = \pi_1(X)$$

Wir untersuchen nun zunächst $\pi_1(Z_{\leq 1})$. Sicher zerfällt Z_1 in Zusammenhangskomponenten

$$Z_1 = Z_1^1 \sqcup Z_1^2 \sqcup \dots \sqcup Z_1^{n-1}$$

mit Z_1^i dem System aller n -elementigen Teilmengen $E \in Z_1$ derart, daß bei einer Aufzählung x_1, \dots, x_n von E mit wachsenden Realteilen gilt $\operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}(x_{i+1})$. Bezeichnen wir ganz allgemein mit $X_n^{[a,b]}$ den Raum aller n -elementigen Teilmengen von $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}$, so haben wir offensichtlich Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} X_2 &\leftarrow X_2^{[i,i+1]} \hookrightarrow Z_0 \cup Z_1^i \\ \{x, y\} &\mapsto \{1, \dots, i-1, x, y, i+2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Folglich ist $\pi_1(Z_0 \cup Z_1^i)$ frei erzeugt von s_i . Mit Induktion und dem Satz von Seifert-van-Kampen folgt, daß für jede Teilmenge $T \subset \{1, \dots, n-1\}$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(Z_0 \cup \bigcup_{i \in T} Z_1^i)$ frei erzeugt ist von den s_i mit $i \in T$. Insbesondere erzeugen die s_i schon mal unsere Zopfgruppe, und wir müssen uns nur noch um die Relationen kümmern. Sicher zerfällt auch Z_2 in Zusammenhangskomponenten

$$Z_2 = \bigsqcup_{1 \leq i < j < n} Z_2^{i,j}$$

mit $Z_2^{i,j}$ dem System aller n -elementigen Teilmengen $E \in Z_2$ derart, daß bei einer Aufzählung x_1, \dots, x_n von E mit wachsenden Realteilen gilt $\operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}(x_{i+1})$

und $\operatorname{Re}(x_j) = \operatorname{Re}(x_{j+1})$. Wir setzen $Z_{\leq 2}^{i,j} = Z_0 \cup Z_1^i \cup Z_1^j \cup Z_2^{i,j}$ und bemerken, daß diese Menge offen ist in X_n . Im Fall $i < j - 1$ haben wir eine Homotopieäquivalenz

$$\begin{aligned} X_2^{[i,i+1]} \times X_2^{[j,j+1]} &\hookrightarrow Z_{\leq 2}^{i,j} \\ (\{x, y\}, \{z, w\}) &\mapsto \{1, 2, \dots, i-1, x, y, \dots, j-1, z, w, \dots, n\} \end{aligned}$$

Sie zeigt, daß $\pi_1(Z_{\leq 2}^{i,j})$ erzeugt wird von s_i und s_j mit der einzigen Relation $s_i s_j = s_j s_i$. Im Fall $i = j - 1$ haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} X_3 &\hookleftarrow X_3^{[i,i+2]} \hookrightarrow Z_{\leq 2}^{i,i+1} \\ \{x, y, z\} &\mapsto \{1, \dots, i-1, x, y, z, i+3, \dots, n\} \end{aligned}$$

Mit dem bereits behandelten Fall $n = 3$ zeigen sie, daß $\pi_1(Z_{\leq 2}^{i,i+1})$ erzeugt wird von s_i und s_{i+1} mit der einzigen Relation $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$. Sei nun eine beliebige Teilmenge $R \subset \{(i, j) \mid 1 \leq i < j < n\}$ gegeben. Wir behaupten, daß $\pi_1(Z_{\leq 1} \cup \bigcup_{(i,j) \in R} Z_2^{i,j})$ erzeugt ist von s_1, \dots, s_{n-1} mit den Zopfrelationen für alle $(i, j) \in R$. In der Tat folgt das nun mit Seifert-van-Kampen 2.4.1 und vollständiger Induktion über $|R|$. Der Satz ergibt sich, wenn wir R maximal möglich wählen. \square

Ergänzung 5.1.9. Ähnlich überlegt man sich, wie die Fundamentalgruppe des Raums aller n -elementigen Teilmengen von \mathbb{C}^\times durch Erzeuger und Relationen dargestellt werden kann. Hier ist der Trick, zunächst die stetige Abbildung nach \mathbb{C}^\times zu betrachten, die durch Aufmultiplizieren unserer Punkte gegeben wird, und den Kern der von ihr auf der Fundamentalgruppe induzierten Abbildung. Die Fundamentalgruppe selber stellt man dann als semidirektes Produkt dieses Kerns mit \mathbb{Z} dar.

5.2 Überlagerungen topologischer Gruppen*

5.2.1 (Produkt universeller Überlagerungen). Jedes endliche Produkt lokal zusammenhängender überlagerungstrivialer Räume ist nach 5.3.2 auch selbst überlagerungstrivial. Gegeben $\tilde{X} \rightarrow X$ und $\tilde{Y} \rightarrow Y$ universelle Überlagerungen zusammenhängender lokal überlagerungstrivialer Räume X, Y ist mithin auch $\tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$ eine universelle Überlagerung. Besonders leicht sieht man das im Fall lokal wegetrivialer Räume, denn jedes endliche Produkt wegetrivialer Räume ist offensichtlich wieder wegetrivial.

