GARBENKOHOMOLOGIE

Wolfgang Soergel

18. Juni 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Čech-Kohomologie **5**
1.1 Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen 5
1.2 Erste Čech-Kohomologie und Torsoren 9
1.3 Prägarben und höhere Čech-Kohomologie 14
1.4 Vereinfachte Berechnung der Čech-Kohomologie 17
1.5 Standardkomplexe mit Koeffizienten 19
1.6 Čech-Kohomologie der Grade Null und Eins 22

2 Abelsche Kategorien und Garben **25**
2.1 Wozu Garbenkohomologie? 25
2.2 Garben und ihre étalen Räume 26
2.3 Kerne und Kokerne in Kategorien 40
2.4 Präabelsche Kategorien 42
2.5 Additive und abelsche Kategorien 44
2.6 Abelsche Garben als abelsche Kategorie 52

3 Abstrakte homologische Algebra und Garben **55**
3.1 Die lange exakte Kohomologiesequenz 55
3.2 Derivierte Funktoren 58
3.3 Hochschild-Kohomologie* 68
3.4 Beispiele für injektive Moduln* 71
3.5 Definition der Garbenkohomologie 73
3.6 Derivieren mit azyklischen Objekten 75
3.7 Gruppenkohomologie* 81
3.8 Nichtabelsche Kohomologie* 87

4 Berechnung der Garbenkohomologie **93**
4.1 Welke Garben 93
4.2 Garbenkohomologie der Zahlengeraden 95
4.3 Zurückholen in der Garbenkohomologie 97
4.4 Lokale Kohomologie und Ausschneidung 106
4.5 Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie 110
4.6 Ein Spektralsequenzargument 114
4.7 Garbenkohomologie durch offene Überdeckungen 118
4.8 Kompakte Kohomologie 122
4.9 Funktorialitäten der kompakten Kohomologie 129
4.10 Kompakte Kohomologie von Mannigfaltigkeiten 138

5 Vergleichssätze **147**
5.1 Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie 147
5.2 Parakompakte Räume 150
5.3 Garben auf parakompakten Räumen 152
5.4 Reelle singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie 158
5.5 Čech-Kohomologie auf parakompakten Räumen* 167
5.6 Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie* 169

6 Faserungen und Basiswechsel **174**
6.1 Fasern eines Funktors 174
6.2 Kartesische Morphismen und Faserfunktoren 175
6.3 Rückzug, Vorschub, Basiswechsel 180
6.4 Basiswechselisomorphismen für Garben 186
6.5 Höhere Derivierte der Vorschübe 190

7 Schreifunktoren **197**
7.1 Garbenschreikofaserung 197
7.2 Lokal eigentliche Abbildungen 206
7.3 Lokal eigentlicher separierter Basiswechsel 209
7.4 Kompakte Schnitte und Kolimites 213

8 Äquivariante Theorie **216**
8.1 Äquivariante Garben 216
8.2 Äquivariante Kohomologie 222
8.3 Milnorkonstruktion 229
8.4 Weitere klassifizierende Räume 235

9 Ergänzungen zu Faserungen und Basiswechsel* **238**
9.1 Gefaserter Basiswechsel 238
9.2 Derivierter gefaserter Basiswechsel 239
9.3 Gruppenkohomologie als Garbenkohomologie 243
9.4 Fakofaserungen 245
9.5 Das sucht noch seinen Platz 249
9.6 Kategorienfaserungen und -kofaserungen* 249

10 Spektralsequenzen **253**
10.1 Allgemeiner Formalismus der Spektralsequenzen 253
10.2 Spektralsequenzen eines filtrierten Raums 265
10.3 Grothendieck's Spektralsequenz 266
10.4 Äquivariante de-Rham-Kohomologie (in Arbeit)* 273

11 Danksagung **282**

12 Der Lesekurs Garbenkohomologie im SS 2025 **283**

13 Die Vorlesung Garbenkohomologie im WS 17/18 **284**

Literaturverzeichnis **287**

Indexvorwort **289**

Index **290**

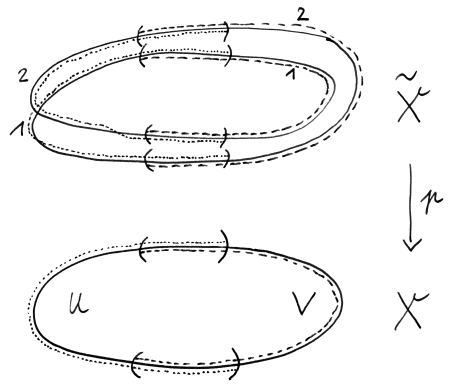
1 Čech-Kohomologie

1.1 Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen

1.1.1. Ich beginne mit einer Erinnerung an einige Begriffe aus der Überlagerungstheorie [TF] 2.3.1.1. Seien X ein topologischer Raum und $n \geq 1$ eine positive natürliche Zahl. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ heißt eine **n-blättrige Überlagerung**, wenn eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von X existiert derart, daß es für alle $U \in \mathcal{U}$ Homöomorphismen

$$i_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \{1, \ldots, n\}$$

gibt, die verträglich sind mit den offensichtlichen Projektionen beider Seiten auf die offene Menge U. Solch eine Familie von Homöomorphismen $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ nennen wir eine **Trivialisierung** unserer Überlagerung über der offenen Überdeckung $\mathcal{U}$. Zwei Überlagerungen nennt man **isomorph**, wenn sie isomorph sind in der Kategorie der topologischen Räume über X, wenn es also in anderen Worten einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt, der mit den jeweiligen Projektionen auf X verträglich ist. So ein Homöomorphismus ist dasselbe wie eine bijektive Decktransformation im Sinne von [TF] 2.3.4.3.



Eine zweiblättrige Überlagerung der Kreislinie mit Trivialisierung in Bezug auf eine Überdeckung durch zwei offene Teilmengen. Der Schnitt dieser beiden Teilmengen hat zwei Zusammenhangskomponenten, und die Verklebungsfunktion ist konstant das neutrale Element aus $\mathcal{S}_2$ auf der im Bild „hinteren“ Komponente und konstant die Transposition aus $\mathcal{S}_2$ auf der „vorderen“ Komponente.

1.1.2. Wir setzen $F := \{1, \ldots, n\}$ und bezeichnen mit $\mathcal{S}_n$ die Gruppe der Permutationen von F, versehen mit der diskreten Topologie. Jede Trivialisierung $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ einer n-blättrigen Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ über einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X liefert für beliebige $U, V \in \mathcal{U}$ Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{UV} : & U \cap V & \to & \mathcal{S}_n \\ & x & \mapsto & \varphi_{UV}^x \end{array}$$

durch die Vorschrift $(i_U \circ i_V^{-1})(x, f) = (x, \varphi_{UV}^x(f))$ $\forall x \in U \cap V, f \in F$. Wir nennen diese Abbildungen die **Verklebungsfunktionen** unserer Trivialisierung

$(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$. Nach [TM] 1.1.9.9 oder auch elementareren Überlegungen sind sie stetig. Gegeben $U, V, W \in \mathcal{U}$ haben wir offensichtlich

$$\varphi^x_{UV} \circ \varphi^x_{VW} = \varphi^x_{UW} \quad \forall x \in U \cap V \cap W$$

Definition 1.1.3. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung von X und G eine topologische Gruppe, deren Verknüpfung wir mit $\top$ notieren. Die Menge $\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ der **Čech-1-Kozykel** bezüglich $\mathcal{U}$ und G ist definiert als die Menge aller möglichen Wahlen von stetigen Abbildungen $\varphi_{UV} : U \cap V \to G$ für $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ derart, daß für beliebige $U, V, W \in \mathcal{U}$ auf dem Schnitt $U \cap V \cap W$ gilt

$$\varphi_{UV} \top \varphi_{VW} = \varphi_{UW}$$

Das $\mathcal{C}$ steht dabei für „stetig“ alias „continu“. Trägt G die diskrete Topologie, so schreibt man meist kürzer $\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; G)$ und redet von **G-wertigen Einskozykeln**.

Beispiel 1.1.4. Die Verklebungsfunktionen einer n-blättrigen Überlagerung bezügliche einer Trivialisierung über einer vorgegebenen offenen Überdeckung bilden einen $\mathcal{S}_n$-wertigen Einskozykel.

1.1.5 (**Varianten der Kozykelmengen**). Für Berechnungen in expliziten Beispiel ist es sinnvoller, zusätzlich eine Anordnung $\leq$ auf $\mathcal{U}$ zu wählen und ein Datum von stetigen Abbildungen φ_{UV} zu betrachten, das nur für Indizes (U, V) mit $U < V$ erklärt ist. Die Menge der entsprechenden Kozykel notieren wir

$$\check{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{ord}}(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$$

Bei die Entwicklung der allgemeinen Theorie führt die Wahl einer Anordnung dahingegen zu zusätzlichen Komplikationen. Für die weitere Entwicklung der allgemeinen Theorie ist es noch sinnvoller, offene Überdeckungen in Gestalt von Familien offener Teilmengen $(U_i)_{i\in I}$ zu betrachten, bei denen verschiedenen Indizes auch durchaus dieselbe offene Menge zugeordnet sein darf und wir als Kozykel Daten φ_{ij} mit $i, j \in I$ betrachten. Auch das führt jedoch zu zusätzlichen Komplikationen, die ich an dieser Stelle noch vermeiden will.

1.1.6. Sind $p : \tilde{X} \to X$ und $q : \hat{X} \to X$ zwei n-blättrige Überlagerungen eines topologischen Raums X mit je einer Trivialisierung über derselben Überdeckung $\mathcal{U}$ durch gewisse $i_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ und $j_U : q^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$, so verstehen wir unter einem **trivialisierungsverträglichen Isomorphismus** zwischen unseren beiden Überlagerungen eine bijektive Decktransformation $d : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ derart, daß gilt $j_U \circ d = i_U$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

Lemma 1.1.7. *Gegeben ein topologischer Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X liefert das Bilden der Verklebungsfunktionen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{n-blättrige Überlagerungen von X mit} \\ \textit{einer Trivialisierung $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$ über $\mathcal{U}$, bis auf} \\ \textit{trivialisierungsverträglichen Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{S}_n)$$

Beweis. Um die Bijektivität zu zeigen, konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Gegeben ein Čech-Einskozykel $(\varphi_{UV})_{U,V\in\mathcal{U}}$ bilden wir für jedes $U \in \mathcal{U}$ die einpunktige Menge $\{U\}$ und betrachten auf dem Raum

$$\bigsqcup_{U\in\mathcal{U}} \{U\} \times U \times F$$

die Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt wird von

$$(V, x, f) \sim (U, x, \varphi^x_{UV}(f)) \quad \forall\, U, V \in \mathcal{U},\ x \in U \cap V,\ f \in F.$$

Dann bilden wir den Raum $\tilde{X}$ der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie, der Projektion auf die mittlere Koordinate $\tilde{X} \to X$ und der offensichtlichen Trivialisierung über $\mathcal{U}$. Es bleibe dem Leser überlassen zu zeigen, daß diese Konstruktion eine Umkehrabbildung zur durch das Bilden der Verklebungsfunktionen gegebenen Abbildung aus unserem Lemma liefert. $\square$

1.1.8. Nun nehmen wir an, wir hätten für ein- und dieselbe Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ zwei Trivialisierungen über derselben offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ gegeben durch gewisse $i_U, \tilde{\imath}_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$. Dann erklären wir Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \psi_U : & U & \to & \mathcal{S}_n \\ & x & \mapsto & \psi^x_U \end{array}$$

durch die Gleichungen $(\tilde{\imath}_U \circ i_U^{-1})(x, f) = (x, \psi^x_U(f))\ \forall x \in U, f \in F$ und nennen diese ψ_U die **Übergangsfunktionen** zwischen unseren beiden Trivialisierungen (i_U) und $(\tilde{\imath}_U)$. Auch unsere Übergangsfunktionen sind offensichtlich stetig. Die Verklebungsfunktionen $\tilde{\varphi}_{UV}$ zu unserer zweiten Trivialisierung $(\tilde{\imath}_U)$ lassen sich durch die Verklebungsfunktionen φ_{UV} zu unserer ersten Trivialisierung (i_U) und die Übergangsfunktionen zwischen den beiden Trivialisierungen ausdrücken vermittels der Formel

$$\tilde{\varphi}^x_{UV} = \psi^x_U \circ \varphi^x_{UV} \circ (\psi^x_V)^{-1} \quad \forall x \in U \cap V$$

Definition 1.1.9. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und G eine topologische Gruppe. Zwei Čech-Einskozykel $\varphi, \tilde{\varphi} \in \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ heißen **kohomolog** und wir schreiben $\varphi \sim \tilde{\varphi}$, wenn es eine Familie $\psi = (\psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ von stetigen Funktionen $\psi_U : U \to G$ gibt derart, daß für beliebige $U, V \in \mathcal{U}$ auf dem Schnitt $U \cap V$ gilt

$$\tilde{\varphi}_{UV} = \psi_U \top \varphi_{UV} \top \psi_V^{-1}$$

Diese Relation „kohomolog“ ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen notieren wir

$$\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G) := \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)/\sim$$

und nennen sie die **erste Čech-Kohomologie für die Überdeckung $\mathcal{U}$ zu** G. Trägt G die diskrete Topologie, so schreibt man meist kürzer $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; G)$.

1.1.10. Unser $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ ist im allgemeinen keine Gruppe, sondern nur eine Menge mit einem ausgezeichneten Punkt, nämlich der Klasse des trivialen Einskozykels. Ist jedoch die Gruppe G kommutativ, so sind $\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ auch kommutative Gruppen in natürlicher Weise.

Lemma 1.1.11. *Gegeben ein topologischer Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X liefert das Bilden der Verklebungsfunktionen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-blättrige über } \mathcal{U} \text{ trivialisierbare} \\ \text{Überlagerungen von } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{S}_n)$$

Beweis. Dem Leser überlassen. □

1.1.12 (**Übergang zu Überdeckung durch weniger offene Mengen**). Ist $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X und $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ eine weitere Überdeckung durch weniger offene Mengen, so haben wir eine offensichtliche Abbildung $\mathrm{res}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}; \mathcal{C}_G)$, die den ausgezeichneten Punkt in den ausgezeichneten Punkt überführt.

1.1.13 (**Weglassen unnötig kleiner Mengen aus einer offenen Überdeckung**). Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ eine weitere Überdeckung durch weniger offene Mengen und ist zusätzlich jede Menge aus $\mathcal{U}$ bereits in einer Menge aus $\mathcal{V}$ enthalten, lassen wir also salopp gesprochen „nur kleine Mengen aus $\mathcal{U}$ weg“, so ist unsere Abbildung eine Bijektion

$$\mathrm{res}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}; \mathcal{C}_G)$$

Das ist anschaulich klar in unserem Spezialfall $G = \mathcal{S}_n$. Formal kann man eine Umkehrabbildung konstruieren, indem man man eine Abbildung $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ wählt mit $W \subset \tau(W)\ \forall W$ und jedem Kozykel (φ_{UV}) rechts den Kozykel (ϕ_{UV}) links mit $\phi_{UV} := \varphi_{\tau(U)\tau(V)}|_{U \cap V}$ zuordnet. Das Argument vereinfacht sich zusätzlich, wenn man annimmt, daß τ ein Schnitt der Einbettung ist alias auf $\mathcal{V}$ die Identität induziert. Wir beweisen in 1.4.2 eine Variante.

Definition 1.1.14. Wir nennen eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines topologischen Raums X **gesättigt** oder auch ein **überdeckendes Sieb**, wenn sie mit einer Menge auch alle ihre offenen Teilmengen enthält, wenn also aus $U \in \mathcal{U}$ und $V \Subset U$ folgt $V \in \mathcal{U}$.

1.1.15. Die Arbeit mit Sieben ist für den Aufbau der allgemeinen Theorie besonders gut geeignet, für explizite Beispiele aber maximal ungeschickt.

Definition 1.1.16. Seien X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe. Die **erste Čech-Kohomologie von X zu G** ist der über alle überdeckenden Siebe $\mathcal{U}$ von X gebildete Kolimes

$$\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_G) := \operatorname{colf}_{\mathcal{U}} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}_G)$$

Der Begriff eines Kolimes wird in [TS] 3.7.1.2 besprochen. Er ist hier zu verstehen als Kolimes in der Kategorie der bepunkteten Mengen. Im Fall einer diskreten Gruppe G verwendet man meist die Notation $\check{\mathrm{H}}^1(X;G)$.

1.1.17. Gegeben $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ zwei gesättigte offene Überdeckungen eines topologischen Raums X wird die Bedingung in 1.1.13 im allgemeinen verletzt sein, wir müssen dann vielmehr anschaulich gesprochen „nicht kleine, sondern vielmehr große offene Mengen aus $\mathcal{U}$ weglassen“ um $\mathcal{V}$ zu kriegen. Deshalb muß in diesem Fall die Restriktionsabbildung $\operatorname{res}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}_G) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V};\mathcal{C}_G)$ keineswegs ein Isomorphismus sein. Anschaulich gesprochen werden ja immer mehr Überlagerungen trivialisierbar, wenn wir zu immer feineren Überdeckungen übergehen.

1.1.18. Die erste Čech-Kohomologie ist in Gestalt dieser Definition für explizite Rechnungen völlig ungeeignet. Dahingegen scheint mir ihre konzeptionelle Bedeutung in dieser Gestalt besonders klar hervorzutreten.

Satz 1.1.19 (Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen). *Für jeden topologischen Raum X liefert das Bilden von Verklebungsfunktionen für Trivialisierungen bezüglich offener Überdeckungen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{S}_n)$$

Beweis. Das ergibt sich aus den vorhergehenden Definitionen und Lemmata. Die Details bleiben dem Leser überlassen. □

1.1.1 Übungen

Übung 1.1.20. Man leite aus Lemma 1.1.11 und der offensichtlichen Variante von 1.1.11 für angeordnete Überlagerungen eine Klassifikation der n-blättrigen Überlagerungen der Kreislinie her. Man verwende die Erkenntnis, daß jede Überlagerung eines Intervalls trivial ist. Man erinnere die Beschreibung der Konjugationsklassen in den symmetrischen Gruppen.

1.2 Erste Čech-Kohomologie und Torsoren

Definition 1.2.1. Sei G eine topologische Gruppe. Ein G-Raum Y heißt **topologisch frei**, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene G-stabile Umgebung U besitzt,

die isomorph ist zu einem G-Raum der Gestalt $W \times G$ für einen weiteren topologischen Raum W.

Beispiel 1.2.2. Die Operation von $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie auf $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie ist stetig und frei, aber nicht topologisch frei.

Definition 1.2.3. Seien G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Ein G-**Torsor** auf X, auch genannt ein G**-Hauptfaserbündel**, englisch **principal bundle**, französisch **fibré principal**, ist ein Paar

$$(E, p)$$

bestehend aus einem topologisch freien G-Rechtsraum E mitsamt einer stetigen Abbildung $p : E \to X$, die einen Homöomorphismus $E/G \xrightarrow{\sim} X$ induziert. Wir nennen E den **Totalraum** und p die **Projektion** unseres Torsors. Ein **Morphismus von** G**-Torsoren auf** X ist eine stetige G-äquivariante Abbildung über X.

Beispiel 1.2.4. Ist G diskret, so ist ein G-Torsor auf einem topologischen Raum dasselbe wie eine Überlagerung unseres Raums mitsamt einer Rechtsoperation von G durch Decktransformationen derart, daß die Operation auf jeder Faser frei und transitiv ist.

Vorschau 1.2.5. Ist G eine Lie-Gruppe und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ersetzt man in der obigen Definition das Wort „stetig“ durch „glatt“ und den Begriff „topologischer Raum“ durch „differenzierbare Mannigfaltigkeit“, so erhält man die Definition eines **glatten** G**-Hauptfaserbündels auf** X.

1.2.6 (**Erste Čech-Kohomologie und Torsoren**). Sei X ein topologischer Raum, G eine topologische Gruppe und $p : E \to X$ ein G-Torsor auf X. Wählen wir für unseren Torsor eine trivialisierende gesättigte offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X und über $\mathcal{U}$ eine Trivialisierung $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ von E durch die Wahl gewisser $i_U \in \mathrm{Top}^G_U(p^{-1}(U), U \times G)$ und erklären für $U, V \in \mathcal{U}$ die Verklebungsfunktionen $\varphi_{UV} \in \mathrm{Top}(U \cap V, G)$ durch die Vorschrift $(i_U \circ i_V^{-1})(x, g) = (x, \varphi_{UV}(x)g)$, so bilden die φ_{UV} einen Čech-Kozykel, dessen Kohomologieklasse nur von E abhängt, und wir erhalten so eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} G\text{-Torsoren auf } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{C}_G)$$

Der Beweis läuft vollständig analog zum Beweis von 1.1.19 und bleibt dem Leser überlassen. Gegeben ein Homomorphismus topologischer Gruppen $H \to G$ kann man weiter jedem H-Hauptfaserbündel $E \to X$ das G-Hauptfaserbündel $E \times_{/H} G \to X$ zuordnen. Diese Zuordnung ist dann unter den eben erklärten Bijektionen mit der offensichtlichen Abbildung $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{C}_H) \to \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{C}_G)$ verträglich.

1.2.7 (**Erste Čech-Kohomologie als singuläre Kohomologie**). Gegeben ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer topologischer Raum X und eine diskrete abelsche Gruppe M können wir bereits hier einen Isomorphismus zwischen der ersten singulären Kohomologie und der ersten Čech-Kohomologie erhalten als die Komposition der Isomorphismen beziehungsweise Inversen der Isomorphismen des folgenden Diagramms, dessen Pfeile wir im Anschluß diskutieren:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^1(X;M)_{\mathrm{sing}} & & \check{\mathrm{H}}^1(X;M) \\
\uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(X),M) & & \{M\text{-Torsoren auf } X\}/_{\cong} \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\mathrm{Grp}(\pi_1(X,x),M) & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \pi_1(X,x)\text{-Mengen mit einer freien} \\ \text{transitiven Rechtsoperation von } M \end{array} \right\} /_{\cong}
\end{array}$$

Hier kommt der vertikale Pfeil oben links vom universellen Koeffiziententheorem [TS] 3.6.7.2 her, der vertikale Pfeil unten links vom Satz von Hurwitz [TS] 3.1.5.2 und der vertikale Pfeil oben rechts von der vorhergehenden Bemerkung 1.2.6. Für den vertikalen Pfeil unten rechts erinnern wir, daß nach [TF] 2.4.5.14 unter unseren Annahmen der Faserfunktor zu einem beliebigen Punkt $x \in X$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{Überlagerungen von } X\} \xrightarrow{\approx} \{\pi_1(X,x)\text{-Mengen}\}$$

liefert. Sie induziert auch eine Äquivalenz zwischen den Kategorien aller „Objekte mit Rechtsoperation einer Gruppe M“ in unseren beiden Kategorien, und diese hinwiederum schränkt ein zu einer Äquivalenz von Kategorien

$$\{M\text{-Torsoren auf } X\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{c} \pi_1(X,x)\text{-Mengen mit einer freien} \\ \text{transitiven Rechtsoperation von } M \end{array} \right\}$$

Das liefert die Bijektion auf Isomorphieklassen in der unteren rechten Vertikale. Um schließlich die untere Horizontale zu erklären, beachten wir die Bijektion $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{-M}(M)$ vermittels $m \mapsto (m\cdot)$, die Endomorphismen der M-Rechtsmenge M sind also genau die Multiplikationen mit Elementen von M von links. Das gilt sogar für jedes Monoid M, die Umkehrabbildung zu $m \mapsto (m\cdot)$ ist $\varphi \mapsto \varphi(e)$. Die Operationen einer Gruppe P auf der M-Rechtsmenge M entsprechen also eineindeutig den Monoidhomomorphismen $\phi : P \to M$ und zwei solche Monoidhomomorphismen ϕ, ψ liefern isomorphe M-Rechtsmengen mit P-Operation genau dann, wenn es eine Einheit $m \in M^\times$ gibt mit $\phi = (\mathrm{int}\, m) \circ \psi$. Ist M kommutativ, so bedeutet das bereits $\phi = \psi$ und diese Erkenntnis liefert die Bijektion in der unteren Horizontale unseres Diagramms. Wir werden später noch sehr viel stärkere Resultate über den Zusammenhang von singulärer Kohomologie und Garbenkohomologie kennenlernen.

Definition 1.2.8. Sei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$ und sei X ein topologischer Raum.

1. Ein „Möchtegern-Bündel von $\mathbb{K}$-Vektorräumen“ oder kurz ein „Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel“ $E = (E, p) = (p : E \to X)$ auf X besteht aus einem topologischen Raum $p : E \to X$ über X, dem **Totalraum** E mit der **Projektion** p, sowie einer $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur auf jeder Faser $E_x = p^{-1}(x)$.

2. Ein **Morphismus** von einem Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel E in ein Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel F ist eine stetige Abbildung $h : E \to F$ über X derart, daß für alle $x \in X$ die auf den Fasern induzierte Abbildung $h : E_x \to F_x$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist.

3. Der Raum $X \times \mathbb{K}^n$ mit seiner offensichtlichen Struktur als Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel heißt das **konstante n-dimensionale $\mathbb{K}$-Bündel auf** X.

4. Ein **n-dimensionales topologisches $\mathbb{K}$-Bündel auf** X ist ein n-dimensionales Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel (E, p), bei dem jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß das auf der Umgebung U induzierte Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel $(p : p^{-1}(U) \to U)$ auf U isomorph ist zum konstanten n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Bündel $U \times \mathbb{K}^n$ auf U.

1.2.9. Die Automorphismengruppe des konstanten $\mathbb{K}$-Bündels $X \times \mathbb{K}^n$ ist kanonisch isomorph zur Gruppe der stetigen Abbildungen von X nach $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$. Genauer erhalten wir eine Bijektion $\mathrm{Top}(X, \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X \times \mathbb{K}^n)$ vermittels $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x, v) = (x, f(x)v)$. Hier fassen wir $v \in \mathbb{K}^n$ als Spaltenvektor auf und verstehen im Fall der Quaternionen unter einem $\mathbb{H}$-Vektorraum einen $\mathbb{H}$-Rechtsmodul.

1.2.10. Ganz genauso wie in 1.1.19 erhalten wir auch Bijektionen

$$\{n\text{-dimensionale } \mathbb{K}\text{-Bündel auf } X\} /_{\cong} \quad \xrightarrow{\sim} \quad \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{C}_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})})$$

Genauer betrachten wir lokale Trivialisierungen unseres $\mathbb{K}$-Bündels und die Klasse des durch die zugehörigen Übergangsfunktionen gegebenen Čech-1-Kozykels. Wir können auch direkt jedem $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$-Torsor E das n-dimensionale $\mathbb{K}$-Bündel $E \times_{/\,\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})} \mathbb{K}^n$ zuordnen und erhalten dann ein kommutatives Dreieck von Bijektionen, an dessen drei Ecken Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln, Isomorphieklassen von Torsoren und $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{C}_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})})$ stehen.

Vorschau 1.2.11. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ersetzt man in der obigen Definition überall das Wort „stetig“ durch „glatt“ und den Begriff „topologischer Raum“ durch „differenzierbare Mannigfaltigkeit“, so erhält man die Definition eines **n-dimensionalen differenzierbaren $\mathbb{K}$-Bündels auf** X, wie

sie in [ML] 28.3.4.3 bereits im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gegeben wurde. Das Tangentialbündel an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist etwa ein n-dimensionales differenzierbares und damit erst recht ein n-dimensionales topologisches $\mathbb{R}$-Bündel. Unter anderem um die Klassifikation differenzierbarer oder auch „analytischer" Bündel in derselben Weise behandeln zu können wie die Klassifikation topologischer Bündel, führen wir im folgenden Abschnitt allgemeiner Prägarben und ihre Čech-Kohomologie ein.

1.2.1 Übungen

Übung 1.2.12. Sei X ein topologischer Raum. Wir erhalten eine Bijektion

$$\{\mathcal{S}_n\text{-Torsoren auf } X\}/_{\cong} \quad \tilde{\to} \quad \{n\text{-blättrige Überlagerungen von } X\}/_{\cong}$$

durch $E \mapsto E \times_{/\mathcal{S}_n} \{1, \ldots, n\}$ beziehungsweise in der umgekehrten Richtung, indem wir einer n-blättrigen Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ die Menge $E := \bigsqcup_x E_x$ zuordnen, für $E_x := \mathrm{Ens}^{\times}(\{1, \ldots, n\}, p^{-1}(x))$ die Menge aller Bijektionen zwischen $\{1, \ldots, n\}$ und der Faser unserer Überlagerung bei x, mit der offensichtlichen $\mathcal{S}_n$-Operation und Projektion auf X und einer geeigneten Topologie. Hierbei ist $\times_{/\mathcal{S}_n}$ das balancierte Produkt im Sinne von [TF] 2.4.8.18.

Übung 1.2.13. Jeder Morphismus von Torsoren ist ein Isomorphismus. Die Automorphismen des G-Torsors $X \times G$ über X können identifiziert werden mit den stetigen Abbildungen $X \to G$. Genauer erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Top}(X, G) \tilde{\to} \mathrm{Top}_X^G(X \times G)$$

durch die Vorschrift $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}$ gegeben durch $\tilde{f}(x, g) = (x, f(x)g)$.

Übung 1.2.14. Man zeige, daß der in 1.2.7 konstruierte Isomorphismus zwischen der ersten singulären Kohomologie und der ersten Čech-Kohomologie nicht von der Wahl des Basispunkts $x \in X$ abhängt.

Übung 1.2.15. Ist der topologische Raum X einfach zusammenhängend, so besteht $\check{\mathrm{H}}^1(X; G)$ für jede diskrete Gruppe G nur aus einem Punkt.

Übung 1.2.16. G eine topologische Gruppe und E ein topologisch freier G-Raum und X ein beliebiger G-Raum, so ist $X \times E$ mit der diagonalen G-Operation als G-Raum isomorph zu $X \times E$ mit der G-Operation nur auf dem zweiten Faktor und ist damit auch topologisch frei.

Übung 1.2.17. Ist F ein topologischer Raum, auf dem eine topologische Gruppe G wirkt, und ist E ein G-Torsor auf einem Raum X, so ist $E \times_{/G} F$ ein Faserbündel über X mit Faser F.

1.2.18. In manchen Fällen liefert die Konstruktion aus 1.2.17 sogar eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen von G-Torsoren und Isomorphieklassen von Faserbündeln mit Faser F, so zum Beispiel etwa im Fall $F = \{1, \ldots, n\}$ und $G = \mathcal{S}_n$, den wir bereits in 1.2.12 diskutiert hatten.

Übung 1.2.19. Sei G eine topologische Gruppe. Ordnen wir jedem Element $g \in G$ den G-Torsor auf S^1 zu, der entsteht aus $[0,1] \times G$ durch die Identifikation $(0,h) \sim (1,gh)$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\{\text{Konjugationsklassen in } \pi_0(G)\} \xrightarrow{\sim} \{G\text{-Torsoren auf } S^1\}/_{\cong}$$

zwischen der Menge der Konjugationsklassen in der Gruppe der Wegzusammenhangskomponenten von G und der Menge der Isomorphieklassen von G-Torsoren auf der Kreislinie.

1.3 Prägarben und höhere Čech-Kohomologie

1.3.1. Für einen topologischen Raum bilden wir die Kategorie seiner offenen Teilmengen mit allen offenen Teilmengen als Objekten und den Inklusionen als Morphismen. Insbesondere ist in dieser Kategorie also jede Morphismenmenge entweder einelementig oder leer.

Definition 1.3.2. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{W}$ eine Kategorie. Eine **Prägarbe**, englisch **presheaf**, französisch **prefaisceau**, auf X mit Werten in $\mathcal{W}$ ist ein Funktor

$$\{\text{offene Teilmengen von } X\}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{W}$$

Ein **Morphismus von Prägarben** ist eine natürliche Transformation von Funktoren. Eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen heißt eine **abelsche Prägarbe**. Die Kategorie der abelschen Prägarben auf einem Raum X notieren wir $\mathrm{pAb}_{/X}$. Vereinbaren wir die Notation $\mathrm{Off}(X)$ für die Kategorie der offenen Teilmengen von X, so ist die Kategorie der $\mathcal{W}$-wertigen Prägarben auf X die Funktorkategorie

$$\mathrm{Cat}(\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{opp}}, \mathcal{W})$$

1.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Autoren betrachten nur Prägarben von Gruppen oder sogar nur von abelschen Gruppen und fordern dann von jeder Prägarbe zusätzlich, daß der entsprechende Funktor der leeren Menge eine einelementige Gruppe zuordnen soll. Derartige Zusatzannahmen scheinen mir im Lichte der obigen allgemeinen Definition unnatürlich.

1.3.4. Ausgeschrieben ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$ von Gruppen auf einem Raum X also eine Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \Subset X$ eine Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet und jeder Inklusion $V \subset U$ von offenen Teilmengen von X einen Homomorphismus

von Gruppen $\rho_U^V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, die sogenannte **Einschränkungsabbildung**, in Formeln

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ \cup & \mapsto & \downarrow \rho_U^V \\ V & \mapsto & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Von diesen Daten muß man dann noch fordern, daß gilt $\rho_U^U = \mathrm{id}$ und $\rho_V^W \circ \rho_U^V = \rho_U^W$ falls $W \subset V \subset U$. Ein Element $s \in \mathcal{F}(U)$ heißt ein **Schnitt von $\mathcal{F}$ über U**. Statt $\rho_U^V(s)$ schreiben wir meist $s|_V$ oder auch $s|V$. Ein Morphismus von Prägarben $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist ausgeschrieben eine Familie von Gruppenhomomorphismen $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ derart, daß gilt $\rho_U^V \circ f_U = f_V \circ \rho_U^V$ für alle $V \subset U$, wo wir mit ρ_U^V links die Restriktionsabbildungen der Prägarbe $\mathcal{G}$ und rechts die Restriktionsabbildungen der Prägarbe $\mathcal{F}$ meinen. Als Diagramm geschrieben soll also kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \to & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Beispiel 1.3.5. Sei X ein topologischer Raum. Die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \Subset X$ den komplexen Vektorraum $\mathcal{C}(U)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf U zuordnet und jeder Inklusion $V \Subset U$ die Restriktion $\mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$, ist eine Prägarbe $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}_{\mathbb{C},X}$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen auf X, die **Prägarbe der stetigen komplexwertigen Funktionen**.

Beispiel 1.3.6. Ist allgemeiner X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe, so bilden die stetigen Abbildungen von offenen Teilmengen von X nach G eine Prägarbe $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{G,X}$ von Gruppen auf X, die **Prägarbe der stetigen G-wertigen Funktionen**. Wählt man auf G die diskrete Topologie, so notiert man diese Prägarbe oft G_X und spricht von der **Prägarbe der lokal konstanten G-wertigen Funktionen**. Für jeden topologischen Raum X haben wir zum Beispiel Homomorphismen von abelschen Prägarben $\mathbb{Z}_X \to \mathbb{R}_X \to \mathcal{C}_{\mathbb{R},X}$.

Beispiel 1.3.7. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so bilden die komplexwertigen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen eine Prägarbe $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C},X}$ von komplexen Vektorräumen auf X. Wir haben dann einen natürlichen Homomorphismus $\mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}$ von Prägarben von $\mathbb{C}$-Vektorräumen auf X.

Beispiel 1.3.8. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe, so bilden die differenzierbaren Abbildungen von offenen Teilmengen von X nach G eine Prägarbe $\mathcal{C}^\infty_G = \mathcal{C}^\infty_{G,X}$ von Gruppen auf X, die **Prägarbe der differenzierbaren G-wertigen Funktionen**.

Beispiel 1.3.9. Ist $p : E \to X$ eine stetige Abbildung, so erhalten wir eine Prägarbe von Mengen auf X, in dem wir jedem $U \Subset X$ die Menge aller stetigen Abbildungen $s : U \to E$ zuordnen mit $p(s(x)) = x \ \forall x \in U$. Sie heißt die **Prägarbe der Schnitte von p**.

Beispiel 1.3.10. Gegeben ein topologischer Raum X, ein Punkt $x \in X$ und eine Menge A definieren wir eine Prägarbe von Mengen $A_{(x)}$ auf X durch die Vorschrift $A_{(x)}(U) = A$ falls $x \in U$ und $A_{(x)}(U)$ einpunktig sonst. Diese Prägarbe heißt der **Wolkenkratzer bei x mit Faser** A. Für eine abelsche Gruppe A ist unser Wolkenkratzer in natürlicher Weise eine abelsche Prägarbe.

Definition 1.3.11 (Čech-Kohomologie einer abelschen Prägarbe). Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe auf einem topologischen Raum X. Gegeben ein System offener Teilmengen $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von X definieren wir den Komplex

$$\ldots \to \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \check{\mathrm{C}}^{q+1}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \to \ldots$$

der **Čech-Koketten für $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$** als den Komplex von abelschen Gruppen

$$\check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \prod_{(U_0,\ldots,U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

Hier setzen wir $\check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = 0$ für $q < 0$ und erklären die Randoperatoren d wie folgt: Eine Čech-Kokette $\psi \in \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ist ja ein Tupel bestehend aus Elementen $\psi(U_0, \ldots, U_q) \in \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$. Wir setzen dann

$$(d\psi)(U_0, \ldots, U_{q+1}) := \sum_{0 \le i \le q+1} (-1)^i \psi(U_0, \ldots, \widehat{U_i}, \ldots, U_{q+1}) | (U_0 \cap \ldots \cap U_{q+1})$$

Die „Tarnkappe“ über U_i soll dabei wie üblich bedeuten, daß U_i aus dem Schnitt wegzulassen ist. Man prüft leicht die Formel $dd = 0$, unsere Konstruktion liefert also wirklich einen Komplex. Seine Kohomologie notieren wir

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q \check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

Ist $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X, so nennen wir sie die **Čech-Kohomologie von X bezüglich $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$**. Die **q-te Čech-Kohomologie** $\check{\mathrm{H}}^q(X; \mathcal{F})$ **von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$** schließlich ist definiert als der Kolimes über alle gesättigten offenen Überdeckungen $\mathcal{U}$ von X der Čech-Kohomologien für diese Überdeckungen, in Formeln

$$\check{\mathrm{H}}^q(X; \mathcal{F}) := \operatorname{colf} \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

Um den Kolimes zu bilden beachten wir wie im Fall der ersten Čech-Kohomologie, daß für $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ die Einschränkung natürliche Abbildungen von Komplexen und damit natürliche Abbildungen $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \to \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ induziert.

Lemma 1.3.12 (Čech-Kohomologie von Wolkenkratzern). *Gegeben ein topologischer Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X gilt für den Wolkenkratzer $A_{(x)}$ an einem Punkt $x \in X$ mit einer abelschen Gruppe A als Faser*

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}; A_{(x)}) = 0 \quad \textit{für } q > 0.$$

Beweis. Wir können den fraglichen Čech-Komplex, indem wir zur Menge $E = \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}$ den in [TS] 3.1.1.16 betrachteten Komplex mit $\mathbb{Z}E^{q+1}$ im Grad q bilden, zum Komplex der $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}E^{q+1}, A)$ übergehen und schließlich den Anteil mit $q = -1$ abschneiden. Da unser Komplex $\mathbb{Z}E^{q+1}$ nach dem dortigen Beweis sogar nullhomotop ist, muß auch der Komplex $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}E^{q+1}, A)$ nullhomotop und insbesondere exakt sein und durch das Abschneiden kriegt er A als nullte Kohomologie und bleibt sonst exakt. Wir können aber auch den Beweis von [TS] 3.1.1.16 wiederholen: Wir wählen dann $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und definieren für $q \geq 0$ die Abbildung $\delta = \delta_U : \check{\mathrm{C}}^{q+1}(\mathcal{U}; A_{(x)}) \to \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}; A_{(x)})$ durch die Vorschrift

$$(\delta\psi)(U_0, \ldots, U_q) = \psi(U, U_0, \ldots, U_q)$$

Eine kurze Rechnung zeigt $d\delta + \delta d = \mathrm{id}$ auf $\check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}; A_{(x)})$ für $q > 0$, folglich ist für $q > 0$ jeder q-Zykel ein Rand. □

1.4 Vereinfachte Berechnung der Čech-Kohomologie

1.4.1 (**Motivation**). Für explizite Berechnungen ist der volle Čech-Komplex ungeschickt. In diesem Abschnitt und insbesondere in Korollar 1.4.4 wird erklärt, wie die Čech-Kohomologie auch mit viel kleineren Komplexen berechnet werden kann, die nur für die Entwicklung der allgemeinen Theorie weniger geschickt sind.

Proposition 1.4.2. *Seien $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ offene Überdeckungen eines topologischen Raums und sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe auf besagtem Raum. Liegt jede Menge aus $\mathcal{U}$ in einer Menge aus $\mathcal{V}$, so sind unsere natürlichen Abbildungen Isomorphismen*

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

1.4.3. Die Notation führt leicht zu Verwirrung. Die Überdeckung $\mathcal{V}$ besteht aus weniger offenen Mengen als die Überdeckung $\mathcal{U}$, aber keineswegs aus „kleineren“ offenen Mengen. Ganz im Gegenteil entsteht salopp gesprochen unsere Überdeckung $\mathcal{V}$ aus $\mathcal{U}$, indem man aus $\mathcal{U}$ einige offene Mengen wegläßt, die eh schon in anderen offenen Mengen aus $\mathcal{U}$ enthalten sind. Im Fall der ersten Kohomlogie bedeutet die Aussage in etwa, daß jede „über einer offenen Menge trivialisierbare Struktur auch über jeder darin enthaltenen offenen Menge trivialisierbar ist“.

Beweis. Man wähle $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, U \mapsto U^\tau$ mit $U \subset U^\tau \ \forall U \in \mathcal{U}$ und konstruiere eine Kettenabbildung $\alpha : \check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ durch $\phi \mapsto \alpha\phi$ mit

$$\alpha\phi(U_0, \ldots, U_q) := \phi(U_0^\tau, \ldots, U_q^\tau)|(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

Wir behaupten, daß sie homotopieinvers ist zur in ähnlicher Weise durch die Inklusion $\iota : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U}$ gegebenen Kettenabbildung $\beta : \check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{V}; \mathcal{F})$,

die ihrerseits die natürliche Abbildung auf der Čech-Kohomologie induziert. Es reicht, wenn wir im Fall $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ für jedes τ wie oben zeigen, daß die fragliche Kettenabbildung homotop ist zur Identität, und diese Erkenntnis dann anwenden auf $(\mathcal{U}, \iota\tau)$ und $(\mathcal{V}, \tau\iota)$. Seien also $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{U}, U \mapsto U^\tau$ eine Abbildung mit $U \subset U^\tau \ \forall U \in \mathcal{U}$ und α wie oben. Als Kettenhomotopie versuchen wir es mit

$$(\delta\phi)(U_1, \ldots, U_q) := \sum_i (-1)^i \phi(U_1, \ldots, U_i, U_i^\tau, \ldots, U_q^\tau)$$

und lassen dabei rechts die Restriktion auf $U_1 \cap \ldots \cap U_q$ aus der Notation weg. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(d\delta\phi)(U_0, \ldots, U_q) &= \textstyle\sum_i (-1)^i (\delta\phi)(U_0, \ldots, \widehat{U_i}, \ldots, U_q) \\
&= -\textstyle\sum_{j<i} (-1)^{i+j} \phi(U_0, \ldots, U_j, U_j^\tau, \ldots, \widehat{U_i^\tau}, \ldots, U_q^\tau) \\
&\quad + \textstyle\sum_{j>i} (-1)^{i+j} \phi(U_0, \ldots, \widehat{U_i}, \ldots, U_j, U_j^\tau, \ldots, U_q^\tau) \\
(\delta d\phi)(U_0, \ldots, U_q) &= -\textstyle\sum_j (-1)^j (d\phi)(U_0, \ldots, U_j, U_j^\tau, \ldots, U_q^\tau) \\
&= -\textstyle\sum_{j\geq i} (-1)^{i+j} \phi(U_0, \ldots, \widehat{U_i}, \ldots, U_j, U_j^\tau, \ldots, U_q^\tau) \\
&\quad + \textstyle\sum_{j\leq i} (-1)^{i+j} \phi(U_0, \ldots, U_j, U_j^\tau, \ldots, \widehat{U_i^\tau}, \ldots, U_q^\tau)
\end{aligned}$$

In $(d\delta + \delta d)\phi$ werden alle Summanden der oberen Summe weggehoben und nur die Terme mit $i = j$ in den unteren Summen bleiben stehen. Von denen heben sich aber auch die mittleren weg und nur $\phi(U_0, \ldots, U_q) - \phi(U_0^\tau, \ldots, U_q^\tau)$ bleibt stehen. Also gilt $(d\delta + \delta d)\phi = \phi - \alpha\phi$ wie gewünscht. □

1.4.4 (**Vereinfachte Berechnung der Čech-Kohomologie**). Hier brauchen wir die sehr allgemeinen Resultate des folgenden Abschnitts über den vergleich verschiedener Standardkomplexe und insbesondere Satz 1.5.3, der nach 1.5.4 auch für Koeffizientensysteme mit Werten in $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ gilt. Das ist der Fall, mit dem man es in der Čech-Kohomologie für gewöhnlich zu tun hat. Unter dem Übergang zu $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ verwandeln sich Koprodukte in Produkte; die Differentiale vergrößern den homologischen Grad, der dann meist als oberer Index notiert wird; und Unterkomplexe verwandeln sich in Quotientenkomplexe und umgekehrt. Will man insbesondere die Čech-Kohomologie einer abelschen Prägarbe in Bezug auf eine offene Überdeckung explizit berechnen, so darf man statt dem vollen Čech-Komplex genausogut den **angeordneten Čech-Komplex** nehmen. Um ihn zu konstruieren, wählt man für den zu untersuchenden Raum X eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ und eine Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{U}$ und bildet zu jeder abelschen Prägarbe $\mathcal{F}$ den Komplex der **angeordneten Čech-Koketten**

$$\check{\mathrm{C}}^q_<(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \prod_{U_0 < \ldots < U_q} \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

Das Produkt läuft wie angedeutet über alle streng monoton wachsenden Folgen der Länge $q+1$ in $\mathcal{U}$. Das Differential wird definiert durch dieselben Formeln wie beim Čech-Komplex aus 1.3.11. Aus Satz 1.5.3 folgt dann, daß der offensichtliche Epimorphismus $\check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \check{\mathrm{C}}^q_<(\mathcal{U};\mathcal{F})$ Isomorphismen auf der Kohomologie induziert. Noch genauer gesagt betrachtet man dafür das Koeffizientensystem $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M}(U_1,\ldots,U_n) := \mathcal{F}(U_1 \cap \ldots \cap U_n)$ und ergänzt es auf das leere Tupel durch die Vorschrift $\mathcal{M}(\ ) := 0$. Wenn man stattdessen den Schnitt über das leere Tupel als den ganzen Raum versteht und mit $\mathcal{M}(\ ) := \mathcal{F}(X)$ arbeitet, erhält man stattdessen eine Art „reduzierte Čech-Kohomologie“.

1.5 Standardkomplexe mit Koeffizienten

1.5.1. Seien E eine Menge und $\mathcal{P}(E)_{\mathrm{fin}}$ die Menge ihrer endlichen Teilmengen, aufgefaßt als Objektmenge einer Kategorie mit Inklusionen als Morphismen. Einen Funktor $\mathcal{M} : \mathcal{P}(E)_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ab}$ nennen wir in diesem Kontext ein **Koeffizientensystem zu** E. Wir erklären eine Verallgemeinerung $C(E;\mathcal{M})$ des in [TS] 3.1.1.16 eingeführten Komplexes $C(E)$, indem wir für jedes Tupel $(v_1,\ldots,v_q) \in E^{\times q}$ die Abkürzung $\mathcal{M}(v_1,\ldots,v_q) := \mathcal{M}(\{v_1,\ldots,v_q\})$ vereinbaren und dann setzen

$$C(E;\mathcal{M})_q := \bigoplus_{(v_1,\ldots,v_q)\in E^{\times q}} \mathcal{M}(v_1,\ldots,v_q)$$

Den Randoperator erklären wir, indem wir ihn auf allen Summanden angeben, also auf allen Elementen, die Bilder von $m \in \mathcal{M}(\{v_1,\ldots,v_q\})$ unter der Injektion in den entsprechenden Teil des Koprodukts sind. Wir notieren wir so ein Bild $m(v_1,\ldots,v_q)$ und lesen das als „m an die Stelle mit Index $(v_1,\ldots,v_q)$ gesetzt“. Den Randoperator $C(E;\mathcal{M})_{q+1} \to C(E;\mathcal{M})_q$ erklären wir nun durch

$$m(v_0,\ldots,v_q) \mapsto \sum_i (-1)^i \tilde{m}(v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_q)$$

mit der abkürzenden Notation $\tilde{m}$ für die Bilder von m unter dem Effekt des Funktors $\mathcal{M}$ auf den jeweiligen opponierten Inklusionsabbildungen und mit davon abgesehen hoffentlich selbsterklärender Notation. Schließlich setzen wir unseren Komplex noch durch Null auf alle negativen Indizes q fort. Zusätzlich betrachten wir im Fall einer angeordneten Menge $(E,\leq)$ die Unterkomplexe

$$A(E;\mathcal{M}) \hookrightarrow B(E;\mathcal{M}) \hookrightarrow C(E;\mathcal{M})$$

durch die Maßgabe, daß die Koprodukte darin nur über alle strikt monotonen beziehungsweise monotonen Tupel von Elementen von E gebildet werden.

1.5.2. Gegeben eine Menge E und ein Koeffizientensystem $\mathcal{M}$ zu E betrachten wir auch den **koalternierenden Quotientenkomplex**

$$C^{\mathrm{alt}}(E;\mathcal{M})$$

von $C(E;\mathcal{M})$, bei dem wir im Grad q den Quotienten nach der von allen Ausdrücken $m(v_1,\ldots,v_q)$ mit nicht paarweise verschiedenen $v_i \in E$ und allen Ausdrücken $m(v_1,\ldots,v_q) - \mathrm{sgn}(\sigma)m(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(q)})$ für $\sigma \in \mathcal{S}_q$ erzeugten Untergruppe nehmen. Die Komposition von Einbettung und Projektion liefert dann offensichtlich einen Isomorphismus

$$A(E;\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} C^{\mathrm{alt}}(E;\mathcal{M})$$

Satz 1.5.3 (**Vergleich verschiedener Standardkomplexe**). *Seien E eine Menge und $\mathcal{M}$ ein Koeffizientensystem zu E.*

1. *Gibt es $v \in E$ mit $\mathcal{M}(T \cup \{v\}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(T)$ für alle endlichen $T \subset E$, so ist der Komplex $C(E;\mathcal{M})$ exakt. Wir sagen dann, das Koeffizientensystem sei* **stationär im Index** *v;*

2. *Gegeben eine Anordnung auf E induzieren die Einbettungen der Unterkomplexe $A(E;\mathcal{M}) \hookrightarrow B(E;\mathcal{M}) \hookrightarrow C(E;\mathcal{M})$ Isomorphismen auf der Homologie.*

1.5.4 (**Allgemeinere Koeffizientensysteme**). Seien E eine Menge und $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{M} : \mathcal{P}(E)^{\mathrm{opp}}_{\mathrm{fin}} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Wir nennen so einen Funktor ein **Koeffizientensystem zu E mit Werten in $\mathcal{A}$**. Ist E endlich, so gilt Satz 1.5.3 analog mit demselben Beweis. Ist E beliebig, so benötigt man die Existenz von Koprodukten mit Indexmengen einer Kardinalität $\leq |E|$ in $\mathcal{A}$, um Analoga unserer Komplexe überhaupt erst definieren zu können. Unter dieser Annahme bleiben Teil 1 und sein Beweis unverändert gültig. Nimmt man zusätzlich an, daß derartige Koprodukte exakt sind, so läßt sich auch der Beweis von Teil 2 ohne größere Schwierigkeiten verallgemeinern. Es gilt nur, bei der Induktion nicht „einzelne Simplizes hinzuzufügen, sondern vielmehr stets alle Simplizes der nächsthöheren Dimension auf einmal“. Die Details seien dem Leser überlassen.

1.5.5 (**Bezug zur simplizialen Homologie**). Wir können einen Teil der Aussagen von Satz [TS] 3.3.1.7 über den Vergleich von singulärer und simplizialer Homologie und Aussagen in seinen Beweis als einen Spezialfall des hier gegebenen Satzes auffassen, in dem das Koeffizientensystem „den in unserem Simplizialkomplex realisierten Simplizes die Gruppe $\mathbb{Z}$ zuordnet und allen anderen Simplizes die Gruppe Null“. Genauer spezialisiert die hier gegebene Formulierung dann zu analogen Aussagen für die reduzierte Homologie.

Beweis. 1. Das folgt aus der Existenz des offensichtlichen Isomorphismus

$$A(v) \otimes C(E; \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} C(E; \mathcal{M})$$

mit dem in den Graden Eins und Null konzentrierten Komplex $A(v) = [\mathbb{Z}v \to \mathbb{Z}]$ und einem als formales Symbol verstandenen v. Der Komplex $A(v)$ ist dann nullhomotop und dasselbe folgt für $C(E; \mathcal{M})$.

2. Wir bemerken zunächst, daß wir aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|E| < \infty$ annehmen dürfen. Dann bemerken wir, daß alle drei zu vergleichenden Komplexe bei vorgegebenem E als exakte Funktoren in der Variablen $\mathcal{M}$ von der Kategorie der Koeffizientensysteme in die Kategorie der Komplexe aufgefaßt werden können. Wir argumentieren nun mit Induktion über die Zahl der Teilmengen $S \subset E$, die in einer Teilmenge T mit $\mathcal{M}(T) \neq 0$ enthalten sind. Als Induktionsbasis beginnen wir mit dem Fall, in dem nur $T = \emptyset$ eine von Null verschiedene abelsche Gruppe M zugeordnet wird. In diesem Fall folgt die Behauptung unmittelbar aus den Definitionen. Jetzt betrachten wir zunächst außerhalb unserer Induktion für $T \subset E$ endlich nichtleer und M eine abelsche Gruppe das Koeffizientensystem T_*M gegeben durch $T_*M(S) := M$ für $S \subset T$ und $T_*M(S) := 0$ sonst. Aus Teil 1 folgt unmittelbar, daß $C(E; T_*M)$ exakt ist. Im angeordneten Fall hat aber T auch ein kleinstes Element v und wir finden Isomorphismen $A(v) \otimes A(E; (T \backslash v)_*M) \xrightarrow{\sim} A(E; T_*M)$ und $A(v) \otimes B(E; T_*M) \xrightarrow{\sim} B(E; T_*M)$ in offensichtlicher Weise. Unsere Komplexe sind in diesen Fällen mithin alle exakt und die Aussage von Teil 2 ist offensichtlich. Für den Induktionsschritt erklären wir nun zusätzlich $T_!M$ als das Koeffizientensystem gegeben durch $T_!M(S) := M$ für $S = T$ und $T_!M(S) := 0$ sonst und haben wir eine kurze exakte Sequenz von Koeffizientensystemen

$$\mathcal{K} \hookrightarrow T_*M \twoheadrightarrow T_!M$$

Die Behauptung folgt nun erst für $\mathcal{K}$ aus der Induktionsannahme und dann für $T_!M$ aus der langen exakten Homologiesequenz und dem Fünferlemma und dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen mit abgekürzter Notation

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{H}_q A_{\mathcal{K}} & \to & \mathcal{H}_q A_{T_*M} & \to & \mathcal{H}_q A_{T_!M} & \to & \mathcal{H}_{q-1} A_{\mathcal{K}} & \to & \mathcal{H}_{q-1} A_{T_*M} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}_q B_{\mathcal{K}} & \to & \mathcal{H}_q B_{T_*M} & \to & \mathcal{H}_q B_{T_!M} & \to & \mathcal{H}_{q-1} B_{\mathcal{K}} & \to & \mathcal{H}_{q-1} B_{T_*M}
\end{array}$$

und analog für $B \to C$. Schließlich gibt es für ein beliebiges Koeffizientensystem $\mathcal{M} \neq 0$ ein maximales $T \subset E$ mit $M := \mathcal{M}(T) \neq 0$ und einen Epimorphismus $\mathcal{M} \twoheadrightarrow T_!M$, auf dessen Kern wir die Induktionsannahme anwenden können. Mit einer erneuten Anwendung des Fünferlemmas folgt die Behauptung dann im allgemeinen. $\square$

1.6 Čech-Kohomologie der Grade Null und Eins

1.6.1 (**Nullte Čech-Kohomologie für Prägarben von Mengen**). Im Fall einer Prägarbe $\mathcal{F}$ von Mengen kann man immer noch die Menge

$$\check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \left\{ (s_U) \in \prod_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{F}(U) \,\middle|\, s_U|_{U\cap V} = s_V|_{U\cap V} \quad \forall U,V \in \mathcal{U} \right\}$$

bilden. Man setzt dann wieder in derselben Weise

$$\check{\mathrm{H}}^0(X;\mathcal{F}) := \operatorname{colf} \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

und nennt das die **nullte Čech-Kohomologie mit Koeffizienten in der Prägarbe von Mengen** $\mathcal{F}$. Die Restriktionen liefern eine natürliche Abbildung

$$\mathcal{F}(X) \to \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

Sie ist im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

1.6.2 (**Erste Čech-Kohomologie für nichtabelsche Gruppen-Prägarben**). Im Fall einer Prägarbe von nicht notwendig kommutativen Gruppen erben die $\check{\mathrm{H}}^0$ aus der vorhergehenden Bemerkung noch die Struktur einer Gruppe und wir können zusätzlich analog zu den Definitionen des ersten Abschnitts und in multiplikativer Notation geschrieben die Menge der **Čech-1-Kozykel** erklären als

$$\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \left\{ (s_{UV}) \in \prod_{(U,V)\in\mathcal{U}^2} \mathcal{F}(U\cap V) \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{Für alle } U,V,W \in \mathcal{U} \text{ gilt mit} \\ \text{der Notation } D := U\cap V\cap W \\ \text{die Identität} \\ s_{UV}|_D \; s_{VW}|_D = s_{UW}|_D \end{array} \right\}$$

Zwei derartige 1-Kozykel (s_{UV}) und (t_{UV}) heißen **kohomolog**, wenn es eine Familie $(i_U) \in \prod_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{F}(U)$ gibt mit

$$s_{UV} = (i_U|_{U\cap V}) t_{UV} (i_V|_{U\cap V})^{-1} \quad \forall U,V \in \mathcal{U}$$

Die Relation, kohomolog zu sein, ist dann eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F})$ der Čech-1-Kozykel. Die Menge der Äquivalenzklassen notieren wir

$$\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G) := \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U};G)/\sim$$

Sie heißt die **erste Čech-Kohomologie für die Überdeckung $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in der Prägarbe von Gruppen** $\mathcal{F}$. Unser $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G)$ ist im allgemeinen keine Gruppe, sondern nur eine Menge mit einem ausgezeichneten Punkt, nämlich der

Klasse des trivialen 1-Kozykels. Der Kolimes über alle gesättigten offenen Überdeckungen liefert dann eine weitere bepunktete Menge

$$\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{F}) := \operatorname{colf} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

Sie heißt die **erste Čech-Kohomologie von X mit Koeffizienten in der Prägarbe von Gruppen $\mathcal{F}$**. Im Fall einer abelschen Prägarbe fallen diese Definitionen von $\check{\mathrm{H}}^0$ und $\check{\mathrm{H}}^1$ mit den in 1.3.11 gegebenen Definitionen zusammen.

Ergänzung 1.6.3 (**Klassifikation von Bündeln durch Čech-Kohomologie**). Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so erhalten wir ganz analog wie in 1.2.10 Bijektionen

$$\begin{aligned} \{\text{differenzierbare reelle Geradenbündel auf } X\}/_{\cong} &\xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^\times}) \\ \{\text{differenzierbare komplexe Geradenbündel auf } X\}/_{\cong} &\xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}^\times}) \end{aligned}$$

Ist X eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_X$ die Prägarbe der komplexwertigen analytischen Funktionen auf X und $\mathcal{O}_X^\times$ die Prägarbe der der komplexwertigen analytischen Funktionen ohne Nullstellen mit der Multiplikation als Verknüpfung, so erhalten wir in derselben Weise eine Bijektion

$$\{\text{analytische komplexe Geradenbündel auf } X\}/_{\cong} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{O}_X^\times)$$

Allgemeiner erhalten wir Bijektionen

$$\{\text{differenzierbare } n\text{-dimensionale } \mathbb{K}\text{-Bündel auf } X\}/_{\cong} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})})$$

Das triviale Bündel entspricht hier stets der Null beziehungsweise im letzten Fall dem ausgezeichneten Punkt der bepunkteten Menge $\check{\mathrm{H}}^1$.

1.6.4 (**Bezug zu vorhergehenden Versionen von** $\check{\mathrm{H}}^1$). Im Fall einer diskreten abelschen Gruppe G fallen die in 1.1 definierten Gruppen $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(X;G)$ mit den hier definierten Gruppen $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G_X)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(X;G_X)$ zusammen. Im Fall einer allgemeinen topologischen abelschen Gruppe G fallen allgemeiner die in 1.1 definierten Gruppen $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};G)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(X;G)$ mit den hier definierten Gruppen $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}_G)$ und $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_G)$ zusammen.

1.6.5 (**Nullte Čech-Kohomologie**). Sei G eine abelsche topologische Gruppe. Nach Übung [AN2] 14.1.3.24 über die lokale Natur der Stetigkeit liefert die Restriktion für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X Isomorphismen $\mathrm{Top}(X,G) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\mathcal{C}_G)$. Daraus erhalten wir auch im Kolimes einen Isomorphismus

$$\mathrm{Top}(X,G) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0(X;\mathcal{C}_G)$$

Das steht im Gegensatz zur singulären Kohomologie, bei der wir für diskretes abelsches G vielmehr einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Ens}(\pi_0(X), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_{\mathrm{sing}}(X; G)$$

mit dem Raum den G-wertigen Funktionen auf der Menge $\pi_0(X)$ der Wegzusammenhangskomponenten von X haben. Für lokal wegzusammenhängende Räume X und diskretes abelsches G haben wir jedoch wieder einen kanonischen Isomorphismus

$$\check{\mathrm{H}}^0(X; G_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_{\mathrm{sing}}(X; G)$$

zwischen der nullten Čech-Kohomologie mit Koeffizienten in der Prägarbe G_X und der nullten singulären Kohomologie mit Koeffizienten in G.

Übungen

Übung 1.6.6. Das Bilden der Čech-Kohomologie bezüglich einer Überdeckung $\mathcal{U}$ kommutiert mit beliebigen Produkten von abelschen Prägarben. Für die Čech-Kohomologie selbst ist das im allgemeinen vermutlich falsch.

Übung 1.6.7. In der Kategorie der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Produkte und Koprodukte.

2 Abelsche Kategorien und Garben

2.1 Wozu Garbenkohomologie?

2.1.1. In diesem Abschnitt führen wir die abstrakte Sprache der abelschen Kategorien ein und besprechen parallel dazu als motivierendes Beispiel die Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum. Ich habe versucht, diese beiden Handlungsstränge insoweit zu entflechten, daß die Abschnitte ohne das Wort „Garbe“ in der Überschrift auch unabhängig gelesen und verstanden werden können.

2.1.2. Sowohl die Garbenkohomologie als auch die damit verbundenen Methoden der homologischen Algebra sind aus der algebraischen und arithmetischen Geometrie und darüber hinaus aus weiten Teilen der Mathematik nicht mehr wegzudenken. Für manch einen mag das schon Anlaß genug sein, sich damit zu beschäftigen. Ich will im folgenden ausführen, welchen Gewinn man auch in der „ganz normalen Topologie“ aus diesen Methoden ziehen kann.

2.1.3. Als ersten Punkt führe ich eine Variante der langen exakten Kohomologiesequenz an, die Lokalisierungssequenz 4.8.15, in der nur absolute Kohomologien auftreten. Das erlaubt eine sehr elegante Diskussion von Einbettbarkeitsproblemen, etwa im Zusammenhang mit dem Satz von Jordan-Brouwer 4.10.17 oder mit Alexanderdualität 4.10.20 folgende.

2.1.4. Als zweiten Punkt beachte man das sehr gute Verhalten in Faserungen. Zum Beispiel zeigen wir in 6.5.18 für ein beliebiges Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser, daß der Rückzug einen Isomorphismus auf der Kohomologie liefert. Ich wüßte nicht, wie ich das für die singuläre Kohomologie zeigen sollte, und ob es da überhaupt stimmt. Diesessehr gute Verhalten in Faserungen hinwiederum erlaubt die Konstruktion von äquivarianter Kohomologie und charakteristischen Klassen für beliebige Hauptfaserbündel mit beliebigen topologischen Gruppen als Faser auf beliebigen topologischen Räumen, vergleiche 8.2.8 folgende. Es erlaubt auch für rationale Koeffizienten eine Identifikation der Kohomologie des Quotienten eines topologischen Raums nach einer endlichen Gruppe mit den Invarianten in der Kohomologie 6.5.28, wann immer die Quotientenabbildung separiert ist, also wirklich in sehr befriedigender Allgemeinheit.

2.1.5. Als dritten Punkt führe ich ein besseres Verständnis der Poincaré-Dualität an, genauer den Nachweis ihrer Interpretation über Schnittpaarung und Schnittprodukte, wie sie in [TS] 3.4.3.20 und [TS] 3.7.4.9 angekündigt wird. Das gelingt jedoch erst im Vollausbau der Theorie als Konsequenz der Verdier-Dualität und wird in [TSF] **??** folgende erklärt. Wieder wüßte ich nicht, wie das in der singulären Theorie in der Allgemeinheit zu machen sein sollte, da man dort zunächst

einmal, soweit ich sehen kann, tubulare Umgebungen bereitstellen muß. Das mag aber meiner eigenen Unkenntnis geschuldet sein.

2.2 Garben und ihre étalen Räume

2.2.1. Alle Prägarben, die bisher von Belang waren, besitzen noch eine zusätzliche Eigenschaft, die es erlaubt, dafür eine geometrische Anschauung zu entwickeln. Diese zusätzliche Eigenschaft, die die „Garben“ unter den Prägarben auszeichnet, ist im Folgenden von entscheidender Bedeutung.

Definition 2.2.2. Eine **Garbe** $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X ist eine Prägarbe von Mengen derart, daß die folgende **Verklebungsbedingung** erfüllt ist: Gegeben ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X und gegeben für alle $U \in \mathcal{U}$ Schnitte $s_U \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_U|_{U\cap V} = s_V|_{U\cap V} \quad \forall\, U, V \in \mathcal{U}$$

gibt es genau einen Schnitt auf der Vereinigung $s \in \mathcal{F}\left(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\right)$ mit

$$s|_U = s_U \quad \forall\, U \in \mathcal{U}$$

Ein **Homomorphismus von Garben** ist ein Homomorphismus der zugrundeliegenden Prägarben.

2.2.3. Analog definiert man Garben von Gruppen und Ringen und dergleichen sowie ihre Morphismen. Wir nennen sie auch **Gruppengarben** beziehungsweise **Ringgarben** und reden von **Mengengarben**, wenn wir betonen wollen, daß wir Garben von Mengen meinen.

Beispiel 2.2.4. Unsere Wolkenkratzer aus 1.3.10 sind Garben.

2.2.5 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Garbe heißt auf Englisch **sheaf** und auf Französisch **faisceau**. Der Begriff ist in der französischen Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts entstanden und geht wohl auf eine ältere Verwendung von „faisceau“ für „vernünftige Familien geometrischer Objekte“ zurück. Zum Beispiel kann man in einer euklidischen Ebene die „Schar aller Kreise“ betrachten, die an zwei gegebene Geraden tangential sind, und hätte diese als einen „faisceau de cercles“ bezeichnet. Bei der Übertragung ins Deutsche und Englische hat man dann sprachlich verwandte aber mathematisch noch nicht belegte Begriffe gewählt.

2.2.6 (**Schnitte einer Garbe über der leeren Menge**). Unsere Verklebungsbedingung mit $\mathcal{U} = \emptyset$ dem leeren Mengensystem impliziert, daß eine Garbe von Mengen $\mathcal{F}$ stets genau einen Schnitt über der leeren Menge haben muß, in Formeln $|\mathcal{F}(\emptyset)| = 1$.

Ergänzung 2.2.7 (**Garben mit Werten in einer beliebigen Kategorie**). Wir definieren allgemeiner Garben mit Werten in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ als $\mathcal{C}$-wertige Prägarben $\mathcal{F}$, die zusätzlich die **Verklebungsbedingung** erfüllen, daß für jedes gesättigte System $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von X mit Vereinigung V der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus $\mathcal{F}(V) \xrightarrow{\sim} \lim_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U)$ ist. Für eine Garbe $\mathcal{F}$ mit Werten in $\mathcal{C}$ ist insbesondere $\mathcal{F}(\emptyset)$ stets final in $\mathcal{C}$.

2.2.8 (**Notationen für Kategorien von Garben**). Die Kategorie der Garben auf einem Raum X mit Werten in einer Kategorie $\mathcal{C}$ notieren wir $\mathcal{C}_{/X}$. Die Kategorie der Mengengarben auf einem topologischen Raum X notieren wir insbesondere $\mathrm{Ens}_{/X}$. Eine Garbe mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen heißt eine **abelsche Garbe**. Die Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum X notieren wir entsprechend $\mathrm{Ab}_{/X}$.

2.2.9. Gegeben eine Garbe von Mengen $\mathcal{F}$ auf einem Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X liefern die für jede Prägarbe von Mengen definierten Abbildungen Isomorphismen $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{F})$. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Beispiel 2.2.10. Ist $p : E \to X$ eine stetige Abbildung, so erhalten wir eine Garbe von Mengen $\mathcal{S} = \mathcal{S}E = \mathcal{S}_X E$ auf X durch die Vorschrift

$$\mathcal{S}(U) := \mathrm{Top}_X(U, E) = \{s : U \to E \mid s \text{ ist stetig und } p(s(x)) = x \ \forall x \in U\}$$

mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Wir nennen sie die **Garbe der Schnitte von** p und erhalten so einen Funktor von der Kategorie der Räume über unserem Raum in die Kategorie der Garben von Mengen auf unserem Raum

$$\mathcal{S} : \mathrm{Top}_X \to \mathrm{Ens}_{/X}$$

Beispiel 2.2.11. Gegeben eine Menge M und ein topologischer Raum X erklären wir die **konstante Garbe** M_X als die Garbe der Schnitte von $M \times X$, wo M mit der diskreten Topologie zu versehen ist.

Beispiel 2.2.12. Die Prägarben G_X für eine diskrete Gruppe G oder allgemeiner $\mathcal{C}_{G,X}$ für eine topologische Gruppe G aus 1.3.6 sind Garben von Gruppen.

Beispiel 2.2.13. Unsere Prägarben von differenzierbaren oder besser glatten Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit sind Garben von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Unsere Wolkenkratzer aus 1.3.10 sind Garben.

Beispiel 2.2.14. Sei A eine nichttriviale Gruppe und X ein topologischer Raum. Die Prägarbe, die jeder offenen Teilmenge von X einfach die feste Gruppe A zuordnet, mit der Identität als Restriktion, ist keine Garbe, denn der leeren Menge wird dabei nicht die triviale Gruppe zugeordnet. Wenn wir unser Beispiel dahingehend abändern, daß wir der leeren Menge ausnahmsweise die triviale Gruppe

zuordnen, ist unsere Prägarbe immer noch keine Garbe, wenn es in unserem Raum nichtleere unzusammenhängende offene Teilmengen gibt, denn dann zerlegen wir diese in zwei echte disjunkte offene Teilmengen, wählen dort als Schnitte verschiedene Elemente von A und können diese Vorgabe nicht „zu einem Schnitt auf der ganzen offenen Menge zusammenkleben“.

2.2.15. Wir erinnern aus [TF] 2.3.1.10, daß eine stetige Abbildung $p : E \to X$ **étale** heißt, wenn jeder Punkt $e \in E$ eine offene Umgebung $U \Subset E$ besitzt, die von p homöomorph auf eine offene Teilmenge $p(U) \Subset X$ abgebildet wird.

Definition 2.2.16. Sei X ein topologischer Raum. Ein **étaler Raum** $E = (E, p)$ **über** X ist ein topologischer Raum E mitsamt einer étalen Abbildung $p : E \to X$. Ein **Morphismus von étalen Räumen über** X ist eine stetige Abbildung, die verträglich ist mit den Projektionen auf X.

2.2.17. Jede étale Abbildung ist offen und nach [TF] 2.3.1.14 kann eine Verknüpfung gf stetiger Abbildungen mit g étale nur étale sein, wenn auch f étale ist. Insbesondere ist jeder Morphismus von étalen Räumen offen, speziell also jeder Schnitt einer étalen Abbildung auf einer offenen Menge.

Satz 2.2.18 (Garben und ihre étalen Räume). *Für jeden topologischen Raum X liefert der Funktor $\mathcal{S}$, der jedem Raum über X die Garbe seiner Schnitte zuordnet, eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathcal{S} \;:\; \left\{ \begin{array}{c} \textit{étale Räume} \\ \textit{über } X \end{array} \right\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Garben von Mengen} \\ \textit{auf } X \end{array} \right\}$$

Dabei denken wir uns genauer ein Universum $\mathfrak{U}$ mit $X \in \mathfrak{U}$ und links étale Räume, deren Grundmenge ein Element von $\mathfrak{U}$ ist, und rechts Mengengarben, die Werte in $\mathfrak{U}$ annehmen.

Beispiele 2.2.19. Der étale Raum der Garbe M_X ist $M \times X$. Der étale Raum des Wolkenkratzers $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{(0)}$ mit Faser $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ am Nullpunkt auf der reellen Gerade $X = \mathbb{R}$ ist die reelle Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt aus [TM] 1.1.4.8.

2.2.20. Die linke Seite unserer Äquivalenz 2.2.18 ist, zumindest nach meinem Geschmack, der Anschauung besser zugänglich und liefert eine sehr transparente Konstruktion für den „Rückzug“ von Garben, den wir in 8.1.10 kennenlernen werden. Die rechte Seite ist dahingegen technisch besonders gut zugänglich und leicht zu verallgemeinern. Mir scheint die in diesem Satz formulierte Äquivalenz von Kategorien eine wichtige Brücke in die Anschauung.

Beweis. Der Beweis des vorhergehenden Satzes strukturiert den Rest dieses Abschnitts. Genauer konstruieren wir in 2.2.24 einen Funktor ét von Prägarben auf

X zu topologischen Räumen über X und konstruieren in 2.2.26 eine Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S})$ zwischen $\text{ét} : \text{pEns}_{/X} \to \text{Top}_X$ und $\mathcal{S} : \text{Top}_X \to \text{pEns}_{/X}$. Im Anschluß daran wird der Beweis dann zu Ende geführt. Daß man mit den in diesem Zusammenhang durchgeführten Konstruktionen das vorgegebene Universum nicht verläßt, wird der Leser leicht einsehen können. □

Definition 2.2.21. Gegeben eine Prägarbe $\mathcal{F}$ von Mengen auf einem topologischen Raum X definieren wir ihren **Halm** $\mathcal{F}_x$ an einer Stelle $x \in X$ als den Kolimes

$$\mathcal{F}_x := \text{colf}_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

Unser Kolimes soll wie angedeutet über alle offenen Umgebungen $U \Subset X$ von x laufen. Gegeben $x \in U \Subset X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ einen Schnitt bezeichnen wir mit $s_x \in \mathcal{F}_x$ sein Bild im Halm.

Beispiel 2.2.22. Unsere Keime regulärer Funktionen aus [ML] 28.3.3.11 sind genau die Halme der Garbe der regulären Funktionen aus [ML] 28.3.1.1.

Ergänzung 2.2.23. Gegeben Punkte x, y eines topologischen Raums, von denen einer im Abschluß des anderen liegt, in Formeln $x \in \bar{y}$, erhalten wir für jede Prägarbe von Mengen $\mathcal{F}$ eine Abbildung $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_y$ aus der Beobachtung heraus, daß jede offene Menge um x auch y enthalten muß. Wir nennen sie das **Generisieren**.

Definition 2.2.24. Gegeben ein Prägarbe $\mathcal{F}$ von Mengen auf einem topologischen Raum X definieren wir ihren **étalen Raum**, notiert $\text{ét}(\mathcal{F})$ oder kürzer $\bar{\mathcal{F}}$, als die disjunkte Vereinigung ihrer Halme

$$\bar{\mathcal{F}} := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

mitsamt der natürlichen Projektion $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$. Gegeben $U \Subset X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ definieren wir einen Schnitt $\bar{s} : U \to \bar{\mathcal{F}}$ durch $\bar{s}(x) = s_x$. Wir versehen $\bar{\mathcal{F}}$ mit der Finaltopologie in Bezug auf die Familie aller dieser Abbildungen $\bar{s}$. Bezeichnet $\text{pEns}_{/X}$ die Kategorie der Prägarben von Mengen auf X, so erhalten wir auf diese Weise einen Funktor

$$\text{ét} : \text{pEns}_{/X} \to \text{Top}_X$$

2.2.25 (**Anschauung für étale Räume**). Der étale Raum einer Prägarbe von Mengen ist meiner Anschauung nur schlecht zugänglich. Er wird im allgemeinen in keinster Weise Hausdorff sein. Ich denke dabei eher an eine Art Blätterteig, der auf das Backblech projiziert wird.

2.2.26 (**Der étale Raum als Linksadjungierter des Schnittefunktors**). Wir erhalten eine Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S})$ von Funktoren zwischen $\mathrm{pEns}_{/X}$ und Top_X vermittels der Abbildungen

$$\mathrm{pEns}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{S}E) \to \mathrm{Top}_X(\text{ét}\,\mathcal{F}, E)$$

gegeben durch $\varphi \mapsto (\bar{\varphi} : (s_x \mapsto \varphi(s)(x)))$ für $x \in X$ und einen und jeden Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ für $x \in U \Subset X$. Die Stetigkeit von $\bar{\varphi}$ folgt daraus, daß für alle Schnitte $s \in \mathcal{F}(V)$ mit $V \Subset X$ auch $\bar{\varphi} \circ \bar{s} = \varphi(s) : U \to E$ stetig ist. Die Injektivität unserer Abbildung $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ ist offensichtlich. Die Surjektivität folgt, indem wir eine Abbildung in die Gegenrichtung konstruieren, und zwar durch Anwenden des Funktors $\mathcal{S}$ und Vorschalten des Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})$, der durch $s \mapsto \bar{s}$ gegeben wird. Man erkennt unschwer, daß diese Abbildung ein Schnitt und wegen der Injektivität dann sogar eine Umkehrabbildung ist.

Satz 2.2.18 über Garben und ihre étalen Räume, Ende des Beweises. Man erinnere aus [TF] 2.4.8.15, daß gegeben Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ und eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ und die vollen Unterkategorien

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \{A \in \mathcal{A} \mid \text{Die Einheit ist ein Iso } A \xrightarrow{\sim} RLA\} \\ \mathcal{B}_0 &:= \{B \in \mathcal{B} \mid \text{Die Koeinheit ist ein Iso } LRB \xrightarrow{\sim} B\} \end{aligned}$$

unser Funktor L eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{A}_0 \xrightarrow{\approx} \mathcal{B}_0$ mit Quasiinversem R induziert. Nun zeigen wir in 2.2.28, daß genau die Räume $E \in \mathrm{Top}_X$ étale sind, für die unsere Adjunktion einen Isomorphismus $\text{ét}(\mathcal{S}E) \xrightarrow{\sim} E$ induziert, und in 2.2.30, daß genau die Prägarben $\mathcal{F} \in \mathrm{pEns}_{/X}$ Garben sind, für die unsere Adjunktion einen Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})$ induziert. Damit ist dann unser Satz 2.2.18 über Garben und ihre étalen Räume bewiesen. □

Lemma 2.2.27 (**Eigenschaften des étalen Raums einer Prägarbe**). *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf einem Raum X.*

1. *Die $\bar{s}(U)$ mit $U \Subset X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ bilden eine Basis für die Topologie des étalen Raums von $\mathcal{F}$. Insbesondere sind alle derartigen Schnitte $\bar{s}$ offene Einbettungen;*

2. *Die Projektion $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$ ist étale;*

3. *Ein Schnitt über $V \Subset X$ in $\bar{\mathcal{F}}$ ist stetig genau dann, wenn jedes $x \in V$ eine offene Umgebung $U \Subset V$ besitzt derart, daß unser Schnitt auf dieser Umgebung U übereinstimmt mit einem $\bar{s}$ für geeignetes $s \in \mathcal{F}(U)$.*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst, daß alle $\bar{s}(U)$ offen sind in $\bar{\mathcal{F}}$. Dazu gilt es nachzuweisen, daß $W = \bar{t}^{-1}(\bar{s}(U))$ offen ist in V, für alle $V \Subset X$ und $t \in \mathcal{F}(V)$. Aber wir haben ja

$$\bar{t}^{-1}(\bar{s}(U)) = \{x \in U \cap V \mid s_x = t_x\},$$

und da mit der Beschreibung [TS] 3.7.1.15 eines filtrierenden direkten Limes aus $s_x = t_x$ folgt $s|_W = t|_W$ für eine hinreichend kleine offene Umgebung W von x, ist $\bar{t}^{-1}(\bar{s}(U))$ in der Tat stets offen in V und damit $\bar{s}(U)$ offen in $\bar{\mathcal{F}}$. Damit gilt insbesondere $\bar{t}(W) = \bar{s}(U) \cap \bar{t}(V)$ für $W = \bar{t}^{-1}(\bar{s}(U)) \Subset X$, folglich bilden unsere $\bar{s}(U)$ ein System von offenen Mengen, das stabil ist unter endlichen Schnitten. Für die von diesem Mengensystem erzeugte Topologie sind aber bereits alle $\bar{s}$ stetig, folglich muß es sich dabei um die Finaltopologie handeln.

2. Der zweite Teil des Lemmas folgt sofort aus dem ersten.

3. Für den dritten Teil bemerken wir, daß offensichtlich jeder Schnitt mit besagter Eigenschaft stetig ist. Ist umgekehrt $t : V \to \bar{\mathcal{F}}$ ein Schnitt und ist $x \in V$ gegeben, so hat $t(x) \in \mathcal{F}_x$ die Gestalt $t(x) = s_x$ für geeignetes $s \in \mathcal{F}(W)$ und $W \Subset V$ eine Umgebung von x. Ist t stetig, so folgt $U = t^{-1}(\bar{s}(W)) \Subset V$, und das ist die gesuchte offene Umgebung von x mit $t|_U = \bar{s}$ für $s = s|_U$. □

Lemma 2.2.28. *Genau dann ist eine stetige Abbildung $p : E \to X$ étale, wenn die Adjunktion einen Isomorphismus* $\text{ét}(\mathcal{S}E) \xrightarrow{\sim} E$ *liefert.*

Beweis. Nach 2.2.27 ist die linke Seite auch étale über X. Liefert die Adjunktion einen Isomorphismus, so ist folglich auch E selbst étale, und ist umgekehrt E selbst étale, so reicht es nach 2.2.17 zu zeigen, daß unsere Adjunktionsabbildung bijektiv ist alias daß sie Bijektionen auf allen Halmen induziert. Da p étale ist, gibt es für jedes $e \in E$ eine offene Umgebung U von $x = p(e)$ und einen Schnitt $s : U \to E$ mit $s(x) = e$. Also ist unsere Abbildung auf den Halmen surjektiv. Ist $V \Subset X$ eine weitere offene Umgebung von $p(e)$ und $t \in \mathcal{F}(V)$ ein weiterer Schnitt mit $t(x) = e$, so stimmen s und t notwendig überein auf der nach 2.2.17 offenen Umgebung $W = p(s(U) \cap t(V))$ von x in X. Also ist unsere Abbildung auf den Halmen auch injektiv. □

Lemma 2.2.29.

1. *Stimmen zwei Schnitte einer Garbe auf allen Halmen überein, so sind sie gleich;*
2. *Induziert ein Morphismus von Garben Bijektionen auf allen Halmen, so ist er ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Herleitung der ersten Aussage bleibt dem Leser überlassen. Für den Nachweis der zweiten Aussage sei $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ unser Morphismus. Aus 1 folgt, daß für alle $U \Subset X$ die induzierte Abbildung $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv ist. Wir müssen

zeigen, daß diese Abbildungen auch surjektiv sind. Gegeben $s \in \mathcal{G}(U)$ gibt es jedoch für alle $x \in U$ ein $t_x \in \mathcal{F}_x$ mit $t_x \mapsto s_x$. Dies t_x ist der Halm eines Schnitts $t_{(x)} \in \mathcal{F}(U(x))$ für eine geeignete offene Umgebung $U(x) \Subset U$ von x, und wenn wir $U(x)$ hinreichend klein wählen, dürfen wir annehmen $t_{(x)}|_{U(x)} \mapsto s|_{U(x)}$. Dann aber erfüllen die $t_{(x)}$ aber die Verklebungsbedingung und verkleben zu einem Schnitt $t \in \mathcal{F}(U)$ mit $t \mapsto s$. □

Lemma 2.2.30. *Genau dann ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$ eine Garbe, wenn die Adjunktion einen Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})$ liefert.*

Beweis. Die rechte Seite ist stets eine Garbe, ja sogar $\mathcal{S}(E)$ ist eine Garbe für jedes $E \in \mathrm{Top}_X$. Liefert die Adjunktion einen Isomorphismus, so ist demnach auch $\mathcal{F}$ eine Garbe, und ist umgekehrt $\mathcal{F}$ eine Garbe, so müssen wir nach 2.2.29 nur zeigen, daß unser Morphismus auf allen Halmen Bijektionen induziert oder gleichbedeutend, daß er unter ét eine Bijektion liefert. Nach der Dreiecksidentität für adjungierte Funktoren [TF] 2.4.8.1 faktorisiert jedoch die Identität auf $\text{ét}\,\mathcal{F}$ in kanonischer Weise als $\text{ét}\,\mathcal{F} \to \text{ét}(\mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})) \to \text{ét}\,\mathcal{F}$, und nach 2.2.28 angewandt auf $E = \text{ét}\,\mathcal{F}$ ist hier die zweite Abbildung ein Isomorphimus. Dasselbe gilt dann auch für die erste Abbildung und das Lemma folgt. □

2.2.31. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe von Funktionen auf X, zum Beispiel die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so nennt man die Elemente der Halme $\mathcal{F}_x$ meist **Funktionskeime**, in unserem Beispielfall also „Keime differenzierbarer Funktionen an der Stelle x“.

2.2.32. Der étale Raum der Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist nicht Hausdorff: Die Nullfunktion und die Funktion $x \mapsto \max\{x, 0\}$ haben verschiedene Keime an der Stelle Null, aber dieselben Keime an allen echt negativen Stellen. Die beiden Keime an der Stelle Null lassen sich also nicht durch offene Umgebungen im étalen Raum trennen.

2.2.33. Der étale Raum $\text{ét}(\mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ der Garbe $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}$ der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ ist Hausdorff aufgrund der Eindeutigkeit der lokalen analytischen Fortsetzung. Die Zusammenhangskomponente eines Funktionskeims $f \in \text{ét}(\mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ wird dann eine Riemann'sche Fläche im Sinne von [ML] 28.3.2.4 vermittels der finalen Struktur im Sinne von [ML] 28.3.1.11 zur Familie der Schnitte auf offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene. Diese Riemann'sche Fläche heißt die **Riemann'sche Fläche des Funktionskeims** f. Zum Beispiel erhalten wir als Riemannsche Fläche der durch die Eigenschaft $\sqrt[n]{1} = 1$ ausgezeichneten stetigen n-ten Wurzel in einer Umgebung der Eins eine zusammenhängende n-blättrige Überlagerung von $\mathbb{C}^\times$ und die Riemannsche Fläche des Hauptzweigs des komplexen Logarithmus ist eine unendliche Wendeltreppe, eben die durch $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$

gegebene Überlagerung. Es ist auch klar, daß zu jedem Funktionskeim an einer vorgegebenen Stelle die Riemannsche Fläche jedes Stammfunktionenkeims an besagter Stelle eine Überlagerung der Riemannschen Fläche unseres Funktionskeims selber ist.

2.2.34 (**Integration holomorpher Funktionen und Überlagerungen**). Gegeben $f : \mathbb{C} \setminus U \to \mathbb{C}$ holomorph bildet die Menge aller Keime von Stammfunktionen von f an Punkten von U mit ihrer von $\text{ét}(\mathcal{O}^{\text{an}})$ induzierten Topologie eine Überlagerung von U. Diese Überlagerung ist trivial genau dann, wenn f eine Stammfunktion besitzt. Nach Überlagerungstheorie ist über einfach zusammenhängendem U jede Überlagerung trivial, folglich besitzt auf einfach zusammenhängenden offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{C}$ jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion.

Definition 2.2.35. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Mengen auf einem Raum X und $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$ ihr étaler Raum. Gegeben eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ setzen wir

$$\mathcal{F}(A) = \Gamma(A; \mathcal{F}) := \{s : A \to \bar{\mathcal{F}} \mid s \text{ ist stetig und } p(s(x)) = x \ \forall x \in A\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge die **Schnitte von $\mathcal{F}$ über** A. Per definitionem haben wir zum Beispiel $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(\{x\})$ für alle $x \in X$.

2.2.36. Im Gegensatz zu Prägarben können wir also bei Garben Schnitte über beliebigen, nicht notwendig offenen Mengen betrachten. Die Schnitte einer Garbe $\mathcal{F}$ über dem ganzen Raum nennen wir auch die **globalen Schnitte** unserer Garbe und notieren sie

$$\mathcal{F}(X) = \Gamma(X; \mathcal{F}) = \Gamma\mathcal{F}$$

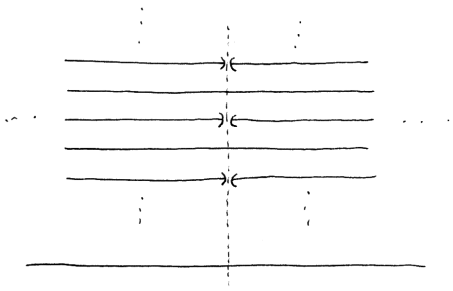
2.2.37 (**Einschränkung einer Garbe**). Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Mengen auf einem Raum X und $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$ ihr étaler Raum. Gegeben eine Teilmenge $Z \subset X$ definieren wir die Garbe $\mathcal{F}|_Z$ auf dem Raum Z als die Garbe der Schnitte im nach [TF] 2.3.1.20 étalen Raum $p^{-1}(Z) \to Z$ und nennen sie die **Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf** Z. Die offensichtliche Abbildung liefert dann eine Bijektion

$$\Gamma(Z; \mathcal{F}|_Z) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Z; \mathcal{F})$$

zwischen dem Raum der globalen Schnitte der Einschränkung und dem Raum der Schnitte über Z der ursprünglichen Garbe.

Lemma 2.2.38. *Gegeben ein topologischer Raum X besitzt der offensichtliche Einbettungsfunktor $\text{Ens}_{/X} \xhookrightarrow{\sim} \text{pEns}_{/X}$ von den Garben in die Prägarben einen Linksadjungierten, die* **Garbifizierung** $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$.

2.2.39. Der Formalismus der adjungierten Funktoren [TF] 2.4.8.1 liefert uns dann für jede Prägarbe $\mathcal{G}$ einen Morphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$ derart, daß jeder Morphismus



Eine abelsche Garbe auf der Zahlengerade, deren Halme alle freie abelsche Gruppen vom Rang Eins sind, braucht noch lange nicht konstant zu sein.

$\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ in eine Garbe $\mathcal{F}$ in eindeutiger Weise über $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$ faktorisiert. Des weiteren folgt aus der Volltreuheit des Einbettungsfunktors mit [TF] 2.4.3.9, daß für jede Garbe $\mathcal{F}$ dieser Morphismus ein Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+$ ist. Explizit ist das genau der Isomorphismus 2.2.30.

2.2.40. In der folgenden Darstellung finde ich es ziemlich verwirrend, wenn bei Garben der Zusatz „Prä“ begriffserweiternd wirkt und bei topologischen Räumen über einem weiteren Raum der Zusatz „étale“ begriffsverengend. Ich benutze deshalb auch noch die alternative Notation

$$\mathrm{gpEns}_{/X} = \mathrm{Ens}_{/X}$$

für „Garbenprägarben“ auf einem topologischen Raum X.

Beweis. Wir notieren $\text{ét}\mathrm{Top}_X \subset \mathrm{Top}_X$ die volle Unterkategorie aller étalen Räume über X und betrachten das Diagramm von Funktoren

$$\mathrm{pEns}_{/X} \underset{\mathcal{S}}{\overset{\text{ét}}{\rightleftarrows}} \text{ét}\mathrm{Top}_X \underset{\text{ét}}{\overset{\mathcal{S}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\approx}}}} \mathrm{gpEns}_{/X}$$

Oben steht dabei immer der Linksadjungierte, auf der linken Seite wegen unserer allgemeinen Adjunktion 2.2.26, und auf der rechten Seite, weil die Funktoren zueinander quasiinverse Äquivalenzen von Kategorien sind. Die Verknüpfung in der unteren Horizontale ist nun isomorph zum Einbettungsfunktor und die Verknüpfung in der oberen Horizontale wird so ein Linksadjungierter des Einbettungsfunktors, eben unsere Garbifizierung. □

Ergänzung 2.2.41 (**Étalisierung**). Wir notieren weiter $\text{ét}\mathrm{Top}_X \subset \mathrm{Top}_X$ die volle Unterkategorie aller étalen Räume über X und $\mathrm{Ens}_{/X} = \mathrm{gpEns}_{/X} \subset \mathrm{pEns}_{/X}$ die volle Unterkategorie aller Garben alias Garbenprägarben und betrachten das Diagramm von Funktoren

$$\text{ét}\mathrm{Top}_X \underset{\text{ét}}{\overset{\mathcal{S}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\approx}}}} \mathrm{gpEns}_{/X} \underset{\mathcal{S}}{\overset{\text{ét}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Top}_X$$

Oben steht dabei immer der Linksadjungierte, auf der rechten Seite wegen unserer allgemeinen Adjunktion 2.2.26, und auf der linken Seite, weil die Funktoren zueinander quasiinverse Äquivalenzen von Kategorien sind. Die Verknüpfung in der oberen Horizontale ist nun isomorph zum Einbettungsfunktor. Die Verknüpfung in der unteren Horizontale wird so ein Rechtsadjungierter des Einbettungsfunktors, den wir die **Étalisierung** nennen und $\text{éts} := \text{ét} \circ \mathcal{S}$ notieren. Zu jeder stetigen Abbildung $T \to X$ alias $T \in \mathrm{Top}_X$ können wir so die étale Abbildung $\text{éts}(T) \in \text{ét}\mathrm{Top}_X$ bilden zusammen mit einer stetigen Abbildung $\text{éts}(T) \to T$ über X und gegeben $E \in \text{ét}\mathrm{Top}_X$ faktorisiert jeder Morphismus in $\mathrm{Top}_X(E, T)$ auf genau eine Weise über $\text{éts}(T)$. Für T étale über X schließlich ist der natürliche Morphismus ein Isomorphismus $\text{éts}(T) \xrightarrow{\sim} T$.

Beispiel 2.2.42 (**Konstante Garben**). Der Funktor $\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}_{/X}$ der konstanten Garbe aus 2.2.11 gegeben durch $M \mapsto M_X$ ist linksadjungiert zum Funktor Γ der globalen Schnitte vermittels der durch die offensichtlichen Abbildungen $M \to \Gamma M_X$ induzierten Bijektionen

$$\mathrm{Ens}_{/X}(M_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(M, \Gamma\mathcal{F})$$

Das folgt sofort aus unserem Satz 2.2.18 über Garben und ihre étalen Räume. Das Exponentialgesetz induziert sogar für jeden Raum E über X und jede diskrete Menge M eine Bijektion $\mathrm{Top}_X(M \times X, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(M, \mathrm{Top}_X(X, E))$. Für $X \neq \emptyset$ ist unser Funktor $(M \mapsto M_X)$ treu und für X zusammenhängend sogar volltreu. Eine Garbe von Mengen heißt **konstant**, wenn sie zu einer Garbe der Gestalt M_X isomorph ist. Bezeichne $\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ens}_{/X}$ die volle Unterkategorie der konstanten Garben. Ist X zusammenhängend, so liefert unser Funktor $M \mapsto M_X$ mithin eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ens} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X}$$

Die Garbe M_X für die einpunktige Menge M ist das finale Objekt von $\mathrm{Ens}_{/X}$. Wir notieren es auch $\mathrm{ens}_{/X}$. Analoges gilt für Garben von Gruppen und Ringen. Insbesondere ist der Funktor $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ gegeben durch $(A \mapsto A_X)$ linksadjungiert zum Funktor der globalen Schnitte und treu für $X \neq \emptyset$ und volltreu für X zusammenhängend. Die Objekte seines wesentlichen Bildes heißen **konstante abelsche Garben**. Notieren wir $\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ab}_{/X}$ die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf X, so liefert unser Funktor für zusammenhängendes X eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ab} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/X}$$

2.2.43 (**Garbifizierung abelscher Prägarben**). Gegeben eine abelsche Prägarbe $\mathcal{F}$ besitzt ihre Garbifizierung $\mathcal{F}^+$ genau eine Struktur als abelsche Garbe derart, daß der Morphismus $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ ein Morphismus von abelschen Prägarben ist. In der Tat legt diese Bedingung die Addition auf den Halmen fest und die

halmweise Summe zweier stetiger Schnitte in den étalen Raum ist offensichtlich wieder stetig. Weiter fakorisiert jeder Morphismus abelscher Prägarben $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in eine abelsche Garbe $\mathcal{G}$ eindeutig über einen Morphismus von Mengengarben $\mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$, der dann auch ein Morphismus von abelschen Garben sein muß, weil er auf den Halmen mit der Addition verträglich ist. Die Garbifizierung liefert so auch auf abelschen Garben einen Linksadjungierten des Einbettungsfunktors $\mathrm{Ab}_{/X} \hookrightarrow \mathrm{pAb}_{/X}$.

2.2.44 (**Garbifizierung abelscher Prägarben, Variante**). Auf Mengenprägarben kommutiert die Garbifizierung mit endlichen Produkten, als da heißt, die offensichtlichen Morphismen sind Isomorphismen

$$(\mathcal{F} \times \ldots \times \mathcal{G})^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+ \times \ldots \times \mathcal{G}^+$$

Nach [TS] 3.7.1.39 kommutieren nämlich filtrierende Kolimites von Mengen mit endlichen Produkten und folglich induzieren unsere offensichtlichen Morphismen Isomorphismen auf den Halmen. Nun ist eine Prägarbe von abelschen Gruppen dasselbe wie ein Ab-Objekt in der Kategorie der Mengenprägarben und eine Garbe von abelschen Gruppen dasselbe wie ein Ab-Objekt in der Kategorie der Mengengarben. So sehen wir ein weiteres Mal, daß es auf der Garbifizierung $\mathcal{F}^+$ einer abelschen Prägarbe $\mathcal{F}$ genau eine Struktur als abelsche Garbe gibt, für die die Einheit der Adjunktion $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ ein Morphismus von abelschen Prägarben ist, und daß jeder Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in eine abelsche Garbe eindeutig als $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ faktorisiert mit einem Morphismus abelscher Garben an zweiter Stelle.

Übungen

Übung 2.2.45. Sei X ein Raum und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ eine Mengengarbe. Gibt es eine Teilmenge $M \subset \mathcal{F}(X)$ mit $M \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x \; \forall x \in X$, so ist $\mathcal{F}$ eine konstante Garbe.

Übung 2.2.46. Gegeben ein Schnitt einer étalen Abbildung ist die Menge aller Punkte, an denen er stetig ist, stets offen.

Übung 2.2.47 (**Produkte von Garben**). In der Kategorie der Mengengarben auf einem topologischen Raum X gibt es beliebige Produkte. Diese stimmen überein mit den Produkten in der Kategorie der Prägarben. Der étale Raum eines Produkts ist im Fall unendlicher Produkte nicht notwendig das Faserprodukt der étalen Räume. Jedes endliche Produkt in Top_X étaler Räume ist jedoch wieder étale, somit vertauscht das Bilden des étalen Raums mit endlichen Produkten von Garben.

Übung 2.2.48 (**Koprodukte von Garben**). In der Kategorie der Mengengarben auf einem topologischen Raum X gibt es beliebige Koprodukte. Koporodukte in

Top_X von étalen Räumen über X sind wieder étale über X, folglich vertauscht das Bilden von Koprodukten von Garben mit dem Bilden des étalen Raums. Dahingegen muß ein Prägarben-Koprodukt von Garben keineswegs wieder eine Garbe sein.

Weiterführende Übung 2.2.49 (**Gruppengarben als Gruppenobjekte**). Sei ein fester topologischer Raum X gegeben. Wir erinnern aus [AAG] 1.2.1 die Konzepte der Monoidobjekte, Abmonoidobjekte, Gruppenobjekte und abelschen Gruppenobjekte in einer Kategorie mit endlichen Produkten. Man konstruiere Isomorphismen von Kategorien

$$\mathrm{Mon}(\mathrm{Ens}_{/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mon}_{/X} \quad \mathrm{Grp}(\mathrm{Ens}_{/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Grp}_{/X} \quad \mathrm{Ab}(\mathrm{Ens}_{/X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/X}$$

zwischen der Kategorie der Monoidobjekte der Kategorie der Mengengarben und der Kategorie der Garben von Monoiden und dergleichen.

Übung 2.2.50 (**Morphismen aus dem leeren Produkt**). Das leere Produkt alias finale Objekt in der Kategorie $\mathrm{Ens}_{/X}$ der Garben auf einem topologischen Raum X ist die konstante Garbe $\mathrm{ens}_{/X}$ mit $\mathrm{id} : X \to X$ als étalem Raum. Das Auswerten auf dem einzigen Schnitt der konstanten Garbe liefert für jede weitere Garbe $\mathcal{F}$ eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/X}(\mathrm{ens}_{/X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \mathcal{F})$$

Übung 2.2.51 (**Multihom der kartesischen Schmelzkategorie der Garben**). In der kartesischen Schmelzkategorie $\mathrm{kart}(\mathrm{Ens}_{/X})$ der Garben auf einem topologischen Raum X erhält man ein Multihom durch die Vorschrift

$$(\mathcal{G} \Rrightarrow \mathcal{F})(U) := \mathrm{Ens}_{/U}(\mathcal{G}_1|_U \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{G}_r|_U, \mathcal{F}|_U)$$

für $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{G}_r$ und $U \Subset X$. In dieser Terminologie können wir die Beschreibung der globalen Schnitte aus der vorhergehenden Übung auch umschreiben zu einer ausgezeichneten Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/X}(\curlyvee, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X; \mathcal{F})$$

zwischen den Leerverschmelzungen nach $\mathcal{F}$ und den globalen Schnitten von $\mathcal{F}$.

Übung 2.2.52. In der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Produkte und diese stimmen überein mit den Produkten in der Kategorie der Prägarben. Die Konstruktion direkter Summen diskutieren wir in 2.6.6.

Übung 2.2.53 (**Halme der Wolkenkratzergarben**). Man zeige, daß die Halme der Wolkenkratzergarbe $A_{(x)}$ gerade die Menge A selbst sind an allen Stellen, die im Abschluß des Punktes x liegen, und daß sie sonst einelementig sind. Feinere Aussagen in dieser Richtung werden in 6.4.12 diskutiert.

Übung 2.2.54. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer offenen Teilmenge $U \Subset X$ ist die Einbettung étale und mithin der étale Raum einer Garbe von Mengen. Deren Halme sind einelementig an allen Punkten $x \in U$ und leer an allen Punkten $x \notin U$. Im Fall eines offenen aber nicht abgeschlossenen Punktes ist diese Garbe damit „stärker lokalisiert“ als die Wolkenkratzergarbe an besagtem Punkt.

Übung 2.2.55 (**Halm von Produkt und Produkt der Halme**). Der Halm eines Produkts von Garben ist nicht notwendig das Produkt der Halme: Zum Beispiel betrachte man auf $\mathbb{R}$ das Produkt der Wolkenkratzer mit Halm K an den Stellen $1/n$ mit $n \geq 1$ und zeige, daß sein Halm im Ursprung der Quotient $\left(\prod_{n\geq 1} K\right)/\left(\bigoplus_{n\geq 1} K\right)$ ist. Oder man betrachte auf $\mathbb{R}$ das Produkt der Garben $\mathcal{F}_n$ mit étalen Räumen den disjunkten Vereinigungen $\mathbb{R} \sqcup (-1/n, 1/n)$ für natürliche Zahlen $n \geq 1$ und den offensichtlichen Abbildungen nach $\mathbb{R}$. Im Fall endlicher Produkte ist aber der étale Raum des Produkts in der Tat das Faserprodukt der étalen Räume der Faktoren.

Ergänzende Übung 2.2.56. Sei $f : Y \to X$ stetig und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung. Man zeige: Genau dann ist f étale, wenn $f : f^{-1}(U) \to U$ étale ist für alle $U \in \mathcal{U}$.

Übung 2.2.57. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Der Halmfunktor $\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ hat als Rechtsadjungierten den Wolkenkratzerfunktor $A \mapsto A_{(x)}$. Sehr viel allgemeinere Resultate in dieser Richtung werden wir in 4.3.19 kennenlernen.

Ergänzende Übung 2.2.58 (**Garben auf teilgeordneten Mengen**). Sei eine teilgeordnete Menge $(A, \leq)$ gegeben. Wir versehen sie mit ihrer Ordnungstopologie nach [TM] 1.1.1.24, in der also genau die Teilmengen offen sind, die mit einem Element auch jedes kleinere enthalten, und damit abgeschlossen genau die Teilmengen, die mit einem Element auch jedes größere enthalten. Wir versehen sie auch mit der durch die Teilordnung gegebenen Kategorienstruktur im Sinne von [LA2] 4.9.1.8, Morphismen gehen hier von größeren zu kleineren Objekten. Man zeige, daß wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ens}_{/A} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Cat}(A, \mathrm{Ens})$$

erhalten zwischen der Kategorie der Garben auf der Menge A mit ihrer Ordnungstopologie und der Kategorie der Funktoren von A in die Kategorie der Mengen, indem wir zu jeder Garbe $\mathcal{F}$ den Funktor bilden, der jedem Punkt $x \in A$ seinen Halm $\mathcal{F}_x$ und jedem Morphismus $x \geq y$ die von $x \in \bar{y}$ nach 2.2.23 induzierte Generisierungsabbildung $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_y$ zwischen den Halmen zuordnet.

Übung 2.2.59. Auf einem zusammenhängenden Raum X ist das Bilden des Halms an einem beliebigen aber festen Punkt eine Äquivalenz zwischen der vollen Unterkategorie in $\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ens}_{/X}$ der konstanten Garben auf X und der Kategorie der

Mengen. Auf einem einfach zusammenhängenden Raum ist jede lokal konstante Garbe konstant. Hinweis: Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Hochhebungen aus der Überlagerungstheorie [TF] 2.3.4.10 und [TF] 2.3.4.13. Ich ergänze, daß nach **??** jeder zusammenziehbare Raum einfach zusammenhängend ist.

Übung 2.2.60. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe. Genau dann wird ein Schnitt $s \in \mathcal{F}(V)$ in der Garbifizierung zu Null, wenn es eine offene Überdeckung $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ von V gibt mit $s|U = 0$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

Übung 2.2.61. Für jede Mengengarbe $\mathcal{F}$ induziert der kanonische Morphismus in die Garbifizierung $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ Bijektionen auf allen Halmen.

Übung 2.2.62. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Mengen auf einem topologischen Raum X und sei $K \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Stimmen die Restriktionen zweier globaler Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(X)$ auf K überein, so stimmen bereits ihre Restriktionen auf eine offene Umgebung U von K in X überein.

Übung 2.2.63. Gegeben ein topologischer Raum X hat das Vergessen der Addition $\mathrm{pAb}_{/X} \to \mathrm{pEns}_{/X}$ als Linksadjungierten den Funktor der **freien abelschen Prägarbe**, der einer Prägarbe von Mengen $\mathcal{F} \in \mathrm{pEns}_{/X}$ mit $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ die Prägarbe $\mathrm{p}\mathbb{Z}\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen zuordnet, die gegeben wird durch $U \mapsto \mathbb{Z}(\mathcal{F}(U))$ mit $\mathbb{Z}M$ der freien abelschen Gruppe über einer Menge M. Der Vergißfunktor $\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{pEns}_{/X}$ hat folglich als Linksadjungierten den Funktor der **freien abelschen Garbe** $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{Z}\mathcal{F} := (\mathrm{p}\mathbb{Z}\mathcal{F})^+$, die wir erhalten als die Garbifizierung der freien abelschen Prägarbe. Der Vergißfunktor $\mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/X}$ hat denselben Linksadjungierten.

Übung 2.2.64. Gegeben X ein lokal kompakter Hausdorffraum betrachte man die Kategorie Komp_X der kompakten Teilmengen von X mit den Inklusionen als Morphismen. Wir erhalten dann einen volltreuen Funktor

$$\mathcal{S}^{\mathrm{c}} : \mathrm{Ens}_{/X} \xhookrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathrm{Komp}_X^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ens})$$

durch die Vorschrift $\mathcal{S}^{\mathrm{c}} : \mathcal{F} \mapsto (K \mapsto \Gamma(K; \mathcal{F}))$. Hinweis: Man konstruiere zu einem Morphismus rechts eine Abbildung auf den étalen Räumen links und zeige deren Stetigkeit.

