TOPOLOGIE UND KOMPAKTE GRUPPEN

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Mengentheoretische Topologie

1.1 Topologische Räume

1.1.1. Wir beginnen mit einigen Erinnerungen zur Begriffswelt der topologischen Räume aus [AN1] **??**, wo im wesentlichen derselbe Stoff in größerer Ausführlichkeit und unter besonderer Betonung der Motivation durch Fragen der Analysis entwickelt wurde.

1.1.2. Gegeben eine Menge X können wir die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X bilden, die sogenannte Potenzmenge von X. Weil es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, nenne ich wie in [LA1] 1.5.13 Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ lieber **Systeme von Teilmengen von** X und spreche im folgenden von **Teilsystemen**, wenn ich Teilmengen solcher Mengensysteme meine.

Definition 1.1.3. Eine **Topologie** $\mathcal{T}$ **auf einer Menge** X ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge mitsamt einer Topologie. Statt $U \in \mathcal{T}$ schreiben wir meist

$$U \circledcirc X$$

und nennen U eine **offene Teilmenge von** X. Die Notation $\circledcirc$ ist in der Literatur nicht üblich.

1.1.4. In Formeln ausgedrückt fordern wir von einer Topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ auf einer Menge X also:

1. $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$ für $n \geq 0$ und insbesondere auch $X \in \mathcal{T}$ als der Spezialfall $n = 0$. Gleichbedeutend dazu sind die beiden Forderungen $X \in \mathcal{T}$ sowie $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$;

2. $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$ und damit insbesondere auch $\emptyset \in \mathcal{T}$, da ja das leere Mengensystem $\mathcal{U} = \emptyset$ in jedem Mengensystem enthalten ist.

Beispiel 1.1.5. Für jeden metrischen Raum bildet das System seiner im Sinne von [AN1] **??** offenen Teilmengen eine Topologie, die **metrische Topologie**. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum liefert jede Norm auf seinem Richtungsraum eine Metrik auf unserem affinen Raum und diese liefert dann eine Topologie. Der Satz über die Äquivalenz von Normen [AN1] **??** zeigt nun, daß diese Topologie gar nicht von der gewählten Norm abhängt, vergleiche [AN1] **??**. Sie heißt die **natürliche Topologie** auf unserem endlichdimensionalen reellen affinen Raum.

Beispiel 1.1.6. Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, \infty\}$ der erweiterten reellen Zahlen erklären wir eine Topologie, indem wir alle Teilmengen offen nennen, die mit jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein ganzes offenes Intervall um unseren Punkt enthalten, mit ∞ ein ganzes Intervall der Gestalt $(a, \infty]$ für $a \in \mathbb{R}$ und mit $-\infty$ ein ganzes Intervall der Gestalt $[-\infty, b)$ für $b \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.1.7. Auf jeder Menge können wir die **Klumpentopologie** betrachten, die nur aus der ganzen Menge und der leeren Menge besteht, oder die **diskrete Topologie**, bei der wir alle Teilmengen als offen ansehen. Einen topologischen Raum mit der diskreten Topologie nennen wir auch kurz einen **diskreten Raum**.

Definition 1.1.8. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so erklärt man die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** auf Y durch die Vorschrift

$$U \Subset Y \Leftrightarrow \exists V \Subset X \text{ mit } U = V \cap Y$$

In Worten ist also eine Teilmenge von Y offen für die induzierte Topologie, wenn sie der Schnitt von Y mit einer offenen Teilmenge von X ist. Es ist klar, daß dieses Mengensystem in $\mathcal{P}(Y)$ in der Tat eine Topologie auf Y ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge Y eines topologischen Raums X auf als topologischen Raum mit der induzierten Topologie.

1.1.9 (**Offen als relativer Begriff**). Wenn wir eine Menge einfach nur „offen" nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen" gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \Subset Y$, daß M offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Topologie.

1.1.10. Gegeben ein topologischer Raum X gilt $V \Subset U \Subset X \Rightarrow V \Subset X$. Ist in der Tat V offen in der Spurtopologie, so gibt es $W \Subset X$ mit $V = W \cap U$ und daraus folgt $V \Subset X$.

Definition 1.1.11. Eine Abbildung von einem topologischen Raum in einen weiteren heißt **stetig**, wenn darunter das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Satz 1.1.12. *Die Verknüpfung stetiger Abbildungen ist stetig.*

Beweis. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, so gelten beide Implikationen der Implikationskette $V \Subset Z \Rightarrow g^{-1}(V) \Subset Y \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \Subset X$. Da nun gilt $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$, ist damit auch $(g \circ f)$ stetig. □

Beispiele 1.1.13. Jede konstante Abbildung ist stetig. Die Identität auf einem topologischen Raum ist immer stetig. Jede Abbildung in einen Raum mit der Klumpentopologie ist stetig. Jede Abbildung aus einem Raum mit der diskreten Topologie ist stetig.

Beispiel 1.1.14 (**Metrische Stetigkeit als topologische Stetigkeit**). Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist „metrisch stetig" im Sinne von [AN1] **??** genau dann, wenn sie „topologisch stetig" ist im Sinne unserer Definition 1.1.11. In der Tat, sei $f : X \to Y$ unsere Abbildung zwischen metrischen Räumen. Jeder Ball $\mathrm{B}(y; \varepsilon)$ im metrischen Raum Y ist offen nach [AN1] **??**. Ist f topologisch stetig, so ist demnach sein Urbild $f^{-1}\mathrm{B}(y; \varepsilon)$ offen in X. Für jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt es nach der Definition der metrischen Topologie also $\delta > 0$ mit $\mathrm{B}(x; \delta) \subset f^{-1}\mathrm{B}(y; \varepsilon)$ alias $f(\mathrm{B}(x; \delta)) \subset \mathrm{B}(y; \varepsilon)$, und das zeigt die metrische Stetigkeit von f. Ist umgekehrt f metrisch stetig, so ist nach derselben Argumentation das Urbild jedes Balls offen, und dann natürlich auch das Urbild jeder offenen Menge als Vereinigung von Urbildern solcher Bälle.

Lemma 1.1.15 (**Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie**). *Gegeben $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $Z \subset Y$ eine Teilmenge mit $f(X) \subset Z$ ist f stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung $f : X \to Z$ stetig ist für die auf Z induzierte Topologie.*

Beweis. Die Einbettung $i : Z \hookrightarrow Y$ ist offensichtlich stetig. Ist also $f : X \to Z$ stetig, so auch $f : X \to Y$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen. Sei umgekehrt $f : X \to Y$ stetig mit $f(X) \subset Z$. Gegeben $U \circledcirc Z$ existiert $V \circledcirc Y$ mit $V \cap Z = U$. Dann ist $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ offen in X aufgrund der Stetigkeit von $f : X \to Y$. $\square$

Definition 1.1.16. Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in** X und wir schreiben in Formeln $M \not\subset\!\!\!\!\triangle\, X$, wenn ihr Komplement $X \backslash M$ offen ist.

1.1.17 (**Abgeschlossen als relativer Begriff**). Wenn wir eine Menge einfach nur „abgeschlossen" nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „abgeschlossen" gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \not\subset\!\!\!\!\triangle\, Y$, daß M abgeschlossen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Topologie 1.1.8.

Lemma 1.1.18. *Jede endliche Vereinigung und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Beweis. Das folgt mit der Definition einer Topologie sofort aus der Formel

$$X \backslash \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} (X \backslash M)$$

Diese Formel gilt ganz allgemein für jedes System $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X. $\square$

1.1.19 (**Stetigkeit und abgeschlossene Mengen**). Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn darunter das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist: Das folgt unmittelbar aus der Definition 1.1.11, da das Urbild des Komplements einer Menge stets das Komplement ihres Urbilds ist.

Proposition 1.1.20. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung topologischer Räume.*

1. *Gegeben $\mathcal{U}$ eine* **offene Überdeckung** *von X alias ein System offener Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ist f stetig genau dann, wenn $f|_U$ stetig ist für alle $U \in \mathcal{U}$. Etwas vage gesprochen ist demnach* **Stetigkeit eine lokale Eigenschaft**.

2. *Gegeben eine* **endliche abgeschlossenene Überdeckung** *von X, in Formeln $A_1, \ldots, A_n \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, ist f stetig genau dann, wenn $f|_{A_i}$ stetig ist für alle $i = 1, \ldots n$.*

Vorschau 1.1.21. Etwas allgemeiner gilt das auch noch für eine „lokal endliche abgeschlossene Überdeckung“, vergleiche 1.7.19.

Beweis. Ist f stetig, so sind alle $f|_U$ stetig als Verknüpfung von f mit der stetigen Inklusion $U \hookrightarrow X$. Sind andererseits alle $f|_U$ stetig, so ist für alle $W \overset{\circ}{\subset} Y$ und alle $U \in \mathcal{U}$ das Urbild $f^{-1}(W) \cap U$ offen in U, nach 1.1.10 ist also $f^{-1}(W) \cap U$ sogar offen in X, und damit ist dann natürlich auch $f^{-1}(W) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(W) \cap U$ offen in X als Vereinigung offener Mengen. Mithin ist f stetig. Teil 2 zeigt man ähnlich: Nach 1.1.19 muß nur gezeigt werden, daß für jede abgeschlossene Teilmenge $B \overset{\mathrm{A}}{\subset} Y$ von Y ihr Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist in X. Da aber gilt $f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup \ldots \cup f_n^{-1}(B)$ und $f_i^{-1}(B) \overset{\mathrm{A}}{\subset} A_i$ nach Annahme folgt die Proposition aus Übung 1.1.25 und den Definitionen. □

Definition 1.1.22. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt ein **Homöomorphismus** oder auch eine **topologische Abbildung**, wenn sie stetig und bijektiv ist und zusätzlich die inverse Abbildung auch stetig ist. Zwei topologische Räume heißen **homöomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Homöomophismus gibt. In Formeln schreiben wir dann $X \cong Y$.

Übungen

Übung 1.1.23. Auf jeder Menge kann man die **koendliche Topologie** erklären durch die Vorschrift, daß außer der leeren Menge nur die Komplemente endlicher Mengen offen sein sollen.

Übung 1.1.24. Auf jeder teilgeordneten Menge kann man die **Ordnungstopologie**, auch genannt **Alexandroff-Topologie**, erklären durch die Vorschrift, daß genau die Teilmengen offen sein sollen, die mit einem Element auch jedes kleinere Element enthalten. Genau dann entsteht eine Topologie in dieser Weise aus einer Teilordnung, wenn es für jedes Element eine kleinste offene Menge gibt, die es umfaßt.

Übung 1.1.25. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge Y zeige man: $A \overset{\vartriangle}{\subset} Y \Leftrightarrow \exists B \overset{\vartriangle}{\subset} X$ mit $A = B \cap Y$. Weiter zeige man für Teilmengen $B \subset A \subset X$ die Implikation $(B \overset{\vartriangle}{\subset} A \overset{\vartriangle}{\subset} X) \Rightarrow B \overset{\vartriangle}{\subset} X$.

Übung 1.1.26. Gegeben ein topologischer Raum X und eine Menge Y und eine Abbildung $f : X \to Y$ zeige man, daß $\{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \overset{\circ}{\subset} X\}$ eine Topologie auf Y ist. Sie heißt die **Finaltopologie** zu f. Weiter zeige man für jeden weiteren topologischen Raum Z, daß eine Abbildung $g : Y \to Z$ genau dann stetig ist, wenn $g \circ f : X \to Z$ stetig ist. Diese Übung ist im folgenden wichtig, wenn man die allgemeine Initialtopologie vor der allgemeinen Finaltopologie behandelt.

1.2 Inneres, Abschluß, Umgebungsbegriff

Definition 1.2.1. Seien X ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge.

1. Es gibt eine größte offene Teilmenge $\mathrm{Inn}_X(M) = \mathrm{Inn}(M) = M^\circ$ von X, die in M enthalten ist, nämlich die Vereinigung über alle offenen Teilmengen U von X, die in M enthalten sind. M° heißt der **offene Kern** oder auch das **Innere**, englisch **interior** von M in X.