Proposition 5.2.2. *Sei $p : \tilde{G} \rightarrow G$ die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden lokal überlagerungstrivialen Gruppe G . So gilt:*

1. Es gibt für jeden Punkt $\tilde{e} \in \tilde{G}$ über dem neutralen Element $e \in G$ genau einen Lift der Verknüpfung mit \tilde{e} als neutralem Element und diese Verknüpfung macht \tilde{G} zu einer topologischen Gruppe;
2. Für jede Gruppenstruktur auf \tilde{G} nach Teil 1 ist der Kern der Überlagerungsabbildung $K := \ker p$ ein diskreter kommutativer Normalteiler von \tilde{G} und wir erhalten einen Isomorphismus

$$K \xrightarrow{\sim} \text{Top}_G^\times \tilde{G}$$

zwischen K und der Deckbewegungsgruppe durch die Vorschrift $k \mapsto (k \cdot)$;

3. Für jede Gruppenstruktur auf \tilde{G} nach Teil 1 induziert die Überlagerungsabbildung einen Isomorphismus von topologischen Gruppen $\tilde{G}/K \xrightarrow{\sim} G$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort daraus, daß nach 5.2.1 auch die Abbildungen $\tilde{G}^{\times n} \rightarrow G^{\times n}$ universelle Überlagerungen sind. Für die zweite Aussage bemerken wir, daß für $k \in K$ sowohl $(k \cdot)$ als auch $(\cdot k)$ die eindeutig bestimmte Deckbewegung mit $\tilde{e} \mapsto k$ sein müssen, und damit folgt auch sie sofort. Die dritte Aussage folgt aus der Erkenntnis 3.5.10, daß bei jeder universellen Überlagerung die Basis der Quotient des Totalraums nach der Gruppe der Deckbewegungen ist. \square

Korollar 5.2.3 (Gruppenstruktur auf zusammenhängenden Überlagerungen). Gegeben eine zusammenhängende lokal überlagerungstriviale topologische Gruppe G besitzt jede zusammenhängende bepunktete Überlagerung $q : (\hat{G}, \hat{e}) \rightarrow (G, e)$ genau eine stetige Verknüpfung mit \hat{e} als neutralem Element, für die q ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beweis. Die Eindeutigkeit der Verknüpfung folgt aus unserem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts. Die Existenz folgt daraus, daß (G, e) ja nach 3.6.1 eine universelle Überlagerung $p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \rightarrow (G, e)$ besitzt, von der es dann eine Decktransformation $q : (\tilde{G}, \tilde{e}) \rightarrow (\hat{G}, \hat{e})$ geben muß. Nun hat \tilde{G} nach 5.2.2 genau eine Gruppenstruktur mit neutralem Element \tilde{e} , für die p ein Gruppenhomomorphismus ist, deren Kern K ist ein kommutativer Normalteiler und die Linksmultiplikationen mit Elementen von K sind genau die Deckbewegungen. Nach 4.4.4 gibt es also eine Untergruppe $H \subset K$ derart, daß q einen Homöomorphismus $\tilde{G}/H \xrightarrow{\sim} \hat{G}$ induziert. Das Korollar folgt. \square

Korollar 5.2.4 (Überlagerungen topologischer Gruppen, Klassifikation). Gegeben eine zusammenhängende lokal überlagerungstriviale topologische Gruppe (G, e) und $p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \rightarrow (G, e)$ ihre universelle Überlagerung und $K := \ker p$

deren Kern erhalten wir durch die Vorschrift $H \mapsto \tilde{G}/H$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Untergruppen von } K \text{ mit} \\ \text{Inklusionen als Morphismen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \text{Zusammenhängende topologische} \\ \text{Gruppenüberlagerungen von } G \end{array} \right\}^{\text{opp}}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden. \square

Korollar 5.2.5 (Überlagerungen lokal wegetrivialer Gruppen). Gegeben eine zusammenhängende lokal wegetriviale topologische Gruppe (G, e) erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zusammenhängende topologische} \\ \text{Gruppenüberlagerungen von } G \end{array} \right\}^{\text{opp}} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \text{Untergruppen von } \pi_1(G, e) \text{ mit} \\ \text{Inklusionen als Morphismen} \end{array} \right\}$$

durch die Vorschrift $(p : (\hat{G}, \hat{e}) \mapsto (G, e)) \mapsto \text{im}(p_{\#} : \pi_1(\hat{G}, \hat{e}) \mapsto \pi_1(G, e))$.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden zusammen mit der Identifikation von Fundamentalgruppe und Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerung im Fall zusammenhängender lokal wegetrivialer Räume. \square

Übungen

Ergänzende Übung 5.2.6. Jede topologische Gruppe, die homöomorph ist zur Kreislinie S^1 , ist bereits als topologische Gruppe isomorph zur multiplikativen Gruppe S^1 aller komplexen Zahlen vom Betrag Eins. Hinweis: [TM] 2.1.24.