Übung 2.2.65. Gegeben $X \supset Z$ ein topologischer Raum mit einer dichten Teilmenge läßt sich jeder stetige Schnitt von Z in eine konstante Garbe auf X stetig auf eine offene Teilmenge von X fortsetzen. Das habe ich von Olaf Schnürer gelernt.

Ergänzende Übung 2.2.66 (**Nichtfortsetzbarkeit in Hausdorffräumen**). Hier kommt ein Beispiel für einen Schnitt einer Garbe auf einer Teilmenge eines Hausdorffraums, der sich nicht stetig auf eine offene Umgebung unserer Teilmenge fortsetzen läßt. Man sucht einen Raum X mit einer diskreten abgeschlossenen

Teilmenge $A \subset X$ derart, daß es keine paarweise disjunkten offenen Umgebungen $U_a \Subset X$ der Punkte von A gibt. Dann ist $\bigsqcup_{a \in A} X \backslash (A \backslash a) \to X$ eine étale Abbildung und $a \mapsto a \in X \backslash (A \backslash a)$ ein stetiger Schnitt auf A, der nicht stetig auf eine offene Umgebung von A fortgesetzt werden kann. Man erhält ein mögliches Paar $A \subset X$, indem man $X := \mathbb{R}$ setzt und $A := \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{0\}$ und die kleinste Topologie auf $\mathbb{R}$ betrachtet, die die natürliche Topologie umfaßt und bei der zusätzlich $\mathbb{R} \backslash \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ offen ist. Das alles habe ich von Martin Ziegler gelernt.

2.3 Kerne und Kokerne in Kategorien

2.3.1. Im folgenden wird es sich als nützlich erweisen, in der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum homologische Algebra zu treiben. In diesem Abschnitt beginnen wir damit, für dieses Vorhaben einen begrifflichen Rahmen zu zimmern. Bei vielen konkreten Beispielen wie etwa der Kategorie aller abelschen Gruppen muß man sich, wenn man es ganz genau nimmt, ein Universum hinzudenken und erst die Gesamtheit aller Strukturen der fraglichen Art, deren Grundmengen zu besagtem Universum gehören, bilden dann eine Kategorie im Sinne unserer Definitionen.

Definition 2.3.2. Ein Objekt einer Kategorie heißt ein **Nullobjekt**, wenn es final und initial ist. Existiert ein Nullobjekt, so ist es eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphimus. Wir sprechen deshalb meist von **dem** Nullobjekt und notieren es 0. Gegeben zwei Objekte A, B in einer Kategorie mit Nullobjekt nennen wir den Morphismus $A \to B$, der über das Nullobjekt faktorisiert, den **Nullmorphismus** und notieren ihn $0 : A \to B$.

Beispiel 2.3.3. In der Kategorie Grp der Gruppen ist jede einelementige Gruppe ein Nullobjekt. In der Kategorie Mon der Monoide ist jedes einelementige Monoid ein Nullobjekt. In der Kategorie Ens^* der bepunkteten Mengen ist jede einpunktige Menge final und initial, als da heißt, ein Nullobjekt. Dasselbe gilt in der Kategorie Top^* der bepunkteten topologischen Räume. Noch allgemeiner ist für jede Kategorie $\mathcal{C}$ mit finalem Objekt pt in der Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{pt}}$ aller Objekte unter pt die Identität $\mathrm{pt} \to \mathrm{pt}$ ein Nullobjekt.

Definition 2.3.4. Sei $f : B \to C$ ein Morphismus in einer Kategorie mit Nullobjekt.

1. Ein **Kern** von f ist ein Morphismus $i : (\ker f) \to B$ mit $fi = 0$ derart, daß jeder Morphismus $g : A \to B$ mit $fg = 0$ eindeutig faktorisiert über i, als da heißt, es gibt genau einen Morphismus $\tilde{g} : A \to (\ker f)$ mit $g = i\tilde{g}$;

2. Ein **Kokern** von f ist dual ein Morphismus $p : C \to (\operatorname{cok} f)$ mit $pf = 0$ derart, daß jeder Morphismus $g : C \to D$ mit $gf = 0$ eindeutig faktorisiert über $p : C \to (\operatorname{cok} f)$;

3. Einen Kokern eines Kerns von f nennen wir auch ein **Bild** von f und notieren es $B \to (\operatorname{im} f)$;

4. Einen Kern eines Kokerns von f nennen wir dual ein **Kobild** von f und notieren es $(\operatorname{coim} f) \to C$.

2.3.5. Per definitionem sind Kerne und Kokerne und ebenso Bilder und Kobilder eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, falls sie existieren. Wir sprechen deshalb meist von *dem* Kern, *dem* Kokern etc.

Definition 2.3.6. Ein Morphismus $g : B \to C$ in einer Kategorie heißt ein **Monomorphismus** oder **Mono** und als Adjektiv **mono**, wenn für zwei beliebige Morphismen $f, f' : A \to B$ aus $gf = gf'$ schon folgt $f = f'$. Wir notieren Monomorphismen oft $\hookrightarrow$.

Definition 2.3.7. Ein Morphismus $g : B \to C$ in einer Kategorie heißt ein **Epimorphismus** oder **Epi** und als Adjektiv **epi**, wenn für zwei beliebige Morphismen $h, h' : C \to D$ aus $hg = h'g$ schon folgt $h = h'$. Wir notieren Epimorphismen oft $\twoheadrightarrow$.

2.3.8. Gegeben eine Kategorie mit Nullobjekt und eine Objektfamilie $(X_i)_{i \in I}$, für die Koprodukt und Produkt existieren, können wir einen Morphismus

$$\varphi : \bigsqcup X_i \to \prod X_i$$

angeben durch die Bedingung $\operatorname{pr}_i \circ \varphi \circ \operatorname{in}_i = \operatorname{id} \ \forall i$ und $\operatorname{pr}_i \circ \varphi \circ \operatorname{in}_j = 0$ für $i \neq j$. Wir nennen ihn den **natürlichen Morphismus**.

Übungen

Übung 2.3.9. Gegeben eine Kategorie mit Nullobjekt ist die Verknüpfung von rechts oder links eines Nullmorphismus mit einem anderen Morphismus stets wieder ein Nullmorphismus.

Übung 2.3.10. Die Verknüpfung von zwei Monos ist mono. Ist eine Verknüpfung hg mono, so auch g. Die Verknüpfung von zwei Epis ist epi. Ist eine Verknüpfung gf epi, so auch g.

Übung 2.3.11. Ein Funktor L mit Rechtsadjungiertem R ist genau dann treu, wenn die Einheiten der Adjunktion $M \to RLM$ alle Monomorphismen sind. Ein Funktor R mit Linksadjungiertem L ist genau dann treu, wenn die Koeinheiten der Adjunktion $LRM \to M$ alle Epimorphismen sind.

Übung 2.3.12. Ist in einem kartesischen Diagramm ein Ausgangsmorphismus mono, so auch der induzierte gegenüberliegende Morphismus aus dem Faserprodukt. Man formuliere auch die duale Aussage.

Übung 2.3.13. In einer Kategorie mit Nullobjekt zeige man die folgenden Aussagen und formuliere ihre Dualen: (1) Der Kern eines Nullmorphismus ist die Identität auf dem Ausgangsobjekt. Ein Morphismus mit Kern 0 induziert einen Isomorphismus auf sein Bild. (2) Besitzt $f : A \to B$ einen Kern und ist $g : B \to C$ ein Mono, so haben wir $\ker f = \ker gf$. (3) Gegeben ein kartesisches Diagramm ist jeder Kern eines Morphismus im Diagramm auch ein Kern des gegenüberliegenden Morphismus.

Übung 2.3.14. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Die volle Unterkategorie von $\mathcal{C}_X$ aller Monomorphismen nach X notieren wir $\mathcal{C}_{\subset X}$ und nennen sie die **Kategorie der Monos nach** X. Man zeige: In der Kategorie der Monos nach X gibt es zwischen je zwei Objekten höchstens einen Morphismus. Gibt es insbesondere Morphismen in beide Richtungen $Y \to Z$ und $Z \to Y$, so sind diese zueinander inverse Isomorphismen. Eine Isomorphieklasse in $\mathcal{C}_{\subset X}$ nennen wir ein **Unterobjekt von** X oder ausführlicher ein **kategorisches Unterobjekt von** X. Auf der Menge $\mathrm{Unt}(X)$ der Unterobjekte von X erhalten wir eine Teilordnung durch die Vorschrift, daß $[Y] \leq [Z]$ gilt genau dann, wenn es einen Morphismus $Y \to Z$ in $\mathcal{C}_X$ gibt. Vielfach lassen wir die eckigen Klammern in der Notation von Unterobjekten aber auch weg.

2.3.15 (**Unter-was-auch-immer**). Die Terminologie ist hier nicht vollständig kohärent. Untergruppen, Untervektorräume und Unterkörper sind im Wesentlichen dasselbe wie kategorische Unterobjekte in der entsprechenden Kategorie. Untermannigfaltigkeiten oder Untervarietäten dahingegen sind es nicht.

2.4 Präabelsche Kategorien

2.4.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt. Wir erinnern die Definition 2.3.4 von Kern, Bild, Kokern und Kobild. Per definitionem sind Kerne stets Monos und Kokerne stets Epis. Für jeden Morphismus $f : A \to B$ mit Kern, Bild, Kokern und Kobild gibt es genau einen Morphismus $\mathrm{im}\, f \to \mathrm{coim}\, f$, mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \mathrm{im}\, f \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{cok}\, f & \twoheadleftarrow & B & \hookleftarrow & \mathrm{coim}\, f \end{array}$$

Definition 2.4.2. Eine Kategorie heißt **präabelsch** genau dann, wenn sie (1) ein Nullobjekt besitzt, wenn (2) jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern hat

und wenn zusätzlich (3) für jeden Morphismus f der induzierte Morphismus nach 2.4.1 ein Isomorphismus $\operatorname{im} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{coim} f$ ist.

Ergänzung 2.4.3 (**Diskussion der Terminologie**). Iversen [Ive87] nennt unsere präabelschen Kategorien exakt und übernimmt damit in etwa die Terminologie von Buchsbaum [Buc55], der allerdings von seinen exakten Kategorien etwas mehr fordert als Iversen. In der Literatur versteht man unter einer exakten Kategorie inzwischen fast immer abweichend davon eine exakte Kategorie im Sinne von Quillen [Qui73]. Die Terminologie „präabelsch“ führe ich ein, um diese Inkonsistenzen aufzulösen. Wir werden in 3.1 in beliebigen präabelschen Kategorien zu jeder kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen die lange exakte Homologiesequenz herleiten.

Beispiele 2.4.4. Die Kategorie aller abelschen Gruppen ist präabelsch. Die Kategorie aller Gruppen besitzt zwar ein Nullobjekt und zu jedem Morphismus Kern und Kokern, ist jedoch nicht präabelsch. Die Kategorie aller Moduln über einem festen Grundring ist präabelsch.

Beispiel 2.4.5. Die opponierte Kategorie einer präabelschen Kategorie ist auch eine präabelsche Kategorie.

Definition 2.4.6. Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in einer präabelschen Kategorie heißt **exakt**, wenn gilt $gf = 0$ und wenn zusätzlich die induzierte Abbildung $\operatorname{im} f \to \ker g$ ein Isomorphismus ist. Sie heißt eine **kurze exakte Sequenz**, wenn zusätzlich f mono ist und g epi. Eine längere Sequenz heißt exakt, wenn sie exakt ist an jeder Stelle.

Beispiel 2.4.7. Eine exakte Sequenz ist offensichtlich auch exakt in der opponierten Kategorie.

Definition 2.4.8. Ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien heißt **linksexakt**, wenn er Kerne zu Kernen macht; **rechtsexakt**, wenn er Kokerne zu Kokernen macht; und **exakt**, wenn er linksexakt und rechtsexakt ist.

Vorschau 2.4.9. In Übung 2.5.27 sollen Sie zeigen, da rechtsexakte und linksexakte Funktoren zwischen abelschen Kategorien stets additiv sind. Das ist die Situation, in der wir diese Begriffe für gewöhnlich verwenden werden.

Übungen

Übung 2.4.10. In einer präabelschen Kategorie zeige man die folgenden Aussagen. (1) Für einen Morphismus $f : A \to B$ sind gleichbedeutend: (a) f ist epi, (b) $\operatorname{cok} f = 0$ und (c) $\operatorname{coim} f \xrightarrow{\sim} B$. Man formuliere auch die duale Aussage. (2) Genau dann ist ein Morphismus ein Isomorphismus, wenn er mono und epi ist.

(3) Ist $A \twoheadrightarrow B \hookrightarrow C$ eine Komposition eines Epi mit einem Mono, so ist B das Bild dieser Verknüpfung.

Übung 2.4.11. Ein Funktor F zwischen präabelschen Kategorien ist genau dann rechtsexakt, wenn für jede exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ die Sequenz $FA \to FB \to FC \to 0$ exakt ist.

Übung 2.4.12. Sowohl rechtsexakte als auch linksexakte Funktoren bilden das Nullobjekt stets auf das Nullobjekt ab.

Übung 2.4.13. Besitzt ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien einen linksadjungierten Funktor, so ist er linksexakt. Besitzt ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien einen rechtsadjungierten Funktor, so ist er rechtsexakt.

Übung 2.4.14. Eine Sequenz $\ldots \to A^{q-1} \to A^q \to A^{q+1} \to \ldots$ in einer präabelschen Kategorie ist exakt genau dann, wenn für die jeweiligen Faktorisierungen $A^{n-1} \twoheadrightarrow K^q \hookrightarrow A^q$ in einen Epi gefolgt von einem Mono die offensichtlichen Sequenzen $K^q \hookrightarrow A^q \twoheadrightarrow K^{q+1}$ kurz exakt sind für alle q.

Ergänzende Übung 2.4.15. Eine **Filtrierung** F auf einem Vektorraum V ist eine Folge von Teilräumen

$$\ldots \subset V^{\leq n} \subset V^{\leq n+1} \subset \ldots$$

mit $n \in \mathbb{Z}$. Wir machen die filtrierten Vektorräume zu einer Kategorie, indem wir die filtrierungserhaltenden linearen Abbildungen als Morphismen nehmen. Man zeige, daß es in dieser Kategorie Kerne und Kokerne gibt, daß aber die kanonische Abbildung $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ kein Isomorphismus sein muß. Ist diese Abbildung doch ein Isomorphismus, so heißt f **strikt verträglich mit den Filtrierungen**. Äquivalent dazu ist die Bedingung $f(V^{\leq n}) = W^{\leq n} \cap \operatorname{im} f$ für eine filtrierungserhaltende lineare Abbildung $f : V \to W$.

2.5 Additive und abelsche Kategorien

2.5.1. Wir erklären eine Magu**-Struktur** auf einer Kategorie als die Vorgabe einer Struktur als unitäres Magma alias die Vorgabe einer unitären Verknüpfung auf jeder Morphismenmenge $\mathcal{C}(X, Y)$ derart, daß sowohl das Vorschalten als auch das Nachschalten eines Morphismus jeweils einen Homomorphismus von unitären Magmas induziert, also einen Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung, der das neutrale Element auf das neutrale Element abbildet. Eine Magu**-Kategorie** ist eine Kategorie mit Magustruktur. Ein Magu**-Funktor** von Magukategorien ist ein Funktor, der auf Morphismenräumen Homomorphismen von unitären Magmas induziert.

Vorschau 2.5.2. Die weitaus wichtigsten Fälle werden im folgenden diejenigen sein, bei denen die fraglichen Strukturen als unitäres Magma sogar Strukturen als abelsche Gruppe sind. Wir nennen sie Ab**-Kategorien**.

2.5.3 (**Diskussion der Terminologie und Notation**). In [TSK] 4.2.5.16 führen wir den Begriff einer in einer Schmelzkategorie angereicherten Kategorie ein. Eine in der Schmelzkategorie Magu der unitären Magmas angereicherte Kategorie erweist sich in dieser Terminologie als dasselbe wie eine Magu-Kategorie. Das neutrale Element der jeweiligen Morphismenmenge notieren wir 0 und ihre Verknüpfung $\top$.

2.5.4. In einer Magu-Kategorie erklären wir wie in einer Kategorie mit Nullobjekt in 2.3.8 für jede Objektfamilie mit Produkt und Koprodukt den **natürlichen Morphismus** vom Koprodukt zum Produkt.

2.5.5 (**Initiale und finale Objekte in** Magu**-Kategorien**). Für ein Objekt N einer Magu-Kategorie sind offensichtlich gleichbedeutend:

1. $\mathrm{id}_N = 0$;
2. N ist initial;
3. N ist final;
4. N ist ein Nullobjekt.

Lemma 2.5.6 (**Endliche Koprodukte und Produkte In** Magu**-Kategorien**). *In einer* Magu*-Kategorie seien Objekte* X, Y, Z *gegeben.*

1. *Finden wir Morphismen* $i : X \to Z, j : Y \to Z, p : Z \to X, q : Z \to Y$ *mit* $pi = \mathrm{id}_X$ *und* $qj = \mathrm{id}_Y$ *und* $qi = 0, pj = 0$ *und* $ip\top jq = \mathrm{id}_Z$*, so ist* (Z, p, q) *ein Produkt* $X \sqcap Y$ *und* (Z, i, j) *ein Koprodukt* $X \sqcup Y$*;*
2. *Ist* (Z, p, q) *ein Produkt* $X \sqcap Y$ *und erklären wir* $i : X \to Z, j : Y \to Z$ *durch* $pi = \mathrm{id}_X, qi = 0$ *und* $pj = 0, qj = \mathrm{id}_Y$*, so gilt* $ip\top jq = \mathrm{id}_Z$*;*
3. *Ist* (Z, i, j) *ein Koprodukt* $X \sqcup Y$ *und erklären wir* $p : Z \to X, q : Z \to Y$ *durch* $pi = \mathrm{id}_X, pj = 0$ *und* $qi = 0, qj = \mathrm{id}_Y$*, so gilt* $ip\top jq = \mathrm{id}_Z$*.*

2.5.7. Salopp gesprochen stimmen in einer Magu-Kategorie also endliche Produkte und endliche Koprodukte überein. Man sieht auch unmittelbar, daß jeder Magu-Funktor mit endlichen Produkten und endlichen Koprodukten verträglich sein muß. Wir verwenden in diesem Kontext die Notation $X \sqcap\!\!\!\sqcup Y$ für das Produkt und Koprodukt.

Beweis. Wir zeigen, daß (Z, p, q) ein Produkt $X \sqcap Y$ ist. Gegeben Morphismen $f, g : T \to Z$ folgt aus $pf = pg$ und $qf = qg$ bereits

$$f = ipf\top jqf = ipg\top jqg = g$$

Gegeben Morphismen $a : T \to X$ und $b : T \to Y$ gilt für $f := ia \top jb$ umgekehrt $pf = a$ und $qf = b$. Das zeigt, daß Z ein Produkt (Z, p, q) ein Produkt $X \sqcap Y$ ist. Die Koprodukteigenschaft zeigt man genauso und damit ist Teil 1 bewiesen. Umgekehrt hat in Teil 2 der Morphismus $f := ip \top jq : Z \to Z$ die Eigenschaft $pf = p$ und $qf = q$ und damit folgt $f = \mathrm{id}_Z$. Teil 3 zeigt man genauso. □

Proposition 2.5.8 (**Eindeutigkeit von** Magu**-Strukturen**). *1. Eine Kategorie mit endlichen Produkten und* Magu*-Struktur besitzt auch endliche Koprodukte und die natürlichen Morphismen von endlichen Koprodukten zu endlichen Produkten sind Isomorphismen;*

2. Eine Kategorie mit endlichen Koprodukten und Magu*-Struktur besitzt auch endliche Produkte und die natürlichen Morphismen von endlichen Koprodukten zu endlichen Produkten sind Isomorphismen;*

3. Eine Kategorie mit endlichen Produkten und Koprodukten, bei der die natürlichen Morphismen von endlichen Koprodukten zu endlichen Produkten Isomorphismen sind, besitzt genau eine Magu*-Struktur und diese ist sogar eine* Abmon*-Struktur, als da heißt, die Verknüpfungen auf den Morphismenmengen sind kommutativ und assoziativ;*

4. Jeder Funktor von einer Magu*-Kategorie mit endlichen Produkten in eine weitere* Magu*-Kategorie, der verträglich ist mit endlichen Produkten, muß ein* Magu*-Funktor sein. Analog für Koprodukte.*

2.5.9 (**Existenz von** Magu**-Strukturen**). Wir sehen insbesondere, daß jede Kategorie mit endlichen Produkten und Koprodukten, bei der die offensichtlichen Morphismen von endlichen Koprodukten zu endlichen Produkten stets Isomorphismen sind, in hoffentlich offensichtlicher Terminologie auf genau eine Weise mit einer Abmon-Struktur versehen werden kann und daß diese dann auch bereits die einzige Magu-Struktur ist.

Beweis. In einer Kategorie mit Magu-Struktur ist nach 2.5.5 jedes finale Objekt auch initial, also jedes leere Produkt auch ein leeres Koprodukt. Weiter ist in einer Kategorie mit Magu-Struktur nach 2.5.6 jedes Produkt von zwei Objekten auch ein Koprodukt und der offensichtliche Morphismus von Koprodukt zum Produkt ein Isomorphismus. Induktiv folgt Teil 1 und genauso zeigt man Teil 2. In dieser Situation kann man für $f, g : X \to Y$ ihre $\top$-Verknüpfung $f \top g$ beschreiben als die Komposition

$$X \xrightarrow{\Delta} X \sqcap X \xrightarrow{f \sqcap g} Y \sqcap Y \xleftarrow{\sim} Y \sqcup Y \xrightarrow{\nabla} Y$$

und das zeigt sowohl die Eindeutigkeit wie die Kommutativität der $\top$-Verknüpfung unter den gegebenen Annahmen. Die Assoziativität folgt, indem wir prüfen, daß $(f \top g) \top h$ und $f \top (g \top h)$ beide mit der Komposition im Diagramm

$$X \xrightarrow{\Delta} X \sqcap X \sqcap X \xrightarrow{f \sqcap g \sqcap h} Y \sqcap Y \sqcap Y \xleftarrow{\sim} Y \sqcup Y \sqcup Y \xrightarrow{\nabla} Y$$

übereinstimmen müssen. Die letzte Behauptung der Proposition folgt unmittelbar aus der hier gegebenen Beschreibung der $\top$-Verknüpfungen. $\square$

Definition 2.5.10. Eine Ab**-Struktur** oder gleichbedeutend **additive Struktur** auf einer Kategorie ist eine Struktur von abelscher Gruppe auf jeder Morphismenmenge derart, daß die Verknüpfung von Morphismen biadditiv ist. Eine Ab**-Kategorie** ist eine Kategorie mit Ab-Struktur. Ein Funktor zwischen Ab-Kategorien heißt ein Ab**-Funktor**, wenn er Gruppenhomomorphismen auf den Morphismenräumen induziert.

2.5.11 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Ab-Kategorie erweist sich als eine in der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen angereicherte Kategorie. In wieder anderen Quellen wird eine Ab-Kategorie als eine „prä-additive Kategorie“ bezeichnet. Ich bezeichne eine Ab-Kategorie in manchen Kontexten auch als ein **Ringoid**.

Beispiel 2.5.12 (**Ein-Objekt-Kategorien mit** Ab**-Struktur**). Zu jedem Ring R können wir die Ein-Objekt-Kategorie $[R]$ mit einem einzigen Objekt $*$ bilden, deren Morphismen eben genau die Elemente von besagtem Ring sind, mit der Multiplikation als Verknüpfung von Morphismen. Die Addition von Ringelementen definiert dann auf der Ein-Objekt-Kategorie $[R]$ eine Ab-Struktur. Umgekehrt ist für jedes Objekt X einer Ab-Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, X)$ mit der von der Kategorienstruktur herkommenden Verknüpfung als Multiplikation und der von der additiven Struktur herkommenden Verknüpfung als Addition ein Ring. In diesem Sinne ist also eine Ab-Kategorie mit einem einzigen Objekt nichts anderes als ein Ring.

Korollar 2.5.13 (**Eindeutigkeit von** Ab**-Strukturen**). *Auf einer Kategorie mit endlichen Produkten gibt es höchstens eine* Ab*-Struktur. Dasselbe gilt opponiert für jede Kategorie mit endlichen Koprodukten.*

Beweis. Nach Proposition 2.5.8 gibt es sogar höchstens eine Magu-Struktur. $\square$

Definition 2.5.14. Eine **additive Kategorie** ist eine Kategorie mit endlichen Produkten und Ab-Struktur oder gleichbedeutend mit endlichen Koprodukten und Ab-Struktur.

Proposition 2.5.15. *Für einen Funktor zwischen additiven Kategorien sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Funktor vertauscht mit endlichen Produkten;*

2. *Unser Funktor vertauscht mit endlichen Koprodukten;*

3. *Unser Funktor ist ein* Ab*-Funktor.*

Beweis. Das gilt nach 2.5.7 und 2.5.8 sogar für Magu-Kategorien mit endlichen Produkten oder gleichbedeutend endlichen Koprodukten. □

2.5.16. Ein Funktor zwischen additiven Kategorien mit den äquivalenten Eigenschaften aus Proposition 2.5.15 heißt ein **additiver Funktor**.

2.5.17 (**Adjungierte sind additiv**). Jeder Funktor zwischen additiven Kategorien, der einen Linksadjungierten besitzt, ist bereits additiv, da er mit Produkten vertauscht. Jeder Funktor zwischen additiven Kategorien, der einen Rechtsadjungierten besitzt, ist bereits additiv, da er mit Koprodukten vertauscht.

2.5.18 (**Matrixnotation für Morphismen zwischen Produkten**). In einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ sind Morphismen von einem Koprodukt zu einem Produkt $f : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to \prod_{j\in J} Y_j$ in Bijektion zu Tupeln $(f_{j,i}) \in \prod_{i,j} \mathcal{C}(X_i, Y_j)$ vermittels $f \mapsto (\mathrm{pr}_j\, f\, \mathrm{in}_i)$. In Ab-Kategorien oder allgemeiner Abmon-Kategorien ist es besonders sinnhaft, Morphismen zwischen endlichen Produkten alias Koprodukten mit angeordneter Indexmenge als Matrizen von Morphismen zwischen den einzelnen Objekten zu schreiben, weil in diesem Fall die Verknüpfung von Morphismen nach 2.5.6 durch ein Analogon der Matrixmultiplikation beschrieben werden kann. Wir denken uns dabei unsere Objekttupel als Spalten, ein Morphismus von einem endlichen Koprodukt in ein Objekt wird also durch eine Zeilenmatrix beschrieben und ein Morphismus von einem Objekt in ein endliches Produkt durch eine Spaltenmatrix.

Definition 2.5.19. Eine Kategorie heißt **abelsch**, wenn sie additiv und präabelsch ist.

2.5.20. Andere äquivalente Definitionen und viele weitere Resultate findet man in [Fre66, Bor94, Gab62, HS71]. Insbesondere findet man in [Fre66] einen Beweis der Tatsache, daß jede präabelsche Kategorie mit endlichen Produkten und Koprodukten bereits abelsch ist. Ich gebe ihn als Übung 3.1.8.

Beispiel 2.5.21. Die Kategorie der abelschen topologischen Gruppen ist additiv, aber nicht abelsch. So ist etwa für die Abbildung $\mathbb{R}^{\mathrm{disk}} \to \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie nach $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie der natürliche Morphismus vom Bild zum Kobild kein Isomorphismus von topologischen Gruppen.

Beispiele 2.5.22. Sei R ein Ring. Die Kategorie aller freien R-Moduln von endlichem Rang ist additiv. Die Kategorie aller R-Moduln ist sogar abelsch, ebenso

wie die Kategorie der abelschen Prägarben und die Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen topologischen Raum. Die opponierte Kategorie einer additiven beziehungsweise abelschen Kategorie ist stets auch additiv beziehungsweise abelsch.

Beispiel 2.5.23. Ganz allgemeinen ist für jede Kategorie I die Kategorie aller Funktoren von I in eine additive beziehungsweise abelsche Kategorie mit den Transformationen als Morphismen wieder eine additive beziehungsweise abelsche Kategorie. Zum Beispiel ist die Kategorie aller gerichteten Systeme von abelschen Gruppen über einer vorgegebenen teilgeordneten Indexmenge eine abelsche Kategorie. Aus demselben allgemeinen Grund bilden auch die abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum eine abelsche Kategorie: Nullobjekt ist Prägarbe, die jeder offenen Menge die triviale Gruppe zuordnet, und der Kern beziehungsweise Kokern eines Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ werden gegeben durch

$$\begin{array}{rcll} (\ker f)(U) & = & \ker(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)) & \forall \quad U \Subset X \\ (\operatorname{cok} f)(U) & = & \operatorname{cok}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)) & \forall \quad U \Subset X \end{array}$$

mit hoffentlich offensichtlichen Restriktionen.

Beispiel 2.5.24. Die Kategorie aller Komplexe in einer additiven beziehungsweise abelschen Kategorie $\mathcal{A}$, also aller Sequenzen $\ldots \to A_n \to A_{n+1} \to \ldots$ mit der Eigenschaft, daß die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen Null ist, ist mit den „Kettenabbildungen“ als Morphismen eine additive beziehungsweise abelsche Kategorie $\mathrm{Ket}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$. Unsere kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen aus [TS] 3.2.2.2 sind genau die kurzen exakten Sequenzen in der abelschen Kategorie $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$.

Übungen

Übung 2.5.25. Die opponierte Kategorie einer additiven Kategorie ist additiv. Die opponierte Kategorie einer abelschen Kategorie ist abelsch.

Übung 2.5.26. Eine volle Unterkategorie einer additiven Kategorie ist additiv genau dann, wenn sie mit jeder endlichen Familie von Objekten auch ein Produkt dieser Familie enthält.

Übung 2.5.27. Man zeige:

1. Gegeben Objekte X, Y einer abelschen Kategorie ist die Sequenz $X \to X \square Y \to Y$ mit Morphismen der Spaltenmatrix $(\mathrm{id}_X, 0)^\top$ und der Zeilenmatrix $(0, \mathrm{id}_Y)$ exakt;

2. Gegeben linksexakte Sequenzen in einer abelschen Kategorie $X \hookrightarrow D \to Y$ und $Y \hookrightarrow D \to X$ derart, daß die Verknüpfung de entsprechenden Pfeile

die Identität auf X beziehungsweise Y ist, gibt es umgekehrt einen Isomorphismus $D \xrightarrow{\sim} X \,\square\, Y$, unter dem beide Sequenzen sich in die Sequenzen von Teil 1 verwandeln;

3. Jeder linksexakte und jeder rechtsexakte Funktor zwischen abelschen Kategorien ist additiv. Hinweis: Nach Übung 2.4.12 bildet er Nullobjekte auf Nullobjekte ab. Nach 2.5.17 reicht es zu zeigen, daß unser Funktor mit endlichen Koprodukten verträglich ist.

Übung 2.5.28. Gegeben $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $T \in \mathcal{A}$ ein Objekt bezeichne $\langle {}_!T \rangle = \langle {}_!T \rangle_\oplus \subset \mathcal{A}$ die kleinste volle Unterkategorie von $\mathcal{A}$, die T enthält und stabil ist unter endlichen Produkten. Wie immer bezeichne $\mathcal{A}(T)$ den Endomorphismenring von T. Man zeige, daß der Funktor $\mathcal{A}(T,\ )$ eine Äquivalenz zwischen $\langle {}_!T \rangle_\oplus$ und $\langle {}_!\mathcal{A}(T) \rangle_\oplus \subset \mathrm{Mod}\text{-}\,\mathcal{A}(T)$ induziert. Im übrigen sind beide Kategorien auch äquivalent zur Matrixkategorie $\mathrm{Mat}(\mathcal{A}(T))$, wie wir sie in [LA2] 4.9.1.7 für einen beliebigen Ring definiert hatten.

Ergänzende Übung 2.5.29. Seien $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $E \in \mathcal{A}$ ein Objekt mit der Eigenschaft, daß jedes Objekt von $\mathcal{A}$ isomorph ist zu einem Summanden einer direkten Summe von endlich vielen Kopien von E. So ist der Funktor der Homomorphismen

$$\mathcal{A}(E,\ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}\text{-}\,\mathcal{A}(E)$$

von $\mathcal{A}$ in die Rechtsmoduln über dem Endomorphismenring von E volltreu und alle $\mathcal{A}(E, M)$ sind projektive $\mathcal{A}(E)$-Rechtsmoduln. Hat unsere additive Kategorie $\mathcal{A}$ darüber hinaus **spaltende Idempotente** oder gleichbedeutend die **Karoubi-Eigenschaft**, ist also jeder idempotente Endomorphismus eines Objekts der Projektor einer Zerlegung in eine direkte Summe, so induziert $\mathcal{A}(E,\ )$ eine Äquivalenz von $\mathcal{A}$ mit der Kategorie der endlich erzeugten projektiven $\mathcal{A}(E)$-Rechtsmoduln.

Übung 2.5.30 (**Additive Funktoren und idempotente Endomorphismen**). Gegeben ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien und ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ mit idempotenten Endomorphismus e ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $F(\ker e) \xrightarrow{\sim} \ker(F(e))$ und ebenso ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $F(\operatorname{im} e) \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}(F(e))$.

Übung 2.5.31 (**Pullback und pushout in abelschen Kategorien**). In einer abelschen Kategorie erhält man einen pullback eines Winkels gegeben durch $f : X \to Y$ und $p : Z \to Y$ als den Kern von $(f, -p) : X \oplus Z \to Y$. Man beschreibe dual auch den pushout eines Kowinkels. Wichtige Eigenschaften werden in [TD] 1.5.9 gezeigt.

Übung 2.5.32. Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Man zeige, daß in der angeordneten Menge $\mathrm{Unt}(X)$ der Unterobjekte von X jede zweielementige Teilmenge $\{U, V\}$ ein Supremum und ein Infimum besitzt, das wir

beschreiben können durch $U + V = \mathrm{im}(i, j) : U \oplus V \to X$ für $i : U \hookrightarrow X$ und $j : V \hookrightarrow X$ sowie $U \cap V = \ker(X \to (X/U \oplus X/V))$.

Übung 2.5.33 (**Modularität von Unterobjektverbänden**). Seien $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt und $U, V \subset X$ Unterobjekte.

1. Man zeige $U \cap V = \ker(V \to X/U)$;

2. Man zeige, daß V und $V + U$ dasselbe Bild in X/U haben. Hinweis: Man zeige, daß das Urbild vom Bild von V in jedem Unterobjekt liegt, das U und V umfaßt;

3. Man zeige, daß für je zwei Unterobjekte $U, V \subset X$ die Komposition $V \hookrightarrow (V + U) \twoheadrightarrow (V + U)/U$ einen Isomorphismus $V/(V \cap U) \xrightarrow{\sim} (V + U)/U$ induziert;

4. Man zeige, daß wir für je zwei Unterobjekte $U, V \subset X$ zueinander inverse Ordnungsisomorphismen

   $$\{A \in \mathrm{Unt}(X) \mid (V \cap U) \subset A \subset V\} \xrightarrow{\sim} \{B \in \mathrm{Unt}(X) \mid U \subset B \subset (V + U)\}$$

   erhalten durch $A \mapsto A + U$ und $B \mapsto B \cap V$.

Nach [LA1] 3.2.2.15 bilden unsere Unterobjekte also einen modularen Verband und mit den dortigen Argumenten folgt unter der Annahme $U \subset V \subset X$ für beliebige Unterobjekte $A \subset X$ die „modulare Identität“ $(V \cap A) + U = (A + U) \cap V$. Mehr dazu diskutieren wir in 6.3.23.

Ergänzende Übung 2.5.34. Man verallgemeinere den Satz von Jordan-Hölder aus [KAG] **??** auf den Fall einer beliebigen abelschen Kategorie.

Übung 2.5.35 (**Gruppenobjekte in additiven Kategorien**). In einer additiven Kategorie $\mathcal{B}$ können wir jedes Objekt M auf genau eine Weise zu einem Monoidobjekt [AAG] 1.2.1 machen. Die zugehörige Verknüpfung wird durch die Zeilenmatrix $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : M \oplus M \to M$ gegeben und ist kommutativ. Bis hierher gilt das in großer Allgemeinheit, genauer in jeder „banalen Schmelzkategorie“, vergleiche [TSK] 4.2.2.5. In unserer Situation wird M sogar ein Gruppenobjekt. A forteriori können wir jedes Objekt M auch auf genau eine Weise zu einem Komonoidobjekt machen. In unserer Situation erhalten wir sogar insgesamt ein Hopfbiabmonoid [TSK] 4.3.4.6 in der banalen Trennschmelzkategorie [TSK] 4.1.5.4 unserer additiven Kategorie.

Übung 2.5.36 (**Mengenfunktoren auf additiven Kategorien**). Hinweis: 2.5.35. Für jeden Funktor $F : \mathcal{B} \to \mathrm{Ens}$ von einer additiven Kategorie in die Kategorie

der Mengen, der mit endlichen Produkten verträglich ist, macht die durch Komposition der Sequenz

$$FM \times FM \xrightarrow{\sim} F(M \oplus M) \to FM$$

mit $F((\mathrm{id}, \mathrm{id}))$ als zweiter Abbildung gegebene Verknüpfung die Menge FM zu einer abelschen Gruppe und F liefert so einen additiven Funktor $F_\oplus : \mathcal{B} \to \mathrm{Ab}$ mit $vF_\oplus = F$ für den Vergißfunktor $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ens}$. Für je zwei additive Funktoren $I, J : \mathcal{B} \to \mathrm{Ab}$ liefert weiter das Nachschalten des Vergißfunktors v eine Bijektion

$$\mathrm{Ab}^{\mathcal{B}}(I, J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}^{\mathcal{B}}(vI, vJ)$$

alias $\mathrm{Cat}(\mathcal{B}, \mathrm{Ab})^{\mathrm{opp}}(J, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^\vee(vJ, vI)$.

2.6 Abelsche Garben als abelsche Kategorie

Satz 2.6.1. *1. Die Kategorie der abelschen Garben auf einem festen topologischen Raum ist eine abelsche Kategorie;*

2. Eine Sequenz von abelschen Garben ist exakt genau dann, wenn sie auf allen Halmen exakte Sequenzen von abelschen Gruppen induziert.

2.6.2. Der étale Raum der Bildgarbe ist mithin genau das mengentheoretische Bild der auf den étalen Räumen induzierten Abbildung. Nach [TF] 2.3.1.14 ist darüberhinaus die Abbildung auf die Bildgarbe étale, also offen und surjektiv und insbesondere auch final.

Beweis. Sicher besitzt unsere Kategorie ein Nullobjekt. Offensichtlich ist der Prägarbenkern eines Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von abelschen Garben schon selbst eine Garbe und sogar ein Kern von f in der Kategorie der abelschen Garben. Mit der Exaktheit des filtrierenden Kolimes folgern wir aus dieser Beschreibung, daß für alle $x \in X$ die Sequenz von Halmen

$$0 \to (\ker f)_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

exakt ist. Der Kokern in der Kategorie der abelschen Prägarben eines Morphismus von abelschen Garben $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist zwar im allgemeinen keine Garbe, aber seine Garbifizierung

$$\mathrm{cok}\, f = (\text{Prägarbenkokern von } f)^+$$

ist ein Kokern von f in der Kategorie der abelschen Garben aufgrund der universellen Eigenschaft der Garbifizierung 2.2.43. Da die Garbifizierung die Halme

nicht ändert, folgt aus der Exaktheit filtrierender Kolimites wieder, daß für alle $x \in X$ die Sequenz von Halmen

$$\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to (\operatorname{cok} f)_x \to 0$$

exakt ist. Wir folgern insbesondere, daß die kanonische Abbildung $\operatorname{im} f \to \operatorname{coim} f$ auf allen Halmen Isomorphismen induziert. Dann ist sie aber nach 2.2.29 schon ein Isomorphismus und der erste Teil des Satzes folgt. Für einen Garbenhomomorphismus wissen wir bereits, daß der Halm des Kerns der Kern der auf den Halmen induzierten Abbildung ist, und desgleichen für den Kokern. Damit folgt, daß eine exakte Sequenz von abelschen Garben auch exakte Sequenzen auf allen Halmen liefert. Ist umgekehrt $\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ exakt auf allen Halmen, so ist die Verknüpfung Null nach 2.2.29 und die damit definierte kanonische Abbildung vom Bild des ersten Morphismus in den Kern des Zweiten ist ein Isomorphismus wieder nach 2.2.29. □

Übungen

Übung 2.6.3. Das Bilden der globalen Schnitte ist ein linksexakter Funktor von der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Übung 2.6.4. Das Bilden des Halms an einem Punkt ist ein exakter Funktor von der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Übung 2.6.5. Die Garbifizierung ist ein exakter Funktor von der Kategorie der abelschen Prägarben in die Kategorie der abelschen Garben.

Übung 2.6.6 (**Der Halm eines Koprodukts ist das Koprodukt der Halme**). In der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum existieren direkte Limites alias filtrierende Kolimites, und der Halm eines direkten Limes ist der direkte Limes der Halme. Insbesondere ist jedes Koprodukt, ja jeder filtrierende Kolimes von exakten Sequenzen abelscher Garben wieder eine exakte Sequenz von abelschen Garben. Hinweis: Man garbifiziere das Prägarben-Koprodukt.

Übung 2.6.7. Auf einem Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind, mag man in der Kategorie der abelschen Garben das Koprodukt 2.6.6 der Wolkenkratzergarben $\mathbb{Z}$ zu allen Punkten betrachten. Diese Garbe hat an jeder Stelle den Halm $\mathbb{Z}$, ist aber dennoch nicht isomorph zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}$.

Übung 2.6.8. Ist G eine topologische Gruppe und X ein G-Raum, so ist die Kategorie $\mathrm{Ab}_{/G\backslash X}$ abelsch und das Vergessen der G-Operation ist ein exakter Funktor $\mathrm{Ab}_{/G\backslash X} \to \mathrm{Ab}_{/X}$. Hinweis: 2.6.2 mag helfen, um die Stetigkeit der G-Operation auf der Bildgarbe nachzuweisen.

2.6.9 (**Nicht-Verträglichkeit des Koprodukts mit globalen Schnitten**). Ist X ein unendlicher diskreter Raum, so ist der Raum der globalen Schnitte der Summe aller Wolkenkratzergarben $\mathbb{Z}_{(x)}$ für $x \in X$ sehr viel größer als das Koprodukt der Räume der globalen Schnitte der Summanden. Das Bilden der globalen Schnitte vertauscht jedoch mit filtrierenden Kolomites auf kompakten Hausdorffräumen und auf noetherschen topologischen Räumen, vergleiche [TSF] **??** und 4.8.23.

Ergänzung 2.6.10 (**Nicht-Exaktheit von Produkten von Garben**). In der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum existieren Produkte, aber der Halm eines Produkts ist nicht notwendig das Produkt der Halme, wie wir bereits in 2.2.55 gesehen haben. Das fürt zu der unangenehmen Erkenntnis, daß ein unendliches Produkt von kurzen exakten Sequenzen von abelschen Garben im allgemeinen keineswegs wieder eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben sein muß.

3 Abstrakte homologische Algebra und Garben

In diesem Abschnitt führen wir die abstrakte Sprache der höheren derivierten Funktoren ein und besprechen parallel dazu als motivierendes Beispiel Garbenkohomologie. Ich habe versucht, diese beiden Handlungsstränge insoweit zu entflechten, daß die Abschnitte ohne das Wort „Garbe“ in der Überschrift auch unabhängig gelesen und verstanden werden können.

3.1 Die lange exakte Kohomologiesequenz

Definition 3.1.1. Gegeben ein Komplex $\ldots \to A^{q-1} \xrightarrow{d^{q-1}} A^q \xrightarrow{d^q} A^{q+1} \to \ldots$ in einer präabelschen Kategorie erklären wir seine q**-te Kohomologie** als

$$\mathcal{H}^q A := \operatorname{cok}(A^{q-1} \to \ker d^q)$$

Satz 3.1.2 (**Lange exakte Kohomologiesequenz**). *Sei $A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in einer präabelschen Kategorie. So gilt:*

1. *Es gibt für jedes q genau einen Morphismus $\mathcal{H}^q C \to \mathcal{H}^{q+1} A$, der mit den kanonischen Morphismen von $\ker(d_C \circ g) = \ker(g \circ d_B)$ nach $\mathcal{H}^q C$ beziehungsweise $\mathcal{H}^{q+1} A$ verträglich ist;*

2. *Mit diesen Morphismen erhalten wir eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to \mathcal{H}^{q-1} C \to \mathcal{H}^q A \to \mathcal{H}^q B \to \mathcal{H}^q C \to \mathcal{H}^{q+1} A \to \ldots$$

Ergänzung 3.1.3. Ich kenne den hier gegebenen Beweis aus [Ive87]. Er braucht einige Vorbereitungen und wird erst am Ende dieses Abschnitts gegeben. Alle Anwendungen, die mir in den Sinn kommen, betreffen Kategorien von Moduln über Ringen oder von abelschen Garben. In diesen Fällen kann man Teile des Arguments vereinfachen, indem man sich auf den bereits in [TS] 3.2.2.2 behandelten Fall der Kategorie aller abelschen Gruppen stützt, im Fall von Garben durch Betrachtung der Halme.

Lemma 3.1.4. *Sei in einer präabelschen Kategorie ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

gegeben. So gilt:

1. *Die induzierte Kernsequenz $0 \to \ker a \to \ker b \to \ker c$ ist exakt;*

2. *Ist c ein Monomorphismus, so ist auch* $0 \to \operatorname{cok} a \to \operatorname{cok} b$ *exakt.*

Beweis. Teil 1 bleibe dem Leser überlassen, wir zeigen nur Teil 2. Ist c ein Monomorphismus, so folgt aus Teil 1 die Exaktheit der oberen Zeile im kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker a & \to & \ker b & \to & 0 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \to & \operatorname{cok} f & \to & 0 \end{array}$$

Die duale Aussage zu Teil 1 liefert dann die Exaktheit in der Mitte der oberen Zeile im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \operatorname{im} a & \to & \operatorname{im} b & \to & \operatorname{cok} f & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & & \end{array}$$

Die Exaktheit vorne der oberen Zeile erkennt man aus dem Diagramm. Die rechte Vertikale ist ein Monomorphismus nach unserer Annahme und wir haben uns so auf den Fall zurückgezogen, daß a, b und c alle drei Monomorphismen sind. Unter dieser Voraussetzung sieht man jedoch explizit, daß a ein Kern ist für $A' \to \operatorname{cok} b$ und daraus folgt, daß $A' \twoheadrightarrow \operatorname{cok} a \hookrightarrow \operatorname{cok} b$ die kanonische Faktorisierung in einen Epimorphismus und einen Monomorphismus sein muß. $\square$

Lemma 3.1.5 (Schlangenlemma). *Sei in einer präabelschen Kategorie ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & & \end{array}$$

gegeben. Wir kürzen $\ker(B \to C') = K$ *und* $\operatorname{cok}(A \to B') = K'$ *ab und behaupten: Es gibt genau einen Morphismus* $\ker c \to \operatorname{cok} a$ *derart, daß*

$$\begin{array}{ccccc} \ker c & \leftarrow & K & \to & B \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \operatorname{cok} a & \to & K' & \leftarrow & B' \end{array}$$

kommutiert, und mit diesem Morphismus erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\ker a \to \ker b \to \ker c \to \operatorname{cok} a \to \operatorname{cok} b \to \operatorname{cok} c$$

Beweis. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker g & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & 0 & \to & C' & = & C' & \to & 0 \end{array}$$

liefert mit dem vorhergehenden Lemma und seinem Dualen die Exaktheit der obersten Zeile in der nun folgenden Erweiterung unseres Diagramms. Die Exaktheit der untersten Zeile erhält man dual, wir haben also ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A & \to & K & \to & \ker c & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \operatorname{cok} a & \to & K' & \to & C' & & \end{array}$$

Diesem Diagramm sieht man die Existenz und Eindeutigkeit unseres Morphismus $\ker c \to \operatorname{cok} a$ nun unschwer an. Die Exaktheit unserer Sequenz bei $\ker b$ erhält man durch Anwenden von Lemma 3.1.4 auf die Diagramme mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker f & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \operatorname{im} f & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \ker f' & \hookrightarrow & A' & \twoheadrightarrow & \operatorname{im} f' & \to & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \operatorname{im} f & \hookrightarrow & B & \to & C \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \operatorname{im} f' & \hookrightarrow & B' & \to & C \end{array}$$

Um die Exaktheit bei $\ker c$ zu zeigen reicht es, die Exaktheit von

$$\ker b \to \ker c \to K'$$

nachzuweisen. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & K & \to & \ker c & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \to & B' & \to & K' & \to & 0 \end{array}$$

und wenden ein letztes Mal Lemma 3.1.4 an. Da gilt $\ker(K \to B') = \ker b$ folgt $\ker b \twoheadrightarrow \ker(\ker c \to K')$ und wir haben die Exaktheit bei $\ker c$ nachgewiesen. Der Rest des Lemmas folgt mit Dualität. □

Herleitung der langen exakten Homologiesequenz. Wir verwenden das Ergebnis der anschließenden Übung 3.1.6 und wenden das Schlangenlemma an auf das Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} & & \operatorname{cok} d_A^{q-1} & \to & \operatorname{cok} d_B^{d-1} & \to & \operatorname{cok} d_C^{q-1} \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \ker d_A^{q+1} & \to & \ker d_B^{q+1} & \to & \ker d_C^{q+1} \end{array}$$

□

Übungen

Übung 3.1.6. Gegeben ein Komplex $\ldots \to A^{q-1} \overset{d^{q-1}}{\to} A^q \overset{d^q}{\to} A^{q+1} \to \ldots$ in einer präabelschen Kategorie setzen wir $\bar{\mathcal{H}}^q A = \ker(\operatorname{cok} d^{q-1} \to A^{q+1})$. Man zeige, daß sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^q A & & & & \bar{\mathcal{H}}^q A \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \ker d^q & \hookrightarrow & A^q & \twoheadrightarrow & \operatorname{cok} d^{q-1} \end{array}$$

auf genau eine Weise durch einen Morphismus in der oberen Horizontalen kommutativ ergänzen läßt, und daß dieser notwendig ein Isomorphismus ist.

Übung 3.1.7. Man zeige in einer beliebigen präabelschen Kategorie das Fünferlemma.

Übung 3.1.8 (**Charakterisierung abelscher Kategorien**). Man zeige: Existiert in einer präabelschen Kategorie für Objekte X, Y das Koprodukt $X \sqcup Y$, so ist $X \to X \sqcup Y \to Y$ mit $(0, \mathrm{id}_Y)$ als zweitem Pfeil eine kurze exakte Sequenz. Existiert das Produkt, so ist analog $X \to X \sqcap Y \to Y$ eine kurze exakte Sequenz. Existieren Produkt und Koprodukt, so ist der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus $X \sqcup Y \xrightarrow{\sim} X \sqcap Y$. Existieren alle endlichen Produkte und Koprodukte, so ist unsere Kategorie mithin nach 2.5.8 in eindeutiger Weise angereichert in abelschen Monoiden, besitzt also genau eine Abmon-Struktur. Schließlich zeige man, daß Endomorphismen von $X \sqcap X$ gegeben durch unipotente obere Dreiecksmatrizen invertierbar sind und folgere, daß diese Abmon-Struktur sogar eine Ab-Struktur sein muß.

Übung 3.1.9. Gegeben eine präabelsche Kategorie ist jeder Limes und jeder Kolimes von Kopien des Nullobjekts Null. Des weiteren können Limites und Kolimites von Komplexen gradweise berechnet werden. Dasselbe gilt im Fall einer abelschen Kategorie für ihre Homotopiekategorie.

3.2 Derivierte Funktoren

Definition 3.2.1.

1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $I \in \mathcal{A}$ heißt **injektiv**, wenn der Funktor $\mathcal{A}(\ ,I) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ der Homomorphismen in unser Objekt exakt ist;

2. Eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ **hat genug Injektive**, wenn es für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ einen Monomorphismus $A \hookrightarrow I$ in ein injektives Objekt $I \in \mathcal{A}$ gibt;

3. Eine **Auflösung** oder genauer **Rechtsauflösung** eines Objekts A einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist eine exakte Sequenz $A \hookrightarrow C^0 \to C^1 \to \ldots$ in $\mathcal{A}$;

4. Eine **Auflösung durch Injektive** oder **injektive Auflösung** eines Objekts A einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist eine Auflösung durch injektive Objekte, als da heißt eine Auflösung $A \hookrightarrow I^0 \to I^1 \to \ldots$ mit $I^0, I^1, \ldots$ injektiv.

3.2.2. Wir kürzen eine Auflösung mit $A \hookrightarrow C^{\triangleleft}$ ab. Die additive Kategorie aller injektiven Objekte einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ notieren wir im folgenden $i\mathcal{A}$. Gibt es in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so besitzt jedes Objekt von $\mathcal{A}$ eine injektive Auflösung.

3.2.3. Ein Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist injektiv genau dann, wenn jeder von besagtem Objekt ausgehende Monomorphismus spaltet. In der Tat, ist $I \hookrightarrow M$ ein Monomorphismus und I injektiv, so ist das Vorschalten eine Surjektion $\mathcal{A}(M, I) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(I, I)$, unter der die Identität auf I eben ein Urbild hat. Der Nachweis der anderen Implikation bleibe dem Leser überlassen.

Beispiel 3.2.4. Die Kategorie der abelschen Gruppen besitzt genug Injektive nach [TS] 3.6.6.5.

3.2.5. Gegeben eine Kategorie mit additiver Struktur $\mathcal{A}$ erklären wir die zugehörige Kategorie $\mathrm{Ket}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ der Komplexe von Objekten von $\mathcal{A}$ analog zur Kategorie der Komplexe von abelschen Gruppen in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Weiter erklären wir die zugehörige **Homotopiekategorie**

$$\mathrm{Hot}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$$

analog zur Homotopiekategorie der abelschen Gruppen aus [TS] 3.1.4.8 in der hoffentlich offensichtlichen Weise.

Satz 3.2.6 (**Hauptlemma der homologischen Algebra**). *Seien in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ein Komplex C mit $\mathcal{H}^q C = 0$ für $q > 0$ und ein Komplex I injektiver Objekte mit $I^q = 0$ für $q < 0$ gegeben. So induziert das Bilden der nullten Kohomologie eine Bijektion*

$$\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(C, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\mathcal{H}^0 C, \mathcal{H}^0 I)$$

Beweis. In der opponierten Kategorie zur Kategorie Mod_R der Moduln über einem Ring R hatten wir das bereits in [TS] 3.5.6.14 gezeigt. Der Beweis im Allgemeinen ist mutatis mutandis derselbe. □

3.2.7 (**Existenz und Eindeutigkeit von Homotopielifts**). Gegeben ein Morphismus $f : A \to B$ in einer abelschen Kategorie sowie Auflösungen $A \hookrightarrow C^{\triangleleft}$ und $B \hookrightarrow D^{\triangleleft}$ verstehen wir unter einem **Lift von** f einen Morphismus von Komplexen $\tilde{f} : C^{\triangleleft} \to D^{\triangleleft}$, der in der offensichtlichen Weise mit f verträglich ist. Mit $\tilde{f}$ ist sicher auch jeder dazu homotope Morphismus ein Lift von f. Eine Homotopieklasse von Lifts nennen wir einen **Homotopielift**. Das Hauptlemma der

homologischen Algebra 3.2.6 sagt insbesondere, daß für eine beliebige Auflösung $A \hookrightarrow C^{\lhd}$ und eine injektive Auflösung $B \hookrightarrow I^{\lhd}$ jeder Morphismus $f : A \to B$ genau einen Homotopielift $[\tilde{f}] : C^{\lhd} \to I^{\lhd}$ besitzt.

Definition 3.2.8. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Injektiven und ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in eine weitere abelsche Kategorie definiert man für jedes $q \in \mathbb{Z}$ einen **q-ten rechtsderivierten Funktor von** F als ein Paar $(\mathrm{R}^q F, \tau)$ bestehend aus einem Funktor

$$\mathrm{R}^q F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

und Morphismen $\tau = \tau_{A \hookrightarrow C^{\lhd}} = \tau_{F, A \hookrightarrow C^{\lhd}} : \mathcal{H}^q(FC^{\lhd}) \to (\mathrm{R}^q F)(A)$ für jede Auflösung $A \hookrightarrow C^{\lhd}$ eines beliebigen Objekts $A \in \mathcal{A}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Der Morphismus τ ist für jede injektive Auflösung $A \hookrightarrow I^{\lhd}$ ein Isomorphismus $\tau_{A \hookrightarrow I^{\lhd}} : \mathcal{H}^q(FI^{\lhd}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^q F)(A)$;

2. Für jeden Morphismus $f : A \to B$ und je zwei Auflösungen $A \hookrightarrow C^{\lhd}$ und $B \hookrightarrow D^{\lhd}$ und jeden Lift $\tilde{f} : C^{\lhd} \to D^{\lhd}$ von f kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q(FC^{\lhd}) & \to & (\mathrm{R}^q F)(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q(FD^{\lhd}) & \to & (\mathrm{R}^q F)(B) \end{array}$$

   mit $\tau_{A \hookrightarrow C^{\lhd}}$ und $\tau_{B \hookrightarrow D^{\lhd}}$ in den Horizontalen.

Aus der Eindeutigkeit der Homotopielifts nach 3.2.7 folgt, daß derartige Paare $(\mathrm{R}^q F, \tau)$ existieren. Daß sie eindeutig sind bis auf eindeutigen Isomorphismus, ist dann eh klar. Damit dürfen und werden wir von nun an mit einem bestimmten Artikel von **dem q-ten rechtsderivierten Funktor von** F reden. Das Datum τ unterschlagen wir meist in der Notation und nennen es, wenn wir darauf Bezug nehmen wollen, den **kanonischen Morphismus**.

Vorschau 3.2.9. In [TD] 3.2 werden wir unsere Definition derivierter Funktoren noch wesentlich verallgemeinern. Der Bezug zur hier gegebenen Definition wird dann in [TD] 3.2.25 hergestellt.

3.2.10 (**Erste Eigenschaften der Rechtsderivierten**). Offensichtlich sind unsere derivierten Funktoren auch selbst wieder additiv. Für $q < 0$ haben wir per definitionem $\mathrm{R}^q F = 0$. Ist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von abelschen Kategorien und besitzt $\mathcal{A}$ genug Injektive, so gibt es genau eine in der offensichtlichen Weise mit τ verträgliche Transformation $F \Rightarrow \mathrm{R}^0 F$. Ist F linksexakt, so ist sie eine Isotransformation

$$F \xRightarrow{\sim} \mathrm{R}^0 F$$

Wir behandeln sie in Notation und Sprache meist als eine Gleichheit $F = \mathrm{R}^0 F$. Ist F sogar exakt, so gilt $\mathrm{R}^q F = 0$ für $q > 0$.

Beispiel 3.2.11 (**Erweiterungen abelscher Gruppen als Rechtsderivierte**). Die Kategorie der abelschen Gruppen hat genügend Injektive nach [TS] 3.6.6.5. Gegeben eine feste abelsche Gruppe M betrachten wir den linksexakten Funktor $F := \mathrm{Hom}(M, \ ) : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Sei N eine weitere abelsche Gruppe. Um $\mathrm{R}^q F(N)$ zu bestimmen, können wir nach [TS] 3.6.6.5 eine injektive Auflösung der Gestalt $N \hookrightarrow I^0 \twoheadrightarrow I^1$ wählen. Dann hat die lange exakte Ext-Sequenz im zweiten Eintrag [TS] 3.6.5.5 die Gestalt

$$\mathrm{Hom}(M, N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M, I^0) \to \mathrm{Hom}(M, I^1) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(M, N)$$

und wir folgern kanonische Isomorphismen

$$\mathrm{R}^q F(N) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \begin{cases} \mathrm{Hom}(M, N) & q = 0; \\ \mathrm{Ext}(M, N) & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 3.2.12 (**Injektive Moduln, Existenz**). *Die Kategorie aller Moduln über einem gegebenen Ring besitzt genug injektive Objekte.*

Ergänzung 3.2.13. Der Beweis zeigt mit [TS] 3.6.6.6 genauer, daß jeder A-Modul M in einen injektiven A-Moduln der Kardinalität $\leq \operatorname{card} \mathrm{Ens}(A, M \sqcup \mathbb{N})$ eingebettet werden kann.

Beweis. Sei A unser Ring. Der Vergißfunktor $\mathrm{res}_A^{\mathbb{Z}} : A\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ besitzt zum Beispiel nach [KAG] 2.6.17 einen Rechtsadjungierten, unseren Induktionsfunktor $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}}^A : N \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, N)$. Wollen wir nun einen A-Modul M in einen injektiven A-Modul einbetten, so beginnen wir mit einer Einbettung $\mathrm{res}_A^{\mathbb{Z}} M \hookrightarrow I$ von M in eine injektive abelsche Gruppe, die es nach [TS] 3.6.6.5 geben muß, und bilden dann die Verknüpfung

$$M \to \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}}^A \mathrm{res}_A^{\mathbb{Z}} M \to \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}}^A I$$

Hier ist das rechte Ende offensichtlich ein injektiver A-Modul und der rechte Pfeil eine Injektion. Der linke Pfeil ist aber auch eine Injektion, entweder nach 2.3.11 oder explizit als die Einbettung $\mathrm{Hom}_A(A, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$. $\square$

Beispiel 3.2.14 (**Erweiterungen von Moduln als Rechtsderivierte**). Die Kategorie der Moduln über einem vorgegebenen Ring A hat genügend Injektive nach 3.2.12. Gegeben ein fester A-Modul M betrachte man den linksexakten Funktor $F := \mathrm{Hom}_A(M, \ ) : A\text{-Mod} \to \mathrm{Ab}$. Ist N ein weiterer A-Modul, so erklärt man

die abelschen Gruppen $\mathrm{Ext}^q_A(M,N)$ als die Werte der zugehörigen derivierten Funktoren, in Formeln

$$\mathrm{Ext}^q_A(M,N) := (\mathrm{R}^q F)(N)$$

Diese Gruppen heißen auch die **höheren Erweiterungen** unserer beiden Moduln.

3.2.15 (**Derivieren von Transformationen**). Seien $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additive Funktoren von abelschen Kategorien und es besitze $\mathcal{A}$ genug Injektive. Jede Transformation $\eta : F \Rightarrow G$ induziert offensichtlich für jedes q genau eine Transformation $\mathrm{R}^q\eta : \mathrm{R}^q F \Rightarrow \mathrm{R}^q G$ derart, daß für jede Auflösung $A \hookrightarrow C^\triangleleft$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q(FC^\triangleleft) & \to & (\mathrm{R}^q F)(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q(GC^\triangleleft) & \to & (\mathrm{R}^q G)(A) \end{array}$$

kommutiert mit $\tau_{F,A\hookrightarrow C^\triangleleft}$ und $\tau_{G,A\hookrightarrow C^\triangleleft}$ in den Horizontalen, und wir haben die Funktorialität $\mathrm{R}^q(\eta \circ \kappa) = (\mathrm{R}^q\eta) \circ (\mathrm{R}^q\kappa)$ und $\mathrm{R}^q(\mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_{\mathrm{R}^q F}$.

Beispiel 3.2.16 (**Erweiterungen als Bifunktor**). Gegeben ein Ring R liefert jeder Homomorphismus von R-Moduln $f : L \to M$ eine Transformation $(\circ f)$ oder ausführlicher $(\circ f)^\tau : \mathrm{Hom}_R(M,\ ) \to \mathrm{Hom}_R(L,\ )$ und so eine Transformation der derivierten Funktoren $\mathrm{R}^q(\circ f)^\tau : \mathrm{Ext}^q_R(M,\ ) \to \mathrm{Ext}^q_R(L,\ )$ und so Abbildungen

$$\mathrm{R}^q(\circ f)^\tau_N = (\circ f)^\tau : \mathrm{Ext}^q_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^q_R(L,N)$$

Andererseits induziert jeder R-Modulhomomorphismus $g : N \to K$ vermittels der Funktorialität einen Homomorphismus

$$(g\circ) : \mathrm{Ext}^q_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^q_R(M,K)$$

und weil das mit Transformationen immer so ist, vertauschen hier $(\circ f)^\tau$ und $(g\circ)$. So werden unsere Erweiterungen zu Funktoren

$$\mathrm{Ext}^q : \mathrm{Mod}_R^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Ab}$$

Vorschau 3.2.17. In [TD] 2.6.11 besprechen wir das Yoneda-Produkt von Erweiterungen

$$\mathrm{Ext}^p_R(L,M) \times \mathrm{Ext}^q_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^{p+q}_R(L,N)$$

und es wird klar sein, daß es im Fall $p = 0$ beziehungsweise $q = 0$ zum Vorschalten beziehungsweise Nachschalten eines Homomorphismus aus 3.2.16 spezialisiert.

Beispiel 3.2.18 (**Erweiterungen und Zentrum**). Gegeben ein Ring R und ein Element $z \in \mathrm{Z}(R)$ des Zentrums von R und R-Moduln M, N behaupten wir

$$(\circ(z\cdot)) = ((z\cdot)\circ) : \mathrm{Ext}^q_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^q_R(M,N)$$

Man erkennt das leicht an der Beschreibung durch injektive Auflösungen. Etwas formaler induziert die Selbsttransformation $(z\cdot) : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Id}$ des Identitätsfunktors auf der Modulkategorie für $F := \mathrm{Hom}_R(M,\ )$ wegen $F = F \circ \mathrm{Id}$ eine Transformation $F \Rightarrow F$, die quasi per definitionem $((z\cdot)\circ)$ liefert. Andererseits stimmt sie überein mit der Transformation $(\circ(z\cdot)) : F \Rightarrow F$, die per definitionem $(\circ(z\cdot))$ liefert. Das zeigt die behauptete Identität. Vom höheren Standpunkt besprechen wir sie in [TD] 2.6.12.

3.2.19. Wir erhalten weitere Beispiele durch Übergang zu den opponierten abelschen Kategorien. In diesem Zusammenhang sind eigenständige Sprechweisen üblich, die wir im folgenden erläutern.

Definition 3.2.20.

1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $P \in \mathcal{A}$ heißt **projektiv**, wenn der Funktor der Homomorphismen von unserem Objekt $\mathcal{A}(P,\ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ exakt ist;

2. Eine abelsche Kategorie **hat genug Projektive**, wenn es für jedes Objekt A einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow A$ gibt mit P projektiv;

3. Eine **Linksauflösung** eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ ist ein exakter Komplex $\ldots \to C^{-1} \to C^0 \twoheadrightarrow A$ in $\mathcal{A}$;

4. Eine **Auflösung durch Projektive** oder **projektive Auflösung** eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ ist eine Linksauflösung $P^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$ mit $P^0, P^{-1}, \ldots$ projektiv.

3.2.21. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Projektiven und ein additiver Funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in eine weitere abelsche Kategorie erklären wir analog zu 3.2.8 einen **Linksderivierten**

$$\mathrm{L}_q G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

als ein Paar $(\mathrm{L}_q G, \tau)$ bestehend aus einem Funktor $\mathrm{L}_q G$ wie oben und kanonischen Morphismen $\tau : (\mathrm{L}_q G)(A) \to \mathcal{H}^{-q}(GC^{\triangleright})$ für jede Linksauflösung $C^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$, die mit Morphismen von Auflösungen verträglich und für jede projektive Linksauflösung $P^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$ Isomorphismen $\tau : (\mathrm{L}_q G)(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q}(GP^{\triangleright})$ sind. Per definitionem gilt $\mathrm{L}_q G = 0$ für $q < 0$ und es gibt genau eine mit τ verträgliche Transformation $\mathrm{L}_0 G \Rightarrow G$, die im Fall eines rechtsexakten Funktors G eine Isotransformation ist. Diese Isotransformation behandeln wir sprachlich und in der Notation meist als eine Gleichheit $\mathrm{L}_0 G = G$.

Beispiel 3.2.22 (**Erweiterungen abelscher Gruppen als Linksderivierte**). Gegeben eine feste abelsche Gruppe N betrachten wir insbesondere den rechtsexakten Funktor $G := \mathrm{Hom}(\ ,N) : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Um $(\mathrm{L}_q G)(M)$ zu bestimmen, können wir nach [TS] 3.5.5.11 eine projektive Auflösung von M der Gestalt $0 \to P^{-1} \to P^0 \twoheadrightarrow M$ wählen. Dann hat die lange exakte Ext-Sequenz im ersten Eintrag die Gestalt

$$\mathrm{Hom}(M,N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(P^0,N) \to \mathrm{Hom}(P^{-1},N) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(M,N)$$

und wir erhalten kanonische Isomorphismen

$$(\mathrm{L}_q G)(M) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathrm{Hom}(M,N) & q=0; \\ \mathrm{Ext}(M,N) & q=1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Vergleich mit 3.2.11 zeigt insbesondere, daß wir unsere Ext sogar auf zweierlei Weise als derivierte Funktoren erhalten können.

Beispiel 3.2.23 (**Erweiterungen von Moduln als Linksderivierte**). Die Kategorie der Moduln über einem vorgegebenen Ring A besitzt genügend Projektive. Gegeben ein fester A-Modul N betrachte man den rechtsexakten Funktor $G := \mathrm{Hom}_A(\ ,N) : A\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Ist M ein weiterer A-Modul, so erklären wir die abelschen Gruppen $\mathrm{lExt}_q^A(M,N)$ als die Werte der zugehörigen derivierten Funktoren, in Formeln

$$\mathrm{lExt}_q^A(M,N) := (\mathrm{L}_q G)(M)$$

Wir machen sie ebenso wie in 3.2.16 zu Bifunktoren. In [TD] 2.3.10 werden wir Isotransformationen $\mathrm{lExt}_q \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Ext}^q$ zwischen den besagten Bifunktoren konstruieren und dann die Notation lExt wieder aufgeben.

Beispiel 3.2.24 (**Erweiterungen in abelschen Kategorien**). Dieselbe Definition wie bei Moduln vereinbaren wir für eine beliebige abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Injektiven und setzen

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^q(M,N) := (\mathrm{R}^q F)(N)$$

für Objekte $M,N \in \mathcal{A}$ und $F := \mathcal{A}(M,\ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$. Dieselbe Definition wie bei Moduln vereinbaren wir auch für eine beliebige abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Projektiven und setzen

$$\mathrm{lExt}_q^{\mathcal{A}}(M,N) := (\mathrm{L}_q G)(M)$$

für Objekte $M,N \in \mathcal{A}$ und $G := \mathcal{A}(\ ,N) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. In [TD] 2.6.11 erklären wir eine gemeinsame Verallgemeinerung dieser beiden Konstruktionen im Fall beliebiger abelscher Kategorien und geben die Notation lExt wieder auf.

Beispiel 3.2.25 (**Tor von abelschen Gruppen als Linksderivierter**). Für eine feste abelsche Gruppe M betrachten wir den rechtsexakten Funktor $G := M \otimes_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Aus der Definition des Torsionsprodukts erhalten wir sofort kanonische Isomorphismen

$$(\mathrm{L}_q G)(N) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} M \otimes_{\mathbb{Z}} N & q = 0; \\ M * N & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 3.2.26 (**Tor von Moduln als Linksderivierter**). Die Kategorie der Moduln über einem vorgegebenen Ring A hat genügend Projektive. Gegeben ein fester A-Rechtsmodul M betrachten wir den rechtsexakten Funktor $F := M \otimes_A : A\text{-Mod} \to \mathrm{Ab}$. Ist N ein weiterer A-Modul, so erklärt man die abelschen Gruppen $\mathrm{Tor}_q^A(M, N)$ als Werte der zugehörigen linksderivierten Funktoren, in Formeln

$$\mathrm{Tor}_q^A(M, N) := (\mathrm{L}_q F)(N)$$

Diese Gruppen heißen die **höheren Torsionsgruppen** unserer beiden Moduln. In 4.6.13 zeigen wir, daß es nicht darauf ankommt, welchen Faktor wir hier auflösen, konstruieren also in Formeln ausgedrückt kanonische Isomorphismen

$$(\mathrm{L}_q(M \otimes_A))(N) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{L}_q(\otimes_A N))(M)$$

Übungen

Übung 3.2.27. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von abelschen Kategorien und es besitze $\mathcal{A}$ genug Injektive. Man zeige, daß für injektives $I \in \mathcal{A}$ gilt $(\mathrm{R}^q F)(I) = 0$ falls $q > 0$.

Übung 3.2.28 (**Injektivitätskriterium über Ideale**). Ein Linksmodul I über einem Ring A ist genau dann injektiv, wenn sich für jedes Linksideal $\mathfrak{a} \subset A$ jeder Modulhomomorphismus $\mathfrak{a} \to I$ zu einem Modulhomomorphismus $A \to I$ ausdehnen läßt. Hinweis: Man kopiere den Beweis von [TS] 3.6.6.5, wo das im Fall $A = \mathbb{Z}$ gezeigt wird.

Ergänzende Übung 3.2.29. Ist ein Modul I über einem Ring A die Vereinigung über eine Menge von injektiven Untermoduln, auf der die Inklusion eine Anordnung ist und deren Kardinalität echt größer ist als die Kardinalität des Rings A, so ist auch der ganze Modul I injektiv.

Übung 3.2.30. Ein beliebiges Produkt injektiver Objekte in einer abelschen Kategorie ist wieder injektiv. Ein beliebiges Koprodukt projektiver Objekte in einer abelschen Kategorie ist wieder projektiv.

Übung 3.2.31. Gegeben ein Körper K betrachte man den Polynomring $K[X]$ und die kurze exakte Sequenz von $K[X]$-Moduln

$$K[X] \hookrightarrow K[X] \twoheadrightarrow K$$

mit der Multiplikation mit X als erster Abbildung und dem Auswerten bei $X = 0$ als zweiter Abbildung. Man mag sie als Homotopieäquivalenz von Komplexen von K-Vektorräumen des Zwei-Term-Komplexes $K[X] \hookrightarrow K[X]$ mit dem Ein-Term-Komplex $K[0]$ lesen. Nimmt man nun Variablen $X_1, \ldots, X_n$ und tensoriert die entsprechenden Zweitermkomplexe über K, so ergibt sich eine freie Auflösung des $K[X_1, \ldots, X_n]$-Moduls K mit der durch das Auswerten aller Variablen bei Null gegebenen Modulstruktur. Das ist ein besonders einfacher Fall des sogenannten **Koszul-Komplexes**. Man folgere

$$\begin{aligned} \dim_K \operatorname{Ext}^i_{K[X_1,\ldots,X_n]}(K, K) &= \tbinom{n}{i} \\ \dim_K \operatorname{Ext}^i_{K[X_1,\ldots,X_n]}(K, K[X_1, \ldots, X_n]) &= 1 \qquad \text{falls } i = n \text{ und } 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Analoges zeigt man analog für einen beliebigen Kring K, nur daß man statt der Dimension d der fraglichen Erweiterungsräume die Existenz eines Isomorphismus mit dem freien K-Modul K^d erhält.

Übung 3.2.32 (**Koszulkomplex koordinatenfrei**). Eine koordinatenfreie Version des Koszulkomplexes erhält man, indem man für einen K-Vektorraum V den Komplex

$$\ldots \to \mathrm{S}V \otimes \bigwedge^2 V \to \mathrm{S}V \otimes V \to \mathrm{S}V \twoheadrightarrow K$$

betrachtet mit dem Differential

$$u \otimes (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \;\mapsto\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u v_i \otimes (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n)$$

und an der letzten Stelle die Augmentation $\mathrm{S}V \twoheadrightarrow K$ mit $v \mapsto 0$ für alle $v \in V$. Das funktioniert sogar für unendlichdimensionale Vektorräume. Man mag die Exaktheit zeigen, indem man den Komplex mit dem Kolimes der Komplexe zu endlichdimensionalen Teilräumen identifiziert und sich so auf die vorhergehende Übung 3.2.31 zurückzieht. Unser Komplex liefert uns Isomorphismen

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathrm{S}V}(K, K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Alt}^i V$$

Daß unter diesen Isomorphismen das „Yoneda-Produkt“ von Erweiterungen dem „Shuffle-Dachprodukt“ von alternierenden Formen entspricht, dürfen Sie später einmal als Übung [TD] 2.6.31 nachvollziehen.

Übung 3.2.33 (**Augmentierte derivierte Funktoren**). Sei $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von abelschen Kategorien und es habe $\mathcal{A}$ genug Projektive. Unter einer G**-Augmentation** eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ verstehen wir ein Paar (B, ε) mit $B \in \mathcal{B}$ und $\varepsilon : GA \to B$. Die G-augmentierten Objekte von $\mathcal{A}$ bilden in offensichtlicher Weise eine Kategorie $\mathcal{A}^G$. Wir erklären einen **augmentierten Linksderivierten**

$$\mathrm{L}_q G : \mathcal{A}^G \to \mathcal{B}$$

als ein Paar $(\mathrm{L}_q G, \tau)$ bestehend aus einem Funktor $\mathrm{L}_q G$ wie oben und kanonischen Morphismen $\tau : (\mathrm{L}_q G)(A, \varepsilon, B) \to \mathcal{H}^{-q}(GC^{\triangleright} \to B)$ für jede Linksauflösung $C^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$, die mit Morphismen von Auflösungen verträglich und für jede projektive Linksauflösung $P^{\triangleright} \twoheadrightarrow A$ Isomorphismen liefert. Man zeige, daß es so einen augmentierten Linksderivierten stets gibt und daß er eindeutig bestimmt ist bis auf eindeutigen Isomorphismus. Die Konstruktion liefert eine kurze exakte Sequenz $B[1] \hookrightarrow (GC^{\triangleright} \to B) \twoheadrightarrow GC^{\triangleright}$ von Komplexen und als Ausschnitte von deren langer exakter Homologiesequenz eine exakte Sequenz

$$(\mathrm{L}_0 G)(A, \varepsilon, B) \hookrightarrow (\mathrm{L}_0 G)(A) \to B \twoheadrightarrow (\mathrm{L}_{-1} G)(A, \varepsilon, B)$$

und Isomorphismen $(\mathrm{L}_q G)(A, \varepsilon, B) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{L}_q G)(A)$ für $q > 0$. Dual erklären wir **Koaugmentationen** und koaugmentierte Rechtsderivierte.

Übung 3.2.34 (**Injektive Moduln über Ringalgebren**). Ist k ein Körper und A eine k-Ringalgebra, so ist $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$ mit der von der Rechtsoperation auf A herrührenden Struktur als A-Linksmodul ein injektiver A-Linksmodul und jeder A-Modul läßt sich einbetten in ein Produkt von Kopien von A^*. Hinweis: [KAG] 2.8.5.

Übung 3.2.35 (**Limites und Kolimites von Komplexen**). Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit additiver Struktur und $(C_i)_{i \in I}$ ein System von Komplexen (C_i^q, d) aus $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$. Existiert für jedes q der Limes $\lim_{i \in I} C_i^q$ in $\mathcal{A}$, so ist der aus diesen Limites gebildete Komplex der Limies der C_i. Analoges gilt für Kolimites, entweder mit einem analogen Beweis oder formal durch Übergang zur opponierten Kategorie.

Übung 3.2.36 (**Produkte und Koprodukte in Homotopiekategorien**). Seien $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit additiver Struktur und $(C_i)_{i \in I}$ eine Familie von Komplexen (C_i^q, d) aus $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$. Existiert für jedes q das Produkt $\prod_{i \in I} C_i^q$ in $\mathcal{A}$, so ist der aus diesen Produkten gebildete Komplex nicht nur in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$, sondern auch in $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ das Produkt der C_i. Analoges gilt für Koprodukte, entweder mit einem analogen Beweis oder formal durch Übergang zur opponierten Kategorie. Für Limites und Kolimites sind mir die analogen Aussagen nicht klar. Das Problem liegt darin, daß zwar das Bilden von Produkten abelscher Gruppen exakt ist, das Bilden von Limites abelscher Gruppen jedoch im allgemeinen nicht mehr.

Übung 3.2.37. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von abelschen Kategorien. Man konstruiere für jeden Komplex A^* in $\mathcal{A}$ natürliche Morphismen $\mathcal{H}^n F A^* \to F\mathcal{H}^n A^*$.

Übung 3.2.38. Gegeben Ringe A, B, C und ein A-B-Bimodul M sowie ein A-C-Bimoduln N liefert die Funktorialität von Erweiterungen auf $\mathrm{Ext}^i_A(M, N)$ eine natürliche Struktur als B-C-Bimodul.

Übung 3.2.39. Gegeben $A \supset J$ ein Ring mit einem zweiseitigen Ideal liefert für jeden A-Modul M das Vorschalten von $M \twoheadrightarrow M/\langle JM\rangle$ einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_A(M/\langle JM\rangle, A/J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, A/J)$. Weiter liefert die kurze exakte Sequenz $J \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/J$ von A-Linksmoduln eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(A/J, A/J) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, A/J) \to \mathrm{Hom}_A(J, A/J) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A/J, A/J)$$

mit einem Isomorphismus an erster Stelle und wir erhalten so einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(J/\langle J^2\rangle, A/J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(A/J, A/J)$$

3.3 Hochschild-Kohomologie*

Definition 3.3.1. Gegeben eine Ringalgebra A über einem Körper k erklärt man ihre **Hochschild-Kohomologie** als

$$\mathrm{HH}^q(A) = \mathrm{HH}^q_k(A) := \mathrm{Ext}^q_{A\otimes_k A^{\mathrm{opp}}}(A, A)$$

Allgemeiner erklärt man für einen A-Bimodul M mit gleicher k-Operation von rechts und links die **Hochschildkohomologie von A mit Koeffizienten in M** als

$$\mathrm{HH}^q(A; M) = \mathrm{HH}^q_k(A; M) := \mathrm{Ext}^q_{A\otimes_k A^{\mathrm{opp}}}(A, M)$$

3.3.2 (**Nullte Hochschildkohomologie**). Sei A eine Ringalgebra über einem Körper k. Offensichtlich liefert das Multiplizieren mit Elementen des Zentrums $z \in \mathrm{Z}(A)$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Z}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\otimes_k A^{\mathrm{opp}}}(A, A) = \mathrm{HH}^0(A)$$

3.3.3 (**Berechnung der Hochschildkohomologie mit dem Barkomplex**). Sei A eine Ringalgebra über einem Körper k. Die höhere Hochschild-Kohomologie von A kann mit der Bar-Auflösung

$$\ldots \to A \otimes_k A \otimes_k A \to A \otimes_k A \twoheadrightarrow A$$

aus 3.3.10 berechnet werden, denn diese ist in unserem Fall offensichtlich eine Auflösung durch freie $(A \otimes_k A^{\mathrm{opp}})$-Moduln. Wir erhalten Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{A\otimes_k A}(A^{\otimes(q+2)}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q}, M)$$

durch Vorschalten von $a_1 \otimes \ldots \otimes a_q \mapsto 1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_q \otimes 1$. Der vom Barkomplex vermittels dieses Isomorphismus induzierte Randoperator bildet $\psi : A^{\otimes q} \to M$ ab auf $d\psi$ mit

$$\begin{aligned}(d\psi)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \quad = \quad & a_1\psi(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \\ & -\psi(a_1a_2 \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \\ & +\psi(a_1 \otimes a_2a_3 \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \\ & \ldots \\ & \pm\psi(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_q)a_{q+1}\end{aligned}$$

So erhalten wir insbesondere eine Identifikation

$$\mathrm{HH}^0(A) \xrightarrow{\sim} \{\psi \in \mathrm{Hom}_k(k, A) \mid a_1\psi(1) - \psi(1)a_1 = 0 \ \forall a_1 \in A\}$$

und Auswerten eines Homomorphismus bei $1 \in k$ liefert ein weiteres Mal unseren Isomorphismus $\mathrm{HH}^0(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Z}(A)$ der nullten Hochschildkohomologie mit dem Zentrum unserer Ringalgebra.

3.3.4 (**Erste Hochschildkohomologie**). Seien k ein Körper und A eine Ringalgebra über k. Um $\mathrm{HH}^1(A)$ zu berechnen, bilden wir zuerst die Einskozykel unseres Komplexes

$$\mathcal{Z}^1 = \{\psi \in \mathrm{Hom}_k(A, A) \mid a_1\psi(a_2) - \psi(a_1a_2) + \psi(a_1)a_2 = 0\}$$

und finden den Raum der Derivationen $\mathcal{Z}^1 = \mathrm{Der}_k(A)$ alias aller k-linearen Abbildungen, die die Leibnizregel $\psi(ab) = \psi(a)b + a\psi(b)$ erfüllen. Für jedes $a \in A$ ist unter anderem der Kommutator mit a eine solche Derivation $(\mathrm{ad}\, a) : A \to A$, $b \mapsto [a, b]$. Derivationen dieses Typs heißen **innere Derivationen** unserer Ringalgebra. Wir sehen leicht, daß die Einsränder unseres Komplexes genau die inneren Derivationen sind. So ergibt sich dann schließlich ein Isomorphismus

$$\mathrm{Der}_k(A)/\mathrm{ad}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}^1(A)$$

zwischen dem Quotienten des Raums der Derivationen nach dem Teilraum der inneren Derivationen und der ersten Hochschild-Kohomologie.

3.3.5 (**Zweite Hochschildkohomologie**). Seien k ein Körper und A eine Ringalgebra über k und M ein A-Bimodul mit gleicher k-Operation von beiden Seiten, also ein Modul über $A \otimes_k A^{\mathrm{opp}}$. Wir konstruieren eine Bijektion zwischen $\mathcal{Z}^2(A; M)$ und der Menge aller Strukturen μ einer assoziativen k-Algebra auf

dem k-Vektorraum $M \oplus A$ derart, daß die Projektion auf A ein Algebrenhomomorphismus ist und ihr Kern aus Elementen mit Quadrat Null besteht und die Struktur auf M als Bimodul unter $(M \oplus A, \mu)$ die vorgegebene Struktur auf M als A-Bimodul induziert. So eine Multiplikation μ muß ja gegeben werden durch $(m, a)(n, b) = (an + mb + \psi(a, b), ab)$ für eine k-bilineare Abbildung $\psi : A \times A \to M$ und die Assoziativität ist gleichbedeutend zur Identität

$$a\psi(bc) + \psi(a, bc) = \psi(a, b)c + \psi(ab, c)$$

und in der Tat gleichbedeutend zu $\psi \in \mathcal{Z}^2(A; M) \subset \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, M)$. Nebenbei bemerkt besitzt $(M \oplus A, \mu)$ dann automatisch eine Eins, nämlich das Element $(-\psi(1, 1), 1)$. Wir notieren diese Algebra nun $(M \oplus A, \psi)$ und rechnen mühelos nach, daß gegeben $\varphi : A \to M$ weiter $(m, a) \mapsto (m + \varphi(a), a)$ ein Algebrenisomorphismus $(M \oplus A, \psi) \xrightarrow{\sim} (M \oplus A, \psi - d\varphi)$ ist. Zusammengefaßt klassifiziert also $\mathrm{HH}^2(A; M)$ kurze exakte Sequenzen von k-Moduln

$$M \hookrightarrow E \twoheadrightarrow A$$

mit Ringalgebrenstruktur auf E, für die die Surjektion ein Ringalgebrenhomomorphismus ist und der Kern M die Eigenschaft $M^2 = 0$ hat und die dadurch gegebene Struktur auf M als A-Bimodul die vorgegebene ist, bis auf Isomorphismen von kurzen exakten Sequenzen, die vorne und hinten die Identität sind und in der Mitte Isomorphismen von Ringalgebren.

Definition 3.3.6. Eine endlichdimensionale Ringalgebra S über einem Körper k heißt **separabel**, wenn $S \otimes_k S^{\mathrm{opp}}$ halbeinfach ist.

3.3.7. Jede separable Ringalgebra ist halbeinfach, denn ist das Jacobsonradikal von S nicht Null, so kann S als Bimodul über sich selber nicht halbeinfach sein. In Charakteristik Null ist jede endlichdimensionale halbeinfache Ringalgebra separabel, vergleiche [NAS] 3.6.15.

3.3.8. Offensichtlich verschwinden für separable endlichdimensionale Ringalgebren über einem Körper k alle höheren Hochschildkohomologien $\mathrm{HH}^q_k(S; M) = 0$ für $q > 0$ und jeden S-Bimodul M. Gegeben ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V ist $\mathrm{End}_k V$ offensichtlich stets separabel. Nach der Beschreibung 3.3.4 der ersten Hochschildkohomologie ist folglich jede Derivation von $\mathrm{End}_k V$ eine innere Derivation.

Satz 3.3.9 (**Spaltungssatz von Wedderburn**). *Gegeben eine endlichdimensionale Ringalgebra A über einem Körper k derart, daß ihr Quotient $\bar{A} := A/\mathrm{J}(A)$ nach dem Jacobsonradikal separabel ist, gibt es eine k-Unterringalgebra $S \subset A$ derart, daß die Projektion einen Isomorphismus $S \xrightarrow{\sim} A/\mathrm{J}(A)$ induziert.*

Beweis. Vollständige Induktion über das kleinste $n \geq 1$ mit $\mathrm{J}(A)^n = 0$. Im Fall $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Im Fall $n = 2$ gilt wegen $\bar{A}$ separabel über k offensichtlich $\mathrm{HH}_k^2(\bar{A}, \mathrm{J}(A)) = 0$ und dann zeigt unsere Interpretation 3.3.5 der zweiten Hochschildkohomologie die Behauptung. Für den Induktionsschritt sei $\mathrm{J}(A)^{n+1} = 0$. Per Induktionsannahme finden wir $S \subset A/\mathrm{J}(A)^n$ wie gewünscht. Das Urbild $\tilde{S} \subset A$ von S unter der Projektion besitzt nun nach dem bereits behandelten Fall $n = 2$ eine Unterringalgebra S', die isomorph auf S geht unter der Projektion. Das liefert den Induktionsschritt und beendet den Beweis. $\square$

Übungen

Übung 3.3.10 (**Barkomplex**). Gegeben ein Ringhomomorphismus $k \to A$ und ein A-Linksmodul M ist der Komplex

$$\ldots \to A \otimes_k A \otimes_k M \to A \otimes_k M \twoheadrightarrow M$$

mit dem Randoperator

$$\begin{aligned} a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_q \otimes m \quad \mapsto \quad & a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_q \otimes m \\ & -a_0 \otimes a_1 a_2 \otimes \ldots \otimes a_q \otimes m \\ & \qquad \ldots \\ & \pm a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_q m \end{aligned}$$

exakt, ja sogar nullhomotop. Er heißt der **Bar-Komplex** und präziser der **nicht normalisierte Bar-Komplex**. Hinweis: Das Davorschreiben von $1\otimes$ ist eine Homotopie der Identität mit der Nullabbildung.

3.4 Beispiele für injektive Moduln*

Lemma 3.4.1. *Seien A ein noetherscher Kring und $\mathfrak{b} \subset A$ ein Ideal. Ist I ein injektiver A-Modul, so ist auch $\Gamma_{\mathfrak{b}} I := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in I \mid \mathfrak{b}^n x = 0\}$ ein injektiver A-Modul.*

Beweis. Wir prüfen das Injektivitätskriterium über Ideale 3.2.28. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ landet ein beliebiger fest vorgegebener Homomorphismus $\mathfrak{a} \to \Gamma_{\mathfrak{b}} I$ bereits in sagen wir dem n-ten Untermodul in unserer Vereinigung und faktorisiert mithin über $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}^n\mathfrak{a}$. Nach [KAG] 7.3.9 können wir ein $l \geq n$ wählen mit $\mathfrak{b}^n\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}^l \cap \mathfrak{a}$ und dann faktorisiert unser Homomorphismus auch über $\mathfrak{a}/(\mathfrak{b}^l \cap \mathfrak{a})$. Nun ist aber $\{x \in I \mid \mathfrak{b}^l x = 0\} \cong \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}^l, I)$ injektiv als Modul über $A/\mathfrak{b}^l$ und damit läßt sich unser eben betrachteter Homomorphismus $\mathfrak{a}/(\mathfrak{b}^l \cap \mathfrak{a}) \to \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}^l, I)$ auf ganz $A/\mathfrak{b}^l$ fortsetzen. Das schließlich liefert unmittelbar die gesuchte Fortsetzung des ursprünglichen Homomorphismus $\mathfrak{a} \to \Gamma_{\mathfrak{b}} I$ auf ganz A. $\square$

Beispiel 3.4.2. Gegeben ein Körper K ist $K[T_1^{-1}, \ldots, T_r^{-1}]$ ein injektiver Modul über dem Polynomring $K[T_1, \ldots, T_r]$. Um die Modulstruktur zu präzisieren, mag man unseren Modul auch beschreiben als den Quotient von $K[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_r^{\pm 1}]$ nach dem Untermodul, der von allen Monomen aufgespannt wird, in denen mindestens eines der T_i mit positivem Exponenten auftritt. Wir folgern die Injektivität, indem wir Lemma 3.4.1 auf den nach 3.2.34 injektiven K-Dualraum unseres Polynomrings anwenden.

Lemma* 3.4.3. *Seien* $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ *die Einhüllende einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem Körper* k *und* $\chi : \mathrm{U}(\mathfrak{n}) \to k$ *ein Ringalgebrenhomomorphismus. Ist* I *ein injektiver* $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$*-Modul, so ist auch* $\Gamma_\chi I := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in I \mid (\ker \chi)^n x = 0\}$ *ein injektiver* $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$*-Modul.*

Beweis. Wir schreiben $Q := \ker \chi$ und $A := \mathrm{U}(\mathfrak{n})$ und prüfen das Injektivitätskriterium über Ideale 3.2.28. Gegeben ein Linksideal $P \subset \mathrm{U}(\mathfrak{n})$ landet ein beliebiger fest vorgegebener Homomorphismus $P \to \Gamma_\chi I$ bereits in sagen wir dem n-ten Untermodul in unserer Vereinigung und faktorisiert mithin über $P/Q^n P$. Nach [KAG] 7.3.10 können wir ein $l \geq n$ finden mit $Q^n P \supset Q^l \cap P$. Dann faktorisiert unser Homomorphismus auch über $P/(Q^l \cap P)$. Nun ist aber

$$\{x \in I \mid Q^l x = 0\} \cong \mathrm{Hom}_A(A/Q^l, I) = \mathrm{ind}_A^{A/Q^l} I$$

injektiv als Modul über A/Q^l und damit läßt sich unser eben betrachteter Homomorphismus $P/(Q^l \cap P) \to \mathrm{Hom}_A(A/Q^l, I)$ auf ganz A/Q^l fortsetzen. Das schließlich liefert unmittelbar die gesuchte Fortsetzung des ursprünglichen Homomorphismus $P \to \Gamma_\chi I$ auf ganz A. □

Lemma* 3.4.4. *Seien* $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ *die Einhüllende einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem Körper* k *und* $\chi : \mathrm{U}(\mathfrak{n}) \to k$ *ein Ringalgebrenhomomorphismus. So ist der kontravariante Funktor von endlich erzeugten* $\mathfrak{n}$*-Darstellungen zu Vektorräumen gegeben durch*

$$M \mapsto \Gamma_\chi(M^*) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in M^* \mid (\ker \chi)^n x = 0\}$$

ein exakter Funktor.

Beweis. Wir wissen aus 3.2.34, daß die von k koinduzierte Darstellung $\mathrm{U}(\mathfrak{n})^*$ ein injektiver $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Modul ist. Dasselbe gilt nach Lemma 3.4.3 für $\Gamma_\chi(\mathrm{U}(\mathfrak{n})^*)$. Wenn M endlich erzeugt ist, haben wir Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{n}}\left(M, \Gamma_\chi(\mathrm{U}(\mathfrak{n})^*)\right) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}\,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{n}}\left(M, (\mathrm{U}(\mathfrak{n})/\chi^n)^*\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}\,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{n}}\left(\mathrm{U}(\mathfrak{n})/\chi^n, M^*\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma_\chi(M^*) \end{aligned}$$

Da die linke Seite ein exakter Funkor ist, muß auf endlich erzeugten $\mathfrak{n}$-Moduln M auch die rechte Seite ein exakter kontravarianter Funktor sein. $\square$

3.4.5. Im Fall $M = \mathrm{U}(\mathfrak{n})$ finden wir, indem wir die obige Rechnung rückwärts gehen, daß gilt $1 = \dim\{v \in \Gamma_\chi((\mathrm{U}(\mathfrak{n}))^*) \mid xv = \chi(x)v \ \forall x \in \mathfrak{n}\}$.

3.4.6. Sind $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{n}$ endlichdimensionale Liealgebren und ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ nilpotent für alle $x \in \mathfrak{n}$, so ist für jede $\mathfrak{g}$-Darstellung M der Raum $\Gamma_\chi(M^*) \subset M^*$ eine $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung der kontragredienten Darstellung M^*. Im Fall von Kategorie $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h})$ und $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ stabil unter $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ ist $\Gamma_0(M^*)$ das „Kategorie-$\mathcal{O}$-Dual ohne den Chevalley-Twist“. Für reguläres χ und ein Vermamodul $M = M(\lambda)$ dahingegen ist $\Gamma_\chi(M^*)$ eine $\mathfrak{g}$-Darstellung mit demselben strikten zentralen Charakter wie $M(\lambda)$, in der jeder Vektor von einer Potenz von $\ker \chi$ annulliert wird. Es gibt aber nach Kostant oder geometrisch nach [Milicic-Soergel 2] bis auf Isomorphismus nur eine einfache derartige Darstellung und jede derartige Darstellung ist halbeinfach und das zeigt mit 3.4.5, daß wir so diese einfache Darstellung erhalten und zwar für alle λ.

3.5 Definition der Garbenkohomologie

Lemma 3.5.1. *Die Kategorie $\mathrm{Ab}_{/X}$ der abelschen Garben auf einem gegebenen topologischen Raum X besitzt genug Injektive.*

Vorschau 3.5.2. Man kann zeigen, daß in der Kategorie der Garben von Vektorräumen auf einem gegebenen topologischen Raum die injektiven Objekte genau die welken Garben nach 4.1.1 sind, vergleiche [Bor84], V.1.13, wo man sogar noch allgemeiner eine explizite Charakterisierung injektiver Garben von Moduln über noetherschen Ringen findet. Wir werden diese Resultate nicht benötigen.

Beweis. Alle Wolkenkratzer mit einer injektiven abelschen Gruppe als Halm sind injektive abelsche Garben nach 2.2.57. Gegeben eine Garbe $\mathcal{F}$ und eine Einbettung $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I_x$ von jedem Halm in eine injektive abelsche Gruppe konstruieren wir eine injektive abelsche Garbe $\mathcal{I} = \prod (I_x)_{(x)}$ als Produkt der zu den Gruppen I_x gehörigen Wolkenkratzer bei x. Explizit haben wir also

$$\mathcal{I}(U) = \prod_{x \in U} I_x \quad \forall\, U \Subset X$$

Der offensichtliche Monomorphismus $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ zeigt dann das Lemma. $\square$

Definition 3.5.3. Sei X ein topologischer Raum. Die Werte der Rechtsderivierten des linksexakten Funktors $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ der globalen Schnitte auf einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ nennt man die **Kohomologie von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$** und notiert sie

$$\mathrm{H}^q(X; \mathcal{F}) := (\mathrm{R}^q\Gamma)(\mathcal{F})$$

3.5.4. Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $Z \subset X$ eine Teilmenge, so verwenden wir die Abkürzung $\mathrm{H}^q(Z;\mathcal{F}) := \mathrm{H}^q(Z;\mathcal{F}|_Z)$. Ist X ein topologischer Raum und M eine abelsche Gruppe und $\mathcal{F} = M_X$ die konstante Garbe auf X, so verwenden wir die Abkürzungen $\mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}}(X;M) = \mathrm{H}^q(X;M) := \mathrm{H}^q(X;M_X)$. Ist noch spezieller $M = \mathbb{Z}$, so bezeichnen wir diese Gruppe auch mit

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}}\, X = \mathrm{H}^q\, X = \mathrm{H}^q(X;\mathbb{Z}_X) = \mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}}(X;\mathbb{Z}) = \mathrm{H}^q(X;\mathbb{Z})$$

Beispiel 3.5.5. Für den einpunktigen Raum liefern die ersten Eigenschaften von Rechtsderivierten 3.2.10 ausgezeichnete Isomorphismen $\Gamma\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathrm{top};\mathcal{F})$ sowie das Verschwinden $\mathrm{H}^q(\mathrm{top};\mathcal{F}) = 0$ für $q > 0$. Im Fall der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_{\mathrm{top}}$ nennen wir das Bild der Eins unter dem ausgezeichneten Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathrm{top};\mathbb{Z})$ den **kanonischen Erzeuger** und notieren ihn $1 \in \mathrm{H}^0(\mathrm{top})$.

3.5.6. Ich fürchte, daß diese Definitionen dem nicht vorgebildeten Leser ziemlich sinnlos erscheinenen müssen. Mein Ziel ist im folgenden, parallel die relevante abstrakte homologische Algebra und ihre Anwendung auf den Fall der Garbenkohomologie zu entwickeln in der Hoffnung, daß sich dadurch beide Theorien gegenseitig motivieren und ihre Sinnhaftigkeit zeigen.

3.5.7 (**Garbenkohomologie als Erweiterungsgruppe**). Wir erinnern unsere Erweiterungen aus 3.2.24. Im Fall der Kategorie $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}_{/X}$ der abelschen Garben auf einem topologischen Raum X liefern die durch das Auswerten auf dem konstanten Schnitt Eins für alle abelschen Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ gegebenen Isomorphismen $\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma\mathcal{F}$ Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

Vorschau 3.5.8. In [TD] 2.8 erklären wir die Ringstruktur auf der Garbenkohomologie mit Hilfe der sogenannten „Yoneda-Produkte“.

Übungen

Übung 3.5.9. Eine abelsche Garbe $\mathcal{I}$ auf einem topologischen Raum X ist genau dann injektiv, wenn sich jeder Morphismus $\mathcal{A} \to \mathcal{I}$ von einer Untergarbe $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_X$ nach $\mathcal{I}$ auf ganz $\mathbb{Z}_X$ fortsetzen läßt. Hinweis: Man kopiere den Beweis vom Fall [TS] 3.6.6.5 eines einpunktigen Raums.

Übung 3.5.10. Für einen diskreten Raum verschwindet alle Garbenkohomologie in Graden ≥ 1.

Übung 3.5.11 (**Exakte Funktoren**). Seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein exakter Funktor von abelschen Kategorien mit genug Injektiven und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein additiver Funktor

in eine weitere abelsche Kategorie. Man zeige, daß es eindeutig bestimmte Transformationen $\mathrm{R}^q(G \circ F) \Rightarrow \mathrm{R}^q G \circ F$ gibt derart, daß für jede Auflösung $A \hookrightarrow M^{\triangleleft}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q GFM^{\triangleleft} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathrm{R}^q(G \circ F)A & \to & \mathrm{R}^q G(FA) \end{array}$$

mit den τ-Morphismen aus der Definition der derivierten Funktoren in den Morphismen nach unten kommutiert.

Übung 3.5.12 (**Erweiterungen und exakte Funktoren**). Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein exakter Funktor von abelschen Kategorien mit genug Injektiven. Man konstruiere natürliche Abbildungen

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(M, N) \to \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{B}}(FM, FN)$$

Später werden wir derartige Abbildungen auch ohne die Forderung nach der Existenz von genug Injektiven als unmittelbare Konsequenz der Konstruktion des „von F induzierten Funktors auf den derivierten Kategorien“ erhalten.

Übung 3.5.13 (**Erste Kohomologie überlagerungstrivialer Räume**). Man zeige für jeden überlagerungstrivialen Raum X das Verschwinden der ersten Garbenkohomologie $\mathrm{H}^1(X; \mathbb{Z})_{\mathrm{garb}} = 0$. Hinweis: Bei jeder Erweiterung $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_X$ von abelschen Garben ist $\bar{\mathcal{F}} \to X$ eine Überlagerung, also eine triviale Überlagerung, also spaltet unsere Erweiterung.

3.6 Derivieren mit azyklischen Objekten

3.6.1 (**Lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren**). Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Wir geben eine Konstruktion an, die jeder kurzen exakten Sequenz $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ in $\mathcal{A}$ für alle q Morphismen $\mathrm{R}^{q-1}F(C) \to \mathrm{R}^q FA$ zuordnet derart, daß unsere Morphismen zusammen mit den von der Funktorialität der derivierten Funktoren herrührenden Morphismen eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{R}^{q-1}F(C) \to \mathrm{R}^q FA \to \mathrm{R}^q FB \to \mathrm{R}^q FC \to \mathrm{R}^{q+1}F(A) \to \ldots$$

in $\mathcal{B}$ bilden und daß jeder Morphismus von kurzen exakten Sequenzen einen Morphismus der so entstehenden langen exakten Sequenzen liefert. Unsere Konstruktion geht aus von der Bemerkung, daß in der abelschen Kategorie $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ aller in negativen Graden verschwindenden Komplexe für $I, J \in i\mathcal{A}$ injektive Objekte von $\mathcal{A}$ sowohl $I[0]$ als auch der bei Null beginnende Zwei-Term-Komplex $J \xrightarrow{\sim} J$ injektive Objekte von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ sind und daß sich jeder bei Null beginnende Zweitermkomplex aus einer Surjektion $B \twoheadrightarrow C$ in ein injektives Objekt

von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ der Gestalt $(\mathrm{pr}_2 : I \oplus J \xrightarrow{\sim} J)$ einbetten läßt. Wir finden induktiv für $B \twoheadrightarrow C$ eine injektive Auflösung in $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ durch Zweitermkomplexe dieser speziellen Gestalt. Die Beschreibung aller Injektiven von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ mögen Sie als Übung 3.6.13 ausarbeiten, sie wird hier nicht benötigt. Ergänzen wir die Kerne, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
I^2 & \hookrightarrow & J^2 & \twoheadrightarrow & K^2 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
I^1 & \hookrightarrow & J^1 & \twoheadrightarrow & K^1 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
I^0 & \hookrightarrow & J^0 & \twoheadrightarrow & K^0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C
\end{array}$$

Die linke Spalte ist exakt nach der langen exakten Homologiesequenz und die höheren Horizontalen sind spaltende kurze exakte Sequenzen nach Konstruktion. Anwenden von F liefert also eine kurze exakte Sequenz von Komplexen $FI^{\triangleleft} \hookrightarrow FJ^{\triangleleft} \twoheadrightarrow FK^{\triangleleft}$ und deren lange exakte Kohomologiesequenz ist eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{R}^{q-1}F(C) \to \mathrm{R}^q FA \to \mathrm{R}^q FB \to \mathrm{R}^q FC \to \mathrm{R}^{q+1}F(A) \to \ldots$$

Die Unabhängigkeit von der gewählten injektiven Auflösung durch unsere speziellen injektiven Zweitermkomplexe und die Verträglichkeit mit Morphismen von kurzen exakten Sequenzen zeigen wir zusammen. Gegeben ein Morphismus von kurzen exakten Sequenzen alias ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
A' \arrow[r, hook] & B' \arrow[r, two heads] & C'
\end{tikzcd}$$

und erhalten erst einen Homotopielift des durch das rechte Quadrat gegebenen vertikal zu sehenden Morphismus in $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ und dann durch das Ergänzen der jeweiligen Kerne ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I^{\triangleleft} \arrow[r, hook] \arrow[d] & J^{\triangleleft} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & K^{\triangleleft} \arrow[d] \\
I'^{\triangleleft} \arrow[r, hook] & J'^{\triangleleft} \arrow[r, two heads] & K'^{\triangleleft}
\end{tikzcd}$$

von langen exakten Sequenzen. Wenden wir darauf F an, so erhalten wir die Unabhängigkeit unserer Konstruktion von den dabei getroffenen Wahlen ebenso wie die Verträglichkeit mit Morphismen von kurzen exakten Sequenzen.

3.6.2. Nach 3.2.10 haben wir $\mathrm{R}^q F = 0$ für $q < 0$. Nach der langen exakten Sequenz ist also $\mathrm{R}^0 F$ stets linksexakt.

3.6.3. Als Spezialfälle erhalten wir in unseren Beispielen: Die lange exakte Ext-Sequenz im ersten [TS] 3.6.6.11 beziehungsweise zweiten [TS] 3.6.5.5 Eintrag und die lange exakte Tor-Sequenz im ersten beziehungsweise zweiten Eintrag [TS] 3.5.3.11.

Beispiel 3.6.4 (**Lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie**). Gegeben eine kurze exakte Sequenz $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X spezialisiert die lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren zu langen exakten Sequenzen der zugehörigen Kohomologiegruppen

$$\mathrm{H}^0(X;\mathcal{F}') \hookrightarrow \mathrm{H}^0(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^0(X;\mathcal{F}'') \to \mathrm{H}^1(X;\mathcal{F}') \to \mathrm{H}^1(X;\mathcal{F}) \to \dots$$

Definition 3.6.5. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Ein Objekt $J \in \mathcal{A}$ heißt F**-rechtsazyklisch**, wenn gilt $(\mathrm{R}^q F)(J) = 0$ für alle $q > 0$. Gilt nur $(\mathrm{R}^q F)(J) = 0$ für $0 < q \leq n$, so nennen wir J ein F**-**n**-rechtsazyklisches Objekt**.