2. Es gibt eine kleinste abgeschlossene Teilmenge $\mathrm{Cl}_X(M) = \mathrm{Cl}(M) = \overline{M}$ von X, die M umfaßt, nämlich den Schnitt über alle abgeschlossenen Teilmengen A von X, die M umfassen. Diese Menge $\overline{M}$ heißt der **Abschluß**, englisch **closure** von M in X.

3. Man definiert den **Rand** oder genauer den **topologischen Rand** von M in X als $\partial_X M = \partial M := \overline{M} \backslash M^\circ$. Er ist stets abgeschlossen in X.

1.2.2. Die Herkunft der Bezeichnung ∂M für den Rand von M wird in [AN2] 9.6.11 diskutiert. Ich habe die englische Abkürzung Cl für den Abschluß vorgezogen, weil ich das Kürzel Ab für die „Kategorie der abelschen Gruppen" reservieren will.

Beispiele 1.2.3. Für eine beliebige Teilmenge M der abgeschlossenen Kreisscheibe $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, die die offene Kreisscheibe umfaßt, ist der offene Kern von M in $\mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe, der Abschluß M in $\mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Kreisscheibe, und der Rand M in $\mathbb{R}^2$ die Kreislinie. Für einen beliebigen topologischen Raum X ist natürlich der offene Kern von X in X ebenso wie der Abschluß von X in X schlicht X selber, und der Rand von X in X ist leer.

Lemma 1.2.4. *Seien X ein topologischer Raum und $M, N \subset X$ Teilmengen.*

1. *Es gilt $\overline{X\backslash M} = X\backslash M^\circ$ und $(X\backslash M)^\circ = X\backslash \overline{M}$;*
2. *Es gilt $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ und $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$.*

Beweis. 1. Wir rechnen

$$X\backslash M^\circ = X\backslash \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ U\subset M}} U = \bigcap_{\substack{U \text{ offen} \\ U\subset M}} (X\backslash U) = \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ A\supset (X\backslash M)}} A = \overline{X\backslash M}$$

Die Gleichheit $(X\backslash M)^\circ = X\backslash \overline{M}$ ergibt sich, wenn wir in der schon bewiesenen Gleichheit auf beiden Seiten das Komplement nehmen und M durch $X\backslash M$ ersetzen.

2. $\overline{M \cup N}$ ist abgeschlossen und umfaßt M und N, also auch $\overline{M}$ und $\overline{N}$. Andererseits ist $\overline{M} \cup \overline{N}$ abgeschlossen und umfaßt $M \cup N$, also auch $\overline{M \cup N}$. Die Gleichheit $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$ zeigt man analog. □

Definition 1.2.5. Seien X ein topologischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge und $p \in X$ ein Punkt. So benutzt man die Sprechweisen

$p \in M^\circ$	$\Leftrightarrow$	p ist **innerer Punkt** von M;
$p \in \overline{M}$	$\Leftrightarrow$	p ist **Berührungspunkt** von M;
$p \in \partial M$	$\Leftrightarrow$	p ist **Randpunkt** von M.

Hier ist wieder zu beachten, daß es ganz entscheidend von X abhängt, welche Punkte nun innere Punkte, Berührungspunkte oder Randpunkte von M sind.

Definition 1.2.6. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **dicht**, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist.

Definition 1.2.7. Seien X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine **Umgebung von** A, wenn es eine offene Menge $V \Subset X$ gibt mit $A \subset V \subset U$. Im Fall einer einelementigen Teilmenge $A = \{p\}$ sprechen wir auch von einer **Umgebung von** p.

1.2.8. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist genau dann offen, wenn sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist. In der Tat, ist sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte, so ist sie eine Vereinigung von offenen Mengen und damit offen. Die andere Implikation ist eh klar.

Definition 1.2.9. Gegeben $f : X \to Y$ eine Abbildung von topologischen Räumen und $p \in X$ ein Punkt heißt f **stetig bei** p, wenn für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(p)$ ihr Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ eine Umgebung von p ist.

1.2.10. Eine Abbildung von topologischen Räumen $X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn sie an jedem Punkt $p \in X$ stetig ist. Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

Lemma 1.2.11. *Gegeben X ein topologischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge und $p \in X$ ein Punkt haben wir:*

1. $p \in M^\circ \quad \Leftrightarrow \quad$ *M ist eine Umgebung von p;*
2. $p \in \overline{M} \quad \Leftrightarrow \quad$ *M trifft jede Umgebung von p;*
3. $p \in \partial M \quad \Leftrightarrow \quad$ *M und $X \backslash M$ treffen jede Umgebung von p.*

Beweis. 1 ist klar nach den Definitionen. Für 2 bemerken wir, daß nach Lemma 1.2.4.1 gilt

$$\begin{aligned} p \in \overline{M} \quad &\Leftrightarrow \quad p \notin (X \backslash M)^\circ \\ &\Leftrightarrow \quad X \backslash M \text{ ist keine Umgebung von } p \\ &\Leftrightarrow \quad \text{jede Umgebung von } p \text{ trifft } M. \end{aligned}$$

Sicher gilt weiter $p \in \partial M \Leftrightarrow p \in \overline{M} \cap \overline{(X \backslash M)}$. Nun folgt 3 aus der eben unter 2 bewiesenen Aussage. □

1.2.12. Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff**, wenn darin je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. Gleichbedeutend wird auch die Bezeichnung **separiert** verwendet.

Beispiel 1.2.13. Die metrische Topologie einer Metrik ist stets Hausdorff. Die Klumpentopologie auf einer Menge mit mindestens zwei Elementen ist nicht Hausdorff. Die koendliche Topologie auf einer unendlichen Menge ist nicht Hausdorff.

1.2.14. Ein Punkt eines topologischen Raums X heißt ein **Häufungspunkt von X**, wenn die nur aus unserem Punkt bestehende Teilmenge nicht offen ist. Man mag gleichbedeutend von einem **nichtoffenen Punkt** reden.

Satz 1.2.15 (Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten). *Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \backslash p \to Y$ eine Abbildung. Ist Y Hausdorff, so gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Abbildung $\tilde{f} : X \to Y$, die stetig ist bei p.*

Beweis. Wäre sonst $\hat{f}$ eine weitere bei p stetige Fortsetzung mit $\hat{f}(p) \neq \tilde{f}(p)$, so fänden wir disjunkte Umgebungen $\hat{V}$ und $\tilde{V}$ dieser beiden Bildpunkte und dazu Umgebungen $\hat{U}$ und $\tilde{U}$ von p mit $\hat{f}(\hat{U}) \subset \hat{V}$ und $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$. Daraus folgte aber

$$f(\hat{U} \cap \tilde{U} \backslash p) \ \subset \ \hat{V} \cap \tilde{V} = \emptyset$$

im Widerspruch dazu, daß die Umgebung $\hat{U} \cap \tilde{U}$ von p nicht nur aus unserem Häufungspunkt p selbst bestehen darf. □

Definition 1.2.16. Seien X, Y topologische Räume mit Y Hausdorff. Seien weiter $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \backslash p \to Y$ eine Abbildung. Sei schließlich $b \in Y$ ein Punkt. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen** b **für** $x \to p$ und schreiben

$$\lim_{x \to p} f(x) = b$$

als Abkürzung für die Aussage, daß die Fortsetzung von f zu $\tilde{f} : X \to Y$ durch $\tilde{f}(p) := b$ stetig ist bei p. In diesem Fall nennen wir b den **Grenzwert** oder lateinisierend **Limes** der Funktion f für $x \to p$. Nach der Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen 1.2.15 ist dieser Grenzwert eindeutig bestimmt, wenn er existiert.

1.2.17. Salopp gesprochen verhält es sich demnach so, daß eine Abbildung in einen Hausdorffraum mit einer einpunktigen Definitionslücke an einem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs auf höchstens eine Weise stetig in diese Definitionslücke hinein fortgesetzt werden kann. Der Wert dieser an besagter Stelle stetigen Fortsetzung heißt dann der Grenzwert unserer Abbildung an besagter Stelle. Dieselbe Definition hatten wir bereits in der Analysis in [AN1] **??** gegeben.

1.2.18. Grenzwerte von Folgen sind der Spezialfall $X := \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ mit der von $\bar{\mathbb{R}}$ induzierten Topologie und dem Häufungspunkt $p = \infty$. Ausgeschrieben bedeutet $\lim_{n \to \infty} y_n = b$, daß in jeder Umgebung von b fast alle Glieder unserer Folge alias alle bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen liegen.

1.2.19. Eine Teilmenge F eines topologischen Raums X heißt **folgenabgeschlossen**, wenn sie mit jeder in X konvergierenden Folge auch deren Grenzwerte enthält. In metrischen Räumen sind folgenabgeschlossene Teilmengen stets abgeschlossen. In beliebigen topologischen Räumen gilt das nicht mehr, wie das im folgenden diskutierte Beispiel 1.2.26 zeigt.

Übungen

Übung 1.2.20. Man zeige, daß im allgemeinen gilt $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$. Welche Inklusion gilt stets?

Übung 1.2.21. In jedem topologischen Raum ist der Schnitt einer offenen dichten Teilmenge mit einer beliebigen dichten Teilmenge wieder dicht.

Übung 1.2.22. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn für alle Teilmengen $M \subset X$ gilt $f\left(\overline{M}\right) \subset \overline{f(M)}$.

Übung 1.2.23. Man zeige für jeden topologischen Raum: Der Schnitt von zwei Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Jede Umgebung eines Punktes kann verkleinert werden zu einer offenen Umgebung desselben Punktes.

Übung 1.2.24. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist offen genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist.

Übung 1.2.25. Eine Teilmenge eines topologischen Raums $T \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß $T \cap U$ abgeschlossen ist in U.

Ergänzende Übung 1.2.26 (**Folgenabgeschlossen heißt nicht abgeschlossen**). Diese Übung liefert ein Beispiel für eine folgenabgeschlossene aber nicht abgeschlossene Teilmenge eines Hausdorffraums. Wir betrachten auf der Menge $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die „Topologie der punktweisen Konvergenz“ : Eine Teilmenge $U \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist in Bezug auf diese Topologie offen genau dann, wenn es für jedes $f \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine endliche Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ gibt mit

$$(|g(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in E) \quad \Rightarrow \quad g \in U$$

Man zeige, daß das in der Tat eine Topologie ist, daß in dieser Topologie je zwei verschiedene Funktionen disjunkte Umgebungen besitzen, und daß die meßbaren Funktionen darin eine unter Konvergenz von Folgen abgeschlossene aber nicht topologisch abgeschlossene Teilmenge bilden. Unsere „Topologie der punktweisen Konvergenz“ wird sich im übrigen in 1.6.17 folgende als ein Spezialfall der sogenannten „Produkttopologie“ erweisen.

Ergänzende Übung 1.2.27. Unter einer **Umgebungsbasis** eines Punktes in einem topologischen Raum versteht man ein System von Umgebungen besagten Punktes derart, daß jede Umgebung unseres Punktes mindestens eine Umgebung unseres Systems umfaßt. Man zeige: Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so ist jede unter Konvergenz von Folgen abgeschlossene Teilmenge bereits abgeschlossen, und jede „folgenstetige“ Abbildung in einen weiteren topologischen Raum ist bereits stetig.

Ergänzung 1.2.28. Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so sagt man auch, er „gehorche dem **ersten Abzählbarkeitsaxiom**“.

Übung 1.2.29. Sind X, Y, Z topologische Räume und ist $f : X \to Y$ stetig in p und $g : Y \to Z$ stetig in $f(p)$, so ist $g \circ f$ stetig in p.

1.3 Zusammenhang

Definition 1.3.1. Ist X ein topologischer Raum und sind $x, y \in X$ Punkte, so nennen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to X$ von einem mehrpunktigen kompakten reellen Intervall $[a, b]$ nach X mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ einen **Weg von** x **nach** y. Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und es für je zwei Punkte unseres Raums einen Weg vom einen zum anderen gibt.

1.3.2. Das Bild eines wegzusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist offensichtlich stets wieder wegzusammenhängend.

Definition 1.3.3. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Teilmengen schreiben läßt.

Beispiel 1.3.4. Ein diskreter topologischer Raum ist zusammenhängend genau dann, wenn er aus genau einem Punkt besteht.