5.3 Überlagerungen und Homotopie*

Satz 5.3.1 (Überlagerungen von Produkten). Seien X, Z topologisch Räume mit Z überlagerungstrivial und lokal zusammenhängend. So ist das Bilden des Produkts mit Z eine Äquivalenz von Kategorien

$$(\times Z) : \text{Üb}_X \xrightarrow{\approx} \text{Üb}_{X \times Z}$$

zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der Überlagerungen von $X \times Z$.

Beweis. Sei $p : \tilde{X}_Z \rightarrow X \times Z$ eine Überlagerung des Produkts. Für jedes $z \in Z$ setzen wir $\tilde{X}_z = p^{-1}(X \times \{z\})$ und erhalten so eine Überlagerung von $\tilde{X}_z \rightarrow X$. Ist Z überlagerungstrivial, so erklären wir für beliebige $z, w \in Z$ Abbildungen $f_{wz} : \tilde{X}_z \rightarrow \tilde{X}_w$ durch die Bedingung, daß \tilde{x} und $f_{wz}(\tilde{x})$ im Bild desselben Lifts von $Z \rightarrow X \times Z, z \mapsto (p(\tilde{x}), z)$ liegen sollen. Natürlich gilt $f_{vw} \circ f_{wz} = f_{vz}$

und $f_{zz} = \text{id}$ für alle $z, w, v \in Z$. Der Satz folgt nun, sobald wir zeigen, daß die Abbildung

$$f : \tilde{X}_z \times Z \rightarrow \tilde{X}_Z, \quad (\tilde{x}, w) \mapsto f_{wz}(\tilde{x})$$

ein Isomorphismus von Überlagerungen ist. Sie ist sicher bijektiv. Zeigen wir auch noch die Stetigkeit von f , so ist f eine bijektive Decktransformation, also ein Isomorphismus von Überlagerungen. Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}_Z$ finden wir eine trivial überlagerte Umgebung von $(x, w) := p(\tilde{x})$ der Form $U \times W$ mit W zusammenhängend. Die eingeschränkte Überlagerung notieren wir $p : \tilde{U}_W \rightarrow U \times W$ und setzen $\tilde{U}_w := p^{-1}(U \times \{w\})$ analog wie zuvor. Dann induziert offensichtlich die Abbildung $(\tilde{x}, v) \mapsto f_{vw}(\tilde{x})$ einen Homöomorphismus

$$\tilde{U}_w \times W \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_W$$

Für festes $z \in Z$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}_z$ betrachten wir nun in Z die Teilmengen Z_s, Z_u aller $w \in Y$ derart, daß $f_{wz} : \tilde{X}_z \rightarrow \tilde{X}_w$ bei \tilde{x} stetig beziehungsweise unstetig ist. Nach dem Vorhergehenden sind sowohl Z_s als auch Z_u offen. Also gilt $Z = Z_s$ und alle f_{wz} sind stetig. Daraus folgt aber unter nochmaliger Verwendung unserer Homöomorphismen von eben, daß f selbst stetig ist. \square

Korollar 5.3.2. *Sind X und Z überlagerungstrivial und ist Z zusätzlich lokal zusammenhängend, so ist auch $X \times Z$ überlagerungstrivial.*

Beweis. Nach dem Satz ist jede Überlagerung von $X \times Z$ das Produkt einer Überlagerung von X mit Z . \square

Korollar 5.3.3 (Liften von Homotopien). *Seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, Y ein topologischer Raum und $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ stetig. So läßt sich jeder Lift \tilde{H}_0 von $H_0 := H|_{Y \times \{0\}}$ auf genau eine Weise zu einem Lift \tilde{H} von H fortsetzen.*

5.3.4. Zum besseren Verständnis des Satzes stelle ich die Räume und Abbildungen, die darin vorkommen, nochmal in einem Diagramm dar.

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{H}_0} & \tilde{X} \\ & \searrow \tilde{H} & \downarrow \\ & Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} X \end{array}$$

Beweis mit 5.3.1. Die Eindeutigkeit von \tilde{H} ist klar nach dem Satz über Eindeutigkeit von Lifts: Man wende ihn an auf die zusammenhängenden Teilräume $\{y\} \times [0, 1]$. Wir zeigen die Existenz von \tilde{H} . Der pull-back der Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ mit H ist eine Überlagerung $Z \rightarrow Y \times [0, 1]$. Wenden wir auf diese Überlagerung

Satz 5.3.1 an, so finden wir eine Überlagerung $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ und einen Isomorphismus $\tilde{Y} \times [0, 1] \simeq Z$ von Überlagerungen von $Y \times [0, 1]$. Folglich gibt es eine Abbildung $f : \tilde{Y} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} \times [0, 1] & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ q \times \text{id} \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

kartesisch ist. Dann definiert \tilde{H}_0 ein Rechtsinverses $l : Y \rightarrow \tilde{Y}$ der Überlagerung q und wir erhalten \tilde{H} als $\tilde{H} = f \circ (l \times \text{id})$. \square

Beweis ohne 5.3.1. Die Eindeutigkeit von \tilde{H} ist klar nach dem Satz über Eindeutigkeit von Lifts: Man wende ihn an auf die zusammenhängenden Teilräume $\{y\} \times [0, 1]$. Wir zeigen die Existenz von \tilde{H} in mehreren Schritten.