Beispiele 3.6.6. Injektive Objekte sind F-rechtsazyklisch für jeden linksexakten Funktor F. Alle Objekte sind rechtsazyklisch für jeden exakten Funktor. Analoge Definitionen trifft man für rechtsexakte Funktoren von einer abelschen Kategorie mit genug Projektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Projektive Objekte sind dann F-linksazyklisch für jeden rechtsexakten Funktor F. Torsionsfreie abelsche Gruppen sind linksazyklisch für alle Funktoren der Gestalt $\otimes_{\mathbb{Z}} M$ mit $M \in \mathrm{Ab}$.

3.6.7. Vielfach sagt man einfach nur F**-azyklisch** und der Leser muß erraten, was genau gemeint ist. Im Fall eines linksexakten Funktors meint „F-azyklisch“ für gewöhnlich „F-rechtsazyklisch“ und im Fall eines rechtsexakten Funktors „F-linksazyklisch“.

Proposition 3.6.8 (**Derivieren mit azyklischen Objekten**). *Gegeben ein linksexakter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie sind für jede Auflösung $A \hookrightarrow J^{\lhd}$ durch F-rechtsazyklische Objekte eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ unsere kanonischen Morphismen Isomorphismen*

$$\tau : \mathcal{H}^q F J^{\lhd} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^q F)(A)$$

3.6.9. Injektive Auflösungen sind für konkrete Rechnungen selten von Nutzen und eher für theoretische Überlegungen von Interesse. Für praktische Anwendungen ist es von zentraler Bedeutung, daß man die Derivierten eines gegebenen linksexakten beziehungsweise rechtsexakten Funktors bereits über Auflösungen durch

azyklische Objekte berechnen kann. In [TD] 3.4.13 diskutieren wir, wie man den Begriff derivierter Funktoren ebenso wie obige Proposition auf Situationen verallgemeinern kann, in denen es nicht genug Injektive gibt. Von unserem derzeitigen Stand aus ist allerdings noch nicht einmal klar, wie in dieser Allgemeinheit „azyklisch“ überhaupt zu definieren sein sollte.

3.6.10 (**Partielles Derivieren mit Auflösungen durch partiell Azyklische**). Gegeben ein linksexakter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie und ein festes $N \in \mathbb{N}$ sind sogar für jede Auflösung $A \hookrightarrow J^{\lhd}$ eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ mit $(\mathrm{R}^q F)(J^p) = 0$ für alle (q, p) mit $q > 0$ und $q + p \leq N$ unsere kanonischen Morphismen Isomorphismen

$$\tau : \mathcal{H}^q F J^{\lhd} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^q F)(A) \quad \text{für } n < N.$$

Der Beweis bleibt im wesentlichen derselbe, die Details mag der Leser zur Übung ausarbeiten. Insbesondere können wir $\mathrm{R}^q F$ auch bereits mit Auflösungen durch $(q+1)$-azyklische Objekte berechnen.

Beweis. Seien $A \hookrightarrow I^{\lhd}$ eine injektive Auflösung von A und $f^{\lhd} : J^{\lhd} \to I^{\lhd}$ die bis auf Homotopie wohldefinierte Fortsetzung der Identität auf A nach 3.2.6. Es gilt zu zeigen, daß die Kettenabbildung

$$F f^{\lhd} : F J^{\lhd} \to F I^{\lhd}$$

Isomorphismen auf der Homologie induziert. Da aber $f^{\lhd} : J^{\lhd} \to I^{\lhd}$ Isomorphismen auf der Homologie induziert, muß die Homologie des Abbildungskegels $K := \mathrm{K}(f^{\lhd})$ identisch verschwinden. Dieser Abbildungskegel beginnt im Grad -1 und wir können ihn aufspalten in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^{-1} & \hookrightarrow & K^0 & \twoheadrightarrow & C^0 & & & & \\
 & & C^0 & \hookrightarrow & K^1 & \twoheadrightarrow & C^1 & & \\
 & & & & C^1 & \hookrightarrow & K^2 & \twoheadrightarrow & C^2 \\
 & & & & & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Aus der langen exakten Sequenz der derivierten Funktoren 3.6.1 folgt induktiv, daß alle in diesen kurzen exakten Sequenzen auftauchenden Objekte F-azyklisch sein müssen. Damit sehen wir dann sofort, daß $\mathrm{K}(f^{\lhd})$ exakt bleibt unter F. Da also nun $F\,\mathrm{K}(f^{\lhd}) = \mathrm{K}(F f^{\lhd})$ exakt ist, muß $F f^{\lhd}$ Isomorphismen auf der Homologie induzieren. $\square$

3.6.11. Wir sagen, ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie habe **endliche homologische Rechtsdimension**, wenn es ein d gibt mit $\mathrm{R}^q F = 0$ für $q > d$. Das kleinstmögliche derartige d oder genauer das Infimum aller derartigen d heißt

dann die **homologische Rechtsdimension** unseres Funktors. Insbesondere hat der Nullfunktor die homologische Rechtsdimension $-\infty$. Analoges vereinbaren wir für Links statt Rechts. Eine Verallgemeinerung unserer Definitionen geben wir in [TD] 3.6.1.

Übungen

Übung 3.6.12 (**Ein Spektralsequenzargument**). Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie und A^* ein Komplex von F-azyklischen Objekten mit $A^n = 0$ für $n < 0$. Wir nehmen weiter an, es gelte $(\mathrm{R}^q F)\mathcal{H}^p A^* = 0$ für alle (q, p) mit $q > 0$ und $q + p \leq N$. Man zeige, daß dann die natürlichen Morphismen aus 3.2.37 für $n < N$ Isomorphismen

$$\mathcal{H}^n F A^* \xrightarrow{\sim} F\mathcal{H}^n A^*$$

sind. Hinweis: Man verfeinere den Beweis von 3.6.8. Im Rahmen der allgemeinen Theorie der Spektralsequenzen folgt die Aussage unmittelbar aus 10.3.12.

Übung 3.6.13 (**Injektive Objekte in Kategorien nichtnegativer Komplexe**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ betrachten wir die abelsche Kategorie

$$\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$$

aller für negative Indizes verschwindenden Komplexe in $\mathcal{A}$. Die injektiven Objekte dieser Kategorie sind genau alle entsprechenden Komplexe aus injektiven Objekten von $\mathcal{A}$, bei denen die Kohomologie in von Null verschiedenen Graden verschwindet und bei denen die Zykel $\ker \partial : I^n \to I^{n+1}$ in jedem Grad oder gleichbedeutend im Grad $n = 0$ direkte Summanden von I^n sind. In der Tat sieht man leicht, daß jeder Komplex dieser Art ein injektives Objekt von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ ist, da es ein Produkt von Komplexen der Typen $I[0]$ und $(I \xrightarrow{\sim} I)$ ist für $I \in i\mathcal{A}$. Andererseits ist leicht zu sehen, daß bei einem injektiven Objekt von $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ die Zykel an jeder Stelle zu $i\mathcal{A}$ gehören müssen, man teste mit Homomorphismen nach $A[n] \hookrightarrow B[n]$, und die Objekte an jeder Stelle zu $i\mathcal{A}$ gehören müssen, man teste mit Injektionen von Zwei-Term-Komplexen $(A \xrightarrow{\sim} A) \hookrightarrow (B \xrightarrow{\sim} B)$. Schließlich ist jeder unserer Komplexe X Unterkomplex eines weiteren Komplexes Y mit $\mathcal{H}^q Y = 0$ für $q > 0$, und ist X injektiv, so muß diese Einbettung spalten und wir folgern $\mathcal{H}^q X = 0$ für $q > 0$. Hat $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so auch $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$, wie man leicht einsieht. Für die Rechtsderivierten von $\mathcal{H}^0 : \mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ erhalten wir dann natürliche Isomorphismen

$$(\mathrm{R}^q \mathcal{H}^0)(K^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q K^*$$

vermittels der Interpretation einer injektiven Auflösung in $\mathrm{Ket}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ als Doppelkomplex im ersten Quadranten, dessen Zeilen und Spalten in positiven Graden

exakt sind. Die Kohomologie des senkrechten Kernkomplexes berechnet nun die linke Seite Seite und die Kohomologie des waagerechten Kernkomplexes die rechte Seite und der waagerechte Kernkomplex ist schlicht K^* selber und beide Kohomologien gehen nach 4.6.5 isomorph auf die Kohomologie des Totalkomplexes.

Ergänzung 3.6.14. Ein Student könnte einmal ausarbeiten, inwiefern das Vorhergehende gültig bleibt, wenn $\mathcal{A}$ nicht genug Injektive hat und man derivierte Funktoren im in [TD] 3.4.2 erklärten verallgemeinerten Sinne versteht.

Übung 3.6.15. In der Kategorie aller graduierten Moduln über einem graduierten Ring gibt es genügend injektive Objekte.

Übung 3.6.16. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Sei

$$\ldots \to J^{-1} \to J^0 \to J^1 \to \ldots$$

eine exakte Sequenz mit F-rechtsazyklischen J^q. Man zeige: Bleibt unsere Sequenz nicht exakt unter F, so kann keiner der derivierten Funktoren $\mathrm{R}^q F$ für $q \geq 0$ der Nullfunktor sein.

Übung 3.6.17. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Sei weiter

$$J^{-d} \hookrightarrow \ldots \to J^{-2} \to J^{-1} \to J^0 \twoheadrightarrow A$$

eine exakte Sequenz mit F-rechtsazyklischen J^q, die „in die andere Richtung geht als eine Auflösung“. Man zeige: Alle Kokerne $\operatorname{cok}(J^{q-1} \to J^q)$ sind F-rechtsazyklisch und A ist F-rechtsazyklisch und unsere Sequenz bleibt exakt beim Anwenden von F. Dasselbe folgt im Übrigen auch ohne die Annahme der Existenz von genug Injektiven, wenn wir die Eigenschaft „F-rechtsazyklisch“ wie in [TD] 3.4.2 verstehen und [TD] 3.4.15 zu Hilfe nehmen.

Übung 3.6.18. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Sei

$$A \hookrightarrow J^0 \to J^1 \to \ldots \to J^{d-1} \twoheadrightarrow C$$

eine exakte Sequenz mit F-rechtsazyklischen J^ν. Ist die homologische Rechtsdimension von F höchstens d, so ist auch C ein F-rechtsazyklisches Objekt.

Übung 3.6.19. Sei $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von abelschen Kategorien und es habe $\mathcal{A}$ genug Projektive. Man erinnere aus 3.2.33 die augmentierten Linksderivierten $\mathrm{L}_q G : \mathcal{A}^G \to \mathcal{B}$ und leite die lange exakte Sequenz der augmentierten derivierten Funktoren zu einer kurzen exakten Sequenz in $\mathcal{A}^G$ her.

Übung 3.6.20 (**Nullhomotope Komplexe**). Man zeige, daß ein Komplex (X^n, ∂) von abelschen Gruppen genau dann nullhomotop ist, wenn es Gruppen A^n und Isomorphismen $X^n \xrightarrow{\sim} A^n \oplus A^{n+1}$ gibt, unter denen der Randoperator der Komposition

$$A^n \oplus A^{n+1} \twoheadrightarrow A^{n+1} \hookrightarrow A^{n+1} \oplus A^{n+2}$$

von Projektion und Injektion entspricht. Mutige zeigen dasselbe in beliebigen abelschen Kategorien und sogar noch allgemeiner beliebigen additiven Kategorien mit spaltenden Idempotenten.

Übung 3.6.21 (**Zu Komplexen mit Differential Null homotope Komplexe**). Man zeige, daß ein Komplex (Y^n, ∂) von abelschen Gruppen genau dann homotopieäquivalent ist zu einem Komplex mit verschwindenden Differentialen, wenn es Gruppen A^n, H^n und Isomorphismen $X^n \xrightarrow{\sim} A^n \oplus H^n \oplus A^{n+1}$ gibt, unter denen der Randoperator der Komposition

$$A^n \oplus H^n \oplus A^{n+1} \twoheadrightarrow A^{n+1} \hookrightarrow A^{n+1} \oplus H^{n+1} \oplus A^{n+2}$$

von Projektion und Injektion entspricht. Wir nennen Komplexe mit dieser Eigenschaft **maximal spaltend**. Mutige zeigen dasselbe in beliebigen abelschen Kategorien und sogar noch allgemeiner in beliebigen additiven Kategorien mit spaltenden Idempotenten.

3.7 Gruppenkohomologie*

3.7.1. An dieser Stelle geht es nur um die Definition der Gruppenkohomologie als Anwendung unserer Konstruktionen aus der abstrakten homologischen Algebra und um die Beziehung der Gruppenkohomologie mit konstanten Koeffizienten zur singulären Kohomologie. In 9.3 besprechen wir dann feiner die Beziehung der Gruppenkohomologie mit beliebigen Koeffizienten zur Garbenkohomologie. In 3.8.2 besprechen wir nichtabelsche Gruppenkohomologie.

Definition 3.7.2. Sei G eine Gruppe. Unter einem G**-Modul** verstehen wir eine abelsche Gruppe A mit einer Operation $G \to \mathrm{Grp}^\times(A)$ von G auf A durch Gruppenhomomorphismen, als da heißt ein Objekt A von $G\text{-}\mathrm{Ab}$.

3.7.3. Gegeben ein G-Modul A bilden wir zwei abelsche Gruppen A^G und A_G, genannt die **Invarianten** und die **Ko-Invarianten** von A, vermittels der Vorschrift

$$\begin{aligned} A^G &:= \{a \in A \mid ga = a \ \forall g \in G\} \\ A_G &:= A/\langle a - ga \mid a \in A, g \in G\rangle \end{aligned}$$

Hier besteht A^G genau aus allen unter G invarianten Elementen von A und ist damit die größte unter G invariante Untergruppe von A. Dual ist A_G der „größte

Quotient von A, auf dem G trivial operiert". Etwas formaler können wir jede abelsche Gruppe mit der trivialen G-Operation versehen und so einen Funktor $\mathrm{Ab} \to G\text{-}\mathrm{Ab}$ definieren. Das Bilden der Invarianten beziehungsweise der Koinvarianten ist dann der Rechts- beziehungsweise Linksadjungierte zu diesem Funktor.

3.7.4 (**Invarianten und Koinvarianten in Modulsprache**). Bilden wir wie in [NAS] 1.2.1 den Gruppenring $\mathbb{Z}G$, so ist ein G-Modul nichts anderes als ein Modul über dem Ring $\mathbb{Z}G$. Der Funktor, der jede abelsche Gruppe mit der trivialen G-Operation versieht, entspricht dann dem Zurückholen

$$\mathrm{res}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}G} : \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{Z}G\text{-}\mathrm{Mod}$$

vermittels des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, der jedes Gruppenelement auf die Eins wirft. Im Rahmen des allgemeinen Formalismus aus [NAS] 6.3.2 haben wir demnach natürliche Isomorphismen $A^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}G}^{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ und $A_G \xrightarrow{\sim} \mathrm{prod}_{\mathbb{Z}G}^{\mathbb{Z}} A = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$.

Definition 3.7.5 (**Gruppenhomologie und Gruppenkohomologie**)**.** Sicher ist $A \mapsto A^G$ ein linksexakter und $A \mapsto A_G$ ein rechtsexakter Funktor $G\text{-}\mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Die Rechtsderivierten von $A \mapsto A^G$ nennt man die **Kohomologie der Gruppe** G **mit Koeffizienten in** A und notiert sie

$$\mathrm{H}^q(G; A)$$

Die Linksderivierten von $A \mapsto A_G$ nennt man die **Homologie der Gruppe** G **mit Koeffizienten in** A und notiert sie

$$\mathrm{H}_q(G; A)$$

Speziell gilt also $\mathrm{H}^0(G; A) = A^G$ und $\mathrm{H}_0(G; A) = A_G$. Redet man von Gruppenhomologie oder Gruppenkohomologie ohne Koeffizienten zu spezifizieren, so sind meist Koeffizienten in der Einsdarstellung $\mathbb{Z}$ gemeint.

3.7.6 (**Gruppenhomologie und -kohomologie in Modulsprache**). Seien G eine Gruppe und A ein G-Modul. Verstehen wir $\mathbb{Z}$ als G-Modul mit der trivialen Operation von links beziehungsweise von rechts, so liefern unsere offensichtlichen kanonischen Isomorphismen $A^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ und $A_G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ auch kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_q(G; A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) \\ \mathrm{H}^q(G; A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}G}^q(\mathbb{Z}, A) \end{aligned}$$

mit Ext und Tor wie in 3.2.14 und 3.2.26.

3.7.7 (**Ursprung der Terminologie**). Es mag verwirren, daß *Ko*homologie die Invarianten und Homologie die *Ko*invarianten verallgemeinert. Der Grund ist die Entstehung dieser Begriffe aus topologischen Überlegungen, genauer aus der Erkenntnis 3.7.12, daß die Kohomologie beziehungsweise Homologie eines Quotienten $G\backslash X$ für einen zusammenziehbaren topologischen Raum X mit topologisch freier Operation einer Gruppe G nur von der Gruppe G selbst und nicht von X abhängt und folglich die Bezeichnung $\mathrm{H}^q(G\backslash X;\mathbb{Z}) = \mathrm{H}^q(G;\mathbb{Z})$ beziehungsweise $\mathrm{H}_q(G\backslash X;\mathbb{Z}) = \mathrm{H}_q(G;\mathbb{Z})$ verdient.

Beispiel 3.7.8 (**Homologie und Kohomologie von** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Wir betrachten die zweielementige Gruppe $G = \{e, g\}$. Sie ist kommutativ und dasselbe gilt für ihren Gruppenring. Eine freie Auflösung des $\mathbb{Z}G$-Moduls $\mathbb{Z}$ wird gegeben durch den Komplex

$$\ldots \xrightarrow{(1-g)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{(1+g)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{(1-g)} \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

Schneiden wir das $\mathbb{Z}$ am Ende ab und wenden auf den Rest den Funktor der Koinvarianten an, so ergibt sich der Komplex

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

Damit erhalten wir schließlich $\mathrm{H}_0(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}_q(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $q \geq 2$ gerade und $\mathrm{H}_q(G;\mathbb{Z}) = 0$ für q ungerade. Ist allgemeiner A ein G-Modul, so können wir unseren Isomorphismus $\mathrm{H}_q(G;A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ anwenden und dürfen das nach 4.6.13 mithilfe des obigen Komplexes als freie Auflösung des trivialen G-Rechtsmoduls $\mathbb{Z}$ berechnen. So erhalten wir dann eine Beschreibung der Gruppenhomologie $\mathrm{H}_q(G;A)$ als Homologie des Komplexes

$$\ldots \xrightarrow{1-g} A \xrightarrow{1+g} A \xrightarrow{1-g} A$$

Die Gruppenkohomologie berechnen wir ähnlich, indem wir vom Isomorphismus $\mathrm{H}^q(G;A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^q_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ ausgehen und das nach [TD] 2.3.10 mithilfe des obigen Komplexes als freie Auflösung des trivialen G-Linksmoduls $\mathbb{Z}$ berechnen. So ergibt sich die Gruppenkohomologie mit Koeffizienten in A als Kohomologie des Komplexes

$$\ldots \xleftarrow{1-g} A \xleftarrow{1+g} A \xleftarrow{1-g} A$$

3.7.9 (**Gruppenkohomologie über die Standardauflösung**). Sei G eine Gruppe. Um die Bedeutung der Gruppenkohomologie für kleine q zu verstehen, erinnern wir uns daran, daß wir nach [TS] 3.1.1.16 für jede Menge G einen exakten Komplex

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}G^2 \xleftarrow{\partial} \ldots$$

erhalten mit Randoperatoren $\partial(g_0, \ldots, g_q) = \sum(-1)^i(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_q)$ auf den offensichtlichen Basiselementen. Ist G eine Gruppe und lassen wir G auf $G^{\times(q+1)}$

operieren durch die Vorschrift $g(g_0, \ldots, g_q) = (gg_0, \ldots, gg_q)$, so wird unser Komplex eine freie Auflösung des trivialen $\mathbb{Z}G$-Moduls $\mathbb{Z}$. Unter den Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}G)G^q & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}G^{q+1} \\ g_0(g_1, \ldots, g_q) & \mapsto & (g_0, g_0g_1, g_0g_1g_2, \ \ldots, g_0g_1 \ldots g_q) \end{array}$$

stellt sich zwar die $\mathbb{Z}G$-Operation in einfacherer Form dar, der Randoperator wird jedoch komplizierter und wird die $\mathbb{Z}G$-lineare Abbildung $(\mathbb{Z}G)G^q \to (\mathbb{Z}G)G^{q-1}$ vom freien $\mathbb{Z}G$-Modul über G^q in den freien $\mathbb{Z}G$-Modul über G^{q-1}, die auf den freien Erzeugern gegeben wird durch

$$\begin{aligned} \partial(g_1, \ldots, g_q) &= g_1(g_2, \ldots, g_q) + (-1)^q(g_1, \ldots, g_{q-1}) \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^{q-1}(-1)^i(g_1, \ldots, g_ig_{i+1}, \ldots, g_q) \end{aligned}$$

Wir nennen diesen Komplex der $(\mathbb{Z}G)G^q$ die **Standardauflösung**.

Lemma 3.7.10 (**Erste Gruppenkohomologie bei trivialer Operation**). *Operiert eine Gruppe G trivial auf einer abelschen Gruppe A, so liefert die Konstruktion im folgenden Beweis einen natürlichen Isomorphismus zwischen der ersten Kohomologie von G mit Koeffizienten in A und der Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach A, in Formeln*

$$\mathrm{H}^1(G; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Grp}(G, A)$$

Beweis. Die Einskozykel in der Standardauflösung 3.7.9 sind die $\mathbb{Z}G$-Homomorphismen $f : (\mathbb{Z}G)G \to A$ mit $f \circ \partial = 0$. Schränken wir sie ein auf die offensichtliche $\mathbb{Z}G$-Basis G von $(\mathbb{Z}G)G$, so werden Einskozykeln identifiziert mit Abbildungen $f : G \to A$ derart, daß gilt $xf(y) - f(xy) + f(x) = 0$ für alle $x, y \in G$, wo wir der Übersichtlichkeit halber statt g_1, g_2 die Symbole x, y verwenden. Derartige Abbildungen nennt man im allgemeinen **gekreuzte Homomorphismen**. Operiert G trivial auf A, so vereinfacht sich das zu $f(y) + f(x) = f(xy)$ und wir haben den Raum der Einskozykeln identifiziert mit dem Raum aller Gruppenhomomorphismen $\mathrm{Grp}(G, A)$. Die Koränder ihrerseits sind die $\mathbb{Z}G$-Homomorphismen $(\mathbb{Z}G)G \to A$ der Gestalt $f = h \circ \partial$, also der Gestalt $f(x) = xa - a$ für ein $a \in A$, das das Bild des freien Erzeugers $()$ von $(\mathbb{Z}G)G^0$ unter h bedeutet. Operiert G trivial auf A, so sind mithin alle Einskoränder null. $\square$

3.7.11 (**Zweite Gruppenkohomologie und Gruppenerweiterungen**). Seien G eine Gruppe und A ein G-Modul. Die Zweikozykel in der Standardauflösung 3.7.9 sind per definitionem genau die $\mathbb{Z}G$-Homomorphismen $f : (\mathbb{Z}G)G^2 \to A$ mit $f \circ \partial = 0$. Unter Restriktion auf die freien Erzeuger entsprechen sie eineindeutig den Abbildungen $h : G \times G \to A$ derart, daß für alle $x, y, z \in G$ gilt

$xh(y,z) - h(x,y) - h(xy,z) + h(x,yz) = 0$. Solche Abbildungen heißen auch selbst **Zweikozykel** und gegeben solch ein Zweikozykel können wir $A \times G$ zu einer Gruppe E machen vermittels der Verknüpfung

$$(a,x)(b,y) = (a + xb + h(x,y), xy)$$

So erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Gruppen $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$. Man zeigt ohne Schwierigkeiten, daß $\mathrm{H}^2(G;A)$ die Isomorphieklassen von derartigen Erweiterungen bei vorgegebener Operation von G auf A durch Konjugation klassifiziert. Eine zweite kurze exakte Sequenz $A \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow G$ heißt hier isomorph zu $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$, wenn es einen Gruppenisomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & G \\ \| & & \downarrow & & \| \\ A & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & G \end{array}$$

kommutiert. Die Null in $\mathrm{H}^2(G;A)$ entspricht hierbei dem Fall, daß E das semidirekte Produkt ist. Mehr dazu findet man in [Mac63].

Satz 3.7.12 (Gruppen(ko)homologie und singuläre (Ko)homologie). *Seien X ein zusammenziehbarer topologischer Raum und G eine diskrete Gruppe, die topologisch frei von rechts auf X operiert. Sei weiter A eine abelsche Gruppe mit trivialer G-Operation. So konstruieren wir im folgenden Beweis in A und (X,G) natürliche Isomorphismen*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_q(G;A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X/G;A)_{\mathrm{sing}} \\ \mathrm{H}^q(G;A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X/G;A)_{\mathrm{sing}} \end{aligned}$$

3.7.13. Die Homologie beziehungsweise Kohomologie der Gruppe G mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe A mit der trivialen G-Operation ist demnach kanonisch isomorph zur singulären Homologie beziehungsweise Kohomologie des Bahnenraums X/G mit Koeffizienten in A. Morphismen $(X,G) \to (Y,H)$ für die Natürlichkeit in (X,G) sind zu verstehen als Paare (f,φ) aus einer stetigen Abbildung und einem Gruppenhomomorphismus mit $f(xg) = f(x)\varphi(g)$ für alle $x \in X, g \in G$.

Beweis. Man sieht leicht ein, daß der Komplex der singulären Ketten $\mathrm{S}X \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ eine Auflösung von $\mathbb{Z}$ durch freie $\mathbb{Z}G$-Moduln ist. Genauer operiert G nach dem Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Lifts [TF] 2.3.4.13 frei auf der Menge der singulären Simplizes und jedes Repräsentantensystem für die Bahnen ist eine $\mathbb{Z}G$-Basis. Fassen wir unsere Räume von Ketten als $\mathbb{Z}G$-Rechtsmoduln auf, so liefert die Projektion einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$(\mathrm{S}X) \otimes_{\mathbb{Z}G} A \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X/G;A)$$

In der Tat ist das Bild unserer $\mathbb{Z}G$-Basis von $\mathrm{S}X$ ist offensichtlich eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathrm{S}(X/G)$. Gehen wir auf beiden Seiten zur Homologie über, so ergibt sich die erste Behauptung. Fassen wir unsere Räume von Ketten als $\mathbb{Z}G$-Linksmoduln auf, so erkennen wir ähnlich, daß die Projektion einen Isomorphismus von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{S}(X/G), A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathrm{S}X, A)$$

liefert. Gehen wir auf beiden Seiten zur Kohomologie über, so ergibt sich die zweite Behauptung. □

Satz 3.7.14 (Gruppenkohomologie und singuläre Kohomologie, Variante). *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und G eine diskrete Gruppe, die topologisch frei von rechts auf X operiert. Seien weiter A eine abelsche Gruppe mit trivialer G-Operation und $q \geq 0$.*

1. *Gilt $\mathrm{H}_1(X; A)_{\mathrm{sing}} = \ldots = \mathrm{H}_q(X; A)_{\mathrm{sing}} = 0$, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{H}_q(G; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X/G; A)_{\mathrm{sing}}$.*

2. *Gilt $\mathrm{H}^1(X; A)_{\mathrm{sing}} = \ldots = \mathrm{H}^q(X; A)_{\mathrm{sing}} = 0$, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{H}^q(G; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X/G; A)_{\mathrm{sing}}$.*

Beweis. Mutatis mutandis identisch zum Beweis von 3.7.12. □

Beispiel 3.7.15. Betrachten wir auf der Sphäre S^n die Operation der zweielementigen Gruppe $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die jeden Punkt auf den gegenüberliegenden Punkt wirft, so folgt für $q < n$ unmittelbar $\mathrm{H}_q(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; A) \cong \mathrm{H}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; A)$ in Übereinstimmung mit unserer Berechnung der Homologie [TS] 3.5.1.6 der reell-projektiven Räume und unserer Berechnung 3.7.8 der Gruppenhomologie der zweielementigen Gruppe. Ebenso erhalten wir wieder unter der Voraussetzung $q < n$ für die Kohomologie $\mathrm{H}^q(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; A) \cong \mathrm{H}^q(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; A)$.

Übungen

Übung 3.7.16. Man finde für jeden Gruppenhomomorphismus $G \to A$ eine kurze exakte Sequenz von G-Moduln $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, die sein Bild unter den kanonischen Isomorphismen $\mathrm{Grp}(G, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(G; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ im Sinne von [TD] 2.7.7 repräsentiert.

Übung 3.7.17. Gegeben eine abelsche Gruppe A mit einer Operation der Gruppe $G = \mathbb{Z}$, bei der die Eins durch den Automorphismus $T : A \xrightarrow{\sim} A$ operiert, zeige man:

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{Z}; A) \cong \begin{cases} \{a \in A \mid T(a) = a\} & q = 0; \\ A/\operatorname{im}(T - \mathrm{id}) & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Die durch Multiplikation mit $(T-1)$ gegebene Einbettung $\mathbb{Z}[T,T^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{Z}[T,T^{-1}]$ hat den Kokern $\mathbb{Z}$.

Übung 3.7.18 (**Zurückholen in der Gruppenkohomologie**). Gegeben $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und $A \in G\text{-Ab}$ sowie $B \in H\text{-Ab}$ Moduln verstehen wir unter einem **Komorphismus von abelschen Gruppen über** f einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $\phi : B \to A$ mit $\phi(f(g)b) = g\varphi(b)$ für alle $g \in G, b \in B$. Man zeige: Für jeden Komorphismus und jedes q gibt es genau eine Abbildung

$$\mathrm{H}^q\phi : \mathrm{H}^q(H;B) \to \mathrm{H}^q(G;A)$$

derart, daß für je zwei Auflösungen $A \hookrightarrow I^\lhd$ und $B \hookrightarrow J^\lhd$ und jeden Lift von ϕ zu einem Komorphismus $\phi^\lhd : J^\lhd \to I^\lhd$ von Auflösungen über f das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q((J^\lhd)^H) & \overset{\phi^\lhd}{\to} & \mathcal{H}^q((I^\lhd)^G) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathrm{H}^q(H;B) & \overset{\mathrm{H}^q\phi}{\to} & \mathrm{H}^q(G;A) \end{array}$$

kommutiert mit den natürlichen Abbildungen τ aus 3.2.8 in den Vertikalen und der von unserem Lift $\phi^\lhd$ induzierten oberen Horizontalen. Des weiteren gelten die Formeln $\mathrm{H}^q(\phi \circ \psi) = \mathrm{H}^q\psi \circ \mathrm{H}^q\phi$ und $\mathrm{H}^q\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$. Eine gewisse Anschauung im Fall $q = 1$ mag 3.8.5 geben. In 4.3.13 werden wir eine ähnliche Konstruktion kennenlernen, das „Zurückholen in der Garbenkohomologie“.

3.8 Nichtabelsche Kohomologie*

3.8.1. Im folgenden erkläre ich die Bedeutung der ersten Gruppenkohomologie. Operiert eine Gruppe G auf einer abelschen Gruppe A, so hatten wir ja bereits in 3.7.5 die abelschen Gruppen $\mathrm{H}^q(G;A)$ erklärt und im Fall einer trivialen Operation in 3.7.10 einen ausgezeichneten Isomorphismus $\mathrm{H}^1(G;A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Grp}(G,A)$ konstruiert. Ist A nicht notwendig kommutativ, so erklären wir im folgenden eine punktierte Menge

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G;A) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{nichtabelsch}}(G;A)$$

und konstruieren im weiteren im Fall einer abelschen Gruppe eine ausgezeichnete Bijektion zwischen dieser punktierten Menge und der ersten Kohomologie aus 3.7.5 mit der Null als ausgezeichnetem Punkt. Damit können wir dann die Notation auch wieder zu $\mathrm{H}^1(G;A) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G;A)$ vereinfachen.

Definition 3.8.2 (**Nichtabelsche Gruppenkohomologie**). Seien G eine Gruppe und $A \in G\text{-Grp}$ eine Gruppe, auf der G durch Gruppenautomorphismen operiert. Ein **G-äquivarianter A-Torsor** ist ein A-Torsor X mit einer G-Operation derart, daß die Operation $A \times X \to X$ äquivariant ist für G, in Formeln $g(ax) =$

$(ga)(gx)\ \forall g \in G, a \in A, x \in X$. Die Menge aller Isomorphieklassen von G-äquivarianten A-Torsoren mit dem durch die Klasse des trivialen G-äquivarianten A-Torsors $X = A$ gegebenen ausgezeichneten Punkt notieren wir

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G; A) \in \mathrm{Ens}^*$$

und nennen sie die **erste Gruppenkohomologie von G mit Koeffizienten in A**.

Beispiel 3.8.3 (**Erste Gruppenkohomologie bei trivialer Operation**). Gegeben Gruppen G, A mit der Maßgabe, daß G trivial auf A operiert, erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Grp}(G, A)/(\mathrm{int}\, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G; A)$$

durch die Vorschrift, daß wir einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to A$ die A-Menge A mit der G-Operation gegeben durch $gx := x\varphi(g^{-1})$ zuordnen. Der Gruppenhomomorphismus $(\mathrm{int}\, a) \circ \varphi$ führt zu einem isomorphen G-äquivarianten A-Torsor, ein Isomorphismus ist die Multiplikation mit a von rechts.

3.8.4 (**Nichtabelsche Gruppenkohomologie durch kohomologe Zykel**). Um unsere Menge $\mathrm{H}^1_{\mathrm{na}}(G; A)$ von Isomorphieklassen explizit zu beschreiben und dabei mit den Notationen nicht durcheinander zu kommen, benutzen wir die exponentielle Schreibweise für die Operation von G und gehen gleichzeitig zu Rechtsoperationen von G über. Weiter unterscheiden wir die Operation von G auf unserem Torsor X durch Klammern von der Operation von G auf der Gruppe A und schreiben also $x^{(g)} := g^{-1}x$ für $x \in X$ sowie $a^g := g^{-1}a$ für $a \in A$. Unsere Äquivarianzbedingung erhält damit die Gestalt

$$(ax)^{(g)} = a^g x^{(g)}$$

Eine äquivariante G-Operation auf dem A-Torsor $X = A$ ist nun festgelegt durch die Abbildung $z : G \to A, g \mapsto 1^{(g)}$, denn es gilt stets $a^{(g)} = (a1)^{(g)} = a^g z(g)$. Für eine beliebige Abbildung $z : G \to A$ liefert umgekehrt diese Formel für jedes g eine Bijektion $A \xrightarrow{\sim} A$, $a \mapsto a^{(g)}$ mit $(ba)^{(g)} = b^g a^{(g)}$ für alle $a, b \in G$. Diese Bijektionen hinwiederum bilden eine Operation von G auf A genau dann, wenn für alle $a \in A$ und $g, h \in G$ gilt $a^{(gh)} = (a^{(g)})^{(h)}$, also $a^{gh} z(gh) = (a^g z(g))^{(h)} = (a^{gh} z(g)^h) z(h)$, was äquivalent ist zur Bedingung

$$z(gh) = z(g)^h z(h) \ \ \forall g, h \in G$$

Eine Abbildung $z : G \to A$, die diese Bedingung erfüllt, heißt ein **Einskozykel** von G mit Koeffizienten in A. Die Einskozykel parametrisieren mithin diejenigen G-Operationen auf der A-Menge $X = A$, die in der oben beschriebenen Weise verträglich sind mit der vorgegebenen Operation von G auf A durch Gruppenhomomorphismen. Man erkennt sofort, daß für abelsches A diese Einskozykel nichts

anderes sind als unsere Einskozykel der Standardauflösung alias gekreuzten Homomorphismen aus dem Beweis von 3.7.10. Wir brauchen also bereits hier die Spezifikation „nichtabelsch“ nicht mehr und bezeichnen die Menge der Einskozykel mit

$$\mathrm{Z}^1(G;A)$$

Die Automorphismen der A-Menge A sind nun genau die Rechtsmultiplikationen $(\cdot b)$ mit Elementen $b \in A$ und unter der Identifikation $(\cdot b) : A \xrightarrow{\sim} A$ entspricht die äquivariante G-Operation $a \mapsto a^{(g)}$ einer neuen G-Operation gegeben durch $a \mapsto a^{[g]}$ mit $a^{[g]}b = (ab)^{(g)}$ für unser fest gewähltes b. Der Kozykel $w(g) = 1^{[g]}$ zu unserer neuen Operation berechnet sich demnach aus dem Kozykel $z(g) = 1^{(g)}$ der alten Operation vermittels der Formel

$$w(g) = 1^{[g]} = b^{(g)}b^{-1} = b^g z(g) b^{-1}$$

Wir erhalten so eine Beschreibung unserer Kohomologiemenge als Bahnenraum in Gestalt einer Bijektion

$$\mathrm{Z}^1(G;A)/A \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(G;A)$$

Die Standgruppe des ausgezeichneten Zykels $*$ ist dabei die Gruppe der G-Invarianten A^G. Kozykel in derselben Bahn heißen **kohomolog**, unsere Kohomologiemenge ist in dieser Terminologie also die Menge aller Kohomologieklassen von Kozykeln. Für abelsches und additiv notiertes A sind wieder zwei Kozykel kohomolog genau dann, wenn ihre Differenz ein Rand ist im Sinne vom Schluß des Beweises von 3.7.10, folglich erhalten wir für abelsches A in der Tat unser altes H^1 zurück.

3.8.5 (**Nichtabelsche Gruppenkohomologie als Funktor**). Die erste Kohomologie wird ein Funktor in A, indem wir jedem G-äquivarianten Gruppenhomomorphismus alias jedem Morphismus $B \to A$ in $G\text{-}\mathrm{Grp}$ den Morphismus von bepunkteten Mengen $\mathrm{H}^1(G;B) \to \mathrm{H}^1(G;A)$ zuordnen, der von $X \mapsto A \times_{/B} X$ induziert wird. Sie ist andererseits bei festem A auch ein kontravarianter Funktor in G in offensichtlicher Weise. Wir können diese beiden Funktorialitäten auch zusammenfassen und so jedem Komorphismus $B \to A$ von Gruppen mit Operation über einem Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ einen Morphismus von bepunkteten Mengen

$$\mathrm{H}^1(H;B) \to \mathrm{H}^1(G;A)$$

Der Leser mag zur Übung zeigen, daß er im abelschen Fall unter unseren Bijektionen dem Rückzug aus 3.7.18 entspricht.

Beispiel 3.8.6. Für jeden Einskozykel $z : G \to A$ gilt sicher $z(1) = 1$. Im Fall einer zweielementigen Gruppe $G = \{1, \gamma\}$ erhalten wir damit eine Bijekion

$$\mathrm{Z}^1(G;A) \xrightarrow{\sim} \{a \in A \mid 1 = a^\gamma a\}$$

und eine Bijektion zwischen $\mathrm{H}^1(G;A)$ und der Menge der A-Bahnen auf besagter Teilmenge von A unter der A-Operation, die gegeben wird durch die Vorschrift $b \cdot a := b^\gamma a b^{-1}$ für $b \in A$.

3.8.7 (**Diskussion der Terminologie**). Wenn ich von **nichtabelscher Gruppenkohomologie** rede, meine ich $\mathrm{H}^1(G;A)$. Die $\mathrm{H}^q(G;A)$ mit $q > 1$ sind bei uns nur für A abelsch definiert. $\mathrm{H}^0(G;A) = A^G$ nenne ich die **G-Invarianten von A**.

Ergänzung 3.8.8 (**Exakte Sequenzen der nichtabelschen Kohomologie**). Sei G eine Gruppe. Unter einer **punktierten G-Menge** verstehen wir eine Menge A mit einem ausgezeichneten Punkt und einer Operation von G, die diesen Punkt festhält. Wir setzen dann $\mathrm{H}^0(G;A) := A^G$ und betrachten das als eine Menge mit demselben ausgezeichneten Punkt. Die folgenden unter immer stärkeren Voraussetzungen immer längeren exakten Sequenzen von punktierten Mengen sind kein so starkes Hilfsmittel wie exakte Sequenzen von Gruppen, helfen aber manchmal weiter.

1. Ist $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ eine kurze exakte Sequenz von punktierten G-Mengen im Sinne von [LA2] 4.6.7.3, so erhalten wir eine linksexakte Sequenz $A^G \hookrightarrow B^G \to C^G$ alias

$$\mathrm{H}^0(G;A) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(G;B) \to \mathrm{H}^0(G;C)$$

von punktierten Mengen.

2. Ist A eine Gruppe und B eine punktierte Menge mit freier G-äquivarianter A-Operation von links und sind die Fasern von $B \twoheadrightarrow C$ gerade die A-Bahnen, so erklären wir $\partial : \mathrm{H}^0(G;C) \to \mathrm{H}^1(G;A)$ wie folgt: Gegeben $c \in C^G$ wählen wir $b \in B$ mit $b \mapsto c$ und definieren $z = z_b : G \to A$ durch $z(g)b = b^g$. Dann gilt $z(g)^\beta z(\beta)b = z(g)^\beta b^\beta = b^{g\beta}$, folglich ist z_b ein Element von $\mathrm{Z}^1(G;A)$. Eine andere Wahl ab führt zu $z_{ab}(g)(ab) = (ab)^g$ und damit gilt $(a^g)^{-1} z_{ab}(g) a = z_b(g)$ und wir erhalten einen homologen 1-Kozykel. Auf diese Weise liefert jedes $c \in C^G$ eine wohlbestimmte Klasse $\partial c \in \mathrm{H}^1(G;A)$. Damit erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^0(G;A) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(G;B) \to \mathrm{H}^0(G;C) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(G;A)$$

In der Tat, hat $c \in C^G$ ein Urbild $b \in B^G$, so ist ∂c die Klasse des konstanten 1-Kozykels z_b. Ist umgekehrt $b \in B$ ein Urbild von $c \in C^G$ und ist z_b homolog zum konstanten 1-Kozykel, gibt es also $a \in A$ mit $z_b(g) = a^g a^{-1}$ für alle $g \in G$, gilt also $a^g a^{-1} b = b^g \quad \forall g \in G$, so gilt $a^{-1} b \in B^G$ und das ist ein G-invariantes Urbild von c.

3. Ist $A \hookrightarrow B$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus und $C = \{Ab \mid b \in B\} \subset \mathcal{P}(B)$ der Raum der Linksnebenklassen, so erhalten wir sogar eine exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^0(G;A) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(G;B) \to \mathrm{H}^0(G;C) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(G;A) \to \mathrm{H}^1(G;B)$$

In der Tat, wird ein 1-Kozykel $z : G \to A$ nullhomolog in $\mathrm{H}^1(G;B)$, so gibt es $b \in B$ mit $z(g) = b^g b^{-1} \quad \forall g$ und dann ist $z = z_b = \partial c$ für $c \in C^G$ das Bild von b. Umgekehrt ist auch klar, daß jedes ∂c in $\mathrm{H}^1(G;B)$ triviales Bild hat.

4. Ist $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen, so haben wir sogar eine exakte Sechs-Term-Sequenz

$$A^G \hookrightarrow B^G \twoheadrightarrow C^G \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(G;A) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1(G;B) \to \mathrm{H}^1(G;C)$$

und haben H^0 umgeschrieben, damit sie in eine Zeile paßt. In der Tat geht jeder 1-Kozykel aus A natürlich auf den trivialen 1-Kozykel in C. Ist andererseits $z : G \to B$ ein 1-Kozykel, der trivial wird in $\mathrm{H}^1(G;C)$, so gibt es $c \in C$ mit $\overline{z(g)} = c^g c^{-1} \quad \forall g \in G$. Für jedes Urbild $b \in B$ von c folgt $w(g) := (b^g)^{-1} z(g) b \in A$ und so ist z homolog zu $w \in \mathrm{Z}^1(G;A)$.

5. Liegt zusätzlich das Bild von A im Zentrum von B, so können wir unsere Sequenz um noch einen weiteren Schritt zu einer exakten Sieben-Term-Sequenz

$$A^G \hookrightarrow B^G \twoheadrightarrow C^G \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(G;A) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1(G;B) \to \mathrm{H}^1(G;C) \to \mathrm{H}^2(G;A)$$

verlängern. Das sei dem Leser zur Übung überlassen.

Vorschau 3.8.9 (**Gruppenkohomologie und Garbenkohomologie**). Ich will nun einige der bis hierher besprochenen Kohomologien in einen gemeinsamen Kontext setzen.

1. Gegeben eine Gruppe G und eine G-Gruppe A klassifiziert die nichtabelsche Gruppenkohomologie $\mathrm{H}^1(G;A)$ diejenigen G-Mengen mit G-äquivarianter A-Operation, die unter Vergessen der G-Wirkung isomorph werden zu A selber;

2. Gegeben ein topologischer Raum X und eine Gruppengarbe $\mathcal{A} \in \mathrm{Grp}_{/X}$ klassifiziert die nichtabelsche Čech-Kohomologie $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{A})$ diejenigen Mengengarben auf X mit $\mathcal{A}$-Operation, die unter dem Rückzug auf alle Mengen einer offenen Überdeckung von X isomorph werden zu $\mathcal{A}$ selber;

3. Als gemeinsame Verallgemeinerung mag man „G-äquivariante Gruppengarben $\mathcal{A}$ auf einem topologischen Raum mit Operation einer Gruppe $G\backslash X$“ betrachten, und warum nicht gleich für eine topologische Gruppe G, und warum nicht gleich statt Gruppengarben beliebige nicht notwendig étale Gruppenobjekte $\mathcal{A} \in \mathrm{Top}_X$. Die Menge der Isomorphieklassen mag man dann
$$\mathrm{H}^1(G\backslash X; \mathcal{A})$$
notieren und unsere bisherigen Konstruktionen als Spezialfälle betrachten.

3.8.10 (**Topologische nichtabelsche Gruppenkohomologie**). Die Definition der nichtabelschen ersten Gruppenkohomologie 3.8.2 bleibt sinnvoll, wenn wir statt mit Mengen vielmehr mit topologischen Räumen arbeiten. Dann sind also G und A topologische Gruppen, die Operationen $G \times A \to A$ und $G \times X \to X$ sollen stetig sein, und X soll die Topologie als homogener Raum von A tragen. Wollen wir besonders betonen, daß unsere Kohomologie in dieser Weise verstanden werden soll, so schreiben wir $\mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(G; A)$. Eine Anwendung diskutieren wir in [AL] 6.6.4.12.

3.8.11. Im topologischen Fall erhalten wir genauso eine kanonische Bijektion
$$(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{st}}(G; A)/\sim) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(G; A)$$
zwischen den Klassen stetiger 1-Zykel $z : G \to A$ und der entsprechenden Kohomologiemenge.

4 Berechnung der Garbenkohomologie

4.1 Welke Garben

Definition 4.1.1. Eine Garbe heißt **welk**, englisch **flabby** und französisch **flasque**, wenn sich jeder Schnitt auf einer offenen Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

Lemma 4.1.2. *Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X.*

1. *Ist $\mathcal{F}'$ welk, so induziert der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}''$ auf den globalen Schnitten;*

2. *Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ welk, so ist auch $\mathcal{F}''$ welk.*

Beweis. 1. Sei $s'' \in \Gamma\mathcal{F}''$ ein globaler Schnitt. Wir betrachten die Menge aller Paare (U, s_U) mit $U \Subset X$ und $s_U \in \mathcal{F}(U)$ einem Urbild von $s''|_U$. Diese Menge ist in natürlicher Weise induktiv teilgeordnet und besitzt nach Zorn ein maximales Element. Ist nun (U, s_U) so ein maximales Element und wäre $U \neq X$, so fänden wir $x \in X \backslash U$ und aufgrund der Surjektivität $\mathcal{F}_x \twoheadrightarrow \mathcal{F}''_x$ eine offene Umgebung V von x sowie $s_V \in \mathcal{F}(V)$ mit $s_V \mapsto s''|_V$. Es folgt

$$s_V|_{U\cap V} - s_U|_{U\cap V} \in \mathcal{F}'(U \cap V)$$

Setzen wir diese Differenz fort zu einem Schnitt $t_V \in \mathcal{F}'(V)$ über V der welken Garbe $\mathcal{F}'$, so stimmen $(s_V - t_V)$ und s_U überein auf $U \cap V$ und verkleben folglich zu einem Urbild von s'' auf $U \cup V$, das s_U fortsetzt. Das steht jedoch im Widerspruch zur Maximalität von (U, s_U) und wir hatten doch $U = X$. Teil 2 folgt aus Teil 1, da die Restriktionen welker Garben auf offene Teilmengen wieder welk sind. □

Satz 4.1.3 (Azyklizität welker Garben für globale Schnitte). *Welke abelsche Garben auf einem topologischen Raum sind azyklisch für den Funktor der globalen Schnitte.*

Beweis. Wir werden in 4.1.5 zeigen, daß jede injektive abelsche Garbe welk ist. Auch hier aber zeigt unser Beweis 3.5.1 für die Existenz von genug injektiven Objekten in der Kategorie der abelschen Garben schon, daß jede abelsche Garbe in eine welke injektive abelsche Garbe eingebettet werden kann. Jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ besitzt also eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \ldots$ durch welke injektive Garben. Wir zerlegen sie in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{I}^0 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^1 & & & & & & \\
 & & & & \mathcal{K}^1 & \hookrightarrow & \mathcal{I}^1 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^2 & & \\
 & & & & & & & & \mathcal{K}^2 & \hookrightarrow & \mathcal{I}^2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^3 \\
 & & & & & & & & & & & & \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Mit dem vorhergehenden Lemma 4.1.2 erkennen wir, daß für welkes $\mathcal{F}$ alle Garben in diesen kurzen exakten Sequenzen welk sind. Mit demselben Lemma erkennen wir weiter, daß alle unsere Sequenzen kurz exakt bleiben unter Γ. Das zeigt aber, daß der Komplex $0 \to \Gamma\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{I}^0 \to \Gamma\mathcal{I}^1 \to \ldots$ exakt ist. $\square$

4.1.4. Sei $X = U \cup V$ eine Überdeckung eines topologischen Raums durch zwei offene Teilmengen und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}^{\lhd}$ eine welke Auflösung. So erhalten wir mit $s \mapsto (s|_U, s|_V)$ und $(s,t) \mapsto s|_{U\cap V} - t|_{U\cap V}$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\Gamma(X;\mathcal{W}^{\lhd}) \hookrightarrow \Gamma(U;\mathcal{W}^{\lhd}) \oplus \Gamma(V;\mathcal{W}^{\lhd}) \twoheadrightarrow \Gamma(U\cap V;\mathcal{W}^{\lhd})$$

Offensichtlich sind Restriktionen welker Garben auf offene Teilmengen wieder welk. Die zugehörige lange exakte Sequenz, die **Mayer-Vietoris-Sequenz der Garbenkohomologie**, hat demnach die Gestalt

$$\ldots \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(U;\mathcal{F}) \oplus \mathrm{H}^q(V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(U\cap V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^{q+1}(X;\mathcal{F}) \ldots$$

Die Existenz welker injektiver Auflösungen zeigt, daß auch die Randabbildungen dieser Sequenz nicht von der gewählten welken Auflösung abhängen.

Übungen

Übung 4.1.5 (**Injektive Garben sind welk**). Gegeben $U \Subset X$ eine offene Teilmenge eines topologischen Raums erklären wir eine Untergarbe

$$\mathbb{Z}_{U\subset X} \subset \mathbb{Z}_X$$

dadurch, daß wir ihren étalen Raum erklären als die Teilmenge vom étalen Raum $X \times \mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}_X$ aller Paare (x,n) mit $n \neq 0 \Rightarrow x \in U$. Gegeben eine weitere abelsche Garbe $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ erhalten wir mit den natürlichen Identifikationen in den Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{G}) \arrow[r] & \mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_{U\subset X}, \mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist jede injektive Garbe welk. In 4.9.12 werden wir unsere Konstruktion der Garbe $\mathbb{Z}_{U\subset X}$ als eine spezielle „Ausdehnung durch Null“ verstehen lernen und in 4.9.17 unser Argument nocheinmal in einer neuen Notation wiederholen.

Übung 4.1.6 (**Kriterium für Azyklizität**). Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sei $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor. Sei $\mathcal{W} \subset \mathcal{A}$ eine Menge von Objekten, die die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. Jede kurze exakte Sequenz $F' \hookrightarrow F \twoheadrightarrow F''$ in $\mathcal{A}$ mit $F' \in \mathcal{W}$ bleibt unter Γ eine kurze exakte Sequenz;

2. Gegeben kurze exakte Sequenz $F' \hookrightarrow F \twoheadrightarrow F''$ in $\mathcal{A}$ mit $F', F \in \mathcal{W}$ folgt $F'' \in \mathcal{W}$;

3. Jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ läßt sich einbetten in ein injektives Objekt von $\mathcal{A}$, das zusätzlich in $\mathcal{W}$ liegt.

So besteht $\mathcal{W}$ aus Γ-azyklischen Objekten. Hinweis: Man wiederhole die Argumentation aus dem vorhergehenden Abschnitt.

4.2 Garbenkohomologie der Zahlengeraden

Definition 4.2.1. Wir nennen eine Garbe **punktweich**, wenn ihre globalen Schnitte surjektiv auf alle Halme gehen.

Lemma 4.2.2. *Seien $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}'$ punktweich. So gilt:*

1. *Der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ induziert eine Surjektion auf den globalen Schnitten;*

2. *Ist zusätzlich $\mathcal{F}$ welk, so ist auch $\mathcal{F}''$ welk.*

Beweis. Gegeben ein Schnitt $s'' \in \mathcal{F}''(D)$ finden wir eine Überdeckung von D durch ein System $\mathcal{V}$ offener Teilmengen $V \Subset \mathbb{R}$ und Schnitte $s_V \in \mathcal{F}(V \cap D)$ mit $s_V \mapsto s''|_{V \cap D}$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Die Vereinigung aller $V \in \mathcal{V}$ ist sicher eine disjunkte Vereinigung nichtleerer offener reeller Intervalle. Wir dürfen beim Beweis von Teil 1 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sie bereits selbst solch ein Intervall und dann, daß sie sogar bereits selbst ganz $\mathbb{R}$ ist. Jede offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von $\mathbb{R}$ besitzt nun eine Verfeinerung zu einer Überdeckung durch ein System von offenen Intervallen

$$U_i := (a_i, b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

mit $a_i < b_{i-1} < a_{i+1} < b_i$ für alle i. In der Tat finden wir für jedes $r \in \mathbb{Z}$ nach dem Lebesgue'schen Überdeckungssatz ein $c(r) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ derart, daß für alle $x \in [r, r+1]$ das Intervall $(x - 1/c(r), x + 1/c(r))$ ganz in einer Menge aus $\mathcal{V}$ enthalten ist. Wählen wir nun $\alpha \in (1/2, 1)$ beliebig, so bilden die Intervalle $(r - \alpha/c(r-1), r + \alpha/c(r))$ und $(r + \nu/c(r) - \alpha/c(r), r + \nu/c(r) + \alpha/c(r))$ für $1 \leq \nu < c(r)$ bei geeigneter Nummerierung ein System von Intervallen der beschriebenen Art. Nach Konstruktion finden wir stets ein Urbild $s_i \in \mathcal{F}(U_i \cap D)$

der Restriktion $s''_i \in \mathcal{F}''(U_i \cap D)$ von s'' auf $U_i \cap D$. Jetzt wählen wir, wann immer diese Menge nicht leer ist, einen Punkt

$$x_i \in U_i \cap U_{i+1} \cap D$$

und wählen dann zusätzlich ein $t_i \in \mathcal{F}'(D)$, das im Halm von $\mathcal{F}$ bei x_i dasselbe Bild hat wie $s_i - s_{i+1}$, und eine offene Umgebung $W_i \subset U_i \cap U_{i+1}$ von x_i in $\mathbb{R}$ derart, daß t_i sogar auf ganz $W_i \cap D$ mit $s_i - s_{i+1}$ übereinstimmt. Ist $U_i \cap U_{i+1} \cap D$ leer, setzen wir dahingegen $W_i := U_i \cap U_{i+1}$ und nehmen $t_i \in \mathcal{F}'(D)$ beliebig. Dann verkleinern wir unsere U_i zu offenen Intervallen U'_i derart, daß ihre Vereinigung immer noch ganz $\mathbb{R}$ ist und daß gilt $U'_i \cap U'_{i+1} \subset W_i$ für alle i. Schließlich verkleben die Schnitte auf den $U'_i \cap D$, die gegeben werden durch $s_i + t_{i-1} + \ldots + t_0$ für $i \geq 1$ und s_0 für $i = 0$ und $s_i - t_i - t_{i+1} - \ldots - t_{-1}$ für $i \leq -1$, zu dem gesuchten globalen Schnitt $s \in \mathcal{F}(D)$ mit $s \mapsto s''$. Die zweite Behauptung in unserem Lemma folgt offensichtlich aus der Ersten. $\square$

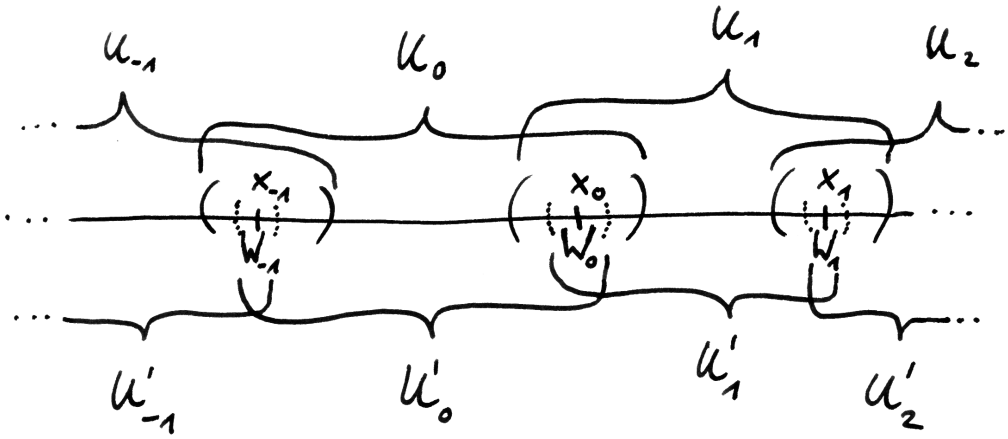


Illustration zum Beweis von 4.2.2.

Satz 4.2.3 (**Garbenkohomologie von Teilmengen** $D \subset \mathbb{R}$)**.** *Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{H}^q(D; \mathcal{F}) = 0$ für $q > 1$ und bei punktweichem $\mathcal{F}$ sogar für $q > 0$.*

Beispiele 4.2.4. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres reelles Intervall und M eine abelsche Gruppe und M_I die zugehörige konstante Garbe auf I, so liefert das Bilden der konstanten Schnitte einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} \Gamma(I; M_I)$ und die höhere Garbenkohomologie von M_I verschwindet, in Formeln $\mathrm{H}^q(I; M_I) = 0$ für $q > 0$,

denn jede konstante Garbe ist punktweich. Ebenso folgt $\mathrm{H}^q(\mathbb{Q};\mathcal{F}) = 0$ für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf dem topologischen Raum $\mathbb{Q}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie und alle $q > 0$, denn offensichtlich ist jede abelsche Garbe auf $\mathbb{Q}$ punktweich.

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ punktweich, so finden wir nach 4.2.2 eine kurze exakte Sequenz $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{G}^1$ mit $\mathcal{G}^0$ und $\mathcal{G}^1$ welk. Da welke Garben globale-Schnitte-azyklisch sind und da nach 3.6.8 zur Berechnung der Kohomologie jede azyklische Auflösung herangezogen werden kann, folgt $\mathrm{H}^q(D;\mathcal{F}) = 0$ für $q > 1$ und $\mathrm{H}^1(D;\mathcal{F}) = \mathrm{coker}(\Gamma\mathcal{G}^0 \to \Gamma\mathcal{G}^1) = 0$, die letzte Gleichheit wieder nach 4.2.2. Für allgemeines $\mathcal{F}$ finden wir eine kurze exakte Sequenz $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{G}^1$ mit $\mathcal{G}^0$ welk. Als Quotient einer punktweichen Garbe ist dann $\mathcal{G}^1$ punktweich und damit azyklisch nach dem bereits behandelten Fall. Der Satz folgt dann wieder mit unserer Erkenntnis 3.6.8, daß zur Berechnung der Kohomologie jede Auflösung durch Γ-azyklische abelsche Garben herangezogen werden kann. $\square$

4.3 Zurückholen in der Garbenkohomologie

Definition 4.3.1. Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ Mengengarben. Ein **Komorphismus** $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ **über** f ist eine Vorschrift ϕ, die beliebigen $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ mit $f(U) \subset V$ eine Abbildung

$$\phi_{UV} : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

in der Gegenrichtung so zuordnet, daß diese Abbildungen in der offensichtlichen Weise mit Restriktionen auf offene Teilmengen $U_1 \Subset U$ und $V_1 \Subset V$ mit $f(U_1) \subset V_1$ verträglich sind. Wir notieren $\mathrm{Ens}_{/f^\circ}(\mathcal{G},\mathcal{F})$ die Menge dieser Komorphismen. Komorphismen über der Identität sind gewöhnliche Homomorphismen von Mengengarben.

4.3.2. Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ Mengengarben. Einen **Opkomorphismus** $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ **über** f erklären wir als einen Komorphismus $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f in die Gegenrichtung und verwenden die Notation $\varphi = \phi^\circ$ für den Komorphismus ϕ aufgefaßt als Opkomorphismus. Die Menge der Opkomorphismen über f notieren wir

$$\mathrm{Ens}_{/\!/f}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

Opkomorphismen über der Identität $f = \mathrm{id}_X$ auf X notieren wir $\mathrm{Ens}_{/\!/X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Man beachte $\mathrm{Ens}_{/\!/X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \mathrm{Ens}_{/X}(\mathcal{G},\mathcal{F})$. Wir erklären $\mathrm{Ens}_{/\!/X} := \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}_{/X}$ als die opponierte Kategorie.

4.3.3. Allgemeiner erklären wir in der offensichtlichen Weise Komorphismen und Opkomorphismen von Garben, ja sogar von Prägarben mit Werten in einer beliebigen Kategorie und insbesondere die Menge $\mathrm{Ab}_{/\!/f}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ der Opkomorphismen von abelschen Garben über f.

Beispiel 4.3.4 (**Transportmorphismen für konstante Garben**). Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine Menge M erhalten wir einen Komorphismus $M_Y \to M_X$ von Mengengarben über f zwischen den jeweiligen konstanten Garben durch das „Vorschalten von f". Genauer ist ja $M_Y(V) = \mathrm{Top}(V, M)$ für $V \Subset Y$ die Menge der stetigen Abbildungen für die diskrete Topologie auf M und gegeben $U \Subset X$ mit $f(U) \subset V$ ist das Vorschlaten ein Abbildung $(\circ f) : M_Y(V) \to M_X(U)$. Den zugehörigen Opkomorphismus notieren wir

$$\tau = \tau_f = \tau_{f,M} : M_X \to M_Y$$

Analog geht es für Gruppengarben und konstante Prägarben und deren Garbifizierungen, wenn es sie denn gibt. Im Rahmen der Diskussion von Faserfunktoren werden sich diese Komorphismen als spezielle „Transportmorphismen" erweisen.

4.3.5 (**Komposition von Opkomorphismen**). Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ sowie Mengengarben $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ über X, Y, Z sowie ein Opkomorphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über f und ein Opkomorphismus $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ über g bildet man in offensichtlicher Weise einen Opkomorphismus $\psi \circ \phi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ über $g \circ f$. Für unsere Transportmorphismen aus 4.3.4 finden wir $\tau_{g\circ f} = \tau_f \circ \tau_g$ und $\tau_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$. Analoges gilt für Prägarben mit Werten in beliebigen Kategorien.

4.3.6 (**Vorschub von Garben**). Gegeben $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ eine Mengenprägarbe erklären wir ihren **Vorschub** oder auch ihr **direktes Bild** $f_*\mathcal{F}$ als die Mengenprägarbe auf Y gegeben durch

$$(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

Offensichtlich ist der Vorschub einer Garbe wieder eine Garbe. Wir erhalten so einen Funktor $f_* : \mathrm{Ens}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/Y}$. Gegeben ein globaler Schnitt $s \in \Gamma(\mathcal{F})$ notiere ich $f_*(s) \in \Gamma(f_*\mathcal{F})$ sein Bild. Das Vorschalten des offensichtlichen Opkomorphismus $\kappa : \mathcal{F} \to f_*\mathcal{F}$ liefert für jede Mengengarbe $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ eine Bijektion

$$(\circ\kappa) : \mathrm{Ens}_{/\!/Y}(f_*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Analog geht es für Prägarben mit Werten in beliebigen Kategorien.

4.3.7. Der Vorschub von Mengengarben und Mengenprägarben ist verträglich mit endlichen, ja mit beliebigen Produkten. Dasselbe gilt für abelsche Garben. In anderen Worten ist der Vorschub von abelschen Garben ist ein additiver Funktor im Sinne von 2.5.16.

4.3.8. Für den étalen Raum des Vorschubs einer Mengengarbe habe ich nur im Fall einer abgeschlossenen Einbettung eine gewisse Anschauung, die sich auf das anschließende Beispiel und die Beschreibung 2.2.19 des étalen Raums eines Wolkenkratzers stützt. Salopp gesprochen ist der Vorschub algebraisch sehr einfach, aber verheerend unanschaulich.

4.3.9. Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gelten für den Vorschub offensichtlich die Identitäten $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ und $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}$. Wir werden das im Rahmen der sogenannten Faserfunktoren noch sehr viel ausführlicher diskutieren.

4.3.10 (**Wolkenkratzer als Vorschub**). Sei (X, x) ein bepunkteter topologischer Raum. Bezeichne $\mathrm{em}_x : \mathrm{top} \hookrightarrow X$ die zugehörige Einbettung oder englisch „embedding“ des Einpunktraums. So erhalten wir für jede Menge G einen Isomorphismus

$$G_{(x)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{em}_{x*} G_{\mathrm{top}}$$

durch die Abbildungen $G_{(x)}(U) \xrightarrow{\sim} G_{\mathrm{top}}(\mathrm{em}_x^{-1}(U))$, die im Fall $x \in U$ jedem $g \in G = G_{(x)}(U)$ die entsprechende einwertige Abbildung $g \in G_{\mathrm{top}}(\mathrm{top})$ zuordnen und im Fall $x \notin U$ dem einzigen Element von $G_{(x)}(U)$ das einzige Element von $G_{\mathrm{top}}(\emptyset)$. Der Vorschub unter unserer Einbettung macht also aus einer Menge G, aufgefaßt vermittels 1.3.6 als Mengengarbe auf dem einpunktigen topologischen Raum top, den Wolkenkratzer $G_{(x)}$ mit Faser G bei x.

4.3.11 (**Inkompatibilität von Vorschub und Garbifizierung**). Der Vorschub von Prägarben vertauscht nicht mit Garbifizierung. Bezeichnet genauer und in Formeln f_*^{p} den Vorschub von Prägarben, so ist die von der universellen Eigenschaft der Garbifizierung herkommende Abbildung $(f_*^{\mathrm{p}}\mathcal{F})^+ \to f_*(\mathcal{F}^+)$ im allgemeinen kein Isomorphismus. Man sieht das schon im Beispiel der Projektion f auf einen Punkt.

4.3.12 (**Motivation**). Nach Konstruktion sind die Garbenkohomologien für jeden Raum X additive Funktoren $\mathrm{H}^q(X;\ ) : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$. Umgekehrt und fast noch wichtiger liefern sie, wie wir im folgenden sehen werden, auch für jede feste abelsche Gruppe G Funktoren $\mathrm{H}^q(\ ; G) : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Weil es von der Argumentation her natürlicher ist, diskutieren wir gleich eine gemeinsame Verallgemeinerung und konstruieren zu jeder stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und jedem Opkomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von abelschen Garben über f das Zurückholen $\varphi^* = (f, \varphi)^* : \mathrm{H}^q(Y; \mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$.

Satz 4.3.13 (**Zurückholen in der Garbenkohomologie**). *Gegeben $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Opkomorphismus von abelschen Garben über f gibt es für jedes q genau eine Abbildung*

$$(f, \varphi)^* : \mathrm{H}^q(Y; \mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$$

derart, daß für je zwei Auflösungen $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^\lhd$ und $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\lhd$ und jeden Lift von φ zu einem Opkomorphismus $\varphi^\lhd : \mathcal{A}^\lhd \to \mathcal{B}^\lhd$ von Auflösungen über f das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{B}^\lhd & \xrightarrow{(\varphi^\lhd)^\circ} & \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{A}^\lhd \\ \tau\downarrow & & \downarrow\tau \\ \mathrm{H}^q(Y;\mathcal{G}) & \xrightarrow{(f,\varphi)^*} & \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F}) \end{array}$$

kommutiert mit den natürlichen Abbildungen τ aus 3.2.8 in den Vertikalen und der von unserem Lift $\varphi^\lhd$ induzierten oberen Horizontalen. Unsere Abbildungen $(f,\varphi)^*$ sind Gruppenhomomorphismen und es gilt $(f,\varphi)^*\circ(g,\psi)^* = (g\circ f,\psi\circ\varphi)^*$ sowie $(\mathrm{id},\mathrm{id})^* = \mathrm{id}$.

4.3.14. Der Beweis muß auf die Entwicklung einiger Hilfsmittel warten und kommt später in diesem Abschnitt.

4.3.15 (**Zurückholen im Fall von konstanten Koeffizienten**). Insbesondere erhalten wir für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ und jede abelsche Gruppe G einen Gruppenhomomorphismus

$$f^* = (f,\tau_f)^* : \mathrm{H}^q(Y;G_Y)_{\mathrm{garb}} \to \mathrm{H}^q(X;G_X)_{\mathrm{garb}}$$

aus dem Opkomorphismus $\tau_f : G_X \to G_Y$ über f nach 4.3.4, das **Zurückholen**. In der üblichen Verkürzung liest er sich

$$f^* : \mathrm{H}^q(Y;G) \to \mathrm{H}^q(X;G)$$

Mithilfe unserer Identitäten $\tau_{g\circ f} = \tau_g \circ \tau_f$ und $\tau_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ aus 4.3.5 liefert die Garbenkohomologie dann eine Folge von Funktoren $\mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}} : \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ab}$.

Vorschau 4.3.16. Daß das Zurückholen auf der Garbenkohomologie mit konstanten Koeffizienten ein Ringhomomorphismus ist, zeigen wir in [TD] 2.6.19 im Rahmen der derivierten Kategorien. In 5.3.11 zeigen wir, daß sich das Zurückholen unter glatten Abbildungen in der de-Rham-Kohomologie durch das Zurückholen glatter Differentialformen berechnen läßt, und in **??**, daß es in der singulären Kohomologie dem gewöhnlichen Zurückholen [TS] 3.6.1.1 entspricht. In [TSF] 3.4.10 erklären wir, wie das Zurückholen im Formalismus der sechs Funktoren verstanden werden kann.

Satz 4.3.17 (**Rückzug von Garben**). *Gegeben $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung besitzt der Vorschub $f_* : \mathrm{Ens}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/Y}$ von Mengengarben einen Linksadjungierten, den* **Rückzug** *$f^* : \mathrm{Ens}_{/Y} \to \mathrm{Ens}_{/X}$.*

Beweis. Man erklärt zu $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ zunächst eine Prägarbe $f^*_{\mathrm{p}}\mathcal{G} \in \mathrm{pEns}_{/X}$ durch die Vorschrift

$$(f^*_{\mathrm{p}}\mathcal{G})(U) := \mathrm{colf}_{V\supset f(U)}\,\mathcal{G}(V)$$

für $U \Subset X$, wo der Kolimes über alle $V \Subset Y$ mit $f(U) \subset V$ zu bilden ist und wir als Restriktionsabbildungen die natürlichen Abbildungen „vom kleineren zum größeren Kolimes“ nehmen. Dann erklärt man $f^*\mathcal{G} := (f_{\mathrm{p}}^*\mathcal{G})^+$ als die Garbifizierung dieser Prägarbe. Die Adjunktionsisomorphismen schließlich werden in der Sprache der Komorphismen konstruiert als die Kompositionen

$$\mathrm{Ens}_{/X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{pEns}_{/X}(f_{\mathrm{p}}^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pEns}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Hierbei wird die erste horizontale Bijektion durch die universelle Eigenschaft der Garbifizierung erklärt, die mittlere Bijektion folgt aus der universellen Eigenschaft von Kolimites und die letzte ist das Nachschalten des offensichtlichen Komorphismus $\kappa^\circ : f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ über f. $\square$

4.3.18 (**Halm als Rückzug**). Sei (X, x) ein bepunkteter topologischer Raum. Bezeichne $\mathrm{em}_x : \mathrm{top} \hookrightarrow X$ die zugehörige Einbettung oder englisch „embedding“ des Einpunktraums. So erhalten wir für jede Mengengarbe $\mathcal{G}$ auf X eine Bijektion

$$\Gamma(\mathrm{em}_x^*\,\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_x$$

aus der Erkenntnis, daß in diesem Fall $(\mathrm{em}_x)_{\mathrm{p}}^*\mathcal{G}$ bereits eine Garbe ist, deren globale Schnitte durch denselben Kolimes beschrieben werden wie der Halm $\mathcal{G}_x$.

4.3.19 (**Rückzug abelscher Garben**). Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ besitzt auch für abelsche Garben der Vorschub $f_* : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ einen Linksadjungierten $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$, der wie im Fall 4.3.17 von Garben von Mengen konstruiert werden kann. Alternativ mag man bemerken, daß der Rückzug von Mengengarben verträglich ist mit endlichen Produkten und somit abelsche Garben zu abelschen Garben macht.

4.3.20 (**Exaktheit des Rückzugs von Garben**). Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ liefern die Identitäten $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ und $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}$ für den Vorschub nach 4.3.9 Isotransformationen $f^* \circ g^* \xRightarrow{\sim} (g \circ f)^*$ und $(\mathrm{id}_X)^* \xRightarrow{\sim} \mathrm{id}$ der Adjungierten. Wir werden das im Rahmen unserer Diskussion von Faserfunktoren noch ausführlicher diskutieren. Hier folgern wir nur, daß die Rückzüge f^* auf abelschen Garben exakt sind. Ist in der Tat $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ eine exakte Sequenz abelscher Garben auf Y, so ist wegen $f \circ \mathrm{em}_x = \mathrm{em}_{f(x)} : \mathrm{top} \to Y$ die Sequenz der Halme $(f^*\mathcal{F})_x \to (f^*\mathcal{G})_x \to (f^*\mathcal{H})_x$ isomorph zur Sequenz der Halme $\mathcal{F}_{f(x)} \to \mathcal{G}_{f(x)} \to \mathcal{H}_{f(x)}$ und damit auch exakt.

4.3.21 (**Additivität von Rückzug und Vorschub abelscher Garben**). Wir erinnern aus 2.5.27, daß jeder links- oder rechtsexakte Funktor zwischen abelschen Kategorien additiv ist. Insbesondere ist also der Rückzug abelscher Garben ein additiver Funktor. Weiter erinnern wir aus 2.5.27, daß jeder Funktor zwischen additiven Kategorien, der einen Rechts- oder Linksadjungierten besitzt, additiv ist. Insbesondere ist also auch der Vorschub abelscher Garben ein additiver Funktor. Beide Aussagen lassen sich aber auch ohne alle Theorie leicht direkt prüfen.

Beispiel 4.3.22. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert der Komorphismus $\tau_f^\circ : \mathbb{Z}_Y \to \mathbb{Z}_X$ über f aus 4.3.4 einen Isomorphismus $f^*\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$.

4.3.23. Der Rückzug abelscher Garben vertauscht als linksadjungierter Funktor nach [TS] 3.7.1.31 mit direkten Summen und allgemeiner mit Kolimites. Es vertauscht jedoch nicht mit Limites, ja noch nicht einmal mit beliebigen Produkten, und das noch nicht einmal bei der Restriktion auf einzelne Punkte, vergleiche 2.2.55.

4.3.24. Besitzt ein Funktor von präabelschen Kategorien einen Linksadjungierten, so ist er nach 2.4.13 linksexakt. Insbesondere ist der Vorschub von abelschen Garben ein linksexakter Funktor. Besitzt ein Funktor zwischen abelschen Kategorien sogar einen exakten Linksadjungierten, so macht er offensichtlich injektive Objekte zu injektiven Objekten. Insbesondere ist der Vorschub einer injektiven abelschen Garbe stets wieder eine injektive abelsche Garbe.

Beweis zum Zurückholen von Garbenkohomologie 4.3.13. Ein Opkomorphismus abelscher Garben $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über f entspricht nach 4.3.6 einem Morphismus $\hat{\phi} : \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ von abelschen Garben auf Y. Gegeben eine injektive Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\lhd$ erhalten wir aus der Linksexaktheit von f_* einen Isomorphismus $f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 f_*\mathcal{I}^\lhd$. Nach 4.3.24 ist $f_*\mathcal{I}^\lhd$ ein Komplex von injektiven Garben. Gegeben eine Auflösung $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\lhd$ zeigt dann das Hauptlemma der homologischen Algebra 3.2.6, daß $\hat{\phi}$ genau einen Homotopielift $\mathcal{B}^\lhd \to f_*\mathcal{I}^\lhd$ besitzt. In anderen Worten besitzt unser Komorphismus ϕ genau einen Homotopielift zu einem Komorphismus $\mathcal{B}^\lhd \to \mathcal{I}^\lhd$ über f. Ist $\mathcal{B}^\lhd$ auch eine injektive Auflösung, so hat die von diesem Komorphismus auf der Kohomologie der globalen Schnitte induzierte Abbildung $\mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{B}^\lhd \to \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{I}^\lhd$ offensichtlich alle im Satz von einem Zurückholen auf der Kohomologie geforderten Eigenschaften. Daß es keine andere Abbildung mit den geforderten Eigenschaften geben kann, ist eh klar. $\square$

4.3.25 (**Étaler Raum der zurückgezogenen Garbe**). Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ Garben. Sei eine stetige Abbildung $\varphi : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ von étalen Räumen gegeben derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{F}} & \to & \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

von topologischen Räumen kartesisch ist. So gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft kartesischer Diagramme genau einen Komorphismus $\gamma : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f mit $\varphi \circ (\overline{\gamma(s)}) = \bar{s} \circ f$ für alle Schnitte s von $\mathcal{G}$. Hierbei gehen wir von $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ mit $f(U) \subset V$ aus und fassen Schnitte $s \in \mathcal{G}(V)$ und $\gamma(s) \in \mathcal{F}(U)$ als stetige Abbildungen $\bar{s} : V \to \bar{\mathcal{G}}$ und $\overline{\gamma(s)} : U \to \bar{\mathcal{F}}$ auf. Wir zeigen nun, daß dieser Komorphismus einen Isomorphismus $f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ induziert. In der Tat reicht

es ja, das auf den Halmen zu zeigen, und da ist die Behauptung klar. Insbesondere liefern diese Überlegungen für den étalen Raum der zurückgezogenen Garbe einen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{G}} : \overline{f^*\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} X \times_Y \bar{\mathcal{G}}$$

Salopp gesprochen ist der Rückzug von Garben im Gegensatz zum Vorschub geometrisch einfach und algebraisch kompliziert.

4.3.26 (**Anschauliche Bedeutung von Komorphismen**). Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ Garben. Jeder Komorphismus $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f induziert in offensichtlicher Weise Abbildungen $\phi_x : \mathcal{G}_{f(x)} \to \mathcal{F}_x$ auf den Halmen und so eine Abbildung $X \times_Y \bar{\mathcal{G}} \to \bar{\mathcal{F}}$. Diese Konstruktion liefert nach den im vorhergehenden gezeigten Aussagen eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}_X(X \times_Y \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{F}})$$

Wir diskutieren in 9.4.8, inwiefern diese Bijektionen einen Isomorphismus zwischen der „Mengengarbenkofaserung“ und der „invertierten Mengengarbenfaserung“ liefern.

Übungen

Übung 4.3.27. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ betrachte man den exakten Funktor $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$. Die davon nach 3.5.12 induzierte Abbildung

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/Y}}(\mathbb{Z}_Y, \mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(f^*\mathbb{Z}_Y, f^*\mathcal{F})$$

entspricht dem Zurückholen $\mathrm{H}^q(Y; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X; f^*\mathcal{F})$ auf der Garbenkohomologie unter dem Vorschalten des Isomorphismus $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} f^*\mathbb{Z}_Y$ aus 4.3.22 und der Isomorphismen 3.5.7 .

Übung 4.3.28 (**Halme der Garbenkohomologieprägarben**). Gegeben ein bepunkteter topologischer Raum (X, x) haben wir für $q > 0$ stets

$$\mathrm{colf}_{U \ni x} \mathrm{H}^q(U; \mathbb{Z})_{\mathrm{garb}} = 0$$

mit dem Kolimes über alle offenen Umgebungen $U \Subset X$ von x. Allgemeiner haben wir für $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $q > 0$ stets $\mathrm{colf}_{U \ni x} \mathrm{H}^q(U; \mathcal{F}) = 0$. Diese Aussage wird sich später als Spezialfall der Beschreibung der höheren Vorschübe 6.5.2 erweisen.

Übung 4.3.29 (**Vorschub unter topologischer Einbettung**). Ist $f : X \hookrightarrow Y$ eine topologische Einbettung, so ist für jede Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $f^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$.

Übung 4.3.30. Ist $f : X \hookrightarrow Y$ eine abgeschlossene topologische Einbettung, so induziert das adjungierte Paar (f^*, f_*) eine Äquivalenz zwischen der Kategorie aller Garben auf X und der Kategorie aller derjenigen Garben auf Y, die an allen Punkten außerhalb von $f(X)$ einen einelementigen Halm haben.

Übung 4.3.31 (**Vorschub unter abgeschlossenen Einbettungen**). Seien $A \subset\!\!\!

Übung 4.3.35. Wir betrachten die Operation der Galoisgruppe alias der komplexen Konjugation auf $\mathbb{C}^\times$ und betrachten die konstante abelsche Garbe $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{C}^\times$ als äquivariante Garbe. Dann betrachten wir deren direktes Bild unter dem Quadrieren $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$. So operiert die Galoisgruppe trivial auf den Halmen in Punkten aus $\mathbb{R}_{>0}$ und nichttrivial auf den Halmen in Punkten aus $\mathbb{R}_{<0}$.

Übung 4.3.36. Für einen topologischen Raum X bezeichne X^δ die Menge X versehen mit der diskreten Topologie und $d : X^\delta \to X$ die Identität. Man zeige, daß für eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ die Einheit der Adjunktion $\mathcal{F} \to d_* d^* \mathcal{F}$ mit der Einbettung in die Garbe der unstetigen Schnitte in den étalen Raum unserer Garbe identifiziert werden kann.

Übung 4.3.37 (**Reduzierte Garbenkohomologie**). Gegeben X ein topologischer Raum erkläre man die reduzierte Kohomologie $\tilde{\mathrm{H}}^q(X;\mathbb{Z})$ als den Wert des koaugmentierten q-ten Rechtsderivierten im Sinne von 3.2.33 auf der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X \in \mathrm{Ab}_{/X}$ mit der offensichtlichen Γ-Koaugmentierung $\eta : \mathbb{Z} \to \Gamma(\mathbb{Z}_X)$, in Formeln

$$\tilde{\mathrm{H}}^q(X;\mathbb{Z}) := \mathrm{R}^q\Gamma(\mathbb{Z}_X, \eta, \mathbb{Z})$$

Man erkläre das Zurückholen für die reduzierte Garbenkohomologie und leite eine natürliche exakte Sequenz $\tilde{\mathrm{H}}^{-1}(X;\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathbb{Z} \to \mathrm{H}^0(X;\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \tilde{\mathrm{H}}^0(X;\mathbb{Z})$ sowie Isomorphismen $\mathrm{H}^q(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}^q(X;\mathbb{Z})$ für $q > 0$ her und zeige, daß unsere exakte Sequenz mit $\tilde{\mathrm{H}}^{-1}(\emptyset;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ beginnt für $X = \emptyset$ und mit $\tilde{\mathrm{H}}^{-1}(X;\mathbb{Z}) = 0$ für $X \neq \emptyset$ und folglich für $X \neq \emptyset$ schrumpft zu einer kurzen exakten Sequenz

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{H}^0(X;\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \tilde{\mathrm{H}}^0(X;\mathbb{Z})$$

Übung 4.3.38. Sei ein Raum X die Vereinigung von zwei offenen Teilmengen U, V. Man konstruiere die **Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Garbenkohomologie**

$$\ldots \tilde{\mathrm{H}}^q(X) \to \tilde{\mathrm{H}}^q(U) \oplus \tilde{\mathrm{H}}^q(V) \to \tilde{\mathrm{H}}^q(U \cap V) \to \tilde{\mathrm{H}}^{q+1}(X) \ldots$$

und zeige ihre Natürlichkeit in dem Sinne, daß wir für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine offene Überdeckung $Y = A \cup B$ mit $f(U) \subset A$ und $f(V) \subset B$) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \tilde{\mathrm{H}}^q(Y) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^q(A) \oplus \tilde{\mathrm{H}}^q(B) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^q(A \cap B) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^{q+1}(Y) & \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots & \tilde{\mathrm{H}}^q(X) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^q(U) \oplus \tilde{\mathrm{H}}^q(V) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^q(U \cap V) & \to & \tilde{\mathrm{H}}^{q+1}(X) & \ldots
\end{array}$$

erhalten mit Rückzügen in den Vertikalen. Weiter diskutiere man, warum der Randoperator sein Vorzeichen ändert, wenn man die beiden offenen Mengen vertauscht. Das wird benötigt werden bei der Diskussion des Begriffs einer Orientierung.

Übung 4.3.39 (**Garbenkohomologie von Koprodukten**). Ist ein Raum X eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ und ist $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X, so induzieren die Rückzüge längs der in_i einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^q(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{H}^q(X_i;\mathcal{F})$$

Eine Verallgemeinerung auf den Fall der „Hyperkohomologie“ wird in [TSF] 3.3.17 diskutiert.

Übung 4.3.40 (**Garben auf Koprodukten**). Ist ein Raum X eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ und ist $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so induzieren die Einheiten der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{in}_{i*}\,\mathrm{in}_i^*\,\mathcal{F}$$

In 4.9.25 werden wir sehen, daß Koprodukte und Produkte von abelschen Garben in dieser speziellen Situation zusammenfallen.

Übung 4.3.41 (**Produktgarben als Bildgarben**). Ist X ein topologischer Raum und I eine diskrete Indexmenge und $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Garben auf X und sind $\mathrm{em}_i : X \to X \times I$ die Einbettungen und ist eine Garbe $\mathcal{G}$ auf $X \times I$ gegeben zusammen mit Isomorphismen $\mathrm{em}_i^*\,\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$, so liefern diese Isomorphismen zusammen nach 4.3.40 einen Isomorphismus $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{em}_{i*}\,\mathcal{G}_i$ und Vorschub unter der Projektion auf X liefert einen Isomorphismus

$$\mathrm{pr}_{X*}\,\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathcal{G}_i$$

4.4 Lokale Kohomologie und Ausschneidung

Definition 4.4.1. Gegeben ein globaler Schnitt $s \in \mathcal{F}(X)$ einer abelschen Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X erklärt man den **Träger von** s, englisch und französisch **support**, als die Menge

$$\operatorname{supp} s := \{x \in X \mid s_x \neq 0\}$$

Zur Übung mag der Leser zeigen, daß der Träger eines globalen Schnitts stets abgeschlossen ist.

4.4.2. Ein Schnitt $s \in \mathcal{F}(A)$ einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ über einer Teilmenge $A \subset X$ ist dasselbe wie ein globaler Schnitt der Restriktion $\mathcal{F}|_A$ unserer Garbe auf A. In diesem Fall definieren wir den **Träger von** s als den Träger dieses globalen Schnitts von $\mathcal{F}|_A$, in Formeln

$$\operatorname{supp} s := \{x \in A \mid s_x \neq 0\}$$

4.4.3 (**Schnitte mit Träger versus Schnitte auf Teilmengen**). Man beachte, daß für eine abelsche Garbe ein globaler Schnitt mit Träger in einer Teilmenge A etwas völlig anderes ist als ein Schnitt über A alias ein globaler Schnitt der Einschränkung unserer Garbe auf die Teilmenge A. Sicher liefert die Restriktion eine Einbettung

$$\{s \in \mathcal{F}(X) \mid \operatorname{supp} s \subset A\} \hookrightarrow \mathcal{F}(A)$$

Diese Einbettung ist aber im Allgemeinen keine Bijektion. Die konstante Garbe $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_X$ auf $X = \mathbb{R}$ etwa besitzt keinen von Null verschiedenen Schnitt mit Träger im Ursprung, aber ihre Einschränkung auf den Ursprung besitzt durchaus von Null verschiedene Schnitte.

4.4.4. Sei $C \not\subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ setzen wir

$$\Gamma_C \mathcal{F} := \{s \in \Gamma\mathcal{F} \mid \operatorname{supp} s \subset C\}$$

Die Werte des Rechtsderivierten des linksexakten Funktors Γ_C auf einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ heißen die **lokalen Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ mit Träger in** C und werden notiert als

$$\mathrm{H}^q_C(X;\mathcal{F}) := (\mathrm{R}^q\Gamma_C)(\mathcal{F})$$

4.4.5. Ich weiche hier von der Notation in [KS90] ab. Dort bezeichnet $\Gamma_C\mathcal{F}$ für $C \subset X$ lokal abgeschlossen und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X eine weitere Garbe auf X, die dazu noch irreführend als die „Garbe der Schnitte mit Träger in C“ bezeichnet wird, vergleiche 7.1.24. Wir gehen darauf später genauer ein.

4.4.6 (**Lokale Kohomologie als Erweiterungsgruppe**). Für $C = X$ haben wir $\Gamma_X\mathcal{F} = \Gamma\mathcal{F}$ und $\mathrm{H}^q_X(X;\mathcal{F}) = \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$. Unsere lokale Kohomologie ist also eine Verallgemeinerung der normalen Garbenkohomologie. Es ist auch leicht zu sehen, daß wir für $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und $\mathbb{Z}_{C\subset X} := i_*\mathbb{Z}_C$ einen Isomorphismus $\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_{C\subset X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_C\mathcal{F}$ erhalten durch die Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi(i_*1_C)$. Diese Isomorphismen liefern dann auch Isomorphismen der derivierten Funktoren

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_{C\subset X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_C(X;\mathcal{F})$$

Vorschau 4.4.7. Gegeben ein „lokal singulär-azyklischer“ Raum X und $C \not\subset X$ konstruieren wir in 5.6.6 einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^q(X, X\backslash C;\mathbb{Z})_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_C(X;\mathbb{Z}_X)_{\mathrm{garb}}$$

der relativen singulären Kohomologie mit der lokalen Kohomologie der konstanten Garbe und zeigen, wie die lange exakte Kohomologiesequenz der singulären Kohomologie darunter unserer langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie 4.4.11 entspricht.

Satz 4.4.8 (**Zurückholen auf der lokalen Kohomologie**). *Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $C \subset\!\!\!

Ihre nicht den Grad verändernden Morphismen sind die jeweiligen Rückzüge. Gegeben D mit $C \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\ D \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\ X$ erhalten wir weiter einen Morphismus von der langen exakten Sequenz von $C \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\ X$ zur langen exakten Sequenz von $D \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\ X$ durch die jeweiligen Rückzüge.

Vorschau 4.4.12. Die Bedeutung der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie im Rahmen der „sechs Funktoren" diskutieren wir in [TSF] 4.3.10.

4.4.13 (**Ausschneidung für die Garbenkohomologie**). Seien X ein topologischer Raum mit einer abgeschlossenen Teilmenge $C \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\ X$ und einer offenen Teilmenge $V \subset\!\!\!\!\!\!\circ\ X$, die C umfaßt. Bezeichne $v : V \hookrightarrow X$ die Einbettung. Für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ liefert dann die Restriktion von Schnitten einen Isomorphismus

$$\Gamma_C \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_C(v^* \mathcal{F})$$

mit dem Ausdehnen durch Null als Umkehrabbildung. Da der offene Rückzug v^* exakt ist und injektive Garben zu injektiven Garben macht, induzieren diese Isomorphismen ihrerseits Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_C(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_C(V; v^* \mathcal{F})$$

und insbesondere Isomorphismen $\mathrm{H}^q_C(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_C(V)$. Sie sind das Analogon in der Garbenkohomologie unserer Ausschneidungsisomorphismen aus der singulären Kohomologie und fallen auch mit den offensichtlichen Rückzügen zusammen.

Übungen

Übung 4.4.14. Gegeben $C \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\ X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums ist jede welke Garbe auf X azyklisch für Γ_C. Hinweis: Lange exakte Sequenz 4.4.11.

Übung 4.4.15. Man prüfe, daß die Abbildungen der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie 4.4.11 nicht von der Wahl der injektiven Auflösung abhängen und daß zwei dieser Abbildungen Rückzüge auf der Kohomologie beziehungsweise lokalen Kohomologie im Sinne von 4.4.8 sind.

Übung 4.4.16 (**Träger von Schnitten in Bildgarben**). Seien $f : X \to Y$ stetig, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine abelsche Garbe auf Y und $\varphi \in \mathrm{Ab}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ ein Komorphismus. Man zeige $f(\operatorname{supp} \varphi(t)) \subset \operatorname{supp} t$ für jeden globalen Schnitt $t \in \Gamma\mathcal{G}$ und und im Fall des kanonischen Komorphismus $\kappa : f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ haben wir für alle $s \in \Gamma\mathcal{F}$ sogar

$$\operatorname{supp}(f_* s) = \overline{f(\operatorname{supp} s)}$$

Übung 4.4.17 (**Zurückholen der lokalen Kohomologie und Erweiterungen**). Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ betrachte man den exakten Funktor $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$. Sei $D \not\subset Y$ eine abgeschlossene Teilmenge und $C \not\subset X$ ihr Urbild. Die davon nach 3.5.12 induzierte Abbildung

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/Y}}(\mathbb{Z}_{D\subset Y}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(f^*\mathbb{Z}_{D\subset Y}, f^*\mathcal{F})$$

entspricht unter dem offensichtlichen Isomorphismus $f^*\mathbb{Z}_{D\subset Y} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{C\subset X}$ und verschiedenen kanonischen Identifikationen dem Zurückholen auf der lokalen Garbenkohomologie $\mathrm{H}^q_D(Y; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_C(X; f^*\mathcal{F})$.

Übung 4.4.18 (**Trägerzerlegung der lokalen Kohomologie**). Gegeben $C \not\subset X$ ein topologischer Raum mit einer abgeschlossenen Teilmenge und $C = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ eine disjunkte Zerlegung mit $C_\lambda \Subset C$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe liefern die Rückzüge in ihrer Gesamtheit Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_C(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{H}^q_{C_\lambda}(X; \mathcal{F})$$

4.5 Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie

4.5.1. Ich erinnere daran, daß nach [TM] 1.2.4.14 eine Teilmenge eines topologischen Raums „relativ Hausdorff“ heißt, wenn je zwei verschiedene Punkte unserer Teilmenge disjunkte Umgebungen im ursprünglichen Raum besitzen.

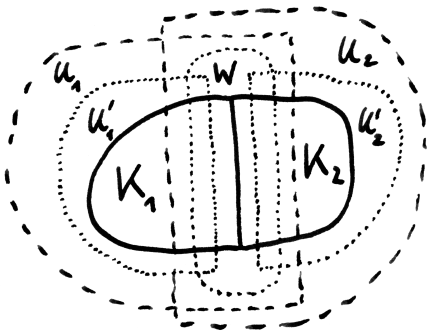


Illustration zum Beweis des Fortsetzens von Schnitten über Kompakta 4.5.2

Proposition 4.5.2 (**Fortsetzen von Schnitten auf Kompakta**). *Gegeben eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ auf einem topologischen Raum X läßt sich jeder Schnitt von $\mathcal{F}$ auf einem relativ Hausdorff'schen Kompaktum $K \subset X$ stetig auf eine offene Umgebung von K fortsetzen.*

4.5.3. Zusammen mit 2.2.62 folgt unter den Annahmen der Proposition, daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $\operatorname{colf}_{U \supset K} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(K)$ liefert. Der Kolimes ist hierbei über alle offenen Umgebungen $U \Subset X$ von K zu verstehen.

Beispiel 4.5.4. Für den dreielementigen Raum X mit zwei abgeschlossenen Punkten, die eine kompakte Teilmenge K bilden und beide im Abschluß des dritten Punktes liegen, läßt sich nicht jeder Schnitt über K der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ auf eine offene Umgebung von K fortsetzen. Die Bedingung „relativ Hausdorff" ist also notwendig für die Gültigkeit der Proposition.

Beweis. Sei $s \in \mathcal{F}(K)$ unser Schnitt. Da K als kompakter Hausdorffraum nach [TM] 1.1.5.20 lokal kompakt ist, finden wir eine Überdeckung von K durch Kompakta $K_1, \ldots, K_n$ und für diese Kompakta offene Umgebungen $U_1, \ldots, U_n \Subset X$ und Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|K_i = s|K_i$. Nach 2.2.62 gibt es eine offene Umgebung W von $K_1 \cap K_2$ in $U_1 \cap U_2$ mit $s_1|W = s_2|W$. Weiter finden wir ähnlich wie in [TM] 1.1.5.19 für $i = 1, 2$ disjunkte offene Umgebungen $U_i' \Subset U_i$ von $K_i \backslash W$. Dann verkleben die beiden $s_i|U_i'$ und $s_1|W = s_2|W$ zu einem Schnitt auf $U_1' \cup U_2' \cup W$, der unseren Schnitt auf $K_1 \cup K_2$ fortsetzt. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis. □

4.5.5 (**Diskussion allgemeiner Fortsetzungsresultate für Schnitte**). Im Fall parakompakter Räume lernen wir in 5.3.1, daß sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge auf eine offene Umgebung derselben fortsetzen läßt. Diese Aussage und die vorhergehende Proposition 4.5.2 sind die beiden einzigen allgemeinen Fortsetzungsresultate dieser Art, die ich kenne. Man beachte, daß jede einpunktige Teilmenge eines topologischen Raums ein relativ Hausdorff'sches Kompaktum ist.

Proposition 4.5.6. *Seien X ein topologischer Raum und K ein kompakter Hausdorffraum und $\pi : X \times K \to X$ die Projektion. So liefert für jede Garbe $\mathcal{F} \in \operatorname{Ens}_{/X \times K}$ und jeden Punkt $x \in X$ die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$(\pi_* \mathcal{F})_x \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi^{-1}(x); \mathcal{F})$$

Vorschau 4.5.7. Diese Aussage wird sich im weiteren Verlauf als ein Spezialfall des „fasereigentlichen Basiswechsels" 6.4.6 erweisen.

Beweis. Nach Proposition 4.5.3 zum Fortsetzen von Schnitten auf Kompakta liefert das Einschränken auf $\pi^{-1}(x)$ einen Isomorphismus

$$\operatorname{colf}_W \Gamma(W; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi^{-1}(x); \mathcal{F})$$

für den Kolimes über alle offenen Umgebungen W von $\pi^{-1}(x)$. Nach Übung [TM] 1.1.6.39 umfaßt jede offene Umgebung von $\pi^{-1}(x)$ eine Menge der Gestalt $\pi^{-1}(U)$ für $U \Subset X$ eine offene Umgebung von x. Das zeigt die Proposition. □

Proposition 4.5.8. *Gegeben X ein topologischer Raum und $\pi : X \times [0,1] \to X$ die Projektion auf den ersten Faktor gilt:*

1. *Für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ ist die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathcal{F}$;*

2. *Ist eine abelsche Garbe $\mathcal{A} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ azyklisch für den Funktor der globalen Schnitte, so gilt dasselbe für die zurückgeholte Garbe $\pi^*\mathcal{A}$;*

3. *Für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ induziert das Zurückholen auf der Kohomologie Isomorphismen $\mathrm{H}^q(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X \times [0,1]; \pi^*\mathcal{F})$.*

Vorschau 4.5.9. Im Rahmen der sechs Funktoren erweist sich das als eine direkte Konsequenz aus fasereigentlichem Basiswechsel und unseren Erkenntnissen zur Garbenkohomologie reeller Intervalle, vergleiche den zweiten Beweis von [TSS] 1.1.1.

Beweis. Teil 1 gilt für jede finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern und sogar für Garben von Mengen nach Übung 4.3.32. Um Teil 2 zu zeigen, wählen wir eine welke Auflösung $\pi^*\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}^\lhd$ und betrachten für alle $x \in X$ das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "j_x"] \arrow[d, "\mathrm{fin}"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{top} \arrow[r, "i_x"'] & X \end{tikzcd}$$

Unter der Restriktion mit der Einbettung j_x wird unsere welke Auflösung zu einer punktweichen Auflösung $j_x^*\pi^*\mathcal{A} \hookrightarrow j_x^*\mathcal{B}^\lhd$ einer punktweichen Garbe. Da nach 4.2.3 punktweiche Garben auf Intervallen Γ-azyklisch sind, liefert unser Komplex einen exakten Komplex $\Gamma(j_x^*\pi^*\mathcal{A}) \hookrightarrow \Gamma(j_x^*\mathcal{B}^\lhd)$. Das ist aber nach 4.5.6 genau der Komplex der Halme bei x des Garbenkomplexes $\pi_*\pi^*\mathcal{A} \hookrightarrow \pi_*\mathcal{B}^\lhd$, der folglich auch exakt ist und mit unserem Isomorphismus $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathcal{A}$ als welke Auflösung von $\mathcal{A}$ verstanden werden kann. Ist nun $\mathcal{A}$ globale-Schnitte-azyklisch, so ist der Komplex $\Gamma(\pi_*\mathcal{B}^\lhd) = \Gamma(\mathcal{B}^\lhd)$ exakt in höheren Graden und damit ist auch $\pi^*\mathcal{A}$ globale-Schnitte-azyklisch. Teil 3 folgt ohne weitere Schwierigkeiten. □

Proposition 4.5.10 (Kohomologie abelscher Garben auf Würfeln). *Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf $[0,1]^n$ verschwindet ihre Kohomologie $\mathrm{H}^q([0,1]^n;\mathcal{F})$ für $q > n$, salopp gesprochen oberhalb der Dimension.*

Vorschau 4.5.11. In [TSF] 4.5.19 schreiben wir den Beweis nocheinmal im Rahmen der allgemeinen Theorie aus.

Beweis. Betrachten wir im vorhergehenden Beweis von 4.5.8 eine welke Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{B}^{\lhd}$ einer beliebigen abelschen Garbe auf $X \times [0,1]$, so erhalten wir unter der Restriktion mit der Einbettung j_x eine punktweiche Auflösung $j_x^*\mathcal{F} \hookrightarrow j_x^*\mathcal{B}^{\lhd}$ der nicht notwendig punktweichen Garbe $j_x^*\mathcal{F}$. Da nach 4.2.3 alle Garbenkohomologie auf $[0,1]$ in Graden $q > 1$ verschwindet, ist $\pi_*\mathcal{B}^{\lhd}$ exakt in Graden $q > 1$. Gegeben $\mathcal{B}^{\lhd}$ ein in Graden $q > 0$ exakter Komplex welker Garben auf $X \times [0,1]$ ist also $\pi_*\mathcal{B}^{\lhd}$ ein in Graden $q > 1$ exakter Komplex welker Garben auf X. Die Proposition folgt induktiv. □

Korollar 4.5.12 (**Homotopieinvarianz**). *Homotope Abbildungen von topologischen Räumen induzieren dieselbe Abbildung auf der Garbenkohomologie.*

Beweis. Seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen und $h : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Bezeichnen wir die Inklusionen $X \to X \times [0,1]$, $x \mapsto (x,t)$ mit i_t, so gilt $f = h \circ i_0$ und $g = h \circ i_1$. Es reicht nun, $\mathrm{H}^q(i_0) = \mathrm{H}^q(i_1)$ zu zeigen, denn daraus folgt mit der Funktorialität der Homologie bereits

$$\mathrm{H}^q(f) = \mathrm{H}^q(i_0) \circ \mathrm{H}^q(h) = \mathrm{H}^q(i_1) \circ \mathrm{H}^q(h) = \mathrm{H}^q(g)$$

Andererseits gilt für $\pi : X \times [0,1] \to X$ die Projektion aber $\mathrm{id}_X = \pi \circ i_t$ und damit $\mathrm{id} = \mathrm{H}^q(i_t) \circ \mathrm{H}^q(\pi)$ für alle t. Nun ist $\mathrm{H}^q(\pi)$ nach 4.5.8 für jede abelsche Gruppe M von Koeffizienten ein Isomorphismus

$$\mathrm{H}^q(\pi) : \mathrm{H}^q(X; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X \times [0,1]; M)$$

Folglich müssen alle $\mathrm{H}^q(i_t)$ dieselbe Abbildung in die Gegenrichtung induzieren, nämlich die Umkehrabbildung zu unserem Isomorphismus. □

Beispiel 4.5.13 (**Garbenkohomologie zusammenziehbarer Räume**). Die Garbenkohomologie jedes zusammenziehbaren Raums X besteht aus den konstanten Schnitten der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ im Grad Null und verschwindet in allen anderen Graden.

Beispiel 4.5.14 (**Garbenkohomologie von Sphären**). Um die Kohomologie von Sphären im Rahmen der Garbenkohomologie zu berechnen, mag man besagte Sphären in zwei etwas über den Äquator hinaus verdickte offene Hemisphären zerlegen und die Mayer-Vietoris-Sequenz der Garbenkohomologie 4.1.4 oder noch besser der reduzierten Garbenkohomologie 4.3.38 anwenden. Unsere beiden Hemisphären sind zusammenziehbar und ihr Schnitt ist homotopieäquivalent zu einer Sphäre einer um Eins kleineren Dimension. So finden wir $\tilde{\mathrm{H}}^q(S^n) \cong \mathbb{Z}$ für $q = n \geq -1$ und Null sonst und finden zusätzlich, daß die Spiegelung an einer Koordinatenebene auf unserer Kohomologie als die Multiplikation mit (-1) wirkt.

Beispiel 4.5.15 (**Lokale Kohomologie des** $\mathbb{R}^n$). Für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ liefert die reduzierte Version der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie 4.4.11 insbesondere Isomorphismen $\tilde{\mathrm{H}}^{q-1}(\mathbb{R}^n \backslash x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_{\{x\}}(\mathbb{R}^n)$ und mit 4.5.14 dann

$$\mathrm{H}^q_{\{x\}}(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter sehen wir so, daß die Spiegelung an einer Koordinatenebene auf unserer lokalen Kohomologie als die Multiplikation mit (-1) wirkt.

Übungen

Übung 4.5.16. Sei $Z \subset\!\!\!

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & A^{0,2} \arrow[r] \arrow[u] & A^{1,2} \arrow[r] \arrow[u] & {} & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{0,1} \arrow[r] \arrow[u, "\delta^1"] & A^{1,1} \arrow[r] \arrow[u, "\delta^1"] & A^{2,1} \arrow[r] \arrow[u, "\delta^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{0,0} \arrow[r, "\partial^0"] \arrow[u, "\delta^0"] & A^{1,0} \arrow[r, "\partial^1"] \arrow[u, "\delta^0"] & A^{2,0} \arrow[r] \arrow[u, "\delta^0"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Ein Doppelkomplex

Definition 4.6.2. Gegeben ein Doppelkomplex A bilden wir seinen **Totalkomplex** $\operatorname{tot}(A) = T = (T, d)$ durch die Vorschrift

$$T^n := \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$$

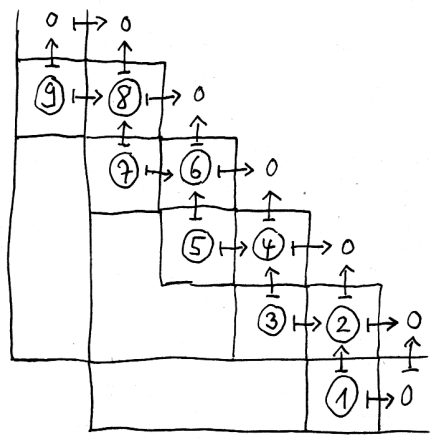
mit dem Differential $da := \partial a + (-1)^p \delta a$ für $a \in A^{p,q}$.

4.6.3. In der Literatur wird auch eine andere Konvention verwendet, bei der man $\partial\delta + \delta\partial = 0$ statt $\partial\delta = \delta\partial$ fordert. Wir sprechen dann von einem **Doppelkomplex mit antikommutierenden Differentialen**. Zwischen beiden Konzepten kann man hin- und hergehen, indem man $\delta : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ ersetzt durch $(-1)^p\delta : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$. Ich finde es natürlicher, mit kommutierenden Differentialen zu arbeiten. So ergibt sich etwa der Tensorkomplex als Totalkomplex eines Doppelkomplexes in Bezug auf eine Anordnung der Tensorfaktoren.

4.6.4. Wir denken uns p nach rechts und q nach oben aufgetragen und betrachten in unserem Doppelkomplex die **Spaltenkomplexe** $A^{p,*}$ sowie die **Zeilenkomplexe** $A^{*,q}$. Verschwinden alle $A^{p,q}$ mit $p < 0$, so sprechen wir von einem **Doppelkomplex in der rechten Halbebene**. Verschwinden alle $A^{p,q}$ mit $q < 0$, so sprechen wir von einem **Doppelkomplex in der oberen Halbebene**. Verschwinden alle $A^{p,q}$ mit $p < 0$ oder $q < 0$, so sprechen wir von einem **Doppelkomplex im ersten Quadranten**. Zu einem Doppelkomplex in der rechten Halbebene erklären wir den **senkrechten Kernkomplex** $K_\uparrow$ als den Komplex der Kerne „längs der q-Achse“, in Formeln

$$K_\uparrow^* = \ker(\partial : A^{0,*} \to A^{1,*})$$

mit dem von δ induzierten Differential. Gegeben ein Doppelkomplex in der rechten Halbebene haben wir eine offensichtliche injektive Kettenabbildung $K_\uparrow \hookrightarrow T$ vom senkrechten Kernkomplex in den Totalkomplex.