1.3.5. Gleichbedeutend könnten wir natürlich auch fordern, daß unser Raum nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen schreiben läßt. Eine Teilmenge eines topologischen Raums nennen wir nach unseren allgemeinen Konventionen zusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist als topologischer Raum mit der induzierten Topologie.

1.3.6 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur wird meist auch die leere Menge zusammenhängend genannt. Mir scheint das unnatürlich, da sich mit dieser Konvention jeder zusammenhängende Raum in eine Vereinigung von zwei disjunkten offenen zusammenhängenden Teilmengen zerlegen ließe.

Proposition 1.3.7. *Das Bild eines zusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets zusammenhängend.*

Beweis. Es reicht, wenn wir für eine stetige Surjektion $f : X \to Y$ aus Y nicht zusammenhängend folgern, daß auch X nicht zusammenhängend ist. Ist jedoch $Y = Y_0 \sqcup Y_1$ eine Zerlegung in zwei offene, disjunkte, nichtleere Teilmengen, so auch $X = f^{-1}(Y_0) \sqcup f^{-1}(Y_1)$. Ist Y leer, so auch X. Die Proposition folgt. □

Proposition 1.3.8 (**Charakterisierung zusammenhängender Räume**). *Gegeben ein topologischer Raum sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Raum ist zusammenhängend;*
2. *Jede stetige Abbildung von unserem Raum in einen Raum mit der diskreten Topologie ist einwertig;*
3. *Jede stetige Abbildung von unserem Raum in einen zweielementigen Raum mit der diskreten Toplogie ist einwertig.*

1.3.9. Wir verwenden hier unsere Konvention [GR] 1.4.10, nach der eine Abbildung einwertig heißt, wenn ihr Bild aus genau einem Element besteht.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ folgt aus 1.3.7, da das Bild einer stetigen Abbildung unseres zusammenhängenden Raums in einen diskreten Raum notwendig zusammenhängend und diskret ist und damit nach 1.3.4 aus einem einzigen Punkt bestehen muß. $2 \Rightarrow 3$ ist klar. $3 \Rightarrow 1$ zeigt man durch Widerspruch: Ist unser Raum nicht zusammenhängend, so ist er entweder leer und die einzige Abbildung in unseren zweielementigen Raum ist nicht einwertig, oder er besitzt eine Zerlegung in zwei disjunkte nichtleeren offenen Teilmengen. Dann aber können wir eine stetige nicht einwertige Abbildung in unsere zweielementige Menge angeben durch die Vorschrift, daß sie auf der einen Teilmenge das eine Element als Wert annehmen soll und auf der anderen das andere. □

Lemma 1.3.10 (Zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$). *Eine Teilmenge der reellen Zahlengerade ist zusammenhängend genau dann, wenn sie ein nichtleeres Intervall ist.*

Beweis. Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und kein Intervall, so gibt es $p \in \mathbb{R}\backslash A$ mit $A \cap \mathbb{R}_{<p} \neq \emptyset \neq A \cap \mathbb{R}_{>p}$, und das ist eine Zerlegung von A in zwei nichtleere offene Teilmengen. Umgekehrt ist jedes nichtleere reelle Intervall zusammenhängend nach Proposition 1.3.8 und dem Zwischenwertsatz. Man kann auch ohne den Zwischenwertsatz argumentieren wie folgt. Sei sonst $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall mit einer Zerlegung $I = I_0 \sqcup I_1$ in zwei für die Spurtopologie offene nichtleere Teilmengen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, es gebe $a \in I_0$ und $b \in I_1$ mit $a < b$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, es sei sogar $I = [a, b]$. Nun sind I_0, I_1 auch abgeschlossen in I und damit in $\mathbb{R}$. Für $p = \sup I_0$ folgt $p \in I_0$ und $p < b$ und damit $(p, b] \subset I_1$ und dann auch $p \in I_1$, im Widerspruch zu $I_0 \cap I_1 = \emptyset$. Von dieser Argumentation ausgehend können wir nun sogar den Zwischenwertsatz als Korollar unseres Lemmas erhalten, nach 1.3.7 sind ja Bilder zusammenhängender Räume zusammenhängend und damit nach unserem Lemma Bilder nichtleerer reeller Intervalle unter stetigen reellwertigen Funktionen wieder nichtleere reelle Intervalle. □

1.3.11 (**Wegzusammenhängende Teilmengen von** $\mathbb{R}$). Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend genau dann, wenn A ein nichtleeres Intervall ist. In der Tat ist jedes nichtleere reelle Intervall offensichtlich wegzusammenhängend. Ist umgekehrt $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und kein Intervall, so gibt es reelle Zahlen $x < p < y$ mit $x, y \in A$ aber $p \notin A$. Dann aber kann es nach dem Zwischenwertsatz keinen Weg von x nach y geben, der ganz in A verläuft.

1.3.12. Wir sehen insbesondere, daß die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ genau die einelementigen Teilmengen sind. Topologische Räume mit dieser Eigenschaft heißen **total unzusammenhängend**.

Satz 1.3.13. *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch. Sei X nicht leer und nicht zusammenhängend, also die disjunkte Vereinigung $X = U \sqcup V$ zweier nichtleerer offener Teilmengen. Gäbe es einen Weg $\varphi : [a, b] \to X$ mit $\varphi(a) \in U$ und $\varphi(b) \in V$, so wäre $[a, b] = \varphi^{-1}(U) \sqcup \varphi^{-1}(V)$ eine disjunkte Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in zwei nichtleere offene Teilmengen, und das stünde im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß Intervalle zusammenhängend sind. Also kann es keinen solchen Weg geben und X ist auch nicht wegzusammenhängend. □

Definition 1.3.14. Auf jedem topologischen Raum X definiert man die Relation W der **Wegverbindbarkeit** durch die Vorschrift, daß gilt xWy, wenn es in X einen Weg von x nach y gibt. Man zeige, daß das eine Äquivalenzrelation ist. Hinweis: Die Transitivität ergibt sich durch das „Aneinanderhängen von Wegen" und die Stetigkeit der so entstehenden Wege folgt mit 1.1.20.2. Die Äquivalenzklassen für die Äquivalenzrelation der Wegverbindbarkeit heißen die **Wegzusammenhangskomponenten** unseres Raums. Die Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines Raums X notieren wir $\pi_0(X)$.

Lemma 1.3.15. *Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind seine Wegzusammenhangskomponenten offen und unser Raum zusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Besitzt jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind die Wegzusammenhangskomponenten sicher offen. Ist unser Raum nicht leer und nicht wegzusammenhängend, so hat er mindestens zwei Wegzusammenhangskomponenten, und nehmen wir eine dieser Komponenten und die Vereinigung der Übrigen, so erhalten wir eine Überdeckung durch zwei nichtleere offene Teilmengen. Also ist unter diesen Voraussetzungen unser Raum auch nicht zusammenhängend. Daß umgekehrt jeder wegzusammenhängende Raum auch zusammenhängend ist, wissen wir bereits aus 1.3.13. □

Definition 1.3.16. Eine maximale zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums heißt eine **Zusammenhangskomponente**.

Proposition 1.3.17 (Zerlegung in Zusammenhangskomponenten). *Gegeben ein topologischer Raum X gilt:*

1. *Jeder Punkt liegt in genau einer Zusammenhangskomponente;*
2. *Ist eine Teilmenge unseres Raums zusammenhängend, so ist auch ihr Abschluß zusammenhängend. Insbesondere sind Zusammenhangskomponenten stets abgeschlossen;*

3. *Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von zusammenhängenden Teilmengen von X mit nichtleerem Schnitt $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset$, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ zusammenhängend.*

Beweis. 2. Sei A unsere zusammenhängende Teilmenge. Da nach Annahme A nicht leer ist, gilt dasselbe für $\bar{A}$. Ist $\bar{A}$ nicht zusammenhängend, so zerfällt $\bar{A}$ also in zwei nichtleere disjunkte abgeschlossene Teilmengen $\bar{A} = A_1 \sqcup A_2$. Nach der Definition von $\bar{A}$ kann keines der A_i schon A enthalten, also ist $A = (A_1 \cap A) \sqcup (A_2 \cap A)$ eine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen, und damit ist auch A nicht zusammenhängend im Widerspruch zur Voraussetzung.

3. Wir setzen $Y = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Sei $Y = U \cup V$ eine Zerlegung von Y in zwei offene disjunkte Teilmengen. Es gilt zu zeigen, daß U oder V schon ganz Y sein muß. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen $U \cap \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset$. Da die A zusammenhängend sind, folgt dann schon $U \supset A$ für alle A und damit $U = Y$.

1. Nach 3 ist die Vereinigung über alle zusammenhängenden Teilmengen, die einen gegebenen Punkt enthalten, selbst zusammenhängend. □

Ergänzung 1.3.18. Wir geben einen alternativen Beweis für den Satz 1.3.13, nach dem jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist. Sei dazu X unser Raum. Als wegzusammenhängender Raum ist X nicht leer. Ist $x \in X$ ein Punkt, so ist X die Vereinigung über die Bilder aller Wege γ in X mit Anfangspunkt x, in Formeln

$$X = \bigcup_{\gamma(0)=x} \gamma([0,1])$$

Alle diese Bilder $\gamma([0,1])$ sind zusammenhängend als Bilder zusammenhängender Mengen und ihr Schnitt ist nicht leer, denn er enthält x. Nach 1.3.17.3 ist also X zusammenhängend.

Definition 1.3.19. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **diskret**, wenn sie mit der Spurtopologie ein diskreter topologischer Raum wird.

1.3.20. Der Leser möge sich zur Übung überlegen, daß das gleichbedeutend ist zu unserer Bedingung in [AN2] 8.5.7, daß jeder Punkt unserer Teilmenge eine Umgebung besitzt, in der kein anderer Punkt besagter Teilmenge liegt.

Beispiel 1.3.21. Die Menge aller Brüche $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ mit einer Eins im Zähler ist eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlengeraden.

1.3.22 (**Diskussion der Terminologie**). Andere Autoren verstehen unter einer „diskreten Teilmenge" eines topologischen Raums abweichend, was in unserer Terminologie eine „diskrete abgeschlossene Teilmenge" ist.

Übungen

Übung 1.3.23 (**Die Sinuskurve des Topologen**). Man betrachte in $\mathbb{R}^2$ die Vereinigung des Graphen der Funktion $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$ mit der y-Achse. Man zeige zur Übung, daß diese Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Übung 1.3.24. Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raums eine zusammenhängende Umgebung, so sind seine Zusammenhangskomponenten offen.

Übung 1.3.25. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer zusammenhängenden offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist für $n > 1$ zusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung „abgeschlossen", ist dann aber schwerer zu zeigen.

Übung 1.3.26. Ist $U \circledcirc \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum einer Dimension $\dim A \leq n-2$ alias einer Kodimension mindestens Zwei, so ist auch $U\backslash A$ zusammenhängend. Für Teilräume A der Kodimension Eins alias affine Hyperebenen A gilt das natürlich nicht!