1. Der Satz gilt, falls X trivial überlagert ist, also ohne der Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{X} = X \times F$ und $p = \text{pr}_1$. In der Tat ist in diesem Fall $\tilde{H}(y, t) = (H(y, t), \text{pr}_2 \circ \tilde{H}_0(y))$ ein Lift von H mit den gewünschten Eigenschaften.

2. Im allgemeinen reicht es zu zeigen, daß jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung W besitzt derart, daß $\tilde{H}_0|_{W \times \{0\}}$ sich zu einem Lift \tilde{H} von $H|_{W \times [0, 1]}$ fortsetzen läßt. Aufgrund der Eindeutigkeit müssen diese Lifts nämlich auf den Schnitten $(W \cap V) \times [0, 1]$ zusammenfallen, und wir definieren dann durch Verkleben den gesuchten Lift $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$.

3. Sei nun $y \in Y$ fest. Für jedes $t \in [0, 1]$ besitzt $H(y, t)$ eine trivial überlagerte Umgebung, mithin gibt es offene Umgebungen W_t von y und I_t von t derart, daß $H(W_t \times I_t)$ in einer trivial überlagerten offenen Menge liegt. Hier ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit I_t ein Intervall. Die I_t für endlich viele t bedecken $[0, 1]$. Sei $W = W_y$ der Schnitt der zugehörigen W_t . So ist W eine offene Umgebung von y , und es gibt $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ derart, daß $H(W \times [t_{i-1}, t_i])$ für alle i ganz in einer trivial überlagerten offenen Menge in X liegt. Setzen wir induktiv voraus, daß ein partieller Lift $\tilde{H} : W \times [0, t_i] \rightarrow \tilde{X}$ schon konstruiert ist, so liefert uns Schritt 1 ein $\tilde{H} : W \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$, das auf $W \times \{t_i\}$ mit dem vorigen partiellen Lift \tilde{H} übereinstimmt und H liftet, also verkleben diese beiden \tilde{H} zu einem Lift $\tilde{H} : W \times [0, t_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$ und wir sind fertig per Induktion. \square

Satz 5.3.5. *Gegeben Z Überlagerungstrivial lokal zusammenhängend und X ein beliebiger topologischer Raum ist das Bilden des Produkts mit Z eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\times Z) : \text{étTop}_X \xrightarrow{\sim} \{p \in \text{étTop}_{X \times Z} \mid (p^{-1}(x \times Z) \rightarrow Z) \in \text{Üb}_Z \ \forall x \in X\}$$

5.3.6. Daß sich unter dieser Äquivalenz die Überlagerungen auf beiden Seiten entsprechen, war die Aussage von 5.3.1. Der Beweis verallgemeinert den Beweis dort.

Beweis. Sei $p : \tilde{X}_Z \rightarrow X \times Z$ eine étale Abbildung, deren Restriktion auf $x \times Z$ für alle $x \in X$ eine Überlagerung ist. Für $z \in Z$ setzen wir $\tilde{X}_z := p^{-1}(X \times \{z\})$ und erhalten so für jedes $z \in Z$ eine étale Abbildung nach X . Ist Z überlagerungstrivial, so können wir für beliebige $z, w \in Z$ Abbildungen $f_{wz} : \tilde{X}_z \rightarrow \tilde{X}_w$ erklären durch die Bedingung, daß \tilde{x} und $f_{wz}(\tilde{x})$ im Bild desselben Lifts von $Z \rightarrow X \times Z, z \mapsto (p(\tilde{x}), z)$ liegen sollen. Natürlich gilt $f_{vw} \circ f_{wz} = f_{vz}$ und $f_{zz} = \text{id}$ für alle $z, w, v \in Z$. Es reicht nun zu zeigen, daß für jedes $z \in Z$ die offensichtliche Abbildung

$$f : \tilde{X}_z \times Z \rightarrow \tilde{X}_Z, \quad (\tilde{x}, w) \mapsto f_{wz}(\tilde{x})$$

ein Homöomorphismus ist. Diese Abbildung ist sicher bijektiv. Können wir zeigen, daß sie stetig ist, so muß sie aufgrund der Eigenschaften étaler Abbildungen 3.1.14 offen und damit ein Homöomorphismus sein. Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}_Z$ finden wir eine Umgebung Q_w , die homöomorph auf eine Umgebung von $p(\tilde{x}) := (x, w)$ der Form $U \times W$ abgebildet wird mit W zusammenhängend. Wir setzen $Q_w := Q \cap (p^{-1}(U \times w))$. Dann induziert offensichtlich die Abbildung $(\tilde{x}, v) \mapsto f_{vw}(\tilde{x})$ einen Homöomorphismus

$$Q_w \times W \xrightarrow{\sim} Q_w$$

Für festes $z \in Z$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}_z$ betrachten wir nun in Z die Teilmengen Z_s, Z_u aller $w \in Z$ derart, daß f_{wz} bei \tilde{x} stetig beziehungsweise unstetig ist. Nach dem Vorhergehenden sind sowohl Z_s als auch Z_u offen. Also gilt $Z = Z_s$ und alle f_{wz} sind stetig. Daraus folgt aber unter nochmaliger Verwendung unserer Homöomorphismen von eben, daß f selbst stetig ist. \square

Übungen

Übung 5.3.7. Sind zwei Räume homotopieäquivalent, so ist der eine überlagerungstrivial genau dann, wenn der andere überlagerungstrivial ist. Ist allgemeiner $X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so liefert der pull-back eine Äquivalenz von Kategorien $\text{Üb}_Y \xrightarrow{\sim} \text{Üb}_X$.