Eine explizite Beschreibung der Komposition $\mathcal{H}K_{\rightarrow} \to \mathcal{H}T \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}K_{\uparrow}$ im Fall eines Doppelkomplexes im ersten Quadranten mit exakten Zeilen bei A^{pq} mit $p \neq 0$. Der Zykel 1 im waagerechten Kernkomplex ist als Element 2 der tiefsten Zeile der ∂-Rand von 3. Der δ-Rand von 3 ist dann ein ∂-Zykel 4, der sich wegen der Exaktheit der Zeile als ∂-Rand eines Elements 5 schreiben läßt. Und so klettert man die Treppe hoch um schließlich bei einem Zykel 9 des senkrechten Kernkomplexes zu landen.

Satz 4.6.5 (**Eine ausgeartete Spektralsequenz**). *Sei $A = (A^{p,q}, \partial, \delta)$ ein Doppelkomplex im ersten Quadranten. Sind alle seine Zeilen exakt an allen Stellen $A^{p,q}$ mit $p \neq 0$, so induziert die Einbettung des senkrechten Kernkomplexes in den Totalkomplex $K_{\uparrow} \hookrightarrow T$ auf der Kohomologie Isomorphismen*

$$\mathcal{H}^n K_{\uparrow} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n T$$

4.6.6. Der Satz gilt allgemeiner für jeden Doppelkomplex in der rechten Halbebene, bei dem es für jedes feste n höchstens endlich viele von Null verschiedene Einträge zu Indizes (p, q) mit $p + q = n$ gibt. Die Einträge können dabei sogar Objekte einer beliebigen abelschen Kategorie sein. Der Beweis bleibt derselbe. Wir beginnen mit einem Spezialfall.

Lemma 4.6.7. *Sind bei einem Doppelkomplex im ersten Quadranten alle Zeilen exakt, so ist auch sein Totalkomplex exakt.*

Vorschau 4.6.8. Das Lemma gilt mit demselben Beweis für jeden Doppelkomplex, bei dem es für jedes feste n höchstens endlich viele von Null verschiedene Einträge zu Indizes (p, q) mit $p + q = n$ gibt. Die Einträge können dabei sogar Objekte einer beliebigen abelschen Kategorie sein. Eine Verallgemeinerung dieser Aussage, die für beliebige Doppelkomplexe von abelschen Gruppen richtig bleibt, wird in [TD] 3.7.3 formuliert und bewiesen. Daraus ergeben sich dann auch Verallgemeinerungen von 4.6.5. Allgemeine Spektralsequenzen besprechen wir in 10.1.

Beweis. Sind nur endlich viele Zeilen eines Doppelkomplexes von Null verschieden, der noch nicht einmal im ersten Quadranten liegen muß, so können wir das

mit vollständiger Induktion zeigen: Dazu betten wir die oberste von Null verschiedene Zeile ein in den Totalkomplex. Der Kokern dieser Einbettung ist der Totalkomplex eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen und einer Zeile weniger. Zu der so konstruierten kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen bilden wir dann die lange exakte Homologiesequenz und unsere Induktion läuft. Haben wir einen beliebigen Doppelkomplex im ersten Quadranten vor uns, so stimmt sein Totalkomplex bis zum Grad n überein mit dem Totalkomplex zum Doppelkomplex der untersten n Zeilen, also können wir uns auf den bereits behandelten Fall zurückziehen. $\square$

Beweis von Satz 4.6.5. Der Kokern der Einbettung $K_\uparrow \hookrightarrow T$ ist der Totalkomplex eines Doppelkomplexes im ersten Quadranten mit exakten Zeilen. Nach Lemma 4.6.7 ist er damit exakt und die Behauptung folgt aus der langen exakten Homologiesequenz. $\square$

Ergänzung 4.6.9. Allgemeiner und formaler erklären wir für jede endliche Menge I einen **I-Multikomplex** als eine $\mathbb{Z}^I$-graduierte abelsche Gruppe mit Gruppenhomomorphismen $\partial_i : A^\alpha \to A^{\alpha+\mathrm{e}_i}$ für $i \in I$, $\alpha \in \mathbb{Z}^I$ derart, daß gilt $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i \ \forall i,j$ und $\partial_i^2 = 0 \ \forall i$. Oft arbeiten wir mit $I = \{1,2,\ldots,l\}$ und schreiben α als Zeilenvektor $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l)$ und lassen die Klammern beim oberen Index auch noch weg, also $A^\alpha = A^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l}$. Die Menge $I := \{1,2,\ldots,l\}$ hat im Gegensatz zu einer beliebigen endlichen Menge I eine ausgezeichnete Anordnung und es gilt im folgenden, deren implizite Verwendung zu vermeiden. Unseren Doppelkomplex verstehen wir als einen $\{1,2\}$-Multikomplex.

Ergänzung 4.6.10. Gegeben ein I-Multikomplex A erklären wir allgemeiner für jede Anordnung ω von I den zugehörigen Totalkomplex $T = \mathrm{Tot}_\omega(A)$ mit

$$T^n = \bigoplus_{p+q+\ldots+r+s=n} A^{p,q,\ldots,r,s}$$

und Differential $\partial_p + (-1)^p\partial_q + \ldots + (-1)^{p+q+\ldots+r}\partial_s$ in hoffentlich selbsterklärender Notation. Ist η eine andere Anordnung auf I, so liefert die Multiplikation mit dem „Signum der auf den ungeraden Einträgen induzierten Umordnung“ auf den Komponenten einen Isomorphismus $\mathrm{Tot}_\omega(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tot}_\eta(A)$.

4.6.11. Gegeben ein I-Multikomplex A betrachten wir allgemeiner für jede Teilmenge $J \subset I$ und jedes $\beta \in \mathbb{Z}^{I\setminus J}$ den **J-Teilmultikomplex** $A^{J,\beta} = A^\beta$ mit Differentialen ∂_i für $i \in J$. Beispiele sind unsere Zeilen- und Spaltenkomplexe. Andererseits bilden für festes $i \in I$ die Kerne und Bilder von ∂_i Untermultikomplexe und die Kokerne und Bilder von ∂_i Quotientenmultikomplexe unseres ursprünglichen I-Multikomplexes und wir erhalten so I-Multikomplexe mit verschwindendem ∂_i. Der senkrechte Kernkomplex ist in dieser Terminologie einer der $\{2\}$-Teilkomplexe des Doppelkomplexes $\ker \partial_1$.

Übungen

Übung 4.6.12. Man zeige, daß unser Satz über ausgeartete Spektralsequenzen 4.6.5 ähnlich für Spektralsequenzen im dritten Quadranten und den senkrechten Kokernkomplex gilt. Betrachtet man die analogen Aussagen in allgemeinen abelschen Kategorien, so gelten sie weiter mit demselben Beweis und fallen zusammen, wenn man zur opponierten abelschen Kategorie übergeht.

Übung 4.6.13. Gegeben ein Ring R und ein R-Rechtsmodul M und ein R-Linksmodul N und $\ldots \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung von M und $\ldots \to Q_1 \to Q_0 \twoheadrightarrow N$ eine projektive Auflösung von N liefern die offensichtlichen Kettenabbildungen Quasiisomorphismen

$$P \otimes_R N \overset{\smile}{\leftarrow} P \otimes_R Q \overset{\smile}{\to} M \otimes_R Q$$

Insbesondere erhalten wir so die bei der Definition der Torsionsgruppen in 3.2.26 versprochenen kanonischen Isomorphismen

$$(\mathrm{L}_q(M \otimes_R))(N) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{L}_q(\otimes_R N))(M)$$

Übung 4.6.14. Sind bei einem Doppelkomplex im ersten Quadranten die Zeilenkomplexe exakt an allen Stellen (p, q) mit $p + q \leq n$, so ist der Totalkomplex exakt an allen Stellen $\leq n$. Sind bei einem Doppelkomplex im ersten Quadranten die Zeilenkomplexe exakt an allen Stellen (p, q) mit $p + q \leq n$ und $p > 0$, so induziert die Einbettung des senkrechten Kernkomplexes in den Totalkomplex Isomorphismen auf allen $\mathcal{H}^q$ mit $q \leq n$. Das ist auch eine einfache Konsequenz der allgemeinen Theorie der Spektralsequenzen in 10.1.

Übung 4.6.15. Sind bei einem Doppelkomplex nur endlich viele Zeilenkomplexe verschieden von Null und sind alle Spalten exakt, so ist der Totalkomplex exakt. Hinweis: Im Fall von nur zwei von Null verschiedenen Zeilen ist das leicht einzusehen. Im allgemeinen argumentiere man mit vollständiger Induktion und geschickten kurzen exakten Sequenzen von Doppelkomplexen und der langen exakten Kohomologiesequenz.

4.7 Garbenkohomologie durch offene Überdeckungen

4.7.1. Man erinnere sich daran, daß ein unendliches Produkt exakter Sequenzen von abelschen Garben nicht wieder exakt zu sein braucht, daß aber ein beliebiges Produkt exakter Sequenzen von abelschen Gruppen stets wieder exakt ist.

4.7.2 (**Vergarbte Čech-Komplexe**). Gegeben eine Überdeckung $\mathcal{U}$ eines topologischen Raums X und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X erklären wir einen Komplex

von Garben $\mathcal{C}^q = \mathcal{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$, indem wir für jede offene Teilmenge $V \Subset X$ setzen

$$\mathcal{C}^q(V) := \prod_{(U_0,\ldots,U_q)\in\mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(V \cap U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

Anders geschrieben ist $\mathcal{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$ das Produkt der Garben $j_*j^*\mathcal{F}$ für $j : U_0 \cap \ldots \cap U_q \hookrightarrow X$ die jeweiligen Einbettungen. Das Differential $\mathcal{C}^q \to \mathcal{C}^{q+1}$ besteht aus Abbildungen $\mathcal{C}^q(V) \to \mathcal{C}^{q+1}(V)$, die durch dieselben Formeln definiert werden wie beim Čech-Komplex aus 1.3.11. Nimmt man noch den Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0$ hinzu, der durch die Einschränkungen $\mathcal{F}(V) \to \prod_{U_0\in\mathcal{U}} \mathcal{F}(V \cap U_0)$ gegeben wird, und nimmt von unserer Überdeckung an, daß auch die offenen Kerne der Mengen aus $\mathcal{U}$ bereits X überdecken, so entsteht eine exakte Sequenz von Garben

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \ldots$$

In der Tat erhalten wir für jede offene Teilmenge $V \Subset X$, die ganz in einer Teilmenge U aus unserem überdeckenden Mengensystem enthalten ist, sogar bereits ein exakte Sequenz $\mathcal{F}(V) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(V) \to \mathcal{C}^1(V) \to \ldots$ nach Satz 1.5.3 über die Exaktheit von Standardkomplexen, die stationär sind in einem Index, angewandt auf den in 1.5.4 besprochenen Fall von Koeffizienten in $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Wir nennen unsere exakte Sequenz von Garben den **vergarbten Čech-Komplex**.

4.7.3 (**Čech-Kohomologie zu Überdeckung und Garbenkohomologie**). Per definitionem gilt $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) = \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{C}^{\lhd}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ und aus der Definition derivierter Funktoren 3.2.8 erhalten wir natürliche Abbildungen

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

von der Čech-Kohomologie zu einer gegebenen offenen Überdeckung in die Garbenkohomologie. Wir erhalten sogar derartige natürliche Abbildungen für jede beliebige Überdeckung derart, daß die offenen Kerne der überdeckenden Mengen bereits X überdecken, mit der entsprechenden offensichtlichen Erweiterung der linken Seite auf diesen Fall. Wir hatten diesen Fall bisher nur deshalb vermieden, da wir mit Prägarben gearbeitet hatten und da für Prägarben Schnitte über beliebigen Teilmengen nicht definiert sind.

Vorschau 4.7.4 (**Čech-Kohomologie und Garbenkohomologie**). Es ist klar, daß unsere Abbildungen von eben im Kolimes natürliche Abbildungen

$$\check{\mathrm{H}}^q(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

von der Čech-Kohomologie in die Garbenkohomologie induzieren. In 5.1.1 zeigen wir, daß diese für $q = 1$ stets Isomorphismen sind. In 5.5.1 zeigen wir, daß sie auf „parakompakten“ Räumen sogar für alle q Isomorphismen sind.

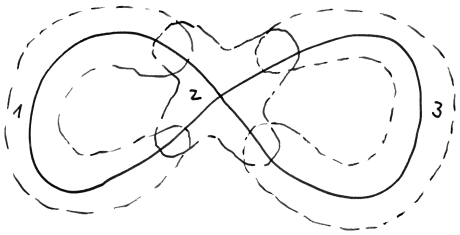
Definition 4.7.5. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Gilt

$$\mathrm{H}^q(U_0 \cap \ldots \cap U_\nu; \mathcal{F}) = 0$$

für alle endlichen Schnitte von einer oder mehr Mengen aus $\mathcal{U}$ und für alle $q > 0$, so sagen wir, die Garbe $\mathcal{F}$ sei **azyklisch für die Überdeckung** $\mathcal{U}$, oder die Überdeckung sei **azyklisch für die Garbe**.

Satz 4.7.6 (**Kohomologie durch azyklische Überdeckungen**). *Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Ist die Überdeckung $\mathcal{U}$ azyklisch für die Garbe $\mathcal{F}$, so berechnet der Komplex der Čech-Koketten ihre Kohomologie, als da heißt, die in 4.7.2 konstruierten Abbildungen sind Isomorphismen*

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$$



$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d, shift right=4, "+"'] \arrow[d, shift left=4, "-"] \arrow[d, shift right=8, "+"'] \arrow[d, shift left=8, "-"] \\
\begin{matrix} \mathbb{Z} \\ \oplus \\ \mathbb{Z} \end{matrix} \oplus \begin{matrix} \mathbb{Z} \\ \oplus \\ \mathbb{Z} \end{matrix}
\end{tikzcd}$$

Eine für die konstante Garbe auf der Acht azyklische offene Überdeckung durch drei offene Teilmengen mit ihrem angeordneten Čech-Komplex

Vorschau 4.7.7. Insbesondere ist jede welke abelsche Garbe Čech-azyklisch in dem in 5.4.5 eingeführten Sinne. Allgemeiner folgt dasselbe für jede abelsche Garbe, deren Restriktion auf jede offene Teilmenge global-Schnitte-azyklisch ist.

Beweis. Wir wählen eine „waagerecht gedachte“ welke Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}^\triangleleft$ von $\mathcal{F}$ und bilden den Doppelkomplex

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{W}^p)$$

von abelschen Garben, indem wir von dieser Auflösung an jeder Stelle „in senkrechter Richtung“ den vergarbten Čech-Komplex nehmen. Offensichtlich besteht

dieser Doppelkomplex aus welken Garben, die Spaltenkomplexe sind exakt in höheren Graden, und der waagerechte Kernkomplex ist unsere ursprüngliche welke Auflösung $\mathcal{W}^{\lhd}$. Der Totalkomplex ist also nach 4.6.5, angewandt auf die Halme, auch eine welke Auflösung von $\mathcal{F}$ und unsere Konstruktion liefert, auch ohne daß wir über die Exaktheit des senkrechten Kernkomplexes etwas wissen, einen Homomorphismus von Auflösungen

$$\mathcal{C}^n(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to \operatorname{tot}\mathcal{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{W}^p)$$

Aus der Azyklizität von $\mathcal{F}$ in Bezug auf $\mathcal{U}$ folgt nun, da $\mathcal{F}|_U \hookrightarrow \mathcal{W}^{\lhd}|_U$ für alle $U \Subset X$ eine welke Auflösung ist, die Exaktheit der Sequenzen

$$\mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q) \hookrightarrow \mathcal{W}^0(U_0 \cap \ldots \cap U_q) \to \mathcal{W}^1(U_0 \cap \ldots \cap U_q) \to \ldots$$

Die von unserem Homomorphismus von Auflösungen auf den globalen Schnitten induzierte Abbildung

$$\prod_{\mathcal{U}^{n+1}} \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_n) \to \bigoplus_{p+q=n} \prod_{\mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{W}^p(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

kann mithin als die Einbettung des senkrechten Kernkomplexes in einen Doppelkomplex mit exakten Zeilen aufgefaßt werden. Also ist sie ein Quasiisomorphismus, und da die rechte Seite von einer welken Auflösung herkam, folgt der Satz. □

4.7.8 (**Garbenkohomologie von Simplizialkomplexen**). Gegeben ein Simplizialkomplex $(E, \mathcal{K})$ mit Ecken E und Simplizes $\mathcal{K}$ wie in [TF] 2.2.7.5 und seine Realisierung $\Delta(\mathcal{K}) \subset \operatorname{Ens}(E, \mathbb{R}_{\geq 0})$ wie in [TF] 2.2.7.8 erinnern wir aus [TS] 3.3.2.7 den **offenen Stern um eine Ecke** e

$$\operatorname{St}(e) := \{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid e \in \operatorname{supp} f\}$$

Diese Sterne sind offen und zusammenziehbar und überdecken unsere Realisierung. Auch die Schnitte endlich vieler Sterne sind jeweils zusammenziehbar oder leer. Nach der Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie 4.5.12 bilden folglich die Sterne für jede konstante oder mit 2.2.59 auch für jede lokal konstante Garbe auf unserer Realisierung eine azyklische Überdeckung und nach 4.7.6 berechnet der Čech-Komplex für derartige Garben die Garbenkohomologie. Nach 1.4.4 können wir die Garbenkohomologie für derartige Garben dann auch mit dem angeordneten Čech-Komplex berechnen. Von hier ausgehend konstruiert man im Fall konstanter Koeffizienten leicht einen Isomorphismus der Garbenkohomologie mit der simplizialen Kohomologie unseres Simplizialkomplexes.

4.7.1 Übungen

Übung 4.7.9. Man zeige, daß die Kohomologie der Kreislinie mit Koeffizienten in der nichttrivialen lokal konstanten abelschen Garbe $\mathcal{F}$ mit Fasern frei vom Rang Eins gegeben wird durch $\mathrm{H}^1(S^1;\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und durch Null in allen anderen Graden. Man zeige dasselbe auch für $\mathbb{C}^\times$ statt S^1.

Übung 4.7.10. Sei $\mathcal{F}$ eine lokal konstante abelsche Garbe auf $\mathbb{C}^\times$ und $(\mathcal{F}_1, T)$ ihr Halm bei 1 mit seinem Monodromieautomorphismus 8.1.20. Man zeige

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{C}^\times;\mathcal{F}) \cong \begin{cases} \{a \in \mathcal{F}_1 \mid T(a) = a\} & q = 0; \\ \mathcal{F}_1/\operatorname{im}(T - \mathrm{id}) & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige dasselbe für S^1 statt $\mathbb{C}^\times$.

Übung 4.7.11. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe auf X und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Gilt

$$\mathrm{H}^q(U_0 \cap \ldots \cap U_\nu;\mathcal{F}) = 0$$

für alle endlichen Schnitte von einer oder mehr Mengen aus $\mathcal{U}$ und für alle q mit $0 < q \leq n$, so ist die natürliche Abbildung für alle $q \leq n$ ein Isomorphismus

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

Hinweis: Man verwende Übung 4.6.14. Man benötigt sogar nur das Verschwinden der fraglichen höheren Kohomologie der Schnitte für $q > 0$ und $q + \nu \leq n$.

4.8 Kompakte Kohomologie

Definition 4.8.1. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X erklären wir die Gruppe der **Schnitte von $\mathcal{F}$ mit kompaktem Träger** oder kurz der **kompakten Schnitte von $\mathcal{F}$** durch die Vorschrift

$$\Gamma_!\mathcal{F} := \Gamma_!(X;\mathcal{F}) := \{s \in \Gamma\mathcal{F} \mid (\operatorname{supp} s) \text{ ist kompakt}\}$$

Definition 4.8.2. Die **q-te Kohomologie mit kompaktem Träger** oder kurz **kompakte Kohomologie** eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einer abelschen Garbe $\mathcal{F}$ ist der Wert bei $\mathcal{F}$ des q-ten rechtsderivierten Funktors $\mathrm{R}^q\Gamma_!$ des Funktors der kompakten Schnitte, in Formeln

$$\mathrm{H}^q_!\mathcal{F} = \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) := \mathrm{R}^q\Gamma_!\mathcal{F}$$

4.8.3 (**Annahmen an die zugrundeliegenden Räume**). Kompakte Kohomologie hat nur für lokal kompakte Hausdorffräume so gute Eigenschaften, daß sie zu etwas nütze ist. Ich werde dennoch versuchen, die jeweils benötigten Bedingungen stets explizit dazuzuschreiben. Ähnlich werde ich es später mit dem „Schreivorschub“ halten.

4.8.4 (**Diskussion von Notation und Terminologie**). In der Literatur sind die alternativen Notationen Γ_c und H^q_c statt unserem $\Gamma_!$ und $\mathrm{H}^q_!$ üblich. Ist $A \subset X$ eine Teilmenge, so verwenden wir die Abkürzungen $\Gamma_!(A;\mathcal{F}) := \Gamma_!(A;\mathcal{F}|_A)$. und $\mathrm{H}^q_!(A;\mathcal{F}) := \mathrm{H}^q_!(A;\mathcal{F}|_A)$. Die abkürzenden Bezeichnungen „kompakte Schnitte“ und „kompakte Kohomologie“ sind unüblich.

4.8.5 (**Kompakte Kohomologie der konstanten Garbe**). Ist M eine abelsche Gruppe, so heißt die kompakte Kohomologie der konstanten Garbe M_X die **garbentheoretische kompakte Kohomologie** unseres Raums X mit Koeffizienten in M und wir notieren sie

$$\mathrm{H}^q_!(X;M) = \mathrm{H}^q_!(X;M)_{\mathrm{garb}} := \mathrm{H}^q_!(X;M_X)$$

Wenn wir betonen wollen, daß die kompakte singuläre Kohomologie [TS] 3.7.2.1 gemeint ist, schreiben wir $\mathrm{H}^q_!(X;M)_{\mathrm{sing}}$. Im Spezialfall $M = \mathbb{Z}$ kürzen wir das weiter ab zu $\mathrm{H}^q_!(X) := \mathrm{H}^q_!(X;\mathbb{Z})$.

4.8.6. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von Garben $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ spezialisiert die lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren zur **langen exakten Sequenz der kompakten Kohomologie**

$$\mathrm{H}^0_!(X;\mathcal{F}') \hookrightarrow \mathrm{H}^0_!(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^0_!(X;\mathcal{F}'') \to \mathrm{H}^1_!(X;\mathcal{F}') \to \mathrm{H}^1_!(X;\mathcal{F}) \to \dots$$

4.8.7. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem Raum X liefert die Transformation $\Gamma_! \Rightarrow \Gamma$ Transformationen $\mathrm{R}^q\Gamma_! \Rightarrow \mathrm{R}^q\Gamma$ und so Gruppenhomomorphismen

$$\mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$$

Für kompaktes X sind sie offensichtlich Isomorphismen.

Lemma 4.8.8. *Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X. Ist $\mathcal{F}'$ welk, so induziert die Surjektion $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma_!\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma_!\mathcal{F}''$. Stärker ist sogar jeder Schnitt von $\mathcal{F}''$ das Bild eines Schnitts von $\mathcal{F}$ mit demselben Träger.*

Beweis. Sei s'' ein kompakter Schnitt von $\mathcal{F}''$. Nach 4.1.2 gibt es einen Schnitt $s \in \Gamma\mathcal{F}$ mit $s \mapsto s''$. Ist U das Komplement des Trägers von s'', so kommt $s|U$ per definitionem von einem Schnitt $s' \in \mathcal{F}'(U)$ her. Dieser läßt sich jedoch, wenn $\mathcal{F}'$ welk ist, zu einem globalen Schnitt $s' \in \Gamma\mathcal{F}'$ ausdehnen, und $s - s'$ ist dann der gesuchte kompakte Schnitt von $\mathcal{F}$, der auf s'' abgebildet wird. $\square$

Satz 4.8.9. *Alle welken abelschen Garben auf einem topologischen Raum sind azyklisch für den Funktor der kompakten Schnitte.*

Beweis. Jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ besitzt wie im Beweis von 4.1.3 eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \dots$ durch welke injektive Garben. Wir zerlegen sie in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{I}^0 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^1 & & & & & & \\
 & & & & \mathcal{K}^1 & \hookrightarrow & \mathcal{I}^1 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^2 & & \\
 & & & & & & & & \mathcal{K}^2 & \hookrightarrow & \mathcal{I}^2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^3 \\
 & & & & & & & & & & & & \dots \quad \dots \quad \dots
\end{array}$$

Wie im Beweis von 4.1.3 zeigt 4.1.2, daß für welkes $\mathcal{F}$ alle Garben in diesen kurzen exakten Sequenzen welk sind. Mit Lemma 4.8.8 erkennen wir weiter, daß alle unsere Sequenzen kurz exakt bleiben unter $\Gamma_!$. Das zeigt aber, daß der Komplex $0 \to \Gamma_!\mathcal{F} \to \Gamma_!\mathcal{I}^0 \to \Gamma_!\mathcal{I}^1 \to \dots$ exakt ist. □

Definition 4.8.10. Eine Garbe heißt **kompaktweich**, englisch **c-soft**, französisch **c-mou**, wenn sich jeder Schnitt über einem relativ Hausdorff'schen Kompaktum zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

Beispiele 4.8.11. Jede welke Garbe ist kompaktweich, da wir nach 4.5.2 einen Schnitt über einem relativ Hausdorff'schen Kompaktum stets auf eine offene Umgebung unseres Kompaktums fortsetzen können. Jede injektive abelsche Garbe ist nach 4.1.5 welk und mithin kompaktweich. Die Einschränkung einer kompaktweichen Garbe auf einen relativ Hausdorff'schen Teilraum ist stets auch wieder kompaktweich.

Proposition 4.8.12 (**Kompaktweiche Garben sind $\Gamma_!$-azyklisch**). *Für jede kompaktweiche abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X verschwindet die höhere kompakte Kohomologie, in Formeln*

$$\mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) = 0 \quad \forall q > 0$$

Beweis. Analog wie in 4.1.3 oder mit Übung 4.1.6 folgt das aus dem anschließenden Lemma 4.8.13. □

Lemma 4.8.13. *Gegeben $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X gilt:*

1. *Ist $\mathcal{F}'$ kompaktweich, so induziert die Surjektion $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma_!\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma_!\mathcal{F}''$ auf den globalen Schnitten mit kompaktem Träger;*

2. *Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ kompaktweich, so ist auch $\mathcal{F}''$ kompaktweich.*

Beweis. 0. Wir zeigen Teil 1 zunächst unter der zusätzlichen Annahme X kompakt. Das kann später auch aus 5.3.6 gefolgert werden, aber das direkte Argument ist einfacher. Gegeben ein Schnitt $s'' \in \mathcal{F}''(X)$ finden wir eine endliche Überdeckung $X = K_1 \cup \ldots \cup K_r$ durch Kompakta und Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(K_i)$ mit $s_i \mapsto s''|K_i$. Wir dürfen r kleinstmöglich annehmen. Wäre dann $r > 1$, so gälte $(s_1 - s_2)|(K_1 \cap K_2) \in \mathcal{F}'(K_1 \cap K_2)$, und wenn wir diesen Schnitt zu einem Schnitt $t \in \mathcal{F}'(K_1)$ fortsetzen, verkleben $s_1 - t$ und s_2 zu einem Schnitt in $\mathcal{F}(K_1 \cup K_2)$ im Widerspruch zur Minimalität von r.

1. Sei s'' ein Schnitt von $\mathcal{F}''$ mit Träger im Kompaktum K. Wir wählen eine offene Umgebung $U \Subset X$ von K mit kompaktem Abschluß $\bar{U}$. Nach Teil 0 des Beweises finden wir also ein Urbild $s \in \mathcal{F}(\bar{U})$ von $s''|_{\bar{U}}$. Wählen wir noch eine Ausdehnung $s' \in \mathcal{F}'(\bar{U})$ von der Einschränkung $s|_{\partial U}$ von s auf den Rand von U im Sinne der mengentheoretischen Topologie und ersetzen s durch $s - s'$, so dürfen wir $s|_{\partial U} = 0$ annehmen und können s durch Null zu einem globalen Schnitt ausdehnen.

2. Für $K \subset X$ kompakt betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \to & \mathcal{F}''(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(K) & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}''(K) \end{array}$$

Die linke Vertikale ist surjektiv, da $\mathcal{F}$ kompaktweich ist. Die untere Horizontale ist surjektiv nach Teil 1, da mit $\mathcal{F}'$ auch $\mathcal{F}'|_K$ kompaktweich ist. Also ist die rechte Vertikale surjektiv. $\square$

Lemma 4.8.14. *Gegeben eine kompaktweiche abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X und $A \Subset X$ abgeschlossen induziert das Einschränken von Schnitten eine Surjektion*

$$\Gamma_!(X; \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(A; \mathcal{F})$$

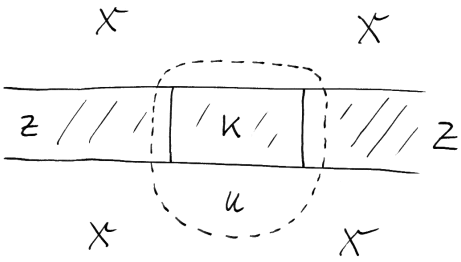


Illustration zum Beweis von 4.8.14

Beweis. Sei $s \in \Gamma(A; \mathcal{F})$ ein Schnitt mit kompaktem Träger K. Sei U eine offene Umgebung von K in X mit kompaktem Abschluß. Man kann einen Schnitt

$$\tilde{s} \in \Gamma(\partial U \cup (A \cap \bar{U}); \mathcal{F})$$

erklären durch $\tilde{s}|A \cap \bar{U} = s|A \cap \bar{U}$ und $\tilde{s}|\partial U = 0$. Da $\mathcal{F}$ kompaktweich ist, kann $\tilde{s}$ zu einem globalen Schnitt $t \in \Gamma(X; \mathcal{F})$ fortgesetzt werden. Dieser Schnitt verschwindet jedoch auf ∂U und wir können folglich einen neuen Schnitt $\hat{s} \in \Gamma(X; \mathcal{F})$ bilden, der auf $\bar{U}$ mit $\tilde{s}$ übereinstimmt und der auf $X \backslash U$ verschwindet. Dieser Schnitt $\hat{s}$ ist dann der gesuchte Schnitt $\hat{s} \in \Gamma_!(X; \mathcal{F})$ mit $\hat{s} \mapsto s$. $\square$

4.8.15. Die Einschränkung einer kompaktweichen Garbe auf einen relativ Hausdorff'schen Teilraum ist, wie bereits in 4.8.11 erwähnt, wieder kompaktweich. Seien nun X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge und $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung ihres Komplements. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und eine kompaktweiche Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^{\triangleleft}$ erhalten wir nach Lemma 4.8.14 eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\Gamma_!(U; \mathcal{I}^{\triangleleft}) \hookrightarrow \Gamma_!(X; \mathcal{I}^{\triangleleft}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(A; \mathcal{I}^{\triangleleft})$$

Die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert zusammen mit unseren natürlichen Isomorphismen eine lange exakte Sequenz, die **Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie**

$$\ldots \to \mathrm{H}^q_!(U; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(A; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^{q+1}_!(U; \mathcal{F}) \to \ldots$$

Durch Betrachtung injektiver Auflösungen von $\mathcal{F}$ erkennt man, daß diese lange exakte Sequenz nicht von der Wahl der kompaktweichen Auflösung abhängt.

4.8.16 (**Lokale Kohomologie und kompakte Kohomologie**). Gegeben eine abgeschlossene kompakte Teilmenge K eines topologischen Raums X haben wir für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ offensichtliche Einbettungen $\Gamma_K \mathcal{F} \hookrightarrow \Gamma_! \mathcal{F}$ und im filtrierenden Kolimes über alle abgeschlossenen Kompakta

$$\operatorname{colf}_K \Gamma_K \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_! \mathcal{F}$$

Sie induzieren natürliche Homomorphismen $\mathrm{H}^q_K(X; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F})$ und in ihrer Gesamtheit aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites Isomorphismen

$$\operatorname{colf}_K \mathrm{H}^q_K(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F})$$

Beispiel 4.8.17 (**Kompakte Kohomologie des $\mathbb{R}^n$**). Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und jede abelsche Gruppe M und jeden abgeschlossenen Ball $K \not\subset \mathbb{R}^n$ mit

$x \in K$ liefert das Zurückholen auf der lokalen Kohomologie einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q_{\{x\}}(\mathbb{R}^n; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_K(\mathbb{R}^n; M)$, da die Einbettungen $\mathbb{R}^n \backslash K \to \mathbb{R}^n \backslash x$ Homotopieäquivalenzen sind und die lange exakte Sequenz des lokalen Kohomologie funktoriell ist und wir in dieser Situation das Fünferlemma anwenden können. Da immer größere abgeschlossene Bälle um x ein konfinales Teilsystem in der Menge aller Kompakta des $\mathbb{R}^n$ bilden, sind die in 4.8.16 konstruierten Abbildungen damit Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_{\{x\}}(\mathbb{R}^n; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n; M)$$

Nun betrachten wir für $n > 0$ die durch das Davorschreiben einer Null gegebene abgeschlossene Einbettung $\mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und die Zerlegung $U^+ \sqcup U^-$ des Komplements ihres Bildes in die zwei Halbräume gegeben durch $U^\pm := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_1 > 0\}$. Die eben besprochenen Isomorphismen zeigen, daß die Ausdehnungen durch Null für jede abelsche Gruppe von Koeffizienten Isomorphismen $\mathrm{H}^q_!(U^\pm) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n)$ liefern, so daß die Lokalisierungssequenz in kurze exakte Squenzen

$$\mathrm{H}^{q-1}_!(\mathbb{R}^{n-1}) \hookrightarrow \mathrm{H}^q_!(U^+) \oplus \mathrm{H}^q_!(U^-) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n)$$

zerfällt und Isomorphismen $\mathrm{H}^{q-1}_!(\mathbb{R}^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(U^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n)$ induzieren muß. Wir wissen $\mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^0; M) = 0$ für $q \neq 0$ und haben einen offensichtlichen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_!(\mathbb{R}^0; M)$ für jede abelsche Gruppe M. Induktiv erhalten wir $\mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n; M) = 0$ für $q \neq n$ und Isomorphismen

$$M \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n; M)$$

Das Bild von $1 \in \mathbb{Z}$ unter diesem Isomorphismus notieren wir $\tau^n \in \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$ und nennen es den **kanonischen Erzeuger**. Insbesondere ist die Kohomologie mit kompaktem Träger nicht homotopieinvariant, denn sonst müßte sie für jeden zusammenziehbaren Raum dasselbe sein wie für einen Punkt. Wir haben bei dieser Herleitung nur allgemeine Theorie verwendet und erhalten dadurch auch einen alternativen Zugang zur Berechnung von $\mathrm{H}^q_{\{x\}}(\mathbb{R}^n; M)$ und $\mathrm{H}^q(\mathbb{R}^n \backslash x; M)$ und damit $\mathrm{H}^q(S^n; M)$. Wir sehen an der Konstruktion weiter, daß die Spiegelung an der ersten Koordinatenhyperebene auf $\mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n; M)$ als die Multiplikation mit (-1) wirkt.

Beispiel 4.8.18 (**Kohomologie der Sphären, Variante**). Hier kommt noch ein zweiter Weg zur Berechnung der Kohomologie der Sphären. Vermittels stereographischer Projektion erhalten wir ja einen Homöomorphismus $S^n \backslash x \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ des Komplements eines Punktes x der n-Sphäre mit dem $\mathbb{R}^n$. Die zugehörige Lokalisierungssequenz 4.8.15 hat die Gestalt

$$\ldots \to \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{H}^q_!(S^n) \to \mathrm{H}^q_!(x) \to \mathrm{H}^{q+1}_!(\mathbb{R}^n) \to \ldots$$

Die kompakte Kohomologie von Punkt und Sphäre ist nun aber dieselbe wie deren normale Kohomologie und wir folgern mühelos die bekannte Beschreibung der Kohomologie der Sphären.

Vorschau 4.8.19 (**Ausgezeichnete Erzeuger als Kreuzprodukte**). Für die „richtige“ Definition der kanonischen Erzeuger sollten wir von dem in [TSF] 4.6.12 für beliebige lokal kompakte Hausdorffräume X, Y erklärten Kreuzprodukt der kompakten Kohomologie $\mathrm{H}^p_! X \otimes \mathrm{H}^q_! Y \to \mathrm{H}^{p+q}_!(X \times Y)$ und dessen „Assoziativität“ ausgehen und $\tau^n := \tau^{\times n}$ erklären für $\tau \in \mathrm{H}^1_!(\mathbb{R})$ das in 4.8.17 als τ^1 beschriebene Element. Der Nachweis der Verträglichkeit beider Definitionen ist dann eine Übung.

Beispiel 4.8.20 (**Kompakte Kohomologie der Zahlengerade nach de Rham**). Wir kennen diese Kohomologie bereits aus 4.8.17 und prüfen nun, daß im Fall von reellen Koeffizienten die Berechnung als de-Rham-Kohomologie zu demselben Resultat führt. Es ist leicht zu sehen, daß die Garbe $\mathcal{C}^\infty_{Z,\mathbb{R}}$ der reellen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf der Zahlengerade $Z := \mathbb{R}$ kompaktweich ist. Man kann folglich die kompakte Kohomologie der Zahlengeraden mit reellen Koeffizienten $\mathrm{H}^q_!(Z;\mathbb{R})$ berechnen vermittels der kompaktweichen Auflösung $\mathbb{R}_Z \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty_{Z,\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^\infty_{Z,\mathbb{R}}$ der konstanten Garbe mit dem Ableiten als zweiter Abbildung. Den zugehörigen Komplex der Schnitte mit kompaktem Träger können wir nach rechts mit dem Integral ergänzen zu einer exakten Sequenz

$$0 \to \Gamma_! \mathcal{C}^\infty_{Z,\mathbb{R}} \to \Gamma_! \mathcal{C}^\infty_{Z,\mathbb{R}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$$

So erhalten wir einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q_!(Z;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ für $q = 1$ und das Verschwinden dieser Kohomologiegruppen für $q \neq 1$.

Beispiel 4.8.21 (**Kohomologie der komplex projektiven Räume**). Aus dem Beweis von [TM] 1.2.3.7 wissen wir um eine Zerlegung

$$\mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C} = \mathbb{P}^n\mathbb{C} \sqcup \mathbb{C}^{n+1}$$

in eine abgeschlossene Teilmenge und ihr offenes Komplement. Die Lokalisierungssequenz 4.8.15 liefert dann mit unserer Berechnung 4.8.17 der kompakten Kohomologie von $\mathbb{C}^{n+1}$ induktiv $\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^n\mathbb{C};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ für $q = 0, 2, 4, \ldots, 2n$ und Null sonst.

Übungen

Übung 4.8.22. Gegeben ein filtrierendes System abelscher Garben auf einem topologischen Raum ist die offensichtliche Abbildung eine Injektion $\operatorname{colf} \Gamma_! \mathcal{F}_i \hookrightarrow \Gamma_! \operatorname{colf} \mathcal{F}_i$. Wir zeigen in [TSF] **??**, daß diese Abbildung auf lokal kompakten Hausdorffräumen sogar ein Isomorphismus ist.

Ergänzende Übung 4.8.23. Gegeben ein filtrierendes System abelscher Garben auf einem kompakten topologischen Raum mit einer Basis der Topologie aus kompakten offenen Teilmengen ist die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\operatorname{colf} \Gamma \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \Gamma \operatorname{colf} \mathcal{F}_i$$

Hinweis: Man verwende 4.8.22 zum Verkleben lokaler Schnitte. Diese Übung ist insbesondere bei der Diskussion von Schemata von Nutzen. Wir zeigen ein Analogon für kompakte Schnitte in [TSF] **??**.

Übung 4.8.24. Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Ist $X = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ eine Zerlegung in endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen derart, daß für jeden Index i gilt $A_i \Subset A_i \sqcup \ldots \sqcup A_n$ und daß jedes A_i homöomorph ist zu $\mathbb{R}^{d(i)}$ für ein $d(i) \geq 0$, so gilt

$$\sum_i (-1)^{d(i)} = \sum (-1)^d \dim \mathrm{H}^d_!(X; \mathbb{Q})$$

Übung 4.8.25. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X ist der Funktor

$$\mathcal{S}^{\mathrm{o}}_! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Off}_X, \mathrm{Ab})$$

gegeben durch $\mathcal{S}^{\mathrm{o}}_! : \mathcal{F} \mapsto (U \mapsto \Gamma_!(U; \mathcal{F}))$ volltreu für von kompaktweichen abelschen Garben ausgehende Morphismen. Hinweis: Man betrachte zusätzlich die Kategorie Abg_X der abgeschlossenen Teilmengen von X und den Funktor

$$\mathcal{S}^{\mathrm{a}}_! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Abg}_X^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ab})$$

gegeben durch $\mathcal{S}^{\mathrm{a}}_! : \mathcal{F} \mapsto (A \mapsto \Gamma_!(A; \mathcal{F}))$. Jede Transformation $\mathcal{S}^{\mathrm{o}}_! \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{S}^{\mathrm{o}}_! \mathcal{G}$ induziert mit 4.8.14 eine Transformation $\mathcal{S}^{\mathrm{a}}_! \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{S}^{\mathrm{a}}_! \mathcal{G}$ und durch Einschränken auf Kompakta eine Transformation $\mathcal{S}^{\mathrm{c}} \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{S}^{\mathrm{c}} \mathcal{G}$ in $\mathrm{Cat}(\mathrm{Komp}_X^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ab})$. Diese gehört jedoch nach 2.2.64 zu einem eindeutig bestimmten Garbenmorphismus.

4.9 Funktorialitäten der kompakten Kohomologie

4.9.1. Ich erinnere daran, daß nach [TM] 1.2.4.13 eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen genau dann eigentlich ist, wenn das Urbild jedes Kompaktums wieder kompakt ist. Das ist alles, was wir an dieser Stelle über eigentliche Abbildungen wissen müssen. Wo ich die Bedingung „lokal kompakt Hausdorff“ oder Teile derselben nicht gefordert habe, dürfen Sie sie ohne Schaden hinzufügen, denn außerhalb dieses Rahmens ist kompakte Kohomologie nutzlos.

4.9.2. Kompakte Kohomologie hat andere Funktorialitätseigenschaften als die gewöhnliche Kohomologie. So ist es zum Beispiel nicht möglich, für beliebige stetige Abbildungen einen Rückzug auf der kompakten Kohomologie zu erklären, das gelingt nur für eigentliche Abbildungen. Stattdessen kann man jedoch für die kompakte Kohomologie einen „Vorschub“ unter étalen Abbildungen und sogar unter sogenannten „orientierten mannigfaltigen Abbildungen“ erklären. Ich erkläre das vorerst nur für offene Einbettungen in 4.9.10. In diesem Fall heißt der Vorschub das „Ausdehnen durch Null“. Im Allgemeinen heißt er die „Integration über die Fasern“.

4.9.3. Gegeben eine eigentliche Abbildung $f : X \to Y$ von lokal kompakten Hausdorffräumen und darüber ein Opkomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von abelschen Garben induziert die zugehörige Abbildung $\varphi^\circ : \Gamma\mathcal{G} \to \Gamma\mathcal{F}$ offensichtlich eine Abbildung $\varphi^\circ : \Gamma_!\mathcal{G} \to \Gamma_!\mathcal{F}$.

Satz 4.9.4 (**Eigentliches Zurückholen**). *Seien $f : X \to Y$ eigentlich und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Opkomorphismus von abelschen Garben über f. So gibt es für jedes q genau eine Abbildung $(f, \varphi)^* : \mathrm{H}^q_!(Y; \mathcal{G}) \to \mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F})$ derart, daß für je zwei Auflösungen $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^\lhd$ und $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\lhd$ und jeden Lift von φ zu einem Opkomorphismus $\varphi^\lhd : \mathcal{A}^\lhd \to \mathcal{B}^\lhd$ von Auflösungen über f das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{B}^\lhd & \xrightarrow{(\varphi^\lhd)^\circ} & \mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{A}^\lhd \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathrm{H}^q_!(Y; \mathcal{G}) & \xrightarrow{(f,\varphi)^*} & \mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F}) \end{array}$$

kommutiert mit den natürlichen Abbildungen τ aus 3.2.8 in den Vertikalen und der von $\varphi^\lhd$ induzierten oberen Horizontalen. Unsere Abbildungen $(f, \varphi)^*$ sind Gruppenhomomorphismen und es gilt $(f, \varphi)^* \circ (g, \psi)^* = (g \circ f, \psi \circ \varphi)^*$ sowie $(\mathrm{id}, \mathrm{id})^* = \mathrm{id}$.

Beispiel 4.9.5. Insbesondere liefert für jede eigentliche Abbildung $f : X \to Y$ der offensichtliche Opkomorphismus $\mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_Y$ über f Gruppnhomomorphismen $f^* : \mathrm{H}^q_!(Y) \to \mathrm{H}^q_!(X)$, die wir das **eigentliche Zurückholen auf der kompakten Garbenkohomologie** nennen.

Vorschau 4.9.6. Sie werden zu gegebener Zeit als Übung zeigen, daß sich das eigentliche Zurückholen in der de-Rham-Kohomologie durch das Zurückholen kompakt getragener Differentialformen berechnen läßt und daß es in der singulären Kohomologie dem eigentlichen Zurückholen [TS] 3.7.2.6 entspricht. In [TSF] 4.2.23 erklären wir, wie das eigentliche Zurückholen im Formalismus der sechs Funktoren verstanden werden kann.

Beweis. Ein Opkomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über f entspricht nach 4.3.6 einem Morphismus $\hat{\phi} : \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ von abelschen Garben auf Y. Gegeben eine injektive

Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^{\lhd}$ erhalten wir aus der Linksexaktheit von f_* einen Isomorphismus $f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 f_*\mathcal{I}^{\lhd}$. Weiter wissen wir aus 4.3.24, daß $f_*\mathcal{I}^{\lhd}$ ein Komplex von injektiven Garben ist. Gegeben eine Auflösung $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^{\lhd}$ zeigt dann das Hauptlemma der homologischen Algebra 3.2.6, daß $\hat{\phi}$ bis auf Homotopie genau einen Lift $\mathcal{B}^{\lhd} \to f_*\mathcal{I}^{\lhd}$ besitzt. In anderen Worten besitzt unser Komorphismus ϕ bis auf Homotopie genau einen Lift zu einem Komorphismus $\mathcal{B}^{\lhd} \to \mathcal{I}^{\lhd}$ über f. Ist $\mathcal{B}^{\lhd}$ auch eine injektive Auflösung, so hat die von diesem Komorphismus auf der Kohomologie der kompakten globalen Schnitte induzierte Abbildung $\mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{B}^{\lhd} \to \mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{I}^{\lhd}$ offensichtlich alle im Satz von einem eigentlichen Zurückholen auf der kompakten Kohomologie geforderten Eigenschaften. Daß es keine andere Abbildung mit den geforderten Eigenschaften geben kann, ist eh klar. $\square$

4.9.7. Ist $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge in einen lokal kompakten Hausdorffraum und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe und $\kappa : ij\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ der offensichtliche Opkomorphismus über i, so ist der eigentliche Rückzug

$$(i,\kappa)^* : \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(A;i^*\mathcal{F}) := \mathrm{H}^q_!(A;\mathcal{F})$$

der entsprechende Morphismus aus der Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie. Haben wir speziell $\mathcal{L} \in \mathrm{Ab}_{/A}$ und $\mathcal{F} := i_*\mathcal{L}$, so finden wir $j^*i_*\mathcal{L} = 0$ und nach der Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie liefert der eigentliche Rückzug Isomorphismen

$$(i,\kappa)^* : \mathrm{H}^q_!(X;i_*\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(A;\mathcal{L})$$

Dasselbe folgt a forteriori für jede abgeschlossene Einbettung $i : A \hookrightarrow X$ von lokal kompakten Hausdorffräumen.

4.9.8. Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ Garben. Eine stetige Abbildung $\varphi : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ von étalen Räumen derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{F}} & \to & \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

kommutiert, nennen wir einen **Morphismus von Garben über** f. Die Menge der Morphismen über f notieren wir $\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ und erhalten offensichtliche Bijektionen

$$\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/X}(\bar{\mathcal{F}}, X \times_Y \bar{\mathcal{G}})$$

Im Gegensatz dazu erinnern wir für Opkomorphismen über f die Bijektionen

$$\mathrm{Ens}_{/\!/f}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/X}(X \times_Y \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{F}})$$

Die zugrundeliegende Theorie besprechen wir später. Gegeben abelsche Garben $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ notieren wir $\mathrm{Ab}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ die Menge aller Garbenmorphismen über f, die halmweise Gruppenhomomorphismen sind.

Definition 4.9.9. Gegeben $j : X \hookrightarrow Y$ eine offene Einbettung von Hausdorffräumen und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ abelsche Garben und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus über j wie in 4.9.8 erklären wir einen Gruppenhomomorphismus

$$(j, \varphi)_! : \Gamma_! \mathcal{F} \to \Gamma_! \mathcal{G}$$

dadurch, daß wir einen Schnitt von $\mathcal{F}$ als stetige Abbildung $s : X \to \bar{\mathcal{F}}$ auffassen und $\bar{\varphi} \circ s$ durch Null auf Y ausdehnen. Die Hausdorff-Eigenschaft stellt dabei sicher, daß das Bild $j(\operatorname{supp} s)$ des Trägers von s in Y abgeschlossen ist, so daß es mit dem Träger des Bildes zusammenfällt, der folglich als Bild eines Kompaktums auch wieder kompakt ist.

Satz 4.9.10 (Ausdehnen durch Null in der kompakten Garbenkohomologie). *Seien $j : X \hookrightarrow Y$ eine offene Einbettung von Hausdorffräumen und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von abelschen Garben über j. So gibt es für jedes q genau eine Abbildung $(j, \varphi)_! : \mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(Y; \mathcal{G})$ derart, daß für je zwei Auflösungen $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^\lhd$ und $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^\lhd$ und jeden Lift von φ zu einem Morphismus $\varphi^\lhd : \mathcal{A}^\lhd \to \mathcal{B}^\lhd$ von Auflösungen über j das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{A}^\lhd & \xrightarrow{(j,\varphi)_!^\lhd} & \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{B}^\lhd \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathrm{H}^q_!(X; \mathcal{F}) & \xrightarrow{(j,\varphi)_!} & \mathrm{H}^q_!(Y; \mathcal{G}) \end{array}$$

kommutiert mit den natürlichen Abbildungen τ aus 3.2.8 in den Vertikalen und der von $\varphi^\lhd$ induzierten oberen Horizontalen. Des weiteren gilt $(u, \psi)_! \circ (j, \varphi)_! = (u \circ j, \psi \circ \varphi)_!$ und $(\mathrm{id}, \mathrm{id})_! = \mathrm{id}$.

4.9.11. Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Erkenntnis, daß für eine offene Einbettung j die Restriktion j^* ein linksexakter Funktor ist und injektive abelsche Garben zu injektiven abelschen Garben macht. Wir wissen bereits, daß j^* sogar für jede stetige Abbildung j exakt ist. Um auch die zweite Aussage zu zeigen, überlegen wir uns, daß j^* im Fall einer offenen Einbettung j einen exakten Linksadjungierten besitzt, die „Ausdehnung durch Null“ abelscher Garben.

Satz 4.9.12 (Ausdehnung durch Null von abelschen Garben). *Gegeben eine offene Einbettung $j : X \hookrightarrow Y$ von topologischen Räumen besitzt der Rückzug $j^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ einen Linksadjungierten $j_{[!]} : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ und dieser ist ein volltreuer exakter Funktor.*

Vorschau 4.9.13. Im weiteren Verlauf erklären wir für beliebige stetige Abbildungen f den „Schreivorschub“ $f_!$ von abelschen Garben und konstruieren im Fall offener Einbettungen j eine Isotransformation $j_! \overset{\sim}{\Rightarrow} j_{[!]}$. Aus didaktischen Gründen möchte ich jedoch vorerst den Linksadjungierten des Rückzugs unter einer offenen Einbettung in der Notation vom Schreivorschub unterscheiden, auch wenn das in der Literatur nicht üblich ist.

Beispiel 4.9.14. Der Beweis wird zeigen, daß im Fall der Einbettung $j : X \hookrightarrow Y$ einer offenen Teilmenge $X \Subset Y$ unsere Garbe $j_{[!]}\mathbb{Z}_X$ hier isomorph ist zu unserer Garbe $\mathbb{Z}_{X\subset Y}$ aus 4.1.5. Wir vereinbaren für jede abelsche Garbe $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ die Notation

$$\mathcal{G}_{X\subset Y} := j_{[!]}j^*\mathcal{G}$$

und fassen diese Garbe meist vermittels der Koeinheit der Adjunktion als Untergarbe von $\mathcal{G}$ auf, schreiben im Fall einer abelschen Gruppe M aber abkürzend $M_{X\subset Y}$ statt $(M_Y)_{X\subset Y}$. Die Konstruktionen beider Beweise von Satz 4.9.12 zeigen in der Tat, daß für jede offene Einbettung $j : Y \hookrightarrow X$ die Adjunktionsabbildung für jede abelsche Garbe $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ ein Monomorphismus $j_{[!]}j^*\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{G}$ ist.

Algebraischer Beweis. Es reicht, den Fall zu betrachten, daß j die Einbettung einer offenen Teilmenge ist. In dem Fall konstruieren wir $j_{[!]}\mathcal{F}$ als die Garbifizierung der abelschen Prägarbe mit $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ für $U \Subset X$ und $U \mapsto 0$ sonst. Die universelle Eigenschaft der Garbifizierung liefert dann unmittelbar die universelle Eigenschaft der Adjunktion. Die Exaktheit ist offensichtlich. Die Volltreuheit ist gleichbedeutend dazu, daß die Einheit der Adjunktion Isomorphismen $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j^*j_{[!]}\mathcal{F}$ induziert, und das folgt aus der Betrachtung der Halme. □

Geometrischer Beweis. Wir konstruieren den étalen Raum von $j_{[!]}\mathcal{F}$ als Verklebung im kokartesischen Diagramm topologischer Räume

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ \bar{\mathcal{F}} \arrow[r] & \overline{j_{[!]}\mathcal{F}} \end{tikzcd}$$

mit dem Nullschnitt als linker Vertikale. Der Rest des Arguments kann dem Leser überlassen bleiben. □

4.9.15 (**Ausdehnen durch Null und Vorschub**). Gegeben eine offene Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ ist nach 4.3.29 für jede Mengengarbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $j^*j_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$. Der inverse Isomorphismus induziert vermittels der Adjunktion einen natürlichen Morphismus

$$j_{[!]}\mathcal{F} \to j_*\mathcal{F}$$

Man sieht leicht ein, daß er im Fall einer sowohl offenen als auch abgeschlossenen Einbettung ein Isomorphismus ist.

Vorschau 4.9.16. In **??** erklären wir Funktoren $f_!$ für beliebige stetige Abbildungen f sowie natürliche Morphismen $f_!\mathcal{F} \to f_*\mathcal{F}$, die für f eigentlich Isomorphismen sind. In 7.3.5 verallgemeinern wir unseren Satz 4.9.12 auf den Fall beliebiger étaler separierter Abbildungen . Sie stimmen zwar für offene Einbettungen j mit den hier erklärten Funktoren $j_{[!]}$ überein, aber nicht in unmittelbar kanonischer Weise.

4.9.17 (**Injektive Garben sind welk**). Wir wiederholen das Argument für die Erkenntnis 4.1.5, daß jede injektive Garbe welk ist. Ist $\mathcal{I}$ eine injektive Garbe auf einem topologischen Raum X und $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge, so liefert die Einbettung $j_{[!]}\mathbb{Z}_U \hookrightarrow \mathbb{Z}_X$ eine Surjektion $\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \mathrm{Ab}_{/X}(j_{[!]}\mathbb{Z}_U, \mathcal{I})$, die wir wegen unserer Adjunktion $(j_{[!]}, j^*)$ umschreiben können zu einer Surjektion $\Gamma(X; \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \Gamma(U; \mathcal{I})$.

4.9.18 (**Offene Restriktionen injektiver Garben sind injektiv**). Da das Ausdehnen durch Null $j_{[!]}$ unter einer offenen Einbettung j ein exakter Funktor ist, muß die Restriktion einer injektiven abelschen Garbe auf eine offene Teilmenge stets wieder injektiv sein.

Beweis zum Ausdehnen von kompakter Kohomologie. Ein Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über j entspricht nach 4.9.8 einem Morphismus $\hat{\varphi} : \mathcal{F} \to j^*\mathcal{G}$ von abelschen Garben auf X. Gegeben eine injektive Auflösung $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{J}^\lhd$ erhalten wir aus der Exaktheit von j^* und 4.9.18 eine injektive Auflösung $j^*\mathcal{G} \hookrightarrow j^*\mathcal{J}^\lhd$. Gegeben eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^\lhd$ zeigt dann das Hauptlemma der homologischen Algebra 3.2.6, daß $\hat{\varphi}$ bis auf Homotopie genau einen Lift $\mathcal{A}^\lhd \to j^*\mathcal{J}^\lhd$ besitzt. In anderen Worten besitzt unser Morphismus φ bis auf Homotopie genau einen Lift zu einem Morphismus $\mathcal{A}^\lhd \to \mathcal{J}^\lhd$ über j. Ist $\mathcal{A}^\lhd$ auch eine injektive Auflösung, so hat die von diesem Morphismus auf der Kohomologie der globalen kompakten Schnitte induzierte Abbildung $\mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{A}^\lhd \to \mathcal{H}^q\Gamma_!\mathcal{J}^\lhd$ offensichtlich alle im Satz von einer Ausdehnung durch Null auf der kompakten Kohomologie geforderten Eigenschaften. Daß es keine andere Abbildung mit den geforderten Eigenschaften geben kann, ist eh klar. $\square$

4.9.19. Gegeben $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge in einen lokal kompakten Hausdorffraum und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe entspricht nach 4.9.8 die Identität auf $j^*\mathcal{F}$ einem Morphismus $\tau : j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ über j und die zugehörige Ausdehnung durch Null $\mathrm{H}^q_!(U; \mathcal{F}) := \mathrm{H}^q_!(U; j^*\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(U; \mathcal{F})$ ist genau der entsprechende Morphismus der Lokalisierungssequenz von $\mathcal{F}$. Setzen wir speziell $\mathcal{F} := j_{[!]}\mathcal{K}$ für $\mathcal{K} \in \mathrm{Ab}_{/U}$, so finden wir $i^*j_{[!]}\mathcal{K} = 0$ für i die Einbettung des Komplements von U und die Lokalisierungssequenz 4.8.15 zeigt, daß

die Ausdehnung durch Null Isomorphismen

$$(j,\tau)_! : \mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X; j_{[!]}\mathcal{K})$$

induziert. Dasselbe gilt a forteriori für jede offene Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ in einen lokal kompakten Hausdorffraum. Später wird sich als Spezialfall einer Aussage erweisen, nach der der derivierte Schreivorschub einer Verknüpfung die Verknüpfung der derivierten Schreivorschübe ist.

4.9.20. Gegeben ein Raum X und $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge und $i : A \hookrightarrow X$ die Einbettung ihres abgeschlossenen Komplements und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ erhalten wir mit der Koeinheit der Adjunktion $(j_{[!]}, j^*)$ und der Einheit der Adjunktion (i^*, i_*) eine kurze exakte Sequenz

$$j_{[!]}j^*\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow i_*i^*\mathcal{F}$$

Die Lokalisierungssequenz 4.8.15 für einen lokal kompakten Hausdorffraum X entspricht der zugehörigen langen exakten Sequenz der Rechtsderivierten von $\Gamma_!$ unter den Isomorphismen $\mathrm{H}^q_!(U; j^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X; j_{[!]}j^*\mathcal{F})$ und $\mathrm{H}^q_!(X; i_*i^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(A; i^*\mathcal{F})$ aus 4.9.19 und 4.9.7.

4.9.21 (**Funktorialität der Lokalisierungssequenz**). Wir erinnern aus 4.8.15 für X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $A \subsetneq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ die Lokalisierungssequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}^q_!(X\backslash A;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(A;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^{q+1}_!(X\backslash A;\mathcal{F}) \to \ldots$$

Aus den Definitionen folgt, daß ihre graderhaltenden Abbildungen die Ausdehnung durch Null 4.9.10 und das eigentliche Zurückholen 4.9.4 sind. Aus den Definitionen folgt auch, daß für abgeschlossene Teilmengen $B \subsetneq A \subsetneq X$ und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & \mathrm{H}^{q-1}_!(A;\mathcal{F}) & \to & \mathrm{H}^q_!(X\backslash A;\mathcal{F}) & \to & \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) & \to & \mathrm{H}^q_!(A;\mathcal{F}) & \to \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & \\
\ldots \to & \mathrm{H}^{q-1}_!(B;\mathcal{F}) & \to & \mathrm{H}^q_!(X\backslash B;\mathcal{F}) & \to & \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) & \to & \mathrm{H}^q_!(B;\mathcal{F}) & \to \ldots
\end{array}$$

mit dem Ausdehnen durch Null beziehungsweise dem abgeschlossenen Zurückholen in den Vertikalen kommutiert. In der Tat haben wir ja für jede kompaktweiche abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf X ein kommutatives Diagramm mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_!(X\backslash A;\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \Gamma_!(X;\mathcal{G}) & \twoheadrightarrow & \Gamma_!(A;\mathcal{G}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_!(X\backslash B;\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \Gamma_!(X;\mathcal{G}) & \twoheadrightarrow & \Gamma_!(B;\mathcal{G})
\end{array}$$

Wenden wir das auf eine kompaktweiche Auflösung von $\mathcal{F}$ an und beachten die Funktorialität der langen exakten Homologiesequenz, so ergibt sich die Behauptung.

Vorschau 4.9.22. Alternativ mag man die Behauptung auch vermittels der Konstruktion eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} j_{[!]}j^*\mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & i_*i^*\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\jmath}_{[!]}\hat{\jmath}^*\mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \hat{\imath}_*\hat{\imath}^*\mathcal{F} \end{array}$$

herleiten, für $\hat{\imath} : B \hookrightarrow X$ und $\hat{\jmath} : X \backslash B \hookrightarrow X$ die Einbettungen. Das wird sich mit den als besonders einfach erweisen, sobald wir ausgezeichnete Isotransformationen $(f \circ g)^* \overset{\sim}{\Rightarrow} g^* \circ f^*$ und $(f \circ g)_* \overset{\sim}{\Rightarrow} f_* \circ g_*$ und zumindest im Fall offener Einbettungen f, g auch $(f \circ g)_{[!]} \overset{\sim}{\Rightarrow} f_{[!]} \circ g_{[!]}$ zur Verfügung haben. Dann betrachten wir einfach $a : B \hookrightarrow A$ und $u : X \backslash A \hookrightarrow X \backslash B$ und erhalten unsere natürlichen Morphismen als die Komposition $j_{[!]}j^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \hat{\jmath}_{[!]}u_{[!]}u^*\hat{\jmath}^*\mathcal{F} \to \hat{\jmath}_{[!]}\hat{\jmath}^*\mathcal{F}$ unter Verwendung von $u_{[!]}u^* \Rightarrow \mathrm{id}$ und $i_*i^*\mathcal{F} \to i_*a_*a^*i^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \hat{\imath}_*\hat{\imath}^*\mathcal{F}$ unter Verwendung von $\mathrm{id} \Rightarrow a_*a^*$.

Übungen

Übung 4.9.23. Betten wir einen offenen Ball im $\mathbb{R}^n$ in einen größeren offenen Ball ein, so ist die Ausdehnung durch Null ein Isomorphismus auf der kompakten Kohomologie mit konstanten Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe. Hinweis: Bezug zur lokalen Kohomologie 4.8.16 und Ausschneidung 4.4.13.

Übung 4.9.24. Ist $A \not\subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene echte Teilmenge $A \neq \mathbb{R}^n$, so gilt $\mathrm{H}^n_! A = 0$.

Übung 4.9.25 (**Abelsche Garben auf Koprodukten**). Ist ein Raum X eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ und ist $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X, so induzieren zusätzlich zu 4.3.40 die Koeinheiten der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{in}_{i[!]}\, \mathrm{in}_i^*\, \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

Nebenbei bemerkt haben wir in der Situation dieser Übung $\mathrm{in}_{i[!]} = \mathrm{in}_{i*}$, folglich ist für beliebige abelsche Garben $\mathcal{F}_i \in \mathrm{Ab}_{/X_i}$ der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{in}_{i*}\, \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathrm{in}_{i*}\, \mathcal{F}_i$$

Analoge Aussagen für derivierte Kategorien zeigen wir in [TSF] 3.3.16.

Übung 4.9.26 (**Garbenkohomologie des Zweitorus**). Man berechne ein weiteres Mal die Garbenkohomologie der Figur 8. Man berechne die Garbenkohomologie des Zweitorus und zeige unter anderem, daß das Zurückholen unter den beiden Projektionen einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^1 S^1 \oplus \mathrm{H}^1 S^1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(S^1 \times S^1)$$

liefert. Hinweis: Der Zweitorus enthält eine offene zu $\mathbb{R}^2$ homöomorphe Teilmenge, deren Komplement homöomorph ist zur Figur 8.

Übung 4.9.27. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X sind gleichbedeutend:

1. $\mathcal{F}$ ist kompaktweich;
2. $\mathrm{H}^1_!(U;\mathcal{F}) = 0$ für alle $U \Subset X$;
3. $\mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{F}) = 0$ für alle $U \Subset X$ und $q > 0$;
4. $\mathcal{F}_{U\subset X}$ ist für alle $U \Subset X$ eine $\Gamma_!$-azyklische Garbe.

Hinweis: Lokalisierungssequenz 4.8.15. Man kann in [TSF] 4.7.18 spickeln.

Übung 4.9.28 (**Mayer-Vietoris-Squenz der kompakten Kohomologie**). Gegeben offene Teilmengen U, V eines lokal kompakten Hausdorffraums X und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ konstruiere man eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}^q_!(U \cap V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{F}) \oplus \mathrm{H}^q_!(V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q_!(U \cup V;\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^{q+1}_! \ \ldots$$

Hinweis: Sie gehört zu einer kurzen exakten Garbensequenz.

Übung 4.9.29 (**Verträglichkeiten des eigentlichen Zurückholens**). Für $X \to Y$ eine eigentliche Abbildung lokal kompakter Hausdorffräume und Kompakta $K \subset X$ sowie $L \subset Y$ mit $K \supset f^{-1}(L)$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ zeige man, daß unser eigentliches Zurückholen 4.9.4 verträglich ist mit dem Zurückholen aus 4.3.13 und 4.4.8 in dem Sinne, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q_L(Y;\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^q_!(Y;\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^q(Y;\mathcal{F}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^q_K(X;\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

mit dem Zurückholen in den Vertikalen und den kanonischen Abbildungen 4.8.7 in den Horizontalen kommutiert. Insbesondere entspricht unter unserem Isomorphismus $\mathrm{colf}_K \mathrm{H}^q_K(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F})$ aus 4.8.16 das eigentliche Zurückholen auf der kompakten Kohomologie dem Kolimes des Zurückholens auf der Kohomologie mit Trägern.

Übung 4.9.30. Wir betrachten die Abbildung $S^1 \to S^1$ gegeben durch $z \mapsto z^n$. Man zeige, daß das Zurückholen mit dieser Abbildung die Multiplikation

$$(n\cdot) : \mathrm{H}^1 S^1 \to \mathrm{H}^1 S^1$$

ist. Hinweis: Man mag damit beginnen zu zeigen, daß die natürliche Abbildung einen Isomorphismus $\mathrm{H}^1_{\{x\}}(S^1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1 S^1$ induziert, und verwende 4.9.29. Diese Übung wird sich als ein Spezialfall von 4.10.23 erweisen.

Übung 4.9.31. Gegeben ein endlichdimensionaler reller Vektorraum V der Dimension n und ein Automorphismus $g \in \mathrm{GL}(V)$ ist die von g induzierte Selbstabbildung von $\mathrm{H}^n_!(V;\mathbb{Z})$ die Identität im Fall $\det(g) > 0$ und die Multiplikation mit (-1) andernfalls.

Übung 4.9.32. Gegeben $U \Subset X$ eine offene Teilmenge eines topologischen Raums und j die Einbettungsabbildung induzieren die durch die Adjunktion $(j_{[!]}, j^*)$ gegebenen Isomorphismen $\mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_{U\subset X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U;\mathcal{F})$ für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und alle q Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Ab}_{/X}}(\mathbb{Z}_{U\subset X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(U;\mathcal{F})$$

Im weiteren werden wir diese Aussage als eine unmittelbare Konsequenz einer Adjunktion $(j_!, j^!)$ derivierter Varianten der bisher betrachteten Funktoren verstehen lernen.

4.10 Kompakte Kohomologie von Mannigfaltigkeiten

4.10.1. Im folgenden sind Mannigfaltigkeiten, wenn nichts anderes explizit gesagt wird, stets als topologische Mannigfaltigkeiten zu verstehen. Wir fordern von unseren Mannigfaltigkeiten weder die Parakompaktheit noch daß sie abzählbar basiert sein sollen.

4.10.2 (**Verschwinden hoher kompakter Kohomologie auf Karten**). Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf $[0,1]^n$ haben wir $\mathrm{H}^q([0,1]^n;\mathcal{F}) = 0$ für $q > n$ in 4.5.10 gezeigt. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{K}$ auf $U \Subset [0,1]^n$ folgt

$$\mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{K}) = 0 \text{ für } q > n$$

aus $\mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{K}) \cong \mathrm{H}^q_!([0,1]^n; j_{[!]}\mathcal{K}) = \mathrm{H}^q([0,1]^n; j_{[!]}\mathcal{K}) = 0$ nach 4.9.19 mit j der Einbettung.

Proposition 4.10.3 (**Kompakte Kohomologie oberhalb der Dimension**). *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M und eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/M}$ gilt*

$$q > n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}^q_!(M;\mathcal{F}) = 0$$

4.10.4. Für jede n-Mannigfaltigkeit M hat also $\Gamma_! : \mathrm{Ab}_{/M} \to \mathrm{Ab}$ eine homologische Dimension $\leq n$. Aus dem anschließenden Satz folgt, daß diese homologische Dimension für $M \neq \emptyset$ sogar genau n ist. Für die gewöhnliche nichtkompakte Garbenkohomologie zeigen wir die entsprechnde Aussage erst in [TSS] 1.4.4 unter der zusätzlichen Annahme, daß M abzählbar basiert ist.

Beweis. Wird M durch das Bild einer einzigen Karte überdeckt, so haben wir die Behauptung bereits in 4.10.2 gezeigt. Wird M durch die Bilder endlich vieler Karten überdeckt, so folgt die Behauptung induktiv aus der Mayer-Vietoris-Sequenz der kompakten Kohomolgie 4.9.28. Im allgemeinen folgt sie dann aus der Verträglichkeit der kompakten Kohomologie mit filtrierenden Kolimites nach 4.8.22. □

4.10.5. Eine Garbe mit Werten in $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ heißt eine **abelsche Kogarbe**. Genauer ist eine abelsche Koprägarbe auf einem Raum X ein Funktor $K : \mathrm{Off}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ und eine Kogarbe eine Koprägarbe mit gewissen Verklebungseigenschaften. Wir erklären die **Kategorie der abelschen Koprägarben auf** X als die Funktorkategorie

$$\mathrm{Cat}(\mathrm{Off}(X), \mathrm{Ab})$$

Damit sind Kokerne von Homomorphismen von Kogarben unproblematisch, aber die Konstruktion von Kernen braucht eine „Kogarbifizierung“. Wir werden die Arbeit mit abelschen Kogarben meiden. Sie sind mühsam zu handhaben, da sie keine abelsche Kategorie bilden.

Satz 4.10.6 (**Maximale kompakte Kohomologie als Kogarbe**). *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M erhalten wir eine abelsche Kogarbe auf M vermittels der Vorschrift*

$$U \mapsto \mathrm{H}^n_!(U)$$

Beweis. Gegeben eine Familie (U_ν) von offenen Teilmengen von M mit Vereinigung V haben wir, wie man unschwer auf den Halmen prüft, eine rechtsexakte Garbensequenz

$$\mathbb{Z}_{V\subset M} \twoheadleftarrow \bigoplus \mathbb{Z}_{U_\nu\subset M} \leftarrow \bigoplus \mathbb{Z}_{(U_\nu\cap U_\mu)\subset M}$$

Unter dem nach 4.10.3 rechtsexakten und nach 4.8.22 mit filtrierenden Kolimites verträglichen Funktor $\mathrm{H}^n_!$ wird sie zu einer rechtsexakten Sequenz

$$\mathrm{H}^n_!(V) \twoheadleftarrow \bigoplus \mathrm{H}^n_!(U_\nu) \leftarrow \bigoplus \mathrm{H}^n_!(U_\nu \cap U_\mu)$$ □

4.10.7. Ist insbesondere eine n-Mannigfaltigkeit M eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen $(M_i)_{i\in I}$, so induzieren die Ausdehnungen durch Null einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{H}^n_! M_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! M$$

Das folgt sowohl aus der Kogarbeneigenschaft als auch direkt aus der Verträglichkeit der kompakten Kohomologie mit filtrierenden Kolimites.

Korollar 4.10.8 (**Orientierungsgarbe**). *Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M und eine abelsche Gruppe G erhalten wir eine abelsche Garbe $\mathrm{or}_{M,G}$ auf M, die* **Orientierungsgarbe von M mit Koeffizienten in** G, *vermittels der Vorschrift*

$$\mathrm{or}_{M,G} : U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U), G)$$

Beweis. Wenden wir auf unsere Kogarbe 4.10.6 den kontravarianten durch G gegebenen Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ ,G)$ an, so erhalten wir eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(V), G) \hookrightarrow \prod \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U_\nu), G) \to \prod \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U_\nu \cap U_\mu), G)$$

Sie beinhaltet die Garbeneigenschaft. □

4.10.9. Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit M vereinbaren wir für die Spezialisierung unserer Garbe $\mathrm{or}_{M,G}$ aus 4.10.8 zu $G = \mathbb{Z}$ die Notation

$$\mathrm{or}_M := \mathrm{or}_{M,\mathbb{Z}}$$

und nennen diese Garbe die **Orientierungsgarbe von** M. Die Orientierungsgarbe ist stets lokal isomorph zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}_M$ nach 4.9.23 und ihre Halme sind wieder nach 4.8.16 kanonisch isomorph zu den Dualen der lokalen Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^n_{\{x\}}(M)$. Ist die Orientierungsgarbe global isomorph zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}_M$, so heißt M **orientierbar**. Unter einer **Orientierung** oder ausführlicher **topologischen Orientierung** unserer Mannigfaltigkeit verstehen wir die Wahl eines ausgezeichneten Isomorphismus $\mathbb{Z}_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M$. Die Definitionen liefern einen natürlichen Isomorphismus zwischen der Restriktion der Orientierungsgarbe auf eine offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit und der Orientierungsgarbe der fraglichen offenen Teilmenge als Mannigfaltigkeit $\mathrm{or}_M|_U \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_U$.

Vorschau 4.10.10 (**Bezug zur singulären Homologie**). Unsere Vergleichssätze liefern auch einen Isomorphismus unserer Orientierungsgarbe hier mit der Orientierungsgarbe der singulären Homologie aus [TS] 3.4.2.9. In der Tat sind deren Halme $\mathrm{H}_n(M, M\backslash x)_{\mathrm{sing}}$ die Dualräume von $\mathrm{H}^n(M, M\backslash x)_{\mathrm{sing}}$ und letztere Räume sind nach unserem Vergleichssatz 5.6.6 kanonisch isomorph zu $\mathrm{H}^n_{\{x\}}(M)$.

Satz 4.10.11 (**Hohe kompakte Kohomologie von Mannigfaltigkeiten**). *Gegeben eine zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit M haben wir:*

1. $\mathrm{H}^q_! M = 0$ *für* $q > n$;
2. *Für jeden Punkt $x \in M$ ist die offensichtliche Abbildung eine Surjektion $\mathrm{H}^n_{\{x\}}(M) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^n_!(M)$;*
3. *Ist M nicht orientierbar, so ist $\mathrm{H}^n_! M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ eine zweielementige Gruppe;*

4. *Ist M orientierbar, so gilt $\mathrm{H}^n_! M \cong \mathbb{Z}$ und für jede Orientierung $\mathbb{Z}_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M$ gibt genau einen Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! M$, der unter dem Dualisieren $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ ,\mathbb{Z})$ die Komposition natürlicher Abbildungen $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_M(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M(M)$ liefert.*

Beweis. Das Verschwinden für $q > n$ ist ein Spezialfall unserer allgemeineren Proposition 4.10.3. Aus $\mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}$ nach 4.8.17 und 4.9.23 folgt, daß $\mathrm{or}_{M,G}$ für jede abelsche Gruppe G lokal isomorph ist zur konstanten Garbe G_M. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ und eine abelsche Gruppe G bezeichne $\mathcal{F} \otimes G$ die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes G$. Man erkennt unschwer, daß der mithilfe der universellen Eigenschaften konstruierte Homomorphismus stets ein Isomorphismus

$$\mathrm{or}_M \otimes G \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{M,G}$$

ist. Ist M zusammenhängend und gibt es keinen Isomorphismus $\mathbb{Z}_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M$ der konstanten Garbe mit der Orientierungsgarbe, so haben wir nach Lemma 4.10.12 Isomorphismen $G_2 \xrightarrow{\sim} \Gamma(M; \mathrm{or}_M \otimes G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_! M, G)$, die funktoriell sind in G und die nach dem Yoneda-Lemma folglich von einem Isomorphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! M$ herkommen müssen, mit der Notation

$$G_2 := \{g \in G \mid g^2 = 1\}$$

Das zeigt den dritten Teil. Ist M zusammenhängend und gibt es einen Isomorphismus $\mathbb{Z}_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_M$ der konstanten Garbe mit der Orientierungsgarbe, so liefert jeder derartige Isomorphismus Isomorphismen $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_! M, G)$, die funktoriell sind in G und folglich von einem Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! M$ herkommen müssen, wieder nach dem Yoneda-Lemma. Das zeigt den vierten Teil. Der Beweis des zweiten Teils bleibe dem Leser zur Übung überlassen. □

Lemma 4.10.12. *Gegeben ein zusammenhängender Raum X und darauf eine lokal aber nicht global zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ isomorphe abelsche Garbe $\mathcal{F}$ erhalten wir einen in $G \in \mathrm{Ab}$ funktoriellen Isomorphismus*

$$G_2 \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{F} \otimes G)$$

durch die Vorschrift, die $g \in G_2$ den durch $x \mapsto s_x \otimes g$ mit $s_x \in \mathcal{F}_x$ einem Erzeuger des Halms gegebenen globalen Schnitt zuordnet.

Beweis. Wir betrachten den Teilraum

$$\tilde{X} := \{s \in \bar{\mathcal{F}} \mid s \text{ erzeugt seinen Halm}\}$$

Dann ist die offensichtliche Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X$ eine zweiblättrige Überlagerung. Wäre $\tilde{X}$ nicht zusammenhängend, so könnte man es als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen schreiben, die nach [TF] 2.3.1.26

auch bereits X überlagern, die mithin einblättrige Überlagerungen wären und folglich Homöomorphismen, so daß $\pi : \tilde{X} \to X$ einen stetigen Schnitt hätte im Widerspruch zu unserer Annahme $\mathcal{F} \not\cong \mathbb{Z}_X$. Also ist $\tilde{X}$ zusammenhängend. Nun kann die Projektion $\pi : \tilde{X} \to X$ auch als die Quotientenabbildung nach einer Operation der zweielementigen Gruppe $\mathbb{F}_2$ verstanden werden. Die zurückgezogene Garbe $\pi^*\mathcal{F}$ hat den étalen Raum $\text{ét}(\pi^*\mathcal{F}) = \tilde{X} \times_X \bar{\mathcal{F}}$ und den globalen erzeugenden Schnitt $\tilde{x} \mapsto (\tilde{x}, \tilde{x})$, der einen Isomorphismus $\mathbb{Z}_{\tilde{X}} \xrightarrow{\sim} \pi^*\mathcal{F}$ liefert. Die $\mathbb{F}_2$-Operation auf $\pi^*\mathcal{F}$ nach 8.1.11 entspricht unter unserem Isomorphismus $\pi^*\mathcal{F} \cong \mathbb{Z}_{\tilde{X}}$ der Operation $(\tilde{x}, n) \mapsto (-\tilde{x}, -n)$. Dann haben wir natürliche Isomorphismen

$$\pi^*(\mathcal{F} \otimes G) \xrightarrow{\sim} (\pi^*\mathcal{F}) \otimes G \xrightarrow{\sim} G_{\tilde{X}}$$

Die $\mathbb{F}_2$-Operation links entspricht darunter der $\mathbb{F}_2$-Operation $(\tilde{x}, g) \mapsto (-\tilde{x}, -g)$. Das liefert Isomorphismen $G_2 \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi^*(\mathcal{F} \otimes G))^{\mathbb{F}_2} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{F} \otimes G)$ mit 8.1.11 für den zweiten Pfeil und mehr war nicht zu zeigen. □

4.10.13 (**Jede Einsmannigfaltigkeit ist orientierbar**). Für abzählbar basierte Einsmannigfaltigkeiten folgt das bereits aus der Klassifikation [TM] 1.1.8.5, aber hier wollen wir ohne diese Bedingung auskommen. Gegeben eine zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit M haben wir

$$\mathrm{H}^n_!(M; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & M \text{ orientierbar;} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann das genauso zeigen wie wir es für die kompakte Kohomologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten in 4.10.11 ausgeführt haben. Man kann es auch als Konsequenz der sogenannten Projektionsformel [TSF] 2.5.8 zeigen, die unter anderem für beliebige n-Mannigfaltigkeiten M und beliebige abelsche Gruppen G Isomorphismen $\mathrm{H}^n_!(M; G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(M) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ liefert. Gegeben eine zusammenhängende Einsmannigfaltigkeit M liefert die Surjektion $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nun sicher eine Surjektion $\mathrm{H}^0_!(M; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0_!(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und wir folgern mit dem Verschwinden der höheren kompakten Kohomologie 4.10.3 eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^1_!(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{H}^1_!(M; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1_!(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

Zusammen zeigt das, daß jede zusammenhängende Einsmannigfaltigkeit und dann auch überhaupt jede Einsmannigfaltigkeit orientierbar ist.

4.10.14. Gegeben eine Mannigfaltigkeit M und ihre Orientierungsgarbe or_M nennen wir die im vorhergehenden Beweis konstruierte zweiblättrige Überlagerung $\pi : \tilde{M} \to M$ ihre **Orientierungsüberlagerung**

$$\tilde{M} := \{s \in \text{ét}(\mathrm{or}_M) \mid s \text{ erzeugt seinen Halm}\}$$

Wir haben dann einen natürlichen Isomorphismus $\pi^* \operatorname{or}_M \xrightarrow{\sim} \operatorname{or}_{\tilde{M}}$ und die kanonische Trivialisierung dieser Garbe nennen wir die **tautologische Orientierung** der Orientierungsüberlagerung $\tilde{M}$.

4.10.15 (**Endlichkeit der kompakten Kohomologie**). Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Besitzt ein topologischer Raum X eine Überdeckung durch offene Teilmengen $U \Subset X$ mit $\mathrm{H}^q_!(U;\mathcal{F}) = 0$ für $q > n$ und alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/U}$, so folgt $\mathrm{H}^q_!(X;\mathcal{F}) = 0$ für $q > n$ und alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$. Das zeigt der Beweis von 4.10.3. Weiter zeigt der Beweis von 4.10.8, daß dann für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $G \in \mathrm{Ab}$ der Funktor $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U;\mathcal{F}), G)$ eine abelsche Garbe auf X ist.

4.10.16 (**Hohe kompakte Kohomologie von Randfaltigkeiten**). Man mag unsere Erkenntnisse 4.10.15 zur Endlichkeit der kompakten Kohomologie insbesondere auf Randfaltigkeiten anwenden und aus der in 4.10.9 gegebenen Argumentation folgern, daß für eine n-dimensionale Randfaltigkeit X die zuvor besprochenen Garben $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}^n_!(U;A_X), G)$ im Fall einer konstanten Garbe $\mathcal{F} = A_X$ lokal konstant sind auf dem Komplement des Randes und aus dieser lokal konstanten Garbe entstehen vermittels der Ausdehnung durch Null. Eine Argumentation wie beim Beweis von 4.10.11 zeigt dann $\mathrm{H}^n_!(X;k) = 0$ für jede zusammenhängende Randfaltigkeit, die keine Mannigfaltigkeit ist, und jede abelsche Gruppe k von Koeffizienten.

Korollar 4.10.17 (Jordan-Brouwer). *Seien $n, r \geq -1$ und sei $s^r \subset S^n$ eine Teilmenge der n-Sphäre, die homöomorph ist zur r-Sphäre S^r. So haben wir:*

$r > n$	*Unmöglich;*
$r = n$	*Impliziert $S^n = s^r$;*
$r = n - 1$	*Dann hat $S^n \backslash s^r$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, und der Rand jeder dieser beiden Komponenten ist s^r;*
$r \leq n - 2$	*Dann ist $S^n \backslash s^r$ zusammenhängend.*

4.10.18. Hier ist die (-1)-Sphäre wie in [TF] 2.1.1 als die leere Menge zu verstehen. Obiger Satz wurde bereits in [TS] 3.3.3.2 bewiesen. Mir scheint jedoch der hier entwickelte Zugang natürlicher.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $n \geq 2$ und $r \geq 0$ annehmen. Im Fall $r > n$ wäre $0 \to \mathrm{H}^r_!(s^r) \to 0$ ein Ausschnitt der langen exakten Lokalisierungssequenz im Widerspruch zu $\mathrm{H}^r_!(s^r) \cong \mathbb{Z}$. Im Fall $r \leq n$ betrachten wir den Ausschnitt

$$0 \to \mathrm{H}^{n-1}_! s^r \to \mathrm{H}^n_!(S^n \backslash s^r) \to \mathrm{H}^n_! S^n \to \mathrm{H}^n_! s^r \to 0$$

der Lokalisierungssequenz. Im Fall $r = n$ muß in unserer Sequenz eine Surjektion und damit ein Isomorphismus $\mathrm{H}^n_! S^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_! s^n$ stehen und es folgt erst

$\mathrm{H}^n_!(S^n \backslash s^n) = 0$ und mit unseren Erkenntnissen 4.10.11 und 4.10.7 zur hohen kompakten Kohomologie von Mannigfaltigkeiten dann $S^n \backslash s^n = \emptyset$. Im Fall $r = n-1$ erhalten wir ähnlich $\mathrm{H}^n_!(S^n \backslash s^{n-1}) \cong \mathbb{Z}^2$ und nach denselben Argumenten hat $S^n \backslash s^{n-1}$ zwei Zusammenhangskomponenten. Daß s^{n-1} im Abschluß beider Komponenten liegt, folgert man wie in [TS] 3.3.3.2. Ist schließlich $r \leq n-2$, so erhalten wir $\mathrm{H}^n_!(S^n \backslash s^r) \cong \mathbb{Z}$ und nach denselben Argumenten besteht $S^n \backslash s^r$ aus genau einer Zusammenhangskomponente. □

4.10.19. Für jede zusammenhängende topologische n-Mannigfaltigkeit M gilt mit denselben Argumenten wie zuvor $\mathrm{H}^n_!(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Korollar 4.10.20 (Komplemente von Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$). *Gegeben eine abgeschlossene $(n-1)$-Untermannigfaltigkeit $M \subset\!\!\!

Übungen

Übung 4.10.23. Gegeben eine eigentliche Abbildung $f : M \twoheadrightarrow N$ von zusammenhängenden orientierten n-Mannigfaltigkeiten erklären wir ihren **Abbildungsgrad** als das Bild der Eins unter der Komposition $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_!^n N \to \mathrm{H}_!^n M \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ mit den durch die jeweiligen Orientierungen gegebenen äußeren Isomorphismen und dem eigentlichen Zurückholen unter f in der Mitte. Sei $V \Subset N$ offen zusammenhängend und sei $f^{-1}(V) = U_1 \sqcup \ldots \sqcup U_r$ die Zerlegung des Urbilds von V in seine Zusammenhangskomponenten. So ist der Abbildungsgrad von f die Summe der Abbildungsgrade der eingeschränkten Abbildungen $f : U_i \to V$. Hat insbesondere f einen von Null verschiedenen Abbildungsgrad, so muß f surjektiv sein. Hinweis: 4.9.29 und 4.10.11.

Übung 4.10.24. Wir denken uns eine Einbettung der Figur 8 in einen Zweitorus. Welche Werte können die insgesamt vier Umlaufzahlen, je zwei für jeden Kreis der 8, annehmen? Ich hab mir das selber gar nicht so genau überlegt.

Übung 4.10.25. Ist $N \hookrightarrow M$ die Einbettung einer offenen nichtleeren Teilmenge in eine zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit, so ist die Ausdehnung durch Null eine Surjektion $\mathrm{H}_!^n N \twoheadrightarrow \mathrm{H}_!^n M$.

Übung 4.10.26 (**Kompakte Kohomologie komplexer Varietäten**). Wir erklären eine **Filtrierfaltigkeit** oder genauer **n-Filtrierfaltigkeit** als einen lokal kompakten Hausdorffraum X, der eine Filtrierung

$$X = X^{\le n} \supset X^{\le n-1} \supset \ldots \supset X^{\le 0} \supset \emptyset = X^{\le -1} = X^{\le -2} = \ldots$$

durch abgeschlossene Teilmengen besitzt derart, daß $X^{\le q} \backslash X^{\le q-1}$ jeweils eine q-Mannigfaltigkeit ist. Jede n-Filtrierfaltigkeit ist insbesondere auch eine $(n+1)$-Filtrierfaltigkeit. Gegeben eine n-Filtrierfaltigkeit zeige man $\mathrm{H}_!^q(X; \mathcal{F}) = 0$ für $q > n$ und jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ und zeige unter der zusätzlichen Annahme $X^{\le n-1} = X^{\le n-2}$, daß die Ausdehnung durch Null einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_!^n(X \backslash X^{\le n-2}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_!^n(X)$$

induziert. Ein typisches Beispiel für eine derartige Situation erhalten wir im Fall einer komplexen algebraischen Varietät V einer Dimension $\mathrm{kdim}_{\mathbb{C}} V \le d$, wenn wir den zugehörigen topologischen Raum $X = V(\mathbb{C})$ mit seiner analytischen Topologie versehen und die Filtrierung durch die Untervarietäten der jeweils singulären Punkte betrachten, vergleiche [KAG] 7.5.29 und [KAG] 7.6.5. Hier hat man dann $n = 2d$. Sobald wir wissen, daß für jede irreduzible glatte komplexe Varietät V unser Raum $V(\mathbb{C})$ zusammenhängend und orientierbar ist, folgt sogar, daß $\mathrm{H}_!^{2d}(V(\mathbb{C}))$ eine freie abelsche Gruppe ist mit je einem Erzeuger pro irreduzibler Komponente der Krulldimension d von V, und durch die Wahl einer Orientierung des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ werden diese Erzeuger sogar eindeutig festgelegt. Hinweis: Lokalisierungssequenz 4.8.15.

Übung 4.10.27. Man zeige, daß gegeben $s^{n-1} \subset S^n$ zwei ineinander enthaltene Sphären benachbarter Dimensionen und eine beliebige zweipunktige Teilmenge $Z \subset S^n$ bestehend aus je einem Punkt in jeder Komponente des Komplements $S^n \backslash s^{n-1}$ die Einbettung $s^{n-1} \hookrightarrow S^n \backslash Z$ einen Isomorphismus auf der Kohomologie induziert. Hinweis: Man vergrößere Z zu einer offenen Menge $\tilde{Z}$ bestehend aus je einem offenen Ball um jeden der beiden Punkte, der seinerseits s^{n-1} nicht trifft. Mithilfe der Natürlichkeit der Sequenz zu einer offenen Teilmenge zeige man dann, daß das abgeschlossene Zurückholen Isomorphismen $\mathrm{H}^q_!(S^n \backslash \tilde{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(s^{n-1})$ induziert. Das liefert auch einen alternativen Zugang zu unseren Erkenntnissen über Umlaufzahlen kreuzungsfreier Wege [TF] 2.1.7.10.

Übung 4.10.28. Gegeben eine abgeschlossene Teilmenge $A \not\subset \mathbb{R}^n$, die homöomorph ist zu $\mathbb{R}^{n-1}$, sind beide Komponenten des Komplements von A unbeschränkt und A ist der Rand einer jeden von ihnen. Hinweis: Man lasse sich vom Beweis des Jordan'schen Kurvensatzes [TS] 3.3.3.2 inspirieren.

Übung 4.10.29. Sind $A, B \not\subset \mathbb{R}^2$ zwei nichtkompakte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeiten und besteht ihr Schnitt aus einem einzigen Punkt, so hat das Komplement $\mathbb{R}^2 \backslash (A \cup B)$ genau vier Komponenten. Hinweis: Man berechne mit [TS] 3.4.3.27 zunächst einmal die kompakte Kohomologie von $A \cup B$.

Übung 4.10.30. Ist $A \not\subset \mathbb{R}^2$ kompakt und überlagerungstrivial, so ist $\mathbb{R}^2 \backslash A$ zusammenhängend. Ist $A \not\subset \mathbb{R}^2$ kompakt und einfach wegzusammenhängend, so ist $\mathbb{R}^2 \backslash A$ nicht notwendig zusammenhängend. Hinweis: Verschwinden der ersten Garbenkohomologie überlagerungstrivialer Räume 3.5.13 und Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie.

5 Vergleichssätze

5.1 Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie

Satz 5.1.1 (**Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie**). *Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X liefert die durch das Kommutieren des Diagramms im folgenden Beweis definierte Abbildung einen natürlichen Isomorphismus zwischen ihrer ersten Čech-Kohomologie und ihrer ersten Garbenkohomologie*

$$\mathrm{can} : \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X;\mathcal{F})$$

5.1.2. Dieser Satz soll unter anderem dazu beitragen, unsere Anschauung von der durch 1.2.6 bereits mit Anschauung gefüllten ersten Čech-Kohomologie auf die von ihrer Definition her für mich völlig unanschauliche Garbenkohomologie zu übertragen. In 5.5.1 zeigen wir, daß die Čech-Kohomologie und die Garbenkohomologie auf „parakompakten“ Räumen sogar in allen Graden übereinstimmen.

Beweis. Wir wählen eine Einbettung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ in ein Produkt von Wolkenkratzergarben. Bezeichne $\mathcal{C}$ den Prägarbenkokern dieser Einbettung und bezeichne $\mathcal{C}^+$ seine Garbifizierung. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Prägarben

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathcal{G} \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \mathcal{C} \arrow[d] \\
\mathcal{F} \arrow[r, hook] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{C}^+
\end{tikzcd}$$

mit kurzer exakter oberer Zeile und linksexakter unterer Zeile. Es zeigt insbesondere, daß die Einheit der Adjunktion $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^+$ ein Monomorphismus von Prägarben ist. Behandeln wir dies Diagramm mit $\check{\mathrm{H}}$ und mit der Beschreibung der nullten Čech-Kohomologie einer Garbe als globale Schnitte aus 2.2.9, so erhalten wir die linke Hälfte eines kommutativen Diagramms, bei dem wir der Einfachheit halber den Grundraum X aus der Notation weggelassen haben:

$$\begin{tikzcd}
\check{\mathrm{H}}^0\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \check{\mathrm{H}}^1\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dd, dashed] & 0 \\
\check{\mathrm{H}}^0\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{C}^+ \arrow[d, "\wr"] & & \\
\mathrm{H}^0\mathcal{F} \arrow[r] & \mathrm{H}^0\mathcal{G} \arrow[r] & \mathrm{H}^0\mathcal{C}^+ \arrow[r] & \mathrm{H}^1\mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die Zeilen sind exakt, wie im folgenden begründet werden soll. In der oberen Zeile, da eine kurze exakte Sequenz von Prägarben uns eine lange exakte Sequenz in der Čech-Kohomologie liefert, zunächst bezüglich jeder offenen Überdeckung und dann auch im Limes. Wir haben weiter $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{G}) = 0$, nach 1.3.12

und 1.6.6 verschwinden ja für ein Produkt von Wolkenkratzergarben sogar alle höheren Čech-Kohomologiegruppen bezüglich jeder offenen Überdeckung. Das liefert Exaktheit der oberen Zeile. Die untere Zeile ist exakt als Teil einer langen exakten Garbenkohomologie-Sequenz, es gilt nämlich $\mathrm{H}^1(X;\mathcal{G}) = 0$ nach 4.1.3, da $\mathcal{G}$ stets welk ist. Folglich können wir den gestrichelten Pfeil durch die Kommutativität des Diagramms definieren. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, brauchen wir nur zu prüfen, daß der Monomorphismus von Prägarben $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^+$ Isomorphismen auf $\check{\mathrm{H}}^0$ induziert. Nun hat jedoch sein Prägarbenkokern $\mathcal{K}$ aufgrund der Exaktheit der Garbifizierung die Eigenschaft $\mathcal{K}^+ = 0$, als da heißt, alle Halme von $\mathcal{K}$ sind Null, woraus wir leicht $\check{\mathrm{H}}^0\mathcal{K} = 0$ folgern. Dann ergibt sich $\check{\mathrm{H}}^0\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^0\mathcal{C}^+$ aus der bereits diskutierten langen exakten Sequenz der Čech-Kohomologie zu einer kurzen exakten Sequenz in der Kategorie der abelschen Prägarben. □

Ergänzung 5.1.3. Im allgemeinen liefert eine kurze exakte Sequenz in der Kategorie der abelschen Garben keineswegs eine lange exakte Sequenz der zugehörigen Čech-Kohomologiegruppen. Ich bin jedoch außerstande, ein konkretes Gegenbeispiel anzugeben.

Beispiel 5.1.4. Sei X ein topologischer Raum. Die lange exakte Sequenz zur kurzen exakten Garbensequenz $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \twoheadrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}$, die von der Exponentialabbildung induziert wird, liefert die obere Horizontale in einem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^2(X;2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X) \arrow[dd, "\wr"] \\
\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) \arrow[d, "\wr"] & \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{komplexe Geradenbündel auf } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} & \mathrm{H}^2(X;\mathbb{Z}_X)
\end{tikzcd}$$

wo wir links die Identifikationen aus 5.1.1 und 1.2.9 benutzen und rechts durch $2\pi\mathrm{i}$ teilen. Das Bild eines komplexen Geradenbündels $\mathcal{L}$ unter dieser Verknüpfung heißt die **erste Chern'sche Klasse von** $\mathcal{L}$ und wird bezeichnet mit

$$c_1(\mathcal{L}) \in \mathrm{H}^2(X;\mathbb{Z}_X)$$

Wir werden in 5.3.19 und 5.3.5 sehen, daß auf „parakompakten" Räumen die Gruppen $\mathrm{H}^q(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$ verschwinden für $q > 0$, so daß unser ganzes Diagramm aus Bijektionen besteht. Auf parakompakten Räumen werden demnach komplexe Geradenbündel „klassifiziert durch ihre erste Chern'sche Klasse".

Satz* 5.1.5 (Geradenbündel mit konstanten Übergangsfunktionen). *Ein komplexes Geradenbündel auf einem parakompakten Raum besitzt genau dann eine Bündelkarte mit konstanten Übergangsfunktionen, wenn das Bild seiner ersten Chern'schen Klasse unter der natürlichen Abbildung* $\mathrm{H}^2(X;\mathbb{Z}_X) \to \mathrm{H}^2(X;\mathbb{C}_X)$ *nach Null geht.*

Ergänzung 5.1.6. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für glatte komplexe Geradenbündel auf parakompakten glatten Mannigfaltigkeiten. Es gilt jedoch für holomorphe Bündel auf einer komplexanalytischen Mannigfaltigkeit nur unter der zusätzlichen Annahme der Surjektivität von $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathbb{C}_X) \to \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{O}^{\mathrm{an}})$, die im Diagramm ganz unten horizontal anzubauen wäre. Diese Surjektivität hinwiederum ergibt sich bei kompakten Kählermannigfaltigkeiten aus der Hodgetheorie, unsere Abbildung identifiziert sich dann nämlich mit der Projektion von $\mathrm{H}^1(X;\mathbb{C}_X) = \mathrm{H}^{(1,0)}(X;\mathbb{C}_X) \oplus \mathrm{H}^{(0,1)}(X;\mathbb{C}_X)$ auf $\mathrm{H}^1(X;\mathcal{O}^{\mathrm{an}}) \cong \mathrm{H}^{(1,0)}(X;\mathbb{C}_X)$.

Beweis. Wir erhalten für jeden beliebigen topologischen Raum X Monomorphismen $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathbb{C}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ und ein kommutatives Diagramm mit kurzen exakten Garbensequenzen in den Zeilen und Spalten

$$\begin{tikzcd}
2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathbb{C}_X \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \mathbb{C}_X^\times \arrow[d, hook] \\
2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X \arrow[r, hook] & \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times} \arrow[d, two heads] \\
 & \mathrm{cok} \arrow[r, equal] & \mathrm{cok}
\end{tikzcd}$$

Ein komplexes Geradenbündel kann durch lokal konstante oder gleichbedeutend konstante Übergangsfunktionen realisiert werden genau dann, wenn seine Klasse im Bild von $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathbb{C}_X^\times) \to \check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times})$ liegt. Das impliziert sofort, daß das Bild seiner ersten Chern'schen Klasse in $\mathrm{H}^2(X;\mathbb{C}_X)$ verschwinden muß. Umgekehrt kann man sich überlegen und der Beweis des Oktaederaxioms wird auch formal zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(X;2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}_X) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(X;\mathrm{cok}) \arrow[r] & \mathrm{H}^2(X;\mathbb{C}_X)
\end{tikzcd}$$

mit den von obigen Sequenzen und Morphismen induzierten Morphismen kommutiert. Für parakompaktes X folgt aus $\check{\mathrm{H}}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}}) = 0$ dann umgekehrt auch, daß jedes komplexe Geradenbündel mit in $\mathrm{H}^2(X;\mathbb{C}_X)$ verschwindender erster Chern'scher Klasse bereits durch konstante Übergangsfunktionen realisiert werden kann. $\square$

5.2 Parakompakte Räume

Definition 5.2.1. 1. Seien X eine Menge und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Überdeckung von X. Eine Überdeckung $\mathcal{V}$ von X heißt eine **Verfeinerung von** $\mathcal{U}$, wenn jedes $V \in \mathcal{V}$ in mindestens einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist;

2. Ein System von Teilmengen $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eines topologischen Raums X heißt **lokal endlich**, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die höchstens endlich viele $U \in \mathcal{U}$ trifft;

3. Ein topologischer Raum heißt **parakompakt**, wenn er Hausdorff ist und sich jede offene Überdeckung unseres Raums zu einer lokal endlichen offenen Überdeckung verfeinern läßt.

5.2.2. Jede abgeschlossene Teilmenge eines parakompakten Raums ist offensichtlich wieder parakompakt. Für offene Teilmengen gilt das jedoch im allgemeinen nicht. Topologische Räume, in denen jede offene Teilmenge parakompakt ist, heißen **erblich parakompakt**.

Proposition 5.2.3 (**Kriterium für Parakompaktheit**). *Besitzt ein Hausdorffraum topologischer Raum eine abzählbare Überdeckung durch offene Teilmengen mit kompaktem Abschluß, so ist er parakompakt.*

Beweis. Indem wir zu geeigneten Vereinigungen übergehen dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit sogar annehmen, unser Raum sei überdeckt durch eine aufsteigende Folge $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß. Indem wir zu einer geeigneten Teilfolge übergehen, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß für alle n gilt $\bar{X}_n \subset X_{n+1}$. Um Sonderbetrachtungen zu vermeiden setzen wir $X_n = \emptyset$ für $n < 0$. Gegeben eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ unseres Raums werden die Kompakta $\bar{X}_{n+1} \backslash X_n$ jeweils schon überdeckt von den U aus einem endlichen Teilsystem $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$. Die Schnitte $U \cap (X_{n+2} \backslash \bar{X}_{n-1})$ für $U \in \mathcal{U}_n$ und $n \in \mathbb{Z}$ bilden dann die gesuchte lokal endliche Verfeinerung der Überdeckung $\mathcal{U}$. $\square$

Proposition 5.2.4. *Jeder parakompakte Raum ist normal.*

Beweis. Das folgt mit zweimaligem Anwenden des anschließenden technischen Lemmas, erst im Fall einer einpunktigen Menge B, dann im Allgemeinen. $\square$

Lemma 5.2.5. *Seien A, B disjunkte abgeschlossene Mengen in einem parakompakten Raum X. Zu jedem Punkt $x \in A$ gebe es disjunkte offene Teilmengen $U_x, V_x \Subset X$ mit $x \in U_x$ und $B \subset V_x$. So gibt es auch disjunkte offene $U, V \Subset X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$.*

Beweis. Die U_x mitsamt $X\backslash A$ bilden eine offene Überdeckung von X. Sei $\mathcal{W}$ eine offene lokal endliche Verfeinerung dieser offenen Überdeckung. Setzen wir $\mathcal{W}_A := \{W \in \mathcal{W} \mid W \cap A \neq \emptyset\}$, so ist jedes $W \in \mathcal{W}_A$ in einem U_x enthalten, die Vereinigung $U := \bigcup_{W \in \mathcal{W}_A} W$ ist offen, und wir haben $A \subset U$. Andererseits besitzt jedes $y \in B$ eine offene Umgebung C_y, die nur endlich viele Mengen $W_1, \ldots, W_n$ aus $\mathcal{W}_A$ trifft. Wählen wir nun $x(i) \in A$ mit $W_i \subset U_{x(i)}$, so ist $D_y = C_y \cap V_{x(1)} \cap \ldots \cap V_{x(n)}$ offen und trifft überhaupt keine Menge aus $\mathcal{W}_A$. Damit ist $V = \bigcup_{y \in B} D_y$ offen mit $V \cap U = \emptyset$ und $B \subset V$. □

Proposition 5.2.6 (Schrumpfen offener Überdeckungen). *Ist X ein parakompakter Hausdorffraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, so finden wir eine offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von X mit $\bar{V}_i \subset U_i \quad \forall i \in I$.*

Beweis. Aufgrund der Normalität von X besitzt jedes $x \in X$ eine offene Umgebung C_x, deren Abschluß in einem U_i enthalten ist, sagen wir $\bar{C}_x \subset U_{i(x)}$. Sei $\mathcal{W}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung der offenen Überdeckung von X durch die C_x. So finden wir auch für jedes $W \in \mathcal{W}$ ein $i := i(W)$ mit $\bar{W} \subset U_{i(W)}$. Dann setzen wir $V_j := \bigcup_{i(W)=j} W$ und erhalten $\bar{V}_j \subset U_j$, da mit 5.2.9 die Vereinigung einer lokal endlichen Familie abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. □

Lemma 5.2.7 (Teilung der Eins). *Ist X eine glatte parakompakte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung von X, so gibt es eine durch $U \in \mathcal{U}$ indizierte Familie von glatten Funktionen $\alpha_U : X \to [0,1]$ derart, daß α_U jeweils Träger in U hat, daß jede Stelle $x \in X$ eine Umgebung besitzt, auf der nur endlich viele unserer Funktionen nicht verschwinden, und daß an jeder Stelle $x \in X$ gilt*

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} \alpha_U(x) = 1$$

5.2.8. Sind etwa $A, B \underset{\mathrm{A}}{\subset} X$ disjunkt und abgeschlossen, so gibt es eine glatte Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f = 1$ auf einer offenen Umgebung von A und $f = 0$ auf einer offenen Umgebung von B. In der Tat folgt das sofort, wenn man das Lemma auf die Überdeckung von X durch die Komplemente unserer beiden abgeschlossenen Mengen anwendet.

Beweis. Können wir unseren Satz für eine lokal endliche Verfeinerung unserer Überdeckung $\mathcal{U}$ zeigen, so folgt er mühelos für $\mathcal{U}$ selber. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere Überdeckung lokal endlich ist und daß die überdeckenden Mengen U_i jeweils kompakten Abschluß haben, der darüber hinaus noch ganz im Bild einer Karte liegt. Wählen wir dann eine Schrumpfung (V_i) unserer Überdeckung, so finden wir etwa nach [AN2]

14.5.2.14 angewandt auf den Fall der Überdeckung von $\bar{V}_i$ durch U_i glatte Funktionen $\beta_i : U_i \to [0,1]$ mit kompaktem Träger, die auf $\bar{V}_i$ konstant Eins sind. Dehnen wir diese durch Null auf ganz X aus und bilden ihre Summe, so erhalten wir eine glatte überall positive Funktion β, und die Quotienten $\alpha_i = \beta_i/\beta$ bilden die gesuchte Teilung der Eins. $\square$

5.2.1 Übungen

Übung 5.2.9. Die Vereinigung über ein lokal endliches System abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Ist eine Abbildung stetig auf jeder der Teilmengen einer lokal endlichen Überdeckung eines Raums durch abgeschlossene Teilmengen, so ist sie schon selbst stetig.