1.4 Topologische Mannigfaltigkeiten*

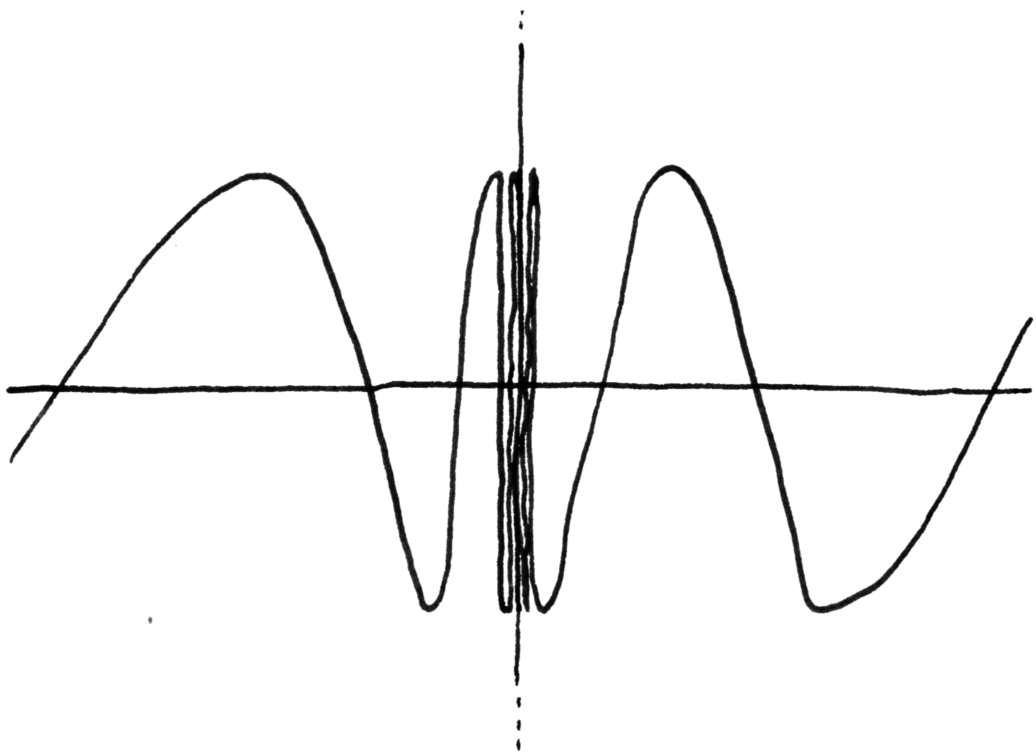
Definition 1.4.1. Eine stetige Abbildung topologischer Räume heißt eine **topologische Einbettung** oder kürzer **Einbettung**, wenn sie einen Homöomorphismus mit ihrem Bild induziert, für die induzierte Topologie auf besagtem Bild.

Vorschau 1.4.2. Ist allgemeiner $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem ausgezeichneten Funktor $v : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ in die Kategorie der Mengen, so nennen wir einen Morphismus $i : U \to X$ in $\mathcal{C}$ eine **Einbettung** oder genauer eine **v-Einbettung**, wenn $v(i)$ injektiv ist und für alle $Z \in \mathcal{C}$ das Nachschalten von i eine Bijektion

$$\mathcal{C}(Z, U) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \mathcal{C}(Z, X) \mid \mathrm{im}(v(\varphi)) \subset \mathrm{im}(v(i))\}$$

induziert. In anderen Worten stehen rechts alle Morphismen φ, für die $v(\varphi)$ über $v(i)$ faktorisiert. In dieser Situation nennen wir weiter eine Teilmenge $T \subset v(X)$ ein **v-Unterobjekt** alias **v-Teilobjekt**, wenn es eine Einbettung $i : U \to X$ gibt mit $\mathrm{im}(v(i)) = T$. Die Bijektion $v(i) : v(U) \xrightarrow{\sim} T$ mag man die **induzierte $\mathcal{C}$-Struktur auf** T nennen.

Definition 1.4.3. Eine **d-Mannigfaltigkeit** oder ausführlicher **d-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand** ist ein topologischer Hausdorffraum X, in dem jeder Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^d$.



Ein Teil der Sinuskurve des Topologen, die in der Nähe der y-Achse allerdings schwer zu zeichnen ist

1.4.4. Viele Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß sie „parakompakt“ sein soll, oder sogar noch stärker, daß ihre Topologie „eine abzählbare Basis“ haben soll. Wir werden solche Bedingungen stets explizit erwähnen, bis jetzt sind sie für uns belanglos.

1.4.5. Bis jetzt haben wir unter „Mannigfaltigkeiten“ meist „eingebettete $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeiten“ im Sinne von [AN2] 4.2.6 verstanden. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welcher Begriff jeweils gemeint ist.

1.4.6. Genau dann ist ein Hausdorffraum eine d-Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu $\mathbb{R}^d$.

Beispiele 1.4.7. Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit. Die Sphäre S^d ist eine d-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 1.4.8. Welche Fälle die Bedingung „Hausdorff“ in der Definition einer Mannigfaltigkeit ausschließt, erkennt man am Beispiel der **Zahlengeraden mit verdoppeltem Nullpunkt**. Wir betrachten genauer die disjunkte Vereinigung $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\tilde{0}\}$ von $\mathbb{R}$ mit einer einelementigen Menge $\{\tilde{0}\}$ und die Abbildung $\pi : \tilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\pi(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$, $\pi(\tilde{0}) = 0$. Auf $\tilde{\mathbb{R}}$ erklären wir eine Topologie durch die Vorschrift „U ist offen in $\tilde{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn $\pi(U)$ offen ist in $\mathbb{R}$“. In diesem topologischen Raum haben 0 und $\tilde{0}$ in $\tilde{\mathbb{R}}$ keine disjunkten Umgebungen, aber jeder Punkt besitzt eine zu $\mathbb{R}$ homöomorphe offene Umgebung.

Übungen

Übung 1.4.9. Man zeige, daß die Verknüpfung von zwei Einbettungen stets wieder eine Einbettung ist.

Übung 1.4.10. Ist ein $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur reellen Geraden $\mathbb{R}$, so folgt $n = 1$. In Formeln gilt also $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R} \Rightarrow n = 1$. Hinweis: Das Komplement eines beliebigen Punktes in $\mathbb{R}$ ist nicht wegzusammenhängend.

Übung 1.4.11. Man zeige: Das Achsenkreuz $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ ist nicht homöomorph zur Zahlengerade $\mathbb{R}$.

Übung 1.4.12. Je zwei nichtleere offene konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind homöomorph. Sind unsere Mengen zusätzlich beschränkt, so gibt es sogar einen Homöomorphismus zwischen ihren Abschlüssen, der Homöomorphismen zwischen ihren Rändern induziert.

Übung 1.4.13. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension mindestens zwei ist zusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung „abgeschlossen“, ist dann aber schwerer zu zeigen.

Übung 1.4.14. Jede Wegzusammenhangskomponente einer Mannigfaltigkeit ist in unserer Mannigfaltigkeit sowohl offen als auch abgeschlossen. Eine Mannigfaltigkeit ist insbesondere wegzusammenhängend genau dann, wenn sie zusammenhängend ist.

1.5 Kompakte Räume

1.5.1. Ich erinnere nun an Grundlagen zum Begriff der Kompaktheit allgemeiner topologischer Räume aus [AN3] **??** und beginne mit einer Wiederholung der Definition.

Definition 1.5.2. Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

1.5.3. Ist X unser topologischer Raum, so fordern wir also in Formeln ausgedrückt, daß es für jedes System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ gibt mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$.

1.5.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Konventionen sind, was den Begriff der Kompaktheit angeht, nicht einheitlich. Die hier gewählte Konvention ist im englischen Sprachraum weit verbreitet. Bourbaki und mit ihm die meisten französischen und auch viele andere Autoren nennen die in unserem Sinne kompakten Räume nur „quasikompakt“ und fordern von kompakten Räumen zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft. Eine Teilmenge eines topologischen Raums, deren Abschluß kompakt ist, nennt man **relativ kompakt**.

1.5.5 (**Kompaktheit metrischer Räume**). Nach [AN1] **??** ist ein metrischer Raum „folgenkompakt“, als da heißt, jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge, genau dann, wenn er für seine metrische Topologie kompakt ist im Sinne der obigen Definition 1.5.2.

Beispiele 1.5.6. Eine Menge mit der diskreten Topologie ist kompakt genau dann, wenn sie endlich ist. Eine Menge mit der Klumpentopologie ist stets kompakt.

1.5.7 (**Ausformulierung der Kompaktheit in der Spurtopologie**). Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. So sind gleichbedeutend nach unseren Definitionen (1) die Teilmenge A ist kompakt mit der induzierten Topologie und (2) für jedes System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ finden wir ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$.

1.5.8 (**Kompaktheit ist ein absoluter Begriff**). Man beachte, daß „kompakt“ im Gegensatz zu „offen“ oder „abgeschlossen“ eine Eigenschaft topologischer Räume ist und nicht nur eine Eigenschaft von Teilmengen topologischer Räume.

Lemma 1.5.9. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist stets kompakt.*

Beweis. Sei X unser kompakter Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Ist $\mathcal{U}$ ein System von offenen Teilmengen von X, deren Vereinigung A umfaßt, so schließen wir

$$\begin{array}{rl} A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U & \Rightarrow \quad X = (X \backslash A) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \\ & \Rightarrow \quad X = (X \backslash A) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_k \\ & \Rightarrow \quad A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k \end{array}$$

für geeignete $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$. □

Satz 1.5.10. *Das Bild eines kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets kompakt.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ stetig und X kompakt. Es gilt zu zeigen, daß auch $f(X)$ kompakt ist. Sei dazu $\mathcal{U}$ ein System von offenen Teilmengen von Y. So gilt

$$\begin{array}{rl} f(X) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U & \Rightarrow \quad X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U) \\ & \Rightarrow \quad X = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_k) \\ & \Rightarrow \quad f(X) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k \end{array}$$

für geeignete $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$. □

Lemma 1.5.11. *Eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Durch Widerspruch. Sei X unser Hausdorffraum und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Ist A nicht abgeschlossen, so gibt es $x \in \bar{A} \backslash A$. Für jedes $a \in A$ finden wir in X disjunkte offene Umgebungen U_a und V_a von a und x. Natürlich gilt $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$, also gibt es auch endlich viele $a, \ldots, b \in A$ mit $A \subset U_a \cup \ldots \cup U_b$. Als endlicher Schnitt offener Mengen ist dann jedoch auch $V_a \cap \ldots \cap V_b$ offen und nach Konstruktion gilt $A \cap V_a \cap \ldots \cap V_b = \emptyset$ im Widerspruch zu unserer Annahme $x \in \bar{A}$. □

Definition 1.5.12. Eine nicht notwendig stetige Abbildung von topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen ist.

Satz 1.5.13. *Eine stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist stets abgeschlossen. Eine stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist stets ein Homöomorphismus.*

Beweis. Seien X kompakt, Y Hausdorff und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Es reicht zu zeigen, daß f abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet. Aber in der Tat gilt ja $A \subset\!\!\!\!\!{\scriptstyle\mathrm{A}}\;\; X \Rightarrow A$ kompakt $\Rightarrow f(A)$ kompakt $\Rightarrow f(A) \subset\!\!\!\!\!{\scriptstyle\mathrm{A}}\;\; Y$ nach 1.5.9 und 1.5.10 und 1.5.11. □

1.5.14 (**Hausdorffeigenschaft versus Kompaktheit**). Die Hausdorffeigenschaft und die Kompaktheit sind Antagonisten: Die Hausdorffeigenschaft verlangt nach vielen offenen Mengen und die Kompaktheit nach wenigen. Ist beides gleichzeitig erfüllt, so kann man nach dem vorhergehenden Satz 1.5.13 keine zusätzlichen Mengen als offen deklarieren, ohne die Kompaktheit zu verlieren, und nicht weniger Mengen als offen deklarieren, ohne die Hausdorffeigenschaft zu verlieren.

Satz 1.5.15 (**Extrema auf Kompakta**). *Eine stetige reellwertige Funktion auf einem nichtleeren kompakten Raum ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an.*

Beweis. Ist X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt nach 1.5.10, also beschränkt und abgeschlossen nach Erkenntissen aus der Analysis. Haben wir zusätzlich $X \neq \emptyset$, so folgt $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$. □

Vorschau 1.5.16. Aus der Analysis vertraute Kriterien für Abgeschlossenheit, Stetigkeit, Kompaktheit und dergleichen über Eigenschaften von Folgen übertragen sich erst auf beliebige topologische Räume, wenn man den Begriff der Folge zu dem des Filters verallgemeinert. Wir stellen die Diskussion dieses Begriffs zurück bis zum Beweis des Satzes von Tychonoff 3.2.10. Daß „folgenabgeschlossen“ keineswegs „abgeschlossen“ impliziert, zeigt das Beispiel 1.2.26.