6 Danksagung

Für Korrekturen zu vorläufigen Versionen danke ich vielen Freiburger Hörern und Mitarbeitern, insbesondere Gregor Fritz, Gerald Höhn, Stephan Wehrheim, Isolde Adler, Olaf Schnürer, Matthias Ansorge, David Stotz, Balthasar Burgenmeister. Giovanni Zaccanelli hat mir mit dem Beispiel der nichtbijektiven Decktransformation geholfen, Leonardo Patimo mit dem Beispiel einer Überlagerung eines zusammenhängenden Raums, deren Zusammenhangskomponenten nicht überlagern.

7 Vorlesung Topologie SS 22

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 25.4 Topologische Räume ?? Inneres, Abschluß, Umgebungsbegriff ?? Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten noch nicht bewiesen.
- 27.4 Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen und Grenzwertbegriff. Zusammenhang. Topologische Mannigfaltigkeiten.
- 2.5 Kompaktheit. Initialtopologie, insbesondere Produkttopologie. Hausdorff bedeutet abgeschlossene Diagonale.
- 4.5 Gesamthaft finale Familien und Finaltopologie. Reelle projektive Räume. Quotienten nach Gruppen sind offen. Anwenden auf einen festen Vektor ist finale Abbildung $GL(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$, da es lokal stetige Schnitte gibt.
- 9.5 Topologische Gruppen. Quotient nach abgeschlossener Untergruppe Hausdorff. Projektive Räume Hausdorff und Mannigfaltigkeiten. Kompakt-offene Topologie. Exponentialgesetz formuliert. Gezeigt, daß kompakte Hausdorffräume normal sind, ohne den Begriff normal einzuführen. Gezeigt, daß Hausdorffräume, in denen jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt, lokal kompakt sind.
- 11.5 Exponentialgesetz bewiesen. Lemma von Urysohn bewiesen. Erweiterungslemma von Tietze formuliert, aber mit Beweis nicht fertig geworden. Das soll nicht mehr aufgegriffen werden.
- 16.5 Patimo: Tychonov mit Beweis. Klassifikation kompakter Einsmannigfaltigkeiten, Beweis nicht ganz fertig gemacht.
- 18.5 Fundamentalgruppe bis Kriterium für wegweise einfachen Zusammenhang.
- 23.5 Funktorialität der Fundamentalgruppe. Fundamentalgruppe der Kreislinie mit Anwendungen bis zum Satz vom Igel einschließlich.
- 25.5 Homotopie, Kategorientheorie. Eigenschaften von Funktoren, Äquivalenz von Kategorien.
- 30.5 Homotopie und Fundamentalgruppe. Wege in der Ebene ohne Selbstüberschneidungen.
- 1.6 Homotopieklassen von Selbstabbildungen der Kreislinie mit Anwendungen, insbesondere Unmöglichkeit des Plattdrückens einer Kugelschale und Satz vom Butterbrot mit Schinken. Produkte und Koprodukte in Kategorien.

- 13.6 Seifert-van Kampen mit Beweis. Kartesische und kokartesische Diagramme.
- 15.6 Freie Monoide und Gruppen. Koproduct und Pushout von Gruppen. Fundamentalgruppe des Komplements einer endlichen Teilmenge der Ebene. Nicht Abelisierung und Rang einer freien Gruppe.
- 20.6 Klassifikation von Flächen, Aussage. Simplizialkomplexe und ihre geometrische Realisierung. Kombinatorische Flächen. Zerschneidbarkeit zu einem Vieleck.
- 22.6 Fläche eines Flächenworts. Umformungen von Flächenworten. Eckenreduktion, Kreuzhaubennormierung. Henkelnormierung vermurkst.
- 27.6 Klassifikation von Flächen. Abelisierung und Rang einer freien Gruppe. Beginn der Überlagerungstheorie: Definition einer Überlagerungsabbildung, étale Abbildungen, Überlagerungsabbildungen sind étale.
- 29.6 Bis bepunktet universelle Überlagerungen, nur Definition, Beispiele dazu, keine Sätze. Sonst Quotienten als Überlagerungen, Eindeutigkeit von Lifts, Deckbewegungen und Decktransformationen. Blätterzahl. Lemma zu étalen Abbildungen.
- 4.7 Quotient einer universellen Überlagerung nach ihrer Deckbewegungsgruppe. Decktransformationen sind selber Überlagerungen im Fall einer lokal zusammenhängenden Basis. Einfacher Zusammenhang. Bedeutet, daß die Identität eine universelle Überlagerung ist. Liften bei einfachem Zusammenhang. Intervalle und Einheitsquadrat sind einfach zusammenhängend. Noch nicht Bezug zu wegweise einfach zusammenhängend.
- 6.7 Statt „einfach zusammenhängend“ sage „überlagerungstrivial“. Jeder geeignete Raum besitzt eine schleifenfüllende (neu für einfach wegzusammenhängend) wegzusammenhängende Überlagerung, die dann notwendig auch universell ist. Letzter Teil vom Beweis vermurkst, dabei isst es ganz einfach.
- 11.7 Leonardo Patimo vertritt mich. Ende des Beweises für die Existenz von universellen Überlagerungen. Treue Funktoren und Äquivalenzen von Kategorien. Transformationen von Funktoren. Adjunktion von Funktoren und Konstruktion der Einheit und der Koeinheit (noch ohne Beweis)
- 13.7 Adjunktion und Transformationen, Beispiele. Lemma über Äquivalenz von Kategorien durch Adjunktion mit Beweis. Eindeutigkeit von Adjungierten und Adjunktion durch Einheit und Koeinheit ohne Beweis.