5.3 Garben auf parakompakten Räumen

Proposition 5.3.1 (Fortsetzbarkeit von Schnitten). *Gegeben eine Garbe von Mengen auf einem parakompakten Raum läßt sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge auf eine offene Umgebung unserer abgeschlossenen Teilmenge fortsetzen.*

5.3.2. In 4.5.2 haben wir eine ähnliche Fortsetzbarkeitaussage für kompakte „relativ Hausdorff'sche" Teilmengen beliebiger topologischer Räume gezeigt. Der Beweis der Proposition zeigt, daß sich auf erblich parakompakten Räumen jeder Schnitt auf einer beliebigen Teilmenge zu einem Schnitt auf eine sie umfassende offene Teilenge fortsetzen läßt.

Beweis. Seien X unser Raum, $A \subset\!\!\!\!\!\!\bullet\; X$ unsere abgeschlossene Teilmenge und $\mathcal{F}$ unsere Garbe. Gegeben $s \in \mathcal{F}(A)$ finden wir eine Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A durch offene Teilmengen $U_i \Subset X$ und Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s|U_i \cap A = s_i|U_i \cap A \;\forall i$. Wir können zum Beispiel für jeden Punkt innerhalb von A einen hinreichend kleinen Repräsentanten des Halms von s nehmen. Wir ergänzen durch $X \backslash A$ zu einer offenen Überdeckung von X. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir diese zu einer lokal endlichen Überdeckung von X verfeinern. Nach Proposition 5.2.6 zum Schrumpfen offener Überdeckungen von parakompakten Räumen finden wir auch $V_i \Subset X$ mit $\bar{V}_i \subset U_i \;\forall i$ und $A \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Jetzt setzen wir

$$W := \{x \in X \mid \text{Alle } s_i \text{ zu Indizes } i \text{ mit } x \in \bar{V}_i \text{ haben denselben Halm bei } x\}$$

Per definitionem gilt $A \subset W$ und W ist eine offene Teilmenge von X. Zusätzlich gilt jedoch $s_i|W \cap V_i \cap V_j = s_j|W \cap V_i \cap V_j \;\forall i,j$. Folglich verkleben die Schnitte $s_i|W \cap V_i$ zu einem Schnitt $\tilde{s}$ auf W, der s fortsetzt. $\square$

Definition 5.3.3. Eine Garbe heißt **weich**, englisch **soft**, französisch **mou**, wenn sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

Beispiele 5.3.4. Jede welke Garbe auf einem parakompakten Raum ist weich nach 5.3.1. Die Garbe der glatten Funktionen auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit ist weich: Um das zu sehen, dehnt man einen Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge zunächst mithilfe von 5.3.1 auf eine offene Menge aus und biegt ihn dann in dieser offenen Menge mithilfe einer glatten Partition der Eins 5.2.8 herunter nach Null, so daß man ihn weiter durch Null ausdehnen kann zu einem globalen Schnitt. Man beachte hierbei, daß ein Schnitt der Garbe der glatten Funktionen auf einer abgeschlossenen Teilmenge einer glatten Mannigfaltigkeit keineswegs eine Funktion auf dieser abgeschlossenen Teilmenge ist: An den Randpunkten zeichnet ein Schnitt dieser Garbe einen ganzen Funktionskeim auf einer offenen Umgebung des besagten Punktes in der ursprünglichen Mannigfaltigkeit aus und keineswegs nur einen Funktionswert. Analog sind auch die Garben der glatten p-Formen und allgemeiner der glatten Schnitte in irgendeinem glatten Vektorraumbündel weich.

Satz 5.3.5. *Auf parakompakten Räumen sind weiche abelsche Garben azyklisch für den Funktor der globalen Schnitte.*

Beweis. Das folgt genau wie bei den welken Garben 4.1.3 oder mit dem abstrakten Kriterium 4.1.6 aus dem anschließenden Lemma 5.3.6. □

Lemma 5.3.6. *Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem parakompakten topologischen Raum X.*

1. *Ist $\mathcal{F}'$ weich, so induziert der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}''$ auf den globalen Schnitten;*

2. *Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ weich, so ist auch $\mathcal{F}''$ weich.*

Beweis. 1. Sei $s'' \in \Gamma\mathcal{F}''$ gegeben. Nach 5.2.6 gibt es eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ unseres Raums und $s_i \in \mathcal{F}(A_i)$ mit $s_i \mapsto s''|A_i \ \forall i$. Für $J \subset I$ setzen wir $A_J = \bigcup_{i\in J} A_i$. Nun betrachten wir die Menge aller Paare (s_J, J) mit $J \subset I$ und s_J einem Schnitt von $\mathcal{F}$ über A_J, der auf $s''|A_J$ geht. Auf dieser Menge erklären wir ein Teilordnung durch die Vorschrift $(s_K, K) \leq (s_J, J) \Leftrightarrow (K \subset J$ und $s_K = s_J|A_K)$. Nach 5.2.9 ist unsere Menge induktiv teilgeordnet und besitzt folglich ein maximales Element. Sei (s_J, J) solch ein maximales Element. Wäre $J \neq I$, so gäbe es $i \in I\backslash J$. Hier unterscheiden sich s_i und s_J auf $A_i \cap A_J$ nur um einen Schnitt s_i' in $\mathcal{F}'$, der sich nach Annahme auf ganz A_i ausdehnen läßt. Also verkleben $s_i - s_i'$ und s_J auf $A_i \cup A_J$

zu einem Urbild von s'' im Widerspruch zur Maximalität von (s_J, J). Damit ist in der Tat $\Gamma\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{F}''$ eine Surjektion.

2. Das folgt sofort aus Teil 1, da jede abgeschlossene Teilmenge eines parakompakten Raums parakompakt ist und da die Einschränkung einer weichen Garbe auf eine abgeschlossene Teilmenge stets eine weiche Garbe bleibt. □

Ergänzung 5.3.7. Diejenigen Leser, die noch nicht mit der Differentialformen auf abstrakten Mannigfaltigkeiten [ML] 28.8.5.10 folgende vertraut sind, mögen sich im folgenden auf den Fall [AN2] 14.10.2 beschränken, daß die Mannigfaltigkeit eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist. Nicht zulässig ist es jedoch, mit eingebetteten Mannigfaltigkeiten positiver Kodimension und unseren relativen Differentialformen zu arbeiten, wie wir sie in [AN2] 14.10.2 betrachtet hatten.

Definition 5.3.8. Der **de-Rham-Komplex** einer glatten Mannigfaltigkeit X ist der Komplex $(\Omega^{\lhd}(X), d)$ der glatten Differentialformen auf X mit der äußeren Ableitung als Differential, wie wir ihn in [ML] 28.8.5.19 eingeführt haben. Die **de-Rham-Kohomologie** von X ist per definitionem seine Kohomologie

$$\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{dR}} := \mathcal{H}^q\Omega^{\lhd}(X)$$

Korollar 5.3.9 (**de-Rham-Kohomologie als Garbenkohomologie**)**.** *Für jede parakompakte glatte Mannigfaltigkeit X stimmt die Garbenkohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$ mit der de-Rham-Kohomologie überein.*

Vorschau 5.3.10. Der Vergleichsisomorphismus ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Ringalgebren.

Beweis. Wir konstruieren im folgenden genauer einen **Vergleichsisomorphismus** zwischen den fraglichen Kohomologiegruppen. Sicher können wir p-Formen auch auffassen als globale Schnitte der Garbe der p-Formen, in Formeln $\Omega^p(X) = \Gamma\Omega^p_X$, und diese Garben bilden mit der äußeren Ableitung als Differential nach dem Poincaré-Lemma 5.3.13 eine Auflösung der konstanten Garbe

$$\mathbb{R}_X \hookrightarrow \Omega^{\lhd}_X$$

Die Garben der Differentialformen sind nun aber weich nach 5.3.4 und damit globale-Schnitte-azyklisch nach 5.3.5. Also berechnet unser Komplex nach 3.6.8 die Garbenkohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$, als da heißt, die natürlichen Abbildungen aus 3.2.8 sind Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{dR}} = \mathcal{H}^q\Gamma\Omega^{\lhd}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R}_X)_{\mathrm{garb}}$$ □

Beispiel 5.3.11 (**Zurückholen und de-Rham-Kohomologie**). Ist $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung von glatten Mannigfaltigkeiten, so liefert das Zurückholen von Differentialformen eine Kettenabbildung $f^* : \Omega^\lhd Y \to \Omega^\lhd X$. Diese Kettenabbildung hinwiederum ist der Effekt auf den globalen Schnitten eines Komorphismus über f von Auflösungen der konstanten Garben $\mathbb{R}_X$ und $\mathbb{R}_Y$, der den offensichtlichen Komorphismus über f zwischen besagten konstanten Garben liftet. Folglich entsprechen die von dieser Kettenabbildung auf der Kohomologie induzierten Abbildungen $\mathrm{H}^i(Y)_{\mathrm{dR}} \to \mathrm{H}^i(X)_{\mathrm{dR}}$ unter unseren Isomorphismen aus dem Beweis von 5.3.9 dem Zurückholen auf der Garbenkohomologie.

5.3.12 (**Vor- und Nachteile der de-Rham-Kohomologie**). Die de-Rham-Kohomologie ist Berechnungen besonders gut zugänglich. Zum Beispiel sieht man in dieser Realisierung der Garbenkohomologie unmittelbar, daß die Kohomologie mit reellen Koeffizienten einer parakompakten Mannigfaltigkeit X oberhalb der Dimension unserer Mannigfaltigkeit verschwinden muß, in Formeln

$$\mathrm{H}^q(X; \mathbb{R}_X) = 0 \quad \text{für } q > \dim X.$$

Die wesentlichen Nachteile dieser Kohomologietheorie sind, daß sie nur für glatte Mannigfaltigkeiten sinnvoll definiert ist, daß sie nur reelle Koeffizienten zuläßt und daß man mit ihr nur Rückzüge unter glatten Abbildungen berechnen kann. Ich habe einmal gelesen, daß die de-Rham-Kohomologie ursprünglich von Elie Cartan erfunden wurde, um die Kohomologie kompakter Liegruppen zu bestimmen.

Lemma 5.3.13 (von Poincaré). *Ist $U \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kreisscheibe, so erhalten wir einen exakten Komplex*

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \ldots\ldots \overset{d}{\twoheadrightarrow} \Omega^n(U)$$

mit der Identifikation von Zahlen und konstanten Funktionen $\mathbb{R} \hookrightarrow \Omega^0(U)$ als erster Abbildung und der äußeren Ableitung als anderen Abbildungen.

Ergänzung 5.3.14 (**Poincaré-Lemma mit polynomialen Koeffizienten**). Ist $U = \mathbb{R}^n$ und betrachten wir nur polynomiale Koeffizienten, so ist die entsprechende Aussage schnell gezeigt: In einer Veränderlichen liefert die Einbettung der Kon-

stanten ja offensichtlich eine Homotopieäquivalenz

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
0 & & 0 \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]\,\mathrm{d}x \\
\uparrow & & \uparrow d \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & & 0 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Tensorieren wir n Kopien dieser Homotopieäquivalenz miteinander, so ergibt sich das Poincaré-Lemma auf ganz $\mathbb{R}^n$ für den Fall polynomialer Koeffizienten. Explizit ist die Komposition von Kettenabbildungen zwischen vertikal geschriebenen Komplexen mit jeweils höchstens zwei von Null verschiedenen Einträgen

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}[x]\,\mathrm{d}x & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]\,\mathrm{d}x \\
d\uparrow & & \uparrow & & \uparrow d \\
\mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]
\end{array}$$

mit dem Auswerten bei Null in der Horizontale unten rechts homotop zur Identität vermittels der Homotopie, die gegeben wird durch die Vorschrift $\delta\colon \mathbb{R}[x]\,\mathrm{d}x \to \mathbb{R}[x]$, $f(x)\,\mathrm{d}x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. In der Tat gilt ja $d\delta = \mathrm{id}$ und $f - f(0) = \delta\,\mathrm{d}f$. Unser gleich folgender Beweis des Poincaré-Lemmas im glatten Fall verläuft analog.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Ursprung das Zentrum unserer Kreisscheibe. Sei $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ das Vergessen der ersten Koordinate. So ist $V := \pi(U) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ wieder eine offene Kreisscheibe und wir sind fertig mit Induktion, sobald wir zeigen können, daß das Zurückholen von Differentialformen

$$\pi^*\colon \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$$

Isomorphismen auf der Kohomologie induziert. Bezeichnet $i\colon \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ das Davorschreiben einer Koordinate Null, so gilt sicher $\pi \circ i = \mathrm{id}$ und folglich $i^* \circ \pi^* = \mathrm{id}$. Wir sind also fertig, wenn wir zusätzlich noch zeigen können, daß die Komposition $\pi^* \circ i^*\colon \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ homotopieäquivalent ist zur Identität. Dazu betrachten wir $\delta\colon \Omega^*(U) \to \Omega^{*-1}(U)$ gegeben durch

$$\delta\colon \sum a_I\,\mathrm{d}x_I \;\mapsto\; \sum_{I \ni 1} (\textstyle\int a_I)\,\mathrm{d}x_{I\setminus 1}$$

Hierbei ist $(\int a)$ zu verstehen als die Funktion

$$(\textstyle\int a)(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\int_0^{x_1} a(t, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}t$$

So gilt $\mathrm{id} - \pi^* i^* = d\delta + \delta d$, wie man separat für Formen der Gestalten $a_I\,\mathrm{d}x_I$ und $b_I\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_I$, jeweils mit $1 \notin I$, ohne größere Schwierigkeiten prüft. $\square$

5.3.15 (**Kompaktweiche Garben auf Mannigfaltigkeiten**). Jede weiche Garbe auf einem Hausdorffraum ist kompaktweich, denn Kompakta in Hausdorffräumen sind abgeschlossen und relativ Hausdorff. Die Garbe der glatten Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit ist sogar dann noch kompaktweich, wenn unsere Mannigfaltigkeit nicht parakompakt ist und unsere Garbe mithin nicht notwendig weich. Um das zu sehen, dehnt man einen Schnitt über einer kompakten Teilmenge zunächst mithilfe von 4.5.2 auf eine parakompakte offene Menge aus und biegt ihn dann in dieser offenen Menge mithilfe einer glatten Partition der Eins 5.2.8 herunter nach Null, so daß man ihn weiter durch Null ausdehnen kann zu einem globalen Schnitt. Analog sind auch die Garben der glatten p-Formen und allgemeiner der glatten Schnitte in irgendeinem glatten Vektorraumbündel kompaktweich.

5.3.16. Die **kompakte de-Rham-Kohomologie** einer glatten Mannigfaltigkeit X ist definiert als die Kohomologie des Komplexes der Differentialformen mit kompaktem Träger, in Formeln

$$\mathrm{H}^q_!(X)_{\mathrm{dR}} := \mathcal{H}^q \Gamma_! \Omega_X$$

Da $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \Omega_X$ nach 5.3.15 eine Auflösung der konstanten Garbe durch kompaktweiche Garben ist und da diese $\Gamma_!$-azyklisch sind, sind unsere natürlichen Morphismen aus 3.2.8 Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_!(X)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X; \mathbb{R}_X) = \mathrm{H}^q_!(X; \mathbb{R})_{\mathrm{garb}}$$

5.3.17. Die kompakte de-Rham-Kohomologie ist Berechnungen besonders gut zugänglich. Zum Beispiel sieht man in diesem Bild unmittelbar, daß die Kohomologie mit kompaktem Träger und reellen Koeffizienten einer Mannigfaltigkeit X oberhalb der Dimension unserer Mannigfaltigkeit verschwinden muß, in Formeln

$$\mathrm{H}^q_!(X; \mathbb{R}_X) = 0 \quad \text{für } q > \dim X.$$

Beispiel 5.3.18. Für die Kohomologie der Zahlengerade mit kompaktem Träger und reellen Koeffizienten gilt

$$\mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}; \mathbb{R}_{\mathbb{R}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat erhalten wir mit dem Integrieren über die Zahlengerade als zweitem Pfeil eine kurze exakte Sequenz $\Gamma_!\Omega^0_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \Gamma_!\Omega^1_{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$. Man beachte, daß wir die kompakte Kohomologie der Zahlengerade mit anderen Argumenten und sogar mit beliebigen Koeffizienten bereits aus 4.8.17 kennen.

Übungen

Übung 5.3.19. Die Garbe der stetigen Funktionen auf einem parakompakten Raum mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ist weich. Hinweis: Man erinnere Tietzes Erweiterungslemma [TM] 1.3.1.5 und Normalität parakompakter Räume 5.2.4. Dasselbe gilt für die Garbe der stetigen Schnitte in einem beliebigen Vektorraumbündel mit endlichdimensionalen Fasern.

Übung 5.3.20 (**Funktorialität der kompakten Kohomologie und de-Rham**). Das Ausdehnen durch Null in der kompakten Kohomologie von glatten Mannigfaltigkeiten kann über das Ausdehnen durch Null von Differentialformen mit kompaktem Träger berechnet werden. Das eigentliche Zurückholen auf eine weitere Mannigfaltigkeit unter einer eigentlichen glatten Abbildung kann durch Zurückholen von Differentialformen mit kompaktem Träger berechnet werden.

Übung 5.3.21. Man zeige, daß unser ausgezeichneter Erzeuger von $\mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z})$ aus 4.8.17 oder vielmehr sein Bild in $\mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ in der de-Rham-Kohomologie durch eine und jede Differentialform der Gestalt $f(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ repräsentiert wird, die kompakten Träger hat und Integral Eins in Bezug auf die Standardorientierung.

5.4 Reelle singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie

5.4.1. Für jeden topologischen Raum X erklären wir den **Komplex der Grenzketten** als den Kolimes

$$\mathrm{G}X := \mathrm{colf}(\mathrm{S}X \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathrm{S}X \xrightarrow{\mathrm{U}} \ldots)$$

des Komplexes der singulären Ketten in Bezug auf die Unterteilungsoperatoren U aus [TS] 3.2.4.1. Alle von der Definition herrührenden Abbildungen $\mathrm{S}X \to \mathrm{G}X$ in diesen Kolimes induzieren nach [TS] 3.2.4.3 dieselbe Abbildung auf der Homologie. Wir arbeiten im folgenden mit der ersten dieser kanonischen Abbildungen. Sie kommt, wie auch alle anderen, sogar von einer Transformation $\mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{G}$ von Funktoren $\mathrm{Top} \to \mathrm{Ket}$ her und induziert aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites Isomorphismen auf der Homologie

$$\mathrm{H}_q(X)_{\mathrm{sing}} = \mathcal{H}_q\mathrm{S}X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q\mathrm{G}X =: \mathrm{H}_q(X)_{\mathrm{grenz}}$$

Gegeben ein Raumpaar (X, A) erhalten wir weiter mit den offensichtlichen Abbildungen ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}A & \hookrightarrow & \mathrm{S}X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}X/\mathrm{S}A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{G}A & \hookrightarrow & \mathrm{G}X & \twoheadrightarrow & \mathrm{G}X/\mathrm{G}A \end{array}$$

und die langen exakten Kohomologiesequenzen zusammen mit dem Fünferlemma zeigen, daß auch die rechte Vertikale Isomorphismen auf der Homologie induziert, in hoffentlich offensichtlicher Notation also Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(X, A)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X, A)_{\mathrm{grenz}}$$

zwischen der gewöhnlichen relativen Homologie und der mit Grenzketten berechneten relativen Homologie. Ebenso betrachten wir mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ oder einer beliebigen injektiven abelschen Gruppe den **Komplex der Kogrenzketten** $\mathrm{G}^*(X; \mathbb{R}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{G}(X), \mathbb{R})$ und seine Kohomologie $\mathrm{H}^q(X; \mathbb{R})_{\mathrm{grenz}}$ und erhalten Isomorphismen mit der gewöhnlichen singulären Kohomologie

$$\mathrm{H}^q(X; \mathbb{R})_{\mathrm{grenz}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathbb{R})_{\mathrm{sing}}$$

5.4.2 (**Vorteile und Nachteile von Grenzketten**). Der Komplex der Grenzketten besteht im allgemeinen nicht aus freien abelschen Gruppen. Zum Beispiel ist im Fall des einpunktigen Raums X der Unterteilungsoperator $\mathrm{S}^1 X \to \mathrm{S}^1 X$ die Multiplikation $(2\cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und der Kolimes isomorph zu $\mathbb{Z}[2^{-1}]$. Der Komplex der Grenzketten besteht jedoch aus flachen abelschen Gruppen, da jeder filtrierende Kolimes von torsionsfreien abelschen Gruppen aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites wieder torsionsfrei ist. Sein eigentlicher Vorteil liegt darin, daß er als Komplex der globalen Schnitte eines Komplexes „welker abelscher Kogarben“ aufgefaßt werden kann, wie wir im Anschluß sehen werden.

5.4.3. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{V}$ eine Überdeckung derart, daß selbst die offenen Kerne der Mengen aus $\mathcal{V}$ bereits X überdecken, in Formeln $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V^\circ$. So verschwindet für alle $q \geq 0$ der Kolimes über das System

$$\mathrm{S}_q X/\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}} X \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathrm{S}_q X/\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}} X \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathrm{S}_q X/\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}} X \xrightarrow{\mathrm{U}} \dots$$

mit den von den Unterteilungsoperatoren induzierten Morphismen. In der Tat wird nach [TS] 3.2.4.8 jedes Element dieses Quotienten von einer hinreichend hohen Potenz des Unterteilungsoperators annulliert.

Satz 5.4.4 (**Grenzketten als welke Čech-azyklische Kogarben**). *Gegeben ein topologischer Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X erhalten wir für alle $q \geq 0$ eine exakte Sequenz von Grenzkettengruppen*

$$\mathrm{G}_q X \twoheadleftarrow \bigoplus_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{G}_q U \leftarrow \bigoplus_{(U,U') \in \mathcal{U}^2} \mathrm{G}_q(U \cap U') \leftarrow \dots$$

Des weiteren induziert jede stetige injektive Abbildung $A \hookrightarrow X$ eine injektive Abbildung $\mathrm{G}_q A \hookrightarrow \mathrm{G}_q X$ auf den Grenzketten.

5.4.5 (**Čech-azyklische Garben**). Eine Prägarbe mit Werten in einer abelschen Kategorie nennen wir **Čech-azyklisch**, wenn in Bezug auf jedes System von offenen Teilmengen der zugehörige Čech-Komplex eine Auflösung der Schnitte auf der Vereinigung bildet. Dabei setzen wir implizit voraus, daß alle beim Bilden der jeweiligen Čech-Komplexe benötigten Produkte existieren. Insbesondere ist jede Čech-azyklische Prägarbe bereits eine Garbe. Eine Garbe mit Werten in einer abelschen Kategorie heißt **welk**, wenn die globalen Schnitte epimorph auf die Schnitte über jeder offenen Teilmenge gehen. Eine Garbe mit Werten in $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ nennen wir eine **abelsche Kogarbe**. Für jeden topologischen Raum X sind die Vorschriften $\mathcal{S}_q^X : U \mapsto \mathrm{S}_q U$ und

$$\mathcal{G}_q^X : U \mapsto \mathrm{G}_q U$$

für $U \Subset X$ in offensichtlicher Weise Prägarben auf X mit Werten in $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Unser Satz bedeutet, daß $\mathcal{G}_q^X$ für alle q sogar eine welke Čech-azyklische Garbe auf X mit Werten in $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ ist, also eine welke Čech-azyklische abelsche Kogarbe. Wir nennen sie die **q-te Grenzkettenkogarbe**.

Beweis. Wenn wir statt Grenzketten gewöhnliche Ketten betrachten und ganz links den Komplex der $\mathcal{U}$-feinen Ketten $\mathrm{S}^{\mathcal{U}} X$, so folgt die Exaktheit aus der Azyklizität von Simplizes [TS] 3.1.1.16 mit Eckenmenge die Menge aller $U \in \mathcal{U}$, die einen vorgegebenen singulären Simplex enthalten. Wenn wir nun den Kolimes anwenden und die vorbereitende Bemerkung 5.4.3 beachten, folgt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der Injektivität $\mathrm{S}_q A \hookrightarrow \mathrm{S}_q X$ durch Übergang zum Kolimes. □

5.4.6. Da $\mathbb{R}$ eine injektive abelsche Gruppe ist, erhalten wir für jeden topologischen Raum X eine welke Garbe $\mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}^q$ von reellen Vektorräumen durch die Vorschrift

$$\mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}^q : U \mapsto \mathrm{G}^q(U;\mathbb{R})$$

für $U \Subset X$. Wir nennen sie die **q-te Kogrenzkettengarbe von X mit reellen Koeffizienten**. Zusammen bilden diese Garben einen Komplex $\mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}^{\lhd}$ von Garben auf X und die Augmentationen $\mathrm{G}_0 U \to \mathbb{Z}$ induzieren lineare Abbildungen $\mathbb{R} \to G^0(U;\mathbb{R})$ und einen Homomorphismus von Garbenkomplexen

$$\mathbb{R}_X[0] \to \mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}^{\lhd}$$

5.4.7. Ein topologischer Raum heiße **singulär-azyklisch**, wenn seine singuläre Homologie isomorph ist zu $\mathbb{Z}$ im Grad Null und zu Null in höheren Graden. Nach

dem universellen Koeffiziententheorem gilt dann dasselbe auch für die Kohomologie. Nach unseren allgemeinen Konventionen [TM] 1.1.9.5 heißt ein Raum **lokal singulär-azyklisch**, wenn sich jede Umgebung jedes Punktes zu einer singulär-azyklischen Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt.

Satz 5.4.8 (**Reelle singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie**). *Gegeben ein lokal singulär-azyklischer Raum X ist der Komplex der Kogrenzkettengarben mit reellen Koeffizienten eine welke Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \mathcal{G}^{\lhd}_{X,\mathbb{R}}$ und wir erhalten zusammen mit 5.4.1 Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}} \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{grenz}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{sing}}$$

Vorschau 5.4.9. Der hier gegebene Beweis funktioniert für eine beliebige injektive abelsche Koeffizientengruppe. Eine Beweisvariante im Fall von beliebigen Koeffizienten erklären wir in 5.6.4.

Beweis. Wir erinnern die reduzierte singuläre Homologie, die Homologie des augmentierten Komplexes der singulären Ketten $\tilde{\mathrm{S}}X$, der in nichtnegtiven Graden mit $\mathrm{S}X$ übereinstimmt und durch $\mathbb{Z}$ im Grad (-1) ergänzt wird. Durch Übergang zum Kolimes unter den Unterteilungsoperatoren konstruieren wir den **augmentierten Grenzkettenkomplex** $\tilde{\mathrm{G}}X$. Verschwindet für einen topologischen Raum U die reduzierte singuläre Homologie, so ist auch der augmentierte Grenzkettenkomplex $\tilde{\mathrm{G}}U$ exakt. Ist X lokal singulär-zyklisch, so ist folglich der Komplex der Kogrenzkettengarben eine welke Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \mathcal{G}^{\lhd}_{X,\mathbb{R}}$. Das liefert Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{G}^{\lhd}_{X,\mathbb{R}} = \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{grenz}} \qquad \square$$

5.4.10. Der q-te Standardsimplex Δ_q ist eine halboffene Teilmenge der durch die Gleichung $\sum x_i = 1$ definierten affinen Hyperebene von $\mathbb{R}^{q+1}$ und eine glatte Eckfaltigkeit im Sinne von [AN2] 14.10.7.12. Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit X nennen wir glatte Abbildungen $\Delta_q \to X$ auch **glatte q-Simplizes**. Wir bilden dann die Gruppe der **glatten q-Ketten** $\mathcal{C}^\infty\mathrm{S}_qX$ als die freie abelsche Gruppe über der Menge aller glatten q-Simplizes und erhalten auf diese Weise einen Unterkomplex $\mathcal{C}^\infty\mathrm{S}X \subset \mathrm{S}X$ im Komplex der singulären Ketten von X. Offensichtlich spaltet diese Einbettung in jedem Grad. Die Homologie des Komplexes der glatten Ketten notieren wir

$$\mathrm{H}_q(X)_{\text{sing-}\infty} := \mathcal{H}_q\mathcal{C}^\infty\mathrm{S}X$$

5.4.11. Für jede glatte Mannigaltigkeit X erklären wir den **Komplex der glatten Grenzketten** als den Kolimes

$$\mathcal{C}^\infty\mathrm{G}X := \mathrm{colf}(\mathcal{C}^\infty\mathrm{S}X \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathcal{C}^\infty\mathrm{S}X \xrightarrow{\mathrm{U}} \ldots)$$

des Komplexes der singulären Ketten in Bezug auf die Unterteilungsoperatoren U aus [TS] 3.2.4.1, die offensichtlich glatte Ketten zu glatten Ketten machen. Die Homologie dieses Komplexes notieren wir

$$\mathrm{H}_q(X)_{\text{grenz-}\infty} := \mathcal{H}_q \mathcal{C}^\infty \mathrm{G}X$$

Alle von der Definition herrührenden Abbildungen $\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}X \to \mathcal{C}^\infty \mathrm{G}X$ in diesen Kolimes induzieren analog wie in [TS] 3.2.4.3 dieselbe Abbildung auf der Homologie. Wir arbeiten im folgenden mit der ersten dieser kanonischen Abbildungen. Sie induziert aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites Isomorphismen auf der Homologie

$$\mathrm{H}_q(X)_{\text{sing-}\infty} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X)_{\text{grenz-}\infty}$$

Genau wie in 5.4.5 konstruieren wir auch für $q \geq 0$ eine welke Čech-azyklische Kogarbe $\mathcal{C}^\infty \mathcal{G}_q^X : U \mapsto \mathcal{C}^\infty \mathrm{G}_q(U)$. Wir nennen sie die **$q$-te glatte Grenzkettenkogarbe von X**.

Proposition 5.4.12 (**Homologie mit glatten Ketten**). *Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit X ist die Einbettung $\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}X \subset \mathrm{S}X$ des Komplexes der glatten Ketten in den Komplex aller singulären Ketten eine Homotopieäquivalenz und induziert insbesondere Isomorphismen*

$$\mathrm{H}_q(X)_{\text{sing-}\infty} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X)_{\text{sing}}$$

5.4.13. Wir verwenden analoge Notationen für relative Homologie oder Kohomologie mit glatten Ketten, auch mit Koeffizienten. Aus unserer Proposition folgen leicht analoge Aussagen in all diesen Situationen. Zum Beispiel liefern die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{sing-}\infty}$$

Dafür geben wir in 5.4.17 auch noch einen unabhängigen Beweis, der ohne die in diesem Beweis verwendeten Erkenntnisse zu Spektralsequenzen auskommt.

Beweis. Da wir in Richtung der Pfeile beschränkte Komplexe freier abelscher Gruppen vor uns haben, reicht es zu zeigen, daß unsere Einbettung ein Quasiisomorphismus ist. Mit dem Komplex der glatten Grenzketten $\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}X$ aus 5.4.11 erhalten wir ein kommutatives Diagramm mit Quasiisomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty \mathrm{S}X & \hookrightarrow & \mathrm{S}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^\infty \mathrm{G}X & \hookrightarrow & \mathrm{G}X \end{array}$$

Es reicht also zu zeigen, daß die untere Horizontale ein Quasiisomorphismus ist. Gleichbedeutend reicht es zu zeigen, daß ihr Kokern

$$\mathrm{K}(X) := \mathrm{cok}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}(X) \to \mathrm{G}(X))$$

ein exakter Komplex ist. Wir wissen aus 5.4.4, daß $\mathcal{G}_q X : U \mapsto \mathrm{G}_q(U)$ für alle q eine Čech-azyklische Kogarbe ist. Für die glatten Grenzketten zeigt man das genauso. Für die verkogarbten Kokerne $\mathcal{K}_q^X : U \mapsto \mathrm{K}_q(U)$ folgt aus der langen exakten Homologiesequenz, daß auch sie für alle q eine Čech-azyklische Kogarbe auf X bilden. Wir zeigen das Verschwinden von

$$\mathcal{H}_q(\mathrm{K}(X))$$

gleichzeitig für alle glatten Mannigfaltigkeiten X mit vollständiger Induktion über q. Die Induktionsbasis besteht darin, daß wir es für alle $q < 0$ bereits wissen. Nun betrachten wir eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von X durch offene Teilmengen, die diffeomorph sind zu offenen Kreisscheiben, und betrachten den Doppelkomplex im dritten Quadraten mit den zugehörigen Čech-Komplexen der Kogarben $\mathcal{K}_q^X$ in den Zeilen. Die Zeilen sind also exakt außer bei $p = 0$ und das zeigt mit 4.6.12, daß die Abbildung des Totalkomplexes auf den senkrechten Kokernkomplex, in unserem Fall den Komplex der $\mathrm{K}_q(X)$, ein Quasisomorphismus ist. Andererseits ist die Spalte mit Index $p = 0$ exakt, da nach Annahme für $U \in \mathcal{U}$ die Einbettung $\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}(U) \hookrightarrow \mathrm{G}(U)$ eine Homotopieäquivalenz ist. Die Induktionsannahme, angewandt auf alle endlichen Schnitte unserer offenen Teilmengen, die ja auch wieder glatte Mannigfaltigkeiten sind, impliziert zusätzlich, daß alle Spalten unseres Doppelkomplexes exakt sind für untere Indizes $< q$ alias obere Indizes $> -q$. Dann aber zeigt die Spektralsequenz, daß der Totalkomplex auch im Grad $-q$ keine Homologie hat, in Formeln $\mathcal{H}_q(\mathrm{K}(X)) = 0$. Genauer folgt das mit einer Variante von Übung 4.6.14. □

5.4.14. Wir erklären für jede glatte Mannigfaltigkeit X die **q-ten glatten Kogrenzketten mit reellen Koeffizienten** als den reellen Vektorraum

$$\mathcal{C}^\infty G^q(X;\mathbb{R}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}_q(X), \mathbb{R})$$

Die glatten Grenzkoketten bilden einen Komplex. Wir notieren seine Kohomologie

$$\mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{grenz-}\infty} := \mathcal{H}^q \mathcal{C}^\infty G^*(X;\mathbb{R})$$

5.4.15. Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir vergarben die glatten Kogrenzketten zur **q-ten glatten Kogrenzkettengarbe mit reellen Koeffizienten** gegeben durch

$$\mathcal{C}^\infty \mathcal{G}^q_{X,\mathbb{R}}(U) := \mathcal{C}^\infty G^*(U;\mathbb{R})$$

für $U \Subset X$. Die Garbeneigenschaft folgt aus der Injektivität der abelschen Gruppe $\mathbb{R}$ und der Kogarbeneigenschaft der glatten Grenzkettenkogarben 5.4.11. Aus 5.4.11 folgt zusätzlich, daß die Kogrenzkettengarben welk sind. Zusammen mit den von den Augmentationen $\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}_0(U) \to \mathbb{Z}$ herrührenden Garbenhomomorphismen $\mathbb{R}_X \to \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}^0_{X,\mathbb{R}}$ erhalten wir einen Morphismus $\mathbb{R}_X[0] \to \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}^{\lhd}_{X,\mathbb{R}}$ von Garbenkomplexen auf X. Daß für jede glatte Mannigfaltigkeit der Komplex der glatten Kogrenzkettengarben sogar eine welke Auflösung der konstanten Garbe

$$\mathbb{R}_X \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}^{\lhd}_{X,\mathbb{R}}$$

ist, folgt wie im nicht-glatten Fall, sobald gezeigt ist, daß der augmentierte Komplex der glatten Grenzketten $\mathcal{C}^\infty \tilde{\mathrm{G}}(U)$ exakt ist für $U \Subset \mathbb{R}^n$ nichtleer konvex. Das folgert man wie für die singuläre Homologie in [TS] 3.1.2.17 durch die Konstruktion eines Prismenoperators und wir haben bereits in [TS] 3.1.2.18 erklärt, wie man einen Prismenoperator konstruiert, der glatte Ketten zu glatten Ketten macht.

5.4.16. Mit denselben Argumenten wie im nichtglatten Fall liefert für jede glatte Mannigfaltigkeit X die Abbildung in die erste Gruppe des Kolimes einen Quasiisomorphismus

$$\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty \mathrm{G}(X)$$

Durch Dualisieren erhalten wir daraus einen Quasiisomorphismus $\mathcal{C}^\infty \mathrm{G}^*(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty \mathrm{S}^*(X)$ und damit Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{grenz-}\infty} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{sing-}\infty}$$

Korollar 5.4.17 (Reelle Kohomologie mit glatten Ketten). *Auf einer glatten Mannigfaltigkeit X induziert die Einbettung der glatten singulären Ketten in alle singulären Ketten Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{sing-}\infty}$$

Beweis. Wir können unsere Abbildung ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{grenz}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{grenz-}\infty} \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{sing}} & \to & \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{sing-}\infty} \end{array}$$

Die Einbettung liefert einen Homomorphismus $\mathcal{G}^{\lhd}_{X,\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}^{\lhd}_{X,\mathbb{R}}$ von welken Auflösungen der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$ und mithin einen Quasiisomorphismus auf den globalen Schnitten und das liefert den bereits mit einer Schlange notierten Isomorphismus in der oberen Horizontale. Die Isomorphismen in den Vertikalen kennen wir bereits aus 5.4.1 und 5.4.16. Der Satz folgt. $\square$

5.4.18. Wir kennen die Aussage für die Homologie bereits aus 5.4.12. Das Korollar folgt alternativ auch direkt durch Dualisieren, wie in 5.4.13 bereits erwähnt. Der hier gegeben Beweis hat jedoch den Vorzug, Spektralsequenzen zu vermeiden. In 5.6.2 folgende diskutieren wir die Verallgemeinerung auf den Fall beliebiger Koeffizienten.

5.4.19. Der q-te Standardsimplex Δ_q ist in der affinen Hyperebene von $\mathbb{R}^{q+1}$, die durch die Gleichung $\sum x_i = 1$ definiert wird, eine kompakte Eckfaltigkeit [AN2] 14.10.7.12. Wir versehen unsere Hyperebene mit der Orientierung, die sie als Rand der berandeten Untermannigfaltigkeit, die durch die Gleichung $\sum x_i \leq 1$ definiert wird, von der Standardorientierung des $\mathbb{R}^{q+1}$ erbt, und bezeichnen die induzierte Orientierung auf dem regulären Teil von Δ_q als die **Standardorientierung des Standardsimplex**. Ist dann X eine glatte Mannigfaltigkeit und ω eine stetige q-Form auf X und $\sigma : \Delta_q \to X$ ein glatter q-Simplex, so setzen wir

$$\int_\sigma \omega \quad = \quad \int_{\vec{\Delta}_q} \sigma^* \omega$$

Diese Abbildung setzt sich linear fort und liefert einen Homomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathrm{int} : \Omega^q X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty \mathrm{S}_q X, \mathbb{R})$$

Der Satz von Stokes mit Ecken [AN2] 14.10.7.19 oder, vielleicht einfacher, eine explizite an unseren Spezialfall angepaßte Rechnung zeigt dann, daß die Familie dieser Homomorphismen eine Kettenabbildung $\mathrm{int} : \Omega^* X \to \mathcal{C}^\infty \mathrm{S}^*(X; \mathbb{R})$ ist.

Satz 5.4.20 (**Isomorphismus von de Rham**). *Gegeben eine parakompakte glatte Mannigfaltigkeit X liefert das Integrieren von glatten Formen über glatte Ketten* $\mathrm{int} : \Omega^* X \to \mathcal{C}^\infty \mathrm{S}^*(X; \mathbb{R})$ *auf der Kohomologie Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathbb{R})_{\text{sing-}\infty}$$

Beweis. Das Integral einer Form über eine glatte Kette ist offensichtlich dasselbe wie das Integral unserer Form über jede Unterteilung unserer Kette. Folglich faktorisiert unsere Kettenabbildung über die globalen Schnitte der glatten Kogrenzkettengarben mit reellen Koeffizienten als

$$\Omega^* X \to \mathcal{C}^\infty \mathrm{G}^*(X; \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty \mathrm{S}^*(X; \mathbb{R})$$

Die erste Abbildung ist der Effekt auf den globalen Schnitten von einem Morphismus zwischen den beiden Auflösungen der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$ durch den de-Rham-Komplex $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \Omega_X^\triangleleft$ aus 5.3.9 und den Komplex der glatten Kogrenzkettengarben $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}^\triangleleft$ aus 5.4.15. Die erste Auflösung besteht aus weichen Garben, die Γ-azyklisch sind, da wir X parakompakt angenommen haben. Die

zweite Auflösung besteht aus welken Garben, die eh Γ-azyklisch sind. Folglich induziert unser Morphismus $\Omega_X^{\lhd} \to \mathcal{C}^\infty \mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}^{\lhd}$ einen Quasiisomorphismus auf den Komplexen der globalen Schnitte alias Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R})_{\text{grenz-}\infty}$$

Andererseits induziert die zusätzlich angehängte Abbildung ebenfalls Isomorphismen auf der Kohomologie nach 5.4.16. Der Satz folgt. $\square$

5.4.21 (**Vergleichsisomorphismen der relativen Kohomologie**). Gegeben ein Raum mit einer Teilmenge $A \subset X$ setzen wir $\mathrm{G}_q(X,A) := \mathrm{G}_q(X)/\mathrm{G}_q(A)$ und

$$\mathrm{G}^q(X,A;\mathbb{R}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{G}_q(X,A),\mathbb{R})$$

Gegeben $Z \not\subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums induziert die Einbettung Injektionen $\mathrm{G}_q(X\backslash Z) \hookrightarrow \mathrm{G}_q(X)$ und dual Isomorphismen

$$\Gamma_Z \mathcal{G}_{X,\mathbb{R}}^q \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}^q(X,X\backslash Z;\mathbb{R})$$

zwischen Schnitten mit Träger in Z der reellen Kogrenzkettengarbe zu den angegebenen „relativen Kogrenzkettengruppen“. Da welke Auflösungen nach 4.4.14 bereits die lokale Kohomologie berechnen, zeigt die Funktorialität der langen exakten Kohomologiesequenz, daß unsere Vergleichsisomorphismen für jeden lokal singulär-azyklischen Raum X mit einer abgeschlossenen Teilmenge $Z \not\subset X$ Isomorphismen von langen exakten Sequenzen liefern in Gestalt eines kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q(X,X\backslash Z;\mathbb{R})_{\mathrm{sing}} \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X\backslash Z;\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{H}^{q+1}(X,X\backslash Z;\mathbb{R}) \\
\mathrm{H}^q(X,X\backslash Z;\mathbb{R})_{\mathrm{grenz}} \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^q(X\backslash Z;\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^{q+1}(X,X\backslash Z;\mathbb{R}) \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{H}_Z^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}} \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X;\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X\backslash Z;\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{H}_Z^{q+1}(X;\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

mit singulärer Kohomologie oben, Garbenkohomologie unten und unseren Vergleichsisomorphismen in den Vertikalen, wie in der ersten Spalte angedeutet. Die Konstruktion zeigt zusätzlich, daß unsere Vergleichsisomorphismen der relativen Kohomologie auch Transformationen von Funktoren sind.

5.4.22 (**Vergleichsisomorphismen der kompakten Kohomologie**). Gegeben ein lokal singulär-azyklischer Hausdorffraum X können wir bei unseren Vergleichsisomorphismen $\mathrm{H}_K^q(X;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X,X\backslash K;\mathbb{R})$ zum filtrierenden Kolimes über alle Kompakta $K \subset X$ übergehen und erhalten Isomorphismen

$$\mathrm{H}_!^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_!^q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{sing}}$$

und nennen sie die **Vergleichsisomorphismen der kompakten Kohomologie**. Offensichtlich sind sie verträglich mit dem Ausdehnen durch Null nach [TS] 3.7.2.5 beziehungsweise 4.9.10 auf der singulären beziehungsweise garbigen kompakten Kohomologie. Nach 4.9.29 sind sie auch verträglich mit dem eigentlichen Zurückholen.

5.4.23. Man darf nicht erwarten, daß das Integrieren kompakt getragener glatter Differentialformen über lokal endliche glatte Ketten obigen Isomorphismus induziert. Genauer ist $\mathrm{H}^!_q(X;\mathbb{R})_{\mathrm{sing}}$ zwar für abzählbar basierte Mannigfaltigkeiten der Dualraum von $\mathrm{H}^q_!(X;\mathbb{R})_{\mathrm{sing}}$, aber nicht umgekehrt. Ein Student mag jedoch einmal prüfen, daß das Integrieren kompakt getragener glatter Differentialformen über lokal endliche glatte Ketten dieselbe Linearform auf der lokal endlichen Homologie induziert wie das Anwenden des Vergleichsisomorphismus zusammen mit der Paarung aus [TS] 3.7.3.24.

5.5 Čech-Kohomologie auf parakompakten Räumen*

Satz 5.5.1. *Auf parakompakten Räumen ist der in 4.7.4 konstruierte Homomorphismus von der Čech-Kohomologie zur Garbenkohomologie stets ein Isomorphismus.*

Beweis. Für welke Garben $\mathcal{F}$ auf einem beliebigen Raum X ist dieser Homomorphismus stets ein Isomorphismus, denn der vergarbte Čech-Komplex 4.7.2 besteht dann für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ auch aus welken Garben, seine globalen Schnitte bilden also eine Auflösung unserer ursprünglichen Garbe und wir erhalten $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$ für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ und dann auch im Limes. Es reicht also, wenn wir auf parakompakten Räumen zu jeder kurzen exakten Sequenz von Garben eine lange exakte Sequenz für die Čech-Kohomologie konstruieren derart, daß die natürlichen Morphismen aus 4.7.4 einen Morphismus dieser langen exakten Sequenz in die langen exakten Sequenz der Garbenkohomologie bilden. Zunächst beachten wir dazu, daß der Čech-Komplex einer abelschen Garbe auch für jede nicht notwendig offene Überdeckung $\mathcal{U}$ sinnvoll definiert ist, und daß für zwei Überdeckungen $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ derart, daß jede Menge aus $\mathcal{U}$ in einer Menge aus $\mathcal{V}$ enthalten ist, unser Argument aus 1.4.2 immer noch Isomorphismen

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{V};\mathcal{F})$$

liefert. Nach dem Satz zum Schrumpfen offener Überdeckungen 5.2.6 sind lokal endliche abgeschlossene Überdeckungen $\mathcal{A}$ von X, deren offene Kerne auch überdecken, konfinal. Jede kurze exakte Sequenz abelscher Garben $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ induziert nun, wie wir uns gleich überlegen, kurze exakte Sequenzen der wie in 4.7.2 erklärten vergarbten Čech-Koketten

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{A};\mathcal{F}') \hookrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{A};\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{A};\mathcal{F}'')$$

Die Exaktheit ist ja nur auf den Halmen zu prüfen, und diese Halme können leicht explizit angegeben werden, da $\mathcal{A}$ eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung ist. Nehmen wir globale Schnitte und gehen zum Kolimes über alle $\mathcal{A}$ über, so erhalten wir, wie wir uns gleich überlegen, eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\check{\mathrm{C}}^q(X;\mathcal{F}') \hookrightarrow \check{\mathrm{C}}^q(X;\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \check{\mathrm{C}}^q(X;\mathcal{F}'')$$

Der Punkt ist hierbei, sich zu überlegen, daß jeder globale Schnitt ganz rechts nach geeigneter Verfeinerung der lokal abgeschlossenen Überdeckung von der Mitte herkommt. Indem wir die zugehörige lange exakte Homologiesequenz bilden, haben wir jeder kurzen exakten Sequenz von abelschen Garben eine lange exakte Sequenz ihrer Čech-Kohomologiegruppen zugeordnet, und die Konstruktion zeigt, daß unsere natürlichen Morphismen 4.7.2 in die gewöhnlichen Garbenkohomologiegruppen Morphismen von langen exakte Kohomologiesequenzen liefern. $\square$

Definition 5.5.2. Wir sagen, eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem Raum X **erlaubt das Verkleben von Schnitten**, wenn gegeben ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit Vereinigung $V = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ und gegeben für alle $U \in \mathcal{U}$ Schnitte $s_U \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_U|_{U\cap W} = s_W|_{U\cap W} \quad \forall\, U, W \in \mathcal{U}$$

es stets einen Schnitt auf der Vereinigung $s \in \mathcal{F}(V)$ gibt mit $s|_U = s_U$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Der Unterschied zu einer Garbe besteht nur darin, daß der Schnitt s auf der Vereinigung durch die s_U nicht eindeutig bestimmt sein muß.

Proposition 5.5.3. *Erlaubt eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem parakompakten Raum das Verkleben von Schnitten und gilt $|\mathcal{F}(\emptyset)| = 1$, so gehen die globalen Schnitte unserer Prägarbe surjektiv auf die globalen Schnitte ihrer Garbifizierung, in Formeln*

$$\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}^+$$

Beweis. Sei $s \in \Gamma\mathcal{F}^+$ ein globaler Schnitt der Garbifizierung. Sicher finden wir eine lokal endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ und $\tilde{s}_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\tilde{s}_i \mapsto s|U_i$ für alle $i \in I$. Für jedes $x \in X$ finden wir nun eine offene Umgebung $W(x)$ mit $x \in U_i \Rightarrow W(x) \subset U_i$ so, daß für alle i mit $x \in U_i$ die $\tilde{s}_i$ zu demselben Schnitt $\tilde{s}_{(x)} \in \mathcal{F}(W(x))$ einschränken. Mit einem solchen $W(x)$ tut es natürlich auch jedes kleinere. Wir wollen die $W(x)$ nun zusätzlich so klein wählen, daß $W(x)\cap W(y) \neq \emptyset$ nur möglich ist, wenn es einen Index i gibt mit $W(x), W(y) \subset U_i$. Für die so verkleinerten $W(x)$ stimmen dann nämlich $\tilde{s}_{(x)}$ und $\tilde{s}_{(y)}$ jeweils auf $W(x)\cap W(y)$ überein, da sie je von demselben Schnitt über einem U_i herkommen, und verkleben folglich zum gesuchten globalen Schnitt $\tilde{s} \in \Gamma\mathcal{F}$ mit $\tilde{s} \mapsto s$. Um unsere $W(x)$ hinreichend zu verkleinern, wählen wir zunächst eine Schrumpfung

V_i unserer Überdeckung nach 5.2.6. Für jedes $x \in X$ verkleinern wir als nächstes unser $W(x)$ so weit, daß zusätzlich gilt $x \notin \bar{V}_i \Rightarrow W(x) \cap V_i = \emptyset$. Das impliziert insbesondere, daß für Punkte $x \notin U_i$ gilt $W(x) \cap V_i = \emptyset$, für Punkte $x \notin U_i$ trifft also $W(x)$ das entsprechende U_i salopp gesprochen höchstens im „Randbereich" $U_i \backslash V_i$. Und dann folgt aus $W(x) \cap W(y) \neq \emptyset$ in der Tat bereits, daß es einen Index i gibt mit $W(x), W(y) \subset U_i$, denn zum Beispiel tut es jeder Index i mit $W(x) \cap W(y) \cap V_i \neq \emptyset$, weil für solch einen Index notwendig gilt $x, y \in \bar{V}_i \subset U_i$. □

Korollar 5.5.4. *Für jeden parakompakten Raum X liefern die kanonischen Abbildungen Surjektionen $\mathrm{S}^q X \twoheadrightarrow \Gamma \mathcal{S}_X^q$.*

Beweis. Offensichtlich erlaubt für jedes $q \geq 0$ die Prägarbe $U \mapsto \mathrm{S}^q(U)$ das Verkleben von Schnitten. Das Korollar folgt damit aus 5.5.3. □

Lemma 5.5.5. *Für jeden parakompakten Raum X liefern die kanonischen Abbildungen Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{sing}} X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}_X^*$$

5.5.6. Aus 5.5.4 folgt, daß $\mathcal{S}_X^*$ für X parakompakt ein Komplex aus welken Garben ist. Nehmen wir zusätzlich X lokal singulär-azyklisch an, so ist leicht zu sehen, daß $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^*$ eine welke und somit Auflösung der konstanten Garbe durch Γ-azyklische Garben ist. Unseren Erkenntnisse 3.6.8 zur Berechnung derivierten Funktoren durch Auflösungen aus azyklischen Objekten liefert dann natürliche Isomorphismen $\mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}_X^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; \mathbb{Z}_X)$ und so zusammen mit 5.5.5 einen alternativen Beweis des Vergleichssatzes **??** für parakompakte Räume.

Beweis. Wir vervollständigen unsere Surjektionen aus 5.5.3 zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$K^* \hookrightarrow \mathrm{S}^* X \twoheadrightarrow \Gamma \mathcal{S}_X^*$$

Mit der langen exakten Homologiesequenz reicht es zu zeigen, daß K^* exakt ist. Aber liegt ein Kozykel $s \in \mathrm{S}^* X$ im Kern der Surjektion, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X derart, daß s verschwindet auf den $\mathcal{U}$-feinen Ketten, so daß s schon im Kern $K^*_{\mathcal{U}}$ der Surjektion $\mathrm{S}^* X \twoheadrightarrow \mathrm{S}^*_{\mathcal{U}} X$ liegt. Diese Surjektion induziert aber Isomorphismen auf der Kohomologie nach dem Satz über feine Ketten [TS] 3.2.4.7, folglich ist ihr Kernkomplex exakt, folglich gibt es sogar $r \in K^*_{\mathcal{U}}$ mit $\partial r = s$, und folglich ist unser Kozykel s ein Korand. □

5.6 Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie*

5.6.1. Gegeben ein topologischer Raum X erinnern wir aus 5.4.1 den Komplex $\mathrm{G}X$ der Grenzketten und den Quasiisomorphismus $\mathrm{S}X \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}X$ vom Komplex der singulären Ketten zum Komplex der Grenzketten.

5.6.2 (**Kohomologie durch dualisierten Grenzkettenkomplex**). Jede abelsche Gruppe M besitzt eine injektive Auflösung $M \hookrightarrow I^0 \twoheadrightarrow I^1$ der Länge Zwei. Wir notieren solch einen Zweitermkomplex $I = I_M$. Für jeden topologischen Raum X erhalten wir Quasiisomorphismen wie in der oberen Horizontale des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{S}^*(X;M) & = & (\mathrm{S}(X) \Rrightarrow M) & \xrightarrow{\sim} & (\mathrm{S}(X) \Rrightarrow I) & \xleftarrow{\sim} & (\mathrm{G}(X) \Rrightarrow I) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{S}^*(Y;M) & = & (\mathrm{S}(Y) \Rrightarrow M) & \xrightarrow{\sim} & (\mathrm{S}(Y) \Rrightarrow I) & \xleftarrow{\sim} & (\mathrm{G}(Y) \Rrightarrow I) \end{array}$$

Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ergänzen wir es in offensichtlicher Weise zu obigem kommutativen Diagramm. Für $\mathrm{H}^q(X;I)_{\mathrm{grenz}} := \mathcal{H}^q(\mathrm{S}(Y) \Rrightarrow I)$ erhalten wir Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X;M)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;I_M)_{\mathrm{grenz}}$$

5.6.3 (**Vergarbter dualisierter Grenzkettenkomplex**). Wir betrachten für jeden topologischen Raum X und jeden Zweitermkomplex $I = [I^0 \to I^1]$ von injektiven abelschen Gruppen den Komplex von abelschen Garben auf X mit den zugehörigen Komplexen von Schnitten auf $U \Subset X$ gegeben als die Homkomplexe $\mathcal{G}^{\lhd}_{X,I}(U) := (\mathrm{G}(U) \Rrightarrow I)$. Ausgeschrieben haben wir also

$$\mathcal{G}^q_{X,I}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{G}_q(U), I^0) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{G}_{q-1}(U), I^1)$$

Die Garbeneigenschaft folgt aus der Injektivität von I^0, I^1 und der Kogarbeneigenschaft der Grenzketten 5.4.4. Aus 5.4.4 folgt zusätzlich, daß die Garben $\mathcal{G}^q_{X,I}$ welk sind. Zusammen mit den von den Augmentationen $\mathrm{G}_0(U) \to \mathbb{Z}$ herrührenden Garbenhomomorphismen $M_X \hookrightarrow \mathcal{G}^0_{X,I}$ erhalten wir so einen Morphismus $M_X[0] \to \mathcal{G}^{\lhd}_{X,I}$ von Garbenkomplexen auf X. Per definitionem haben wir auf den globalen Schnitten

$$\Gamma\mathcal{G}^{\lhd}_{X,I} = (\mathrm{G}(X) \Rrightarrow I)$$

Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ erhalten wir in offensichtlicher Weise kommutative Diagramme von Komorphismen beziehungsweise abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccc} M_X[0] & \longrightarrow & \mathcal{G}^{\lhd}_{X,I} \\ \uparrow & & \uparrow \\ M_Y[0] & \longrightarrow & \mathcal{G}^{\lhd}_{Y,I} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma\mathcal{G}^{\lhd}_{X,I} & = & (\mathrm{G}(X) \Rrightarrow I) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma\mathcal{G}^{\lhd}_{Y,I} & = & (\mathrm{G}(Y) \Rrightarrow I) \end{array}$$

Satz 5.6.4 (**Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie**). *Gegeben ein lokal singulär-azyklischer Raum X und eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $M \hookrightarrow I^0 \twoheadrightarrow I^1$ mit I^0, I^1 injektiv ist $M_X \hookrightarrow \mathcal{G}^{\lhd}_{X,I}$ eine welke Auflösung der konstanten Garbe M_X und induziert zusammen mit 5.6.2 Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(X;M)_{\mathrm{garb}} \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;I_M)_{\mathrm{grenz}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;M)_{\mathrm{sing}}$$

zwischen der Garbenkohomologie und der singulären Kohomologie mit Koeffizienten in M, die von der Wahl der injektiven Auflösung I von M nicht abhängen.

Beweis. Verschwindet für einen topologischen Raum U die reduzierte singuläre Homologie, so ist der augmentierte Grenzkettenkomplex $\tilde{\mathrm{G}}(U)$ exakt und damit ist auch $\tilde{\mathrm{G}}(U) \Rrightarrow I$ exakt und dann auch $0 \to M \to (\mathrm{G}(U) \Rrightarrow I)$. Ist X lokal singulär-zyklisch, so ist folglich $M_X \to \mathcal{G}^{\lhd}_{X,I}$ eine Auflösung der konstanten Garbe M_X durch welke Garben. Das liefert mit der Beschreibung der globalen Schnitte aus 5.6.3 Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X; M)_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{G}^{\lhd}_{X,I} = \mathcal{H}^q(\mathrm{G}(X) \Rrightarrow I)$$

Daß Verknüpfung der im Satz behaupteten Isomorphismen unabhängig ist von der Wahl der injektiven Auflösung, folgt aus den Definitionen. □

5.6.5 (**Glatt-singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie**). Dieselben Argumente angewandt auf glatte Grenzketten liefern für jede glatte Mannigfaltigkeit und jede abelsche Gruppe M Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X; M)_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; M)_{\text{sing-}\infty}$$

zwischen der Garbenkohomologie und der glatt-singulären Kohomologie mit beliebigen Koeffizienten.

5.6.6 (**Relative singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie**). Ist $Y \Subset X$ eine offene Teilmenge eines lokal singulär-azyklischen Raums und $Z \Subset X$ ihr Komplement, so induziert die Einbettung eine Injektion $\mathrm{G}(Y) \hookrightarrow \mathrm{G}(X)$ von Kettenkomplexen und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(Y; \mathcal{G}^{\lhd}_{X,I}) \arrow[r, equal] & (\mathrm{G}(Y) \Rrightarrow I) \\
\Gamma \mathcal{G}^{\lhd}_{X,I} \arrow[r, equal] \arrow[u, two heads] & (\mathrm{G}(X) \Rrightarrow I) \arrow[u, two heads] \\
\Gamma_Z \mathcal{G}^{\lhd}_{X,I} \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, hook] & ((\mathrm{G}(X)/\mathrm{G}(Y)) \Rrightarrow I) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

mit kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen in den Vertikalen. Da welke Auflösungen nach 4.4.14 bereits die lokale Kohomologie berechnen, zeigt die Funktorialität der langen exakten Kohomologiesequenz, daß unsere Vergleichsisomorphismen für jeden lokal singulär-azyklischen Raum X mit einer offenen Teilmenge $Y \Subset X$ und deren abgeschlossenem Komplement $Z \Subset X$ einen Morphismus von langen exakten Sequenzen liefern in Gestalt eines kommutativen

Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q(X,Y;M) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^q(X;M) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^q(Y;M) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^{q+1}(X,Y;M) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{H}^q_Z(X;M_X) \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X;M_X) \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X;M_X) \arrow[r] & \mathrm{H}^{q+1}_Z(X;M_X)
\end{tikzcd}$$

mit singulärer Kohomologie oben, Garbenkohomologie unten und unseren Vergleichsisomorphismen in den Vertikalen. Die Konstruktion zeigt zusätzlich, daß unsere Vergleichsisomorphismen der relativen Kohomologie auch Transformationen von Funktoren sind.

5.6.7. Ist unser lokal singulär-azyklischer Raum X zusätzlich Hausdorff, so können wir zum filtrierenden Kolimes über alle Kompakta $K \subset X$ übergehen und erhalten Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_!(X;M)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_!(X;M)_{\mathrm{garb}}$$

Es ist leicht zu sehen, daß sie von den zu ihrer Konstruktion getroffenen Wahlen nicht abhängen. Wir nennen sie die **Vergleichsisomorphismen der kompakten Kohomologie**. Offensichtlich sind sie verträglich mit dem Ausdehnen durch Null nach [TS] 3.7.2.5 beziehungsweise 4.9.10 auf der singulären beziehungsweise garbigen kompakten Kohomologie. Nach 4.9.29 sind sie auch verträglich mit dem eigentlichen Zurückholen.

Satz 5.6.8. *Ist $A \not\subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und G eine abelsche Gruppe, so induzieren der Randoperator der Lokalisierungssequenz 4.8.15 zusammen mit dem Vergleichssatz 5.6.7 und der Poincaré-Dualität [TS] 3.7.4.3 Isomorphismen, die Isomorphismen der* **Alexander-Dualität**

$$\mathrm{H}^q_!(A;G_A) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \backslash A;G)$$

Beispiel 5.6.9. Ersetzen wir im Satz auf der linken Seite Garbenkohomologie durch singuläre Kohomologie, so gilt er im allgemeinen nicht mehr, zum Beispiel im Fall $n = 2$, $q = 1$, $G = \mathbb{Z}$ und A dem Schmitt der Sinuskurve des Topologen [TM] 1.1.3.23 mit dem Kompaktum $[-2,2]^2$.

Beispiele 5.6.10. Schneiden wir etwa aus der Ebene $\mathbb{R}^2$ zwei disjunkte kompakte abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen heraus, so ist die erste Homologie des Komplements frei vom Rang zwei. Anschaulich wird eine Basis eben gegeben durch die Klassen zweier Zykel, die jeweils um eines der beiden beim Herausschneiden entstandenen Löcher laufen. Man kann sich auch den Fall denken, daß eine der besagten kompakten abgeschlossenen zusammenhängenden

Teilmengen als Ring um die andere liegt: Unser Satz wird dann auch für $q = 1$ gehaltvoll. Schneiden wir dahingegen eine nichtkompakte zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge heraus, so verschwindet die erste Homologie des Komplements, da anschaulich gesprochen „unsere nichtkompakte Teilmenge in irgendeiner Richtung nach Unendlich läuft und nicht von einem Zykel umrundet werden kann“. Im Fall $q = 0$ liefert der Isomorphismus der Alexanderdualität nocheinmal Korollar [TS] 3.4.3.10, nach dem $\tilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash A; \mathbb{Z})$ für $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ mit nur genau $k \in \mathbb{N}$ kompakten Zusammenhangskomponenten frei ist über $\mathbb{Z}$ vom Rang k, und im Fall $q = 0$, $n = 2$ ist er im wesentlichen der in [TS] 3.1.6.3 durch Umlaufzahlen beschriebene Isomorphismus $\mathrm{H}_1(U; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_!(\mathbb{C} \backslash U, \mathbb{Z})$ für $U \Subset \mathbb{C}$.

Beweis. Wir gehen aus vom nach 5.6.7 und Bemerkung [TS] 3.7.4.2 kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n; G)_{\mathrm{garb}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n; G)_{\mathrm{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_{n-q}(\mathbb{R}^n; G) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n \backslash A; G)_{\mathrm{garb}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^q_!(\mathbb{R}^n \backslash A; G)_{\mathrm{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_{n-q}(\mathbb{R}^n \backslash A; G) \end{array}$$

Als Isomorphismus zwischen den Kernen für $q < n$ und zwischen den Kokernen für $q \geq n$ der Vertikalen erhalten wir daraus nach 4.9.21 für alle q den ersten Isomorphismus der Sequenz

$$\mathrm{H}^q_!(A; G)_{\mathrm{garb}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash A; G) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{H}}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \backslash A; G)$$

Der zweite Isomorphismus kommt von der langen exakten Sequenz der reduzierten Kohomologie her zusammen mit der Erkenntnis, daß für die relativen Homologiegruppen zwischen reduzierter und nichtreduzierter Homologie kein Unterschied besteht. □

Übungen

Übung 5.6.11. Gegeben abgeschlossene Teilmengen $B \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R}^n$ kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^q_!(A; G_A) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{\mathrm{H}}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \backslash A; G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^q_!(B; G_B) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{\mathrm{H}}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \backslash B; G) \end{array}$$

mit den Isomorphismen der Alexanderdualität 5.6.8 in den Horizontalen und dem abgeschlossenen Zurückholen der kompakten Kohomologie sowie dem Bild in der reduzierten Homologie in den Vertikalen.

Übung 5.6.12. Man zeige, daß unter der Verknüpfung von ausgezeichneten Isomorphismen $\mathrm{H}^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash 0)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_{\{0\}}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_!(\mathbb{R}^n)$ der Duale unseres ausgezeichneten Erzeugers von $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash 0)$ aus [TS] 3.4.1.4 alias [TSK] 4.4.1.18 unserem ausgezeichneten Erzeuger aus 4.8.17 entspricht.

6 Faserungen und Basiswechsel

6.1 Fasern eines Funktors

Definition 6.1.1. Seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ Garben von Mengen. Ein **Garbenmorphismus über** f ist eine stetige Abbildung $\varphi : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{F}} & \to & \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

kommutiert. Die Menge der Garbenmorphismen über einer vorgegebenen stetigen Abbildung f notieren wir $\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Definition 6.1.2 (**Mengengarbenfaserung**)**.** Wir erklären die Kategorie $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}}$ aller Paare $(X, \mathcal{F})$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Mengen $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ auf X. Gegeben Objekte $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ erklären wir einen Morphismus als ein Paar (f, φ) bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Garbenmorphismus $\varphi : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ über f. Die Verknüpfung von Morphismen ist die offensichtliche. Das Vergessen der Garbe ist ein Funktor

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$$

Definition 6.1.3. Sei $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor. Gegeben ein Objekt $X \in \mathscr{B}$ erklärt man die **Faser von** p **über** X als die Unterkategorie $\mathscr{C}_X \subset \mathscr{C}$ mit Objekten $\mathscr{C}_X := \{\mathcal{E} \in \mathscr{C} \mid p\mathcal{E} = X\}$ und Morphismen denjenigen Morphismen von $\mathscr{C}$, die über der Identität von X liegen, in Formeln

$$\mathscr{C}_X(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \{\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \mid p(\alpha) = \mathrm{id}_X\}$$

Vorschau 6.1.4 (**Die Faser vom höheren Standpunkt**). Gegeben die terminale Kategorie cat mit einem Objekt und einem Morphismus ist die Faser ein Faserprodukt $\mathrm{cat} \times_{\mathscr{B}} \mathscr{C}$ in der Kategorie Cat der Kategorien, zu verstehen in Bezug auf den durch das Objekt X gegebenen Funktor $\mathrm{cat} \to \mathscr{B}$.

Beispiel 6.1.5. Für jeden Monoidhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ist die Faser des Funktors $[\varphi] : [G] \to [H]$ der zugehörigen Ein-Objekt-Kategorien die Ein-Objekt-Kategorie $[\ker \varphi]$.

Beispiel 6.1.6. Sei $\mathscr{B}$ irgendeine Kategorie und $\mathscr{C} := \mathscr{B}^{\downarrow} = \mathrm{Car}(\downarrow, \mathscr{B})$ die Kategorie aller Darstellungen im Sinne von [LA2] 4.9.6.4 des Köchers $\downarrow$ mit zwei Punkten und einem Pfeil vom einen zum anderen in $\mathscr{B}$ und $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ der Funktor, der jedem Morphismus sein Ziel zuordnet. So ist die Faser $\mathscr{C}_X$ über $X \in \mathscr{B}$ gerade unsere Kategorie $\mathscr{B}_X$ aller Objekte von $\mathscr{B}$ über X aus [TF] 2.2.2.2.

Beispiel 6.1.7. Sei $\mathscr{B} = \mathrm{Top}$ die Kategorie der topologischen Räume und $\mathscr{C} = \text{Ét}$ die Kategorie mit étale Abbildungen $(p : \tilde{X} \to X)$ als Objekten und Morphismen Paaren $\alpha = (\tilde{f}, f)$ stetiger Abbildungen derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert. In anderen Worten ist $\text{Ét} \subset \mathrm{Top}^{\downarrow}$ die volle Unterkategorie aller étalen Morphismen. Betrachten wir in dieser Situation den Funktor $P : \text{Ét} \to \mathrm{Top}$ gegeben durch $(p : \tilde{X} \to X) \mapsto X$, so besteht die Faser über X aus allen étalen Morphismen nach X, mit Decktransformationen im Sinne von [TF] 2.3.4.9 als Morphismen.

Beispiel 6.1.8. Die Faser $(\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}})_X$ unserer Garbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 6.1.2 über einem topologischen Raum X ist isomorph zur Kategorie $\mathrm{Ens}_{/X}$ der Garben über X vermittels des Funktors, der jedem Garbenhomomorphismus die davon induzierte Decktransformation zwischen den étalen Räumen unserer Garben zuordnet.

6.1.9. In derselben Weise definieren wir Morphismen von abelschen Garben über einer vorgegebenen stetigen Abbildung und die zugehörige Kategorie $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}}$ von abelschen Garben auf topologischen Räumen mit dem natürlichen Funktor

$$\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$$

6.2 Kartesische Morphismen und Faserfunktoren

6.2.1. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und Objekte $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathscr{C}$ und ein Morphismus $f \in \mathscr{B}(p\mathcal{F}, p\mathcal{G})$ setzen wir

$$\mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \{\xi \in \mathscr{C}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid p(\xi) = f\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge **Morphismen über** f. Die Morphismen über der Identität $f = \mathrm{id}_X$ eines Objekts $X \in \mathscr{B}$ sind also genau die Morphismen in der Faser über X unseres Funktors, in Formeln $\mathscr{C}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathscr{C}_{\mathrm{id}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Definition 6.2.2. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ heißt ein Morphismus $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathscr{C}$ **kartesisch** oder genauer p**-kartesisch**, wenn mit der Notation $f : X \to Y$ für sein Bild unter p für jedes Objekt $\mathcal{E} \in \mathscr{C}_X$ das Nachschalten von κ eine Bijektion $(\kappa\circ) : \mathscr{C}_X(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_f(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ induziert.

Beispiel 6.2.3. Ein Morphismus (f, φ) in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}}$ ist kartesisch für unseren Funktor des Vergessens der Garbe $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ genau dann, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{E}} & \to & \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

kartesisch ist in der Kategorie der topologischen Räume.

Beispiel 6.2.4 (**Herkunft der Terminologie**). Sei $\mathscr{B}$ irgendeine Kategorie und $\mathscr{C} := \mathscr{B}^{\downarrow}$ die Kategorie aller Darstellungen des Köchers $\downarrow$ mit zwei Punkten und einem Pfeil vom einen zum anderen in $\mathscr{B}$ im Sinne von [LA2] 4.9.6.4. Denken wir uns den einzigen Pfeil unseres Köchers wie angedeutet „vertikal“, so sind Objekte von $\mathscr{C}$ „vertikale“ Morphismen in $\mathscr{B}$ und Morphismen in $\mathscr{C}$ Paare von „horizontalen“ Morphismen in $\mathscr{B}$ derart, daß mit den gegebenen vertikalen Morphismen kommutative Quadrate entstehen. Ist schließlich $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ der Funktor, der jedem Morphismus sein Ziel zuordnet, so sind die p-kartesischen Morphismen in $\mathscr{C}$ genau diejenigen Morphismen, die kartesischen Quadraten entsprechen.

Definition 6.2.5. Ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ heißt ein **Faserfunktor** oder gleichbedeutend eine **Faserung**, wenn gilt:

1. Zu jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathscr{B}$ und jedem $\mathcal{G} \in \mathscr{C}_Y$ existiert ein kartesischer Lift $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von f, der in $\mathcal{G}$ landet;

2. Die Verknüpfung von je zwei kartesischen Morphismen ist kartesisch.

Beispiel 6.2.6. Sei $\mathscr{B}$ eine Kategorie. Unser Funktor $p : \mathscr{B}^{\downarrow} \to \mathscr{B}$ aus 6.2.4 ist genau dann ein Faserfunktor, wenn sich in $\mathscr{B}$ jeder Winkel zu einem kartesischen Diagramm ergänzen läßt.

Beispiel 6.2.7. Unsere Mengengarbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 6.1.2 ist ein Faserfunktor. Dasselbe gilt für den Funktor $\mathrm{Ab}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$. aus 6.1.9. Analoges gilt weiter für Garben von Moduln über einem festen Ring und für Garben von Ringen.

Beispiel 6.2.8. Eine Trennkategorie hat genau dann stabil universelle Trennungen, wenn ihr Trennfunktor zur terminalen Trennkategorie eine Faserung auf den Familienkategorien induziert.

Beispiel 6.2.9. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ bezeichne $\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}}$ die Kategorie aller Paare $(X, \mathcal{F})$ aus einem topologischen Raum X und einer $\mathcal{C}$-Prägarbe $\mathcal{F} \in \mathrm{p}\mathcal{C}_{/X}$ darauf, mit Komorphismen als Morphismen. Das Vergessen der Garbe ist dann eine Faserung

$$\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$$

Gegeben $f : X \to Y$ ist hier der kanonische Komorphismus $f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ kartesisch über f°.

6.2.10. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ heißt ein Morphismus κ in $\mathscr{C}$ **kokartesisch**, wenn κ° kartesisch ist für den Funktor $p^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$. Ausgeschrieben ist also $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ kokartesisch, wenn mit der Notation $f : X \to Y$ für sein Bild unter p gilt, daß für jedes Objekt $\mathcal{H} \in \mathscr{C}_Y$ das Vorschalten von κ eine Bijektion

$$(\circ\kappa) : \mathscr{C}_Y(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{H})$$

induziert. Ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ heißt ein **Kofaserfunktor** oder gleichbedeutend eine **Kofaserung**, wenn der induzierte Funktor $p^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$ ein Faserfunktor ist.

6.2.11. Einen Komorphismus $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ nennen wir auch einen **Opkomorphismus von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$** und notieren diesen Opkomorphismus $\phi^\circ : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Wir erhalten so Kategorien

$$\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \supset \mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}}$$

mit Objekten Paaren $(X, \mathcal{F})$ aus einem topologischen Raum X und einer $\mathcal{C}$-wertigen Prägarbe beziehungsweise Garbe $\mathcal{F}$ auf unserem Raum X und Morphismen Paaren $(f, \eta) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Opkomorphismus $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ darüber. Das Vergessen der Prägarbe ist dann ein Funktor

$$\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$$

Die Menge aller Opkomorphismen über f von einer Prägarbe $\mathcal{F}$ in eine Prägarbe $\mathcal{G}$ notieren wir $\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ und im Fall von Garben $\mathcal{C}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Wir notieren $\mathcal{C}_{/\!/X} := \mathcal{C}_{/X}^{\mathrm{opp}}$ die zur Kategorie der Garben auf X opponierte Kategorie und haben damit insbesondere $\mathcal{C}_{/\!/X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{id}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Beispiel 6.2.12. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ sind unsere Funktoren $\mathrm{p}\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und $\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 6.2.11 Kofaserfunktoren. Sie entstehen durch Opponieren aus den Faserfunktoren 6.2.9 nach $\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$. Ein Morphismus alias Opkomorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ ist dabei genau dann kokartesisch, wenn er Isomorphismen von abelschen Gruppen $\mathcal{G}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ alias einen Isomorphismus von Garben $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{F}$ induziert. Ich nenne diese Kofaserfunktoren die **Opkofaserung der $\mathcal{C}$-Prägarben** beziehungsweise die **Opkofaserung der $\mathcal{C}$-Garben**. Die Fasern dieser Funktoren sind opponierte Kategorien von $\mathcal{C}$-Prägarben beziehungsweise $\mathcal{C}$-Garben.

6.2.13 (**Der Fall diskreter Räume**). Jede Menge X ist auch ein diskreter topologischer Raum und eine diskrete Kategorie. In diesem Fall haben wir einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Ens}_{/X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X, \mathrm{Ens})$ und gegeben $f : X \to Y$ mit Y ebenfalls diskret haben wir

$$\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X, \mathrm{Ens})(\mathcal{F}, \mathcal{G} \circ f)$$

Ein Morphismus über von Mengengarben über f entspricht also einer Transformation der zugehörigen Funktoren $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \circ f$. Ebenso haben wir eine natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Ens}_{/\!/X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X, \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}})$ und eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(X, \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}})(\mathcal{F}, \mathcal{G} \circ f)$$

Beispiel 6.2.14. Eine Schmelzkategorie hat genau dann stabil universelle Verschmelzungen im Sinne von [TSK] 4.1.3.2, wenn ihr Schmelzfunktor zur terminalen Schmelzkategorie eine Kofaserung auf den Familienkategorien induziert.

6.2.15. Ein Funktor heißt ein **Bifaserfunktor** oder eine **Bifaserung**, wenn er sowohl ein Faserfunktor als auch ein Kofaserfunktor ist.

Beispiel 6.2.16 (**Modulbifaserung**). Bezeichne $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}$ die Kategorie, deren Objekte Paare (A, M) aus einem Ring A und einem A-Modul M sind. Morphismen $(A, M) \to (B, N)$ erklären wir als Paare (φ, ψ) bestehend aus einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ und einem Homomorphismus $\psi : M \to N$ der unseren Moduln zugrundeliegenden additiven Gruppen derart, daß gilt $\psi(am) = \varphi(a)\psi(m)\ \forall a \in A, m \in M$. Der Funktor

$$\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}} \to \mathrm{Ring}$$

des Vergessens des Moduls ist dann eine Bifaserung. Kokartesisch über einem Ringhomomorphismus $A \to B$ ist jeder Morphismus der Gestalt $M \to B \otimes_A M$ gegeben durch $m \mapsto 1 \otimes m$, kartesisch die Identität $\mathrm{res}^A_B(N) \to N$ auf der zugrundeliegenden abelschen Gruppe für jeden B-Modul N.

Beispiel 6.2.17. In 6.2.12 hatten wir für eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$ die Opkofaserung $\mathcal{C}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ der $\mathcal{C}$-Garben eingeführt. Für Garben von Mengen oder abelschen Gruppen sind unsere Opkofaserungen $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und $\mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 6.2.12 sogar Bifaserungen und ein Opkomorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über f ist genau dann kartesisch, wenn er einen Isomorphismus $f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ induziert. Ich nenne diese Funktoren die **Garbenopfaserung** von Mengengarben beziehungsweise abelschen Garben, weil sie eben auch Faserungen sind und wir diese Eigenschaft im folgenden besonders herausstellen werden. Die Fasern dieser Garbenopfaserungen sind opponiert zu unseren üblichen Kategorien von Garben.

Vorschau 6.2.18. In meinen Augen ist die Garbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ besonders anschaulich und die Garbenopfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ algebraisch besonders übersichtlich. Diese beiden Faserfunktoren bestimmen sich gegenseitig, genauer gehen sie durch „Oppinvertieren“ auseinander hervor, wie wir in 9.4.8 und 9.4.11 ausführen werden. Allerdings ist nur der zweite eine Bifaserung.

Übungen

Übung 6.2.19. Sei $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor. Ein Morphismus $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathscr{C}$ heißt **stark kartesisch**, wenn für alle Objekte $\mathcal{E} \in \mathscr{C}$ und alle Morphismen $g : p\mathcal{E} \to p\mathcal{F}$ in $\mathscr{B}$ das Nachschalten von κ eine Bijektion

$$(\kappa\circ) : \mathscr{C}_g(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_{p(\kappa)\circ g}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$$

induziert. Man zeige, daß jede Verknüpfung stark kartesischer Morphismen wieder stark kartesisch ist. Man zeige weiter, daß ein Funktor genau dann ein Faserfunktor ist, wenn jeder Morphismus in der Bildkategorie einen stark kartesischen Lift besitzt, und daß dann alle kartesischen Morphismen sogar stark kartesisch sind. Man zeige auch: Ist $\beta\alpha$ kartesisch und β stark kartesisch, so ist α kartesisch.

Übung 6.2.20 (**Verknüpfung von Faserfunktoren**). Gegeben seien Funktoren $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und $q : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$. Gegeben ein Morphismus κ in $\mathscr{C}$ mit $p(\kappa)$ stark q-kartesisch ist κ genau dann stark qp-kartesisch, wenn es stark p-kartesisch ist. Die Verknüpfung von Faserfunktoren ist auch selbst ein Faserfunktor.

Übung 6.2.21. Seien $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor und κ ein Morphismus in $\mathscr{C}$. Ist $p(\kappa)$ ein Isomorphismus, so ist κ genau dann kartesisch, wenn es selbst ein Isomorphismus ist.

Übung 6.2.22. Gegeben ein Faserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ zeige man, daß auch der auf den Morphismenkategorien induzierte Funktor $p^{\downarrow} : \mathscr{C}^{\downarrow} \to \mathscr{B}^{\downarrow}$ ein Faserfunktor ist und daß ein Morphismus genau dann kartesisch ist, wenn er objektweise kartesisch ist.

Ergänzende Übung 6.2.23. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und eine Unterkategorie $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ erklären wir das **Urbild von** $\mathscr{U}$ als die Kategorie $p^{-1}(\mathscr{U}) = \mathscr{C}_{\mathscr{U}} = \mathscr{C}|\mathscr{U}$ aller Objekte von $\mathscr{C}$, die unter p zu Objekten aus $\mathscr{U}$ werden, mit den Morphismen, die unter p zu Morphismen aus $\mathscr{U}$ werden. Man zeige, daß mit p auch der induzierte Funktor $p_{\mathscr{U}} : \mathscr{C}_{\mathscr{U}} \to \mathscr{U}$ ein Faserfunktor beziehungsweise Kofaserfunktor ist. Diesen Funktor nennen wir die **Rückzug von** p **auf** $\mathscr{U}$.

Übung 6.2.24 (**Familienfaserung**). Jede Menge X können wir als eine diskrete Kategorie auffassen. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ bezeichnen wir dann mit

$$\mathcal{C}_{/X} := \mathrm{Cat}(X, \mathcal{C})$$

die Funktorkategorie. Ihre Objekte sind durch $x \in X$ indizierte Familien $(\mathcal{F}_x)_{x\in X}$ von Objekten von $\mathcal{C}$. Gegeben eine Abbildung in eine weitere Menge $f : X \to Y$ und $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathcal{C}_{/Y}$ erklären wir einen **Morphismus über** f **von** $\mathcal{F}$ **nach** $\mathcal{G}$ als eine Transformation $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \circ f$ alias eine Familie von Morphismen $(\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_{f(x)})_{x\in X}$ und setzen also in Formeln

$$\mathcal{C}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Cat}(X, \mathcal{C})(\mathcal{F}, \mathcal{G} \circ f)$$

Man zeige, daß wir so einen Faserfunktor $\mathcal{C}_{/\mathrm{Ens}} \to \mathrm{Ens}$ erhalten. Wir nennen ihn die **Familienfaserung zu** $\mathcal{C}$.

6.3 Rückzug, Vorschub, Basiswechsel

Definition 6.3.1 (Rückzug von Objekten und Morphismen). Seien $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor, $f : X \to Y$ ein Morphismus in der Basis $\mathscr{B}$ und $\mathcal{G} \in \mathscr{C}_Y$ ein Objekt über Y.

1. Sind $\kappa : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ und $\kappa' : \mathcal{E}' \to \mathcal{G}$ kartesische Morphismen über f mit demselben Ziel, so gibt es genau einen Morphismus $\iota \in \mathscr{C}_X(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ mit $\kappa' \circ \iota = \kappa$, und dieser Morphismus ist ein Isomorphismus. Das Paar $(\mathcal{E}, \kappa)$ ist also durch $\mathcal{G}$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Es verdient deshalb den bestimmten Artikel und eine Notation. Wir bezeichnen unser Paar $(\mathcal{E}, \kappa)$, wenn es denn existiert, mit $(f^\dagger\mathcal{G}, \kappa_{\mathcal{G}})$, und nennen $f^\dagger\mathcal{G}$ das **mit** f **zurückgezogene Objekt** und $\kappa = \kappa_{\mathcal{G}}$ seinen **Transportmorphismus**.

2. Ist $\mathcal{G}' \in \mathscr{C}_Y$ ein weiteres Objekt über Y, das sich vermittels f zurückziehen läßt, so gibt es für jeden Morphismus $\alpha \in \mathscr{C}_Y(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ genau einen Morphismus $\beta \in \mathscr{C}_X(f^\dagger\mathcal{G}, f^\dagger\mathcal{G}')$ mit $\kappa_{\mathcal{G}'}\beta = \alpha\kappa_{\mathcal{G}}$. Wir notieren ihn $\beta := f^\dagger(\alpha)$ und nennen ihn den **mit** f **zurückgezogenen Morphismus**.

3. Nehmen wir zusätzlich an, daß sich jedes Objekt über Y zurückziehen läßt, so erhalten wir einen Funktor $f^\dagger : \mathscr{C}_Y \to \mathscr{C}_X$, der zusammen mit unseren Transportmorphismen eindeutig bestimmt ist bis auf eindeutige Isotransformation. Er heißt der **Rückzug**. Sollte sich nicht jedes Objekt zurückziehen lassen, so ist er zumindest ein wohldefinierter Funktor auf der vollen Unterkategorie der zurückziehbbaren Objekte von $\mathscr{C}_Y$ und damit ein partiell definierter Funktor $f^\dagger : \mathscr{C}_Y \dashrightarrow \mathscr{C}_X$.

4. Gegeben $X \in \mathscr{B}$ ist der Identitätsfunktor $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X}$ auf der Faser $\mathscr{C}_X$ mit den Identitäten als Transportmorphismen ein Rückzug zu id_X. Zwischen dem Rückzug $\mathrm{id}_X^\dagger$ und $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X}$ erhalten wir damit eine wohlbestimmte Isotransformation
$$c_X : \mathrm{id}_X^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X}$$

5. Sind alle Objekte unter allen Morphismen zurückziehbar, so erhalten wir eine Transformation $c(f, g) : f^\dagger \circ g^\dagger \Rightarrow (g \circ f)^\dagger$ durch die Bedingung, daß ihr Vorschalten vor den Transportmorphismus des simultanen Zurückziehens die Verknüpfung der Transportmorphismen des separaten Zurückziehens liefert. Im allgemeinen erhalten wir so eine Transformation der entsprechenden partiell definierten Funktoren.

6. Wir nennen ein Objekt **stark zurückziehbar**, wenn es zurückziehbar ist mit einem stark kartesischen Transportmorphismus, und reden dann von **starkem Rückzug**. Unsere Transformation von eben liefert eine Isotransformation $c(f,g) : f^\dagger \circ g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (g \circ f)^\dagger$ zwischen den Restriktionen unserer partiellen Rückzüge auf die unter g und $(g \circ f)$ stark zurückziehbaren Objekte.

7. Ist insbesondere unser Funktor ein Faserfunktor, so sind unsere Transformationen stets Isotransformationen

$$c(f,g) : f^\dagger \circ g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (g \circ f)^\dagger$$

Wir nennen diese Isotransformationen $c(f,g)$ sowie die Isotransformationen $c_X : \mathrm{id_X}^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X}$ von oben die **Identifikationen** unseres Faserfunktors und notieren sie manchmal ausführlicher idf oder $\mathrm{idf}(f,g)$ und idf_X.

Beispiel 6.3.2 (**Notwendigkeit nichttrivialer Identifikationen**). Für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ betrachten wir den Funktor $[G] \to [H]$ der zugehörigen Ein-Objekt-Kategorien. Für einen Morphismus $f \in H$ ist nach 6.2.21 jeder Lift kartesisch. Unser Funktor ist demnach ein Faserfunktor genau dann, wenn unser Gruppenhomomorphismus surjektiv ist. Der durch die Wahl eines Urbilds g von f festgelegte Rückzug ist dann die Konjugation $f^\dagger = \mathrm{int}(g^{-1}) : [\ker\varphi] \to [\ker\varphi]$. Gegeben ein Faserfunktor ist es insbesondere im allgemeinen nicht möglich, Rückzüge so zu wählen, daß alle Identifikationen Gleichheiten werden.

6.3.3 (**Eindeutigkeit versus Gleichheit**). Wir haben vereinbart, daß wir „bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Objekte“ mit einem bestimmten Artikel ansprechen und ihnen eine eigene Notation gönnen wir $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$ oder auch $\mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$. Wir dürfen jedoch im hier gegebenen begrifflichen Rahmen zwei durch äquivalente universelle Eigenschaften nicht als „gleich“ ansehen oder etwa im Fall der Rückzüge $f^\dagger \circ g^\dagger = (g \circ f)^\dagger$ schreiben. Das gelingt nur um den Preis zusätzlicher Verrenkungen, die ich nach Möglichkeit vermeiden will.

6.3.4. Gegeben ein Funktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und ein Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathscr{B}$ konstruiert man analog partiell definierte Funktoren $f_\dagger : \mathscr{C}_X \dashrightarrow \mathscr{C}_Y$, den **Vorschub** und den **starken Vorschub**, und zeigt dafür analoge Eigenschaften. Formal ließen sie sich auch erhalten, indem man auf den Funktor $p^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$ die obigen Konstruktionen anwendet und zu dem so erhaltenen partiell definierten Funktor $(f^\circ)^\dagger : \mathscr{C}_X^{\mathrm{opp}} \dashrightarrow \mathscr{C}_Y^{\mathrm{opp}}$ den partiell definierten Funktor $f_\dagger := ((f^\circ)^\dagger)^{\mathrm{opp}}$ bildet.

6.3.5 (**Adjunktion von Vorschub und Rückzug**). Gegeben ein Funktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ sind Vorschub und Rückzug stets partiell adjungierte partiell definierte Funktoren vermittels der durch die Definitionen gegebenen Bijektionen

$$\mathscr{C}_X(\mathcal{F}, f^\dagger\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_f(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_Y(f_\dagger\mathcal{F},\mathcal{G})$$

Im Fall einer Bifaserung sind darüber hinaus beide Funktoren für jeden Morphismus der Basis global definiert.

Beispiel 6.3.6 (**Rückzug in der Garbenfaserung**). Sei $f : X \to Y$ stetig. Die Rückzugfunktoren unserer Garbenfaserung machen aus einer Garbe $\mathcal{G}$ auf Y mit étalem Raum $\bar{\mathcal{G}}$ die Garbe auf X mit étalem Raum $X \times_Y \bar{\mathcal{G}}$ und dem offensichtlichen Transportmorphismus. Wir notieren sie $f^*\mathcal{G}$ mit dem Transportmorphismus $\tau \in \mathrm{Ens}_{/f}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{G})$.

Beispiel 6.3.7 (**Einschränkung als Rückzug**). Gegeben $Z \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raums und eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ auf X liefert unsere Definition 2.2.37 der auf Z eingeschränkten Garbe $\mathcal{F}|_Z$ einen kartesischen Morphismus $\mathcal{F}|_Z \to \mathcal{F}$ über der Einbettung $i : Z \hookrightarrow X$ alias einen Isomorphismus

$$\mathcal{F}|_Z \xrightarrow{\sim} i^*\mathcal{F}$$

Beispiel 6.3.8 (**Konstante Garbe als Rückzug**). Gegeben $a : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung eines topologischen Raums auf den einpunktigen Raum top sowie eine Menge M liefert unsere Definition 2.2.11 der konstanten Garbe M_X einen kartesischen Morphismus $M_X \to M_{\mathrm{top}}$ über a alias einen Isomorphismus

$$M_X \xrightarrow{\sim} a^* M_{\mathrm{top}}$$

Beispiel 6.3.9 (**Rückzug und Vorschub in der Mengengarbenopfaserung**). Gegeben $f : X \to Y$ stetig sind die Rückzugfunktoren unserer Garbenopfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ aus 6.2.17 die opponierten inversen Bilder

$$f^\dagger := (f^*)^{\mathrm{opp}} : \mathrm{Ens}_{/\!/Y} \to \mathrm{Ens}_{/\!/X}$$

mit den hoffentlich offensichtlichen Opkomorphismen $f^\dagger\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ über f als Transportmorphismen. Die Vorschübe der Garbenopfaserung sind entsprechend die opponierten Vorschübe

$$f_\dagger := (f_*)^{\mathrm{opp}} : \mathrm{Ens}_{/\!/X} \to \mathrm{Ens}_{/\!/Y}$$

mit den hoffentlich offensichtlichen Opkomorphismen $\mathcal{F} \to f_\dagger\mathcal{F}$ über f als Transportmorphismen.

Vorschau 6.3.10. In 4.3.25 haben wir einen Isomorphismus zwischen dem Rückzug einer Mengengarbe in Bezug auf die Garbenopfaserung und dem Rückzug in Bezug auf die Garbenfaserung 6.3.6 angegeben. In 9.4.11 werden wir erklären, inwiefern sich diese Beobachtung zu der Aussage präzisieren läßt, daß unsere beiden Faserungen durch „Oppinvertieren“ auseinander hervorgehen.

6.3.11 (**Notationsvarianten**). Gegeben ein Bifaserfunktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und ein Objekt $X \in \mathscr{B}$ der Basis notieren wir die Opponierten der Faserkategorien gerne $\mathscr{C}_{/X} := \mathscr{C}_X^{\mathrm{opp}}$. Gegeben ein Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis schreiben wir weiter $f^* := (f^\dagger)^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}_{/Y} \to \mathscr{C}_{/X}$ und $f_* := (f_\dagger)^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}_{/X} \to \mathscr{C}_{/Y}$. Dann bilden diese Funktoren ein adjungiertes Paar (f^*, f_*) wie man es gewohnt ist.

6.3.12 (**Allgemeiner Basiswechsel**). Sei $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Funktor und sei in der Basis $\mathscr{B}$ ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

gegeben. Wir nehmen an, daß sich für ein Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ unser Diagramm hochheben läßt zu einem Diagramm in $\mathscr{C}$ ohne den gestrichelten Pfeil der Gestalt

$$\begin{tikzcd} q^\dagger\mathcal{F} \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathcal{F} \arrow[dd] \\ g_\dagger q^\dagger \mathcal{F} \arrow[dr, dashed] & & \\ & p^\dagger f_\dagger \mathcal{F} \arrow[r] & f_\dagger \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

Sind hier die Pfeile nach rechts sogar stark kartesische Lifts und die Pfeile nach unten stark kokartesische Lifts, so gibt es für den gestrichelten Pfeil offensichtlich genau einen Morphismus

$$\mathrm{bw} : g_\dagger q^\dagger \mathcal{F} \to p^\dagger f_\dagger \mathcal{F}$$

in $\mathscr{C}_Z$, der das obige Diagramm kommutativ macht. Er heißt der **Basiswechselmorphismus** und wir notieren ihn oft bw. Ist unser Funktor etwa eine Bifaserung, so ist der Basiswechselmorphismus nach 6.2.19 für alle Objekte $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ definiert.

Beispiel 6.3.13. Im Fall zweier Morphismen π, i in der Basis mit $\pi \circ i = \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \mathrm{id}$ spezialisiert der Basiswechsel zu einem natürlichen Morphismus

$$i^\dagger \mathcal{F} \to \pi_\dagger \mathcal{F}$$

unter der Annahme, daß $i^\dagger \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ stark kartesisch ist und $\mathcal{F} \to \pi_\dagger \mathcal{F}$ stark kokartesisch.

Übungen

Übung 6.3.14 (**Vorschub durch Adjunktion**). Gegeben sei ein Faserfunktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mit Rückzugfunktoren $f^\dagger : \mathscr{C}_Y \to \mathscr{C}_X$ für $f : X \to Y$. Man zeige: Existiert der partielle Linksadjungierte $f_\dagger$ bei $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ und ist $\mathcal{F} \to f^\dagger f_\dagger \mathcal{F}$ die Einheit der Adjunktion, so ist der zugehörige Morphismus $\mathcal{F} \to f_\dagger \mathcal{F}$ über f stark kokartesich für $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$. Haben also bei einem Faserfunktor alle Rückholfunktoren einen Linksadjungierten, so ist er ein Bifaserfunktor. Umgekehrt erhalten wir auch für jeden Bifaserfunktor Adjunktionen $(f_\dagger, f^\dagger)$ als die Verknüpfungen

$$\mathscr{C}_Y(f_\dagger \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xleftarrow{\sim} \mathscr{C}_X(\mathcal{F}, f^\dagger \mathcal{G})$$

Übung 6.3.15 (**Basiswechsel durch Adjunktionen**). Man zeige, daß sich der Basiswechsel unter einem Bifaserfunktor für ein kommutatives Quadrat $fq = pg$ in der Basis beschreiben läßt vermittels der Adjunktionen zwischen Vorschub und Rückzug $(f_\dagger, f^\dagger)$ und $(g_\dagger, g^\dagger)$ als

$$g_\dagger q^\dagger \mathcal{F} \to g_\dagger q^\dagger f^\dagger f_\dagger \mathcal{F} \to g_\dagger g^\dagger p^\dagger f_\dagger \mathcal{F} \to p^\dagger f_\dagger \mathcal{F}$$

Alternativ mag man ihn auch vermittels der Adjunktionen $(p_\dagger, p^\dagger)$ und $(q_\dagger, q^\dagger)$ konstruieren in ähnlicher Weise. Sind insbesondere $f^\dagger$ und $g^\dagger$ volltreu, so liefert das Basiswechsel einen Isomorphismus für alle Objekte $\mathcal{F}$ der Gestalt $\mathcal{F} = f^\dagger \mathcal{G}$.

Übung 6.3.16 (**Einheit und Koeinheit einer Adjunktion als Basiswechsel**). Man zeige, daß der Basiswechselmorphismus unter einem Bifaserfunktor für ein kommutatives Quadrat $fq = pg$ in der Basis mit $p = f$ und $q = g$ zusammenfällt mit der Komposition $\mathrm{g}_\dagger\, \mathrm{g}^\dagger\, \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \to f^\dagger f_\dagger \mathcal{F}$ der Koeinheit und Einheit der jeweiligen Adjunktionen.

Übung 6.3.17 (**Transitivität von Basiswechseln**). Sei $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Bifaserfunktor und sei in der Basis $\mathscr{B}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"'] & W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ T \arrow[r, "r"] & Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

gegeben. So stimmt der Basiswechsel im einhüllenden Rechteck überein mit der in der hoffentlich offensichtlichen Weise aus den Basiswechseln in den einzelnen Quadraten und Identifikationen gebildeten Transformation $h_\dagger(qs)^\dagger \Rightarrow h_\dagger s^\dagger q^\dagger \Rightarrow r^\dagger g_\dagger q^\dagger \Rightarrow r^\dagger p^\dagger f_\dagger \Rightarrow (pr)^\dagger f_\dagger$.

Übung 6.3.18 (**Rückzug von Basiswechseln**). Sei $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ ein Bifaserfunktor

und sei in der Basis $\mathscr{B}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

gegeben. Sei weiter $s : V \to W$ gegeben. So ist die Verknüpfung

$$(gs)_\dagger (qs)^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} g_\dagger s_\dagger s^\dagger q^\dagger \Rightarrow g_\dagger q^\dagger \Rightarrow p^\dagger f_\dagger$$

von durch Identifikationen, der Koeinheit der Adjunktion und dem Basiswechsel gegebenen Transformationen der Basiswechsel im Diagramm $f(qs) = p(gs)$.

Übung 6.3.19 (**Verträglichkeit von Adjunktion und Basiswechsel**). Man zeige, daß gegeben ein Bifaserfunktor und ein kommutatives Quadrat $fq = pg$ in der Basis das Diagramm von Transformationen

$$\begin{tikzcd} p^\dagger f_\dagger f^\dagger \arrow[r, Rightarrow, "p^\dagger \eta"] & p^\dagger \\ g_\dagger q^\dagger f^\dagger \arrow[u, Rightarrow, "\mathrm{bw}\, f^\dagger"] \arrow[r, Rightarrow, "g_\dagger\, \mathrm{idt}"] & g_\dagger g^\dagger p^\dagger \arrow[u, Rightarrow, "\eta p^\dagger"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Hinweis: Man mag von der Transitivität der Basiswechsel 6.3.17 in den Diagrammen

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ Z \arrow[r, "p"] & Y \arrow[r, "\mathrm{id}"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ Z \arrow[r, "\mathrm{id}"] & Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

ausgehen, deren einhüllende Rechtecke übereinstimmen.

Übung 6.3.20 (**Verträglichkeit von Adjunktionen und Identifikationen**). Gegeben eine Bifaserung und eine Verknüpfung fg von Morphismen der Basis zeige man, daß die durch Koeinheiten von Adjunktionen induzierte Transformation $g_\dagger f_\dagger f^\dagger g^\dagger \Rightarrow g_\dagger g^\dagger \Rightarrow \mathrm{Id}$ zusammenfällt mit der durch Identifikationen und eine Koeinheit der Adjunktion induzierten Transformation $g_\dagger f_\dagger f^\dagger g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (fg)_\dagger (fg)^\dagger \Rightarrow \mathrm{Id}$.

Übung 6.3.21. Gegeben eine Bifaserung und eine Verknüpfung $f \circ g$ von Morphismen in der Basis zeige man, daß die durch Einheit und Koeinheit der Adjunktion induzierte Transformation $g^\dagger \Rightarrow (fg)^\dagger (fg)_\dagger g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} g^\dagger f^\dagger f_\dagger g_\dagger g^\dagger \Rightarrow g^\dagger f^\dagger f_\dagger$ zusammenfällt mit der durch die Einheit der Adjunktion induzierte Transformation $g^\dagger \Rightarrow g^\dagger f^\dagger f_\dagger$. Hinweis: Verträglichkeit von Adjunktionen und Identifikationen 6.3.20 sowie Dreiecksidentität [TF] 2.4.8.1.

Ergänzende Übung 6.3.22 (**Unterobjektfaserung**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ betrachten wir in der Kategorie $\mathcal{C}^{\downarrow}$ aller Morphismen die volle Unterkategorie $\mathcal{C}^{\subset} \subset \mathcal{C}^{\downarrow}$ aller Monomorphismen und den Funktor $p : \mathcal{C}^{\subset} \to \mathcal{C}$, der jedem Monomorphismus sein Zielobjekt zuordnet. Besitzt in $\mathcal{C}$ jeder Winkel einen Pullback, so ist dieser Funktor eine Faserung mit dem Urbild eines Unterobjekts als Rückzug. Ist unsere Kategorie $\mathcal{C}$ abelsch, so ist er sogar eine Bifaserung mit dem Bild eines Unterobjekts als Vorschub.

Ergänzende Übung 6.3.23 (**Basiswechsel in der Unterobjektbifaserung**). Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und die Unterobjektbifaserung $p : \mathcal{A}^{\subset} \to \mathcal{A}$ nach 6.3.22 ist der Basiswechsel über einem kommutativen Quadrat $fq = pg$ der Basis ein Isomorphismus, wenn $(f, p) \circ (q, -g)^{\top}$ eine exakte Sequenz ist, insbesondere also für jedes kartesische und jedes kokartesische Quadrat. Hinweis: Man zieht sich unschwer auf den Fall eines kartesischen Quadrats zurück. Indem man beide Kanten des Ausgangswinkels in einen Epimorphismus gefolgt von einem Monomorphismus faktorisiert und [TD] 1.5.9 anwendet, zieht man sich weiter zurück auf den Fall kartesischer Quadrate mit nur Epimorphismen, mit nur Monomorphismen, oder mit parallelen Monomorphismen und parallelen Epimorphismen. Nur im letzten dieser Fälle ist die Behauptung nicht offensichtlich. Hier kann man aber die modulare Identität 2.5.33 anwenden.

6.4 Basiswechselisomorphismen für Garben

6.4.1 (**Linksadjungierter von étalem Mengengarbenrückzug**). Gegeben eine étale Abbildung $f : X \to Y$ hat der Rückzug $f^* : \mathrm{Ens}_{/Y} \to \mathrm{Ens}_{/X}$ stets einen Linksadjungierten

$$f_{!!} : \mathrm{Ens}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/Y}$$

Um das zu einzusehen, bemerkt man zunächst, daß $(f\circ) : \mathrm{Top}_X \to \mathrm{Top}_Y$ linksadjungiert ist zu $X\times_Y : \mathrm{Top}_Y \to \mathrm{Top}_X$. Daraus folgt dann, daß für f étale $(f\circ)$ linksadjungiert ist zu $X\times_Y : \text{ét}\mathrm{Top}_Y \to \text{ét}\mathrm{Top}_X$. Unser Linksadjungierter $f_{!!}$ vertauscht im allgemeinen keineswegs mit endlichen Produkten und macht keineswegs abelsche Garben zu abelschen Garben.

Vorschau 6.4.2. Unser Linksadjungierter $f_{!!}$ hat eine enge Beziehung zum Schreivorschub $f_!$ für abelsche Garben, den wir im folgenden Abschnitt diskutieren.

6.4.3 (**Schnitte als Morphismen**). Gegeben $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ eine Garbe erhalten wir für $\mathrm{ens}_{/U}$ die finale Mengengarbe auf U insbeondere Bijektionen

$$\mathrm{Ens}_{/X}(j_{!!}\,\mathrm{ens}_{/U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/U}(\mathrm{ens}_{/U}, j^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U)$$

6.4.4 (**Étaler Basiswechsel in der Mengengarbenfaserung**). Sind in einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen die Vertikalen f, g étale, so ist der Basiswechsel für Mengengarben in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}}$ eine Isotransformation

$$g_{!!}q^* \overset{\sim}{\Rightarrow} p^* f_{!!}$$

Das ist in der Sprache der étalen Räume eine recht banale Aussage und gilt sogar allgemeiner für die Faserung $\mathrm{Top}^{\downarrow} \to \mathrm{Top}$ aus 6.1.6, ja für die Faserung $\mathscr{B}^{\downarrow} \to \mathscr{B}$ der relativen Objekte einer beliebigen Kategorie $\mathscr{B}$ mit Faserprodukt. Daß f, g étale sind, wird nur dafür benötigt, daß ihr Nachschalten dann étale Morphismen zu étalen Morphismen macht.

6.4.5 (**Étaler Basiswechsel in der Garbenopfaserung**). Sind in einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen die Horizontalen p, q étale, so ist der Basiswechsel für Mengengarben in $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}}$ eine Isotransformation

$$g_{\dagger}q^{\dagger} \overset{\sim}{\Rightarrow} p^{\dagger} f_{\dagger}$$

Um das zu sehen, man man von der Isotransformation $q_{!!}g^* \overset{\sim}{\Rightarrow} f^* p_{!!}$ nach 6.4.4 ausgehen. Durch Übergang zu den Rechtsadjungierten erhält man daraus mit [TF] 2.4.8.23 und [TF] 2.4.8.22 eine Isotransformation $p^* f_* \overset{\sim}{\Rightarrow} g_* q^*$. Geht man zu den opponierten Kategorien über, so ergibt sich die behauptete Isotransformation. Daß sie dann auch tatsächlich der Basiswechsel der Garbenopfaserung ist, mag man sich entweder direkt überlegen oder daraus ableiten, daß unsere beiden Faserungen durch Oppinvertieren auseinander hervorgehen.

6.4.6 (**Eigentlicher Basiswechsel in der Mengengarbenopfaserung**). Sind in einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen die Vertikalen f, g eigentlich und separiert, so ist der Basiswechsel für Mengengarben in $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}}$ eine Isotransformation

$$g_{\dagger}q^{\dagger} \overset{\sim}{\Rightarrow} p^{\dagger} f_{\dagger}$$

Hat g einpunktigen Wertebereich, so ist das im wesentlichen die Folgerung 4.5.3 aus unserer Proposition 4.5.2 zur Fortsetzbarkeit von Schnitten über relativ Hausdorff'schen Kompakta. Der allgemeine Fall folgt ohne weitere Schwierigkeiten. Einen Spezialfall haben wir bereits in 4.5.6 kennengelernt. Spezialisiert auf den Fall abelscher Garben ist das ein erstes Beispiel für „les-Basiswechsel“ 7.3.1.