Lemma 1.5.17 (**Überdeckungssatz von Lebesgue**). *Ist X ein folgenkompakter metrischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so gibt es $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle Punkte $x \in X$ der ε-Ball $\mathrm{B}(x; \varepsilon)$ um x ganz in einer der überdeckenden offenen Mengen $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.*

Beweis. Man betrachte die Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) := \sup\{r \leq 1 \mid \text{Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } \mathrm{B}(x; r) \subset U\}$$

Die Dreiecksungleichung liefert $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$, insbesondere ist f stetig. Sicher dürfen wir $X \neq \emptyset$ annehmen. Dann nimmt f nach 1.5.15 sein Minimum an und jede positive Zahl echt unterhalb dieses Minimums ist ein mögliches ε. □

Übungen

Übung 1.5.18. Man sagt, ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X habe **nichtleere endliche Schnitte**, wenn für jedes endliche Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ der Schnitt $\bigcap_{A \in \mathcal{E}} A$ nicht leer ist. Man zeige: Ein topologischer Raum X ist kompakt genau dann, wenn für jedes System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit nichtleeren endlichen Schnitten auch der gesamte Schnitt nicht leer ist, in Formeln $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.

Übung 1.5.19 (**Disjunkte Umgebungen disjunkter Kompakta**). Sind A, B disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums X, so gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \Subset X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß A nur aus einem Punkt besteht.

Übung 1.5.20. In einem kompakten Hausdorffraum läßt sich jede Umgebung eines Punktes zu einer abgeschlossenen Umgebung desselben Punktes verkleinern. Hinweis: 1.5.19.

Übung 1.5.21. Die Abbildung $(0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

Übung 1.5.22. Gegeben ein topologischer Raum X können wir auf $X \sqcup \{\infty\}$ eine Topologie $\mathcal{T}$ erklären durch die Vorschrift

$$\mathcal{T} := \{U \mid U \Subset X\} \sqcup \{U \sqcup \{\infty\} \mid U \Subset X \text{ mit } X \backslash U \text{ kompakt}\}$$

Man zeige, daß $X \sqcup \{\infty\}$ mit dieser Topologie ein kompakter topologischer Raum ist. Er heißt die **Ein-Punkt-Kompaktifizierung von** X. Gegeben irgendeine weitere Menge Z und eine Hausdorff'sche Topologie auf $X \sqcup Z$, für die in_X eine offene Einbettung ist, muß dann die Abbildung $X \sqcup Z \to X \sqcup \{\infty\}$ stetig sein, die auf X die Identität ist und auf Z konstant den Wert ∞ annimmt.

1.6 Initialtopologie

1.6.1. Die Initialtopologie ist eine Verallgemeinerung der induzierten Topologie von der Einbettung einer Teilmenge in einen topologischen Raum zu Familien von Abbildungen einer vorgegebenen Menge in verschiedene topologische Räume. Wir besprechen im folgenden diese Konstruktion und ihre Eigenschaften.

1.6.2. Gegeben Topologien $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ auf derselben Menge X sagt man, $\mathcal{T}$ sei **größergleich** $\mathcal{S}$, wenn gilt

$$\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$$

In diesem Zusammenhang nennt man eine größere Topologie auch **feiner** und eine kleinere Topologie entsprechend **gröber**.

1.6.3 (**Schnitt von Topologien**). Sind $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(X)$ Topologien auf ein- und derselben Menge X, für i aus einer Indexmenge I, so ist offensichtlich auch ihr Schnitt $\mathcal{T} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ eine Topologie.

Definition 1.6.4. Ist X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X, so erklärt man auf X die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie** $\langle \mathcal{E} \rangle$ als den Schnitt in $\mathcal{P}(X)$ über alle Topologien auf X, die $\mathcal{E}$ umfassen, alias die kleinste Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ umfaßt.

1.6.5. In der teilgeordneten Menge aller Topologien auf einer vorgegeben „Trägermenge“ hat jede Menge von Topologien ein Supremum nach 1.6.4 und ein Infimum nach 1.6.3.

1.6.6 (**Von Mengensystem erzeugte Topologie, explizite Beschreibung**). Natürlich ist $\langle\mathcal{E}\rangle$ damit die kleinste Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ umfaßt. Wir können $\langle\mathcal{E}\rangle$ alternativ auch wie folgt beschreiben: Zunächst bilden wir das Mengensystem $\tilde{\mathcal{E}} = \{U \subset X \mid \exists V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{E} \text{ mit } U = V_1 \cap \ldots \cap V_k\}$ aller endlichen Schnitte von Mengen aus $\mathcal{E}$, mitgemeint ist hier $X \in \tilde{\mathcal{E}}$ als der „Schnitt über gar keine Menge aus $\mathcal{E}$“, und anschließend bilden wir das Mengensystem $\langle\mathcal{E}\rangle = \{W \subset X | \text{ Es gibt } \mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{E}} \text{ mit } W = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\}$ aller beliebigen Vereinigungen von Mengen aus $\tilde{\mathcal{E}}$, mitgemeint ist hier $\emptyset \in \langle\mathcal{E}\rangle$ als die „Vereinigung über gar keine Menge aus $\tilde{\mathcal{E}}$“. In der Tat ist auch das so konstruierte Mengensystem $\langle\mathcal{E}\rangle$ eine Topologie auf X, und für jede Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit $\mathcal{T} \supset \mathcal{E}$ folgt umgekehrt erst $\mathcal{T} \supset \tilde{\mathcal{E}}$ und dann $\mathcal{T} \supset \langle\mathcal{E}\rangle$.

Definition 1.6.7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine **Subbasis** der Topologie $\mathcal{T}$, wenn es die Topologie erzeugt, in Formeln $\langle\mathcal{E}\rangle = \mathcal{T}$. Es heißt eine **Basis** der Topologie, wenn die offenen Mengen unseres topologischen Raums X gerade alle beliebigen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{E}$ sind.

Beispiel 1.6.8. Die übliche Topologie aus [AN1] **??** auf der Menge der erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ können wir in dieser Terminologie beschreiben als die Topologie, die erzeugt wird von allen Teilmengen der Gestalt $\{x \mid x < a\}$ und allen Teilmengen der Gestalt $\{x \mid x > a\}$ für beliebige $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

Definition 1.6.9. Eine Familie von stetigen Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ heißt **gesamthaft initial**, wenn für jede Abbildung $e : W \to X$ von einem weiteren topologischen Raum nach X gilt:

$$(f_i \circ e \text{ stetig } \forall i) \Rightarrow (e \text{ stetig})$$

1.6.10. Wir nennen eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ **initial**, wenn sie als einelementige Familie gesamthaft initial ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem topologischen Raum stets initial. Eine initiale injektive Abbildung topologischer Räume nennen wir eine **topologische Einbettung**.

Lemma 1.6.11. *Gegeben X eine Menge, Y_i topologische Räume indiziert durch $i \in I$ und $f_i : X \to Y_i$ eine Familie von Abbildungen gibt es genau eine Topologie auf X derart, daß unsere Familie gesamthaft initial wird. Sie heißt die* **Initialtopologie** *zu unserer Familie.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ zwei Topologien auf X, für die unsere Famlie gesamthaft initial wird, so sind sowohl $\mathrm{id} : (X, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ als auch $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ stetig. Das zeigt $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ und die Eindeutigkeit ist bewiesen. Nun zeigen wir noch, daß die kleinste Topologie $\mathcal{I}$ auf X, für die alle die f_i stetig werden, die von einer Initialtopologie geforderte Eigenschaft hat. In der Tat ist die Finaltopologie zu e aus Übung 1.1.26 auch eine Topologie auf X, für die alle f_i stetig sind, und es folgt $\mathcal{T} \supset \mathcal{I}$ alias e stetig. □

1.6.12. Explizit kann man die Initialtopologie für $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ beschreiben als die Topologie auf X, die von allen $f_i^{-1}(V)$ mit $i \in I$ und $V \circledcirc Y_i$ erzeugt wird.

Beispiel 1.6.13. Ist Y ein topologischer Raum und $X \subset Y$ eine Teilmenge, so stimmt die auf X induzierte Topologie überein mit der Initialtopologie zur Inklusion $X \hookrightarrow Y$.

1.6.14 (**Transitivität gesamthaft initialer Familien**). Seien $f_i : X \to Y_i$ und $g_{ji} : Y_i \to Z_{ji}$ Familien von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Ist die Familie der $g_{ji} f_i$ gesamthaft initial, so auch die Familie der f_i. Ist die Familie der $(g_{ji})_j$ gesamthaft initial für alle i und die Familie der f_i gesamthaft initial, so ist auch die Familie der $g_{ji} f_i$ gesamthaft initial. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

1.6.15. Die vorhergehende Bemerkung 1.6.14 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Abbildungen stets initial ist und daß eine Verknüpfung $g \circ f$ von zwei stetigen Abbildungen nur dann initial sein kann, wenn f initial ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung initial, die eine stetige Linksinverse besitzt.

Vorschau 1.6.16. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ nennen wir ganz allgemein eine Familie von Morphismen $f_i : X \to Y_i$ in $\mathcal{S}$ **gesamthaft initial in Bezug auf** v, wenn für alle $W \in \mathcal{S}$ gilt

$$v : \mathcal{S}(W, X) \xrightarrow{\sim} \{e \in \mathcal{C}(vW, vX) \mid vf_i \circ e \in v(\mathcal{S}(W, Y_i)) \ \forall i\}$$

Unsere Aussagen zur Transitivität gesamthaft initialer Familien gelten auch in dieser Allgemeinheit. Im Fall des Vergißfunktors $v : \mathfrak{U}\mathrm{Top} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ für geeignete Mengensysteme $\mathfrak{U}$ erhalten wir die obigen Resultate zurück. Die Initialtopologie kann als Spezialfall der „initialen $(\mathcal{S}, v)$-Struktur“ verstanden werden, wie wir im Zusammenhang mit sogenannten „$(\mathcal{S}, v)$-Strukturen auf Objekten von $\mathcal{C}$“ an anderer Stelle diskutieren.

Definition 1.6.17. Gegeben $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume ist die **Produkttopologie** auf ihrem kartesischen Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ definiert als die Initialtopologie zu den Projektionen auf die Koordinaten $\mathrm{pr}_j : \prod X_i \to X_j$.

1.6.18. Abstrakt gefaßt erhalten wir so genau das Produkt im Sinne der Kategorientheorie [LA2] 7.7.1 in der Kategorie der topologischen Räume. Im Fall von zwei Faktoren erhalten wir unsere Produkttopologie aus [AN3] 1.4.17 zurück.

1.6.19. Ausformuliert bedeutet diese Definition: Alle pr_j sind stetig, und eine Abbildung $e : W \to \prod X_i$ von einem topologischen Raum W in das Produkt ist stetig genau dann, wenn alle $\mathrm{pr}_j\, e : W \to X_j$ es sind. Etwas expliziter liefert die Konstruktion der Initialtopologie, daß die Produkttopologie auf $\prod X_i$ erzeugt wird durch alle Mengen der Form $\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)$ für $i \in I$ und $U_i \overset{\circ}{\subset} X_i$. Eine Basis der Topologie wird folglich gegeben durch alle endlichen Schnitte solcher Mengen alias die „offenen Quader“

$$U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_k} \times \prod_{i \neq i_1, \ldots, i_k} X_i$$

mit $U_{i_\nu} \overset{\circ}{\subset} X_{i_\nu}$ für paarweise verschiedene i_ν.

1.6.20. Auf einem endlichen Produkt metrischer Räume liefert die Produktmetrik „Maximum der Abstände auf den Koordinaten“ stets die Produkttopologie. Speziell stimmt auf dem $\mathbb{R}^n$ die Produkttopologie überein mit der natürlichen Topologie aus [AN1] **??**.

1.6.21 (**Initalität ist verträglich mit Produkten**). Das Produkt einer Familie von stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen ist eine stetige Abbildung zwischen den Produkten der jeweiligen Räume. Sind hier alle Abbildungen Einbettungen, so auch ihr Produkt. Sind alle Abbildungen initial, so auch ihr Produkt. Das alles ist eine einfache Anwendung unserer allgemeinen Aussagen zur Transitivität gesamthaft initialer Familien 1.6.14.