18.7 Giovanni Zaccanelli vertritt mich und erklärt die Äquivalenzen von Kategorien zwischen Mengen mit Operation der Deckbewegungsgruppe einer universellen Überlagerung, Mengen mit Operation der Fundamentalgruppe und Überlagerungen. Außerdem erklärt er das Beispiel einer Deckselbsttransformation einer zusammenhängenden Überlagerung, die keine Deckbewegung ist. Nicht diskutiert wurde wie abgesprochen das Liftbarkeitskriterium über die Fundamentalgruppe.

20.7 Idem.

25.7 Erzeuger und Relationen für $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z})$. Etwas knapp geraten, muß noch mit Bildern angereichert werden.

27.7 Klausur.

Literatur

- [AAG] [Skriptum Affine Algebraische Gruppen](#). Wolfgang Soergel.
- [AL] [Skriptum Algebra und Zahlentheorie](#). Wolfgang Soergel.
- [AN1] [Skriptum Analysis 1](#). Wolfgang Soergel.
- [AN2] [Skriptum Analysis 2](#). Wolfgang Soergel.
- [FT1] [Skriptum Funktionentheorie 1](#). Wolfgang Soergel.
- [GR] [Skriptum Grundlagen](#). Wolfgang Soergel.
- [Gro72] Alexander Grothendieck. *SGA 4*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1972.
- [Jam95] I. M. James, editor. *Handbook of algebraic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on Manifolds*, volume 292 of *Grundlehren*. Springer, 1990.
- [LA1] [Skriptum Lineare Algebra 1](#). Wolfgang Soergel.
- [LA2] [Skriptum Lineare Algebra 2](#). Wolfgang Soergel.
- [ML] [Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen](#). Wolfgang Soergel.
- [TD] [Skriptum Derivierte Kategorien und Funktoren](#). Wolfgang Soergel.
- [TG] [Skriptum Garbenkohomologie](#). Wolfgang Soergel.
- [TM] [Skriptum Topologie und kompakte Gruppen](#). Wolfgang Soergel.
- [TS] [Skriptum Singuläre Homologie](#). Wolfgang Soergel.
- [TSK] [Skriptum Kategorielle Produktstrukturen](#). Wolfgang Soergel.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das \cup dem Buchstaben u oder das \subset dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

- \sqsupset kokartesisches Diagramm, 51
- \sqsubset kartesisches Diagramm, 48
- \Rightarrow Transformation, 114
- $\mathcal{C} \setminus X$ freies Objekt von \mathcal{C} über X , 139
- \rightarrow Morphismus in Kategorie, 25
- $\xrightarrow{\sim}$ Isotransformation, 114
- $\xrightarrow{\cong}$ Isomorphismus
 - von Kategorien, 113
- $\xrightarrow{\simeq}$ Äquivalenz von Kategorien, 113
- $\xrightarrow{\text{full}}$ volltreuer Funktor, 113
- $\langle\langle \rangle\rangle$ Erzeugnis als Normalteiler, 84
- $| |$ Polyeder eines Simplicialkomplexes, 70
- \mathcal{C}^\wedge Funktorkategorie, 137
- f^{-1} inverser Morphismus, 29
- f° in opponierter Struktur
 - opponierter Morphismus, 45
- \mathcal{C}^\vee Funktorkategorie, 136
- $f_\#$ Vorschub
 - von Fundamentalgruppe, 14
- \cong homöomorph, 4
- \dashv Adjunktion, 117, 139
- \circ Verknüpfung
 - von Morphismen, 25
- $\mathcal{C} \setminus X$ freies Objekt von \mathcal{C} über X , 139
- \mathcal{B}^A Funktorkategorie, 115
- \sqcup Koproduct, 46
 - \sqcup von Familie, 46
- \times_Y Faserprodukt, 48
- $\times_{/H}$ balanciertes Produkt, 142
- G^{ab} Abelisierung, 37
- Abbildungsgrad
 - bei Kreislinie, 39
- Abelisierung, 37
- adjungiert
 - Funktor, 139
- Adjunktion
 - opponierte, 120
 - von Funktoren, 117
- Äquivalenz
 - von Funktoren, 114
 - von Kategorien, 113
- äquivariant
 - Abbildung, 93
- affin
 - unabhängig, 66
- Alexander
 - gehörte Sphäre, 5
- amalgamiertes Produkt, 66
- Aneinanderhängung
 - von Wegen, 9
- Augmentierung
 - von Simplicialkomplex, 73
- Ausgangskategorie, 28
- balanciertes Produkt, 142
- Basis
 - von Faserbündel, 133
 - von Überlagerung, 88
- Basispunkt, 11, 28
- Basiswechsel
 - für Untergruppen, 52
 - für Zurückholen mit p , 48
 - mengentheoretischer, 51
- bepunkteter Raum, 11
- Blätterzahl, 90
- Borsuk-Ulam, 42
- Bouquet von Kreislinien, 85
- braid group, 144
- Brouwer, Fixpunktsatz
 - für die Kreisscheibe, 19
- Bündelatlas, 133
- Bündelkarte, 133
- Butterbrot mit Schinken
 - Satz vom, 43