6.4.7 (**Linksadjungierter zu abelschem étalen Rückzug**). Gegeben eine étale Abbildung $f : X \to Y$ ist für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ der partielle Linksadjungierte des Rückzugs $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ auf der freien abelschen Garbe $\mathbb{Z}\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ definiert und nimmt dort den Wert

$$\mathbb{Z} f_{!!} \mathcal{F}$$

an für den Linksadjungierten $f_{!!} : \mathrm{Ens}_{/X} \to \mathrm{Ens}_{/Y}$ zu $f^* : \mathrm{Ens}_{/Y} \to \mathrm{Ens}_{/X}$ aus 6.4.1 und $\mathbb{Z}\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ die freie abelsche Garbe über $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ aus 2.2.63. Jede abelsche Garbe $\mathcal{A} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ ist nun der Kokern $\mathbb{Z}\mathcal{G} \to \mathbb{Z}\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ eines Morphismus von freien abelschen Garben. Man folgert so für den Rückzug $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ unter étalem f die Existenz eines Linksadjungierten

$$f_{[!]} : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$$

Vorschau 6.4.8. Im weiteren werden wir zeigen, daß unser Linksadjungierter $f_{[!]}$ für f étale und separiert mit dem sogenannten „Schreivorschub“ $f_!$ übereinstimmt.

Übungen

Übung 6.4.9 (**Faserkonstante Garben**). Seien X ein topologischer Raum und I ein zusammenhängendes hausdorffsches Kompaktum und $\pi : X \times I \to X$ die Projektion und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X \times I}$ eine Garbe. Ist die Restriktion von $\mathcal{F}$ auf jede Faser von π konstant, so ist die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\pi^*\pi_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$. Hinweis: Eigentlicher Basiswechsel 6.4.6. Allgemeiner zeige man dasselbe für $\pi : X \times I \to X$ im Fall eines beliebigen nichtleeren reellen Intervalls I. Hinweis: Man schreibe I als aufsteigende Vereinigung kompakter Intervalle und folgere, daß für jeden Punkt $t \in I$ und jede offene Teilmenge $U \Subset X$ die Restriktion von Schnitten eine Bijektion $\Gamma(U \times I; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}; \mathcal{F})$ induziert. Ich erinnere daran, daß die Einheit der Adjunktion für finale Abbildungen mit zusammenhängenden Fasern stets ein Isomorphismus ist nach 4.3.32.

Übung 6.4.10 (**Basiswechsel sind nicht immer Isomorphismen**). Gegeben eine Familie $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ von Garben auf einem Raum X kann man ihr Produkt konstruieren, indem man sie zu einer Garbe auf $X \times I^\delta$ zusammenfügt und deren Vorschub unter der Projektion auf X nimmt. So liefert 2.2.55 auch ein Beispiel für ein kartesisches Diagramm topologischer Räume und eine Garbe, für die der Basiswechselmorphismus aus 6.3.12 kein Isomorphismus ist.

Übung 6.4.11 (**Wolkenkratzer zu dichtem Punkt**). Gegeben Z ein topologischer Raum und $e : \mathrm{top} \hookrightarrow Z$ eine Einbettung des Einpunktraums mit dichtem Bild und $c : Z \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung ist die von der Identifikation $e^*c^* \xRightarrow{\sim} \mathrm{id}$ vermittels der Adjunktion induzierte Transformation von Funktoren $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{top}} \to \mathrm{Ens}_{/Z}$ eine Isotransformation

$$c^* \xRightarrow{\sim} e_*$$

Übung 6.4.12 (**Wolkenkratzergarben im Allgemeinen**). Gegeben ein bepunkteter Raum (X, x) und $i_x : \mathrm{top} \hookrightarrow X$ die zugehörige Einbettung des Einpunktraums und $Z := \mathrm{Cl}_X(\{x\})$ und $c : Z \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung und $i : Z \hookrightarrow X$ die

Einbettung induziert die Isotransformation aus der vorhergehenden Übung 6.4.11 unter i_* eine Isotransformation

$$i_* c^* \tilde{\Rightarrow} i_{x*}$$

Insbesondere ist das Bilden der Wolkenkratzergarbe in abelschen Garben stets ein exakter Funktor $i_{x*} : \mathrm{Ab}_{/\,\mathrm{top}} \to \mathrm{Ab}_{/X}$.

Übung 6.4.13 (**Wolkenkratzer zu dichtem Punkt, Variante**). Gegeben (Z, z) ein topologischer Raum mit einem dichten Punkt z und ein weiterer Raum S mit Garbe $\mathcal{M} \in \mathrm{Ens}_{/S}$ und $e : S \hookrightarrow S \times Z$ gegeben durch $s \mapsto (s, z)$ und $\pi : S \times Z \to S$ die Projektion liefert die Identifikation $e^* \pi^* \tilde{\Rightarrow} \mathrm{id}$ unter der Adjunktion eine Isotransformation

$$\pi^* \tilde{\Rightarrow} e_*$$

von Funktoren $\mathrm{Ens}_{/S} \to \mathrm{Ens}_{/S \times Z}$. Hinweis: Eigentlicher Basiswechsel.

Übung 6.4.14 (**Wolkenkratzer im Allgemeinen, Variante**). Gegeben ein bepunkteter Raum (X, x) und S ein weiterer Raum mit Garbe $\mathcal{M} \in \mathrm{Ens}_{/S}$ und $\mathrm{em}_x : S \hookrightarrow S \times X$ die „horizontale“ Einbettung $s \mapsto (s, x)$ und $Z := \mathrm{Cl}_X(\{x\})$ und $\pi : S \times Z \to S$ die Projektion und $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung von Z liefert das Anwenden von $(\mathrm{id} \times i)_*$ auf die Isotransformation aus der vorhergehenden Übung 6.4.13 eine Isotransformation

$$(\mathrm{id} \times i)_* \pi^* \tilde{\Rightarrow} \mathrm{em}_{x*}$$

Insbesondere ist der Vorschub von abelschen Garben unter „horizontalen Einbettungen“ stets ein exakter Funktor $\mathrm{em}_{x*} : \mathrm{Ab}_{/S} \to \mathrm{Ab}_{/S \times X}$.

Übung 6.4.15 (**Globale Schnitte als Halme**). Sei (U, u) ein bepunkteter Raum. Sei U die einzige Umgebung von u und $e : \mathrm{top} \to U$ die zugehörige Einbettung und $c : U \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung. So ist die Komposition der von der Einheit der Adjunktion und der Identifikation $c_* e_* \tilde{\Rightarrow} \mathrm{id}$ induzierten Transformationen $c_* \Rightarrow c_* e_* e^* \tilde{\Rightarrow} e^*$ eine Isotransformation

$$c_* \tilde{\Rightarrow} e^*$$

Übung 6.4.16 (**Partielle Auflösung durch offene Überdeckung**). Gegeben eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eines topologischen Raums X und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist die Sequenz

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{i \in I} f_{i*} f_i^* \mathcal{F} \to \prod_{(i,j) \in I^2} f_{ij*} f_{ij}^* \mathcal{F}$$

eine linksexakte Sequenz von Garben, ja sogar von Prägarben auf X. Hier bezeichnen $f_i : U_i \hookrightarrow X$ und $f_{ij} : U_i \cap U_j \hookrightarrow X$ die Einbettungen. Die Morphismen

kommen her von den Adjunktionen und Identifikationen in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Etwas allgemeiner ist sogar für $(U_{ij,k})_{k\in K(i,j)}$ jeweils eine offene Überdeckung von $U_i \cap U_j$ die Sequenz

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{i\in I} f_{i*}f_i^*\mathcal{F} \to \prod_{(i,j)\in I^2,\, k\in K(i,j)} f_{ij,k*}f_{ij,k}^*\mathcal{F}$$

für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ eine linksexakte Sequenz von Prägarben.

6.5 Höhere Derivierte der Vorschübe

Beispiel 6.5.1. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist der Vorschub offensichtlich und formal nach 2.4.13 als Rechtsadjungierter ein linksexakter Funktor $f_* : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$. Die zugehörigen rechtsderivierten Funktoren $\mathrm{R}^q f_*$ beschreibt der folgende Satz.

Satz 6.5.2 (**Derivierte Vorschübe als Garbifizierung**). *Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ ist ihr q-ter derivierter Vorschub $\mathrm{R}^q f_*\mathcal{F}$ isomorph zu der zur Prägarbe $V \mapsto \mathrm{H}^q(f^{-1}(V);\mathcal{F})$ assoziierten Garbe vermittels der im anschließenden Beweis konstruierten natürlichen Isomorphismen.*

6.5.3. In später eingeführter Terminologie wird der Isomorphismus in unserem Satz induziert von den Morphismen $\mathrm{H}^q(f^{-1}(V);\mathcal{F}) \to (\mathrm{R}^q f_*\mathcal{F})(V)$ am unteren Rand der Leray'schen Spektralsequenz 10.3.15.

Beispiel 6.5.4. Ist $a : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung, so liefern die Definitionen einen Isomorphismus $\mathrm{R}^q a_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})_{\mathrm{top}}$ von abelschen Garben auf top, der in diesem Fall mit dem im anschließenden Beweis konstruierten natürlichen Isomorphismus zusammenfällt.

Beispiel 6.5.5. Den Fall, daß f die Identität auf X ist, haben Sie möglicherweise bereits als Übung 4.3.28 behandelt.

Beispiel 6.5.6. Für $j : (0,1) \hookrightarrow [0,1]$ und eine abelsche Gruppe M haben wir $\mathrm{R}^q j_* M_{(0,1)} \cong M_{[0,1]}$ für $q = 0$ und Null sonst. Der Vorschub der konstanten Garbe ist also in diesem Fall wieder eine konstante Garbe und die höheren Derivierten dieses Vorschubs verschwinden auf konstanten Garben.

Beweis. Gegeben ein Komplex $\mathcal{A}^*$ von abelschen Garben auf einem topologischen Raum Y bezeichne $\underline{\mathcal{H}}^q\mathcal{A}^*$ seine q-te Kohomologie als Komplex von abelschen Prägarben, also die Prägarbe

$$\underline{\mathcal{H}}^q\mathcal{A}^* : V \mapsto \mathrm{cok}\left(\mathcal{A}^{q-1}(V) \to \ker(\mathcal{A}^q(V) \to \mathcal{A}^{q+1}(V))\right)$$

Das Zusammenfallen von Prägarbenkern und Garbenkern sowie unsere Beschreibung des Garbenkokerns als Garbifizierung des Prägarbenkokerns liefern einen Isomorphismus

$$(\underline{\mathcal{H}}^q \mathcal{A}^*)^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \mathcal{A}^*$$

der Garbifizierung der Prägarbenkohomologie mit der Garbenkohomologie. Ist nun $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\lhd$ eine injektive Auflösung, so erhalten wir insbesondere Isomorphismen zwischen den Kohomologiegarben des Komplexes $f_*\mathcal{I}^\lhd$ und den Garbifizierungen der Prägarben

$$V \mapsto \mathcal{H}^q((f_*\mathcal{I}^\lhd)(V)) = \mathcal{H}^q(\mathcal{I}^\lhd(f^{-1}(V))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(f^{-1}(V); \mathcal{F})$$

Der letzte Isomorphismus ganz rechts rührt dabei daher, daß die Restriktionen auf die offenen Teilmengen $f^{-1}(V)$ der welken Garben des Komplexes $\mathcal{I}^\lhd$ wieder welk sind. Daß diese letzten Isomorphismen mit Restriktionen auf kleinere V verträglich sind, folgt aus der Definition des Zurückholens in der Garbenkohomologie. $\square$

6.5.7. Aus dem Satz folgt unmittelbar, daß welke abelsche Garben azyklisch sind für den Vorschub unter jeder stetigen Abbildung. Verallgemeinerungen auf Komplexe diskutieren wir in [TSF] 3.3.22.

6.5.8. Gegeben eine stetige Abbildung $p : Z \to Y$ und eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/Z}$ und ein Punkt $y \in Y$ erhalten wir Abbildungen

$$(\mathrm{R}^i p_* \mathcal{F})_y \to \mathrm{H}^i(p^{-1}(y); \mathcal{F})$$

von den Halmen der höheren Vorschübe in die Kohomologie der Fasern durch Übergang zum Kolimes der Restriktionen $\mathrm{H}^i(p^{-1}(V); \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^i(p^{-1}(y); \mathcal{F})$ über alle $V \Subset Y$ mit $y \in V$. Wir nennen auch diese Abbildungen Basiswechsel, da sie ein Spezialfall der folgenden allgemeineren Konstruktion sind, die offensichtlich die Bezeichnung als Basiswechsel verdient.

6.5.9. Ist $pg = fq$ ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf dem Definitionsbereich von f, so erklären wir die **Basiswechselhomomorphismen**

$$p^*(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} \to (\mathrm{R}^i g_*) q^* \mathcal{F}$$

wie folgt: Wir gehen aus von einer injektiven Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\lhd$ und betrachten die Basiswechsel $p^* f_* \mathcal{I}^\lhd \to g_* q^* \mathcal{I}^\lhd$. Da der Rückzug von Garben exakt ist, muß $q^*\mathcal{I}^\lhd$ eine Auflösung von $q^*\mathcal{F}$ sein und wir erhalten unsere Basiswechselmorphismen als die Komposition

$$p^*(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} = p^*\mathcal{H}^i(f_*\mathcal{I}^\lhd) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i(p^* f_* \mathcal{I}^\lhd) \to \mathcal{H}^i(g_* q^* \mathcal{I}^\lhd) \to (\mathrm{R}^i g_*) q^* \mathcal{F}$$

Deren Unabhängigkeit von der gewählten injektiven Auflösung ist offensichtlich.

Satz 6.5.10 (**Derivierter offener und eigentlicher Basiswechsel**). *Sei ein kartesisches Diagramm von topologischen Räumen $pg = fq$ gegeben. Sind p, q offene Einbettungen oder f, g eigentlich und separiert, so ist unser Basiswechsel für alle i ein Isomorphismus*

$$p^*(\mathrm{R}^i f_*) \tilde{\Rightarrow} (\mathrm{R}^i g_*) q^*$$

Vorschau 6.5.11. Das erweist sich im weiteren als Spezialfall des Basiswechsels $p^! f_* \tilde{\Rightarrow} g_* q^!$ beziehungsweise des adjungierten Basiswechsels $p^* f_! \tilde{\Rightarrow} g_! q^*$ nach [TSF] **??** in einer verflochtenen Trennaustauschsituation mit Adjungierten, angewandt auf die Trennaustauschsituation der derivierten Modulgarben [TSF] 4.6.3, gefolgt vom Anwenden von $\mathcal{H}^i$ unter Beachtung der Exaktheit der Rückzüge.

6.5.12. Speziell ist für $f : X \to Y$ eigentlich und separiert sowie $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und einen beliebigen Punkt $y \in Y$ der Basiswechsel ein Isomorphismus

$$(\mathrm{R}^i f_* \mathcal{F})_y \tilde{\to} \mathrm{H}^i(f^{-1}(y); \mathcal{F})$$

Das folgt durch Anwenden des Satzes auf die Einbettung $p : \{y\} \hookrightarrow Y$ des Punktes $y \in Y$.

Beweis. Wir betrachten die Sequenz von Morphismen, durch die wir unseren derivierten Basiswechsel in 6.5.9 definiert haben. Sind p, q offene Einbettungen, so ist der gewöhnliche Basiswechsel ein Isomorphismus nach offenen Basiswechsel 6.4.5, also ist der vorletzte Pfeil unserer Sequenz ein Isomorphismus, und die Restriktion einer injektiven Garbe unter einer offenen Einbettung bleibt injektiv, also ist der letzte Pfeil ein Isomorphismus. Sind f, g separiert und eigentlich, so reicht es, wenn wir unsere Aussage für p die Einbettung eines Punktes zeigen, da ein Garbenhomomorphismus, der Isomorphismen auf allen Halmen induziert, bereits ein Isomorphismus sein muß. In diesem Fall ist die vorletzte Abbildung obiger Sequenz ein Isomorphismus nach eigentlichen Basiswechsel 6.4.6 und die letzte Abbildung ist ein Isomorphismus, da die Restriktion einer welken Garbe auf ein relativ Hausdorff'sches Kompaktum nach 4.5.2 kompaktweich ist. □

6.5.13. Wir nennen einen topologischen Raum Z **schwach basisfest garbenazyklisch** oder kurz **schwach bagazyklisch**, wenn für jeden topologischen Raum Y und jede abelsche Gruppe M und alle q der Rückzug unter der Projektion auf der Garbenkohomologie Isomorphismen $\mathrm{H}^q(Y; M) \tilde{\to} \mathrm{H}^q(Y \times Z; M)$ liefert. Insbesondere ist nach der Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie 4.5.12 jeder zusammenziehbare Raum schwach bagazyklisch. Gilt die fragliche Eigenschaft nur für $q \leq n$, so nenne ich den Raum Z **schwach bag-n-azyklisch**. Ein vernüftiges Kriterium zum Nachweis dieser Eigenschaft zeigen wir in 9.2.6.

Vorschau 6.5.14. Starke Varianten dieser Begriffe werden in [TSS] 1.1.2 eingeführt. Der wesentliche Punkt ist, daß wir dafür vergleichbare Eigenschaften für

beliebige Komplexe abelscher Garben fordern, die wir im schwachen Fall nur für beliebige konstante Garben fordern. Wir werden dort zeigen, daß zusammenziehbare Räume auch diese stärkere Eigenschaft haben.

Satz 6.5.15 (Verschwinden höherer Vorschübe bei Faserbündeln). *Gegeben ein Faserbündel $f : X \to Y$ mit schwach bagazyklischer Faser und eine abelsche Gruppe M verschwinden die höheren derivierten Vorschübe der konstanten Garbe M_X, in Formeln $\mathrm{R}^q f_* M_X = 0$ für $q > 0$ und die Einheit der Adjunktion ist ein Isomorphismus $M_Y \xrightarrow{\sim} f_* f^* M_Y$ und liefert zusammen mit dem natürlichen Isomorphismus $f^* M_Y \xrightarrow{\sim} M_X$ einen Isomorphismus*

$$M_Y \xrightarrow{\sim} f_* M_X$$

6.5.16. Ist die Faser nur schwach bag-n-azyklisch, so folgt in derselben Weise $M_Y \xrightarrow{\sim} f_* M_X$ und $\mathrm{R}^q f_* M_X = 0$ für $0 < q < n$.

Vorschau 6.5.17. In [TSS] 1.1.1 folgende zeigen wir allgemeiner, daß für ein Faserbündel $f : X \to Y$ mit zusammenziehbarer oder allgemeiner „bagazyklischer" Faser die Koeinheit der Adjunktion auf den derivierten Kategorien eine Isotransformation $\mathrm{id} \xRightarrow{\sim} f_* f^*$ ist.

Beweis. Mit offenem Basiswechsel können wir uns auf den Fall zurückziehen, daß unsere Abbildung die Projektion $f : Y \times Z \twoheadrightarrow Y$ ist mit Z schwach bagazyklisch. Nach Annahme induziert nun für alle $U \Subset Y$ der Rückzug Isomorphismen $\mathrm{H}^q(U; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(U \times Z; M)$ für alle q. Nach 4.3.28 alias 6.5.2 angewandt auf die Identität verschwinden für $q > 0$ alle Halme der Prägarbe $U \mapsto \mathrm{H}^q(U; M)$ auf X. So folgt $\mathrm{R}^q f_* M_X$ für $q > 0$ aus unserer Beschreibung 6.5.2 der höheren Vorschübe. Im Fall $q = 0$ folgt die Aussage direkt aus den Definitionen. □

Korollar 6.5.18 (Zurückholen auf Bündel mit azyklischer Faser). *Gegeben ein Faserbündel $f : X \to Y$ mit schwach bagazyklischer Faser liefert das Zurückholen auf der Garbenkohomologie für jede abelsche Gruppe M Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^p(Y; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(X; M)$$

Ist die Faser nur schwach bag-n-azyklisch, so erhalten wir mit demselben Beweis dieselben Isomorphismen für $p < n$.

Ergänzung 6.5.19. Ich habe nur deshalb eine schwächere Aussage als Motto gesetzt, weil sie mir griffiger schien. Der Satz von Leray-Hirsch über die Kohomologie von Faserbündeln, vergleiche etwa [Hat02], Theorem 4D.1, liefert eine vergleichbare Aussage für die singuläre Kohomologie.

6.5.20 (**Ein Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser ohne Schnitt**). Ein Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser muß im allgemeinen keine Homotopieäquivalenz sein, ja es muß noch nicht einmal einen globalen Schnitt besitzen. Ein Beispiel erhält man, indem man als Basis die Zahlengerade mit verdoppeltem Ursprung aus [TM] 1.1.4.8 betrachtet und sie überdeckt durch zwei Kopien U, V der Zahlengerade mit Schnitt $U \cap V \cong \mathbb{R}^\times$. Darauf betrachtet man das Faserbündel mit Faser $\mathbb{R}$, das auf den beiden offenen Teilmengen U, V trivial ist, und zusammengeklebt mit der Verklebungsfunktion $(x, t) \mapsto (x, f(x) + t)$ für eine stetige Abbildung $f : (U \cap V) \to \mathbb{R}$, die sich nicht stetig von $U \cap V \cong \mathbb{R}^\times$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen läßt.

Beweis. Aus 6.5.15 folgt $\mathrm{R}^q f_* M_X = 0$ für $q > 0$ und die Adjunktion liefert den Ersten von zwei Isomorphismen $M_Y \xrightarrow{\sim} f_* f^* M_Y \xrightarrow{\sim} f_* M_X$. Ist also $M_X \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ eine welke Auflösung, so ist auch $f_* M_X \hookrightarrow f_* \mathcal{I}^\triangleleft$ eine welke Auflösung. So erhalten wir Isomorphismen

$$\mathrm{H}^p(Y; M_Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(Y; f_* M_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p \Gamma f_* \mathcal{I}^\triangleleft \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p \Gamma \mathcal{I}^\triangleleft \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(X; M_X)$$

Daß diese Komposition genau das Zurückholen auf der Kohomologie ist, folgt aus den Definitionen. □

6.5.21 (**Ein Spezialfall der Leray'schen Spektralsequenz**). Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ sowie $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ mit $\mathrm{R}^q f_* \mathcal{F} = 0$ für $0 < q \leq n$ konstruieren wir nun Isomorphismen

$$(\mathrm{R}^p g_*) f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^p (gf)_* \mathcal{F} \quad \text{für } p < n.$$

Wir wählen dazu eine injektive und damit welke Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$. Nach Annahme ist dann auch $f_* \mathcal{F} \hookrightarrow f_* \mathcal{I}^\triangleleft$ ein bis zum Grad n exakter Komplex aus welken, nach 6.5.7 also g_*-azyklischen Garben. Indem wir in diesen Komplex die Garbe im Grad $n + 1$ durch das Bild des Randoperators ersetzen und die Garben in höheren Graden durch Null und ihn dann zur Berechnung von $\mathrm{R}^p g_*(f_* \mathcal{F})$ verwenden, erhalten wir für $p < n$ Isomorphismen

$$\mathrm{R}^p g_*(f_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p g_*(f_* \mathcal{I}^\triangleleft) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p (gf)_* \mathcal{I}^\triangleleft \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^p (gf)_* \mathcal{F}$$

Daß diese Isomorphismen nicht von der Wahl der ursprünglichen injektiven Auflösung abhängen, folgt aus der Eindeutigkeit von Homotopielifts. Im Fall einer konstanten Abbildung g erhalten wir, daß das Zurückholen auf der Kohomologie zum kanonischen Komorphismus $f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ für $p \leq n$ Isomorphismen $\mathrm{H}^p(Y; f_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(X; \mathcal{F})$ induziert. Unser Korollar 6.5.18 über das Zurückholen auf Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser hinwiederum mag man nun aus dieser Aussage folgern, indem man sie auf die konstante Garbe $\mathcal{F} := M_X$ und anwendet und als g die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum nimmt.

Übungen

Übung 6.5.22. Man zeige, daß ein Raum Z genau dann schwach bag-n-azyklisch ist für ein $n \geq 0$, wenn Z zusammenhängend ist und wenn gilt $\mathrm{R}^q \operatorname{pr}_{1*} M_{X \times Z} = 0$ für $0 < q \leq n$ und beliebiges X. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von 6.5.15.

Übung 6.5.23. Man zeige, daß die Sphäre S^{n+1} schwach bag-n-azyklisch ist. Hinweis: Eigentlicher Basiswechsel.

Übung 6.5.24. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine Zerlegung $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ in paarweise disjunkte offene Teilmengen und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X zeige man, daß die Basiswechsel natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{R}^q f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathrm{R}^q f_{i*} \operatorname{in}_i^* \mathcal{F}$$

liefern, für $\operatorname{in}_i : X_i \hookrightarrow X$ die jeweilige Einbettung und $f_i : X_i \to Y$ die jeweilige Einschränkung.

Übung 6.5.25. Für eine Überlagerung $f : X \to Y$ verschwinden die höheren derivierten Vorschübe. Für eine endliche Überlagerung ist der Vorschub einer lokal konstanten Garbe lokal konstant.

Übung 6.5.26 (**Invarianten und Reynoldsoperator**). Gegeben eine endliche Gruppe G und eine abelsche Gruppe M mit G-Operation, auf der die Multiplikation mit der Gruppenordnung auf M einen Isomorphismus $(|G|\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$ induziert, ist der **Reynolds-Operator** $R := |G|^{-1} \sum_{g \in G} g$ ein idempotenter Endomorphismus $R \in \operatorname{Ab}(M, M)$ mit der Untergruppe der G-Invarianten als Bild, in Formeln

$$\operatorname{im}(R) = M^G$$

Übung 6.5.27 (**Invarianten und Reynoldsoperator, Variante**). Gegeben eine endliche Gruppe G und eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und ein Objekt $M \in \mathcal{A}$ mit G-Operation, auf dem die Multiplikation mit der Gruppenordnung auf M einen Isomorphismus $(|G|\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$ induziert, ist der **Reynolds-Operator** $R := |G|^{-1} \sum_{g \in G} g$ ein idempotenter Endomorphismus $R \in \mathcal{A}(M, M)$ mit dem Unterobjekt der G**-Invarianten** als Bild, in Formeln

$$\operatorname{im}(R) = M^G$$

für M^G den Kern des Morphismus $(g - \mathrm{id})_{g \in G} : M \to \prod_{g \in G} M$.

Übung 6.5.28 (**Garbenkohomologie von Quotienten**). Es operiere eine endliche diskrete Gruppe G auf einem topologischen Raum X und die Quotientenabbildung $f : X \to X/G$ sei separiert. Sei weiter M eine abelsche Gruppe. Ist die

Multiplikation mit $|G|$ ein Isomorphismus $(|G|\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$, so induziert das Zurückholen Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X/G; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X; M)^G$$

zwischen der Kohomologie des Quotienten und den G-Invarianten in der Kohomologie des ursprünglichen Raums. Hinweis: Nach [TM] 1.2.4.22 ist unsere Quotientenabbildung eigentlich. Für jede abelsche Gruppe M trägt der Vorschub f_*M_X eine natürliche G-Operation und die Komposition $M_{X/G} \to f_*f^*M_{X/G} \xrightarrow{\sim} f_*M_X$ induziert einen Isomorphismus $M_{X/G} \xrightarrow{\sim} (f_*M_X)^G$ auf die Untergarbe der G-Invarianten, etwa nach eigentlichem Basiswechsel. Nun verwende man unseren Spezialfall der Leray'schen Spektralsequenz 6.5.21 sowie den Reynolds-Operator 6.5.27 und allgemeine Erkenntnisse 2.5.30 über additive Funktoren und idempotente Endomorphismen. Ich weiß nicht, ob für die singuläre Kohomologie die entsprechende Abbildung $\mathrm{H}^q(X/G; M)_{\mathrm{sing}} \to \mathrm{H}^q(X; M)^G_{\mathrm{sing}}$ in derselben Allgemeinheit ein Isomorphismus ist.

Beispiel 6.5.29 (**Kohomologie von Quotienten, Gegenbeispiel**). Die Spiegelung an einer Ursprungsgerade erzeugt eine Gruppe G von Automorphismen der Kreislinie S^1, für die das Zurückholen $\mathrm{H}^q(S^1/G; M) \to \mathrm{H}^q(S^1; M)^G$ im Fall $M := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist die Multiplikation mit $|G|$ aber auch kein Isomorphismus, sondern die Nullabbildung $(|G|\cdot) = 0 : M \to M$.

Beispiel 6.5.30 (**Kohomologie von Quotienten, Gegenbeispiel**). Wir betrachten als unseren Raum X die „Zahlengerade mit verdoppeltem Ursprung“ und lassen darauf die zweielementige Gruppe G so operieren, daß alle Punkte in ihr Negatives übergehen und die beiden Punkte unseres verdoppelten Ursprungs vertauscht werden. So ist $\mathrm{H}^1(X/G; \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^1(X; \mathbb{Q})^G$ kein Isomorphismus. Genauer verschwindet die erste Kohomologie des Quotienten und mit einer azyklischen Überdeckung erhalten wir rechts als erste Kohomologie den Körper $\mathbb{Q}$ mit trivialer G-Operation. In diesem Fall ist $X \to X/G$ aber auch nicht separiert.

7 Schreifunktoren

7.1 Garbenschreikofaserung

Definition 7.1.1. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und abelsche Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ heiße ein Komorphismus $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f **eigentlich**, wenn für alle $V \Subset Y$ und $t \in \mathcal{G}(V)$ die Abbildung

$$f : (\operatorname{supp} \varphi(t)) \to V$$

eigentlich ist, die vom Träger $(\operatorname{supp} \varphi(t)) \Subset f^{-1}(V)$ von $\varphi(t) \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ nach V geht. Die Menge der eigentlichen Komorphismen über f notieren wir

$$\mathrm{Ab}^{!}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

7.1.2 (**Eigentliche Komorphismen als Untergruppe**). Nach allgemeinen Eigenschaften eigentlicher Abbildungen [TM] 1.2.4.18 ist die Menge aller eigentlichen Komorphismen eine Untergruppe $\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subset \mathrm{Ab}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ der Gruppe aller Komorphismen.

7.1.3 (**Eigentliche Komorphismen über eigentlichen Abbildungen**). Nach allgemeinen Eigenschaften eigentlicher Abbildungen ist über einer eigentlichen Abbildung f jeder Komorphismus eigentlich, in Formeln

$$\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Ab}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

7.1.4 (**Verknüpfungen eigentlicher Komorphismen sind eigentlich**). Seien genauer $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ sowie abelsche Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ und $\mathcal{H} \in \mathrm{Ab}_{/Z}$ sowie eigentliche Komorphismen $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ und $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ gegeben. Dann wird für $W \Subset Z$ ein Schnitt $u \in \mathcal{H}(W)$ unter ψ abgebildet auf $t \in \mathcal{G}(g^{-1}(W))$ mit $g : \operatorname{supp}(t) \to W$ eigentlich und der Schnitt t wird unter φ weiter abgebildet auf $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(g^{-1}(W)))$ mit $f : \operatorname{supp}(s) \to g^{-1}(W)$ eigentlich. Diese Abbildung faktorisiert nach 4.4.16 über eine Abbildung $f : \operatorname{supp}(s) \to \operatorname{supp}(t)$, die ihrerseits eigentlich ist nach [TM] 1.2.4.11. Da die Verknüpfung eigentlicher Abbildungen stets wieder eigentlich ist nach [TM] 1.2.4.16, folgt die Behauptung.

7.1.5. Opkomorphismen über f, die durch eigentliche Komorphismen 7.1.1 gegeben werden, nennen wir **eigentliche Opkomorphismen** oder kürzer **Schreimorphismen über** f. Wir erhalten so eine Unterkategorie $\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \subset \mathrm{Ab}_{/\!/\,\mathrm{Top}}$ mit voller Objektmenge.

Definition 7.1.6. Einen Schreimorphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$, der kokartesisch ist für den Funktor

$$\mathrm{Ab}^{\mathsf{i}}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$$

des Vergessens der Garbe, nennen wir einen **schreikokartesischen Morphismus**.

Proposition 7.1.7 (Schreikofaserung). *1. Gegeben $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/\!/X}$ gibt es einen von $\mathcal{F}$ ausgehenden schreikokartesischen Morphismus $\mathcal{F} \to f_{¡}\mathcal{F}$ über f;*

2. Für f eigentlich ist der Transportmorphismus $\mathcal{F} \to f_{\dagger}\mathcal{F}$ zum gewöhnlichen Vorschub schreikokartesisch und liefert folglich einen Isomorphismus $f_{¡}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_{\dagger}\mathcal{F}$;

3. Ist $f : X \to Y$ beliebig und $g : Y \to Z$ separiert, so ist die Verknüpfung schreikokartesischer Morphismen über f und g ein schreikokartesischer Morphismus über gf;

4. Beschränken wir uns auf die Unterkategorie $\mathrm{Top}^{\mathrm{s}} \subset \mathrm{Top}$ mit nur separierten Abbildungen als Morphismen, so erhalten wir mit Schreimorphismen auf den Fasern eine Kofaserung, die **Garbenschreikofaserung**

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$$

Vorschau 7.1.8. Später werden wir mit $f_!$ beziehungsweise $f_{¡}$ meist die Derivierten der hier eingeführten Funktoren bezeichnen und und für die hier eingeführten Funktoren die alternative Notation $f_{(!)}$ beziehungsweise $f_{(¡)}$ verwenden, aber alles zu seiner Zeit.

Beweis. 1. Wir können eine abelsche Garbe $f_!\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ erklären, indem wir für alle $V \Subset Y$ setzen

$$(f_!\mathcal{F})(V) := \{s \in \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \mid f : (\operatorname{supp} s) \to V \text{ ist eigentlich}\}$$

Wegen der Lokalität der Eigentlichkeit in der Basis [TM] 1.2.4.15 ist $f_!\mathcal{F} \subset f_*\mathcal{F}$ eine Untergarbe von Mengen und nach [TM] 1.2.4.18 sogar eine Untergarbe von abelschen Gruppen. Der durch die Komposition der Einbettung $f_!\mathcal{F} \subset f_*\mathcal{F}$ mit dem Transportmorphismus $f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ gegebene Komorphismus $\kappa : f_!\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ über f ist offensichtlich eigentlich und für jede abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf Y liefert das Nachschalten von κ eine Bijektion

$$(\kappa\circ) : \mathrm{Ab}_{/Y}(\mathcal{G}, f_!\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{!}_{/f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

Durch Übergang zu den opponierten Kategorien, den wir durch auf-den-Kopf-Stellen des Ausrufezeichens und Übergang von / zu $/\!/$ andeuten, finden wir, daß $\kappa^\circ : \mathcal{F} \to f_{¡}\mathcal{F}$ ein schreikokartesischer Opkomorphismus über f ist.

2. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ setzen wir nun

$$f_{¡} := f_!^{\mathrm{opp}} : \mathrm{Ab}_{/\!/X} \to \mathrm{Ab}_{/\!/Y}$$

Für jede abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf Y liefert dann opponiert das Vorschalten des Schreimorphismus $\tau := \kappa^\circ : \mathcal{F} \to f_{¡}\mathcal{F}$ über f eine Bijektion

$$(\circ\tau) : \mathrm{Ab}_{/\!/Y}(f_{¡}\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{¡}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

In anderen Worten ist $\tau : \mathcal{F} \to f_{¡}\mathcal{F}$ ein von $\mathcal{F}$ ausgehender schreikokartesischer Schreimorphismus über f und $f_{¡}$ ist der Vorschub längs f in Bezug auf den Funktor $\mathrm{Ab}^{¡}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$. Wir nennen $f_!$ und $f_{¡}$ den **Schreivorschub**. Für eigentliches f sind alle Opkomorphismen über f eigentlich. Wir erhalten so für eigentliches f einen Isomorphismus von Funktoren $f_{¡} \overset{\sim}{\Rightarrow} f_\dagger$, der unter unseren verschiedenen Identifikationen der Gleichheit $f_!\mathcal{F} = f_*\mathcal{F}$ für eigentliches f entspricht.

3. Es gilt zu zeigen, daß der von den universellen Eigenschaften herrührende Morphismus ein Isomorphismus $g_!(f_!\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (gf)_!\mathcal{F}$ ist. Daß er injektiv ist, ist eh klar. Es bleibt, die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $t \in \mathcal{F}(f^{-1}(g^{-1}(W)))$ ein Schnitt mit $gf : (\operatorname{supp} t) \to W$ eigentlich. Ist g separiert, so ist auch $f : (\operatorname{supp} t) \to g^{-1}(W)$ eigentlich nach [TM] 1.2.4.11 und dann folgt mit 4.4.16 bereits $\operatorname{supp}(f_*t) = f(\operatorname{supp} t)$ und das geht mit einer eigentlichen Abbildung weiter nach W wegen [TM] 1.2.4.16. Folglich liegt t auch in $(g_!(f_!\mathcal{F}))(W)$.

4. Das folgt direkt aus den bereits bewiesenen Teilen. □

Beispiel 7.1.9 (**Koprodukt als Schreivorschub**). Wir nehmen als $f : X \to Y$ die konstante Abbildung von einer diskreten Menge X zum einpunktigen Raum $Y := \mathrm{top}$. Dann ist $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine Familie $(\mathcal{F}_x)_{x\in X}$ von abelschen Gruppen und $\mathcal{G}$ eine abelsche Gruppe. Ein Opkomorphismus über f ist eine Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathcal{G} \to \prod_{x\in X} \mathcal{F}_x$ und er ist eigentlich im Sinne von 7.1.1 genau dann, wenn für alle $t \in \mathcal{G}$ sein Bild $\varphi(t)$ endlichen Träger hat alias in $\bigoplus_{x\in X} \mathcal{F}_x \subset \prod_{x\in X} \mathcal{F}_x$ liegt. Mithin ist

$$f_!\mathcal{F} = \bigoplus_{x\in X} \mathcal{F}_x$$

der Schreivorschub von $\mathcal{F}$. Ich finde an diesem Beispiel bemerkenswert, in wie wenig natürlicher Weise dabei das Koprodukt entsteht.

Beispiel 7.1.10 (**Offene Ausdehnung durch Null als Schreivorschub**). Ist $j : X \to Y$ die Einbettung einer offenen Teilmenge, so finden wir $(j_!\mathcal{F})(V) = \{s \in \mathcal{F}(X \cap V) \mid \operatorname{supp} s \not\subset V\}$. Andererseits erinnern wir aus dem algebraischen Beweis von 4.9.12 unsere Konstruktion eines Linksadjungierten $j_{[!]}$ von j^* durch $j_{[!]}\mathcal{F}$ die Garbifizierung der abelschen Prägarbe mit $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ für $U \Subset X$ und $U \mapsto 0$ sonst. Sie liefert einen offensichtlichen Morphismus $j_{[!]}\mathcal{F} \to j_!\mathcal{F}$. Andererseits ist klar, daß die Halme von $j_!\mathcal{F}$ an allen Punkten außerhalb von X verschwinden müssen. Also ist unser Morphismus ein Isomorphismus

$$j_{[!]}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j_!\mathcal{F}$$

Ich finde auch in diesem Beispiel bemerkenswert, in wie wenig natürlicher Weise unser Isomorphismus entsteht.

7.1.11 (**Abgeschlossener Vorschub als Schreivorschub**). Ist $f : X \to Y$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge, so ist f eigentlich und wir finden $f_!\mathcal{F} = f_*\mathcal{F}$.

7.1.12 (**Kompakte Schnitte als Schreivorschub**). Ist $c : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung zum einpunktigen Raum top, so gilt $(c_!\mathcal{F})(\mathrm{top}) = \Gamma_!\mathcal{F}$.

7.1.13 (**Schreivorschub für lokal abgeschlossene Einbettungen**). Ist $b : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge und $\mathcal{E} \in \mathrm{Ab}_{/Z}$ eine abelsche Garbe auf Z, so hat $b_!\mathcal{E}$ auf Z dieselben Halme wie $b_*\mathcal{E}$ und nach 4.3.29 damit auch dieselben Halme wie $\mathcal{E}$, in Formeln

$$(b_!\mathcal{E})_z \xrightarrow{\sim} (b_*\mathcal{E})_z \xrightarrow{\sim} (b^*b_*\mathcal{E})_z \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_z \quad \forall z \in Z$$

Außerhalb von Z jedoch verschwinden alle Halme der Garbe $b_!\mathcal{E}$, die deshalb auch in dieser Allgemeinheit die **Ausdehnung von $\mathcal{E}$ durch Null** heißt. Bredon [Bre97] notiert sie $\mathcal{E}^X$.

7.1.14. Den Rechtsadjungierten eines Schreivorschubs $f_!$ nennen wir, soweit es ihn denn gibt, einen **Schreirückzug** und notieren ihn $f^!$ und haben ein adjungiertes Paar $(f_!, f^!)$. Die entsprechenden Funktoren zwischen den opponierten Kategorien bilden dann entsprechend ein adjungiertes Paar $(f^{¡}, f_{¡})$.

Vorschau 7.1.15. Später werden wir für eine lokal abgeschlossene Einbettung mit $b^!, b^{¡}$ meist die entsprechenden derivierten Funktoren bezeichnen und für die hier erklärten underivierten Funktoren die neuen Notationen $b^{(!)}, b^{(¡)}$ einführen, aber alles zu seiner Zeit.

Satz 7.1.16 (**Schreirückzug unter abgeschlossener Einbettung**). *Gegeben eine abgeschlossene Einbettung von topologischen Räumen $i : C \hookrightarrow X$ besitzt der Schreivorschub $i_! : \mathrm{Ab}_{/C} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ einen Rechtsadjungierten $i^! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/C}$.*

7.1.17. Nach 7.1.11 stimmen in der Situation des Satzes wie bei jeder eigentlichen Abbildung Vorschub und Schreivorschub überein, in Formeln $i_! = i_*$. Nur aus didaktischen Gründen fasse den gewöhnlichen Vorschub in diesem Fall als einen speziellen Schreivorschub auf.

Beweis. Ohne Einschränkung sei i die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge. Wir können dann $i^!\mathcal{F}$ beschreiben durch

$$(i^!\mathcal{F})(W) := \{s \in \mathcal{F}(V) \mid \operatorname{supp} s \subset V \cap X\}$$

für eine und jede offene Teilmenge $V \Subset X$ mit $V \cap C = W$ oder, formal korrekter, als den Kolimes über alle derartigen V. Es ist klar, daß die so definierte Prägarbe

eine Garbe ist und daß für $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/C}$ das Anwenden von $i_! = i_*$ gefolgt vom Nachschalten des offensichtlichen Homomorphismus $i_! i^! \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ eine Bijektion $\mathrm{Ab}_{/C}(\mathcal{G}, i^! \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/X}(i_! \mathcal{G}, \mathcal{F})$ induziert. $\square$

Beispiel 7.1.18. Für $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge liefern die Definitionen einen Isomorphismus $\Gamma i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_C \mathcal{F}$.

7.1.19 (**Offener Rückzug als Schreirückzug**). Im Fall einer offenen Einbettung j ist der Schreirückzug nach dem vorhergehenden isomorph zum gewöhnlichen Rückzug, denn beide sind Rechtsadjungierte der Ausdehnung durch Null. Genauer liefern der in 7.1.10 konstruierte Isomorphismus $j_{[!]} \overset{\sim}{\Rightarrow} j_!$ zwischen der Ausdehnung durch Null und dem Schreivorschub unter der Einbettung j einer offenen Teilmenge zusammen mit der in 4.9.12 konstruierten Adjunktion $(j_{[!]}, j^*)$ eine Isotransformation

$$j^! \overset{\sim}{\Rightarrow} j^*$$

zwischen dem Rechtsadjungierten des Schreivorschubs und dem gewöhnlichen Rückzug.

7.1.20 (**Schreirückzug unter lokal abgeschlossener Einbettung**). Aus unserer Adjunktion $(i_!, i^!)$ für abgeschlossene Einbettungen nach 7.1.16 zusammen mit der Adjunktion $(j_!, j^*)$ für offene Einbettungen nach 4.9.12 und dem Isomorphismus der Ausdehnung durch Null mit dem Schreivorschub $j_!$ nach 7.1.10 folgt unmittelbar, daß auch für jede Einbettung $b : Z \hookrightarrow X$ mit einer lokal abgeschlossenen Teilmenge $b(Z) \subset X$ als Bild der Schreivorschub $b_! : \mathrm{Ab}_{/Z} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ einen Rechtsadjungierten

$$b^! : \mathrm{Ab}_{/Z} \to \mathrm{Ab}_{/X}$$

hat. Wir nennen $b^!$ den **Schreirückzug**. Den zugehörigen Funktor auf opponierten Kategorien von Garben nennen wir ebenfalls den Schreirückzug und notieren ihn $b^!$. Dieser Funktor ist dann auch kategorisch ein Rückzug für $\mathrm{Ab}^!_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$. Im Fall der Einbettung b einer lokal abgeschlossenen Teilmenge $Z \subset X$ und einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ können wir $(b^! \mathcal{F})(W)$ für $W \Subset Z$ beschreiben als die Menge aller Schnitte $s : W \to \bar{\mathcal{F}}$, deren Fortsetzung durch Null auf eine und jede offene Teilmenge $V \Subset X$ mit $V \cap Z = W$ stetig ist.

7.1.21. Sei $b : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge. Die Werte der rechtsderivierten Funktoren $(\mathrm{R}^q b^!)\mathcal{F}$ des linksexakten Funktors $b^!$ auf einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ heißen die **lokalen Kohomologiegarben von $\mathcal{F}$ mit Träger in Z**.

Vorschau 7.1.22 (**Lokale Kohomologiegruppen und -garben**). Sei $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe. Die Beziehung der lokalen Kohomologiegarben zu den lokalen Kohomologiegruppen werden wir in 10.3.18 beschreiben durch eine E_2-Spektralsequenz $\mathrm{H}^q(C; \mathrm{R}^p i^! \mathcal{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^n_C(X; \mathcal{F})$.

Vorschau 7.1.23 (**Lokale Kohomologiegruppen und die sechs Funktoren**). Seien $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine abelsche Garbe. Im Rahmen der „sechs Funktoren“ in [TSF] 4.3.10 konstruieren wir noch genauer Isomorphismen $\mathcal{H}^n c_* i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_C(X;\mathcal{F})$ mit $c : C \to \mathrm{top}$ der konstanten Abbildung auf einen Punkt. Das benötigt jedoch den Formalismus der derivierten Kategorien und c_* und $i^!$ bedeuten dabei die totalen Linksderivierten derjenigen Funktoren, die wir bisher noch c_* und $i^!$ notieren und für die wir später die Bezeichnungen $c_{(*)}$ und $i^{(!)}$ vereinbaren werden.

7.1.24 (**Ausdehnungen von Einschränkungen**). Für $Z \subset X$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge erhalten wir aus dem vorhergehenden vier Funktoren von $\mathrm{Ab}_{/X}$ zu sich selber, die wir im folgenden der Reihe nach diskutieren. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und bezeichne $b : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung.

$b_* b^* \mathcal{F}$ hat meines Wissens keinen besonderen Namen. Sogar für $Z \subset X$ nicht notwendig lokal abgeschlossen lassen sich die Schnitte dieser Garbe über $U \Subset X$ offen beschreiben als $(b_* b^* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \cap Z)$ mit der Notation von 2.2.35 für Schnitte einer Garbe über beliebigen, nicht notwendig offenen Teilmengen rechts.

$b_! b^! \mathcal{F}$ hat keinen Namen, ist jedoch, was man a priori die „Garbe der Schnitte von $\mathcal{F}$ mit Träger in Z“ würde nennen wollen. Für jede offene Teilmenge $U \Subset X$ haben wir nämlich $(b_! b^! \mathcal{F})(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \operatorname{supp} s \subset Z\}$.

$b_* b^! \mathcal{F}$ heißt in der Literatur die „Garbe der Schnitte von $\mathcal{F}$ mit Träger in Z“ und wird in der Literatur $\Gamma_Z \mathcal{F} := b_* b^! \mathcal{F}$ notiert. Mir gefällt diese Terminologie nicht, da wie eben diskutiert $b_! b^! \mathcal{F}$ viel eher diese Bezeichnung verdient. Ich werde auch die Notation Γ_Z nicht in diesem Sinne verwenden, da sie bereits für die Gruppe der globalen Schnitte mit Träger in Z aus 4.4.4 im Fall einer abgeschlossenen Teilmenge $Z \Subset X$ vergeben ist.

$b_! b^* \mathcal{F}$ wird meist $\mathcal{F}_Z$ notiert, etwa bei [Bre97] oder [KS90]. Ich weiß nicht, wie diese Garbe in Worten genannt wird. Spaltenstein benutzt stattdessen die Notation $\mathcal{F}_{Z \subset X}$, die mir besser gefällt. Für $Z \Subset X$ abgeschlossen fällt diese Garbe mit $b_* b^* \mathcal{F}$ zusammen, für $Z \Subset X$ offen mit $b_! b^! \mathcal{F}$.

7.1.25 (**Einschränkungen von Ausdehnungen**). Bei einer Komposition in der anderen Richtung unserer Funktoren für eine lokal abgeschlossene Einbettung erhält man stets die ursprüngliche Garbe zurück. Genauer ist nach 4.3.29 für eine beliebige Einbettung b von topologischen Räumen die Koeinheit der Adjunktion eine Isotransformation $b^* b_* \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}$. Für die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge induziert sie offensichtlich eine Isotransformation $b^* b_! \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}$, die wir im Lichte von **??** als einen Spezialfall von les-Basiswechsel verstehen

können. Durch Übergang zu den Rechtsadjungierten erhalten wir daraus auch eine Isotransformation $\mathrm{id} \overset{\sim}{\Rightarrow} b^! b_*$. Schließlich ist für jede lokal abgeschlossene Einbettung b offensichtlich $b_!$ exakt und volltreu und $b^!$ linksexakt und die Einheit der Adjunktion folglich eine Isotransformation $\mathrm{id} \overset{\sim}{\Rightarrow} b^! b_!$.

Übungen

Übung 7.1.26. Gegeben ein kartesisches Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

mit abgeschlossenen Einbettungen in den Vertikalen liefert die Isotransformation $g_* q^* \overset{\sim}{\Rightarrow} p^* f_*$ des eigentlichen Basiswechsels für Mengengarben 6.4.6 eine Isotransformation auf den entsprechenden Funktoren für abelsche Garben und durch Übergang zu den Rechtsadjungierten eine Isotransformation $f^! p_* \overset{\sim}{\Rightarrow} q_* g^!$.

Übung 7.1.27. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer abgeschlossenen Teilmenge $C \not\subset X$ bezeichne $i : C \hookrightarrow X$ und $u : X \backslash C \hookrightarrow X$ die Einbettungen. Man zeige, daß für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ die Adjunktionsmorphismen eine linksexakte Sequenz

$$i_* i^! \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \to u_* u^* \mathcal{F}$$

liefern, die für welkes und insbesondere für injektives $\mathcal{F}$ exakt ist, ja stärker exakte Sequenzen von Schnitten über jeder offenen Teilmenge induziert.

Übung 7.1.28. Man zeige für die Einbettung b einer lokal abgeschlossenen Teilmenge, daß $b^!$ welke abelsche Garben zu welken abelschen Garben macht und daß welke abelsche Garben $b^!$-azyklisch sind. Hinweis: 4.1.6.

Übung 7.1.29. Für W, Z lokal abgeschlossene Teilmengen eines topologischen Raums X und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ konstruiere man einen Isomorphismus

$$(\mathcal{F}_W)_Z \overset{\sim}{\to} \mathcal{F}_{(W \cap Z)}$$

Einen derartigen Isomorphismus wird uns auch der étale separierte Basiswechsel **??** liefern. Die Chancen stehen gut, daß Sie bei der Bearbeitung der Übung genau diesen Isomorphismus angeben werden.

Übung 7.1.30 (**Unverträglichkeit von $i^!$ mit $K \otimes_k$**). Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die unendliche Vereinigung von vom Ursprung ausgehenden Strahlen

$$X := \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}_{\geq 0}(n, 1)^\top$$

der Steigungen $1/n$ und die Einbettung $i : \{0\} \hookrightarrow X$ der einelementigen Teilmenge, die nur aus dem Nullvektor besteht. Die lokale Kohomologie $\mathrm{H}^q_{\{0\}}(X;k)$ am Ursprung ist ein abzählbares Produkt von Kopien des Koeffizientenrings k für $q = 1$ und Null sonst. Unser Raum ist lokal singulär-azyklisch, also haben wir auch

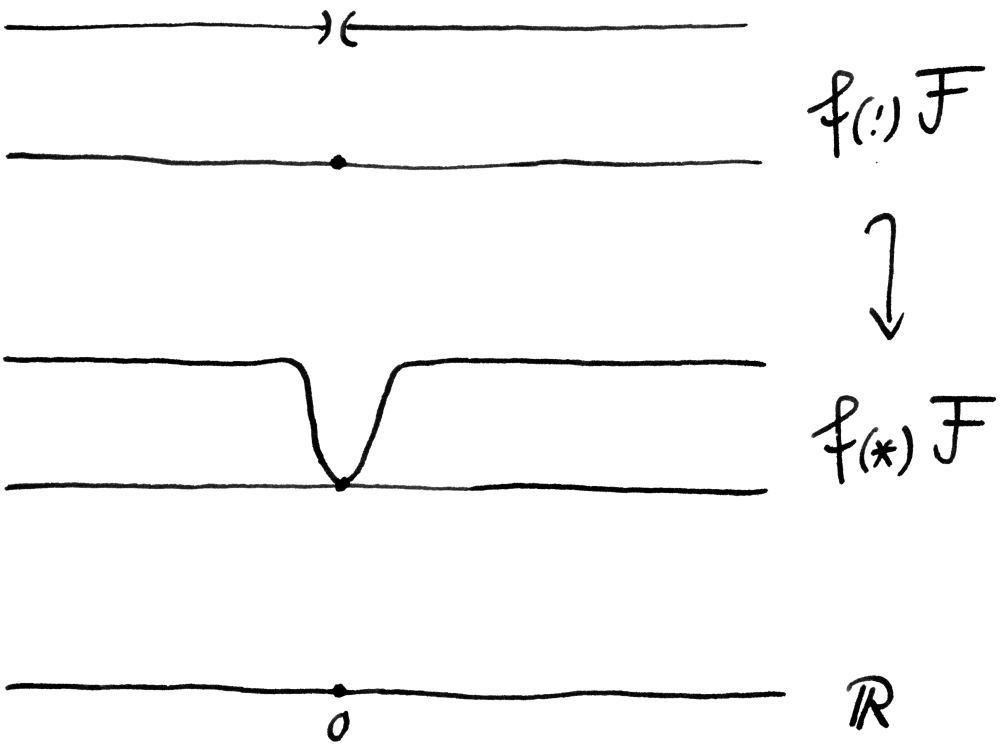
$$\mathrm{R}^q i^! k_X \cong \mathrm{H}^q_{\{0\}}(X;k)$$

für i die Einbettung des Ursprungs in X. Insbesondere ist $i^!$ im allgemeinen nicht verträglich mit der Erweiterung von Skalaren durch den Linksadjungierten zur Restriktion. Wir werden später zeigen, daß $i^!$ dahingegen verträglich ist mit der Erweiterung von Skalaren durch den Rechtsadjungierten zur Restriktion der Skalare.

Übung 7.1.31 (**Étaler Raum der Ausdehnung durch Null**). Ist $b : Z \hookrightarrow X$ eine lokal abgeschlossene Einbettung und $\mathcal{E}$ eine abelsche Garbe auf Z, so ist im étalen Raum $\mathrm{ét}(b_*\mathcal{E})$ der Bildgarbe die Vereinigung aller Halme über Punkten von $b(Z)$ mit dem Bild des Nullschnitts der étale Raum der Untergarbe $b_!\mathcal{E} \subset b_*\mathcal{E}$. Man kann umgekehrt zeigen, daß für $b : Z \hookrightarrow X$ eine beliebige Einbettung und $\mathcal{E}$ eine konstante nichttriviale Garbe auf Z der eben betrachtete Teilraum von $\mathrm{ét}(b_*\mathcal{E})$ genau dann étale ist über X, wenn b lokal abgeschlossen ist. Für mehr dazu vergleiche [God64].

Übung 7.1.32 (**Transformation $b^! \Rightarrow b^*$ in einem Spezialfall**). Für jede lokal abgeschlossene Einbettung b erhalten wir eine Transformation $b^! \Rightarrow b^*$, indem wir auf die durch die Adjunktionen gegebene Transformation $b_!b^! \Rightarrow \mathrm{id} \Rightarrow b_*b^*$ den Funktor b^* anwenden und unsere Isotransformationen $b^*b_! \overset{\sim}{\Rightarrow} b^*b_* \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}$ aus 7.1.25 benützen. Für jede offene Einbettung b ist diese Transformation unsere Isotransformation $b^! \overset{\sim}{\Rightarrow} b^*$ aus 7.1.20 und für die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge ist es der offensichtliche durch die Beschreibung von $b^!$ in 7.1.20 gegebene injektive Garbenhomomorphismus.

Übung 7.1.33 (**Rückzug eigentlicher Opkomorphismen**). Gegeben sei über einem kartesischen Diagramm $fq = pg$ von topologischen Räumen ein Diagramm von abelschen Garben und Opkomorphismen $\bar{f}\bar{q} = \bar{p}\bar{g}$. Man zeige: Sind die Horizontalen $\bar{p}, \bar{q}$ kartesisch und ist $\bar{f}$ eigentlich, so ist auch $\bar{g}$ eigentlich. Hinweis: Man gehe aus von einem eigentlichen Komorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ über f. Es gilt zu zeigen, daß der induzierte Komorphismus $p^*\mathcal{G} \to q^*\mathcal{F}$ über g alias der davon induzierte Garbenhomomorphismus $p^*\mathcal{G} \to g_*q^*\mathcal{F}$ faktorisiert über $g_!q^*\mathcal{F}$. Dazu reicht es zu zeigen, daß $p^*\mathcal{G}$ als abelsche Garbe erzeugt wird von Schnitten, die in $g_!q^*\mathcal{F}$ landen. Schließlich überlegt man sich, daß die von Schnitten von $\mathcal{G}$ zurückgeholten Schnitte von $p^*\mathcal{G}$ die abelsche Garbe $p^*\mathcal{G}$ erzeugen und in $g_!q^*\mathcal{F}$ landen.



Die Ausdehnung durch Null und das direkte Bild der konstanten Garbe $\mathcal{F}$ mit Halm $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ unter der offenen Einbettung $u : \mathbb{R}^\times \hookrightarrow \mathbb{R}$. Dargestellt sind zwei Räume, bei denen die Garbe der stetigen Schnitte der offensichtlichen vertikalen Projektion auf die waagerechte Gerade gerade $u_!\mathcal{F}$ beziehungsweise $u_*\mathcal{F}$ sind. Im ersten Fall ist diese vertikale Projektion étale und wir sehen den étalen Raum der Ausdehnung durch Null. Im zweiten Fall ist die vertikale Projektion jedoch nicht étale, der étale Raum des direkten Bildes ist eben nicht Hausdorff und deshalb schwer graphisch darzustellen. Man erkennt jedoch gut, daß der Halm am Ursprung der Garbe $u_*\mathcal{F}$ aus genau vier Elementen besteht: Kommt von unten bleibt unten, kommt von oben bleibt unten, kommt von unten geht nach oben, kommt von oben geht wieder nach oben.

7.2 Lokal eigentliche Abbildungen

Definition 7.2.1. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume heiße **lokal eigentlich**, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x Umgebungen $A \subset U$ von x und $V \subset Y$ von $f(x)$ gibt derart, daß gilt $f(A) \subset V$ und daß $f : A \to V$ eigentlich ist.

7.2.2. Diese Allgemeinheit geht in Richtung von Grothendieck's Desiderata nach [**?**, 1.5.2, Note 81_2]. In [**?**] wird das Konzept einer lokal eigentlichen Abbildung unter einer anderen Bezeichnung eingeführt.

Vorschau 7.2.3. Sie dürfen als Übung 7.2.18 zeigen, daß jede Verknüpfung von lokal eigentlichen Abbildungen lokal eigentlich ist.

Beispiele 7.2.4. Eine Einbettung $i : X \hookrightarrow Y$ von topologischen Räumen ist lokal eigentlich genau dann, wenn ihr Bild lokal abgeschlossen ist. Jede étale Abbildung ist lokal eigentlich. Die konstante Abbildung von einem Raum auf einen Punkt ist lokal eigentlich genau dann, wenn der fragliche Raum lokal kompakt ist.

Lemma 7.2.5. *Jede eigentliche und separierte Abbildung ist lokal eigentlich.*

7.2.6. Das ist das relative Analogon der Tatsache, daß jeder kompakte Hausdorffraum lokal kompakt ist. Eine beliebige eigentliche Abbildung muß keineswegs lokal eigentlich sein, selbst wenn sie konstant ist.

7.2.7. Wir schicken dem Beweis eine Vorbemerkung voraus. Sei $f : X \to Y$ stetig. Gegeben $Z \subset X$ mit $f : Z \to Y$ eigentlich und $U \Subset X$ ist $\{y \in Y \mid (f^{-1}(y) \cap Z) \subset U\}$ offen in Y, denn für $K \Subset X$ das Komplement von U ist das Komplement unserer Menge genau $f(Z \cap K)$.

Beweis. Sei $f : X \to Y$ unsere eigentliche und separierte Abbildung. Gegeben $x \in X$ mit einer offenen Umgebung $U \Subset X$ betrachten wir $Z := X \backslash U$. Wir setzen $y := f(x)$. Für jeden Punkt $z \in f^{-1}(y) \cap Z$ gibt es eine offene Umgebung $W_z \Subset X$ von z und eine offene Umgebung $B_z \Subset U$ von x mit $W_z \cap B_z = \emptyset$. Endlich viele solche W_z überdecken das Kompaktum $f^{-1}(y) \cap Z$. Ist W ihre Vereinigung und B der Schnitt der zugehörigen B_z, so gilt $x \in B \Subset U \Subset X$, $(f^{-1}(y) \cap Z) \subset W \Subset X$ und $B \cap W = \emptyset$. Nach 7.2.7 finden wir eine offene Umgebung $V \Subset Y$ von y mit $(f^{-1}(V) \cap Z) \subset W$. Der Abschluß A von $B \cap f^{-1}(V)$ in $f^{-1}(V)$ trifft also $f^{-1}(V) \cap Z$ nicht und ist folglich eine in U enthaltene Umgebung von x derart, daß $f : A \to V$ eigentlich ist. $\square$

Lemma 7.2.8. *Seien $g\colon Z \to X$ und $f\colon X \to Y$ stetig. Ist $f \circ g$ lokal eigentlich und f separiert, so ist bereits g lokal eigentlich.*

Beweis. Sei $W \subset Z$ eine Umgebung von $z \in Z$. Ist $f \circ g$ lokal eigentlich, so gibt es Umgebungen $A \subset W$ von z und V von $f(g(z))$ derart, daß $f \circ g$ eine eigentliche Abbildung $A \to V$ induziert. Diese Abbildung faktorisiert als

$$A \xrightarrow{\breve{g}} f^{-1}(V) \xrightarrow{\breve{f}} V$$

mit $\breve{g}$ und $\breve{f}$ jeweils den von g und f induzierten Abbildungen. Da $\breve{f}$ nach [TM] 1.2.4.10 separiert ist, zeigt [TM] 1.2.4.11, daß $\breve{g}\colon A \to f^{-1}(V)$ eigentlich ist. Das zeigt, daß g lokal eigentlich ist. □

7.2.9. Im folgenden werden lokal eigentliche separierte Abbildungen oft vorkommen. Wir nennen sie abkürzend **les-Abbildungen** oder als Eigenschaft **les**.

Korollar 7.2.10. *Jede stetige Abbildung $g\colon Z \to X$ von einem lokal kompakten Hausdorffraum Z in einen Hausdorffraum X ist eine les-Abbildung.*

Beweis. Da Z lokal kompakt ist und X Hausdorff, muß g lokal eigentlich sein nach 7.2.8. Da Z Hausdorff ist, ist g separiert. □

Lemma 7.2.11 (Lokale Eigentlichkeit ist stabil unter Basiswechsel). *Ist in einem kartesischen Diagramm einer der ursprünglichen Pfeile lokal eigentlich, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.*

Beweis. Wir schreiben unser kartesisches Diagramm aus als

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

Wir nehmen f lokal eigentlich an und wollen dasselbe für g zeigen. Sei also $t \in T$ gegeben mit einer Umgebung $S \subset T$. Wir können, indem wir S notfalls verkleinern, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es eine Umgebung $V \subset X$ von $q(t)$ und eine Umgebung $W \subset Z$ von $g(t)$ gibt derart, daß gilt $g(S) \subset W$ und $q(S) \subset V$ und daß auch das Diagramm von Teilräumen

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

kartesisch ist. Dann finden wir eine Umgebung $A \subset V$ von $q(t)$ und eine Umgebung $U \subset Y$ von $f(q(t))$ derart, daß $f : A \to U$ eigentlich ist. Dasselbe folgt für den durch Basiswechsel entstehenden Morphismus $g : q^{-1}(A) \to p^{-1}(U)$. □

Satz 7.2.12 (**Vereigentlichung**). *Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ gilt:*

1. *Die Mengen $U \sqcup V$ mit $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ und $f : f^{-1}(V)\backslash U \to V$ eigentlich bilden eine Topologie auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$;*

2. *Die Abbildung $\bar{f} := (f, \mathrm{id}_Y) : X \sqcup Y \to Y$ ist eigentlich in Bezug auf diese Topologie.*

7.2.13. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ notieren wir $X \sqcup Y$ mit seiner Topologie aus dem Satz $X \vec{\sqcup}_f Y$ oder abkürzend

$$X \vec{\sqcup} Y$$

und nennen $\bar{f} : X \vec{\sqcup} Y \to Y$ die **Vereigentlichung von** f. Ist Y ein Punkt, so spezialisiert unsere Vereigentlichung zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Ist f eine abgeschlossene Einbettung, so spezialisiert unsere Vereigentlichung zum Koprodukt $X \sqcup Y$ der beteiligten Räume. Offensichtlich ist die Einbettung von X nach $X \vec{\sqcup} Y$ eine offene Einbettung und die Einbettung von Y nach $X \vec{\sqcup} Y$ eine abgeschlossene Einbettung.

Beweis. 1. Sei eine Familie $(U_i \sqcup V_i)_{i \in I}$ solcher Mengen gegeben. So ist $U := \bigcup U_i$ offen in X und $f : f^{-1}(V_i)\backslash U \to V_i$ ist eigentlich als Verknüpfung der abgeschlossenen Einbettung $f^{-1}(V_i)\backslash U \to f^{-1}(V_i)\backslash U_i$ mit der eigentlichen Abbildung $f : f^{-1}(V_i)\backslash U_i \to V_i$. Da Eigentlichkeit lokal ist in der Basis, ist dann für $V := \bigcup V_i$ auch $f : f^{-1}(V)\backslash U \to V$ eigentlich. Seien andererseits $(U_1 \sqcup V_1)$ und $(U_2 \sqcup V_2)$ gegeben. Mit $f^{-1}(V_1)\backslash U_1 \to V_1$ ist auch $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2)\backslash U_1 \to V_1 \cap V_2$ eigentlich als Basiswechsel einer eigentlichen Abbildung. Dasselbe gilt für $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2)\backslash U_2 \to V_1 \cap V_2$ und mit [TM] 1.2.4.18 folgt die Eigentlichkeit von $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2)\backslash(U_1 \cap U_2) \to V_1 \cap V_2$.

2. Offensichtlich ist $\bar{f} := (f, \mathrm{id}_Y) : X \vec{\sqcup}_f Y \to Y$ stetig. Diese Abbildung ist sogar abgeschlossen, denn wir haben

$$\bar{f}(X \vec{\sqcup} Y\backslash U \vec{\sqcup} V) = Y\backslash V \cup f(X\backslash U) = Y\backslash V \cup f(f^{-1}(V)\backslash U)$$

Gegeben ein weiterer topologischer Raum Z zeigen wir nun, daß die offensichtliche Bijektion eine stetige Abbildung

$$(X \times Z) \vec{\sqcup} (Y \times Z) \to (X \vec{\sqcup} Y) \times Z$$

ist. In der Tat, gegeben $U \sqcup V \Subset X \vec{\sqcup} Y$ und $W \Subset Z$ gilt es zu zeigen $(f \times \mathrm{id}_Z) : f^{-1}(V \times W)\backslash(U \times W) \to V \times W$ eigentlich. Das aber folgt aus der Eigentlichkeit von $f : f^{-1}(V)\backslash U \to V$ durch Basiswechsel. Um nun zu zeigen, daß $\bar{f}$ eigentlich ist, betrachten wir für einen weiteren Raum Z die Komposition

$$(X \vec{\sqcup} Y) \times Z \to (X \times Z) \vec{\sqcup} (Y \times Z) \to Y \times Z$$

und müssen nur bemerken, daß die erste dieser Abbildungen abgeschlossen ist als Inverse unserer stetigen Bijektion, die wir gerade hergeleitet hatten, und daß die zweite abgeschlossen ist nach unserer Vorüberlegung vom Beginn des Beweises des zweiten Teils. $\square$

Satz 7.2.14. *Die Vereigentlichung einer les-Abbildung ist stets separiert.*

7.2.15. Das ist ein relatives Analogon der Tatsache, daß die Einpunktkompaktifizierung eines lokal kompakten Hausdorffraums stets Hausdorff ist.

Beweis. Sei $f : X \to Y$ unsere les-Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß $\bar{f} : X \vec{\sqcup} Y \to Y$ separiert ist, daß also je zwei verschiedene Punkte aus ein- und derselben Faser disjunkte Umgebungen haben. Der einzig nichttriviale Fall betrifft Punkte $\mathrm{in}_X(x), \mathrm{in}_Y(y)$ mit $f(x) = y$. Nach Annahme gibt es eine offene Umgebung $V \Subset Y$ von y und eine Umgebung $A \subset X$ von x mit $f(A) \subset V$ und $f : A \to V$ eigentlich. Dann ist die Verknüpfung $A \to f^{-1}(V) \to V$ eigentlich. Da $f^{-1}(V) \to V$ separiert ist, muß auch $A \to f^{-1}(V)$ eigentlich sein und wir finden $A \Subset f^{-1}(V)$. Bilden wir also $U := f^{-1}(V) \backslash A$, so ist $U \sqcup V$ eine Umgebung von $\mathrm{in}_Y(y)$ in $X \vec{\sqcup} Y$ und disjunkt zur Umgebung $\mathrm{in}_X(A)$ von $\mathrm{in}_X(x)$. $\square$

Korollar 7.2.16. *Eine stetige Abbildung ist lokal eigentlich separiert genau dann, wenn sie sich als offene Einbettung gefolgt von einer separierten eigentlichen Abbildung schreiben läßt.*

Beweis. Ist $f : X \to Y$ les, so ist $X \to X \vec{\sqcup} Y \to Y$ nach 7.2.12 und 7.2.14 eine Faktorisierung der gesuchten Art. Gegeben eine Faktorisierung $f = g \circ u$ der behaupteten Art ist f lokal eigentlich als Verknüpfung lokal eigentlicher Abbildungen nach Übung 7.2.18, da u als offene Einbettung nach 7.2.4 und g als separierte eigentliche Abbildung nach 7.2.5 beide lokal eigentlich sind. Weiter sind sie beide separiert, also nach Übung [TM] 1.2.4.26 auch ihre Verknüpfung. $\square$

Übungen

Übung 7.2.17. Sei $f : X \to Y$ stetig. Besitzt X eine Überdeckung durch offene Teilmengen U derart, daß die Restriktionen $f : U \to Y$ jeweils lokal eigentlich sind, so ist auch f selbst lokal eigentlich.

Übung 7.2.18. Jede Verknüpfung von lokal eigentlichen Abbildungen ist lokal eigentlich.

7.3 Lokal eigentlicher separierter Basiswechsel

Satz 7.3.1 (Les-Basiswechsel). *Seien $pg = fq$ ein kartesisches Quadrat von topologischen Räumen mit les-Vertikalen f, g und $\bar{p}\bar{g} = \bar{f}\bar{q}$ darüber ein kommutatives*

Diagramm von Opkomorphismen abelscher Garben mit $\bar{p}, \bar{q}$ kartesisch. Ist dann $\bar{f}$ schreikokartesisch, so auch $\bar{g}$.

7.3.2. In anderen Worten besagt dieser Satz, daß die vom Basiswechsel 6.3.12 der Garbenopfaserung für Funktoren zwischen nichtopponierten Kategorien von Garben induzierte Transformation $p^*f_* \Rightarrow g_*q^*$ unter den genannten Voraussetzungen Isomorphismen $p^*f_!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} g_!q^*\mathcal{F}$ auf den jeweiligen Unterobjekten induziert, also eine Isotransformation

$$p^*f_! \overset{\sim}{\Rightarrow} g_!q^*$$

7.3.3 (**Eigentlicher und étaler Basiswechsel als Spezialfall**). Sind speziell f, g eigentlich separiert, so haben wir $f_! = f_*$ und $g_! = g_*$ und erhalten als Spezialfall den eigentlichen Basiswechsel $p^*f_* \overset{\sim}{\Rightarrow} g_*q^*$ aus 6.4.6. Sind speziell f, g offene Einbettungen oder allgemeiner étale separiert, so werden wir gleich in 7.3.5 Adjunktionen $(f_!, f^*)$ sowie $(g_!, g^*)$ konstruieren und Übergang zu den Rechtsadjungierten macht dann auch unserem lokal eigentlichen Basiswechsel den étalen Basiswechsel $f^*p_* \overset{\sim}{\Rightarrow} q_*g^*$ aus 6.4.5, notiert mit vertauschten Buchstaben und spezialisiert auf den Fall des Rückzugs unter separierten étalen Abbildungen.

Beweis. Nach 7.2.16 ist eine stetige Abbildung genau dann les, wenn sie sich als Verknüpfung einer offenen Einbettung gefolgt von einer separierten eigentlichen Abbildung schreiben läßt. Weil über separierten Abbildungen die Verknüpfung schreikokartesischer Opkomorphismen nach **??** wieder schreikokartesisch ist und es stets Schreivorschübe gibt, reicht es also, unsere Aussage für f separiert eigentlich und für f eine offene Einbettung zu zeigen. Im ersten Fall ist das eigentlicher Basiswechsel 6.4.6. Im zweiten Fall offenen Einbettung ist der Schreivorschub nach 7.1.10 die Ausdehnung durch Null und damit ist die Behauptung auch schnell geprüft. □

7.3.4. Ist $f : X \to Y$ eine les-Abbildung und $p : Z \to Y$ eine beliebige Abbildung und gilt $f(X) \cap p(Z) = \emptyset$, so erhalten wir $X \times_Y Z = \emptyset$ und $p^*f_! = 0$. Wir sprechen dann vom **Verschwinden durch leeren Basiswechsel**.

Satz 7.3.5 (Étale Verdierdualität). *Gegeben $f : X \to Y$ separiert étale ist der Schreivorschub $f_! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ exakt und es gibt genau eine Adjunktion $(f_!, f^*)$, deren Koeinheit $f_!f^*\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ unter Restriktion auf eine beliebige Faser und les-Basiswechsel 7.3.1 der Summation $\bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} \mathcal{G}_y \to \mathcal{G}_y$ entspricht.*

Beweis. Mit les-Basiswechsel 7.3.1 erhalten wir für alle $y \in Y$ einen Isomorphismus $\bigoplus_{f(x)=y} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} (f_!\mathcal{F})_y$. Das zeigt, daß $f_!$ exakt ist und mit beliebigen Koprodukten vertauscht. Das Vertauschen von $f_!$ mit Koprodukten zeigen wir im

übrigen in 7.4.4 sogar für beliebige les-Abbildungen. Gegeben eine separierte étale Abbildung $f : X \to Y$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ konstruieren wir nun eine Bijektion

$$\mathrm{Ab}_{/Y}(f_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Jeder Morphismus $\varphi : f_!\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ liefert ja mit étalem separierten Basiswechsel Gruppenhomomorphismen $\mathcal{F}_x \to (f_!\mathcal{F})_{f(x)} \to \mathcal{G}_{f(x)}$. Wir zeigen nun, daß diese in ihrer Gesamtheit eine stetige Abbildung $\bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ alias einen Morphismus in $\mathrm{Ab}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ liefern und daß wir so die gewünschte Bijektion erhalten. Die Gesamtheit der abelschen Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$, für die das stimmt, ist stabil unter beliebigen Koprodukten und unter Kokernen, da unser Schreivorschub $f_!$ mit beliebigen direkten Summen vertauscht und exakt ist. Ist $j : U \hookrightarrow X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge derart, daß $fj : U \to Y$ immer noch eine offene Einbettung ist, so gehört $\mathcal{F} = j_!\mathbb{Z}_U$ offensichtlich zu unserer Gesamtheit. Damit ist aber klar, daß unsere Gesamtheit ganz $\mathrm{Ab}_{/X}$ sein muß. □

7.3.6 (**Rückwärtskompatibilitäten im Fall offener Einbettungen**). Gegeben eine offene Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ hatten wir in 7.1.10 eine Isotransformation $j_{[!]} \xRightarrow{\sim} j_!$ zwischen der Ausdehnung durch Null und dem Schreivorschub konstruiert. In 4.9.12 hatten wir eine Adjunktion $(j_{[!]}, j^*)$ angegeben und in Satz 7.3.5 haben wir nun zusätzlich eine Adjunktion $(j_!, j^*)$ konstruiert. Der Leser wird leicht prüfen können, daß sich diese beiden Adjunktionen unter unserer Isotransformation entsprechen, daß also die in 7.1.19 angegebene Isotransformation $j^! \xRightarrow{\sim} j^*$ mit der aus unserem Satz entstehenden Isotransformation $j^! \xRightarrow{\sim} j^*$ zusammenfällt.

7.3.7 (**Etaler separierter Schreivorschub konstanter abelscher Garben**). In 6.4.7 hatten wir bereits für beliebige étale Abbildungen $f : X \to Y$ die Existenz eines Linksadjungierten $f_{[!]} : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/Y}$ des Rückzugs $f^* : \mathrm{Ab}_{/Y} \to \mathrm{Ab}_{/X}$ gezeigt und für die freie abelsche Garbe $\mathbb{Z}\mathcal{F}$ über einer Mengengarbe $\mathcal{F}$ einen Isomorphismus

$$f_{[!]}(\mathbb{Z}\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}(f_{!!}\mathcal{F})$$

hergeleitet für $f_{!!}\mathcal{F}$ diejenige Mengengarbe auf Y, deren étaler Raum der étale Raum von $\mathcal{F}$ ist, aufgefaßt als étaler Raum über Y durch Nachschalten von f. Ist nun zusätzlich f separiert, so liefert der Satz zur Verdierdualität 7.3.5 auch eine Adjunktion $(f_!, f^*)$ und zusammen erhalten wir eine Isotransformation

$$f_{[!]} \xRightarrow{\sim} f_!$$

Im Fall offener Einbettungen spezialisiert sie zur Identifikation 7.1.10 von Schreivorschub und Ausdehnung durch Null. Im allgemeinen erhalten wir daraus für $f : X \to Y$ étale separiert in $\mathrm{Ab}_{/Y}$ einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}(\mathcal{S}_Y X) \xrightarrow{\sim} f_!\mathbb{Z}_X$$

zwischen der freien abelschen Garbe über der Mengengarbe mit étalem Raum X und dem Schreivorschub der konstanten abelschen Garbe $\mathbb{Z}_X$ auf X. Analoges gilt für beliebige konstante Garben auf X und wird sich mit der derivierten Projektionsformel [TSF] 2.5.8 der verflochteten Trennaustauschsituation der Modulgarben [TSF] 4.6.3 formal als Konsequenz aus unserer Formel im Fall der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ zusammen mit der Flachheit von $\pi_!\mathbb{Z}_X$ ergeben. Einfacher mag man den allgemeinen Fall als Konsequenz aus unserer Formel im Fall der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ erhalten, indem man bei torsionsfreiem Halm die „underivierte Projektionsformel" [TSF] 2.2.10 anwendet und im allgemeinen zusätzlich die Exaktheit von $f_!$ beachtet.

7.3.8 (**Rückwärtskompatibilität von Identifikationen**). Die Identifikationen der Garbenfaserung $f^* \circ g^* \tilde{\Rightarrow} (g \circ f)^*$ und $\mathrm{id} \tilde{\Rightarrow} \mathrm{id}_X^*$ induzieren vermittels der Adjunktionen der étalen Verdierdualität 7.3.5 für f, g étale separiert Isotransformationen $g_! \circ f_! \tilde{\Rightarrow} (g \circ f)_!$ und $\mathrm{id} \tilde{\Rightarrow} \mathrm{id}_{X!}$. Der Leser mag prüfen, daß sie mit den Identifikationen der Garbenschreikofaserung zusammenfallen.

7.3.9 (**Schreivorschub von Modulgarben**). Gegeben ein Morphismus von geringten Räumen $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ nennen wir einen Komorphismus von Modulgarben **eigentlich**, wenn der zugrundeliegende Komorphismus von abelschen Garben eigentlich ist im Sinne von 7.1.1. Nach 7.1.3 ist über einem topologisch eigentlichen Morphismus jeder Komorphismus von Modulgarben eigentlich. Nach 7.1.4 ist die Verknüpfung eigentlicher Komorphismen von Modulgarben stets wieder eigentlich. Wir notieren die Menge aller eigentlichen Opkomorphismen alias Schreimorphismen von Modulgarben über einem Morphismus f von geringten Räumen wie im Fall abelscher Garben $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/ f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Die Konstruktion schreikokartesischer Schreimorphismen **??** liefert offensichtlich auch einen Schreivorschub für Modulgarben und in Verallgemeinerung von **??** restringiert unser Funktor $\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/ \mathrm{Ger}} \to \mathrm{Ger}$ zu einer Kofaserung

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{i}}_{/\!/ \mathrm{Ger}^{\mathrm{s}}} \to \mathrm{Ger}^{\mathrm{s}}$$

über der Kategorie $\mathrm{Ger}^{\mathrm{s}} \subset \mathrm{Ger}$ der geringten Räume mit topologisch separierten Morphismen. Wir nennen sie die **Schreikofaserung der Modulgarben**. Ihre Vorschübe sind unsere Schreivorschübe $f_{¡} = (f_!)^{\mathrm{opp}}$ aus **??**. Im Fall einer offenen Einbettung j ist $j_!$ die Ausdehnung durch Null von Modulgarben.

Übungen

Übung 7.3.10 (**Spur gewisser Schreivorschübe**). Gegeben $f : X \to Y$ stetig und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$ eine abelsche Garbe liefert die Einheit der Adjunktion (f^*, f_*) einen Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \to f_* f^* \mathcal{G}$. Ist f zusätzlich étale und separiert, so liefert die Koeinheit der Adjunktion $(f_!, f^*)$ aus der étalen Verdierdualität 7.3.5

einen Garbenhomomorphismus $f_! f^* \mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Ist f zusätzlich auch noch eigentlich, so ist die natürliche Einbettung aus **??** eine Isotransformation $f_! \overset{\sim}{\Rightarrow} f_*$ und ihre Inverse liefert zusammen mit den obigen Konstruktionen einen Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{G} \to f_* f^* \mathcal{G} \overset{\sim}{\to} f_! f^* \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

Man zeige, daß dieser Garbenhomomorphismus das Produkt mit der Kardinalität der Faser von f ist, in Formeln also das Produkt mit der lokal konstanten Funktion $y \mapsto |f^{-1}(y)|$ von Y nach $\mathbb{Z}$. Hinweis: Man ziehe sich mit Basiswechseln auf den Fall zurück, daß Y nur aus einem einzigen Punkt besteht. Allgemein nennt man im Fall eines Paars von Funktoren, für das sowohl eine Adjunktion (F, G) als auch eine Adjunktion (G, F) gegeben sind, die Verknüpfungen $\mathrm{Id} \Rightarrow FG \Rightarrow \mathrm{Id}$ und $\mathrm{Id} \Rightarrow GF \Rightarrow \mathrm{Id}$ der Einheit der einen Adjunktion mit der Koeinheit der anderen **Spurmorphismen**. In unserem Fall ist der zweite Spurmorphismus die Identität $\mathcal{F} \to f^* f_! \mathcal{F} \overset{\sim}{\to} f^* f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

7.4 Kompakte Schnitte und Kolimites

Lemma 7.4.1 (**Filtrierende Kolimites und kompakte Schnitte**). *Das Bilden der Schnitte mit kompaktem Träger für abelsche Garben auf einem lokal kompakten Hausdorffraum vertauscht mit filtrierenden Kolimites von abelschen Garben, in Formeln*

$$\operatorname{colf}(\Gamma_! \mathcal{F}_i) \overset{\sim}{\to} \Gamma_! (\operatorname{colf} \mathcal{F}_i)$$

Beispiel 7.4.2. Gegeben $K \subset X$ kompakt notieren wir $\Gamma_K(X; \mathcal{F})$ die Menge der globalen Schnitte $s \in \Gamma(X; \mathcal{F})$ mit Träger $\operatorname{supp}(s) \subset K$. Der Funktor Γ_K vertauscht auch auf lokal kompakten Hausdorffräumen keineswegs mit filtrierenden Kolimites. Als Gegenbeispiel mag man den direkten Limes der $a_{i*}\mathbb{Z}_{[0,1/i]}$ betrachten für $a_i : [0, 1/i] \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Einbettungen und die offensichtlichen Epimorphismen von abelschen Garben als Systemmorphismen dieses mit $i \in \mathbb{N}_{>0}$ indizierten Systems.

Beispiel 7.4.3. Ist X ein unendlicher diskreter Raum, so ist der Raum der globalen Schnitte des Koprodukts aller Wolkenkratzergarben $\mathbb{Z}_{(x)}$ für $x \in X$ größer als das Koprodukt der Räume der globalen Schnitte der Summanden und ist vielmehr ihr Produkt. Der Funktor der globalen Schnitte vertauscht mithin auch auf lokal kompakten Hausdorffräumen keineswegs mit filtrierenden Kolimites.

Beweis. Die Injektivität benötigt keinerlei Annahmen und war auch bereits Übung [TG] 4.8.22. Wir führen das Argument nocheinmal aus. Sicher ist der Kolimes eines Systems von abelschen Garben die Garbifizierung des Kolimes in der Kategorie der abelschen Prägarben. Um im Lemma die Injektivität zu zeigen, beginnen wir mit einem Schnitt $s \in \Gamma_!(X; \mathcal{F}_i)$ für ein vorgegebenes $i \in I$. Geht

er rechts nach Null, so gibt es für jeden Punkt $x \in X$ nach der Transitivität von Kolimites [TS] 3.7.1.36 eine offene Umgebung $U(x)$ und einen Index $i(x)$ mit $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}_{i(x)}(U(x))$. Endlich viele $U(x)$ überdecken $\operatorname{supp}(s)$, ein i wird erreicht von allen beteiligten $i(x)$, und dann gilt offensichtlich $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}_i(X)$. Das zeigt die Injektivität. Um die Surjektivität zu zeigen, ziehen wir uns zunächst auf den Fall X kompakt zurück. Sei dazu ein Schnitt $s \in \Gamma_!(X; \operatorname{colf} \mathcal{F}_i)$ gegeben. Wir finden $U \subset X$ offen mit kompaktem Abschluß und $\operatorname{supp}(s) \subset U$. Finden wir ein j und ein $\tilde{s} \in \Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}_j)$ mit $\tilde{s} \mapsto s|\bar{U}$, so folgt unmittelbar $\tilde{s}|\partial\bar{U} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial\bar{U}; \operatorname{colf} \mathcal{F}_i)$ und nach dem bereits bewiesenen $\tilde{s}|\partial\bar{U} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial\bar{U}; \mathcal{F}_l)$ für geeignetes $l \geq j$. Also läßt sich das Bild $\hat{s} \in \Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}_l)$ von $\tilde{s}$ durch Null fortsetzen zu einem Schnitt $\hat{s} \in \Gamma_!(X; \mathcal{F}_l)$ mit $\hat{s} \mapsto s$, und das war gerade zu zeigen. Wir dürfen also X kompakt annehmen. Gegeben ein Schnitt $s \in \Gamma(X; \operatorname{colf} \mathcal{F}_i)$ gibt es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$ und einen Index $i(x)$ und einen Schnitt $\tilde{s}(x) \in \mathcal{F}_{i(x)}(U(x))$ mit $s(x) \mapsto s|U(x)$. Wir dürfen unsere $U(x)$ kompakt annehmen. Weiter gibt es $E \subset X$ endlich derart, daß die $U(x)$ mit $x \in E$ bereits X überdecken. Wählen wir j hinreichend groß, so können wir nach der bereits bewiesenen Injektivität annehmen, daß für alle $x, y \in E$ die Bilder von $\tilde{s}(x)$ und $\tilde{s}(y)$ in $\mathcal{F}_j(U(x) \cap U(y))$ übereinstimmen. Dann aber verkleben sie zu einem globalen Schnitt und der repräsentiert das gesuchte Urbild unseres Schnittes s. □

Lemma 7.4.4. *Der Schreivorschub von abelschen Garben unter les-Abbildungen und allgemeiner von Modulgarben unter les-Morphismen vertauscht mit filtrierenden Kolimites.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ les. Wir behaupten, daß für jedes gerichtete System von abelschen Garben auf Y die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\operatorname{colf}(f_! \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} f_! (\operatorname{colf} \mathcal{F}_i)$$

liefert. Da das Zurückholen mit Kolimites vertauscht, können wir uns mit Basiswechsel 7.3.1 auf den Fall eines einpunktigen Raums Y zurückziehen und müssen also nur für jeden lokal kompakten Hausdorffraum zeigen, daß das Bilden der Schnitte mit kompaktem Träger mit filtrierenden Kolimites vertauscht. Das aber wissen wir aus 7.4.1. Der Fall der Modulgarben folgt, da das Vergessen der Modulstrukturen mit Kolimites und Schreivorschub vertauscht. □

7.4.5 (**Koprodukt als Schreivorschub**). Ist X ein topologischer Raum und $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathrm{Ab}_{/X}$ und versehen wir die Indexmenge I mit der diskreten Topologie und sind $\mathrm{em}_i : X \to X \times I$ die Einbettungen und ist ein Objekt $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/X \times I}$ gegeben zusammen mit Isomorphismen $\mathrm{em}_i^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$, so liefern diese Isomorphismen zusammen nach [TG] 4.9.25 einen Isomorphismus

$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{em}_{i!}\,\mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ und der Schreivorschub unter der Projektion auf X liefert nach 7.4.4 einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_{X!}\,\mathcal{G}$$

Dasselbe gilt für Modulgarben auf einem geringten Raum $X = (X, \mathcal{A})$.

Lemma 7.4.6 (**Filtrierende Kolimites kompaktweicher Garben**). *Auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X ist jeder filtrierende Kolimes kompaktweicher Garben wieder kompaktweich.*

Beweis. Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ ein filtrierendes System kompaktweicher Garben auf X. Kolimites vertauschen nach [TS] 3.7.1.31 mit dem Rückzug von Garben, da dieser Rückzug einen Rechtsadjungierten hat. Ist $u : K \hookrightarrow X$ die Einbettung einer kompakten Teilmenge, so ist mithin der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus $\mathrm{colf}\, u^{(*)}\mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} u^{(*)}\,\mathrm{colf}\,\mathcal{F}_i$ und 7.4.1 liefert uns einen Isomorphismus

$$\mathrm{colf}\,\Gamma(K;\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \Gamma(K;\mathrm{colf}\,\mathcal{F}_i)$$

Jeder Schnitt t rechts ist also das Bild eines Schnitts $s \in \Gamma(K;\mathcal{F}_i)$ für ein $i \in I$. Da $\mathcal{F}_i$ kompaktweich ist, muß er von einem globalen Schnitt $\tilde{s} \in \Gamma(X;\mathcal{F}_i)$ herkommen, und dieser globale Schnitt $\tilde{s}$ hinwiederum liefert einen globalen Schnitt $\tilde{t} \in \Gamma(X;\mathrm{colf}\,\mathcal{F}_i)$, der unser t fortsetzt. $\square$

8 Äquivariante Theorie

In meinen Augen ist die Erweiterung der Theorie zu äquivarianten Situationen von zentraler Wichtigkeit, weil wir hier auf eine große Vielfalt von nichttrivialen explizit berechenbaren Beispielen treffen.

8.1 Äquivariante Garben

8.1.1. Gegeben ein topologischer Raum mit der Operation eines topologischen Monoids $G \circlearrowright X$ verstehen wir unter einer **G-äquivarianten Mengengarbe auf** X eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ mit einer stetigen Operation $G \times \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{F}}$ unseres Monoids auf ihrem étalen Raum derart, daß Projektion $\bar{\mathcal{F}} \to X$ äquivariant ist. Die Kategorie der G-äquivarianten Mengengarben auf X notieren wir

$$\mathrm{Ens}_{/G \circlearrowright X}$$

Beispiel 8.1.2 (**Äquivariante Garben auf dem einpunktigen Raum**). Im Fall eines einpunktigen Raums und eines diskreten Monoids ist das Bilden der globalen Schnitte für jedes Mengensystem $\mathfrak{U}$ ein Isomorphismus von Kategorien

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ens}_{/G \circlearrowright \mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} G\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$$

Im Fall eines topologischen Monoids G gilt dasselbe, wenn wir $G\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ verstehen als die Kategorie aller Mengen $F \in \mathfrak{U}$ mit einer G-Operation, die als Abbildung $G \times F \to F$ stetig ist für die diskrete Topologie auf F. Ist G eine topologische Gruppe und gibt es in G eine zusammenhängende Umgebung des neutralen Elements, so liefert der Rückzug vom Quotienten nach der Einskomponente einen Isomorphismus von Kategorien

$$(G/G^\circ)\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ens} \xrightarrow{\sim} G\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$$

Beispiel 8.1.3 (**Äquivariante Garben bei trivialer Operation**). Ist G ein diskretes Monoid, das auf einem Raum X trivial operiert, so ist eine G-äquivariante Mengengarbe auf X dasselbe wie eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ mit einem Monoidhomomorphismus $G \to \mathrm{Ens}_{/X}(\mathcal{F})$ von G in das Monoid ihrer Endomorphismen. Etwas formaler erhalten wir so für jedes Mengensystem $\mathfrak{U}$ einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ens}_{/G \circlearrowright X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}([G], \mathfrak{U}\mathrm{Ens}_{/X})$$

für $[G]$ die Ein-Objekt-Kategorie zum Monoid G. Im Fall des einpunktigen Raums erhalten wir auf diese Weise die Beschreibung der äquivarianten Garben auf einem einpunktigen Raum aus 8.1.2 ein weiteres Mal.

8.1.4 (**Äquivariante Gruppengarben**). Sei $G\backslash X$ ein topologischer Raum mit der Operation eines topologischen Monoids. Unter einer **G-äquivarianten Gruppengarbe auf** X verstehen wir eine Gruppengarbe $\mathcal{F}$ mit einer G-äquivarianten Struktur auf der zugrundeliegenden Mengengarbe derart, daß für alle $g \in G$ und $x \in X$ die auf den Halmen induzierte Abbildung $g : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_{gx}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Kategorie der G-äquivarianten abelschen Garben auf X notieren wir

$$\mathrm{Ab}_{/G\backslash X}$$

Beispiel 8.1.5 (**Äquivariante abelsche Garben auf dem einpunktigen Raum**). Im Fall des einpunktigen Raums und eines diskreten Monoids G und eines Mengensystems $\mathfrak{U}$ ist das Bilden der globalen Schnitte ein Isomorphismus von Kategorien

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/G\backslash \mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} G\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ab}$$

Im Fall eines topologischen Monoids G gilt dasselbe, wenn wir $G\text{-}\mathrm{Ab}$ verstehen als die Kategorie aller abelschen Gruppen F mit einer G-Operation, die als Abbildung $G \times F \to F$ stetig ist für die diskrete Topologie auf F. Ist G eine topologische Gruppe und gibt es in G eine zusammenhängende Umgebung des neutralen Elements, so liefert der Rückzug einen Isomorphismus von Kategorien

$$(G/G^\circ)\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ab} \xrightarrow{\sim} G\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ab}$$

Beispiel 8.1.6 (**Äquivariante abelsche Garben bei trivialer Operation**). Ist G ein diskretes Monoid, das auf einem Raum X trivial operiert, so ist eine G-äquivariante abelsche Garbe auf X dasselbe wie eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ mit einem Monoidhomomorphismus $G \to \mathrm{Ab}_{/X}(\mathcal{F})$ von G in das Monoid ihrer Endomorphismen. Etwas formaler erhalten wir für jedes Mengensystem $\mathfrak{U}$ einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}([G], \mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/X})$$

Im Fall des einpunktigen Raums erhalten wir so die Beschreibung der äquivarianten abelschen Garben aus 8.1.5 ein weiteres Mal.

8.1.7. Ein **Morphismus** $(G\backslash X) \to (H\backslash Y)$ **von Räumen mit Operation** ist ein Paar (ϕ, f) aus einem stetigen Monoidhomomorphismus $\phi : G \to H$ und einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(gx) = \phi(g)f(x)\ \forall g, x$. Wir notieren solche Paare $\phi\backslash f$. Die Räume mit Operation werden so zu einer Kategorie

$$\mathrm{Mon}\backslash\mathrm{Top}$$

Vorschau 8.1.8. Grothendieck untersucht noch allgemeiner Garben auf sogenannten „Topoi“. Diese Allgemeinheit will ich vorerst vermeiden.

8.1.9. Gegeben ein Morphismus $(\phi\setminus f) : (G\setminus X) \to (H\setminus Y)$ von Räumen mit Operation sowie äquivariante Garben $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/G\setminus X}$ und $\mathcal{G} \in \mathrm{Ens}_{/H\setminus Y}$ verstehen wir unter einem **Garbenmorphismus über** $\phi\setminus f$ einen Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ über f, der für den vorgegebenen Monoidmorphismus ϕ auf den étalen Räumen ein Morphismus $G\setminus\bar{\mathcal{F}} \to H\setminus\bar{\mathcal{G}}$ von Räumen mit Operation ist. Die Menge der Morphismen über einem vorgegebenen $\phi\setminus f$ notieren wir $\mathrm{Ens}_{/\phi\setminus f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Wir erhalten so eine Kategorie $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Mon}\setminus\mathrm{Top}}$ und einen Funktor

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Mon}\setminus\mathrm{Top}} \to \mathrm{Mon}\setminus\mathrm{Top}$$

8.1.10. Wir nennen wir einen Morphismus $\tau \in \mathrm{Ens}_{/\phi\setminus f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ von Garben mit Operation über einem Morphismus $\phi\setminus f$ von Räumen mit Operation **kartesisch**, wenn er im Sinne von 6.2.2 kartesisch ist für den Funktor des Vergessens der Garbe $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Mon}\setminus\mathrm{Top}} \to \mathrm{Mon}\setminus\mathrm{Top}$, wenn also für jede Garbe $\mathcal{E} \in \mathrm{Ens}_{/G\setminus X}$ das Nachschalten von τ eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/G\setminus X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/\phi\setminus f}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$$

induziert. Wie im nichtäquivarianten Fall ist dann das Paar $(\mathcal{F}, \tau)$ durch das Paar $(\mathcal{G}, (\phi\setminus f))$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus, wenn es denn existiert. Die Existenz ist aber auch klar, man muß nur den gewöhnlichen Rückzug mit der offensichtlichen G-Operation versehen. Wir nennen dann $\mathcal{F}$ die **äquivariant zurückgezogene Garbe** und notieren sie

$$\mathcal{F} = f^*\mathcal{G} = (\phi\setminus f)^*\mathcal{G}$$

Genauso erklären wir für abelsche Garben die Kategorie $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Mon}\setminus\mathrm{Top}}$ der abelschen äquivarianten Garben auf Räumen mit Operation, den Funktor des Vergessens der Garbe $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Mon}\setminus\mathrm{Top}} \to \mathrm{Mon}\setminus\mathrm{Top}$ und den äquivarianten Rückzug.

8.1.11 (**Garben und Quotienten nach diskreten Gruppen**). Sei $\mathfrak{U}$ ein Universum. Im Fall einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe $G \in \mathfrak{U}$ auf einem topologischen Raum $X \in \mathfrak{U}$ ist der äquivariante Rückzug unter $\phi\setminus f$ für $f : X \twoheadrightarrow G\backslash X$ und $\phi : G \twoheadrightarrow 1$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ens}_{/(G\backslash X)} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{U}\mathrm{Ens}_{/G\setminus X}$$

zwischen der Kategorie der Garben auf dem Bahnenraum und der Kategorie der äquivarianten Garben auf dem ursprünglichen Raum. Einen Quasiinversen erhalten wir vermittels der Zuordnung $(\bar{\mathcal{F}} \to X) \mapsto (G\backslash\bar{\mathcal{F}} \to G\backslash X)$. All das ist leicht zu sehen. Aus der Diskussion der Überlagerungstheorie in [TF] 2.3.3.14 mögen Sie auch, immer noch im Fall einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe, die Äquivalenz $\mathfrak{U}\mathrm{Top}_{G\backslash X} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{U}\mathrm{Top}_{G\setminus X}$ zwischen topologischen Räumen

über dem Quotienten und äquivarianten topologischen Räumen über X erinnern, die sich zu obiger Äquivalenz spezialisieren läßt. Der Rückzug der finalen Mengengarbe auf $G\backslash X$ ist offensichtlich die finale Mengengarbe auf X mit der offensichtlichen G-Operation. So sieht man, daß das Zurückholen globaler Schnitte eine Bijektion $\Gamma(G\backslash X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X;f^*\mathcal{F})^G$ zwischen globalen Schnitten auf dem Quotienten und G-invarianten globalen Schnitten der zurückgeholten Garbe liefert. Ebenso liefert im Fall einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe G auf einem topologischen Raum X der äquivariante Rückzug abelscher Garben eine Äquivalenz

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{U}\mathrm{Ab}_{/G\backslash X}$$

In [TSS] 3.1.2 zeigen wir analoge Aussagen für beliebige nicht notwendig diskrete topologische Gruppen.

8.1.12 (**Lokal konstante Garben**). Eine Garbe von Mengen beziehungsweise von Gruppen heißt **lokal konstant**, wenn unser Raum eine offene Überdeckung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Garbe auf jede der überdeckenden Mengen konstant ist. Eine Garbe von Mengen ist offensichtlich genau dann lokal konstant, wenn ihr étaler Raum eine Überlagerung im Sinne von [TF] 2.3.1.2 ist. Gegeben ein Raum X bezeichne $\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/X} \subset \mathrm{Ens}_{/X}$ die vollen Unterkategorien der konstanten beziehungsweise lokal konstanten Garben in der Kategorie aller Mengengarben auf unserem Raum. Weiter bezeichne $\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/X} \subset \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/X} \subset \mathrm{Ab}_{/X}$ die vollen Unterkategorien der konstanten beziehungsweise lokal konstanten abelschen Garben in der Kategorie aller abelschen Garben auf unserem Raum.

8.1.13 (**Äquivariante konstante und lokal konstante Garben**). Gegeben ein Raum mit Operation $G\backslash\!\!\backslash X$ bezeichne

$$\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash\!\backslash X} \subset \mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash\!\backslash X} \subset \mathrm{Ens}_{/G\backslash\!\backslash X}$$

die vollen Unterkategorien derjenigen äquivarianten Garben, die unter dem Vergessen der G-Operation konstant beziehungsweise lokal konstant werden. Im Fall abelscher Garben verwenden wir analoge Begriffe und vereinbaren dafür die Notationen

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash\!\backslash X} \subset \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash\!\backslash X} \subset \mathrm{Ab}_{/G\backslash\!\backslash X}$$

8.1.14 (**Lokal konstante Garben und Quotienten**). Sei $\mathfrak{U}$ ein Universum. Im Fall einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe $G \in \mathfrak{U}$ auf einem topologischen Raum $X \in \mathfrak{U}$ induziert unsere durch äquivarianten Rückzug gegebene Äquivalenz aus 8.1.11 eine Äquivalenz

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/(G\backslash X)} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash\!\backslash X}$$

zwischen den vollen Unterkategorien der jeweils lokal konstanten Garben. In der Tat sieht man leicht ein, daß sowohl der äquivariante Rückzug als auch sein in 8.1.11 betrachteter quasiinverser Funktor lokal konstante Garben zu lokal konstanten Garben machen. Analoges gilt für abelsche Garben, der äquivariante Rückzug liefert auch für diese eine Äquivalenz

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/(G\backslash X)} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{U}\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X}$$

8.1.15 (**Globale Schnitte äquivarianter Garben**). Gegeben ein Raum mit Operation $G\backslash X$ betrachten wir den Funktor

$$G\text{-}\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}_{/G\backslash X}$$

der konstanten Garbe $(M \mapsto M_X)$. Er ist sinnvoll definiert, denn operiert G stetig auf M und auf X, so auch auf $M \times X$. Der Funktor der globalen Schnitte macht im allgemeinen aus einer äquivarianten Garbe eine Menge mit unstetiger G-Operation. Im Fall eines diskreten Monoids G ist der Funktor der konstanten Garbe linksadjungiert zum Funktor der globalen Schnitte $\Gamma : \mathrm{Ens}_{/G\backslash X} \to G\text{-}\mathrm{Ens}$. Genauer liefert das Exponentialgesetz für jeden Raum E über X und jede diskrete Menge M eine Bijektion

$$\mathrm{Top}_X(M \times X, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(M, \mathrm{Top}_X(X, E))$$

Operiert dasselbe diskrete Monoid G auf M und E, so entsprechen sich unter dieser Bijektion die G-äquivarianten Abbildungen und wir erhalten so im Fall diskreter Monoide G eine Adjunktion $((M \mapsto M_X), \Gamma)$. In derselben Weise erhalten wir eine Adjunktion $((M \mapsto M_X), \Gamma)$ von Funktoren $G\text{-}\mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}_{/G\backslash X}$ und zurück.

Lemma 8.1.16 (**Operationen auf konstanten Garben**). *Gegeben $G\backslash X$ ein zusammenhängender Raum mit Operation eines Monoids und $\mathfrak{U}$ ein Universum mit $G, X \in \mathfrak{U}$ ist der Funktor der konstanten Garbe $(M \mapsto M_X)$ volltreu und liefert Äquivalenzen*

$$G\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ens} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash X} \quad \textit{und} \quad G\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ab} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{U}\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash X}$$

mit den entsprechenden Kategorien konstanter Garben.

Beweis. Wir nehmen zunächst G diskret an und bemerken, daß unsere Adjunktion 8.1.15 für jede G-äquivariante Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/G\backslash X}$ einen G-äquivarianten Morphismus

$$X \times \Gamma\mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$$

von étalen Räumen über X liefert. Ist $\mathcal{F}$ eine konstante Garbe und X zusammenhängend, so ist er nach dem in 2.2.42 behandelten Fall $G = 1$ ein Isomorphismus.

Daraus folgt hinwiederum, daß wenn G eine Topologie trägt und stetig auf $\bar{\mathcal{F}}$ operiert, daß dann auch die induzierte Operation auf $X \times \Gamma\mathcal{F}$ stetig ist. Aufgrund der Finalität von Projektionen und speziell der Projektion $G \times X \times \Gamma\mathcal{F} \to G \times \Gamma\mathcal{F}$ muß dann auch die Operation von G auf $\Gamma\mathcal{F}$ stetig sein. $\square$

Proposition 8.1.17 (**Monodromie lokal konstanter Garben**). *Ist $\mathfrak{U}$ ein Universum und $X \in \mathfrak{U}$ überlagerungstrivial und mit einer topologisch freien Operation einer diskreten Gruppe $G \in \mathfrak{U}$ versehen, so liefert der Rückzug auf X gefolgt vom Funktor der globalen Schnitte Äquivalenzen*

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} G\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ens} \qquad\qquad \mathfrak{U}\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} G\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Ab}$$

Analoges gilt für Garben von k-Moduln über einem beliebigen Ring k.

8.1.18. Im Fall von Mengengarben ist unsere Aussage nurmehr eine Umformulierung von Satz [TF] 2.4.4.2 über den abstrakten Faserfunktor. Ist insbesondere X zusätzlich lokal zusammenziehbar, so können wir unsere Äquivalenz auch konstruieren, indem wir einen Punkt $x \in X$ festhalten, durch Faserwirkungsvergleich einen Isomorphismus $c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \xrightarrow{\sim} G$ konstruieren und die zusammengesetzte Bijektion $i_x : \mathcal{F}_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} (\pi^*\mathcal{F})_x \xleftarrow{\sim} \Gamma\pi^*\mathcal{F}$ betrachten. Darunter entspricht dann die Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser durch Wegeliften unserer Operation von G auf den globalen Schnitten.

8.1.19. Im Beweis konstruieren wir einen Linksadjungierten und der Beweis zeigt zusätzlich, daß er für nicht notwendig überlagerungstriviales aber zusammenhängendes X zumindest volltreu ist und für nichtleeres X zumindest treu.