Proposition 1.6.22 (Abgeschlossenheit der Diagonale bedeutet hausdorffsch). *Genau dann ist ein topologischer Raum X hausdorffsch, wenn die Diagonale eine abgeschlossene Teilmenge des Produkts unseres Raums mit sich selbst ist, in Formeln*

$$\Delta(X) \overset{\mathrm{A}}{\subset} X \times X$$

Beweis. Ist X hausdorffsch, so gibt es für $(x, y) \in (X \times X) \backslash \Delta(X)$ disjunkte offene Umgebungen $U, V \overset{\circ}{\subset} X$ von x beziehungsweise y. Dann ist $(U \times V) \overset{\circ}{\subset} (X \times X)$ eine offene Umgebung von (x, y), die die Diagonale nicht trifft, also liegt (x, y) nicht im Abschluß der Diagonale. Ist umgekehrt die Diagonale abgeschlossen, so gibt es für $x \neq y$ eine offene Umgebung von (x, y), die die Diagonale nicht trifft. Diese Umgebung ist eine Vereinigung von Quadern $U \times V$ mit $U, V \overset{\circ}{\subset} X$ und U disjunkt zu V, und einer von diesen Quadern muß (x, y) enthalten, wir haben also also $x \in U$ und $y \in V$ und X ist hausdorffsch. $\square$

Definition 1.6.23. Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **offen**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist. Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist. Wir fordern von einer offenen oder abgeschlossenen Abbildung nicht, daß sie stetig sein muß.

Beispiel 1.6.24. Die Projektionen eines Produkts von topologischen Räumen auf seine Faktoren sind stets offen, sie sind jedoch im allgemeinen nicht abgeschlossen. Zum Beispiel ist die sogenannte Hyperbel $\{(x, y) \mid xy = 1\}$ eine abgeschlossene Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$, ihre Projektion auf die x-Achse ist jedoch keine abgeschlossene Teilmenge der Zahlengerade $\mathbb{R}$.

1.6.25 (**Produkte offener Abbildungen**). Jedes endliche Produkt von offenen Abbildungen ist offen. Jedes beliebige Produkt von offenen Surjektionen ist eine offene Surjektion. Beides folgt leicht aus der expliziten Beschreibung der Produkttopologie 1.6.19.

Satz 1.6.26 (Zusammenhang von Produkten). *Ein Produkt von topologischen Räumen ist zusammenhängend genau dann, wenn alle Faktoren zusammenhängend sind.*

1.6.27. Um diesen Satz so prägnant formulieren zu können, müssen wir unsere Konvention zugrundelegen, nach der die leere Menge kein zusammenhängender topologischer Raum ist.

Beweis. Ist das Produkt zusammenhängend, so nach 1.3.7 auch die Faktoren als die Bilder der stetigen Projektionen. Für die Rückrichtung prüfen wir unser Zusammenhangskriterium 1.3.8. Sei $(X_i)_{i\in I}$ unsere Familie von topologischen Räumen und $f : \prod X_i \to \{0, 1\}$ stetig. Wenn X_i zusammenhängend ist, so folgt $f(x) = f(y)$, wenn sich x und y nur in der i-ten Koordinate unterscheiden. Daraus folgt induktiv $f(x) = f(y)$, wenn sich x und y nur in endlich vielen Koordinaten unterscheiden. Gilt nun $f^{-1}(0) \neq \emptyset$, so folgt $f^{-1}(0) \supset U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_k} \times \prod_{i\neq i_1,\ldots,i_k} X_i$ für geeignete paarweise verschiedene Indizes $i_1, \ldots, i_k$ und geeignete nichtleere offene Teilmengen $U_{i_1} \overset{\circ}{\subset} X_{i_1}, \ldots, U_{i_k} \overset{\circ}{\subset} X_{i_k}$. Mit unserer Vorüberlegung folgt daraus sofort, daß f konstant sein muß. □

Übungen

Übung 1.6.28. Für jeden topologischen Raum X ist die diagonale Einbettung $X \to X \times X$ initial.

Übung 1.6.29. Ist $f : X \to Y$ stetig und Y Hausdorff, so ist der Graph von f eine abgeschlossene Teilmenge $\Gamma(f) \overset{\mathrm{A}}{\subset} X \times Y$.

Übung 1.6.30. Stimmen zwei stetige Abbildungen von einem topologischen Raum in einen Hausdorffraum auf einer dichten Teilmenge überein, so sind sie gleich. Hinweis: Zusammen liefern unsere beiden stetigen Abbildungen eine Abbildung in das kartesische Produkt, unter der das Urbild der Diagonale wegen 1.6.22 abgeschlossen sein muß.

Ergänzende Übung 1.6.31. Ein Produkt von abgeschlossenen Teilmengen ist stets eine abgeschlossene Teilmenge des Produkts. Allgemeiner zeige man für topologische Räume X, Y und Teilmengen$A \subset X$ und $B \subset Y$ die Gleichheit $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$ des Abschlusses des Produkts mit dem Produkt der Abschlüsse.

Übung 1.6.32. Für beliebige topologische Räume X, Y, Z ist die offensichtliche Abbildung $X \times Y \times Z \to (X \times Y) \times Z$ ein Homöomorphismus.

Übung 1.6.33. Ein beliebiges Produkt von Hausdorffräumen ist Hausdorff.

Ergänzende Übung 1.6.34. Man zeige, daß die Menge aller $(x, y) \in \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$ mit $x \leq y$ abgeschlossen ist. Man folgere, daß bei Grenzwerten von Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$ Ungleichungen erhalten bleiben. Hinweis: 1.2.22.

Ergänzende Übung 1.6.35. Sind $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen, so ist auch die Abbildung $H : X \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ mit $(x, \tau) \mapsto \tau f(x) + (1 - \tau)g(x)$ stetig.

Ergänzende Übung 1.6.36. Das Produkt von zwei Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n und m ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n + m$.

Ergänzende Übung 1.6.37. Jede kompakte d-Mannigfaltigkeit X läßt sich stetig in einen $\mathbb{R}^n$ einbetten. Hinweis: Man findet für jedes $x \in X$ eine stetige Abbildung $f_x : X \to \mathbb{R}^d$, die injektiv ist auf einer offenen Umgebung U_x von x. Endlich viele dieser U_x überdecken X.

Übung 1.6.38. Man zeige: Das Produkt von zwei kompakten Räumen ist kompakt. Der Satz von Tychonoff 3.2.10 wird uns sagen, daß sogar ein beliebiges Produkt von kompakten Räumen kompakt ist.

Ergänzende Übung 1.6.39. Gegeben topologische Räume X und Y sowie Kompakta $K \subset X$ und $L \subset Y$ sowie $W \Subset X \times Y$ mit $K \times L \subset W$ gibt es $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ mit $K \subset U$ und $L \subset V$ sowie

$$U \times V \subset W$$

Ergänzende Übung 1.6.40. Man zeige, daß es keinen topologischen Raum X gibt derart, daß $X \times X$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}$. Hinweis: Man zeige, daß für X zusammenhängend mit mehr als einem Punkt das Komplement eines Punktes in $X \times X$ auch zusammenhängend ist. Man zeige allgemeiner, daß es keine zwei topologischen Räume X, Y mit jeweils mindestens zwei Punkten so gibt, daß $X \times Y$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}$. Höherdimensionale Analoga zeigen wir in [TS] 5.7.12.

Ergänzende Übung 1.6.41. Auf dem Produkt einer abzählbaren Familie metrischer Räume existieren stets Metriken, die die Produkttopologie induzieren. Weiter zeige man, daß das Produkt einer abzählbaren Familie kompakter metrischer Räume kompakt ist. Hinweis: Man mag sich an [AN1] **??** orientieren. In 3.2.10 zeigen wir allgemeiner aber auch mühsamer den Satz von Tychonoff, nach dem beliebige Produkte kompakter Räume kompakt sind.

1.7 Finaltopologie

1.7.1. Die Finaltopologie in Bezug auf eine Abbildung von einem topologischen Raum in eine Menge kennen wir bereits aus 1.1.26. Hier besprechen wir eine Variante für Familien von Abbildung von topologischen Räumen in eine Menge und Eigenschaften dieser Konstruktion.

Definition 1.7.2. Eine Familie von stetigen Abbildungen $f_i : X_i \to Y$ heißt **gesamthaft final**, wenn für jede Abbildung $h : Y \to W$ in einen weiteren topologischen Raum gilt:

$$(hf_i \text{ stetig } \forall i) \Rightarrow (h \text{ stetig})$$

1.7.3. Wir eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ **final**, wenn sie als einelementige Familie gesamthaft final ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem topologischen Raum stets final. Wir sagen, eine Abbildung $f : X \to Y$ sei **final auf ihr Bild**, wenn die induzierte Abbildung $f : X \to f(X)$ final ist.

Lemma 1.7.4. *Gegeben $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume, Y eine Menge und $f_i : X_i \to Y$ eine Familie von Abbildungen gibt es genau eine Topologie auf Y, für die unsere Familie gesamthaft final wird. Sie heißt die* **Finaltopologie** *zu unserer Familie.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ zwei Topologien auf Y, für die unsere Famlie gesamthaft final wird, so sind sowohl $\mathrm{id} : (Y, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ als auch $\mathrm{id} : (Y, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ stetig. Das zeigt $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ und so die Eindeutigkeit. Andererseits ist klar, daß $\mathcal{T} := \{V \subset Y \mid f_i^{-1}(V) \circledcirc X_i \ \forall i\}$ eine Topologie ist und die von einer Finaltopologie geforderte Eigenschaft hat. □

1.7.5 (**Transitivität gesamthaft finaler Familien**). Seien $e_{ij} : W_{ij} \to X_i$ und $f_i : X_i \to Y$ Familien von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Ist die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final, so auch die Familie der f_i. Ist die Familie der e_{ij} gesamthaft final für alle i und die Familie der f_i gesamthaft final, so ist auch die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

1.7.6. Die vorhergehende Bemerkung 1.7.5 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei finalen Abbildungen stets final ist und daß eine Verknüpfung fe von zwei stetigen Abbildungen nur dann final sein kann, wenn f final ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung final, die eine stetige Rechtsinverse alias einen stetigen **Schnitt** besitzt. Gibt es in anderen Worten eine stetige Abbildung s mit $f \circ s = \mathrm{id}$, so ist f final. Insbesondere ist jede Projektion von einem Produkt mit nichtleeren Faktoren auf einen der Faktoren final.

1.7.7. Ist $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine Surjektion, so heißt die Finaltopologie auf Y auch die **Quotiententopologie**.

1.7.8. In unserem abstrakten Kontext aus 1.6.16 sind gesamthaft finale Familien stetiger Abbildungen genau die gesamthaft initialen Familien in Bezug auf den treuen Funktor $v^{\mathrm{opp}} : \mathfrak{U}\mathrm{Top}^{\mathrm{opp}} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$ für jedes Mengensystem $\mathfrak{U}$, das alle beteiligten Räume X_i, Y enthält.

Beispiel 1.7.9. Wir konstruieren das **Möbiusband**. Zu dem Behufe betrachten wir auf $[0, 1] \times [-1, 1]$ die Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt wird von $(0, y) \sim (1, -y)$. Die Menge der Äquivalenzklassen versehen wir mit der Quotiententopologie, und fertig ist das Möbiusband. Als Übung zeige man, daß unser so konstruiertes Möbiusband kompakt ist.

Beispiel 1.7.10 (**Verkleben topologischer Räume**). Wir zeigen, wie man mit unserem Formalismus zwei topologische Räume X und Y verkleben kann. Wir brauchen dazu als „Kleber" eine Menge K und Abbildungen $f : K \to X, g : K \to Y$. Dann betrachten wir auf der disjunkten Vereinigung $Y \sqcup X$ die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt von $f(z) \sim g(z) \quad \forall z \in K$ und nehmen als Topologie auf der Verklebung

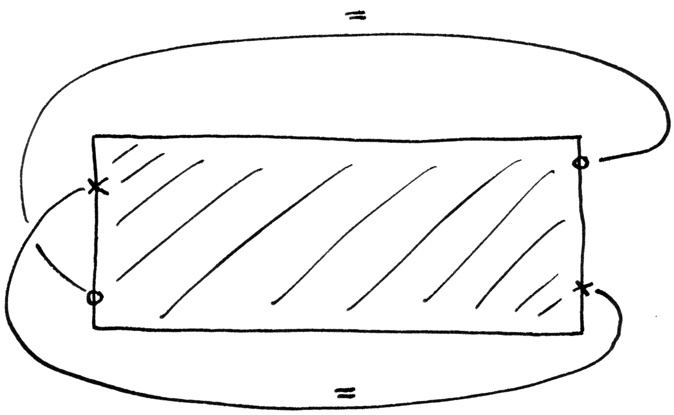
$$Y \sqcup_K X = (Y \sqcup X)/ \sim$$

die Finaltopologie zu den beiden offensichtlichen Abbildungen $X \to Y \sqcup_K X$, $Y \to Y \sqcup_K X$.