Cat, 53
 Cat(\mathcal{A}, \mathcal{B}), 115
 $\Delta(\mathcal{K})$ topologische Realisierung eines
 Simplizialkomplexes, 70
 darstellbarer Funktor, 136, 137
 Deckbewegung, 99
 Decktransformation, **98**
 derivierte Gruppe, 37
 Drehsinn
 als Funktor, 39
 zu einer Orientierung, 39

 Ecken, 68
 Eckenreduktion, 80
 Eckenzahl, 80
 eigentlich diskontinuierlich, 96
 einfach
 wegzusammenhängend, 12
 Einpunktverbindung, 46
 Ens Kategorie der Mengen, 26
 Ens(X, Y) Abbildungen $X \rightarrow Y$, 26
 Ens $^\times(Z)$ Bijektionen $Z \xrightarrow{\sim} Z$, 126
 étale
 stetige Abbildung, 90
 Exp(t) := exp($2\pi it$), 16

 Faserbündel, 133
 Faserfunktor
 bei Überlagerung, 126
 Faserprodukt
 in Kategorie, 48
 Faserwirkungsvergleich, 127
 Fixpunktsatz von Brouwer
 für die Kreisscheibe, 19
 Flächenwort, 76
 Fläche
 nichtorientierbare, 7
 orientierbare, 7
 frei
 Objekt über Menge, 139
 Operation, 96
 Produkt von Gruppen, 65
 Fundamentalgruppe, 12
 basispunktfreie, 38
 Fundamentalgruppe der Kreislinie, 15
 Funktor, 27
 darstellbarer, 136, 137
 linksadjungierter, 139
 partiell definierter, 139
 quasiinverser, 116
 rechtsadjungierter, 139
 Funktorkategorie, 115

 galois
 Überlagerung, 101
 Ganghöhe, 17
 gehörnte Sphäre, 5
 Geschlecht, 7
 geschlossen
 Weg, 9
 geschlossene Fläche, 5
 geschlossene kombinatorische Fläche,
 71
 geschlossene Mannigfaltigkeit, 5
 grober Modulraum, 139
 großen Diagonale, 144
 groupe de tresses, 144
 Grp $^\wedge X$ freie Gruppe über X , 59
 Gruppe
 Erzeugende und Relationen, 84
 freie, 59
 Gruppoid, 27
 fundamentales, 27

 Henkelelimination, 83
 Hochhebung, 16, 98
 homöomorph
 für Teilmengen des \mathbb{R}^n , 4
 Homöomorphismus
 für Teilmengen des \mathbb{R}^n , 4
 homotop, 23
 mit festen Randpunkten, 10, 23

Homotopie
 Liftung von, 154
 relative, 23
 von Abbildungen, 23
 Homotopieäquivalenz
 topologische, 27
 Homotopiekategorie
 topologische bepunktete, 29
 Homotopieklasse, 24
 hTop Homotopiekategorie
 hTop* topologische bepunktete, 29
 topologische, 24

 identische Transformation, 115
 Identität auf X , 25
 Igel, Satz vom, 19
 invers
 Morphismus, 29
 Iso
 in Kategorie, 26
 isomorph
 Funktoen, 114
 in Kategorie, 27
 Isomorphismus
 in Kategorie, 26
 von Funktoen, 114
 von Kategorien, 113
 Isotransformation, 114

 kanonisch
 Abbildung, **115**
 Isomorphismus, **115**
 kartesisch
 Diagramm, 47
 Kategorie, 24
 \mathfrak{V}_ϵ -Kategorie, 135
 \mathfrak{U}_C - \mathfrak{V}_ϵ -Kategorie, 135
 Klein'sche Flasche, 5
 Kodimension
 einer Untermannigfaltigkeit, 148
 koinduziert
 G -Menge, 142
 kokartesisch
 Diagramm, 50
 kombinatorische Fläche, 71
 kombinatorische Fläche ohne Rand, 71
 Kommutator
 in Gruppe, 37
 Konjugationsklassen
 von Untergruppen, 94
 konstant
 Weg, 9
 Koprodukt, 46
 Kowinkel, 51
 Kowinkeldiagramm, 51
 Kreisraum, 111
 Kreuzhaube, 82
 Kugelschale, 4