Beweis. Wir konzentrieren uns diesmal auf den Fall abelscher Garben. Unser Funktor ist für einen beliebigen Raum X mit der Operation einer diskreten topologischen Gruppe sinnvoll erklärt als die Komposition

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} \to G\text{-}\mathrm{Ab}$$

Der erste Funktor ist eine Äquivalenz für jede topologisch freie Operation einer diskreten Gruppe nach 8.1.14. Der zweite Funktor ist der Funktor der globalen Schnitte, nach 8.1.15 der Rechtsadjungierte zum Bilden der konstanten Garbe. Er induziert eine Äquivalenz $\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash X} \xrightarrow{\approx} G\text{-}\mathrm{Ab}$ nach 8.1.16. Auf einem überlagerungstrivialen Raum jedoch ist jede lokal konstante Garbe konstant und wir haben folglich $\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X} = \mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash X}$. Das zeigt die Behauptung. $\square$

Beispiel 8.1.20 (**Lokal konstante Garben auf der punktierten Ebene**). Wir erhalten aus unseren Erkenntnissen 8.1.17 zu lokal konstanten Garben und Monodromie eine Äquivalenz

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/\mathbb{C}^\times} \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Ab}$$

zwischen der Kategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/\mathbb{C}^\times}$ der lokal konstanten abelschen Garben auf $\mathbb{C}^\times$ und der Kategorie $\mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Ab}$ der abelschen Gruppen mit ausgezeichnetem Automorphismus, indem wir bemerken, daß $\mathbb{C}$ überlagerungstrivial ist und daß die Exponentialfunktion einen Homöomorphismus $\mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$ induziert. Wir sehen so, daß es noch natürlicher ist und sogar das Arbeiten mit vergeßlichen komplexen Zahlen erlaubt, wenn wir unsere Äquivalenz schreiben als eine Äquivalenz

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/\mathbb{C}^\times} \xrightarrow{\approx} 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Ab}$$

Übungen

Übung 8.1.21. Gegeben ein Morphismus $\phi\backslash f : G\backslash X \to H\backslash Y$ von Räumen mit topologisch freien Operationen diskreter Gruppen konstruiere man eine Isotransformation für das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H\text{-}\mathrm{Ab} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ab}_{/H\backslash Y} \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\
G\text{-}\mathrm{Ab} \arrow[r] & \mathrm{Ab}_{/G\backslash X}
\end{tikzcd}$$

mit den Funktoren aus 8.1.19 in den Horizontalen und den Rückzügen in den Vertikalen.

Weiterführende Übung 8.1.22 (**Gruppengarben als Gruppenobjekte**). Sei ein topologischer Raum mit einer stetigen Operation eines topologischen Monoids $G\backslash X$ gegeben. Wir erinnern aus [AAG] 1.2.1 das Konzept abelscher Gruppenobjekte in Kategorien mit endlichen Produkten. Man konstruiere einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Ab}(\mathrm{Ens}_{/G\backslash X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}_{/G\backslash X}$$

zwischen der Kategorie der abelschen Gruppenobjekte der Kategorie der äquivarianten Mengengarben und der Kategorie der äquivarianten abelschen Garben.

8.2 Äquivariante Kohomologie

8.2.1 (**Motivation**). Gegeben ein topologischer Raum X, auf dem eine Gruppe G operiert, mag man die Kohomologie des Bahnenraums $\mathrm{H}^q(X/G; M)$ mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe M betrachten. Eine äquivariante Abbildung $X \to Y$, die Isomorphismen auf der gewöhnlichen Kohomologie induziert, muß jedoch im allgemeinen keineswegs Isomorphismen auf der Kohomologie der Bahnenräume liefern. Zum Beispiel ist die konstante Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathrm{top}$ äquivariant für die Operation von $\mathbb{Z}$ durch Translation auf $\mathbb{R}$ beziehungsweise durch

Nichtstun auf top, aber der Rückzug

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{top}/\mathbb{Z}; M) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; M)$$

ist für $M \neq 0$ kein Isomorphismus. Die äquivariante Kohomologie repariert das zumindest im Fall stetiger Operationen von Liegruppen oder allgemeiner „offenlokal bagazyklischen“ topologischen Gruppen. Das zeigen wir jedoch erst in [TSS] 3.5.12.

8.2.2 (**Erinnerungen**). Das entscheidende Resultat, das die Entwicklung der äquivarianten Kohomologie ermöglicht, ist Korollar 6.5.18 in Verbindung mit 6.5.13, wonach für jedes Faserbündel $f : X \to Y$ mit zusammenziehbarer Faser das Zurückholen auf der Garbenkohomologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe M Isomorphismen

$$\mathrm{H}^p(Y; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(X; M)$$

liefert. Die zweite wesentliche Zutat ist die Erkenntnis, daß es für jede topologische Gruppe G einen topologisch freien zusammenziehbaren G-Raum gibt. Den Beweis dieser Aussage holen wir in 8.3.7 nach. Es ist unerheblich, wie dieser G-Raum aussieht und welchen unter den vielen Möglichkeiten wir aussuchen.

8.2.3. Sei G eine Gruppe. Gegeben zwei G-Räume X und Y bezeichnen wir mit $X \times_{/G} Y$ den Bahnenraum von $X \times Y$ unter der G-Operation gegeben durch $g(x, y) := (gx, gy)$ mit seiner Quotiententopologie. Man nennt diesen Raum das **balancierte Produkt** von X und Y. Die Äquivalenzklasse von (x, y) notieren wir $[x, y]$.

8.2.4 (**Notationsfragen bei balancierten Produkten**). Jeder G-Rechtsraum X kann als G-Raum aufgefaßt werden vermittels der Linksoperation $gx := xg^{-1}$. Wenn wir $X \times_{/G} Y$ mit einem G-Rechtsraum bilden, so meinen wir meist implizit, daß wir X auf diese Weise als G-Linksraum auffassen. Ist jedoch X sowohl ein G-Rechtsraum als auch ein G-Linksraum, so verstehen wir $X \times_{/G} Y$ a priori in Bezug auf die Rechtsoperation auf X. Ist speziell $G \supset H$ eine Gruppe mit einer Untergruppe, so verstehen wir $G \times_{/H} Y$ für einen H-Raum Y a priori in Bezug auf die offensichtliche Rechtsoperation von H auf G, also als Bahnenraum von H in Bezug auf die Operation $h(g, y) := (gh^{-1}, hy)$.

8.2.5. Gegeben eine topologische Gruppe G und ein G-Raum X und ein G-Raum A setzen wir

$$\mathrm{H}^q_G(X)_A := \mathrm{H}^q(A \times_{/G} X)$$

Ist weiter $\varphi\backslash f : G\backslash X \to H\backslash Y$ ein Morphismus von Räumen mit Gruppenoperation 8.1.7 und ist zusätzlich A ein topologisch freier G-Raum sowie B ein zusammenziehbarer H-Raum, so erklären wir das **Zurückholen**

$$r_{A,B,f,\varphi} = r_{AB} : \mathrm{H}^q_H(Y)_B \to \mathrm{H}^q_G(X)_A$$

durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^q((B \times A) \times_{/G} X) & \\
\mathrm{H}^q(B \times_{/H} Y) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{H}^q(A \times_{/G} X) \arrow[ul, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Die Pfeile nach oben bedeuten hier das gewöhnlichem Zurückholen und oben ist die diagonale G-Operation von auf $B \times A$ gemeint. Der Isomorphismus rechts rührt daher, daß das Zurückholen längs eines Faserbündels mit der zusammenziehbaren Faser B geschieht und wir somit 8.2.2 anwenden dürfen.

8.2.6. Natürlich gilt stets $r_{AA} = \mathrm{id}$ für die Identität auf einem Raum mit Gruppenoperation $G\backslash X$ und jeden topologisch freien zusammenziehbaren G-Raum A. Sind weiter $G\backslash X \to H\backslash Y \to K\backslash Z$ Morphismen von Räumen mit Gruppenoperation und sind A, B, C zusammenziehbar mit jeweils einer topologisch freien Operation von G, H, K, so behaupten wir die Gleichheit

$$r_{AC} = r_{AB} \circ r_{BC}$$

von Abbildungen $\mathrm{H}^q_K(Z)_C \to \mathrm{H}^q_G(X)_A$. Um das einzusehen betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & (C \times A) \times_{/G} X \arrow[ddll, bend right] \arrow[ddrr, bend left] & & \\
 & & (C \times B \times A) \times_{/G} X \arrow[u] \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & (C \times B) \times_{/H} X \arrow[dl] \arrow[dr] & & (B \times A) \times_{/G} X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
C \times_{/K} Z & & B \times_{/H} Y & & A \times_{/G} X
\end{tikzcd}$$

Alle Pfeile, die nach rechts oder nach oben gehen, sind Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser und induzieren folglich in der Gegenrichtung Isomorphismen auf der Kohomologie. Alles zusammen zeigt dann die behauptete Identität

$$r_{AC} = r_{AB} \circ r_{BC}$$

Definition 8.2.7. Gegeben ein Raum mit Gruppenwirkung $G\backslash X$ erklären wir seine q**-te äquivariante Kohomologie** als die Gruppe

$$\mathrm{H}^q_G(X) := \mathrm{H}^q_G(X)_{\mathrm{E}G} = \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times_{/G} X)$$

für den topologisch freien zusammenziehbaren G-Raum $\mathrm{E}G$ aus 8.3.7, die sogenannte „Milnor-Konstruktion für G“. Gegeben ein Morphismus $\phi\backslash f : G\backslash X \to H\backslash Y$ von Räumen mit Gruppenwirkung erklären wir das **Zurückholen auf der äquivarianten Kohomologie** als die Abbildung

$$(\phi\backslash f)^* := r_{\mathrm{E}G,\mathrm{E}H} : \mathrm{H}^q_H(Y) \to \mathrm{H}^q_G(X)$$

So erhalten wir für jedes $q \geq 0$ einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Räume mit Gruppenoperation in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Satz 8.2.8 (**Eigenschaften der äquivarianten Kohomologie**). *1. Für die triviale Gruppe 1 erhalten wir durch das Zurückholen einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}1 \times_{/1} X) = \mathrm{H}^q_1(X)$. Er ist so natürlich, daß wir ihn in der Notation für gewöhnlich als Gleichheit behandeln;*

2. *Ist $G\backslash X$ ein Raum mit topologisch freier Gruppenoperation, so liefert das Zurückholen unter der Quotientenabbildung nach X/G einen Isomorphismus, den* **Quotientenisomorphismus**

$$\mathrm{H}^q(X/G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X)$$

3. *Ist $G\backslash X$ ein Raum mit Gruppenwirkung und $K \subset G$ eine Untergruppe, die topologisch frei auf G operiert mit zusammenziehbarem Quotienten G/K, so ist das Zurückholen ein Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^q_G(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_K(X)$$

4. *Gegeben G eine topologische Gruppe und $f : X \to Y$ eine stetige G-äquivariante Abbildung, die bei Vergessen der G-Operation ein Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser ist, induziert das Zurückholen auf der äquivarianten Kohomologie Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q_G(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X)$$

Beweis. Das folgt alles unmittelbar aus den Definitionen und unserer Erkenntnis 6.5.18, daß das Zurückholen auf Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser Isomorphismen auf der Garbenkohomologie induziert. □

Vorschau 8.2.9. Allgemeinere Aussagen als in Teil 4 zeigen wir in [TSS] 3.5.12 im Rahmen unserer Diskussion äquivarianter derivierter Kategorien. Wenn etwa G eine Liegruppe ist und der Rückzug Isomorphismen auf der gewöhnlichen Kohomologie induziert, so induziert er auch Isomorphismen auf der äquivarianten Kohomologie.

Beispiel 8.2.10. Die Gruppe $G := \mathbb{Z}$ operiert topologisch frei auf $E := \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ ist zusammenziehbar. Wir haben folglich $\mathrm{H}^q_{\mathbb{Z}}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ mit Teil 4 und dem Quotientenisomorphismus, beide aus Satz 8.2.8, und das ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ für $q = 0, 1$ und Null sonst.

Korollar 8.2.11 (**Homotopieinvarianz der äquivarianten Kohomologie**). *Seien G eine topologische Gruppe und $f, g : X \to Y$ stetige äquivariante Abbildungen von G-Räumen und $H : X \times [0,1] \to Y$ eine äquivariante Homotopie zwischen ihnen. So induziert der äquivariante Rückzug dieselben Abbildungen auf der äquivarianten Kohomologie, in Formeln*

$$f^* = g^* : \mathrm{H}^q_G(Y) \to \mathrm{H}^q_G(X)$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß der Rückzug unter allen $i_t : X \hookrightarrow X \times [0,1]$ mit $x \mapsto (x,t)$ dieselben Abbildungen auf der äquivarianten Kohomologie induziert. Dazu reicht es zu zeigen, daß der Rückzug unter der Projektion $X \times [0,1] \twoheadrightarrow X$ einen Isomorphismus auf der äquivarianten Kohomologie induziert. Das hinwiederum folgt aus der letzten Aussage von 8.2.8, denn unsere Projektion hat zusammenziehbare Fasern. □

8.2.12. Seien G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Ein G-Torsor auf X ist ein topologisch freier G-Raum E mitsamt einer stetigen Abbildung $\pi : E \to X$, die einen Homöomorphismus $E/G \xrightarrow{\sim} X$ induziert. Gegeben solch ein G-Torsor betrachten wir die Komposition

$$\mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^q_G(E) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X)$$

des äquivarianten Zurückholens längs der konstanten Abbildung mit dem Inversen des Quotientenisomorphismus. Wir nennen diese Komposition

$$C_E : \mathrm{H}^*_G(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^*(X)$$

den **charakteristischen Homomorphismus des G-Torsors E auf X**.

Vorschau 8.2.13. Sobald wir einmal den garbentheoretischen Kohomologiering eingeführt haben, wird sich C_E als ein Ringhomomorphismus erweisen. Weiter kann man für manche G den Ring $\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})$ explizit berechnen oder zumindest Kohomologieklassen $c \in \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top})$ explizit angeben, vergleiche [TSF] **??** folgende. Die Bilder $C_E(c) \in \mathrm{H}^*(X)$ derartiger Kohomologieklassen unter dem charakteristischen Homomorphismus heißen dann „charakteristische Klassen des G-Torsors E“. Insbesondere behandeln wir in [TSF] **??** die unitären Gruppen $\mathrm{U}(n)$. In [TSF] **??** diskutieren wir den Zusammenhang zwischen charakteristischen Klassen von Produkten von Torsoren und den charakteristischen Klassen der Faktoren und davon ausgehend die sogenannten „Chern'schen Klassen“.

8.2.14 (**Charakteristische Klassen und Wechsel der Gruppe**). Ist X ein topologischer Raum und $\phi : G \to H$ ein stetiger Homomorphismus von topologischen Gruppen und E ein G-Torsor auf X und $\phi_* E := H \times_{/G} E$ der daraus durch Gruppenwechsel entstehende H-Torsor, so kommutiert mit den Rückzügen auf der äquivarianten Kohomologie das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_G(E) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \| \\ \mathrm{H}^q_H(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_H(\phi_* E) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X) \end{array}$$

In Formeln gilt also $C_{\phi_* E} = C_E \circ \phi^*$.

8.2.15 (**Charakteristische Klassen und Wechsel von Torsor und Gruppe**). Ist X ein topologischer Raum und $\phi : G \to H$ ein stetiger Homomorphismus von topologischen Gruppen und E ein G-Torsor auf X und F ein H-Torsor auf X und $\phi\backslash h : G\backslash E \to H\backslash F$ ein Morphismus von Torsoren über X kommutiert mit den Rückzügen auf der äquivarianten Kohomologie das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_G(E) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \| \\ \mathrm{H}^q_H(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_H(F) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X) \end{array}$$

In Formeln gilt also $C_F = C_E \circ \phi^*$. Wir sehen so unter anderem, daß der charakteristische Homomorphismus C_E nur von der Isomorphieklasse des Rechtstorsors E abhängt, in Formeln $C_E = C_F$ für isomorphe G-Torsoren E, F.

8.2.16 (**Charakteristische Klassen und Wechsel des Raums**). Sind G eine topologische Gruppe und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und F ein G-Torsor auf Y und $f^* F := X \times_Y F$ der zurückgeholte Torsor auf X, so kommutiert mit den Rückzügen auf der äquivarianten Kohomologie das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_G(f^* F) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X) \\ \| & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_G(F) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(Y) \end{array}$$

In Formeln gilt also $f^* \circ C_F = C_{f^* F}$.

8.2.17 (**Charakteristische Klassen und Wechsel von allem**). Ist $\phi : G \to H$ ein Morphismus topologischer Gruppen und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\phi\backslash h : G\backslash E \to H\backslash F$ ein Morphismus über f von einem G-Torsor E auf X zu einem H-Torsor F auf Y kommutiert mit den Rückzügen auf der äquivarianten Kohomologie das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_G(E) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{H}^q_H(\mathrm{top}) & \to & \mathrm{H}^q_H(F) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}^q(Y) \end{array}$$

In Formeln gilt also $f^* \circ C_F = C_E \circ \phi^*$.

8.2.18 (**Äquivariante Kohomologie mit Koeffizienten**). Alles zuvor Gesagte gilt analog für Kohomologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe M. Wir notieren die äquivariante Kohomologie von $G\backslash X$ mit Koeffizienten in M dann $\mathrm{H}^q_G(X;M)$.

8.2.19 (**Äquivariante Kohomologie für Operationen endlicher Gruppen**). Gegeben ein Raum X mit einer Operation einer Gruppe G und eine abelsche Gruppe M ist das Zurückholen ein Isomorphismus $\mathrm{H}^q(X;M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times X;M)$. Er ist G-äquivariant und induziert folglich einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q(X;M)^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times X;M)^G$. Ist zusätzlich unsere Gruppe G endlich und diskret und liefert die Multiplikation mit $|G|$ einen Isomorphismus $(|G|\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$, so können wir obigen Isomorphismus mit unseren Erkenntnissen zur Kohomologie von Quotienten 6.5.28 verlängern zu einer Kette von Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X;M)^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times X;M)^G \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times_{/G} X;M) = \mathrm{H}^q_G(X;M)$$

In der Tat ist $\mathrm{E}G \times X \twoheadrightarrow \mathrm{E}G \times_{/G} X$ stets separiert. Ist darüber hinaus die Quotientenabbildung $X \to X/G$ separiert, so liefern unsere Erkenntnisse aus 6.5.28 sogar einen Isomorphismus $\mathrm{H}^q(X/G;M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X;M)^G$ dieser Gruppen mit der Kohomologie des Quotienten.

Vorschau 8.2.20 (**Äquivariante Kohomologie äquivarianter Garben**). Gegeben $G\backslash X$ ein Raum mit Gruppenoperation und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/G\backslash X}$ eine G-äquivariante abelsche Garbe können wir analog wie zuvor auch die äquivarianten Kohomologiegruppen mit Koeffizienten einführen durch die Vorschrift

$$\mathrm{H}^q_G(X;\mathcal{F}) := \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times_{/G} X; \mathrm{E}G \times_{/G} \mathcal{F})$$

Hier meinen wir mit $\mathrm{E}G \times_{/G} \mathcal{F}$ die abelsche Garbe mit étalem Raum $\mathrm{E}G \times_{/G} \bar{\mathcal{F}}$ und es ist einiges an Arbeit zu tun, um unserer Definition Sinn zu geben und daraus ein nützliches Werkzeug zu machen. Wir diskutieren das im Zusammenhang mit äquivarianten derivierten Kategorien in [TSS] 3. Ist speziell $X = \mathrm{top}$ ein Punkt und G diskret, so erhalten wir unsere Gruppenkohomologie 3.7.5, in Formeln

$$\mathrm{H}^q_G(\mathrm{top};\mathcal{F}) = \mathrm{H}^q(G;\mathcal{F})$$

Hier ist rechts die Gruppenkohomologie von G im Sinne von 3.7.5 gemeint und darf nicht als die Kohomologie des diskreten Raums G mit was für Koeffizienten auch immer mißverstanden werden.

Vorschau 8.2.21 (**Charakteristische Klassen von Darstellungen**). Jeder Homomorphismus von topologischen Gruppen $\phi : G \to H$ induziert einen Ringhomomorphismus $\mathrm{H}^*_H(\mathrm{top}) \to \mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})$. Im Fall $H = \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ oder $H = \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ kennen wir $\mathrm{H}^*_H(\mathrm{top};\mathbb{F}_2)$ beziehungsweise $\mathrm{H}^*_H(\mathrm{top};\mathbb{Z})$ recht gut nach [TSF] **??**

beziehungsweise [TSF] **??** als Polynomringe in Stiefel-Whitney-Klassen beziehungsweise Chern'schen Klassen. Deren Bilder in $\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})$ heißen dann die **Stiefel-Whitney-Klassen** der reellen beziehungsweise die **Chern'schen Klassen** der komplexen Darstellung ϕ.

Vorschau 8.2.22 (**Äquivariante de-Rham-Kohomologie**). Die äquivariante Kohomologie parakompakter glatter Mannigfaltigkeiten mit der glatten Operation einer kompakten Liegruppe und reelle Koeffizienten läßt sich mit einer Variante des de-Rham-Komplexes berechnen. Wir diskutieren das in 10.4.2 folgende als Anwendung des Formalismus der Spektralsequenzen.

Übungen

Übung 8.2.23 (**Induktionsisomorphismen**). Seien H eine topologische Gruppe, $G \subset H$ eine topologisch frei operierende Untergruppe und X ein G-Raum. So liefert der Rückzug auf der äquivarianten Kohomologie Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q_H(H \times_{/G} X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X)$$

Übung 8.2.24 (**Berechnung der äquivarianten Kohomologie**). Seien G eine topologische Gruppe und X ein G-Raum. Ist A ein topologisch freier schwach bag-n-azyklischer G-Raum, so liefern unsere Rückzüge $r_{\mathrm{E}G,A}$ für jede abelsche Gruppe M und $0 \leq q < n$ Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(A \times_{/G} X; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(X; M)$$

Hinweis: Man verwende 6.5.18.

Übung 8.2.25 (**Operation innerer Automorphismen**). Gegeben eine topologische Gruppe G und ein Element $g \in G$ operiert $\mathrm{int}(g)$ als die Identität auf der äquivarianten Kohomologie $\mathrm{H}^*_G(\mathrm{top})$ des einpunktigen Raums. Dasselbe gilt für äquivariante Kohomologie mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe.

8.3 Milnorkonstruktion

Definition 8.3.1. Gegeben eine Familie von Mengen $(Y_i)_{i\in I}$ erklärt man ihren **Join**

$$J = *_{i\in I} Y_i$$

als die Realisierung des Simplizialkomplexes mit Eckenmenge der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i\in I} Y_i$ und Simplizes allen endlichen Teilmengen mit je höchstens einer Ecke aus jedem der Y_i.

8.3.2 (**Milnortopologie auf dem Join**). Ich erinnere aus [TF] 2.2.7.8, daß unsere Realisierung J aus allen Abbildungen $p : \bigsqcup_{i \in I} Y_i \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ besteht, die endlichen und in einem Simplex enthaltenen Träger haben und bei denen sich die Funktionswerte zu Eins aufaddieren. Ich notiere Punkte eines solchen Joins

$$p = \sum t_i y_i = (t_i y_i)$$

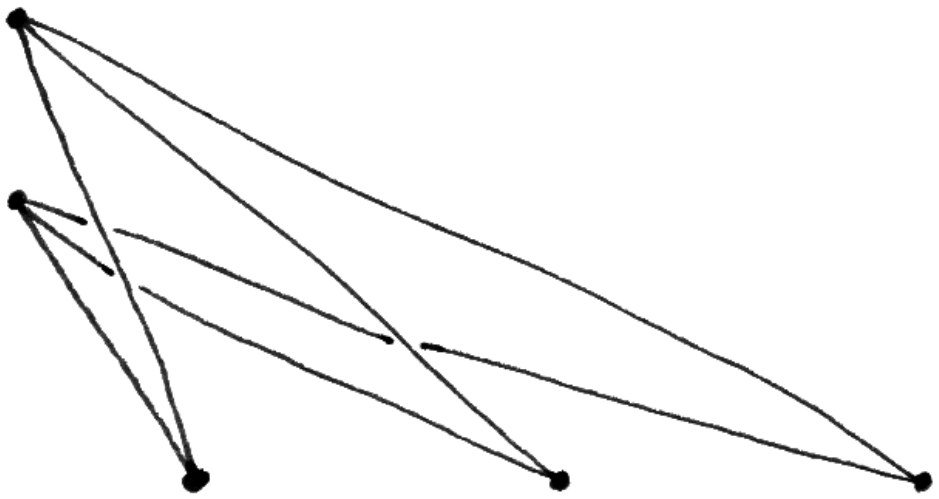
Dabei meint y_i die charakteristische Funktion $[y_i]$ des Punktes y_i. Damit solch eine Funktion zu unserem Join gehört, muß gelten $t_i = 0$ für fast alle i und $\sum t_i = 1$. Zu jedem Index $k \in I$ erklären wir nun eine Abbildung $c_k : J \to [0,1]$ als „die Summe der Koeffizienten an Ecken aus Y_k“, von denen nach Annahme jeweils höchstens einer von Null verschieden ist. Weiter erklären wir $\mathrm{pr}_k : c_k^{-1}(0,1] \to Y_k$ dadurch, daß jedem Punkt aus dem Join, der als Funktion aufgefaßt an einer Ecke aus Y_k nicht verschwindet, eben diese Ecke zugeordnet wird. Sind nun alle unsere Faktoren Y_i topologische Räume, so erklärt man die **Milnor-Topologie auf dem Join** als diejenige Topologie, die von allen Urbildern offener Mengen unter den c_k und den pr_k erzeugt wird.

8.3.3 (**Umgebungsbasen in der Milnortopologie**). Wir betrachten einen Join

$$J = *_{i \in I} Y_i$$

Eine Umgebungsbasis eines Punktes $p = \sum t_i y_i \in J$ kann man erhalten wie folgt: Sei $N = N_p \subset I$ die Menge der Indizes n mit $t_n \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ kleiner als das Minimum dieser positiven t_n. Seien $U_n \subset Y_n$ Umgebungen der y_n für $n \in N$. Sei $K \subset I$ endlich und disjunkt zu N. Nun betrachte man die Mengen $V = V((U_n), \varepsilon, K)$ aller Punkte $\sum s_i x_i$ aus dem Join J mit $|s_n - t_n| < \varepsilon$ für $n \in N \sqcup K$ und $x_n \in U_n$ für $n \in N$. Das System all dieser Mengen für alle erlaubten ε, U_n und K ist dann eine Umgebungsbasis des Punktes p im Join J. Salopp gesprochen: „An den endlich vielen Indizes n mit Parameter ungleich Null sei das Wackeln an der Stelle y_n und am Parameter t_n klein, an endlich vielen vorgegebenen weiteren Indizes sei das Wackeln am Parameter klein, und an den restlichen Indizes darf passieren, was will“.

8.3.4 (**Milnortopologie als geschachtelt-initiale Topologie**). Man mag die Milnortopologie als „geschachtelt-initiale Topologie“ auffassen. Gegeben eine Menge X, Abbildungen $c_i : X \to Z_i$ in topologische Räume, offene Teilmengen $U_i \Subset Z_i$ und Abbildungen $d_i : c_i^{-1}(U_i) \to Y_i$ in weitere topologische Räume verstehe ich darunter die von allen Urbildern von offenen Mengen in einem der Z_i oder einem der Y_i auf X erzeugte Topologie. Sie hat die universelle Eigenschaft, daß gegeben ein topologischer Raum T eine Abbildung $f : T \to X$ stetig ist genau dann, wenn alle $c_i \circ f : T \to Z_i$ stetig sind und außerdem alle $d_i \circ f : f^{-1}(c_i^{-1}(U_i)) \to Y_i$ stetig sind für die auf $f^{-1}(c_i^{-1}(U_i))$ induzierte Topologie. Insbesondere sind für die geschachtelt-initiale Topologie auf X alle c_i und alle d_i stetig.



Der Join eines zweielementigen diskreten Raums mit einem dreielementigen diskreten Raum besteht aus der Vereinigung aller sechs „disjunkt gedachten“ Verbindungsstrecken.

8.3.5 (**Milnortopologie versus Realisierungstopologie**). Für die Realisierung eines Simplizialkomplexes hatten wir in [TS] 3.3.1.7 gesehen, daß die Finaltopologie aus [TF] 2.2.7.8 zur Einbettung der Realisierungen aller endlichen Unterkomplexe für die Bedürfnisse der singulären Homologietheorie gut geeignet ist. Der Join einer durch eine Menge E indizierten Familie von einpunktigen Mengen ist nun als Menge in offensichtlicher Bijektion zum vollen Simplex mit der Eckenmenge E im Sinne von [TF] 2.2.7.8, aber die dort erklärte Topologie ist feiner als die Milnortopologie auf dem Join. Zum Beispiel konvergiert im Fall $E = \mathbb{N}$ die Folge der Tupel

$$(1 - 1/n, 1/n^2, \ldots, 1/n^2, 0, 0, \ldots)$$

mit n Einträgen $1/n^2$ in der Milnortopologie gegen $(1, 0, \ldots)$. In der Finaltopologie würde jedoch für jede Folge von positiven reellen Zahlen $f_1, f_2, \ldots$ die Menge aller Tupel $(t_0, t_1, \ldots)$ mit endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen, Summe Eins, t_0 beliebig und $t_i < f_i$ für alle $i \geq 1$ eine Umgebung von $(1, 0, \ldots)$ bilden. Setzen wir dabei zum Beispiel $f_i = 1/2i^2$, so liegt kein Glied unserer Folge von Tupeln in dieser Umgebung.

Definition 8.3.6. Sei (E) eine Eigenschaft topologischer Räume. Sagen wir, ein topologischer Raum X sei **offenlokal** (E), so meinen wir, daß sich jede Umgebung eines beliebigen Punkts von X verkleinern läßt zu einer offenen Umgebung desselben Punktes, die als topologischer Raum mit der induzierten Topologie die Eigenschaft (E) hat.

Proposition 8.3.7 (**Milnorkonstruktion**). 1. *Für jede topologische Gruppe G ist der abzählbar unendliche Join $\mathrm{E}G := *_{n\in\mathbb{N}} G$ mit seiner Milnortopologie und der diagonalen G-Operation ein topologisch freier zusammenziehbarer G-Raum;*

2. *Ist G offenlokal zusammenziehbar, so gilt dasselbe für $\mathrm{E}G$ und $\mathrm{E}G/G$.*

8.3.8. Mit der alternativen Topologisierung des Joins als „Kolimes der endlichen Teiljoins“ würde die Argumentation zumindest problematisch, da das Bilden des Produkts mit einem Raum G nur für G lokal kompakt mit Kolimites vertauscht. Beim Beweis des ersten Teils folge ich [tD91, IV.4].

Beweis. Bezeichne J unseren Join. Er ist zusammenziehbar nach Lemma 8.3.9. Um zu zeigen, daß die diagonale Operation $D : G \times J \to J$ ststig ist, verwenden wir die Beschreibung der Milnortopologie als geschachtelt-initiale Topologie 8.3.4. Sicher ist $c_k \circ D = c_k \circ \mathrm{pr}_J$ stetig. Weiter wird auf $D^{-1}(c_k^{-1}(0,1]) = G \times (c_k^{-1}(0,1])$ die Abbildung $\mathrm{pr}_k \circ D$ gegeben durch $(\mathrm{pr}_k \circ D)(g,j) = g\,\mathrm{pr}_k(j)$ und ist mithin auch stetig. Also ist die diagonale Operation stetig. Weiter induziert für jedes n und $U_n := \{j \in J \mid c_n(j) \neq 0\}$ und $\mathrm{pr}_n : U_n \to G$ die zugehörige

Projektion die Operation eine stetige Bijektion $G \times \mathrm{pr}_n^{-1}(e) \xrightarrow{\sim} U_n$ mit der stetigen Umkehrabbildung $j \mapsto (\mathrm{pr}_n(j), \mathrm{pr}_n(j)^{-1}j)$. Das zeigt, daß der G-Raum J topologisch frei ist, und zeigt damit Teil 1. Daß mit G auch $\mathrm{E}G$ offenlokal zusammenziehbar ist, folgt direkt aus 8.3.10. Um zu sehen, daß mit G auch $\mathrm{E}G/G$ offenlokal zusammenziehbar ist, reicht es zu zeigen, daß in der Notation von eben die Teilmenge $\mathrm{pr}_n^{-1}(e) \subset U_n$ mit der induzierten Topologie offenlokal zusammenziehbar ist. Dieser Raum kann aber auch beschrieben werden als eine offene Teilmenge des abzählbar unendlichen Joins von Kopien unserer Gruppe und einer Kopie des einpunktigen Raums und ist damit auch offenlokal zusammenziehbar nach 8.3.10. □

Lemma 8.3.9 (**Zusammenziehbarkeit abzählbarer Joins**). *Für jeden nicht leeren topologischen Raum Y ist der Join $J := *_{n\in\mathbb{N}}Y$ von abzählbar unendlich vielen Kopien von Y mit seiner Milnortopologie zusammenziehbar.*

Beweis. Wir verwenden die Notation $\sum t_n y_n = (t_0y_0, t_1y_1, t_2y_2, \ldots)$. An Stellen, an denen das t_i Null ist, brauchen wir dabei das y_i nicht zu spezifizieren und schreiben dort manchmal auch einfach nur 0. Wir zeigen nun, daß die Identität homotop ist zur Nulleneinfügeabbildung

$$(t_0y_0, t_1y_1, t_2y_2, \ldots) \mapsto (t_0y_0, 0, t_1y_1, 0, t_2y_2, 0, \ldots)$$

Für diese Abbildung eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung anzugeben ist dann unproblematisch, man wähle dazu $y \in Y$ und betrachte

$$H : (s, (t_0y_0, t_1y_1, t_2y_2, \ldots)) \mapsto (st_0y_0, (1-s)y, st_1y_1, 0, st_2y_2, 0, \ldots)$$

mit dem Homotopieparameter s. Um zu sehen, daß $H : [0,1] \times J \to J$ stetig ist, müssen wir nach der Beschreibung als geschachtelt-initiale Topologie zeigen, daß alle $c_k \circ H : [0,1] \times J \to [0,1]$ stetig sind, das ist klar, und weiter, daß alle $\mathrm{pr}_k \circ H : H^{-1}(c_k^{-1}(0,1]) \to Y$ stetig sind, und das ist auch klar. Auch jede Abbildung, die an nur einer Stelle eine Null eingefügt, ist in ähnlicher Weise homotop zu einer konstanten Abbildung, nur ist die Konstruktion einer Homotopie von der Identität zu einer derartigen Abbildung verblüffenderweise mühsamer. Um nun zu zeigen, daß die Identität homotop ist zu unserer Nulleneinfügeabbildung, überlegen wir uns erst einmal, daß wir eine Homotopie unserer Abbildung zu der Abbildung „füge eine Null weniger ein“ erhalten durch die Vorschrift

$$(s, (t_0y_0, t_1y_1, t_2y_2, \ldots)) \mapsto (t_0y_0, st_1y_1, (1-s)t_1y_1, st_2y_2, (1-s)t_2y_2, \ldots)$$

mit s als Parameter der Homotopie. Die Stetigkeit prüft man punktweise mit der Beschreibung 8.3.3 von Umgebungsbasen in der Milnor-Topologie. Alternativ

und ausführlicher betrachten wir $H : [0,1] \times J \to J$ gegeben durch unsere Formel und müssen nach der Beschreibung als geschachtelt-initiale Topologie zeigen, daß alle $c_k \circ H : [0,1] \times J \to [0,1]$ stetig sind, das ist klar, und weiter, daß alle $\mathrm{pr}_k \circ H : H^{-1}(c_k^{-1}(0,1]) \to Y$ stetig sind, und das ist auch klar. Jetzt setzt man abzählbar viele Homotopien dieser Art nebeneinander, für den Homotopieparameter s in $[0,1], [1, 1+\frac{1}{2}], [1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}], \ldots$ und ergänzt durch die Identität bei $s = 2$. Die Stetigkeit für $s < 2$ ist dann unproblematisch, denn eine Abbildung ist stetig, wenn ihre Restriktionen auf die Mengen einer endlichen abgeschlossenen Überdeckung jeweils stetig sind. Die Stetigkeit für $s = 2$ muß wieder in jedem Punkt geprüft werden und folgt aus unserer Beschreibung von Umgebungsbasen für die Milnortopologie. Alternativ und ausführlicher betrachten wir $L : [0,2] \times J \to J$ gegeben durch unsere Formel und müssen nach der Beschreibung als geschachtelt-initiale Topologie zeigen, daß alle $c_k \circ H : [0,2] \times J \to [0,1]$ stetig sind und daß alle $\mathrm{pr}_k \circ H : H^{-1}(c_k^{-1}(0,1]) \to Y$ stetig sind. Jedes $c_k \circ L$ ist aber konstant auf $[2-2^{-k}, 2] \times J$ und nach dem vorhergehenden stetig auf $[0, 2-2^{-k}] \times J$ und damit stetig. Weiter ist auch jedes $\mathrm{pr}_k \circ L$ konstant auf dem Schnitt seines Definitionsbereichs mit $[2-2^{-k}, 2] \times J$ und nach dem vorhergehenden stetig auf dem Schnitt seines Definitionsbereichs mit $[0, 2-2^{-k}] \times J$. Die Behauptung folgt. □

Lemma 8.3.10 (Zusammenziehbare Umgebungen in der Milnortopologie). *Ein Join $J = *_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ offenlokal zusammenziehbarer Räume ist auch selbst offenlokal zusammenziehbar.*

Beweis. Sei $p = (t_i y_i) \in J$ gegeben. Sei $N \subset I$ die Menge der Indizes n mit $t_n \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ kleiner als das Minimum dieser positiven t_n. Seien $U_n \Subset Y_n$ offene zusammenziehbare Umgebungen der y_n für $n \in N$. Sei $K \subset I$ endlich und disjunkt zu N. Nach der Beschreibung 8.3.3 von Umgebungsbasen in der Milnortopologie bilden die Mengen

$$V = V((U_n), \varepsilon, K)$$

aller Punkte $\sum s_i x_i$ aus dem Join J mit $|s_n - t_n| < \varepsilon$ für $n \in N \sqcup K$ und $x_n \in U_n$ für $n \in N$ für alle erlaubten ε, U_n und K eine Umgebungsbasis des Punktes p im Join J aus offenen Umgebungen. Es reicht zu zeigen, daß diese Teilräume V zusammenziehbar sind. Zunächst zeigen wir, daß die Abbildung $a : V \to V$ des Angleichens der Koeffizienten $a : (s_i x_i) \mapsto (t_i x_i)$ an die Koeffizienten von p homotop ist zu Identität auf V. Eine Homotopie ist etwa $H : [0,1] \times V \to V$ gegeben durch $(r, (s_i x_i)) \mapsto \big((r t_i + (1-r) s_i) x_i\big)$. Die Einbettung der Teilmenge $P \subset V$ aller Punkte von V, deren Koeffizienten dieselben sind wie die Koeffizienten von p, ist also eine Homotopieäquivalenz $P \to V$. Andererseits ist die offensichtliche Abbildung ein Homöomorphismus $\prod_{n \in N} U_n \xrightarrow{\sim} P$, mithin ist P zusammenziehbar. □

8.3.11 (**Singuläre äquivariante Kohomologie und cup-Produkt**). Operiert eine offenlokal zusammenziehbare topologische Gruppe G auf einem lokal zusammenziehbaren topologischen Raum X, so ist nach 8.3.7 auch $\mathrm{E}G/G$ lokal zusammenziehbar und damit auch $\mathrm{E}G \times_{/G} X$. Folglich ist der Vergleichshomomorphismus in diesem Fall nach 5.6.4 ein Isomorphismus

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times_{/G} X)_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathrm{E}G \times_{/G} X)_{\mathrm{garb}}$$

Für derartige Gruppen und Räume können wir mithin unsere Konstruktion der äquivarianten Kohomologie genausogut in der singulären Theorie durchführen. Das hat den Vorteil, daß wir für die singuläre Theorie bereits die Ringstruktur durch das cup-Produkt eingeführt haben, was für die Garbenkohomologie noch aussteht.

8.4 Weitere klassifizierende Räume

8.4.1 (**Kolimites topologischer Räume**). Gegeben ein Köcher $\mathcal{I}$ und eine Darstellung $D : \mathcal{I} \to \mathrm{Top}$ unseres Köchers in der Kategorie der topologischen Räume kann man den Kolimes [TS] 3.7.1.2 konstruieren, indem man vom Kolimes in der Kategorie der Mengen [TS] 3.7.1.9 ausgeht und ihn mit der Finaltopologie zu allen Abbildungen $D_i \to \operatorname{col} D_i$ versieht.

Beispiel 8.4.2. Wir betrachten das gerichtete System der komplexen Vektorräume $\mathbb{C}^n$ mit den durch das Nullenanhängen gegebenen Morphismen und bilden den Kolimes

$$\mathbb{C}^\infty := \operatorname{col} \mathbb{C}^n$$

Also Menge ist das in Bijektion zur Menge aller Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, die nur an endlich vielen Stellen einen Wert ungleich Null annehmen. Die Topologie wird dadurch gegeben, daß eine Teilmenge offen ist genau dann, wenn sie jeden $\mathbb{C}^n$ in einer offenen Menge trifft. Gleichbedeutend ist die Bedingung, daß sie jeden endlichdimensionalen Teilraum in einer offenen Menge trifft.

8.4.3 (**Produkte lokal kompakter Räume mit Kolimites**). Das Produkt mit einem lokal kompakten Raum X ist nach dem Exponentialgesetz [TM] 1.1.9.9 ein Linksadjungierter und vertauscht nach [TS] 3.7.1.31 folglich mit Kolimites, in Formeln

$$\operatorname{col}(X \times D_i) \xrightarrow{\sim} X \times (\operatorname{col} D_i)$$

Beispiel 8.4.4. Wir zeigen, daß die Multiplikation mit Skalaren

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$$

stetig ist. Da die Multiplikationen $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ stetig sind und da $\mathbb{C}$ lokal kompakt ist, folgt das durch Übergang zum Kolimes aus der vorhergehenden Bemerkung 8.4.3.

8.4.5. Wir zeigen, daß die auf der offenen Teilmenge $\mathbb{C}^\infty\backslash 0$ induzierte Topologie mit der Kolimestopologie der Ursprungskomplemente $\mathbb{C}^n\backslash 0$ zusammenfällt, in Formeln

$$\operatorname{col}(\mathbb{C}^n\backslash 0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\infty\backslash 0$$

Das folgt aus der Finalität von Restriktionen auf offene Teilmengen für gesamthaft finale Familien [TM] 1.1.7.14.

8.4.6. Wir zeigen, daß $\mathbb{C}^\infty\backslash 0$ ein $\mathbb{C}^\times$-Torsor ist. In der Tat ist die Multiplikation stetig für die induzierte Topologie als Einschränkung der nach 8.4.4 stetigen Multiplikation auf eine unter der operierenden Gruppe stabile Teilmenge, hier verwendet man die Verträglichkeiten von Produkttopologie und induzierter Topologie. Nun ist für jedes n die Teilmenge der Punkte mit nichtverschwindener n-ter Koordinate eine offene Teilmenge $U_n \Subset \mathbb{C}^\infty$. Betrachten wir weiter die Teilmenge $W_n \subset \mathbb{C}^\infty$ aller Punkte mit n-ter Koordinate Eins, so induziert die Multiplikation einen Homöomorphismus $\mathbb{C}^\times \times W_n \xrightarrow{\sim} U_n$. Das zeigt die Behauptung.

8.4.7. Wir wissen bereits, daß die offensichtliche Abbildung in Bezug auf die induzierten Topologien ein Homöomorphismus $\operatorname{col}(\mathbb{C}^n\backslash 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^\infty\backslash 0)$ ist. Die Transitivität gesamthaft finaler Familien [TM] 1.1.7.5 zeigt dann, daß auch auf den Quotienten nach $\mathbb{C}^\times$ die offensichtliche Abbildung ein Homöomorphismus $\operatorname{col}\mathbb{P}^n\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^\infty\backslash 0)/\mathbb{C}^\times$ ist. Wir notieren diesen Raum

$$\mathbb{P}^\infty\mathbb{C} := \operatorname{col}\mathbb{P}^n\mathbb{C}$$

8.4.8 (**Klassifizierender Raum für** $\mathbb{C}^\times$). Nach dem im Anschluß bewiesenen Lemma 8.4.9 ist unser $\mathbb{C}^\times$-Torsor $\mathbb{C}^\infty\backslash 0$ aus 8.4.6 zusammenziehbar. Folglich ist $\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ ein klassifizierender Raum für $\mathbb{C}^\times$.

Lemma 8.4.9. *Das Komplement des Ursprungs im Raum* $\mathbb{R}^\infty := \operatorname{col}\mathbb{R}^n$ *ist zusammenziehbar.*

Beweis. Wir schieben zunächst alle Koordinaten eine Stelle weiter, lassen dann die erste Koordinate auf Eins anwachsen ohne die anderen zu ändern, und schieben zum Schluß alle Koordinaten außer der ersten nach Null. Genauer folgt aus der Verträglichkeit des Produkts mit einem lokal kompakten Raum und Kolimites [TS] 3.7.1.33, daß die Abbildung

$$\begin{array}{lcl} [0,1]\times\mathbb{R}^\infty & \to & \mathbb{R}^\infty \\ (t,(x_0,x_1,\ldots)) & \mapsto & ((1-t)x_0,(1-t)x_1+tx_0,(1-t)x_2+tx_1,\ldots) \end{array}$$

stetig ist. Der Rest des Arguments geht ähnlich, nur einfacher. □

8.4.10. In $\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ ist jede Teilmenge A abgeschlossen, die jedes $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ in einer abgeschlossenen Menge trifft. Für solch eine Teilmenge $A \not\subset \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ folgt aus der

Finalität von Restriktionen auf abgeschlossene Teilmengen für gesamthaft finale Familien [TM] 1.1.7.14, daß die offensichtliche Abbildung ein Homöomorphismus

$$\operatorname{col}(A \cap \mathbb{P}^n\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} A$$

ist. Speziell ist jede Teilmenge $E \subset \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ abgeschlossen, die die jedes $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ in einer endlichen Menge trifft. Da der Kolimes über diskrete Räume offensichtlich diskret ist, ist die induzierte Topologie auf E in diesem Fall die diskrete Topologie. Da ein diskreter Raum nur kompakt sein kann, wenn er endlich ist, muß jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ bereits in einem $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ liegen. Wir folgern auf den singulären Ketten Isomorphismen $\operatorname{col} \mathrm{S}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_q(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C})$ und mit der Exaktheit von filtrierenden Kolimites finden wir auch für die singuläre Homologie Isomorphismen

$$\operatorname{col} \mathrm{H}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C})$$

Nun wissen wir weiter, daß die Abbildungen $\mathrm{S}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \to \mathrm{S}_q(\mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C})$ spaltende Injektionen sind und nach [TS] 3.3.4.10 induzieren sie Isomorphismen auf der Homologie für $n \geq q$. Damit sind die Rückzüge $\mathrm{S}^q(\mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C}) \to \mathrm{S}^q(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$ Surjektionen. Andererseits liefert die Definition des Kolimes Isomorphismen $\mathrm{S}^q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \lim \operatorname{Ab}(\mathrm{S}_q(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ und mit Übung [TS] 3.7.1.56 zur Vertauschbarkeit von Homologie mit speziellen Limites folgern wir, daß auch sie Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \lim \mathrm{H}^q(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C})$$

induzieren. Aus der Beschreibung [TS] 3.7.4.8 der Kohomologie der komplex projektiven Räume folgt dann, daß gilt $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ und daß für jeden Erzeuger $t \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C})$ der offensichtlich Ringhomomorphismus ein Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[t] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C})$$

zwischen dem Polynomring und dem singulären Kohomologiering des klassifizierenden Raums ist.

8.4.11. Ähnlich wie in 8.4.9 aber einfacher zeigt man, daß $\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ lokal zusammenziehbar und sogar offenlokal zusammenziehbar ist. Der Vergleichsisomorphismus **??** zwischen singulärer Kohomologie und Garbenkohomologie ist in diesem Fall folglich ein Isomorphismus.

9 Ergänzungen zu Faserungen und Basiswechsel*

9.1 Gefaserter Basiswechsel

Satz 9.1.1 (Gefaserter Basiswechsel). *Sind in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen $fq = pg$ die Horizontalen p, q Faserbündel mit offenlokal zusammenhängender Faser, so ist der Basiswechsel von Mengengarben eine Isotransformation*

$$p^* f_* \overset{\sim}{\Rightarrow} g_* q^*$$

9.1.2. Insbesondere vertauscht das Zurückziehen auf ein Faserbündel mit offenlokal zusammenhängender Faser mit beliebigen Produkten von Garben: In der Tat kann man ein Produkt $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ von Garben auf Y als Vorschub unter der Projektion einer geeigneten Garbe auf $Y \times I^{\text{dis}}$ verstehen. Ich erinnere daran, daß das Bilden von Produkten von Garben im allgemeinen keineswegs mit Rückzug vertauscht, ja nach 2.2.55 noch nicht einmal mit dem Bilden von Halmen.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser Diagramm die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y \times Z & \to & Y \end{array}$$

hat für offenlokal zusammenhängendes Z. Es reicht zu zeigen, daß für jede Garbe von Mengen $\mathcal{F} \in \mathrm{Ens}_{/X}$ und jeden Punkt $(y, z) \in Y \times Z$ unsere natürliche Transformation auf dem Halm eine Bijektion

$$(p^* f_* \mathcal{F})_{(y,z)} \xrightarrow{\sim} (g_* q^* \mathcal{F})_{(y,z)}$$

induziert. Dazu hinwiederum reicht es, für ein Fundamentalsystem von Umgebungen von (y, z) zu zeigen, daß Bijektionen auf den Schnitten über diesen Umgebungen induziert werden. Jetzt verwenden wir offenen Basiswechsel 6.4.5 und sehen so, daß es reicht, für Z zusammenhängend nachzuweisen, daß sich auf den globalen Schnitten eine Bijektion

$$\Gamma p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma g_* q^* \mathcal{F}$$

ergibt. Nun haben wir für jede stetige Abbildung f per definitionem $\Gamma f_* = \Gamma$ und nach Übung 4.3.32 über finales Zurückholen bei zusammenhängenden Fasern liefern in unserem speziellen Fall die kanonischen Abbildungen auch Bijektionen $\Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma q^*$ und $\Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma p^*$. Damit identifizieren wir beide Seiten des behaupteten Isomorphismus mit $\Gamma \mathcal{F}$ und der Satz ist bewiesen. $\square$

Beispiel 9.1.3 (**Basiswechsel braucht Faserbündelbedingung**). In 9.1.2 hatten wir bereits gesehen, daß Basiswechsel ohne Faserbündelbedingung nicht gilt. Hier kommt noch ein Beispiel, das zeigt, daß auch in „ganz gewöhnlichen Situationen" die Faserbündelbedingung gebraucht wird. Im kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\backslash 0 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{R}^2\backslash 0 \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{pt} \arrow[r, "p"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

mit $q : y \mapsto (0, y)$ und $f : (x, y) \mapsto x$ ist für die konstante Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}^2\backslash 0$ mit Faser $\mathbb{Z}$ der von der Basiswechseltransformation induzierte Morphismus $p^* f_* \mathcal{F} \to g_* q^* \mathcal{F}$ kein Isomorphismus. Das zeigt, daß bei kartesischen Diagrammen ohne Faserbündel in den Horizontalen im allgemeinen der Basiswechsel kein Isomorphismus ist.

Beispiel 9.1.4 (**Gefaserter Basiswechsel braucht spezielle Fasern**). Sei $\mathbb{Q}$ versehen mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie und $D = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ die Menge der irrationalen Zahlen, versehen mit der diskreten Topologie. Man zeige, daß für $f : D \to \mathrm{pt}$ und Basiswechsel mit $p : \mathbb{Q} \to \mathrm{pt}$ der von der kanonischen Transformation induzierte Morphismus $p^* f_* \mathbb{Z}_D \to g_* q^* \mathbb{Z}_D$ kein Isomorphismus ist. Genauer überlege man sich, daß der globale Schnitt der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_{D\times\mathbb{Q}}$ auf $D \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$, der konstant Eins ist oberhalb der Diagonalen und konstant Null unterhalb, einem globalen Schnitt von $g_* q^* \mathbb{Z}_D$ entspricht, der nicht von einem globalen Schnitt von $p^* f_* \mathbb{Z}_D$ herkommen kann. Dieses Beispiel zeigt, daß in 9.1.1 auf die Voraussetzung offenlokal zusammenhängender Fasern im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

9.2 Derivierter gefaserter Basiswechsel

9.2.1. Ein topologischer Raum X heiße **schwach garbenazyklisch**, wenn für jede abelsche Gruppe M von Koeffizienten seine höhere Garbenkohomologie verschwindet und die natürliche Abbildung einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} \Gamma(M_X)$ induziert. Offensichtlich ist jeder zusammenziehbare Raum schwach garbenazyklisch. Jeder zusammenziehbare Raum ist nach 6.5.13 sogar schwach basisfest garbenazyklisch.

Satz 9.2.2 (**Derivierter gefaserter Basiswechsel**). *Sind in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen $fq = pg$ die Horizontalen p, q Faserbündel mit offenlokal schwach garbenazyklischer Faser, so sind die Basiswechsel für abelsche Garben Isotransformationen*

$$p^*(\mathrm{R}^i f_*) \xRightarrow{\sim} (\mathrm{R}^i g_*) q^*$$

Vorschau 9.2.3. In [TSF] **??** zeigen wir eine Variante in derivierten Kategorien.

Beweis. Für $i = 0$ folgt das aus unserem underivierten gefaserten Basiswechsel 9.1.1, denn jeder schwach garbenazyklische Raum ist zusammenhängend und damit jeder offenlokal schwach garbenazyklische Raum auch offenlokal zusammenhängend. Im allgemeinen können wir uns mit offenem Basiswechsel auf den Fall eines kartesischen Diagramms der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \times Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

für offenlokal schwach garbenazyklisches Z zurückziehen. Trägt zusätzlich X die diskrete Topologie, so verschwinden die höheren derivierten Vorschübe $\mathrm{R}^i f_*$ für $i > 0$ und die Behauptung folgt, wenn wir für $i > 0$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ auch $(\mathrm{R}^i g_*) q^* \mathcal{F} = 0$ zeigen. Gegeben $B \Subset Y$ und $U \Subset Z$ mit U schwach garbenazyklisch finden wir mit 4.3.39 aber

$$\mathrm{H}^i(g^{-1}(B \times U); q^*\mathcal{F}) = \prod_{x \in f^{-1}(B)} \mathrm{H}^i(U; \mathcal{F}_x) = 0$$

für $i > 0$ und durch Übergang zum Kolimes erkennt man, daß für $i > 0$ alle Halme von $(\mathrm{R}^i g_*) q^* \mathcal{F}$ verschwinden. Damit haben wir unseren Satz für diskretes X bewiesen. Um unseren Satz für allgemeines X zu zeigen, müssen wir nur für jede abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ eine Einbettung in eine f_*-azyklische abelsche Garbe finden, die unter q^* zu einer g_*-azyklischen Garbe wird: Dann können wir für jede abelsche Garbe induktiv eine Auflösung durch Garben dieser Art konstruieren und der Satz folgt wieder aus seiner underivierten Variante 9.1.1. Um unsere Einbettung zu konstruieren, bilden wir die **Diskretisierung** X^δ, von X, indem wir die Menge X mit der diskreten Topologie versehen, geben der Identität den Namen $h : X^\delta \to X$ und erhalten ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X^\delta \times Z \arrow[r, "r"] \arrow[d, "k"'] & X^\delta \arrow[d, "h"] \\ X \times Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

Die kanonische Abbildung $\mathcal{F} \to h_* h^* \mathcal{F}$ alias Godementauflösung ist dann eine Einbettung in eine f_*-azyklische Garbe, und es reicht zu zeigen, daß auch

$q^*h_*h^*\mathcal{F}$ azyklisch ist für g_*. Nach dem bereits behandelten Fall verschwinden aber die höheren derivierten Vorschübe von $r^*h^*\mathcal{F}$ sowohl unter k als auch unter gk. Gegeben eine injektive Auflösung $r^*h^*\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ ist also $k_*r^*h^*\mathcal{F} \hookrightarrow k_*\mathcal{I}^\triangleleft$ eine welke Auflösung von $k_*r^*h^*\mathcal{F}$ und $g_*k_*r^*h^*\mathcal{F} \hookrightarrow g_*k_*\mathcal{I}^\triangleleft$ ist immer noch exakt. So folgt, daß $k_*r^*h^*\mathcal{F} \cong q^*h_*h^*\mathcal{F}$ azyklisch ist für g_*. □

Korollar 9.2.4 (Höhere Vorschübe längs Faserbündeln mit spezieller Basis). *Gegeben ein Faserbündel $g : E \to Z$ über einem offenlokal schwach garbenazyklischen Raum Z und eine abelsche Gruppe M sind die höheren Vorschübe $\mathrm{R}^i g_* M_E$ der konstanten Garben lokal konstant und Basiswechsel liefert Isomorphismen zwischen ihren Halmen und den Kohomologiegruppen der Faser*

$$(\mathrm{R}^i g_* M_E)_z \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(g^{-1}(z); M)$$

Beweis. Mit offenem Basiswechsel dürfen wir annehmen, daß unsere Abbildung eine Projektion $g : X \times Z \to Z$ ist für einen weiteren topologischen Raum X. Jetzt wenden wir derivierten gefaserten Basiswechsel 9.2.2 an auf die konstante Garbe $M_X \in \mathrm{Ab}_{/X}$ im kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & \mathrm{top} \end{tikzcd}$$

und finden, daß in diesem Fall die $\mathrm{R}^i g_* M_E$ sogar konstante Garben sind. □

Korollar 9.2.5 (Kriterium für schwache basisfeste Azyklizität). *Gegeben Z zusammenhängend und offenlokal schwach garbenazyklisch sowie eine Schranke $n \geq 1$ mit $\mathrm{H}^1(Z; M) = \ldots = \mathrm{H}^{n+2}(Z; M) = 0$ für jede beliebige abelsche Gruppe M und X ein beliebiger topologischer Raum induziert der Rückzug für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und $0 \leq q \leq n$ Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X \times Z; \mathrm{pr}^* \mathcal{F})$$

9.2.6. Insbesondere ist ein Raum Z mit den im Korollar geforderten Eigenschaften schwach bag-n-azyklisch im Sinne von 6.5.13. Noch spezieller hat jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit, deren Kohomologie mit beliebigen abelschen Gruppen als Koeffizienten in den Graden $1, \ldots, n+2$ verschwindet, diese Eigenschaft. In der Tat ist jede Mannigfaltigkeit offenlokal zusammenziehbar und damit offenlokal schwach garbenazyklisch.

Beweis. Wir arbeiten mit dem kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "p"] & \mathrm{top} \end{tikzcd}$$

Derivierter gefaserter Basiswechsel 9.2.2 liefert uns zunächst einmal Isomorphismen $p^*(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^i g_*)q^*\mathcal{F}$ und zeigt insbesondere, daß auch die linke Seite eine konstante Garbe ist. Nach Annahme verschwinden darauf die $\mathrm{R}^j p_*$ für $1 \le j \le n+2$ und wir erhalten Isomorphismen

$$(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_* p^*(\mathrm{R}^i f_*)\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^0 p_*)(\mathrm{R}^i g_*)q^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^i (p \circ g)_*)q^*\mathcal{F}$$

für $1 \le i \le n+1$ mit ganz rechts der Leray'schen Spektralsequenz 10.3.15 oder elementarer 3.6.12 angewandt auf den Komplex $g_*\mathcal{I}^\triangleleft$ für $q^*\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\triangleleft$ eine injektive Auflösung, der dann konstante Kohomologiegarben haben muß, und den Funktor p_*. Ist $\mathcal{F}$ injektiv, so ist $q^*\mathcal{F}$ mithin $(n+1)$-Γ-azyklisch. Jede injektive Auflösung von $\mathcal{F}$ wird also unter q^* zu einer Auflösung von $q^*\mathcal{F}$ durch $(n+1)$-Γ-azyklische Garben. Da so eine Auflösung nach 3.6.10 aber bereits die Kohomologie in jedem Grad $\le n$ berechnet, folgt die Behauptung. $\square$

Übungen

Übung 9.2.7. Ist $j : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$ die Einbettung und $\mathcal{F}$ eine lokal konstante abelsche Garbe mit Monodromie $T : \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1$ wie in 8.1.20, so gilt für den Halm bei Null ihrer derivierten Vorschübe

$$(\mathrm{R}^q j_*\mathcal{F})_0 \cong \begin{cases} \{a \in \mathcal{F}_1 \mid T(a) = a\} & q = 0; \\ \mathcal{F}_1 / \operatorname{im}(T - \mathrm{id}) & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Es reicht, einen Isomorphismus $(\mathrm{R}^q j_*\mathcal{F})_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathbb{C}^\times; \mathcal{F})$ zu konstruieren. Den Rest erledigt dann 4.7.10.

Vorschau 9.2.8. Ist $j : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$ die Einbettung und $\mathcal{F}$ eine lokal konstante abelsche Garbe auf $\mathbb{C}^\times$, so gilt $\mathrm{H}^q(\mathbb{C}; j_!\mathcal{F}) = 0$ für alle q. Eine mögliche Argumentation, die hier aber für uns noch nicht zugänglich ist, besteht darin, vom ausgezeichneten Dreieck

$$j_!\mathcal{F} \to j_*\mathcal{F} \to i_* i^* j_*\mathcal{F} \to$$

auszugehen, mit i der Einbettung des Ursprungs, in dem alle Funktoren als derivierte Funktoren zu verstehen sind. Dann folgt die Behauptung aus dem letzten Isomorphismus von Übung 9.2.7. Betrachten wir dann das ausgezeichnete Dreieck

$$i_! i^!(j_!\mathcal{F}) \to j_!\mathcal{F} \to j_* j^* j_!\mathcal{F} \to$$

und bilden die Kohomologie, so finden wir $\mathrm{H}^q(\mathbb{C}^\times; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{q+1} i^! j_!\mathcal{F}$. Nach 4.7.10 sagt das also

$$\mathcal{H}^q i^! j_!\mathcal{F} \cong \begin{cases} \{a \in \mathcal{F}_1 \mid T(a) = a\} & q = 1; \\ \mathcal{F}_1 / \operatorname{im}(T - \mathrm{id}) & q = 2; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist bereits in neuer Notation zu verstehen, in alter Notation hätten wir $\mathrm{R}^q i^!$ statt $\mathcal{H}^q i^!$ zu schreiben und $i^!$ hätte eine andere Bedeutung. Eigentlich sollte man hier zeigen, daß $i^! j_! \mathcal{F}$ in der derivierten Kategorie $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab})$ isomorph ist zum Komplex mit dem Differential $(T - \mathrm{id}) : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ vom Grad 1 zum Grad 2 und nur Nullen außerhalb dieser beiden Grade.

9.3 Gruppenkohomologie als Garbenkohomologie

9.3.1. Wir erinnern aus 3.7.5 die Definition der Kohomologie einer diskreten Gruppe mit Koeffizienten in einer Darstellung.

9.3.2. Ist $G \looparrowright A$ eine abelsche Gruppe A mit einer Operation einer diskreten Gruppe G und $X \looparrowleft G$ ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Rechtsoperation von G, so bilden wir wie in [TF] 2.4.4 erklärt die Überlagerung

$$X \times_{/G} A \to X/G$$

und bezeichnen mit $\tilde{A}$ die Garbe ihrer Schnitte. Auf diese Weise erhalten wir einen exakten Funktor $A \mapsto \tilde{A}$ von der Kategorie $G\text{-}\mathrm{Ab}$ der G-Moduln in die Kategorie $\mathrm{Ab}_{/(X/G)}$ der abelschen Garben auf dem Bahnenraum X/G. Wir nennen $\tilde{A}$ die **zu** A **assoziierte Garbe** und erhalten natürliche Homomorphismen $A^G \to \Gamma\tilde{A}$ durch die Vorschrift $a \mapsto (xG \mapsto [x, a])$.

Satz 9.3.3 (**Gruppenkohomologie als Garbenkohomologie**). *Sei X ein global und offenlokal schwach garbenazyklischer topologischer Raum, auf dem eine diskrete Gruppe G topologisch frei operiert. So induzieren unsere natürlichen Homomorphismen $A^G \to \Gamma\tilde{A}$ aus 9.3.2 natürliche Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(G; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X/G; \tilde{A})$$

zwischen der Gruppenkohomologie von G mit Koeffizienten in einem G-Modul A und der Garbenkohomologie des Quotienten X/G mit Koeffizienten in der zu A assoziierten Garbe $\tilde{A}$.

9.3.4 (**Gruppenkohomologie von diskreter Gruppe**). Da die Milnorkonstruktion einen zusammenziehbaren und offenlokal zusammenziehbaren topologisch freien G-Rechtsraum liefert, erhalten wir insbesondere für jede diskrete topologische Gruppe G und jede abelsche Gruppe M einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^q(G; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_G(\mathrm{top}; M)$$

zwischen der Kohomologie von M als G-Modul mit der trivialen Operation und der G-äquivarianten Kohomologie des einpunktigen Raums mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe M.

Beweis. Ist X zusammenhängend und verschwindet seine erste Kohomologie mit konstanten Koeffizienten für jede abelsche Koeffizientengruppe, so ist jede lokal konstante abelsche Garbe auf X konstant nach 1.2.6 und 5.1.1. Operiert nun eine diskrete Gruppe G topologisch frei von rechts auf X und bezeichnen wir Kategorien lokal konstanter Garben mit einem oberen Index lk, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Kategorien der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ab}_{/X} & \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/X} \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\approx"] \arrow[dr, Rightarrow, "\sim"] & \mathrm{Ab} \\
\mathrm{Ab}_{/(X/G)} \arrow[u] & \mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/(X/G)} \arrow[l, hook'] \arrow[u] \arrow[r, "\approx"] \arrow[dr, Rightarrow, "\sim"] & G\text{-}\mathrm{Ab} \arrow[u] \\
\mathrm{Ab}_{/\mathrm{top}} \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathrm{Ab}_{/\mathrm{top}} \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathrm{Ab} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Die Vertikalen meinen das Zurückholen von Garben beziehungsweise das Zurückholen der G-Operation vermittels $1 \to G \to 1$. Die obere rechte Horizontale ist der Funktor der globalen Schnitte und die mittlere rechte Horizontale der Faserfunktor $\mathrm{Top}_{X/G}(X, \ )$ aus [TF] 2.4.4.2, der ja quasiinvers ist zu $A \mapsto \tilde{A}$. Gehen wir im Quadrat unten rechts zu den Rechtsadjungierten der Vertikalen über, so ergeben sich kanonische Isomorphismen

$$\Gamma \tilde{A} \xrightarrow{\sim} A^G$$

Um zu zeigen, daß sie sogar Isomorphismen $\mathrm{H}^q(X/G; \tilde{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(G; A)$ induzieren, müssen wir nur wissen, daß injektive Objekte A von $G\text{-}\mathrm{Ab}$ unter der Zuordnung $A \mapsto \tilde{A}$ zu Γ-azyklischen Garben $\tilde{A}$ auf X/G werden. Nun ist aber jedes injektive Objekt $A \in G\text{-}\mathrm{Ab}$ Summand eines $\mathrm{ind}_1^G I$ für eine injektive abelsche Gruppe I und $\mathrm{ind}_1^G I$ entspricht nach Übergang zu den Rechtsadjungierten der Vertikalen im oberen rechten Quadrat der lokal konstanten Garbe $\pi_* I_X$ auf X/G für $\pi : X \to X/G$ die Projektion. Da X und damit auch X/G offenlokal schwach garbenazyklisch ist , muß hier π_* nach 9.2.4 auch wirklich lokal konstante Garben zu lokal konstanten Garben machen. Zusätzlich zeigt diese Bedingung, daß die höheren Derivierten $\mathrm{R}^q\pi_*$ auf lokal konstanten abelschen Garben verschwinden. Unsere Garbe $\pi_* I_X$ ist damit offensichtlich Γ-azyklisch, wenn X wie angenommen schwach garbenazyklisch ist. $\square$

Übungen

Übung 9.3.5. Man berechne nocheinmal die Kohomologiegruppen der Kreislinie mit lokal konstanten Koeffizienten 4.7.10 und verwende statt offener Überdeckungen unsere Gruppenkohomologie aus 3.7.17.

9.4 Fakofaserungen

9.4.1. Wir haben bereits bemerkt, daß die Garbenopfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und die Garbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ zueinander opponierte Fasern haben, in Formeln $\mathrm{Ens}_{/\!/X} = (\mathrm{Ens}_{/X})^{\mathrm{opp}}$, und haben in 4.3.25 einen Isomorphismus $f^* \overset{\sim}{\Rightarrow} (f^*)^{\mathrm{opp}}$ zwischen dem Rückzug in $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}}$ und dem vom Rückzug in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}}$ auf den opponierten Kategorien induzierten Funktor angegeben. Hier will ich besprechen, welche Verträglichkeiten diese Isomorphismen ihrerseits erfüllen, ja inwiefern die Garbenopfaserung und die Garbenfaserung sich gegenseitig vollständig beschreiben. Ich skizziere erst einen Zugang über „Pseudofunktoren“ und führe dann einen Zugang über „Fakofaserungen“ aus, der dem in diesem Text verfolgten Ziel der Vermeidung höherer Strukturen näher kommt.

9.4.2. Ein Ansatz, die Beziehung zwischen Garbenfaserung und Garbenopfaserung zu verstehen, ist die Sprache der Pseudofunktoren, vergleiche 9.6.7. Ich will ihn hier nur kurz skizzieren. Einen Kofaserfunktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ anzugeben „läuft auf dasselbe hinaus“ wie einen Köchermorphismus $\mathscr{B} \to \mathrm{Cat}$ anzugeben, der jedem Objekt $X \in \mathscr{B}$ eine Kategorie $\mathscr{C}_X$ zuordnet und jedem $f : X \to Y$ einen Funktor $f_\dagger : \mathscr{C}_X \to \mathscr{C}_Y$, und zusätzlich Isotransformationen $c(f,g) : g_\dagger f_\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (gf)_\dagger$ sowie $c_X : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_X} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_{X\dagger}$ anzugeben, die wir die „Identifikationen“ genannt hatten und ihrerseits weitere Verträglichkeiten erfüllen, die ich hier nicht ausschreibe. Halten wir hinter unseren Köchermorphismus den Köchermorphismus des Opponierens $\mathrm{opp} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$ dahinter und nehmen die Inversen der von den Identifikationen induzierten Isotransformationen, so erhalten wir ein Datum derselben Art. Gehen wir dann unser „läuft auf dasselbe hinaus“ wieder zurück, so erhalten wir einen weiteren Kofaserfunktor mit opponierten Fasern aber denselben Vorschüben. Die Beziehung zwischen Garbenfaserung und Garbenopfaserung kann als die analoge Konstruktion im Fall von Faserungen statt Kofaserungen verstanden werden.

9.4.3. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ erklären wir ihre **Diskretisierung** $\mathcal{C}^\delta$ als die Unterkategorie mit denselben Objekten aber nur Identitäten als Morphismen.

Definition 9.4.4. Eine **Fakofaserung** über einer Kategorie $\mathscr{B}$ ist ein Datum aus einem Faserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und einem Kofaserfunktor $\bar{p} : \bar{\mathscr{C}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$, die nach Zurückholen auf die diskretisierte Basis $\mathscr{B}^\delta$ übereinstimmen, sowie ausgezeichneten Bijektionen

$$i : \mathscr{C}_f^\times(\mathcal{F},\mathcal{G}) \overset{\sim}{\to} \bar{\mathscr{C}}_{f^\circ}^\times(\mathcal{G},\mathcal{F})$$

zwischen den Mengen der jeweiligen kartesischen beziehungsweise kokartesischen Morphismen, die verträglich sind mit Verknüpfung und die im Fall $f = \mathrm{id}_X$ zum Invertieren von Isomorphismen der Faser spezialisieren.

9.4.5 (**Fakofaserung und Identifikationen**). Anders und etwas vage gesagt besteht eine Fakofaserung aus zwei Faserfunktoren $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ und $q := \bar{p}^{\mathrm{opp}}$:

$\bar{\mathscr{C}}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}$ mit zueinander opponierten Fasern und Isomorphismen zwischen den Rückzügen der ersten und den opponierten Rückzügen der zweiten Faserung $f^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (f^\ddagger)^{\mathrm{opp}}$ derart, daß die Identifikationen $f^\dagger g^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (gf)^\dagger, \mathrm{id}^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}$ der ersten Faserung darunter den Inversen der Opponierten der Identifikationen $f^\ddagger g^\ddagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (gf)^\ddagger, \mathrm{id}^\ddagger \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}$ entsprechen.

Beispiel 9.4.6. Die Familienkategorien einer Trennschmelzkategorie bilden eine Fakofaserung über der Familienkategorie der terminalen Trennkategorie. In [TSF] 1.6.1 führen wir den Begriff einer „Trennschmelzfakofaserung“ ein, einer gemeinsamen Verallgemeinerung von Trennschmelzkategorien und Fakofaserungen.

Beispiel 9.4.7 (**Fakofaserung der Mengengarben**). Die Mengengarbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und die zur Garbenopfaserung opponierte Kofaserung $(\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}})^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$ bilden zusammen mit unseren ausgezeichneten Bijektionen aus 4.3.25 eine Fakofaserung. In der Tat haben wir in 4.3.26 für Morphismen über f der Garbenopfaserung eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Top}_X(X \times_Y \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{F}})$$

konstruiert. Für Morphismen über f der Garbenfaserung erhalten wir dahingegen unmittelbar eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Top}_X(\bar{\mathcal{F}}, X \times_Y \bar{\mathcal{G}})$$

Kartesische Morphismen sind jeweils die Morphismen links, die rechts Isomorphismen in Top_X entsprechen, und das Invertieren dieser Isomorphismen liefert in diesem Fall die Bijektionen unserer Fakofaserung. Wie in 9.4.5 ausgeführt bedeutet das, daß die Isomorphismen, die wir so zwischen den Rückzügen von $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und den opponierten Rückzügen von $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ erhalten, mit den jeweiligen Identifikationen verträglich sind.

Beispiel 9.4.8 (**Fakofaserung der Mengengarben**). Die Mengengarbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und die zur Garbenopfaserung der Mengengarben opponierte Kofaserung $(\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}})^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$ bilden zusammen mit unseren ausgezeichneten Bijektionen aus 4.3.25 eine Fakofaserung. In der Tat haben wir in 4.3.26 für Morphismen über f der Garbenopfaserung eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/\!/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Top}_X(X \times_Y \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{F}})$$

konstruiert. Für Morphismen über f der Garbenfaserung erhalten wir dahingegen unmittelbar eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}_{/f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Top}_X(\bar{\mathcal{F}}, X \times_Y \bar{\mathcal{G}})$$

Kartesische Morphismen sind jeweils die Morphismen links, die rechts Isomorphismen in Top_X entsprechen, und das Invertieren dieser Isomorphismen liefert

in diesem Fall die Bijektionen unserer Fakofaserung. Wie in 9.4.5 ausgeführt bedeutet das, daß die Isomorphismen, die wir so zwischen den Rückzügen von $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und den opponierten Rückzügen von $\mathrm{Ens}_{/\!/\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ erhalten, mit den jeweiligen Identifikationen verträglich sind.

Beispiel 9.4.9 (**Fakofaserung zu étale eingeschränkter Schreikofaserung**). Ein Faserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ derart, daß alle Rückzüge einen Linksadjungierten haben, ist eine Bifaserung. Ein Beispiel ist unsere auf étale separierte Abbildungen eingeschränkte Garbenfaserung

$$\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$$

Wir haben in 7.3.5 für alle Morphismen f der Basis Isomorphismen zwischen den Funktoren $f_!$ und den Linksadjungierten der Rückzüge f^* angegeben. Andererseits sind die Funktoren $f_¡ = f_!^{\mathrm{opp}}$ die Vorschübe der Garbenschreikofaserung, die wir einschränken können zu einer Kofaserung $\mathrm{Ab}^!_{/\!/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$ und die durch Opponieren zu einer Faserung

$$(\mathrm{Ab}^!_{/\!/\mathrm{Top}^{\text{éts}}})^{\mathrm{opp}} \to (\mathrm{Top}^{\text{éts}})^{\mathrm{opp}}$$

wird. Diese opponierte Garbenschreikofaserung hat dieselben Fasern wie unsere Kofaserung $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$ und man prüft, daß sie zusammen eine Fakofaserung über $(\mathrm{Top}^{\text{éts}})^{\mathrm{opp}}$ bilden mit den Bijektionen $i : \mathscr{C}_f^\times(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathscr{C}}_{f^\circ}^\times(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ gegeben durch die Bijektionen

$$i : (\mathrm{Ab}^!_{/\!/f})^\times(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^\times_{/f}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

für $f : X \to Y$ étale separiert, die mit den offensichtlichen Bijektionen vom Invertieren $(\mathrm{Ab}^!_{/\!/Y})^\times(f_¡\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^\times_{/Y}(f_!\mathcal{G}, \mathcal{F})$ herkommen. Wie in 9.4.5 ausgeführt kann man das auch so formulieren, daß die zwischen den Vorschüben von $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$ und den opponierten Vorschüben von $\mathrm{Ab}^!_{/\!/\mathrm{Top}^{\text{éts}}} \to \mathrm{Top}^{\text{éts}}$ in 7.3.5 angegebenen Isomorphismen mit den jeweiligen Identifikationen verträglich sind. In [TSS] 1.11.20 beschreiben wir noch in weiteren Fällen die im Sinne von 9.4.11 oppinverse Kofaserung zur Garbenschreikofaserung.

9.4.10 (**Ergänzen zu Fakofaserung**). Jeder Faserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ läßt sich eindeutig bis auf eindeutigen objektfesten Isomorphismus zu einer Fakofaserung ergänzen, indem wir

$$\bar{\mathscr{C}}_{f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) := \mathscr{C}_X(f^\dagger\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

setzen für $f : X \to Y$ und die übrigen Daten in der offensichtlichen Weise konstruieren. Unter einem **objektfesten Funktor** verstehen wir dabei einen Funktor, der auf Objekten die Identität ist. Ebenso läßt sich jeder Kofaserfunktor

$\bar{p} : \bar{\mathscr{C}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$ eindeutig bis auf eindeutigen objektfesten Isomorphismus zu einer Fakofaserung ergänzen, indem wir

$$\mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \bar{\mathscr{C}}_X(\mathcal{F}, f_\dagger^\circ \mathcal{G})$$

setzen für $f : X \to Y$ alias $f^\circ : Y \to X$ und die übrigen Daten in der offensichtlichen Weise konstruieren. Diese Ergänzungen verdienen also einen bestimmten Artikel und eine eigene Notation. Gegeben eine Faserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ notieren wir den Kofaseranteil der zugehörigen Fakofaserung statt $\bar{\mathscr{C}}$ auch $\mathscr{C}^{\mathrm{k}}$ und erhalten so eine Kofaserung

$$\mathscr{C}^{\mathrm{k}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$$

Gegeben eine Kofaserung $\mathscr{D} \to \mathscr{A}$ notieren wir den Faseranteil der zugehörigen Fakofaserung auch $\mathscr{D}^{\mathrm{f}}$ und erhalten so eine Faserung

$$\mathscr{D}^{\mathrm{f}} \to \mathscr{A}^{\mathrm{opp}}$$

Diesen Übergang nennen wir das **Invertieren** einer Faserung zu einer Kofaserung über der opponierten Basis und umgekehrt.

9.4.11. Zu jeder Fakofaserung bilden wir die **opponierte Fakofaserung** über derselben Basis $\mathscr{B}$, indem wir die Kofaserung $p^{\mathrm{opp}} : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$ und die Faserung $\bar{p}^{\mathrm{opp}} : \bar{\mathscr{C}}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}$ betrachten und die Bijektionen i durch ihre Inversen ersetzen. Zusammen können wir so für jeden Faserfunktor $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ den **opponiert-invertierten** oder kurz **oppinvertierten Faserfunktor**

$$\mathscr{C}^{\mathrm{of}} := (\mathscr{C}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{f}} \to \mathscr{B}$$

über derselben Basis mit opponierten Fasern aber, bis auf das Opponieren, denselben Rückzügen bilden. Ebenso können wir so für jeden Kofaserfunktor $\mathscr{D} \to \mathscr{A}$ den **oppinvertierten Kofaserfunktor**

$$\mathscr{D}^{\mathrm{ok}} := (\mathscr{D}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{k}} \to \mathscr{A}$$

über derselben Basis mit opponierten Fasern aber, bis auf das Opponieren, denselben Vorschüben bilden. In so einer Situation sagen wir, die beiden Faserfunktoren beziehungsweise Kofaserfunktoren seien zueinander **oppinvers** oder genauer **oppinvers vermittels gewisser Bijektionen** i, die wir zusätzlich anzugeben haben.

9.4.12. Man kann weiter zeigen, daß Invertieren und Opponieren „vertauscht“ und daß zweimaliges Invertieren ebenso wie zweimaliges Opponieren mit der Identität „übereinstimmt“. Ich verzichte darauf, das ganz präzise auszuschreiben, weil es für uns im folgenden in größerer Präzision nicht relevant ist.

Beispiel 9.4.13 (**Oppinverse Familienfaserungen**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ erinnern wir ihre Familienfaserung 6.2.24 über Ens. Die Familienfaserungen zu $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ sind zueinander oppinvers vermittels gewisser Bijektionen i, die der Leser selbst erraten mag.

9.5 Das sucht noch seinen Platz

9.5.1. Zu jeder Faserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ erklären wir die **faserduale Kofaserung**

$$\mathscr{C}^{\mathrm{fdual}} \to \mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$$

durch die Vorschrift, daß wir als Objekte die Objekte von $\mathscr{C}$ nehmen und als Abbildung auf den Objekten dieselbe Abbildung wie zuvor und die Morphismen erklären durch

$$\mathscr{C}^{\mathrm{fdual}}_{f^\circ}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) := \mathscr{C}_X(f^\dagger \mathcal{G}, \mathcal{F})$$

für einen und jeden kartesischen Lift $f^\dagger \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ von $f : X \to Y$. Gegeben so ein Morphismus φ und ein weiterer Morphismus $g : Y \to Z$ in der Basis und $\psi \in \mathscr{C}^{\mathrm{fdual}}_{g^\circ}(\mathcal{E}, \mathcal{G}) = \mathscr{C}_Y(g^\dagger \mathcal{E}, \mathcal{G})$ erklären wir die Verknüpfung $\varphi \mathbin{\hat{\circ}} \psi$ in unserer faserdualen Kategorie als $\varphi \mathbin{\hat{\circ}} \psi := \varphi \circ f^\dagger \psi$ für die in $\mathscr{C}_X$ zu verstehende Verknüpfung rechts. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Verknüpfung auf unseren bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Morphismenmengen wohldefiniert ist und daß der so entstehende Köcher mit Verknüpfung auch wirklich eine Kategorie ist, und wir in der Tat eine Kofaserung erhalten. Die Konstruktion liefert ausgezeichnete Isomorphismen zwischen den Fasern und der Vorschub unter der faserdualen Kofaserung entspricht darunter dem Rückzug in unserer urprünglichen Faserung. Analog erklärt man zu jeder Kofaserung die faserduale Faserung und erhält einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen dem Faserdualen des Faserdualen und der ursprünglichen Faserung beziehungsweise Kofaserung.

9.5.2. Das Dualisieren vertauscht mit dem Übergang zu den opponierten Kategorien. Aus jeder Faserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ erhalten wir so die **faserdualopponierte Faserung**

$$\mathscr{C}^{\mathrm{fdo}} := (\mathscr{C}^{\mathrm{fdual}})^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{B}$$

Analoges gilt für Kofaserungen und wir verwenden dafür dieselbe Notation. Bezeichnen wir zu jeder Faserung $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ mit Faserung $\mathscr{C}^{\mathrm{kart}} \to \mathscr{B}$ die Faserung mit nur den kartesischen Morphismen in der Ausgangskategorie, so liefern die Konstruktionen einen Isomorphismus von Faserungen $\mathscr{C}^{\mathrm{kart}} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{C}^{\mathrm{fdo}})^{\mathrm{kart}}$, der in den Fasern das Invertieren von Morphismen ist.

9.6 Kategorienfaserungen und -kofaserungen*

9.6.1. Unter einer **Zerfällung eines Kofaserfunktors** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$, französisch **clivage**, versteht man eine Vorschrift $(f, \mathcal{F}) \mapsto (f_\dagger \mathcal{F}, \kappa_{f,\mathcal{F}})$, die zu jedem Morphismus in der Basis $f : X \to Y$ und jedem Objekt $\mathcal{F} \in \mathscr{C}_X$ einen kokartesischen Lift $\kappa_{f,\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to f_\dagger \mathcal{F}$ auszeichnet. Wie bereits besprochen sind diese Wahlen eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

9.6.2. Unter einer **Spaltung eines Kofaserfunktors**, französisch **scindage**, versteht man eine Zerfällung, bei der die Verknüpfung von je zwei ausgezeichneten Transportmorphismen wieder ein Transportmorphismus ist, in Formeln $g_\dagger(f_\dagger\mathcal{F}) = (gf)_\dagger\mathcal{F}$ und $\kappa_{g,f_\dagger\mathcal{F}} \circ \kappa_{f,\mathcal{F}} = \kappa_{gf,\mathcal{F}}$ für alle verknüpfbaren f, g. Es ist im allgemeinen nicht möglich, solch eine Spaltung zu finden: Zum Beispiel ist für jeden surjektiven Gruppenhomomorphismus $G \twoheadrightarrow H$ der Funktor $[G] \to [H]$ der zugehörigen Ein-Objekt-Kategorien ein Kofaserfunktor, eine Zerfällung dieses Kofaserfunktors bedeutet die Auswahl eines Repräsentantensystems für die Fasern, und eine Spaltung eine Zerfällung durch einen Gruppenhomomorphismus, die es im allgemeinen eben nicht gibt.

9.6.3. Gegeben ein zerfällter Kofaserfunktor kommutieren alle Diagramme

$$\begin{array}{ccc} h_\dagger \circ g_\dagger \circ f_\dagger & \Rightarrow & (h \circ g)_\dagger \circ f_\dagger \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ h_\dagger \circ (g \circ f)_\dagger & \Rightarrow & (h \circ g \circ f)_\dagger \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise aus unseren Identifikationen gebildeten Transformationen. Weiter stimmt $c(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : \mathrm{id}_{X\dagger} \circ \mathrm{id}_{X\dagger} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_{X\dagger}$ überein mit der aus $c_X : \mathrm{id}_{X\dagger} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}$ durch Vorschalten und ebenso mit der daraus durch Nachschalten von $\mathrm{id}_{X\dagger}$ entstehenden Isotransformation, in Formeln $c(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{X\dagger}\, c_X = c_X\, \mathrm{id}_{X\dagger}$.

9.6.4. Sei $\mathscr{B}$ eine Kategorie. Unter einer **Kategorienkofaserung** $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, \dagger, c)$ über $\mathscr{B}$ verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathscr{B}$ eine Kategorie $\mathrm{C}_{/X}$ zuordnet, jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathscr{B}$ einen Funktor $f_\dagger : \mathrm{C}_{/X} \to \mathrm{C}_{/Y}$, und jedem Paar $g \circ f$ von verknüpfbaren Morphismen in $\mathscr{B}$ eine Isotransformation $c = c(g, f) : g_\dagger \circ f_\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (g \circ f)_\dagger$ derart, daß $\mathrm{id}_{X\dagger}$ für alle X eine Äquivalenz von Kategorien ist und daß alle Diagramme

$$\begin{array}{ccc} h_\dagger \circ g_\dagger \circ f_\dagger & \Rightarrow & (h \circ g)_\dagger \circ f_\dagger \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ h_\dagger \circ (g \circ f)_\dagger & \Rightarrow & (h \circ g \circ f)_\dagger \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise aus den Transformationen c gebildeten Transformationen kommutieren. Wir nennen die Kategorie $\mathrm{C}_{/X}$ die **Faser über** X unserer Kategorienkofaserung, die Funktoren $f_\dagger$ ihre **Vorschübe**, die Transformationen $c(g, f)$ ihre **Identifikationen** und die Kategorie $\mathscr{B}$ ihre **Basis**.

Vorschau 9.6.5. In einer Terminologie, die wir hier nicht einführen, ist eine Kategorienkofaserung über einer Kategorie $\mathscr{B}$ dasselbe wie ein **laxer** 2**-Funktor** alias **Pseudofunktor** von der Kategorie $\mathscr{B}$ in die Zweikategorie der Kategorien.

9.6.6 (**Kofaserfunktoren und Kategorienkofaserungen**). Nach 9.6.3 bilden für jeden zerfällten Kofaserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ seine Fasern zusammen mit den für

jeden Morphismus der Basis gewählten Vorschüben und deren Identifikationen eine Kategorienkofaserung. Umgekehrt können wir zu jeder Kategorienkofaserung $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, {}_\dagger, c)$ über einer Basiskategorie $\mathscr{B}$ einen zerfällten Kofaserfunktor $p : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ konstruieren, indem wir als Objektmenge $\mathscr{C} := \bigsqcup_{X \in \mathscr{B}} \mathrm{C}_{/X}$ nehmen und für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in der Basis $\mathscr{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{C}_{/Y}(f_\dagger \mathcal{F}, \mathcal{G})$ setzen und für $g : Y \to Z$ die Verknüpfung von f mit einem Element von $\mathscr{C}_g(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathrm{C}_{/Z}(g_\dagger \mathcal{G}, \mathcal{H})$ erklären durch das Vorschalten in $\mathrm{C}_{/Z}$ des Bildes unseres ursprünglichen Elements unter der Komposition

$$\mathrm{C}_{/Y}(f_\dagger \mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{C}_{/Z}(g_\dagger f_\dagger \mathcal{F}, g_\dagger \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{C}_{/Z}((g \circ f)_\dagger \mathcal{F}, g_\dagger \mathcal{G})$$

von Vorschub und dem Vorschalten einer Identifikation. Wir notieren die Ausgangskategorie dieses Kofaserfunktors $\mathscr{C} = \mathrm{Kof}(\mathrm{C})$. Unsere beiden Konstruktionen sind salopp gesprochen zueinander invers, aber das soll hier nicht genauer ausformuliert werden.

9.6.7. Analog ist ein zerfällter Faserfunktor über einer Kategorie $\mathscr{B}$ „dasselbe“ wie ein Pseudofunktor $\mathscr{B}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Cat}$ und damit auch „dasselbe“ wie ein zerfällter Kofaserfunktor über $\mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$. Diese zwei Seiten derselben Medaille sind, was das Konzept einer Fakofaserung aus 9.4.4 in anderer Weise einfängt. Zusätzlich können wir auch noch den durch das Opponieren gegebenen opp-Zweifunktor

$$\mathrm{opp} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$$

nachschalten, der jeder Kategorie $\mathcal{C}$ die opponierte Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ zuordnet, jedem Funktor F den auf der opponierten Kategorien induzierten Funktor F^{opp} und jeder Transformation $\tau : F \Rightarrow G$ die opponierte Transformation $\tau^\circ : G^{\mathrm{opp}} \Rightarrow F^{\mathrm{opp}}$. Diese Vorschrift ist nicht eigentlich ein Zweifunktor, weil sie kontravariante Funktoren auf den Morphismenkategorien induziert, sondern vielmehr ein angereicherter Funktor längs des Schmelzfunktors $\mathrm{opp} : \curlywedge\mathrm{Cat} \to \curlywedge\mathrm{Cat}$ im Sinne von [TSK] 4.2.5.16. Da aber alle Identifikationen Isotransformationen sind, können wir sie invertieren und erhalten so eine weitere Kategorienfaserung über $\mathscr{B}$ und eine weitere Kategorienkofaserung über $\mathscr{B}^{\mathrm{opp}}$, deren Fasern opponiert sind zu den ursprünglichen Fasern.

9.6.8. Zu jeder Kategorienkofaserung $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, {}_\dagger, c)$ über einer Basiskategorie $\mathscr{B}$ können wir die **opponierte Kategorienkofaserung** $\mathrm{C}^{\mathrm{opp}}$ über derselben Basiskategorie $\mathscr{B}$ bilden, indem wir in jeder Faser zur opponierten Kategorie übergehen und aus den ursprünglichen Vorschüben und Identifikationen in offensichtlicher Weise Vorschübe und Identifikationen für diese opponierten Fasern machen. Jeder Kategorienkofaserung können wir mithin zwei Kofaserfunktoren in natürlicher Weise zuordnen: Den Ersten durch die in 9.6.6 beschriebene Konstruktion, und den Zweiten, indem wir dieser Konstruktion noch den Übergang zur opponierten Kategorienkofaserung vorschalten. Diese Kofaserungen sind dann zueinander dualopponiert im Sinne von 9.5.2.

Vorschau 9.6.9. In noch unerklärter Terminologie ist eine Kategorienkofaserung über $\mathscr{B}$ ein „laxer 2-Funktor $\mathscr{B} \to \mathrm{Cat}$“ und das Bilden der opponierten Kategorie ein „laxer 2-Funktor $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$“ und der Übergang zur opponierten Kategorienkofaserung besteht im „Nachschalten dieses 2-Funktors“. Gegeben eine Kategorie $\mathscr{B}$ verstehen wir weiter unter einer „Kategorienfaserung“ über $\mathscr{B}$ einen „laxen 2-Funktor $\mathscr{B} \to \mathrm{Cat}^{\mathrm{opp}}$“. Im folgenden schreiben wir eine Definition dieses Begriffs in der bereits vorhandenen Terminologie aus.

9.6.10. Unter einer **Kategorienfaserung** $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, {}^\dagger, c)$ über einer Kategorie $\mathscr{B}$ verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathscr{B}$ eine Kategorie C_X zuordnet, jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathscr{B}$ einen Funktor $f^\dagger : \mathrm{C}_Y \to \mathrm{C}_X$ in die Gegenrichtung und jedem Paar $f \circ g$ von verknüpfbaren Morphismen in $\mathscr{B}$ eine Isotransformation $c = c(g, f) : g^\dagger \circ f^\dagger \overset{\sim}{\Rightarrow} (f \circ g)^\dagger$ derart, daß $\mathrm{id}_X^\dagger$ für alle X eine Äquivalenz von Kategorien ist und daß alle Diagramme

$$\begin{array}{ccc} h^\dagger \circ g^\dagger \circ f^\dagger & \Rightarrow & (g \circ h)^\dagger \circ f^\dagger \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ h^\dagger \circ (f \circ g)^\dagger & \Rightarrow & (f \circ g \circ h)^\dagger \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise aus den Transformationen c gebildeten Transformationen kommutieren. Wir nennen die Kategorie C_X die **Faser über** X unserer Kategorienfaserung, die Funktoren $f^\dagger$ ihre **Rückholfunktoren**, die Transformationen $c(g, f)$ ihre **Identifikationen** und die Kategorie $\mathscr{B}$ ihre **Basis**. Auch bei Kategorienfaserungen können wir analog wie in 9.6.8 zur **opponierten Kategorienfaserung** übergehen.

Beispiel 9.6.11. Die Kategorienfaserungen zur Garbenfaserung $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ und zur Garbenopfaserung $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ sind zueinander opponiert, wie wir das bereits in 9.5.2 sozusagen „zu Fuß“ ausgeführt haben. Entspricht in anderen Worten die Garbenfaserung dem laxen 2-Funktor $\Phi : \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Cat}$, so entspricht die Garbenopfaserung dem laxen 2-Funktor $\mathrm{opp} \circ \Phi : \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Cat}$, der durch Nachschalten des 2-Funktors des Opponierens $\mathrm{opp} : \mathrm{Cat} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}$ daraus entsteht.

9.6.12. Besitzt bei einer Kategorienfaserung $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, {}^\dagger, c)$ über einer Basiskategorie $\mathscr{B}$ jeder Rückholfunktor $f^\dagger$ einen Linksadjungierten $f_\dagger$, so bilden diese Linksadjungierten zusammen mit den induzierten Identifikationen eine Kategorienkofaserung über $\mathscr{B}$ und der zu unserer Kategorienfaserung gehörige Faserfunktor ist eine Bifaserung.

9.6.13. Besitzt bei einer Kategorienkofaserung $\mathrm{C} = (\mathrm{C}, {}_\dagger, c)$ über einer Basiskategorie $\mathscr{B}$ jeder Vorschub $f_\dagger$ einen Rechtsadjungierten $f^\dagger$, so bilden diese Rechtsadjungierten zusammen mit den induzierten Identifikationen eine Kategorienfaserung über $\mathscr{B}$ und der zu unserer Kategorienkofaserung gehörige Kofaserfunktor ist eine Bifaserung.

10 Spektralsequenzen

10.1 Allgemeiner Formalismus der Spektralsequenzen

10.1.1. Eine **differentielle abelsche Gruppe** ist wie in [TS] 3.1.3.10 ein Paar (T, ∂) bestehend aus einer abelschen Gruppe T und einem Gruppenhomomorphismus $\partial : T \to T$ mit $\partial^2 = 0$.

10.1.2 (**Erinnerungen zu Filtrierungen**). Wie in [KAG] 7.1 verstehen wir unter einer **filtrierten abelschen Gruppe** eine abelsche Gruppe V mit einer Folge von Untergruppen $(V^{\geq q})_{q \in \mathbb{Z}}$ derart, daß gilt $V^{\geq q} \supset V^{\geq q+1}$. Wir setzen dann

$$\mathrm{gr}^q(V) := V^{\geq q}/V^{\geq q+1}$$

und bezeichnen $\mathrm{gr}(V) := \bigoplus \mathrm{gr}^q(V)$ als die **assoziierte graduierte Gruppe**. Jede Untergruppe $U \subset V$ und jeder Quotient V/U einer filtrierten abelschen Gruppe V erben durch $U^{\geq r} := V^{\geq r} \cap U$ sowie $(V/U)^{\geq r} := \mathrm{im}(V^{\geq r} \to V/U)$ eine Filtrierung von V, die wir die **Untergruppenfiltrierung** und die **Quotientenfiltrierung** nennen. Gegeben Untergruppen $U \subset V \subset W$ einer filtrierten abelschen Gruppe W stimmen dann, wie bereits in [KAG] 7.1.10 erwähnt, auf dem Subquotienten V/U die beiden Filtrierungen überein, die wir von der vorgegebenen Filtrierung auf W auf den beiden Wegen $W \rightsquigarrow W/U \rightsquigarrow V/U$ und $W \rightsquigarrow V \rightsquigarrow V/U$ als Untergruppenfiltrierung zur Quotientenfiltrierung auf W/U beziehungsweise als Quotientenfiltrierung zur Untergruppenfiltrierung auf V erhalten. Wir nennen die so erhaltene Filtrierung die **Subquotientenfiltrierung**.

10.1.3 (**Was Spektralsequenzen leisten**). Man betrachte eine filtrierte differentielle abelsche Gruppe, also eine differentielle abelsche Gruppe (T, ∂) mit einer Filtrierung $\ldots \supset T^{\geq q} \supset T^{\geq q+1} \supset \ldots$ durch unter ∂ stabile Untergruppen. Die sogenannten „Spektralsequenzen“ sind ein Begriffsapparat, der es erlaubt, die assoziierte graduierte Gruppe $\mathrm{gr}\mathcal{H}T$ zur Subquotientenfiltrierung auf der Homologie mit der Homologie $\mathcal{H}\mathrm{gr}T$ der assoziierten graduierten differentiellen abelschen Gruppe zu vergleichen. Die auf der Homologie $\mathcal{H}T := \ker \partial / \mathrm{im}\, \partial$ induzierte Filtrierung ist hierbei im Sinne von 10.1.2 zu verstehen. Die Grundfrage, zu deren Aufklärung Spektralsequenzen beitragen, lautet damit:

Was ist die Beziehung zwischen $\mathrm{gr}\mathcal{H}T$ und $\mathcal{H}\mathrm{gr}T$?

Die allgemeine Theorie der Spektralsequenzen liefert eine ziemlich komplizierte Beschreibung für diese Beziehung über eine Vielzahl von Zwischenschritten 10.1.11. Sie erweist sich erst in konkreten Anwendungen als nützlich, in der sie oft zu einer sehr viel einfacheren Beschreibung spezialisiert. Weiteres zu Spektralsequenzen findet man etwa in [CE56, Gro57].

10.1.4. Man beachte, daß die assoziierte graduierte differentielle abelsche Gruppe $\mathrm{gr}T$ einer filtrierten differentiellen abelschen Gruppe T keineswegs eine dg-Gruppe im Sinne unserer Definition [TS] 3.1.3.10 ist. Vielmehr hat im vorliegenden Fall das Differential Grad Null, so daß wir in anderen Worten vielmehr eine durch $q \in \mathbb{Z}$ indizierte direkte Summe von differentiellen abelschen Gruppen vor uns haben.

10.1.5 (**Spektralsequenzen im graduierten Fall**). In den meisten Anwendungen trägt unsere differentielle abelsche Gruppe zusätzlich noch eine Graduierung, bezüglich derer das Differential Grad Eins hat und bezüglich derer die Untergruppen unserer Filtrierung homogen sind. In anderen Worten geht man dann also aus von einem Komplex

$$\ldots \to T^n \xrightarrow{\partial} T^{n+1} \to \ldots$$

von filtrierten abelschen Gruppen $\ldots \supset T^{n,\geq q} \supset T^{n,\geq q+1} \supset \ldots$ Ich denke mir den Komplex gerne „horizontal mit Differentialen von links nach rechts“ und die Filtrierung „vertikal und nach oben absteigend“, aber das mag jeder halten, wie er will. Da ich nun obere Indizes schreibe und das Differential Grad Eins hat, sollte und werde ich in Übereinstimmung mit unseren allgemeinen Konventionen statt „Homologie“ im weiteren „Kohomologie“ sagen. Ich gebe gleich ein Beispiel in diesem graduierten Fall. Dann bespreche ich die Theorie zunächst einmal im ungraduierten Fall, um Sie zu überzeugen, daß „an Spektralsequenzen nichts schwierig ist außer den Indizes“.

Beispiel 10.1.6 (**Lange exakte Homologiesequenz als Spektralsequenz**). Im Spezialfall einer zwei-Schritt-Filtrierung, wenn wir also etwa haben

$$T^n = T^{n,\geq -1} \supset T^{n,\geq 0} \supset T^{n,\geq 1} = 0$$

für alle n oder nach unseren Konventionen eigentlich das Ganze noch vertikal geschrieben mit der Null ganz oben, wird der gewünschte Vergleich geleistet von der langen exakten Kohomologiesequenz zur eigentlich auch senkrecht nach oben zu schreibenden kurzen exakten Sequenz $\mathrm{gr}^0 T^* \hookrightarrow T^* \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^{-1} T^*$ von horizontal gedachten Komplexen. Diese Kohomologiesequenz kann man in der Tat auch lesen als eine Sammlung von exakten Sequenzen

$$\mathrm{gr}^{-1}\mathcal{H}^{n-1}T^* \hookrightarrow \mathcal{H}^{n-1}\mathrm{gr}^{-1}T^* \to \mathcal{H}^n\mathrm{gr}^0 T^* \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^0\mathcal{H}^n T^*$$

und damit als eine Beschreibung der Beziehung zwischen $\mathrm{gr}\mathcal{H}T$ und $\mathcal{H}\mathrm{gr}T$.

Definition 10.1.7. Unter einer **ungraduierten Spektralsequenz** oder auch kürzer **Spektralsequenz** versteht man ein Datum $(E_r^q, \partial, \mathrm{can})$ bestehend aus (1) abelschen Gruppen E_r^q für alle $r \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Z}$ sowie (2) Homomorphismen

$\partial = \partial_r^q : E_r^q \to E_r^{q+r}$ mit $\partial^2 = 0$ und (3) Identifikationen alias Isomorphismen $\mathrm{can} = \mathrm{can}_r^q : E_{r+1}^q \xrightarrow{\sim} \ker \partial_r^q / \operatorname{im} \partial_r^{q-r}$ oder salopp geschrieben

$$\mathrm{can} : E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H} E_r$$

Gegeben $(F_r^q, \partial, \mathrm{can})$ eine weitere Spektralsequenz verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Spektralsequenzen** eine Familie von Homomorphismen $f_r^q : E_r^q \to F_r^q$ derart, daß die offensichtlichen Verträglichkeiten gelten, die ich hier nur durch die Formeln $f\partial = \partial f$ sowie $f\,\mathrm{can} = \mathrm{can}\, f$ andeute und die der Leser selbst durch die entsprechenden Indizes noch weiter präzisieren mag.

10.1.8 (**Spektralsequenz filtrierter differentieller abelscher Gruppen**). Gegeben eine filtrierte differentielle abelsche Gruppe (T, ∂) setzen wir für $r \in \mathbb{Z}$ ganz allgemein $T_r^{\geq q} := \{a \in T^{\geq q} \mid \partial a \in T^{\geq q+r}\}$. In Worten ist das der Raum aller Elemente der Filtrierungsstufe $\geq q$, die unter dem Differential in der um r höheren Filtrierungsstufe landen. Für $r \leq 0$ haben wir insbesondere schlicht $T_r^{\geq q} = T^{\geq q}$. Dann betrachten wir die Quotienten

$$E_r^q := T_r^{\geq q} / (\partial T_{r-1}^{\geq q-(r-1)} + T_{r-1}^{\geq q+1})$$

Diagrammatisch sind das die Quotienten der unteren Mitte der Diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & T^{\geq q+r} \\
 & T_{r-1}^{\geq q+1} \arrow[ur, "\partial"] \arrow[d, hook] & \\
 & T_r^{\geq q} \arrow[uur, "\partial"'] & \\
T_{r-1}^{\geq q-(r-1)} \arrow[ur, "\partial"] & &
\end{tikzcd}$$

nach den Bildern der beiden dort einlaufenden Pfeile. Der Eine kommt in unserer Darstellung von oben, der andere von links unten. Die graphische Anordnung in unserem Diagramm ist so zu lesen, daß kleinere Teile der Filtrierung weiter oben stehen und steilere Pfeile nach rechts oben eine stärkere Erhöhung des Filtrierungsgrades bedeuten. Weiter betrachten wir die von ∂ induzierten Gruppenhomomorphismen

$$\partial_r = \partial_r^q \colon E_r^q \to E_r^{q+r}$$

Man erkennt, daß die Surjektionen $T_r^{\geq q} \twoheadrightarrow E_r^q$ in diesem Zusammenhang Surjektionen $s \colon T_{r+1}^{\geq q} \twoheadrightarrow \ker \partial_r^q$ induzieren, denn aus $\partial_r^q \bar{a} = 0$ für $a \in T_r^{\geq q}$ folgt

$\partial a = \partial b + c$ mit $b \in T_{r-1}^{\geq q+1}$ und $c \in T_{r-1}^{\geq q+r+1} \subset T^{\geq q+r+1}$ und dann ist $a - b$ ein Repräsentant von $\bar{a}$ aus $T_{r+1}^{\geq q}$. Wir zeigen im Anschluß in 10.1.9, daß diese Surjektionen s Isomorphismen

$$\mathrm{can}_r^q \colon E_{r+1}^q \xrightarrow{\sim} \ker \partial_r^q / \operatorname{im} \partial_r^{q-r}$$

oder grob gesagt Isomorphismen $\mathrm{can} \colon E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$ liefern. Damit steht die Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen abelschen Gruppe auch schon da. Für $r \leq 0$ haben wir $E_r^q = T^{\geq q}/T^{\geq q+1}$ und für $r < 0$ gilt $\partial_r = 0$, wohingegen wir für $r = 0$ als ∂_r das induzierte Differential auf der assoziierten graduierten Gruppe erhalten und für $r = 1$ als Differential den Randoperator $\mathcal{H}(T^{\geq q-1}/T^{\geq q}) \to \mathcal{H}(T^{\geq q}/T^{\geq q+1})$ der kurzen exakten Sequenz differentieller abelscher Gruppen

$$T^{\geq q}/T^{\geq q+1} \hookrightarrow T^{\geq q-1}/T^{\geq q+1} \twoheadrightarrow T^{\geq q-1}/T^{\geq q}$$

10.1.9 (**Herleitung der eben behaupteten Isomorphismen**). Es reicht in 10.1.8, wenn wir zeigen $s^{-1}(\operatorname{im} \partial_r^{q-r}) = \partial T_r^{\geq q-r} + T_r^{\geq q+1}$. Links steht die Menge aller $a \in T_{r+1}^{\geq q}$ mit $a \in \partial T_r^{\geq q-r} + \partial T_{r-1}^{\geq q-(r-1)} + T_{r-1}^{\geq q+1}$. Der mittlere Summand ist hier eh im ersten Summanden enthalten, so daß es reicht, die Identität

$$T_{r+1}^{\geq q} \cap (\partial T_r^{\geq q-r} + T_{r-1}^{\geq q+1}) = \partial T_r^{\geq q-r} + T_r^{\geq q+1}$$

zu zeigen. Die Inklusion $\supset$ ist dabei offensichtlich. Um die andere Inklusion einzusehen bemerken wir, daß aus $a = b + c$ mit $a \in T_{r+1}^{\geq q}$, $b \in \partial T_r^{\geq q-r}$ und $c \in T_{r-1}^{\geq q+1}$ bereits folgt $\partial a = \partial c \in T^{\geq q+(r-1)}$ und somit $c \in T_r^{\geq q+1}$.