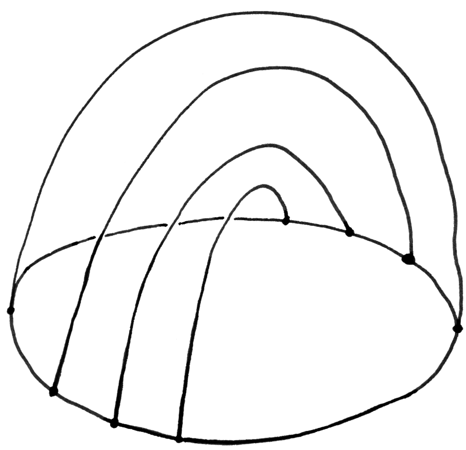
Definition 1.7.11. Gegeben $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume erklärt man ihre **topologische Summe** als ihre disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ definiert als die finale Topologie zu den Injektionen $\mathrm{in}_j : X_j \to \bigsqcup X_i$.

1.7.12. Abstrakt gefaßt erhalten wir so genau das Koprodukt im Sinne der Kategorientheorie [LA2] 7.7.16 in der Kategorie der topologischen Räume.

1.7.13. Ausformuliert bedeutet diese Definition: Alle in_j sind stetig, und eine Abbildung $g : \bigsqcup X_i \to Z$ vom Koprodukt in einen topologischen Raum Z ist stetig genau dann, wenn alle $g \circ \mathrm{in}_j : X_j \to Z$ es sind. Etwas expliziter liefert die Konstruktion der Finaltopologie, daß eine Teilmenge der topologischen Summe genau dann offen ist, wenn ihr Schnitt mit jedem X_j offen ist in X_j.



Versuch einer graphischen Darstellung unserer Konstruktion des Möbiusbands. Der besseren Vorstellung halber habe ich hier das Rechteck $[0, 5] \times [-1, 1]$ gezeichnet und die Identifikationsvorschrift für die senkrechten Kanten durch mit $=$ bezeichnete Linien beispielhaft angedeutet.



Man erhält eine stetige Abbildung des Möbiusbands nach $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ vermittels der Formel $(t, \tau) \mapsto (\tau\, \mathrm{e}^{\pi\, \mathrm{i}\, t}, \sqrt{1-\tau^2} \cos^2 \pi t)$. Anschaulich gesprochen verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte des Einheitskreises durch einen Bogen mit variierender mittlerer Höhe. Das Bild ist eine sich selbst durchdringende räumliche Fläche, bei der man sich die Selbstdurchdringung leicht wegdenken kann. Man nennt sie auch die **Kreuzhaube**. In dieser Anschauung für das Möbiusband bezahlt man in gewisser Weise mit der Selbstdurchdringung für die gute Sichtbarkeit des Randkreises.

Lemma 1.7.14 (Finalität von Restriktionen). *Ist $f : X \to Y$ eine finale Abbildung von topologischen Räumen und ist $V \subset Y$ offen oder abgeschlossen, so ist auch die induzierte Abbildung $f : f^{-1}(V) \to V$ final. Dasselbe gilt analog auch für gesamthaft finale Familien.*

1.7.15. Für beliebiges $V \subset Y$ ist die entsprechende Aussage meines Wissens nicht richtig.

Beweis. Wir zeigen das nur im Fall $V \Subset Y$, den anderen Fall behandelt man analog. Es gilt für $U \subset V$ zu zeigen $U \Subset V \Leftrightarrow f^{-1}(U) \Subset f^{-1}(V)$. Dazu überlegen wir uns $U \Subset V \Leftrightarrow U \Subset Y \Leftrightarrow f^{-1}(U) \Subset X \Leftrightarrow f^{-1}(U) \Subset f^{-1}(V)$. Die äußeren Implikationen folgen dabei aus 1.1.10, die mittlere aus der Finalität von f. □

Lemma 1.7.16 (Finalität von Surjektionen). *Jede stetige offene oder abgeschlossene Surjektion ist final.*

Beweis. Gegeben eine Surjektion $f : X \twoheadrightarrow Y$ gilt für jede Teilmenge $V \subset Y$ bereits $V = f(f^{-1}(V))$. Ist f zusätzlich offen, so folgt aus $f^{-1}(V) \Subset X$ also $V \Subset Y$ und f ist in der Tat final. Im Fall einer stetigen abgeschlossenen Surjektion argumentiert man genauso. □

Beispiel 1.7.17. Jede stetige Surjektion von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist final nach 1.7.16, denn sie ist abgeschlossen nach 1.5.13.

1.7.18. Sei X ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt **lokal endlich**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der Teilmengen unseres Systems trifft.

Proposition 1.7.19 (Gesamthafte Finalität von Überdeckungen). *Gegeben eine offene oder eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung eines topologischen Raums bilden die zugehörigen Einbettungen eine gesamthaft finale Familie.*

Beweis. Im Fall einer offenen Überdeckung ist das nur eine Umformulierung unserer Proposition 1.1.20, nach der Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist. Im Fall einer endlichen abgeschlossenen Überdeckung folgt das ebenso direkt aus Proposition 1.1.20. Im Fall einer lokal endlichen abgeschlossenen Überdeckung folgt es aus einer Kombination dieser beiden Aussagen oder alternativ, da je eine Abbildung stetig ist, wenn sie stetig ist in jedem Punkt. □

Beispiel 1.7.20 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Mit der „Basis“ ist der Raum Y gemeint. Besitzt diese Basis Y eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ derart, daß $f : f^{-1}(V) \to V$ final ist für alle $V \in \mathcal{V}$, zum Beispiel weil es jeweils einen Schnitt besitzt, so ist auch f selbst final. In der Tat bilden dann nach der Transitivität gesamthaft finaler Familien 1.7.5 und der gesamthaften Finalität von Überdeckungen 1.7.19 die Abbildungen $f^{-1}(V) \to Y$ eine gesamthaft finale Familie, und da diese über $f : X \to Y$ faktorisiert, ist nach der zweiten Aussage in 1.7.5 auch f final.

Beispiel 1.7.21. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ist final, da sie lokal stetige Schnitte besitzt, zum Beispiel über jeder geschlitzten Ebene. Eine Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ ist also genau dann stetig, wenn $f \circ \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist.

Beispiel 1.7.22. Das Potenzieren $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ ist final für $n \geq 1$. In diesem Fall besitzt $\mathbb{C}$ nämlich eine endliche Überdeckung durch abgeschlossene Teilmengen, etwa geeignete abgeschlossene Winkelsegmente, auf denen sie jeweils einen stetigen Schnitt besitzt, und man kann 1.7.28 anwenden. Alternativ mögen sie aus der Funktionentheorie wissen, daß nichtkonstante holomorphe Abbildungen mit zusammenhängendem Definitionsbereich offen sind, und offene stetige Surjektionen sind nach 1.7.16 final. Als drittes Argument mögen sie nochmal mit 1.7.28 argumentieren und eine lokal endliche Überdeckung durch abgeschlossene Kreisringe konstruieren, auf die zurückgezogen unsere Abbildung jeweils final ist nach 1.7.17 als stetige surjektive Abbildung von einem Kompaktum auf einen Hausdorffraum.

Vorschau 1.7.23 (**Finalität und Produkte**). Es ist meines Wissens im allgemeinen nicht richtig, daß daß für $f : X \to Y$ final und Z ein beliebiger topologischer Raum auch $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ final wäre. Wir zeigen jedoch in 1.9.15, daß gegeben eine finale Surjektion $f : X \twoheadrightarrow Y$ und Z lokal kompakt auch $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ final ist.

Übungen

Übung 1.7.24. Gegeben ein diskreter Raum F und ein beliebiger Raum X stimmt die Produkttopologie auf $X \times F$ überein mit der Finaltopologie in Bezug auf die Abbildungen $i_f : X \to X \times F$ für alle $f \in F$, die gegeben werden durch $x \mapsto (x, f)$.

Übung 1.7.25 (**Eigenschaften stetiger offener Surjektionen**). Wir wissen aus 1.7.16 bereits, daß stetige offene Surjektionen final sind. Man zeige darüber hinaus die folgenden Eigenschaften.

1. Ist $f : X \to Y$ eine stetige offene Surjektion und Z ein topologischer Raum, so ist auch $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ eine stetige offene Surjektion;

2. Ist $f : X \to Y$ eine stetige offene Surjektion und $V \subset X$ ein Teilmenge, so ist auch $f : f^{-1}(V) \to V$ eine stetige offene Surjektion;

3. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen und ist $gf : X \to Z$ eine stetige offene Surjektion, so auch g. Insbesondere ist jede stetige Abbildung, die einen stetigen Schnitt besitzt, eine stetige offene Surjektion;

4. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $Y = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ eine offene Überdeckung derart, daß alle $f : f^{-1}(V) \to V$ stetige offene Surjektionen sind, so ist auch f eine stetige offene Surjektion.

Salopp gesprochen sind stetige offene Surjektionen „die besseren finalen Abbildungen“.

Übung 1.7.26 (**Verträglichkeit von endlichen Produkten mit Koprodukten**). In der Kategorie der Mengen kommutieren Koprodukte mit beliebigen Produkten. In der Kategorie der topologischen Räume kommutieren Koprodukte mit beliebigen endlichen Produkten. In der Kategorie der abelschen Gruppen gilt noch nicht einmal das.

Übung 1.7.27. Gegeben X ein topologischer Raum, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ ein Mengensystem ist f ist stetig für die von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie auf Y genau dann, wenn die Urbilder aller $V \in \mathcal{E}$ offen sind in X. Hinweis: Sind die Urbilder aller $V \in \mathcal{E}$ offen, so ist $\mathcal{E}$ enthalten in der finalen Topologie auf Y.

Übung 1.7.28 (**Finalitätskriterium über abgeschlossene Überdeckungen**). Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Besitzt die Basis Y eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{V}$ durch abgeschlossene Teilmengen derart, daß $f : f^{-1}(V) \to V$ final ist für alle $V \in \mathcal{V}$, so ist auch f selbst final. Hinweis: Man passe die Argumentation aus 1.7.20 an.

Übung 1.7.29 (**Finale Abbildungen und Zusammenhang**). Ist $f : X \to Y$ final mit zusammenhängenden Fasern, so sind die Zusammenhangskomponenten von X die Urbilder der Zusammenhangskomponenten von Y. Ist insbesondere Y zusammenhängend, so auch X.

Ergänzende Übung 1.7.30. Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine stetige Surjektion auf einen Hausdorffraum. Besitzt Y eine lokal endliche Überdeckung durch Teilmengen, deren Urbilder unter f kompakt sind, so ist f final. Hinweis: 1.7.17 und 1.7.28. Besitzt insbesondere ein Hausdorffraum eine lokal endliche Überdeckung durch Kompakta, so kann man keine offenen Mengen hinzufügen, ohne die lokal endliche Überdeckbarkeit durch Kompakta zu verlieren.

Übung 1.7.31 (**Stetigkeitseigenschaften der Nullstellen von Polynomen**). Die Vorschrift $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto (T - \lambda_1) \ldots (T - \lambda_n)$ liefert für jedes n eine finale Abbildung $\pi : \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \mathrm{Pol}^n$ in den affinen Raum Pol aller normierten komplexen Polynome vom Grad n, und die davon induzierte Abbildung ist ein Homöomorphismus

$$\mathbb{C}^n/\mathcal{S}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}^n$$

Hier meint $\mathbb{C}^n/\mathcal{S}_n$ den Bahnenraum für die Operation der symmetrischen Gruppe durch Vertauschung der Koordinaten mit der Quotiententopologie alias den Raum der Multimengen komplexer Zahlen der Kardinalität n. Auf unserem Raum

Pol^n dahingegen betrachten wir die natürliche Topologie. Unser Satz ist ein topologisches Analogon des Hauptsatzes über symmetrische Polynome [AL] 2.9.6, vergleiche [KAG] 5.3.7. Hinweis: Man mag etwa davon ausgehen, daß aufgrund der Abschätzung [LA1] 5.3.33 Urbilder von Kompakta K unter π stets wieder kompakt sind.