 Lift, 16, 98
 Liftbarkeitskriterium, 130
 Liften
 von Homotopien, 154
 linksadjungierter Funktor, 139
 lokal endlich
 Simplizialkomplex, 73
 Lusternik-Schnirelmann, 44

 Mat Matrixkategorie, 113
 Matrixkategorie, 113
 Mengenfunktor, 135
 Modf_k Vektorräume, endlich erzeugte, 113
 Modulraum
 grober, 139
 Mon^X freies Monoid über X , 58
 Monoid
 freies, 58
 Morphismen über X , 47
 Morphismen unter X , 48
 Morphismus
 G -Morphismus, 93

- in Kategorie, 25
- normal
 - homogener Raum, 94
 - Überlagerung, 101
- Normalisator
 - von Untergruppe, **94**
- Normalteiler erzeugt von, 84
- nullhomotop, 27
- Objekt einer Kategorie, 24
- opponiert
 - Adjunktion, 120
 - Kategorie, 45
- orientierbar
 - Fläche, 7
- $\Omega(X, x, y)$ Menge von Wegen, 9
- π_0 Wegzusammenhangskomponenten
 - als Menge, 11
- $\pi_1(X, x, y)$ Homotopieklassen von Wegen, 11
- $\pi_1(X)^{ab}$ basispunktfreie Fundamentalgruppe, 38
- $\pi_1(X, x)$ Fundamentalgruppe, 12
- π_0 Wegzusammenhangskomponenten
 - als Funktor, 29
- $\pi_1(f) = f_{\#}$, 14
- partiell definiert
 - Funktor, 139
- Poincaré-Vermutung, 14
- Produkt
 - balanciertes, 142
 - in Kategorie
 - von zwei Objekten, 45
- Produktmorphismus, 45
- Projektion
 - in Kategorie, 45
- pull-back-Diagramm, 47
- punktierter Raum, 11
- push-out-Diagramm, 50
- quasiinverser Funktor, 116, 119
- Randkante, 71
- Rang
 - von freier Gruppe, 63
- Realisierung
 - eines Simplicialkomplexes, 70
- rechtsadjungiert
 - global, 139
 - maximal partiell, 139
- rechtsadjungierter Funktor, 139
- regulär
 - Überlagerung, 101
- Retraktion, 19
- S^n die n -Sphäre, 4
- schleifenfüllend, 12
- Schleifenraum, 11
- Schönflies
 - Satz von, 5
- Schottky-Gruppe, 64
- Seifert-van Kampen, 53
- Seifert-van Kampen für das fundamentale Gruppoid, 55
- Simplex
 - kombinatorischer
 - von Simplicialkomplex, 68
 - voller, 66
 - von Simplicialkomplex, 68
- simplizial
 - Abbildung, 71
 - Teilordnung, 73
- Simplizialkomplex, 68
 - maximaler, 68
- Sphäre, 4
- Standardtransformation
 - or \Rightarrow dreh, 39
- Tate-Twist von \mathbb{Z} , 15
- topologisch
 - frei, Operation
 - von diskreter Gruppe, 96

- topologische Realisierung
 - eines Simplicialkomplexes, 70
 - von simplicialer Abbildung, 71
- Torus
 - Fläche, 5
- Totalraum
 - von Überlagerung, 88
- Trans Transformationen, 116
- Transformation
 - von Funktoren, 114
- Transport durch Wegeliften, 124
- treu
 - Funktor, 113
- Triangulierung, 71
- trivial
 - Überlagerung, 88
- Trivialisierung
 - von Überlagerung, 88
- Überlagerung, **88**
 - triviale, 88
 - unverzweigte, 88
- überlagerungstrivial, **91**
- $\mathcal{U}Ens$ Mengen $X \in \mathcal{U}$, 26
- umgekehrt
 - Weg, 9
- Umlaufzahl
 - eines Weges
 - auf der Kreislinie, 15
 - in der Zahlenebene, 32
- $\mathcal{U}Top$ topologische Räume $X \in \mathcal{U}$, 25
- Verklebung
 - von topologischer Fläche, 74
- Verknüpfung
 - von Morphismen, 25
 - von Wegen, 9
- verträglich mit Produkten
 - Funktor, 46
- Vieleck, 74
- voll
 - Simplex, 73
 - Vollkugel, 4
 - volltreu, Funktor, 113
- Weg
 - konstanter, 9
 - umgekehrter, 9
- Wegeliftungsoperation, 126
- Wegeraum, 11
- wegetrivial, 92, 109
- wegzusammenhängend
 - einfach, 12
- Winkel
 - spezielles Diagramm, 48
- Winkeldiagramm, 48
- $\mathbb{Z}(1)$ Tate-Twist von \mathbb{Z} , 15
- Zerschneidung, 74
- Zielkategorie, 28
- Zopfgruppe, 144
 - abstrakte, 147
- Zopfrelation, 144
- Zurückholen
 - Morphismus, 48
- zusammenhängend
 - Gruppoid, 56
- zusammenziehbar
 - topologischer Raum, 27
 - Weg, 10