10.1.10 (E_∞**-Term einer Spektralsequenz**). Jede Spektralsequenz beinhaltet Isomorphismen zwischen E_{r+1}^q und einem Subquotienten von E_r^q und damit induktiv Folgen von Untergruppen

$$E_r^q = \mathcal{Z}^0 E_r^q \supset \mathcal{Z}^1 E_r^q \supset \mathcal{Z}^2 E_r^q \supset \ldots \supset \mathcal{B}^2 E_r^q \supset \mathcal{B}^1 E_r^q \supset \mathcal{B}^0 E_r^q = 0$$

von E_r^q mit ausgezeichneten Isomorphismen $\mathcal{Z}^i E_r^q / \mathcal{B}^i E_r^q \xrightarrow{\sim} E_{r+i}^q$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{Z}^\infty E_r^q$ den Schnitt der $\mathcal{Z}^i E_r^q$ und mit $\mathcal{B}^\infty E_r^q$ die Vereinigung der $\mathcal{B}^i E_r^q$ und vereinbaren die Notation

$$E_\infty^q := \mathcal{Z}^\infty E_r^q / \mathcal{B}^\infty E_r^q$$

Das ist sinnvoll, da diese Gruppe nach Konstruktion bis auf eindeutigen Isomorphismus gar nicht von r abhängt. Falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß für alle $r \geq k$ das nach E_r^q einlaufende Differential und das von E_r^q auslaufende Differential verschwinden, so erhalten wir ausgezeichnete Isomorphismen

$$E_k^q \xrightarrow{\sim} E_{k+1}^q \ldots \xrightarrow{\sim} E_\infty^q$$

10.1.11 (E_∞**-Term für filtrierte differentielle abelsche Gruppen**). Im Fall einer filtrierten differentiellen abelschen Gruppe (T, ∂) finden wir $E_0^q = T^{\geq q}/T^{\geq q+1}$, $\mathcal{Z}^r E_0^q = \operatorname{im}(T_r^{\geq q} \to T^{\geq q}/T^{\geq q+1})$ und $\mathcal{B}^{r+1} E_0^q = \operatorname{im}(\partial : T_r^{\geq q-r} \to T^{\geq q}/T^{\geq q+1})$. Wir erhalten Injektionen

$$\mathcal{Z}(T^{\geq q})/\mathcal{Z}(T^{\geq q+1}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}((\ker \partial \cap T^{\geq q}) \to T^{\geq q}/T^{\geq q+1}) \hookrightarrow \mathcal{Z}^\infty E_0^q$$

und diese sind Isomorphismen unter anderem dann, wenn unsere Filtrierung bei Null endet, in Formeln $T^{\geq j} = 0$ für hinreichend großes j. Andererseits erhalten wir Injektionen

$$\mathcal{B}^\infty E_0^q \hookrightarrow \operatorname{im}((\operatorname{im} \partial \cap T^{\geq q}) \to T^{\geq q}/T^{\geq q+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(T^{\geq q})/\mathcal{B}(T^{\geq q+1})$$

und ist unsere Filtrierung ausschöpfend alias $\bigcup_r T^{\geq r} = T$, so sind sie Isomorphismen. Zusammen liefern sie im Fall einer ausschöpfenden Filtrierung Injektionen $\operatorname{gr}^q \mathcal{H}T \hookrightarrow E_\infty^q$ und im Fall einer ausschöpfenden und von Null kommenden Filtrierung sind diese sogar Isomorphismen

$$\operatorname{gr}^q \mathcal{H}T \xrightarrow{\sim} E_\infty^q$$

Andererseits haben wir nach unserer Definition 10.1.8 für jede filtrierte differentielle abelsche Gruppe (T, ∂) stets $\operatorname{gr}^q T = E_0^q$ und das Differential ∂_0 fällt zusammen mit $\operatorname{gr} \partial$, so daß wir kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{H}\operatorname{gr}^q T \xrightarrow{\sim} E_1^q$$

erhalten. In dieser Weise macht also die Spektralsequenz Aussagen über die Beziehung zwischen $\operatorname{gr}\mathcal{H}T$ und $\mathcal{H}\operatorname{gr}T$. Sie ist im allgemeinen recht unübersichtlich. In vielen konkreten Anwendungsfällen ist die hier gegebene Beschreibung aber dennoch nützlich, und zwar insbesondere dann, wenn es ein i gibt derart, daß alle Differentiale ∂_r für $r \geq i$ verschwinden, so daß gilt $E_i^q = E_\infty^q$. Dann spricht man von einer **bei** E_i **ausgearteten Spektralsequenz**. Besonders häufig trifft man in der Praxis die Fälle $i = 1$ und $i = 2$.

10.1.12 (**Funktorialität der Spektralsequenz**). Die eben vorgestellte Konstruktion der Spektralsequenz ist in offensichtlicher Weise funktoriell. Jeder Morphismus $(T, \partial) \to (S, \partial)$ von filtrierten differentiellen abelschen Gruppen induziert genauer Gruppenhomomorphismen $E_r^q(T) \to E_r^q(S)$, die verträglich sind mit den Differentialen ∂_r und den Identifikationen $\operatorname{can} : E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$ und, im Fall ausschöpfender Filtrierungen, mit den Einbettungen $\operatorname{gr}^q \mathcal{H}T \hookrightarrow E_\infty^q(T)$ aus 10.1.11.

10.1.13. Gegeben ein ungraduierte Spektralsequenz (E_r^q, ∂_r) verstehen wir unter einem **Konvergenzdatum gegen eine abelsche Gruppe** H ein Datum bestehend aus einer Filtrierung $(H^{\geq q})_{q \in \mathbb{Z}}$ auf H und Injektionen

$$\operatorname{gr}^q(H) \hookrightarrow E_\infty^q$$

Sind sie sogar Isomorphismen, so sagen wir, das **Konvergenzdatum konvergiert**. Im vorhergehenden haben wir insbesondere jeder filtrierten differentiellen abelschen Gruppe mit ausschöpfender Filtrierung in funktorieller Weise eine Spektralsequenz zusammen mit einem Konvergenzdatum dieser Spektralsequenz gegen die Kohomologie mit ihrer induzierten Filtrierung zugeordnet, das im Fall einer von Null kommenden Filtrierung unserer differentiellen abelschen Gruppe konvergiert. Wenn es solch ein gegen H konvergierendes Konvergenzdatum gibt, so sagt man auch, die **Spektralsequenz** (E_r^q, ∂_r) **konvergiere gegen** H. Besonders oft gibt man nur den E_2-Term an und schreibt

$$F^q \Rightarrow H$$

als Abkürzung für die Aussage, daß eine Spektralsequenz mit dem E_2-Term $E_2^q = F^q$ gegen H konvergiert.

10.1.14. Gegeben eine ungraduierte Spektralsequenz (E_r^q, ∂_r) mit einem Konvergenzdatum gegen eine abelsche Gruppe H und $u \in \mathbb{Z}$ und $r \geq 1$ mit $E_r^q = 0$ für $q < u$ liefert unsere Spektralsequenz Injektionen $E_\infty^u \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow E_{r+1}^u \hookrightarrow E_r^u$. Gilt außerdem $H = H^{\geq u}$, so induzieren unsere Injektionen $\mathrm{gr}^q(H) \hookrightarrow E_\infty^q$ durch Vorschalten von $H = H^{\geq u} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^u(H)$ und Nachschalten von $E_\infty^u \hookrightarrow E_r^u$ Injektionen Gruppenhomomorphismen

$$H \to E_r^u$$

Insbesondere im Fall $r = 2$ treten sie häufig in den Anwendungen auf. Wir nennen sie die **Morphismen am unteren Rand** unserer Spektralsequenz.

10.1.15 (**Homotopie und Spektralsequenz**). Gibt es für zwei Morphismen $f, g : (T, \partial) \to (S, \partial)$ von filtrierten differentiellen abelschen Gruppen einen Gruppenhomomorphismus $h : T \to S$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $f - g = \partial h + h\partial$ und $h(T^{\geq q}) \subset S^{\geq q-k}\ \forall q$, so induzieren f und g dieselben Abbildungen

$$f = g : E_r^q(T) \to E_r^q(S) \quad \text{für } r > k.$$

In der Tat schickt ∂h dann $T^{\geq q}$ nach $\partial S^{\geq q-k}$ und $h\partial$ schickt $T_r^{\geq q}$ nach $S^{\geq q+r-k}$. Also schickt $(f - g)$ unser $T_r^{\geq q}$ nach $S_r^{\geq q} \cap (\partial S^{\geq q-(r-1)} + S^{\geq q+1})$. Für jedes Element $a = \partial b + c$ dieses Schnitts gilt jedoch $b \in S_{r-1}^{\geq q-(r-1)}$, selbst wenn wir nur $a \in S^{\geq q}$ haben, und dann $\partial a = \partial c \in S^{\geq q+r}$ alias $c \in S_{r-1}^{\geq q+1}$.

10.1.16 (**Spektralsequenz im graduierten Fall**). Jetzt betrachten wir den graduierten Fall, bei dem man wie bereits erwähnt von einem Komplex

$$\ldots \to T^n \xrightarrow{\partial} T^{n+1} \to \ldots$$

von filtrierten abelschen Gruppen $\ldots \supset T^{n,\geq q} \supset T^{n,\geq q+1} \supset \ldots$ ausgeht und wir letztere Sequenz von Inklusionen vertikal denken mit immer kleineren Stücken

immer weiter oben. Offensichtlich ist unsere Konstruktion der Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen Gruppe nach 10.1.8 mit dieser zusätzlichen Graduierung verträglich in dem Sinne, daß gilt $T_r^{\geq q} = \bigoplus T_r^{n,\geq q}$ und $E_r^q = \bigoplus E_r^{(n,q)}$ und daß ∂ Gruppenhomomorphismen

$$\partial_r \colon E_r^{(n,q)} \to E_r^{(n+1,q+r)}$$

induziert und daß unsere Isomorphismen $\mathrm{can} \colon E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$ Isomorphismen $E_{r+1}^{(n,q)} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{H}E_r)^{(n,q)}$ induzieren. Im Fall einer ausschöpfenden Filtrierung erhalten wir dann natürliche Einbettungen $\mathrm{gr}^q(\mathcal{H}^n T) \hookrightarrow E_\infty^{(n,q)}$ und ein kurzer Blick auf deren Herleitung zeigt, daß sie sogar unter der schwächeren Zusatzbedingung Isomorphismen

$$\mathrm{gr}^q(\mathcal{H}^n T) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{(n,q)}$$

liefern, daß gilt $T^{n+1,\geq q+r} = 0$ für hinreichend großes r.

10.1.17. Gegeben ein graduierte Spektralsequenz $(E_r^{(n,q)}, \partial_r)$ und eine graduierte abelsche Gruppe mit homogenen Komponenten H^n verstehen wir unter einem **Konvergenzdatum** ein Datum bestehend aus Filtrierungen $(H^{(n,\geq q)})_{q\in\mathbb{Z}}$ auf den H^n und Injektionen

$$\mathrm{gr}^q(H^n) \hookrightarrow E_\infty^{(n,q)}$$

Sind sie Isomorphismen, so sprechen wir von einem **konvergierenden Konvergenzdatum**. Im vorhergehenden haben wir insbesondere jeder filtrierten differentiellen graduierten abelschen Gruppe mit ausschöpfender Filtrierung in funktorieller Weise eine Spektralsequenz zusammen mit einem Konvergenzdatum dieser Spektralsequenz gegen die Kohomologie mit ihrer induzierten Filtrierung zugeordnet. Weiter haben wir gezeigt, daß es konvergiert, wenn die Filtrierung in jedem Grad bei Null beginnt. Wenn es ein konvergierendes Konvergenzdatum gibt, so sagt man auch, die **Spektralsequenz** $(E_r^{(n,q)}, \partial_r)$ **konvergiere gegen** H. Besonders oft gibt man nur den E_2-Term an und schreibt

$$F^{(n,q)} \Rightarrow H^n$$

für die Aussage, daß eine Spektralsequenz mit dem E_2-Term $E_2^{(n,q)} = F^{(n,q)}$ gegen H konvergiert. Gibt es (n,u) mit $H^{(n,\geq u)} = H^n$ und $E_2^{(n-1,q)} = 0$ für $q < u$, so erhalten wir wie im ungraduierten Fall in 10.1.14 erklärt Homomorphismen

$$H^n \to E_2^{(n,u)}$$

Wir nennen sie weiter die **Morphismen am unteren Rand** unserer Spektralsequenz.

10.1.18 (**Produktstruktur der Spektralsequenz**). Gegeben filtrierte dg-Gruppen T, S versehen wir ihr Tensorprodukt $T \otimes S$ mit seiner dg-Struktur aus [TS] 3.5.3.1 und erklären darauf wie in [KAG] 7.1.12 eine Filtrierung durch die Vorschrift

$$(T \otimes S)^{\geq q} := \sum_{k+l=q} \operatorname{ten}(T^{\geq k} \otimes S^{\geq l})$$

für ten das Tensorprodukt der jeweiligen Einbettungsabbildungen. Man prüft unschwer, daß das Tensorprodukt der jeweiligen Einbettungsabbildungen Abbildungen $T_r^{\geq k} \otimes S_r^{\geq l} \to (T \otimes S)_r^{\geq k+l}$ induziert und dann auch Abbildungen

$$E_r^k(T) \otimes E_r^l(S) \to E_r^{k+l}(T \otimes S)$$

Diese Abbildungen ihrerseits werden Morphismen von dg-Gruppen für die von den Differentialen ∂_r induzierten Differentiale, wenn wir unsere E_r^k mit der induzierten Graduierung $E_r^k = \bigoplus E_r^{(n,k)}$ versehen.

10.1.19 (**Doppelkomplexe und alternative Graduierungskonventionen**). Üblicherweise wird die Indizierung bei der Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen graduierten abelschen Gruppe dem besonders häufig auftretenden Fall eines Doppelkomplexes $(A^{p,q}, \partial, \delta)$ im Sinne von 4.6.1 angepaßt. Wir denken uns dabei p nach rechts und q nach oben aufgetragen. In diesem Fall betrachtet man auf dem Totalkomplex (T^n, d) aus 4.6.1 üblicherweise die Filtrierung

$$T^{n,\geq q} := \bigoplus_{p+j=n,\ j\geq q} A^{p,j}$$

So ergibt sich mit unseren Notationen von oben gerade $E_0^{(n,q)} = A^{n-q,q}$ und als Differential ∂_0 erhalten wir schlicht das horizontale Differential ∂ unseres Doppelkomplexes. Es ist nun sinnvoll und üblich, die Indizierung umzustellen durch $E_r^{p,q} := E_r^{(p+q,q)}$ alias $E_r^{(n,q)} = E_r^{n-q,q}$ derart, daß wir in unserem Spezialfall eines Doppelkomplexes die Formel

$$E_0^{p,q} = A^{p,q}$$

und für $\partial_0 = \partial$ das horizontale Differential unseres Doppelkomplexes erhalten. Weiter prüft man, daß in diesem Fall eines Doppelkomplexes die E_1-Terme $E_1^{p,q} = \mathcal{H}^p(A^{*,q}, \partial)$ die Kohomologie der waagerechten Komplexe sind und ∂_1 vom mit geeigneten Vorzeichen versehenen senkrechten Differential δ unseres Doppelkomplexes induziert wird. Im Fall eines Doppelkomplexes ist die fragliche Filtrierung stets ausschöpfend und die hinreichende Bedingung aus 10.1.16 übersetzt sich in

$$\operatorname{gr}^q(\mathcal{H}^{p+q}(\operatorname{tot} A)) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{p,q}$$

falls gilt $A^{p+1-r,q+r} = 0$ für hinreichend großes r. Dieses Umindizieren hat auch den Effekt, daß die Differentiale Abbildungen $\partial_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+1-r,q+r}$ werden.

Wir erhalten so ganz allgemein zu jeder filtrierten abelschen dg-Gruppe eine graduierte Spektralsequenz im Sinne der folgenden Definition.

Definition 10.1.20. Unter einer **graduierten Spektralsequenz** oder auch kurz **Spektralsequenz** versteht man ein Datum $(E_r^{p,q}, \partial, \mathrm{can})$ bestehend aus

1. Einer Familie von abelschen Gruppen $(E_r^{p,q})$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}$ mitsamt Gruppenhomomorphismen $\partial = \partial_r = \partial_r^{p,q} \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+1-r,q+r}$ mit der Eigenschaft $\partial^2 = 0$; die ∂_r haben also „Bigrad“ $(1-r, r)$;

2. Einer Familie von Isomorphismen $\mathrm{can} : E_{r+1}^{p,q} \xrightarrow{\sim} (\ker \partial_r / \operatorname{im} \partial_r)$ für ∂_r das von $E_r^{p,q}$ auslaufende beziehungsweise das nach $E_r^{p,q}$ einlaufende Differential, die also die $E_{r+1}^{p,q}$ mit der Kohomologie von $(E_r^{p,q}, \partial_r)$ identifizieren.

Die bigraduierte differentielle abelsche Gruppe $E_r^{p,q}$ heißt der E_r-**Term** unserer Spektralsequenz. Wie zuvor hängen die Gruppen $E_{r+1}^{p,q}$ hierbei zwar bis auf Isomorphismus nur von den Daten $(E_r^{p,q}, \partial_r)$ ab, das Differential ∂_{r+1} wird jedoch durch diese Daten nicht bestimmt.

10.1.21 (**Konvergenz in der neuen Notation**). Gegeben ein graduierte Spektralsequenz $(E_r^{p,q}, \partial_r)$ und eine graduierte abelsche Gruppe H mit homogenen Komponenten H^n wird unter einem **Konvergenzdatum** in der neuen Notation ein Datum bestehend aus Filtrierungen $(H^{n,\geq q})_{q \in \mathbb{Z}}$ auf den H^n und Injektionen

$$\mathrm{gr}^q(H^{p+q}) \hookrightarrow E_\infty^{p,q}$$

Wir sagen, unser Konvergenzdatum **konvergiert**, wenn diese Injektionen Isomorphismen sind. Wenn es solch ein konvergentes Konvergenzdatum gibt, so sagt man auch, die **Spektralsequenz** $(E_r^{p,q}, \partial_r)$ **konvergiere gegen** H^n. Besonders oft gibt man nur den E_2-Term an und schreibt

$$F^{p,q} \Rightarrow H^n$$

als Abkürzung für die Aussage, daß eine Spektralsequenz mit $E_2^{p,q} = F^{p,q}$ als E_2-Term gegen H konvergiert. Die **Morphismen am unteren Rand** aus 10.1.17 sind in diesen Notationen insbesondere erklärt im Fall einer Spektralsequenz mit $E_2^{p,q} = 0$ für $q < 0$ für ein Konvergenzdatum mit $H^n = H^{n,\geq 0}$ und sind Morphismen $H^n \to E_2^{n,0}$.

Beispiel 10.1.22 (**Spektralsequenzen für Doppelkomplexe**). Unsere Konstruktionen ordnen jedem Doppelkomplex $A = (A^{p,q}, \partial, \delta)$ in funktorieller Weise eine graduierte Spektralsequenz nebst einem Konvergenzdatum gegen die Kohomologie des Totalkomplexes zu, mit der durch horizontal unten abgeschnittene Doppelkomplexe $A^{*,\geq q}$ gegebenen $(\geq q)$-Filtrierung. Es konvergiert unter der Voraussetzung, daß gegeben p, q stets gilt $A^{p-r,q+r} = 0$ für alle hinreichend großen $r \gg 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & E_0^{0,1} \arrow[r, "\partial"] & E_0^{1,1} \arrow[r, "\partial"] & E_0^{2,1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_0^{0,0} \arrow[r, "\partial"] & E_0^{1,0} \arrow[r, "\partial"] & E_0^{2,0} \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Die E_0-Terme einer Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & E_1^{0,1} & E_1^{1,1} & E_1^{2,1} & \cdots \\
\cdots & E_1^{0,0} \arrow[u, "\partial"] & E_1^{1,0} \arrow[u, "\partial"] & E_1^{2,0} \arrow[u, "\partial"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Die E_1-Terme einer Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & E_2^{0,2} & E_2^{1,2} & E_2^{22} & \cdots \\
\cdots & E_2^{0,1} & E_2^{1,1} & E_2^{2,1} & \cdots \\
\cdots & E_2^{0,0} & E_2^{1,0} & E_2^{2,0} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Die E_2-Terme einer Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen

Der E_2-Term dieser Spektralsequenz ist die Kohomologie der vertikalen Komplexe, die aus der Kohomologie der Zeilenkomplexe enstehen, so daß wir unter unserer Konvergenzbedingung haben

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{H}^p(A;\partial);\delta) \Rightarrow \mathcal{H}^n(\operatorname{tot}(A))$$

Die Filtrierung des Konvergenzdatums eines Doppelkomplexes kann man alternativ auch erhalten, indem man die Filtrierung von A durch die Unterdoppelkomplexe $\tau^{\leq p}A$ betrachtet, bei denen die p-te Spalte durch die Spalte aus den Kernen des horizontalen Differentials ersetzt wird und die Spalten mit höheren Indizes zu Null gesetzt werden. Wir haben genauer für $p+q=n$ in Formeln

$$\mathcal{Z}^n(\operatorname{tot}\tau^{\leq p}A) = \mathcal{Z}^n(\operatorname{tot}A^{*,\geq q})$$

und damit stimmen natürlich auch die Bilder beider Seiten in der Kohomologie des Totalkomplexes überein. Im Fall eines Doppelkomplexes in der oberen Halbebene erhalten wir insbesondere nach 10.1.21 die Morphismen am unteren Rand $\mathcal{H}^n(\operatorname{tot}A) \to E_2^{n,0}$.

10.1.23. Im Fall von Doppelkomplexen kann man auch noch eine zweite Spektralsequenz erhalten, indem man die Rollen von p und q vertauscht. Wollen wir betonen, daß die bisher betrachtete Sequenz mit Differentialen $\partial_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}$ gemeint ist, schreiben wir $\overset{p}{\Rightarrow}$, weil dann das nullte Differential in Richtung wachsender p geht.

10.1.24 (**Beispiel für eine ausgeartete Spektralsequenz**). Betrachten wir speziell einen Doppelkomplex im ersten Quadranten und sind wie in 4.6.5 alle Zeilen unseres Doppelkomplexes exakt an allen Stellen $A^{p,q}$ mit $p \neq 0$, so liefert unser Formalismus hier mit den Notationen 4.6.5 unmittelbar $E_1^{0,q} = K_\uparrow^q$ und $E_1^{p,q} = 0$ für $p \neq 0$ sowie $E_2^{0,q} = E_\infty^{0,q} = \mathcal{H}^q(K_\uparrow^*)$ und natürlich auch $E_\infty^{p,q} = 0$ für $p \neq 0$. Jede Kohomologiegruppe des Totalkomplexes besteht mithin aus einer einzigen Filtrierungsstufe und wir erhalten so unsere Isomorphismen $\mathcal{H}^n(K_\uparrow^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n T$ aus 4.6.5 zwischen der Kohomologie des senkrechten Kernkomplexes und der Kohomologie des Totalkomplexes nocheinmal neu als Konsequenzen der allgemeinen Theorie.

10.1.25 (**Homotopie für Morphismen von Doppelkomplexen**). Jeder Doppelkomplex in einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ kann als ein Objekt von $\operatorname{Ket}(\operatorname{Ket}\mathcal{A})$ aufgefaßt werden, indem ihn als den Komplex seiner Spaltenkomplexe versteht. Zwei Morphismen von Doppelkomplexen nennen wir **horizontal homotop**, wenn sie in diesem Sinne homotop sind. Gegeben Morphismen $f,g : A \to B$ von Doppelkomplexen mit Differentialen $\partial : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ und $\delta : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ verstehen

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{gr}^0 A^0 \arrow[r] & \mathrm{gr}^0 A^1 \arrow[r] & \mathrm{gr}^0 A^2 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{gr}^1 A^{-1} \arrow[r] & \mathrm{gr}^1 A^0 \arrow[r] & \mathrm{gr}^1 A^1 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Die E_0-Terme der Spektralsequenz zu einem Komplex mit Zwei-Schritt-Filtrierung

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \mathcal{H}^0 \mathrm{gr}^0 A^* \arrow[u] & \mathcal{H}^1 \mathrm{gr}^0 A^* \arrow[u] & \mathcal{H}^2 \mathrm{gr}^0 A^* \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \mathcal{H}^{-1} \mathrm{gr}^1 A^* \arrow[u] & \mathcal{H}^0 \mathrm{gr}^1 A^* \arrow[u] & \mathcal{H}^1 \mathrm{gr}^1 A^* \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Die E_1-Terme der Spektralsequenz zu einem Komplex mit Zwei-Schritt-Filtrierung. Die Differentiale ∂_n für $n \geq 2$ laufen alle nach Null oder kommen von Null, folglich haben wir $E_2 = E_\infty$.

wir genauer und in Formeln unter einer **horizontalen Homotopie zwischen** f **und** g eine Familie von Kettenabbildungen $h_p : A^{p,*} \to A^{p-1,*}$ mit

$$\partial h + h\partial = f - g$$

Analog erklären wir **vertikale Homotopie** als eine Familie von Kettenabbildungen $k_q : A^{*,q} \to A^{*,q-1}$ mit $\delta k + k\delta = f - g$. Jede horizontale Homotopie induziert unmittelbar eine Homotopie zwischen den auf den Totalkomplexen induzierten Abbildungen. Jede vertikale Homotopie k induziert eine Homotopie zwischen den auf den Totalkomplexen induzierten Abbildungen vermittels der $\bar{k} := (-1)^p k_q : A^{p,q} \to A^{p,q-1}$. Wir nennen zwei Morphismen f, g von Doppelkomplexen **homotop**, wenn es eine horizontale Homotopie h eine vertikale Homotopie k gibt mit

$$\partial h + h\partial + \bar{\delta}\bar{k} + \bar{k}\bar{\delta} = f - g$$

Dann ist also $(h+\bar{k})$ eine Homotopie zwischen den von f und g auf den Totalkomplexen induzierte Kettenabbildung. Sowohl für horizontale wie für vertikale Homotopien gilt nun $h, \bar{k} : T^{n,\geq q} \to S^{n,\geq q-1}$ in den Notationen von 10.1.19 mit T, S den filtrierten graduierten Komplexen zu unseren Doppelkomplexen A, B. Nach 10.1.15 induzieren also homotope Morphismen f und g von Doppelkomplexen jeweils dieselben Abbildungen auf allen Termen E_r mit $r \geq 2$ der zugehörigen Spektralsequenzen.

Übungen

Übung 10.1.26. Gegeben eine Spektralsequenz mit $E_2^{p,q} = 0$ für $p \neq 0, 1$ konstruiere man eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to E_2^{1,q} \to E_2^{0,q+2} \to E_\infty^{0,q+2} \to E_2^{1,q+1} \to \ldots$$

10.2 Spektralsequenzen eines filtrierten Raums

10.2.1 (**Filtrierungssequenz der singulären Homologie**). Sei X ein topologischer Raum mit einer Filtrierung $\ldots \supset X^{\geq q} \supset X^{\geq q+1} \supset \ldots$ durch Teilmengen. Unsere Filtrierung sei endlich, es gebe also k, g mit $X = X^{\geq k}$ und $X^{\geq g} = \emptyset$. Auf dem Komplex $\mathrm{S}_n X$ der singulären Ketten betrachten wir die Filtrierung durch die $\mathrm{S}_n X^{\geq q}$. Untere Indizes mit fallenden Differentialen übersetzen wir nun im Kopf zu den entsprechenden negativ gemachten oberen Indizes mit wachsenden Differentialen. Nach 10.1.21 liefert unser filtrierter Komplex dann eine Spektralsequenz mit Grenzwert $\mathrm{H}_n X$. Für die ersten Terme dieser Spektralsequenz erhalten wir nach 10.1.16 natürliche Isomorphismen

$$E_0^{-n-q,q} = E_0^{(-n,q)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_n(X^{\geq q}, X^{\geq q+1})$$

$$E_1^{-n-q,q} = E_1^{(-n,q)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(X^{\geq q}, X^{\geq q+1})$$

Guckt man sich die Konstruktion der Spektralsequenz genauer an, so erkennt man zusätzlich, daß die Differentiale $\partial_1 : E_1^{(-n,q)} \to E_1^{(-n+1,q+1)}$ mit den Rändern $\mathrm{H}_n(X^{\geq q}, X^{\geq q+1}) \to \mathrm{H}_{n-1}(X^{\geq q+1}, X^{\geq q+2})$ der langen exakten Homologiesequenz des Tripels $X^{\geq q} \supset X^{\geq q+1} \supset X^{\geq q+2}$ zusammenfallen.

10.2.2 (**Filtrierungssequenz der Garbenkohomologie**). Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum mit einer Filtrierung $\ldots \supset X^{\geq q} \supset X^{\geq q+1} \supset \ldots$ durch offene Teilmengen. Unsere Filtrierung sei wieder endlich, es gebe also k, g mit $X = X^{\geq k}$ und $X^{\geq g} = \emptyset$. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und eine injektive Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^{\lhd}$ betrachten wir nun auf dem Komplex $\Gamma_!(X; \mathcal{I}^{\lhd})$ der Schnitte mit kompaktem Träger die Filtrierung durch die $\Gamma_!(X^{\geq q}; \mathcal{I}^{\lhd})$. Nach 10.1.21 liefert dieser filtrierte Komplex eine Spektralsequenz mit Grenzwert $\mathrm{H}_!^n(X; \mathcal{F}) = \mathcal{H}^n \Gamma_!(X; \mathcal{I}^{\lhd})$. Für die ersten Terme dieser Spektralsequenz erhalten wir nach 10.1.16 und 4.8.14 mit $X^q := X^{\leq q} \backslash X^{\leq q-1}$ natürliche Isomorphismen

$$E_0^{n-q,q} = E_0^{(n,q)} = \Gamma_!(X^{\geq q}; \mathcal{I}^n) / \Gamma_!(X^{\geq q+1}; \mathcal{I}^n) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(X^q; \mathcal{I}^n)$$

und

$$E_1^{n-q,q} = E_1^{(n,q)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n \Gamma_!(X^q; \mathcal{I}^{\lhd}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_!^n(X^q; \mathcal{F})$$

Guckt man sich die Konstruktion der Spektralsequenz noch genauer an, so erkennt man zusätzlich, daß die Differentiale $\partial_1 : E_1^{(n,q)} \to E_1^{(n+1,q+1)}$ mit den Rändern $\mathrm{H}_!^n(X^q; \mathcal{F}) \to \mathrm{H}_!^{n+1}(X^{q+1}; \mathcal{F})$ der Lokalisierungssequenz 4.8.15 zur Zerlegung von $X^q \sqcup X^{q+1}$ in die offene Teilmenge X^{q+1} und ihr abgeschlossenes Komplement X^q zusammenfallen.

10.3 Grothendieck's Spektralsequenz

Definition 10.3.1. Gegeben ein Komplex $(A^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ in einer abelschen Kategorie verstehen wir unter einer **Cartan-Eilenberg-Obenauflösung** einen Doppelkomplex $(I^{p,q})_{q \geq 0}$ in der oberen Halbebene mit im Sinne von 3.6.21 maximal spaltenden Zeilen und einem Isomorphismus von unserem Ausgangskomplex zum waagerechten Kernkomplex dieses Doppelkomplexes derart, daß die Spalten Auflösungen der Objekte unseres Ausgangskomplexes sind und die Spalten aus den Kernen der p-Differentiale unseres Doppelkomplexes Auflösungen der Kerne der Differentiale unseres Ausgangskomplexes. Sind alle $I^{p,q}$ injektiv, so sprechen wir von einer **Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive** und es versteht sich von selbst, daß damit a priori eine Obenauflösung gemeint ist. Analog, ja opponiert bis auf die Indizierung erklären wir eine **Cartan-Eilenberg-Untenauflösung**.

Lemma 10.3.2. *Gegeben eine kurze exakte Sequenz $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ von Kettenkomplexen in einer abelschen Kategorie sind gleichbedeutend:*

1. *Die auf den Zyklen induzierten Seqenzen sind ihrerseits kurze exakte Sequenzen* $\mathcal{Z}^p A \hookrightarrow \mathcal{Z}^p B \twoheadrightarrow \mathcal{Z}^p C$*;*

2. *Die auf den Bildern induzierten Seqenzen sind ihrerseits kurze exakte Sequenzen* $\mathcal{B}^p A \hookrightarrow \mathcal{B}^p B \twoheadrightarrow \mathcal{B}^p C$*;*

3. *Die auf den Kozykeln induzierten Seqenzen sind ihrerseits kurze exakte Sequenzen* $\operatorname{cok}(A^p \to A^{p+1}) \hookrightarrow \operatorname{cok}(B^p \to B^{p+1}) \twoheadrightarrow \operatorname{cok}(C^p \to C^{p+1})$.

Wir nennen eine derartige kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen **zykelexakt**. *Jede zykelexakte Sequenz von Kettenkomplexen induziert kurze exakte Sequenzen* $\mathcal{H}^p A \hookrightarrow \mathcal{H}^p B \twoheadrightarrow \mathcal{H}^p C$ *auf der Homologie.*

Beweis. Das folgt leicht mit wiederholter Anwendung des Neunerlemmas. Die Details seien dem Leser überlassen. □

10.3.3. Jeder Doppelkomplex $(I^{p,q})$ liefert für jedes q eine kurze exakte Sequenz von Zeilenkomplexen $\ker \delta^{p,q} \hookrightarrow I^{p,q} \twoheadrightarrow \operatorname{im} \delta^{p,q}$. Sind alle seine Spalten exakt, so haben wir zusätzlich $\operatorname{im} \delta^{p,q} = \ker \delta^{p,q+1}$. Sind zusätzlich die Spalten $\ker \partial^{p,q}$ aus den Kernen der horizontalen Differentiale exakt und liegt unser Doppelkomplex in einer oberen Halbebene, so erkennt man induktiv, daß alle eben betrachteten kurzen exakten Sequenzen von Zeilenkomplexen zykelexakt sein müssen. Das bedeutet hinwiederum nach 10.3.2, daß auch die Spalten $\operatorname{im} \partial^{p,q}$ aus den Bildern der horizontalen Differentiale und die Spalten $\operatorname{cok} \partial^{p,q}$ aus den Kokernen der horizontalen Differentiale und die Spalten aus der Kohomologie der horizontalen Differentiale exakt sind.

10.3.4. Gegeben eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung $(I^{p,q})$ eines horizontal gedachten Komplexes (A^p) sind nach 10.3.3 insbesondere auch die Spalten aus den Bildern in den Zeilenkomplexen Auflösungen der Bilder von A, die Spalten aus den Kokernen in den Zeilenkomplexen Auflösungen der Kokerne von A und die Spalten aus den Homologien in den Zeilenkomplexen Auflösungen der Homologie von A. Hierzu wird die Bedingung an eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung, daß ihre Zeilen maximal spalten sollen, noch nicht einmal benötigt.

Proposition 10.3.5 (**Existenz von Cartan-Eilenberg-Auflösungen**). *Gegeben eine abelsche Kategorie* $\mathcal{A}$ *mit einer vollen unter endlichen Koprodukten abgeschlossenen Unterkategorie* $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ *derart, daß jedes Objekt von* $\mathcal{A}$ *Unterobjekt eines Objekts von* $\mathcal{L}$ *ist, besitzt jeder Komplex in* $\mathcal{A}$ *eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Objekte von* $\mathcal{L}$.

10.3.6. Der Beweis wird zeigen, daß wir unter der Zusatzannahme $A^p = 0$ für $p > 0$ eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung in $\mathcal{L}$ mit $L^{p,q} = 0$ für $p > 0$ finden

können. Eine kleine Variation des Beweises zeigt auch, daß wir unter der Zusatzannahme $A^p = 0$ für $p < 0$ eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung in $\mathcal{L}$ mit $L^{p,q} = 0$ für $p < 0$ finden können.

Beweis. Sei (A^p) unser Komplex. Es reicht, wenn wir ihn als Unterkomplex eines maximal spaltenden Komplexes (L^p) von Objekten von $\mathcal{L}$ realisieren derart, daß für alle p der induzierte Morphismus ein Monomorphismus

$$\operatorname{cok}(\mathcal{Z}^p A \hookrightarrow \mathcal{Z}^p L) \hookrightarrow \operatorname{cok}(A^p \hookrightarrow L^p)$$

ist. Dann können wir den Kokernkomplex nehmen und immer so weitermachen, wobei letztere Eigenschaft sicherstellt, daß auch die Kerne jeweils Auflösungen der Kerne liefern. Um unseren Komplex (A^p) so als Unterkomplex zu schreiben, wählen wir Monomorphismen $A^p \hookrightarrow M^p$ und $\operatorname{cok}(A^{p-1} \to A^p) \hookrightarrow N^p$ mit $M^p, N^p \in \mathcal{L}$ und betrachten die offensichtlichen Monomorphismen

$$A^p \hookrightarrow L^p := M^p \oplus N^p \oplus M^{p+1}$$

und nehmen als Randoperatoren $L^p \to L^{p+1}$ die Projektion auf M^{p+1} gefolgt von der Einbettung von M^{p+1}. Um die zusätzliche Eigenschaft zu prüfen, wenden wir das Neunerlemma an auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z}^p L & \hookrightarrow & L^p & \twoheadrightarrow & \mathcal{B}^{p+1} L \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{Z}^p A & \hookrightarrow & A^p & \twoheadrightarrow & \mathcal{B}^{p+1} A \end{array}$$

und folgern aus der Injektivität der drei Vertikalen, daß die Kokerne auch eine kurze exakte Sequenz bilden. □

10.3.7 (**Spezielle Cartan-Eilenberg-Auflösungen durch Injektive**). Besitzt eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so können wir für jeden Komplex (A^p) in $\mathcal{A}$ sogar eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive finden, die für verschwindende Objekte, Zykel, Bilder oder Homologien des aufzulösenden Komplexes jeweils die Nullauflösung induziert. Dazu wählen wir injektive Auflösungen $\mathcal{B}^p A \hookrightarrow J^{p,0} \to J^{p,1} \to \dots$ der Bilder und $\mathcal{H}^p A \hookrightarrow K^{p,0} \to K^{p,1} \to \dots$ der Kohomologie. Dann betrachten wir die kurze exakte Sequenz $\mathcal{B}^p A \hookrightarrow \mathcal{Z}^p A \twoheadrightarrow \mathcal{H}^p A$ und finden eine Einbettung $\mathcal{Z}^p A \hookrightarrow J^{p,0} \oplus K^{p,0}$ und induktiv eine Kettenabbildung $u : [-1]K \to J$ derart, daß der Abbildungskegel $\mathrm{K}(u)$ eine Auflösung der Zykel $\mathcal{Z}^p A$ wird. Diese Auflösung von $\mathcal{Z}^p A$ hat also die Gestalt $J^{p,*} \oplus K^{p,*}$ mit Randoperator

$$\begin{pmatrix} \partial & u \\ 0 & \partial \end{pmatrix}$$

Anschließend betrachten wir die kurze exakte Sequenz $\mathcal{Z}^p A \hookrightarrow A^p \twoheadrightarrow \mathcal{B}^{p+1} A$ und finden ebenso eine Auflösung von A^p der Gestalt $J^{p,*} \oplus K^{p,*} \oplus J^{p+1,*}$ mit Randoperator der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \partial & u & v \\ 0 & \partial & w \\ 0 & 0 & \partial \end{pmatrix}$$

Wir setzen nun $I^{p,q} = J^{p,q} \oplus K^{p,q} \oplus J^{p+1,q}$ und machen dieses bigraduierte Objekt zu einem Doppelkomplex, indem wir als Differential in Richtung wachsender q das Differential von eben nehmen, als Differential in Richtung wachsender p dahingegen die Verknüpfung der offensichtlichen Morphismen $I^{p,q} \twoheadrightarrow J^{p+1,q} \hookrightarrow I^{p+1,q}$. Der so konstruierte Doppelkomplex ist dann eine Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive. Wenn man bei der Konstruktion als injektive Auflösung von Null stets den Nullkomplex wählt, so hat diese auch die zusätzlich versprochene Verschwindungseigenschaft. Schließlich prüft man unschwer, daß jede Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive von dieser Gestalt sein muß.

10.3.8 (**Zeilenbeschränkte Cartan-Eilenberg-Auflösung durch Injektive**). Besitzt eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ endlicher homologischer Dimension genügend Injektive, so können wir für jeden Komplex (A^p) in $\mathcal{A}$ sogar eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive finden, bei der nur höchstens endlich viele Zeilen von Null verschieden sind. Das folgt diret aus der eben in 10.3.7 gegebenen Konstruktion.

10.3.9. Für jeden gegen die Differentiale beschränkten Komplex A erhalten wir aus einer Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive beim Übergang zum Totalkomplex mit 4.6.8 einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex von injektiven Objekten. Nehmen wir zusätzlich an, die homologische Dimension unserer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ sei beschränkt durch m, so liefert die vorhergehende Konstruktion mit [TD] 2.6.35 sogar eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung durch Injektive $(I^{p,q})$ mit $I^{p,q} = 0$ für alle $q > m$. Der Übergang zum Totalkomplex zeigt dann wieder mit 4.6.8, daß unter dieser Zusatzannahme sogar überhaupt jeder Komplex in $\mathcal{A}$ quasiisomorph ist zu einem Komplex von injektiven Objekten.

Proposition 10.3.10 (**Lift zu Cartan-Eilenberg-Auflösung**). *Sei $f : A \to B$ eine Kettenabbildung von Komplexen in einer abelschen Kategorie und seien $A \to I$ sowie $B \to J$ Cartan-Eilenberg-Obenauflösungen. Besteht J aus injektiven Objekten, so besitzt f einen Lift zu einem Doppelkomplexmorphismus $I \to J$ und dieser Lift ist eindeutig bis auf vertikale Homotopie. Darüber hinaus sind Lifts homotoper Kettenabbildungen $f, g : A \to B$ homotop im Sinne von Doppelkomplexen.*

Beweis. Alles bis auf die letzte Aussage folgt mit einer Argumentation, die wir bereits beim Beweis des Hauptlemmas der homologischen Algebra [TS] 3.5.6.14

verwendet hatten. Wir müssen dazu nur prüfen, daß gegeben eine zykelexakte kurze exakte Sequenz von Komplexen $M \hookrightarrow N \twoheadrightarrow L$ und ein maximal spaltender Komplex aus Injektiven I die Räume von Kettenabbildungen eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Ket}(L, I) \hookrightarrow \mathrm{Ket}(N, I) \twoheadrightarrow \mathrm{Ket}(M, I)$$

induzieren. Nun ist jedoch I ein Produkt von Komplexen der Gestalt „ein injektives Objekt an einer Stelle, Null sonst“ und „dasselbe injektive Objekt an zwei benachbarten Stellen mit der Identität als Differential, Null sonst“. Für diese beiden Typen von Komplexen I ist die Exaktheit unserer Sequenz klar und sie folgt sofort im allgemeinen. Um nun noch zu zeigen, daß Lifts homotoper Kettenabbildungen doppelkomplexhomotop sind, reicht es zu zeigen, daß jeder Lift $\tilde{f} : (I^{p,q}) \to (J^{p,q})$ einer nullhomotopen Kettenabbildung $f : (A^p) \to (B^p)$ auch selbst nullhomotop ist. Seien also $s^p : A^p \to B^{p-1}$ gegeben mit $\partial s^p + s^{p+1}\partial = f^p$. Nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra liften sie zu Kettenabbildungen von Spaltenkomplexen $\tilde{s}^p : I^{p,*} \to J^{p-1,*}$. A forteriori sind dann $\partial\tilde{s}^p + \tilde{s}^{p+1}\partial : I^{p,*} \to J^{p,*}$ Kettenabbildungen von Spaltenkomplexen, die $f^p : A^p \to B^p$ liften. Andererseits kommutieren die $\partial\tilde{s} + \tilde{s}\partial$ aber auch mit den horizontalen Differentialen ∂ und bilden folglich einen Morphismus von Doppelkomplexen. Damit ist $\partial\tilde{s} + \tilde{s}\partial - \tilde{f}$ ein Lift der Nullabbildung $A \to B$ zu einem Homomorphismus von Doppelkomplexen und ist nach der Eindeutigkeit von Lifts bis auf vertikale Homotopie folglich homotop zu Null vermittels einer vertikalen Homotopie. $\square$

Ergänzung 10.3.11. Noch feiner zeigen wir im Beweis der letzten Aussage sogar, daß jede Homotopie von Kettenabbildungen $A \to B$ zu einer Homotopie zwischen beliebig vorgegebenen Lifts unserer Abbildungen liftet. Diese Aussagen sollten eigentlich zusammen mit dem Hauptlemma der homologischen Algebra zu einer ganzen Theorie für „Cartan-Eilenberg-Auflösungen von Multikomplexen“ gehören. Deren Entwicklung mag einmal ein Student angehen. Ich hoffe, daß dadurch die hier gegebene Darstellung transparenter gemacht werden kann.

10.3.12 (**Derivierte Funktoren und Spektralsequenzen**). Gegeben ein linksexakter Funktor $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie konstruieren wir für jeden gegen die Pfeile beschränkten Komplex $B^* \in \mathrm{Ket}^+\mathcal{B}$ aus G-azyklischen Objekten eine konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^q G)(\mathcal{H}^p B^*) \Rightarrow \mathcal{H}^n(GB^*)$$

Zunächst finden wir nach 10.3.5 eine Cartan-Eilenberg-Obenauflösung $(I^{p,q})$ von B^* im ersten Quadranten durch Injektive. Dann ist $(GI^{p,q})$ ein Doppelkomplex im ersten Quadranten mit exakten Spalten an allen Stellen mit $q \neq 0$, da wir die B^p als

G-azyklisch angenommen hatten, und die Einbettung des waagerechten Kernkomplexes liefert nach 4.6.5 Isomorphismen $\mathcal{H}^n(GB^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n \operatorname{tot}(GI^{p,q})$. Berechnen wir die Homologie des Totalkomplexes dieses letzten Doppelkomplexes mithilfe der Spektralsequenz 10.1.22 oder vielmehr ihrem offensichtlichen Analogon für allgemeine abelsche Kategorien, so ergibt sich als E_1-Term $E_1^{p,q} = G\mathcal{H}^p(I^{*,q}, \partial)$, da wir die Zeilen maximal spaltend angenommen hatten. Da die $\mathcal{H}^p(I^{*,q}, \partial)$ nach Annahme injektive Auflösungen der Kohomologieobjekte $\mathcal{H}^p B^*$ sind, erhalten wir als E_2-Terme $E_2^{p,q} = (\mathrm{R}^q G)(\mathcal{H}^p B^*)$. Nach 10.3.10 und 10.1.25 ist unsere Spektralsequenz ab dem E_2-Term im übrigen bis auf eindeutigen Isomorphismus unabhängig von der gewählten Auflösung $(I^{p,q})$ und sogar funktoriell auf der Homotopiekategorie von gegen die Differentiale beschränkten Komplexen B^* aus G-azyklischen Objekten von $\mathcal{B}$. Da wir von einem Doppelkomplex in der oberen Halbebene ausgehen, erhalten wir wie in 10.1.22 die Morphismen am unteren Rand

$$\mathcal{H}^n(GB^*) \to G(\mathcal{H}^n B^*)$$

Explizit induzieren die Morphismen von Komplexen $B^* \leftarrow \tau^{\leq n} B^* \to \mathcal{H}^n B^*[-n]$ Morphismen $GB^* \leftarrow G\tau^{\leq n} B^* \to G(\mathcal{H}^n B^*)[-n]$. Da G linksexakt ist, können wir die Mitte umschreiben zu $\tau^{\leq n} GB^*$. Unter $\mathcal{H}^n$ wird demnach der Pfeil nach links ein Isomorphismus und so entsteht unser Morphismus am unteren Rand.

Vorschau 10.3.13. In der Sprache der „derivierten Kategorien und derivierten Funktoren“ bedeutet das nach [TD] 3.5.1 für jede abelsche Kategorie $\mathcal{B}$ mit genug Injektiven und alle $X \in \mathrm{Der}^+\mathcal{B}$ und jeden linksexakten Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ eine in X funktorielle konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^q G)(\mathcal{H}^p X) \Rightarrow \mathcal{H}^n((\mathrm{R}G)(X))$$

Wir können in dieser Sprache auch die zum Konvergenzdatum gehörige Filtrierung explizit angeben als

$$\mathcal{H}^{n,\geq q}((\mathrm{R}G)(X)) = \operatorname{im}\big(\mathcal{H}^n((\mathrm{R}G)(\tau^{\leq n-q} X)) \to \mathcal{H}^n((\mathrm{R}G)(X))\big)$$

Um das zu einzusehen, mag man prüfen, daß wir in den Notationen des vorhergehenden Beweises einen Quasiisomorphismus $\tau^{\leq p} B^* \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq p}(I^{*,q})$ erhalten, der sogar eine injektive Auflösung ist, und mag die alternative Beschreibung der Filtrierung im Fall von Doppelkomplexen aus 10.1.22 verwenden.

10.3.14 (**Grothendieck's Spektralsequenz**). Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien mit genug Injektiven und $\mathcal{C}$ eine weitere abelsche Kategorie. Seien $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor und $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein linksexakter Funktor. Macht F injektive Objekte zu G-azyklischen Objekten, so erhalten wir für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$, indem wir eine injektive Auflösung $A \to J^{\lhd}$ wählen und 10.3.12 auf $B^* := FJ^{\lhd}$ anwenden, eine konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^q G \circ \mathrm{R}^p F)A \;\Rightarrow\; \mathrm{R}^n(G \circ F)A$$

Auch diese Spektralsequenz hängt bis auf eindeutigen Isomorphismus nicht von den getroffenen Wahlen ab und ist funktoriell in A. Da wir von einem Doppelkomplex in der oberen Halbebene ausgehen, erhalten wir wie in 10.1.22 oder 10.3.12 die Morphismen am unteren Rand $\mathrm{R}^n(G \circ F)A \to (G \circ \mathrm{R}^n F)A$.

Beispiel 10.3.15 (**Leray'sche Spektralsequenz**). Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ und eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X erhalten wir eine konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$(\mathrm{R}^q g_* \circ \mathrm{R}^p f_*)\mathcal{F} \;\Rightarrow\; \mathrm{R}^n(g \circ f)_*\mathcal{F}$$

Das folgt aus Grothendieck's Spektralsequenz 10.3.14 mit der Erkenntnis, daß der Vorschub jeder welken und damit jeder injektiven abelschen Garbe welk ist und damit nach 6.5.7 azyklisch für Vorschübe. Die Morphismen am unteren Rand sind in diesem Fall Morphismen $\mathrm{R}^n(g \circ f)_*\mathcal{F} \to (g_* \circ \mathrm{R}^n f_*)\mathcal{F}$.

Beispiel 10.3.16 (**Kohomologie von Faserbündeln**). Ist $f : X \to Y$ ein Faserbündel mit Faser F über einem überlagerungstrivialen offenlokal zusammenziehbaren Raum und M eine abelsche Gruppe, so erhalten wir für die Kohomologie des Totalraums eine konvergierende E_2-Spektralsequenz

$$\mathrm{H}^q(Y; \mathrm{H}^p(F; M_F)_Y) \;\Rightarrow\; \mathrm{H}^n(X; M_X)$$

Der E_2-Term ist dabei die Kohomologie der Basis mit Koeffizienten in der Kohomologie der Faser. In der Tat sind die höheren Vorschübe $\mathrm{R}^p f_* M_X$ in diesem Fall lokal konstant nach 9.2.4 mit der Kohomologie der Faser als Halm und damit konstant nach [TF] 2.3.1.15, da wir die Basis überlagerungstrivial angenommen hatten.

Beispiel 10.3.17 (**Kohomologie von Faserbündeln, Variante**). Ist $f : X \to Y$ ein Faserbündel mit zusammenhängender offenlokal zusammenziehbarer Faser F und gilt $\mathrm{H}^q(F) = 0$ für $0 < q \leq n$, so induziert der Rückzug auf der Kohomologie Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X) \quad \text{für } q \leq n.$$

Unsere Beschreibung 6.5.2 der höheren Vorschübe liefert für ihre Halme bei $y \in Y$ ausgezeichnete Isomorphismen $\mathrm{col}_{y \in V \Subset Y} \mathrm{H}^q(V \times F) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^q f_* \mathbb{Z}_X)_y$.

Beispiel 10.3.18 (**Spektralsequenz der lokalen Kohomologie**). Sei $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge. Als Rechtsadjungierter der exakten Ausdehnung durch Null macht $i^! : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}_{/C}$ injektive Garben zu injektiven Garben und per definitionem gilt $\Gamma_C = \Gamma \circ i^!$. Grothendieck's Spektralsequenz spezialisiert damit für $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ zu einer E_2-Spektralsequenz

$$\mathrm{H}^q(C; \mathrm{R}^p i^! \mathcal{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^n_C(X; \mathcal{F})$$

Die zugehörige Surjektion $\mathrm{H}^n_C(X;\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(C;\mathrm{R}^n i^!\mathcal{F})$ hat einen Kern mit einer Filtrierung mit den $\mathrm{H}^q(C;\mathrm{R}^p i^!\mathcal{F})$ für $0 < q \leq n$ als Subquotienten. Wählen wir einen Punkt $x \in X$ und bilden den Kolimes über alle seine Umgebungen U, so verschwinden im Kolimes alle anderen Subquotienten nach 4.3.28 und wir erhalten einen Isomorpismus auf den Halm der lokalen Kohomologiegarbe

$$\mathrm{colf}_{U\ni x}\, \mathrm{H}^n_{C\cap U}(U;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}^n i^!\mathcal{F})_x$$

10.4 Äquivariante de-Rham-Kohomologie (in Arbeit)*

10.4.1. Sei k ein unendlicher Köper. Unter der k-Ringalgebra der regulären Funktionen $\mathcal{O}(V) \subset \mathrm{Ens}(V,k)$ auf einem k-Vektorraum V verstehen wir die Unterringalgebra der Ringalgebra aller k-wertigen Funktionen, die von den Linearformen erzeugt wird. Wir fordern hier k unendlich, um Konflikte mit der in der algebraischen Geometrie üblichen Begrifflichkeit zu vermeiden.

10.4.2. Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit mit der glatten Operation einer Liegruppe $G\backslash X$ erklärt man den **äquivarianten de-Rham-Komplex** als die graduierte $\mathbb{R}$-Ringalgebra

$$\Omega^*(G\backslash X) := \big(\Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})\big)^G$$

in Bezug auf die „verdoppelte Graduierung“ auf der $\mathbb{R}$-Ringalgebra $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ der regulären Funktionen auf der Liealgebra $\mathfrak{g}$, für die die Linearformen homogen sind vom Grad Zwei. Als Differential auf $\Omega^*(G\backslash X)$ nehmen wir

$$\mathrm{d}_G(\omega\otimes f) := (\mathrm{d}\omega)\otimes f - \sum_\rho i_{\xi_\rho}\omega \otimes \xi_\rho^\top f$$

für $\xi_1,\ldots,\xi_r$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und $\xi_\rho^\top$ den jeweiligen Vektor der dualen Basis alias die entsprechende Koordinatenfunktion auf $\mathfrak{g}$. Weiter bezeichne $\xi = \xi^X$ auch das Vektorfeld der infinitesimalen Operation von ξ nach **??** und $i_\xi\omega$ das partielle Auswerten nach **??**. Insgesamt wird bei den hinteren Summanden der Grad von ω um Eins erniedrigt, der Grad der Funktion wegen der verdoppelten Graduierung jedoch um Zwei erhöht, so daß unser Differential in der Tat den Grad um Eins erhöht. Man prüft leicht auf ganz $\Omega^*(X)\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ die graduierte Leibnizregel

$$\mathrm{d}_G\big((\omega\otimes f)(\eta\otimes g)\big) = \big(\mathrm{d}_G(\omega\otimes f)\big)(\eta\otimes g) + (-1)^{|\omega|}(\omega\otimes f)\big(\mathrm{d}_G(\eta\otimes g)\big)$$

Wir haben auch eine offensichtliche Einbettung

$$\Omega^*(X)\otimes\mathcal{O}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(\mathfrak{g},\Omega^*(X))$$

Die G-invarianten Tensoren sind genau die, die darunter G-äquivarianten Abbildungen entsprechen. Bezeichnet $a_\zeta : \Omega^*(X) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g}) \to \Omega^*(X)$ das Auswerten bei $\zeta \in \mathfrak{g}$, so finden wir $a_\zeta \mathrm{d}_G = \mathrm{d}a_\zeta - i_\zeta a_\zeta$. Daraus folgern wir, daß unser Differential invariante Tensoren zu invarianten Tensoren macht, da mit $\zeta \mapsto a_\zeta \omega$ auch $\zeta \mapsto a_\zeta(\mathrm{d}_G \omega)$ äquivariant ist. Weiter finden wir

$$\begin{aligned} a_\zeta \mathrm{d}_G^2 &= \mathrm{d}a_\zeta \mathrm{d}_G - i_\zeta a_\zeta \mathrm{d}_G \\ &= \mathrm{d}^2 a_\zeta - \mathrm{d}i_\zeta a_\zeta - i_\zeta \mathrm{d}a_\zeta + i_\zeta^2 a_\zeta \\ &= -\mathcal{L}_\zeta a_\zeta \end{aligned}$$

mit der Cartan-Formel [**?**] **??** im letzten Schritt. Gehen wir nun zusätzlich von einer invarianten Form $\omega \in (\Omega^*(X) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g}))^G$ aus, so ist $\zeta \mapsto a_\zeta(\omega)$ eine G-äquivariante Abbildung $\mathfrak{g} \to \Omega^*(X)$ und ist folglich auch verträglich mit der Operation der Liealgebra, als da heißt

$$a_{[\xi,\zeta]}(\omega) = \mathcal{L}_\xi(a_\zeta(\omega))$$

für alle $\xi \in \mathfrak{g}$ und insbesondere $\mathcal{L}_\zeta(a_\zeta(\omega)) = 0$. Es folgt $a_\zeta \mathrm{d}_G^2 \omega = 0$ für alle ζ und so $\mathrm{d}_G^2 \omega = 0$.

10.4.3 (**Äquivariante de-Rham-Kohomologie für kompakte Liegruppen**). Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit X mit der Operation einer kompakten Liegruppe K setzen wir

$$\mathrm{H}_K^*(X)_{\mathrm{dR}} := \mathcal{H}^* \Omega^*(K \backslash X)$$

und nennen diese graduierte $\mathbb{R}$-Ringalgebra die **q-te K-äquivariante de-Rham-Kohomologie von X**.

10.4.4 (**Funktorialität der äquivarianten de-Rham-Kohomologie**). Gegeben ein Morphismus $(\phi \backslash f) : (K \backslash X) \to (L \backslash Y)$ von glatten Mannigfaltigkeiten mit glatten Operationen kompakter Liegruppen induziert der Rückzug von Differentialformen zusammen mit dem Rückzug regulärer Funktionen auf den jeweiligen Liealgebren offensichtliche Homomorphismen

$$(\phi \backslash f)^* : \mathrm{H}_L^q(Y)_{\mathrm{dR}} \to \mathrm{H}_K^q(X)_{\mathrm{dR}}$$

Die äquivariante de-Rham-Kohomologie wird damit ein Funktor von der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten mit glatte Operation einer kompakten Liegruppe in die Kategorie der graduierten $\mathbb{R}$-Ringalgebren.

10.4.5 (**Schwierigkeiten im Fall allgemeiner Liegruppen**). Die obige Definition bleibt zwar formal sinnvoll für allgemeine Liegruppen, aber die Vergleichssätze zur topologischen äquivarianten Kohomologie ebenso wie die Quotientenisomorphismen werden problematisch. Ich will aus diesem Grund die Bezeichnung als äquivariante de-Rham-Kohomologie nur im Fall kompakter Liegruppen verwenden.

Lemma 10.4.6 (Äquivariantisieren von Kohomologie-Isomorphismen). *Seien K eine kompakte Liegruppe und $f : X \to Y$ eine glatte äquivariante Abbildung von glatten K-Mannigfaltigkeiten. Induziert der Rückzug auf der gewöhnlichen de-Rham-Kohomologie Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^n(Y)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X)_{\mathrm{dR}} \quad \textit{für } n \leq N,$$

so induziert er auch auf der äquivarianten de-Rham-Kohomologie Isomorphismen

$$\mathrm{H}^n_K(Y)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_K(X)_{\mathrm{dR}} \quad \textit{für } n \leq N.$$

Vorschau 10.4.7. Eine entsprechende Aussage in der Allgemeinheit topologischer Räume und Gruppen zeigen wir erst in [TSF] **??**.

Beweis. Beim äquivarianten de-Rham-Komplex T^n_X steht im homologischen Grad n der Eintrag

$$T^n_X = \bigoplus_{p+2q=n} \left(\Omega^p(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{k})^q\right)^K$$

Er hat eine Filtrierung durch die Unterkomplexe $T^{n,q\geq a}_X$ und die E_0-Terme der zugehörigen Spektralsequenz im Sinne von [TG] 10.1.16 sind die

$$E_0^{(n,a)} = E_0^{(n,a)}(X) = \left(\Omega^{n-2a}(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{k})^a\right)^K$$

mit $\partial_0 : E_0^{(n,a)} \to E_0^{(n+1,a)}$ der von der Cartan'schen äußeren Ableitung induzierten Abbildung. Natürlich gilt auch $E_0^{(n,a)} = 0$ für $n < 2a$. Nun sind alle $\Omega^n(X)$ mit der Topologie der „gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen auf Kompakta" von-Neumann-Darstellungen von K im Sinne von **??** und der Randoperator ebenso wie der Rückzug von Differentialformen sind stetige Homomorphismen von Darstellungen. Die Integration über die Gruppe liefert idempotente Endomorphismen aller unserer Räume, deren Bild die K-Invarianten sind und der mit allen Abbildungen vertauscht. Der Rückzug unter f liefert einen Homomorphismus von Spektralsequenzen und unsere Annahmen zeigen, daß dieser Homomorphismus Isomorphismen $E_1^{(n,a)}(Y) \xrightarrow{\sim} E_1^{(n,a)}(X)$ induziert für $n \leq N + 2a$. Damit muß er auch für alle $r \geq 1$ Isomorphismen $E_r^{(n,a)}(Y) \xrightarrow{\sim} E_r^{(n,a)}(X)$ induzieren für $n \leq N + 2q$ und so immer nach [TG] 10.1.16 Isomorphismen $\mathrm{gr}^a \mathcal{H}^n T_Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^a \mathcal{H}^n T_X$ für $n \leq N + 2a$ und damit schließlich wie gewünscht Isomorphismen $\mathcal{H}^n T_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n T_X$ für $n \leq N$. □

Lemma 10.4.8 (Äquivariante de-Rham-Kohomologie einer Liegruppe). *Gegeben eine kompakte Liegruppe K gilt $\mathrm{H}^n_K(K)_{\mathrm{dR}} = 0$ für $n > 0$ und der strukturelle Ringalgebrenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \Omega^*(K \circlearrowright K)$ induziert einen Isomorphismus*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_K(K)_{\mathrm{dR}}$$

Beweis. Dieses Lemma gilt analog für beliebige Liegruppen und wir zeigen es in dieser Allgemeinheit. Nachdem wir $\bigwedge^p \mathfrak{k}^*$ mit linksinvarianten Differentialformen auf K identifizieren, liefert die Multiplikation Isomorphismen $\mathcal{C}^\infty(K) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{k}^* \xrightarrow{\sim} \Omega^p(K)$ und daraus ergeben sich Isomorpismen

$$\mathcal{C}^\infty(K, \bigwedge^p \mathfrak{k}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{k})^q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(K) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{k}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{k})^q \xrightarrow{\sim} \Omega^p(K) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{k})^q$$

Bilden wir die K-Invarianten, so liefert das Auswerten am neutralen Element den ersten Isomorphismus eines Diagramms

$$\bigwedge^p \mathfrak{k}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{k})^q \xleftarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(K, \bigwedge^p \mathfrak{k}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{k})^q)^K \xrightarrow{\sim} \left(\Omega^p(K) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{k})^q\right)^K$$

Den so entstehenden Isomorphismus von links nach rechts notieren wir $\ddot{\mathrm{a}}$ wie **Äquivariantisierung**. Nun betrachten wir die Filtrierung unseres äquivarianten de-Rham-Komplexes Komplexes T_K^n durch die Unterkomplexe $T_K^{n,p+q\geq t}$. Die E_0-Terme der zugehörigen Spektralsequenz im Sinne von [TG] 10.1.16 sind die

$$E_0^{(n,t)} = \left(\Omega^{2t-n}(K) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{k})^{n-t}\right)^K$$

und wir zeigen, daß das Differential $\partial_0 : E_0^{(n,t)} \to E_0^{(n+1,t)}$ unter unseren Isomorphismen von eben auf der linken Seite dem Differential des Koszulkomplexes 3.2.32 entspricht. Es folgt $E_1^{(n,t)} = 0$ für $n > 0$ und damit die Behauptung. Es gilt also, ∂_0 mit dem Koszuldifferential $\mathrm{d}_{\mathrm{Kos}}$ zu vergleichen. Unsere obigen Isomorphismen sind aber Isomorphismen von bigraduierten $\mathbb{R}$-Ringalgebren, das Koszuldifferential ändert sich nicht beim Übergang zum assoziierten Graduierten unter unserer Filtrierung und d_K wird zu

$$\partial_0 = \bar{\mathrm{d}}_K : \omega \otimes f \mapsto \sum_\rho -i_{\xi_\rho}\omega \otimes \xi_\rho^\top f$$

Auch $\bar{\mathrm{d}}_K$ erfüllt jedoch die graduierte Leibnizregel, so daß wir die Verträglichkeit der beiden Differentiale nur auf Erzeugern der Ringalgebra zu prüfen brauchen. Wegen $\mathrm{d}_{\mathrm{Kos}}(\lambda \otimes 1) = -1 \otimes \lambda$ können wir uns sogar darauf zurückziehen,

$$\ddot{\mathrm{a}}(\mathrm{d}_{\mathrm{Kos}}(\lambda \otimes 1)) = \bar{\mathrm{d}}_K(\ddot{\mathrm{a}}(\lambda \otimes 1))$$

zu zeigen, und wir können uns dabei auf $\lambda = \xi_\rho^\top$ beschränken. Um die linke Seite alias $\ddot{\mathrm{a}}(-1 \otimes \xi_\rho^\top)$ zu beschreiben, beachten wir zunächst, daß das ja in der Mitte auf die Abbildung $k \mapsto (\mathrm{Ad}^*(k))(\xi_\rho^\top)$ gehen muß und erklären wir Funktionen $f_\rho^\sigma \in \mathcal{C}^\infty(K)$ durch $(\mathrm{Ad}^*(k))(\xi_\rho^\top) = \sum_\sigma f_\rho^\sigma(k)\xi_\sigma^\top$, so finden wir schließlich

$$\ddot{\mathrm{a}}(\mathrm{d}_{\mathrm{Kos}}(\xi_\rho^\top \otimes 1) = \ddot{\mathrm{a}}(-1 \otimes \xi_\rho^\top) = \sum_\sigma -f_\rho^\sigma \otimes \xi_\sigma^\top$$

Umgekehrt haben wir $\ddot{a}(\xi_\rho^\top \otimes 1) = \grave{\xi}_\rho^\top \otimes 1$ mit $\grave{\lambda}$ der Fortsetzung von λ zu einem linksinvarianten Kovektorfeld auf K und weil in der Definition von d_K das i_ξ das partielle Einsetzen des durch die infinitesimale Operation von ξ gegebenen Vektorfelds meint, in unserem Fall also das partielle Einsetzen der rechtsinvarianten Fortsetzung $\acute{\xi}$ von ξ, schreiben wir das erst zu einer Linearkombination linksinvarianter Felder um. Haben wir aber $(\mathrm{Ad}(k^{-1}))(\xi_\rho) = \sum h_\rho^\sigma(k)\xi_\sigma$, so zeigt eine kurzen Rechnung die Beziehung

$$\acute{\xi}_\rho = \sum h_\rho^\sigma(k)\grave{\xi}_\sigma$$

zwischen rechtsinvarianten und linksinvarianten Fortsetzungen und eine ebensokurze Rechnung liefert $h_\rho^\sigma = f_\sigma^\rho$ und wir finden wie gewünscht

$$\bar{\mathrm{d}}_K(\ddot{a}(\xi_\rho^\top \otimes 1)) = \bar{\mathrm{d}}_K(\grave{\xi}_\rho^\top \otimes 1) = \sum_\sigma -\grave{\xi}_\rho^\top(\acute{\xi}_\sigma) \otimes \xi_\sigma^\top = \sum_\sigma -f_\rho^\sigma \otimes \xi_\sigma^\top \qquad \square$$

Lemma 10.4.9 (**Äquivariante de-Rham-Kohomologie trivialer Torsoren**). *Gegeben eine Liegruppe G und eine Mannigfaltigkeit B ist der offensichtliche Homomorphismus von dg-Ringalgebren ein Quasiisomorphismus*

$$\Omega^* B \xrightarrow{\sim} \Omega^*(G\backslash(G \times B))$$

Beweis. Wir modifizieren den Beweis im Fall eines einpunktigen Raums B aus 10.4.8. Zunächst ist klar, wie wir Differentialformen auf einem Produkt zerlegen können in der Form $\Omega^n(G \times B) = \bigoplus_{p+c=n} \Omega^{p,c}(G \times B)$. Nachdem wir $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ mit linksinvarianten Differentialformen auf G identifizieren und auf $G \times B$ zurückziehen, liefert die Multiplikation $\Omega^{0,c}(G \times B) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \Omega^{p,c}(G \times B)$ und

$$\Omega^{0,c}(G \times B) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q \xrightarrow{\sim} \Omega^{p,c}(G \times B) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q$$

Bilden wir die G-Invarianten, so liefert der Rückzug unter $B \to G \times B$ mit $b \mapsto (1, b)$ einen Isomorphismus und die Umkehrabbildung nennen wir die **Äquivariantisierung**

$$\ddot{a} : \Omega^c(B) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q \xrightarrow{\sim} \left(\Omega^{p,c}(G \times B) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^q\right)^G$$

Nun betrachten wir die Filtrierung unseres äquivarianten de-Rham-Komplexes Komplexes $T^n = T^n_{G\times B}$ durch die Unterkomplexe $T^{n,p+q\geq t}$. Die E_0-Terme der zugehörigen Spektralsequenz im Sinne von [TG] 10.1.16 sind die

$$E_0^{(n,t)} = \bigoplus_c \left(\Omega^{2t-n+c,c}(G \times B) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})^{n-c-t}\right)^G$$

und wir zeigen, daß das Differential $\partial_0 : E_0^{(n,t)} \to E_0^{(n+1,t)}$ unter unseren Isomorphismen von eben auf der linken Seite $\bigoplus_c \Omega^c(B) \otimes \bigwedge^{2t-n+c} \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{g})^{n-c-t}$ dem Differential des Tensorprodukts vom de-Rham-Komplex von B mit dem Koszulkomplex 3.2.32 entspricht. Das ist dieselbe Rechnung wie im Fall 10.4.8, daß B nur aus einem Punkt besteht. So sehen wir, daß unser Quasiisomorphismus in spe einen Quasiisomorphismus auf den E_0-Termen der Spektralsequenz induziert und aus der Theorie der Spektralsequenzen folgt dann, daß er bereits selber ein Quasiisomorphismus gewesen sein muß. □

Proposition 10.4.10 (**Äquivariante de-Rham-Kohomologie von Torsoren**). *Gegeben eine kompakte Liegruppe K und ein glatter K-Linkstorsor $\pi : E \to B$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit B induziert der Rückzug von Differentialformen gefolgt vom Tensorieren mit der konstanten Funktion $1 \in \mathcal{O}(\mathfrak{k})$ einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Ringalgebren, den* **Quotientenisomorphismus**

$$\mathrm{H}^*(B)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_K(E)_{\mathrm{dR}}$$

Beweis. Das gilt analog für eine beliebige Liegruppe K. Wir betrachten auf B den Garbenkomplex ${}^E\Omega^*_B : U \mapsto \Omega^*(K\backslash\pi^{-1}(U))$ und erhalten einen Homomorphismus $\Omega^*_B \to {}^E\Omega^*_B$ durch Rückzug auf E und Tensorieren mit der konstanten Funktion $1 \in \mathcal{O}(\mathfrak{k})$. Dieser Hommorphismus ist verträglich mit dem Differential, weil das partielle Einsetzen i_ξ jede Differentialform auf E annulliert, die durch Rückzug von einer Differentialform auf B herkommt. Ich behaupte nun, daß wir so einen Quasiisomorphismus von Garbenkomplexen

$$\Omega^*_B \xrightarrow{\sim} {}^E\Omega^*_B$$

erhalten. Um das zu zeigen, dürfen wir annehmen, daß unser Torsor trivial ist, also $E = K \times B$, und müssen nur zeigen, daß wir in dieser Situation stets einen Quasiisomorphismus auf den globalen Schnitten erhalten. Das aber war gerade die Aussage von Lemma 10.4.9. Nun erkennt man wie in 5.3.4, daß ${}^E\Omega^*_B$ eine weiche Garbe ist, also nach 5.3.5 azyklisch für den Funktor der globalen Schnitte. Die Proposition folgt. □

Satz 10.4.11 (**Äquivariante Vergleichsisomorphismen**). *Seien $K\backslash X$ eine parakompakte glatte Mannigfaltigkeit mit der Operation einer kompakten Liegruppe und $q \in \mathbb{N}$. So gibt es genau einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^q_K(X)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_K(X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}}$$

derart, daß er für jeden glatten K-Rechtstorsor A, der zusammenhängend ist mit

$\mathrm{H}^1(A;\mathbb{R}) = \ldots = \mathrm{H}^{q+2}(A;\mathbb{R}) = 0$, *übereinstimmt mit der Verknüpfung*

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{H}^q_K(X)_{\mathrm{dR}} & \tilde{\to} & \mathrm{H}^q_K(A \times X)_{\mathrm{dR}} & \textit{nach 10.4.6,} \\ & \tilde{\to} & \mathrm{H}^q(A \times_{/K} X)_{\mathrm{dR}} & \textit{nach 10.4.10,} \\ & \tilde{\to} & \mathrm{H}^q(A \times_{/K} X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}} & \textit{nach 5.3.9,} \\ & \tilde{\to} & \mathrm{H}^q_K(X;\mathbb{R})_{\mathrm{garb}} & \textit{nach 8.2.24.} \end{array}$$

In ihrer Gesamtheit bilden diese Isomorphismen einen Homomorphismus von $\mathbb{R}$*-Ringalgebren.*

10.4.12. Sie mögen als Übung zeigen, daß die fraglichen Isomorphismen verträglich sind mit dem Rückzug unter Morphismen $(\phi\searrow f)$.

Beweis. Das anschließende Lemma 10.4.13 zeigt, daß es für jedes q solch einen glatten K-Torsor A gibt. Das zeigt schon mal, daß es höchstens einen Isomorphismus mit den im Satz behaupteten Eigenschaften geben kann. Je zwei derartige Torsoren liefern jedoch denselben Morphismus, wir man etwa durch Rückzug auf ihr Produkt erkennt. Das zeigt die Existenz. Daß unsere Abbildung ein Homoorphismus von $\mathbb{R}$-Ringalgebren ist, folgt aus der Konstruktion. □

Lemma 10.4.13. *Gegeben eine kompakte Liegruppe* K *und* $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ *gibt es einen glatten zusammenhängenden* K*-Torsor* A *mit* $\mathrm{H}^1(A;\mathbb{R}) = \ldots = \mathrm{H}^r(A;\mathbb{R}) = 0$.

Beweis. Sei $K_{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von K nach [AAG] **??**, eine komplexe affine algebraische Gruppe. Sie besitzt eine treue Darstellung V. Für $d := \dim_{\mathbb{C}} V$ ist die Menge der linear unabhängigen d-Tupel eine nichtleere offene Teilmenge $U \Subset V^{\times d}$ derart, daß die Isotropiegruppe von jedem Punkt $x \in U$ trivial ist. Wir setzen $W := V^{\times d}$. Das Komplement $Z \Subset W$ von U ist eine algebraische Teilmenge echt kleinerer Dimension $\mathrm{kdim}(Z) < \mathrm{kdim}\, U$. Die Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie

$$\ldots \to \mathrm{H}^{q-1}_!(Z) \to \mathrm{H}^q_!(W\backslash Z) \to \mathrm{H}^q_!(W) \to \mathrm{H}^q_!(Z) \to \ldots$$

aus 4.8.15 zeigt zusammen mit dem Verschwinden von $\mathrm{H}^q_!(Z)$ für $2\,\mathrm{kdim}\, Z < q$ nach 4.10.26 und der Berechnung der kompakten Kohomologie endlichdimensionaler reeller Vektorräume, daß $\mathrm{H}^q_!(W\backslash Z)$ verschwindet für $2\,\mathrm{kdim}\, Z < q < 2\,\dim W$. Mit den Vergleichssätzen und Poincaré-Dualität folgt, daß $\mathrm{H}_q(W\backslash Z)_{\mathrm{sing}}$ verschwindet für $0 < q < 2(\mathrm{kdim}\, W - \mathrm{kdim}\, Z)$ und daß $\mathrm{H}_0(W\backslash Z)_{\mathrm{sing}}$ eindimensional ist alias $X\backslash Z$ zusammenhängend. Allgemeiner ist in $W^{\times r}$ die Menge A aller Tupel mit mindestens einm Eintrag in $U = W\backslash Z$ eine Zariski-offene Teilmenge $A \Subset W^{\times r}$, auf der K frei operiert und deren Komplement eine Kodimension $\geq r$ hat. Nach dem anschließenden Lemma 10.4.14 erhalten wir so die gewünschten K-Torsoren. □

Lemma 10.4.14. *Operiert eine kompakte Liegruppe K glatt auf einer glatten Mannigfaltigkeit A, so ist A/K mit seiner finalen Struktur eine glatte Mannigfaltigkeit und $A \to A/K$ ein glattes Hauptfaserbündel.*

Beweis. Die K-Bahn eines jeden Punktes $p \in A$ ist eine kompakte Untermannigfaltigkeit Kp. Wir finden ein n und eine offene Umgebung $V \Subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Abbildung $\varphi : V \to A$ mit $\varphi(0) = p$ und eine offene Umgebung $U \Subset K$ des neutralen Elements derart, daß $\psi : U \times V \to A$ gegeben durch $(k, v) \mapsto k\varphi(v)$ eine offene Einbettung ist und daß Kp das Bild dieser offenen Einbettung nur in Up trifft. Jetzt finden wir eine stetige Funktionen mit kompaktem Träger $f : U \to [0, 1]$ und $1 = \int_K f$ in Bezug auf das normierte Haarmaß sowie eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $g : V \to [0, 1]$, deren 1-Stellen eine Umgebung V_1 von 0 bilden. Dann betrachten wir $f \boxtimes g$ vermittels ψ als Funktion mit kompaktem Träger auf A und mitteln sie zu einer K-invarianten stetigen Funktion h auf A. Diese Funktion nimmt Werte ≥ 2 an auf K-Bahnen, die $\psi(\{e\} \times V_1)$ mehrfach treffen, und den Wert 1 auf der K-Bahn Kp. So sehen wir, daß es eine Umgebung $V_2 \Subset V$ des Ursprungs gibt derart, daß $\psi : K \times V_2 \to A$ eine offene Einbettung ist. Das Lemma folgt. $\square$

10.4.15 (**Äquivariante Kohomologie einpunktiger Räume**). Gegeben eine kompakte Liegruppe K beinhaltet die Definition des äquivarianten de-Rham-Komplexes 10.4.2 einen Isomomorphismus $\mathcal{O}(\mathfrak{k})^K \xrightarrow{\sim} \Omega^*(K\backslash\mathrm{mgf})$ von $\mathbb{R}$-Ringalgebren und, da rechts das Differential verschwindet, auch einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Ringalgebren

$$\mathcal{O}(\mathfrak{k})^K \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_K(\mathrm{mgf})_{\mathrm{dR}}$$

Hier ist $\mathcal{O}(\mathfrak{k})^K$ wie immer in diesem Kontext mit dem „Doppelten der üblichen Graduierung“ zu versehen und mgf bezeichnet die einpunktige finale Mannigfaltigkeit. Mit dem äquivarianten Vergleichsisomorphismus zur Garbenkohomologie 10.4.11 erhalten wir so einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Ringalgebren

$$\mathcal{O}(\mathfrak{k})^K \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_K(\mathrm{top}; \mathbb{R})$$

10.4.16. Gegeben $K \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus und $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{t}$ deren Liealgebren induziert die Restriktion einen Isomorphismus $\mathcal{O}(\mathfrak{k})^K \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{t})^W$ für $W := \mathrm{N}_K(T)/T$ die Weylgruppe. Man kann das zeigen, indem man beide Seiten unseres Isomorphismus in spe komplexifiziert und sich überlegt, daß man so bei der Variante [O] 32.1.3.3 des Chevalley-Isomorphismus herauskommt.

10.4.17. Der Rückzug liefert dann für jede G-Mannigfaltigkeit X einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \to \mathrm{H}^*_G(X)_{\mathrm{dR}}$$

Im Spezialfall eines G-Linkstorsors E über einer Basismannigfaltigkeit B entspricht die Verknüpfung

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \to \mathrm{H}^*_G(E)_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(B)_{\mathrm{dR}}$$

des Rückzugs mit dem Inversen des Quotientenisomorphismus 10.4.10 unter unseren Vergleichsisomorphismen dem charakteristischen Homomorphismus 8.2.12.

11 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich vielen, insbesondere Olaf Schnürer und Bernhard Link. Der Inhalt geht im wesentlichen zurück auf Grothendieck, Deligne und Verdier [Gro72] und zum Teil auch bereits auf Cartan-Eilenberg [CE56]. Sehr nützlich waren mir die Darstellungen von Godement [God64] und Kashiwara-Schapira [KS90] und Skripten von und Hörmann zu derivierten Kategorien. Die Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie wird auch in [KKK86] bewiesen.

12 Der Lesekurs Garbenkohomologie im SS 2025

Es handelt sich um eine zweistündigen Lesekurs, der einen Lesekurs im Wintersemester fortsetzt.

6.5 Wiederholung Vergleichssätze. Faserfunktoren, kartesische Schnitte, Rückzug, Rückzug von Garben als Beispiel.

13.5 Rückzug, Vorschub, Basiswechsel 6.3.1 folgende. Eigentlicher Basiswechsel und offener Basiswechsel als Isomorphismen. Schreivorschub und zugehöriger Basiswechsel.

27.5 Garben als Schmelzkategorie [TSF] 1.1.2 ganzer Abschnitt. Das braucht etwas Zeit, da man sich mit der Begrifflichkeit der Schmelzkategorien vertraut machen muß. Ich habe das auf deutsch so getauft, man mag es als „symmetric multicategory“ googeln.

3.6 Fragen zu Garben als Schmelzkategorie. Motivation zu derivierter Kategorie.

17.6 Planung: Derivierte Kategorie. Anmoderieren derivierte Funktoren.

24.6 Planung: Derivierte Funktoren. Orelokalisierung durch Indobjekte [TD] 3.2.2. Rechtsfaktorierter Funktor [TD] 3.2.4. Zahmer Rechtsfaktorierter Funktor [TD] 3.2.13. Faktorieren mit injektiven Auflösungen [TD] 3.2.25.

1.7 Planung: A_∞-Strukturen. Ich habe es etwas angeguckt und bin nicht so angetan. Nochmal nachdenken.

13 Die Vorlesung Garbenkohomologie im WS 17/18

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

20.10 Erste Cech-Kohomologie mit Koeffizienten in einer diskreten Gruppe und der Bezug zu n-blättrigen Überlagerungen im Fall der Gruppe $\mathcal{S}_n$. Diskussion von Kolimites von Mengen, noch nicht ganz allgemein. Adjungierte Funktoren waren vielen nicht vertraut.

23.10 Prägarben. Erste Cech-Kohomologie von Prägarben von Gruppen. Torsoren. Erste Cech-Kohomologie in Bijektion zu Isomorphieklassen von Torsoren. Köcher, Kolimites, Limites. Erste Cech-Kohomologie, ganzzahlige, als erste singuläre Kohomologie.

27.10 Höhere Cech-Kohomologie abelscher Prägarben. Garben und ihre étalen Räume. Topologie auf étalem Raum angegeben, aber noch nichts bewiesen.

3.11 Topologie des étalen Raums. Adjungierte Funktoren und ihre Bedeutung für die Konstruktion von Äquivalenzen von Kategorien. Noch nicht Äquivalenz zwischen étalen Räumen und Garben.

6.11 Äquivalenz zwischen étalen Räumen und Garben. Garbifizierung. Kerne, Kokerne, Monos, Epis, präabelsche Kategorien, additive Struktur, additive und abelsche Kategorien. Noch nicht Eindeutigkeit der additiven Struktur.

10.11 Eindeutigkeit der additiven Struktur. Die abelschen Garben sind eine abelsche Kategorie, und Exakheit kann auf den Halmen erkannt werden. Lange exakte Homologiesequenz in abelscher Kategorie, ohne den allgemeinen Beweis.

13.11 Injektive Objekte, injektive Auflösungen, Hauptlemma der homologischen Algebra, derivierte Funktoren, Ext, Garbenkohomologie.

17.11 Lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren. Derivieren mit azyklischen Auflösungen. Welke Garben sind globale-Schnitte-azyklisch.

20.11 Singläre Kohomologie als Garbenkohomologie. Am Schluß etwas zu wenig Zeit gehabt, ich sollte doch nochmal drangehen.

24.11 Singläre Kohomologie als Garbenkohomologie fertig. Erste Spektralsequenzargumente. Rechtstor ist Linkstor. Garbenkohomologie durch azyklische Überdeckungen, sollte am Schluß nochmal drangehen.

27.11 Garbenkohomologie durch azyklische Überdeckungen zu Ende gebracht. Kompakte Garbenkohomologie, aber Äquivalenz mit der kompakten singulären nicht bewiesen. Garbenkohomologie von Teilmengen der Zahlengeraden. Ausgezeichnete Dreiecke, Drehen von ausgezeichneten Dreiecken.

1.12 Ausgezeichnetes Dreieck zu kurzer exakter Sequenz. Natürlichkeit der langen exakten Funktorsequenz. Zurückholen in der Garbenkohomologie. Komorphismen, Opkomorphismen, Vorschub. Zurückholen muß noch fertig behandelt werden.

4.12 Zurückholen. Zurückholen in der Garbenkohomologie. Ausdehnen von Schnitte von relativ Hausdorff'schen Kompakta. Homotopieinvarianz der Garbenkohomologie. Sollte noch explizit fertigmachen, ich hatte 4.5.8 aber noch nicht 4.5.12.

8.12 Homotopieinvarianz. Azyklizität kompaktweicher Garben. Lange exakte Sequenz der Kohomologie mit kompaktem Träger. Noch nicht Funktorialitäten der Kohomologie mit kompaktem Träger.

11.12 Funktorialitäten der Kohomologie mit kompaktem Träger. Ausdehnung durch Null von abelschen Garben. Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ und ihre Komplemente vorgezogen, also 4.10.20 und 4.10.21. Kompakte Kohomologie von Mannigfaltigkeiten 4.10.11 versprochen.

15.12 Lokale Kohomologie. Kompakte Kohomologie von Mannigfaltigkeiten. Injektive Wege im Zweitorus.

18.12 Überlagerungstheorie ohne Fundamentalgruppe. Quotienten nach topologisch freien Operationen als Überlagerungen. Globale Schnitte von nichtkonstanter lokal konstanter mit Faser $\mathbb{Z}$ abelscher Garbe $\mathcal{F}$ auf zusammenhängendem Raum und Schnitte von $\mathcal{F} \otimes G$ für $G \in \mathrm{Ab}$. Topologischer einfacher Zusammenhang.

22.12 Weiche Garben auf parakompakten Räumen sind globale-Schnitte-azyklisch. De-Rham-Kohomologie als Garbenkohomologie. Satz von de Rham nur angedeutet.

8.1 Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen abelschen Gruppe.

12.1 Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen graduierten abelschen Gruppe. Verschiedene Graduierungskonventionen. Spektralsequenzen filtrierter Räume. Garbenkohomologie des $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ als Gruppe.

15.1 Derivierte Vorschübe. Beschreibung über Prägarbe. Leray'sche Spektralsequenz versprochen. Faserfunktoren und Basiswechsel in Bifaserungen.

19.1 Offener und eigentlicher Basiswechsel für Garben von Mengen. Eigentliche Abbildungen, separierte Abbildungen. Derivierter offener und eigentlicher Basiswechsel. Noch nicht eigentliches Bild.

22.1 Zurückholen auf Faserbündel mit zusammenziehbarer Faser. Äquivariante Kohomologie. Äquivarianter Kohomologiering von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ wirkend auf einem Punkt versprochen. Lokalisierung von Kategorien, nur universelle Eigenschaft.

26.1 Ore-Lokalisierung von Kategorien. Erhält Additivität.

29.1 Triangulierte Kategorien. Triangulierte Funktoren. Triangulierte Quotienten. Bisher nur bewiesen, daß Abbildungen mit Kegel in Verdiersystem ein Oresystem bilden.

2.2 Quotienten triangulierter Kategorien fertig. Derivierte Kategorie, Homomorphismen und injektive Auflösungen, Kohomologiering und Kohomologie als Homomorphismen der derivierten Kategorie. Lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren durch ausgezeichnete Dreiecke.

5.2 Zurückholen auf der Kohomologie als Ringhomomorphismmus. Vergleich von singulärem und garbentheoretischen Kohomologiering. Abschneidefunktoren und beschränkte derivierte Kategorien.

8.2 Aus der Erinnerung ergänzt: Gysin-Sequenz, einige Kohomologieringe klassifizierender Räume.

Literatur

[AAG] Skriptum Affine Algebraische Gruppen. Wolfgang Soergel.

[AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.

[AN2] Skriptum Analysis 2. Wolfgang Soergel.

[Bor84] Armand Borel, editor. *Intersection cohomology*, volume 50 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1984.

[Bor94] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1-3*. Encyclopaedia of Mathematics. Cambridge University Press, 1994.

[Bre97] Glen E. Bredon. *Sheaf Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, zweite edition, 1997.

[Buc55] D.A. Buchsbaum. Exact categories and duality. *Transactions AMS*, 80:1–34, 1955.

[CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[Fre66] Peter Freyd. *Abelian Categories*. Harper & Row, 1966.

[Gab62] Peter Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90:323–448, 1962.

[God64] Roger Godement. *Théorie des faisceaux*, volume 1252 of *Actualités scientifiques et industrielles*. Hermann Paris, 1964.

[Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math. J. (2)*, 9:119–221, 1957.

[Gro72] Alexander Grothendieck. *SGA 4*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1972.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[HS71] Peter J. Hilton and Urs Stammbach. *A course in homological algebra*, volume 4 of *Graduate Texts*. Springer, 1971.

[Ive87] Iversen. *Cohomology of Sheaves*. Springer, 1987.

[KAG] Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie. Wolfgang Soergel.

[KKK86] Masaki Kashiwara, Takahiro Kawai, and Tatsuo Kimura. *Foundations of algebraic analysis*, volume 37 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. Translated from the Japanese by Goro Kato.

[KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on Manifolds*, volume 292 of *Grundlehren*. Springer, 1990.

[LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.

[LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.

[Mac63] Saunders MacLane. *Homology*, volume 114 of *Grundlehren*. Springer, 1963.

[ML] Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen. Wolfgang Soergel.

[NAS] Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie. Wolfgang Soergel.

[O] Skriptum Kategorie $\mathcal{O}$. Wolfgang Soergel.

[Qui73] Daniel Quillen. Algebraic K-theory, I: Higher K-theories. In *Lecture Notes in Math. 341*, pages 85–147. Springer, 1973.

[TD] Skriptum Derivierte Kategorien und Funktoren. Wolfgang Soergel.

[tD91] Tammo tom Dieck. *Topologie*. de Gruyter, 1991.

[TF] Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie. Wolfgang Soergel.

[TG] Skriptum Garbenkohomologie. Wolfgang Soergel.

[TM] Skriptum Topologie und kompakte Gruppen. Wolfgang Soergel.

[TS] Skriptum Singuläre Homologie. Wolfgang Soergel.

[TSF] Skriptum Grothendieck's sechs Funktoren. Wolfgang Soergel.

[TSK] Skriptum Kategorielle Produktstrukturen. Wolfgang Soergel.

[TSS] Skriptum Sechs Funktoren in Spezalf"allen. Wolfgang Soergel.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das $\cup$ dem Buchstaben u oder das $\subset$ dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

Magu-funktor, 45
$f_{¡}$ Schreivorschub, 193
$\overset{\smile}{\to}$ Quasiisomorphismus, 170
$\langle\ \rangle = \langle\ \rangle_{\oplus}$ additives Erzeugnis, 50
X^{δ} Menge X mit der diskreten Topologie, 235
f^* Rückzug
von Mengengarbe, 100
$b^{(!)}$ Schnitte mit Träger, 195
$f^!$ Schreirückzug
von abelschen Garben, 195
$(j, \varphi)_!$
Ausdehnen durch Null von Schnitten, 133
f_* Vorschub
von Garben und Prägarben, 98
von globalem Schnitt, 98
$f_!$ Schreivorschub, 192
$f_!$ eigentlicher Vorschub
Ausdehnung durch Null, 133
$f_{[!]}$ Linksadjungierter des étalen Rückzugs von Mengengarben, 188
$f_{¡}$
eigentlicher Vorschub
opponierter, 193
G_X konstante Garbe, 15
$\mathcal{F}_Z$ bei Garben, 196
$\mathcal{F}_x$ Halm
einer Prägarbe, 29
$\mathcal{F}_{Z\subset X}$ bei Garben, 196
$\mathcal{C}_{\subset X}$ Monos nach X in $\mathcal{C}$, 42
$\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ Rückzug von Kategorie, 182
$\mathcal{E}^X$ *Ausdehnung durch Null*, 194

Ab
G-Ab für topologisches Monoid G, 212
$\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/X}$ konstante belsche Garben, 36
$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/X}$ lokal konstante abelsche Garben, 214
$\mathrm{Ab}_{/G\setminus X}$ äquivariante abelschen Garben auf X, 212
$\mathrm{Ab}^{\mathrm{k}}_{/G\setminus X}$ konstante äquivariante abelsche Garben, 214
$\mathrm{Ab}^{\mathrm{lk}}_{/G\setminus X}$ lokal konstante äquivariante abelsche Garben, 214
$\mathrm{Ab}_{/X}$ abelsche Garben auf X, 27
Ab-Funktor, 47
Ab-Kategorie, 45, 47
Ab-Struktur, 47
Abbildungsgrad, 146
abelsch
Garbe, 27
Kategorie, 49
Prägarbe, 14
additiv
Funktor, 48
Kategorie, 48
additive Struktur, 47
äquivariant
Garbe, 211
Kohomologie, 219
mit Koeffizienten, 222
Torsor, 88
Alexander-Dualität, 174
angeordnet
Čech-Komplex, 21
assoziiert
Garbe, 238
Auflösung
in abelscher Kategorie, 58
Augmentation
G-Augmentation, 67
augmentiert
Linksderivierter, 67
Ausdehnung durch Null, 194

azyklisch
n-rechtsazyklisch, 77
für Funktor, 78
Garbe für Überdeckung, 120
Überdeckung für Garbe, 120

bagazyklisch
schwach, 206
balanciertes Produkt
topologisches, 218
Bar-Komplex
nicht normalisierter, 71
Basiswechsel
étaler
für Mengengarben, 189
eigentlicher
für Mengengarben, 189
Basiswechselmorphismus, 186
Bifaserfunktor, 181
Bifaserung, 181
Bild
essentielles, 104
in abelscher Kategorie, 41
Bündel, 12
bw Basiswechselmorphismus, 186

$\check{\mathrm{C}}^q_<$ angeordnete Čech-Koketten, 21
c-mou, 124
c-soft, 124
Cartan-Eilenberg-Auflösung
durch Injektive, 262
Cartan-Eilenberg-Obenauflösung, 262
Cartan-Eilenberg-Untenauflösung, 262
Čech-azyklisch, 160
Čech-Eins-Kozykel, 6
Čech-Kohomologie
mit Koeffizienten in Gruppe, 9
von abelscher Prägarbe, 16
von Prägarbe von Gruppen, 23
Čech-Kokette, 16
Čech-Koketten
angeordnete, 21
Čech-Komplex
vergarbter, 119
charakteristisch
Homomorphismus, 221
Chern'schen Klasse
von komplexer Darstellung, 223
clivage, 245
coim
Kobild in Kategorie, 41
cok Kokern
in Kategorie, 41

δ in X^δ Menge X mit der diskreten Topologie, 235
$\mathcal{C}^\delta$ Diskretisierung von $\mathcal{C}$, 240
$\mathbb{D}$, genauer $\mathbb{D}_{\mathrm{Ket}}$, 169
de-Rham-Kohomologie, 155
kompakte, 158
de-Rham-Komplex, 155
äquivarianter, 269
Derivierter gefaserter Basiswechsel, 234
differentielle abelsche Gruppe, 249
differenzierbares $\mathbb{K}$-Bündel, 12
direktes Bild, 98
Diskretisierung
von Kategorie, 240
von topologischen Raum, 235
Doppelkomplex, 115
mit antikommutierenden Differentialen, 115
Doppelkomplex im ersten Quadranten, 115
Doppelkomplex in der oberen Halbebene, 115
Doppelkomplex in der rechten Halbebene, 115

E_∞ bei Spektralsequenz, 252
eigentlich
Komorphismus, 192

Einschränkung
von Garbe, 33
Einschränkungsabbildung, 15
em_x
Einbettung des Punktes x, 99, 101
$\mathrm{ens}_{/X}$ finale Mengengarbe, 36
G-Ens Kategorie der G-Mengen, 211
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X}$ konstante Garben, 36
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/X}$ lokal konstante Garben, 214
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/G\backslash X}$ konstante äquivariante Garben, 214
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/G\backslash X}$ lokal konstante äquivariante Garben, 214
$\mathrm{Ens}_{/X}$ Garben von Mengen auf X, 27
$\mathrm{Ens}^{\mathrm{k}}_{/X}$ konstante Garben auf X, 39
Epi, 42
Epimorphismus, 42
erblich parakompakt, 151
erste Čech-Kohomologie, 22
erste Chern'sche Klasse, 149
Erweiterung
höhere, 62
essentiell
Bild, 104
étale
Raum, 28
stetige Abbildung, 28
Étalisierung, 35
éts Étalisierung, 35
$\mathrm{ét}\mathrm{Top}_X$ étale Räume über X, 35
exakt, 44
exakte Sequenz
in präabelscher Kategorie, 44
Ext
in abelscher Kategorie
mit genug Injektiven, 64
Ext^q Erweiterungen, 62

faisceau, 26
Fakofaserung, 240
Familienfaserung, 182
Faser
eines Funktors, 177
faserdual
Kofaserung, 244
Faserfunktor, 179
Faserung
Funktor, 179
fibré principal, 10
Filtrierfaltigkeit, 146
Filtrierung, 45
flabby, 93
flasque, 93
frei
abelsche Garbe, 40
abelsche Prägarbe, 39
Funktionskeime, 32
Funktor
additiver, 48
laxer 2-Funktor, 246

Γ Schnitt
einer Garbe, 33
Γ_Z *Schnitte mit Träger in* Z, 196
$\Gamma_!$ Schnitte mit kompaktem Träger, 123
$\Gamma_!(A;\mathcal{F}) := \Gamma_!(A;\mathcal{F}\mid_A)$, 123
$\Gamma_C\mathcal{F}$ globale Schnitte mit Träger in C, 107
Γ_c *Schnitte mit kompaktem Träger*, 123
Garbe, 26
äquivariant zurückgezogene, 213
der Schnitte mit Träger in Teilmenge, 196
Garbe der lokalen singulären q-Koketten, 167
Garbe der Schnitte, 27
garbenazyklisch
schwach, 234
Garbenkohomologie
reduzierte, 105
Garbenmorphismus
über stetiger Abbildung, 177

Garbenopfaserung, 181
Garbenschreikofaserung, 194
Garbifizierung, 33
Gefaserter Basiswechsel, 233
gekreuzte Homomorphismen, 85
Generisieren, 29
gesättigt
    offene Überdeckungl, 8
glatt
    q-Kette, 161
    q-Simplex, 161
globaler Schnitt
    von Garbe, 33
$\mathrm{gpEns}_{/X} = \mathrm{Ens}_{/X}$ Garben auf X, 33
Grenzkette, 159
Grenzketten als welke Čech-azyklische Kogarben, 160
Gruppengarbe, 26
Gruppenkohomologie, 82
    als Garbenkohomologie, 238
    nichtabelsche, 88

$\mathrm{H}^1(G;A)$ Gruppenkohomologie
    nichtabelsche, 88
$\mathrm{H}^q(G;A)$ Gruppenkohomologie, 83
$\mathrm{H}^q(Z;\mathcal{F}) := \mathrm{H}^q(Z;\mathcal{F}\mid_Z)$, 74
$\mathrm{H}^q_{\mathrm{garb}}$ Garbenkohomologie, 74
$\mathrm{H}^q_!$ kompakte Kohomologie, 123
$\mathrm{H}_q(G;A)$ Gruppenhomologie, 83
$\mathrm{H}^q_C(X;\mathcal{F})$ lokale Kohomologie, 107
$\mathrm{H}^q_!(X)$ kompakte Kohomologie, 123
$\mathrm{H}^q_!(X;M)_{\mathrm{garb}}$ kompakte Kohomologie, 123
H^q_c *Kohomologie mit kompaktem Träger*, 123
Halm, zu Prägarbe, 29
Hauptfaserbündel, 10
    glattes, 10
Hauptlemma
    der homologischen Algebra
        in abelscher Kategorie, 59
Hochschild-Kohomologie, 68
Homologie
    einer Gruppe, 83
homologische Rechtsdimension
    endliche, 79
Homomorphismus
    charakteristischer, 221
    von Spektralsequenzen, 251
    von Garben, 26
homotop
    bei Doppelkomplexen, 261
    horizontal, 259
Homotopie
    horizontale, 261
    vertikale, 261
Homotopiekategorie
    einer , 59
Homotopielift, 59
Hot
    $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$, 59

$i\mathcal{A}$ Injektive von $\mathcal{A}$, 59
$\mathscr{C}|\mathscr{U}$ Rückzug von Kategorie, 182
Identifikation, 184
idf Identifikation, 184
im
    Bild in Kategorie, 41
injektiv
    Modul, Existenz, 61
    Objekt, 58
injektive Auflösung, 59
innere Derivation, 69
Invarianten
    in abelscher Kategorie, 209
    von Gruppe, 82
Invertieren
    von Faserung oder Kofaserung, 243

Join, 224
Jordan-Brouwer
    Satz von, 144

kanonischer Erzeuger
Garbenkohomologie, 74
Karoubi-Eigenschaft, 51
kartesisch
Garbenmorphismus, 213
Morphismus, 178
stark, Morphismus, 181
Kategorie
additive, 48
Kategorienfaserung, 247
Kategorienkofaserung, 245
ker
Kern in Kategorie, 41
Kern
in Kategorie, 41
$\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ Kettenkomplexe, 59
Klasse
charakteristische, 221
Koaugmentation, 67
koaugmentiert
Rechtsderivierter, 67
Kobild
in abelscher Kategorie, 41
Koeffizientensystem
zu Menge, 18
Kof, 246
Kofaserfunktor, 180
Kofaserung, 180
Kogarbe
abelsche, 140
Morphismen, 140
Kogrenzkomplex, 171
kohomolog, 7, 90
Čech-1-Kozykel, 22
Kohomologie
äquivariante, 219
einer Gruppe, 83
eines Komplexes, 55
kompakte, 123
lokale, 107
mit kompaktem Träger, 123
Kohomologiegarbe
lokale, 195
Koinvarianten
von Gruppe, 82
kokartesisch
Morphismus, 180
Kokern
in Kategorie, 41
Komorphismus
von abelschen Gruppen, 87
von Prägarben, 97
kompakt
Kohomologie, 123
Schnitt von abelscher Garbe, 123
kompaktweich, 124
konstant
abelsche Garbe, 36
Garbe, 36
Konvergenz
Spektralsequenz
graduierte, 257
ungraduierte, 254, 255
Konvergenzdatum
für Spektralsequenz
graduierte, 257
ungraduierte, 253, 255
Koszul-Komplex, 66
Kozykel
nichtkommutativer erster
Čech, 22
Gruppenkohomologie, 89

lange exakte Sequenz
der Garbenkohomologie, 77
der Homologie, kategorielle, 55
derivierter Funktoren, 76
lExt
in abelscher Kategorie
mit genug Projektiven, 64
Lift, 59
Linksauflösung, 63

Linksderivierten, 63
Linksderivierter
augmentierter, 67
linksexakt, 44
lokal endlich
Mengensystem in topologischem Raum, 151
lokal konstant
Garbe, 214
Lokalisierungssequenz, 126

Magukategorie, 45
Magu-Struktur, 45
Mayer-Vietoris-Sequenz
der Garbenkohomologie, 94
Mengengarbe, 26
Milnorkonstruktion, 224
Milnortopologie, 225
$\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ring}}$ Kategorie, 181
Modul
einer Gruppe, 82
Mono, 41
Monomorphismus, 41
$\mathrm{Mon}\searrow\mathrm{Top}$ topologische Räume mit Operation, 212
Morphismen über f, 178
Morphismus, 12
Morphismus von Prägarben, 14
mou, 154

Nullmorphismus, 41
Nullobjekt, 41

objektfest
Funktor, 243
offenlokal, 227
Opkofaserung
der $\mathcal{C}$-Garben, 180
Opkomorphismus, 180
oppinvers, 243
oppinvertiert
Faserfunktor oder Kofaserfunktor, 243
orientierbar, 141
Orientierung
tautologische, 143
topologische, 141
Orientierungsgarbe, 141
mit Koeffizienten, 140
Orientierungsüberlagerung, 143

$\mathrm{pAb}_{/X}$ abelsche Prägarben auf X, 14
parakompakt, 151
erblich parakompakt, 151
Poincaré-Lemma, 156
prä-additive Kategorie, 48
präabelsch, 43
Prägarbe, 14
der stetigen G-wertigen Funktionen, 15
erlaubt das Verkleben von Schnitten, 166
Prägarbe der differenzierbaren G-wertigen Funktionen, 15
Prägarbe der lokal konstanten G-wertigen Funktionen, 15
Prägarbe der singulären q-Koketten, 167
Prägarbe der stetigen komplexwertigen Funktionen, 15
prefaisceau, 14
presheaf, 14
principal bundle, 10
Projektion, 12
von Hauptfaserbündel, 10
von Torsor, 10
projektiv
Objekt, 63
projektive Auflösung, 63
Pseudofunktor, 246
punktweich, 95
$\mathrm{p}\,\mathbb{Z}\mathcal{F}$ freie abelsche Prägarbe, 40

Quasiisomorphismus

von Komplexen, 170
Quotientenfiltrierung, 249
Quotientenisomorphismus, 220

Rechtsauflösung
in abelscher Kategorie, 58
rechtsazyklisch
F-rechtsazyklisch, 77
rechtsderivierte Funktoren, 60
Rechtsderivierter
koaugmentierter, 67
Rechtsdimension
homologische
eines Funktors, 79
rechtsexakt, 44
reduziert
Garbenkohomologie, 105
Reynolds-Operator, 209
Riemann'sche Fläche
von Funktionskeim, 32
Ringgarbe, 26
Ringoid, 48
Rückzug, 183
starker, 184
von Funktor, 182
von Mengengarben, 100

$\mathcal{S}$ Garbe von Schnitten, 27
Schlangenlemma, 56
Schnitt
mit kompaktem Träger, 123
über einer Menge von Garbe, 33
von abelscher Prägarbe, 15
schreikokartesisch, 192
Schreimorphismus, 192
Schreirückzug, 195
Schreivorschub, 193
scindage, 245
senkrechter Kernkomplex, 115
separabel
Ringalgebra, 70
Sequenz
kurze exakte, 44
sheaf, 26
singulär-azyklisch, 168
soft, 154
spaltend
maximal, Komplex, 81
spaltende Idempotente, 51
Spaltenkomplex, 115
Spaltung
eines Kofaserfunktors, 245
Spektralsequenz, 249
ausgeartete, 116, 253
graduierte, 257
ungraduierte, 250
Spur, 202
Spurmorphismus, 202
Standardauflösung, 84
Standardorientierung
des Standardsimplex, 163
stationär
Koeffizientensystem, 19
Stiefel-Whitney-Klasse
von reeller Darstellung, 223
strikt verträglich mit den Filtrierungen, 45
Subquotientenfiltrierung, 249
supp Träger
von Schnitt
einer abelschen Garbe, 106
support, siehe Träger, 106

$\tau_f = \tau_{f,M} : M_X \to M_Y$, 98
Teilung der Eins, 152
topologisch
frei, Operation, 9
$\mathrm{Top}^{\mathrm{s}}$ topologische Räume mit nur separierten Abbildungen, 193
Tor_q, 65
Torsionsgruppe, 65
Torsor

auf topologischem Raum, 10
tot Totalkomplex, 115
Totalkomplex, 115
Totalraum, 10, 12
Träger
von Schnitt
einer abelschen Garbe, 106, 107
Transportmorphismus, 183
Trivialisierung
von Überlagerung, 5

Übergangsfunktionen
zwischen Trivialisierungen, 7
$\mathrm{Unt}(X)$ Unterobjekte von X, 43
Unter-, 43
Untergruppenfiltrierung, 249
Unterobjekt
kategorisches, 43
Urbild
von Kategorie, 182

Verfeinerung, 151
Vergleichsisomorphismus
der de-Rham-Kohomologie, 155
Verklebungsbedingung, 26, 27
Verklebungsfunktionen, 5
Vorschub, 98, 184
starker, 184

weich, Garbe, 154
welk, 160
welk, Garbe, 93
Wolkenkratzer, 16

$\mathbb{Z}_{U\subset X}$, 94
Zeilenkomplex, 115
Zerfällung, 245
zurückziehbar
stark, 183
zykelexakt, 263