Beispiel 1.7.32. Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Abbildung $\mathrm{Pol} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $(T - \lambda_1) \ldots (T - \lambda_n) \mapsto f(\lambda_1) + \ldots + f(\lambda_n)$ stetig.

Übung 1.7.33. Man zeige, daß im Raum aller normierten reellen Polynome vom Grad n die über $\mathbb{R}$ zerfallenden Polynome eine abgeschlossene Teilmenge bilden und daß darin die offene Teilmenge der Polynome ohne Nullstelle bei Null in $(n + 1)$ Zusammenhangskomponenten zerfällt, die durch die Zahl der mit Vielfachheit genommenen positiven Nullstellen der in ihnen enthaltenen Polynome charakterisiert werden können.

Vorschau 1.7.34. In der Homotopietheorie arbeitet man oft mit sogenannten **CW-Komplexen**. Darunter versteht man einen Hausdorffraum X mit einer Familie von stetigen Abbildungen $\varphi_\alpha : D^{n(\alpha)} \to X$ von geschlossenen Bällen $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ nach X derart, daß gilt:

1. Die Restriktionen unserer Abbildungen auf die offenen Bälle sind Homöomorphismen auf ihr Bild $\varphi_\alpha : (D^{n(\alpha)} \backslash S^{n(\alpha)}) \xrightarrow{\sim} \varphi_\alpha(D^{n(\alpha)} \backslash S^{n(\alpha)})$ und unser Raum X ist als Menge die disjunkte Vereinigung der Bilder der offenen Bälle $X = \bigsqcup_\alpha \varphi_\alpha(D^{n(\alpha)} \backslash S^{n(\alpha)})$. Diese Bilder der offenen Bälle heißen die **Zellen** unseres CW-Komplexes;

2. Für jedes α ist $\varphi_\alpha(S^{n(\alpha)})$ enthalten in einer endlichen Vereinigung von Bildern von anderen φ_β mit $n(\beta) < n(\alpha)$;

3. Der Raum X trägt die finale Topologie in Bezug auf die Familie der $\varphi_\alpha : D^{n(\alpha)} \to X$.

Die zweite Bedingung heißt auf Englisch „closure finiteness“, die Dritte „weak topology“, daher die Terminologie. Große Vorsicht ist bei Produkten angesagt: Das Produkt von zwei CW-Komplexen mit seiner offensichtlichen Zellstruktur muß keineswegs wieder ein CW-Komplex sein, sondern kann mehr offene Teilmengen haben als die finale Topologie zur offensichtlichen Zellstruktur. Mehr Details stehen bei Hatcher.

Ergänzende Übung 1.7.35. Gegeben ein CW-Komplex X ist die Vereinigung $X^{\leq n}$ aller Zellen der Dimension $\leq n$ abgeschlossen. Sie heißt das **n-Skelett** unseres CW-Komplexes.

Ergänzende Übung 1.7.36. Ein Kompaktum in einem CW-Komplex trifft höchstens endlich viele Zellen. Hinweis: Eine Teilmenge, die jede Zelle nur in endlich vielen Punkten trifft, ist diskret.

1.8 Abzählbar basierte Einsmannigfaltigkeiten*

1.8.1. Dieser Abschnitt ist für das Weitere entbehrlich. Er dient im Wesentlichen dazu, den Leser davon zu überzeugen, daß die bisher entwickelten abstrakten Begriffsbildungen immer noch eine enge Beziehung zur Anschauung haben.

Satz 1.8.2 (Klassifikation kompakter Einsmannigfaltigkeiten). *Jede zusammenhängende kompakte topologische Einsmannigfaltigkeit ist homöomorph zur Kreislinie S^1.*

1.8.3. Weitere Resultate in dieser Richtung kann man etwa in [FR84, p. 139] finden. Wir schicken dem eigentlichen Beweis ein Lemma voraus.

Lemma 1.8.4. *Läßt sich ein zusammenhängender Hausdorffraum schreiben als Vereinigung von zwei offenen zu $\mathbb{R}$ homöomorphen Teilmengen, so ist er homöomorph zur Zahlengeraden $\mathbb{R}$ oder zur Kreislinie S^1.*

Beweis. Sei X unser Raum und seien $\varphi, \psi : \mathbb{R} \hookrightarrow X$ stetige offene Einbettungen, deren Bilder X überdecken. Da X zusammenhängend ist, haben wir $\varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Sicher ist $\varphi^{-1}(\psi(\mathbb{R}))$ offen in $\mathbb{R}$, folglich ist jede Zusammenhangskomponente dieser Menge ein offenes Intervall. Wäre solch eine Zusammenhangskomponente beschränkt, sagen wir von der Gestalt (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, so folgte $(\psi^{-1} \circ \varphi)((a, b)) = (\psi^{-1} \circ \varphi)([a, b])$, und da $\varphi([a, b])$ kompakt und damit abgeschlossen ist, wäre $(\psi^{-1} \circ \varphi)((a, b))$ sowohl offen als auch abgeschlossen und damit ganz $\mathbb{R}$ und es folgte $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} X$ und wir wären fertig. Wir dürfen also annehmen, jede Zusammenhangskomponente von $\varphi^{-1}(\psi(\mathbb{R}))$ sei ein unbeschränktes Intervall. Folglich besitzt dieser Raum und damit auch $\varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R})$ entweder eine oder zwei Zusammenhangskomponenten. Wir beginnen mit dem Fall einer Komponente. Indem wir notfalls φ beziehungsweise ψ durch ihre Verknüpfung mit $t \mapsto -t$ ersetzen, dürfen wir annehmen, daß es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß φ und ψ Homöomorphismen

$$(-\infty, a) \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R}) \xleftarrow{\sim} (b, \infty)$$

induzieren. Die Verknüpfung ist also streng monoton. Wäre sie streng monoton fallend, so hätten wir

$$\lim_{x \nearrow a} \varphi(x) = \varphi(a) = \psi(b) = \lim_{y \searrow b} \psi(y)$$

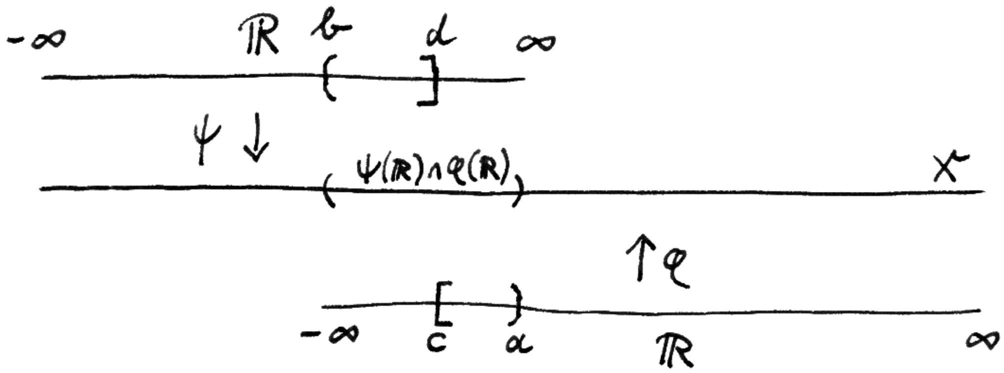


Illustration zum Beweis von 1.8.4.

im Widerspruch zur Wahl von a und b. Also ist unsere Verknüpfung streng monoton wachsend und gegeben c, d mit $\varphi(c) = \psi(d)$ haben wir

$$X = \psi((-\infty, d]) \cup \varphi([c, \infty))$$

wobei $\varphi(c) = \psi(d)$ der einzige gemeinsame Punkt dieser beiden Mengen ist. Sie sind beide abgeschlossen in X, da ihre Urbilder unter ψ und φ es sind. Daraus folgt dann, daß X homöomorph ist zu $\mathbb{R}$. Im Fall zweier Komponenten argumentieren wir analog. $\square$

Beweis von Satz 1.8.2. Sei $X = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_r$ eine offene Überdeckung durch zu $\mathbb{R}$ homöomorphe Teilmengen. Wir können die Mengen unserer Überdeckung so anordnen, daß $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_i$ für jedes $i \geq 1$ zusammenhängend ist. Ist i minimal derart, daß $U_1 \cup \ldots \cup U_i$ nicht homöomorph ist zu $\mathbb{R}$, so muß nach dem Lemma diese Vereinigung bereits homöomorph zu S^1 sein und damit als nichtleere abgeschlossene und offene Teilmenge mit ganz X zusammenfallen. $\square$

Satz 1.8.5 (Klassifikation abzählbar basierter Einsmannigfaltigkeiten). *Jede abzählbar basierte topologische Einsmannigfaltigkeit besitzt abzählbar viele Zusammenhangskomponenten und jede von diesen ist homöomorph zur Kreislinie S^1 oder zur reellen Zahlengerade $\mathbb{R}$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß jede nichtkompakte abzählbar basierte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeit M homöomorph zur reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$ ist. Per definitionem besitzt M eine abzählbare Überdeckung durch zu $\mathbb{R}$ homöomorphe offene Teilmengen $M = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$. Wir greifen willkürlich ein $I \in \mathcal{I}$ heraus und nennen es $U_0 := I_0$. Gilt $U_0 = M$, so sind wir fertig und setzen nur proForma $U_1 := U_0$. Andernfalls muß es es, da M zusammenhängend vorausgesetzt war, $I_1 \in \mathcal{I}$ geben mit $U_0 \cap I_1 \neq \emptyset$. Nach 1.8.4 ist $U_0 \cup I_1$ homöomorph zu S^1 oder zu $\mathbb{R}$. Im ersteren Fall wäre $U_0 \cup I_1$ kompakt, also abgeschlossen, also ganz M im Widerspruch zu unserer Annahme. Also gilt $U_0 \cup I_1 \cong \mathbb{R}$ und wir setzen $U_1 := U_0 \cup I_1$. So machen wir immer weiter und finden eine Überdeckung

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$$

durch eine Folge von zu $\mathbb{R}$ homöomorphen offenen Teilmengen

$$U_0 \subset U_1 \subset \ldots$$

Offensichtlich finden wir dann eine monoton fallende Folge a_n und eine monoton wachsende Folge b_n in $\mathbb{R}$ und mit den Einbettungen verträgliche Homöomorphismen $(a_n, b_n) \xrightarrow{\sim} U_n$. Der Satz folgt. $\square$

1.9 Topologisches Exponentialgesetz

Definition 1.9.1. Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\mathrm{Top}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y. Gegeben Teilmengen $K \subset X$ und $U \subset Y$ bezeichne

$$\mathcal{O}(K, U) \subset \mathrm{Top}(X, Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(K) \subset U$. Die auf $\mathrm{Top}(X, Y)$ von den Mengen $\mathcal{O}(K, U)$ für $K \subset X$ kompakt und $U \Subset Y$ offen erzeugte Topologie heißt wie in [AN3] 3.10.2 die **kompakt-offene Topologie**. Wir denken uns Räume stetiger Abbildungen im Zweifelsfall stets mit dieser Topologie versehen und verwenden für den so entstehenden topologischen Raum die Notation

$$\mathcal{C}(X, Y)$$

1.9.2 (**Diskussion der Notation**). Manche Quellen verwenden die Notation $Y^X = \mathcal{C}(X, Y)$. Ich will versuchen, diese exponentielle Schreibweise zu vermeiden. Sie hat den Nachteil, daß in wieder anderen Quellen die Notation Y^X vielmehr die Menge aller Abbildungen $\mathrm{Ens}(X, Y)$ bezeichnet.

Lemma 1.9.3 (Funktorialitäten). *Gegeben stetige Abbildungen $f : X' \to X$ und $g : Y \to Y'$ sind auch die induzierten Abbildungen $(\circ f) : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X', Y)$ und $(g\circ) : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Y')$ stetig.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus $(\circ f)^{-1}\mathcal{O}(K', U) = \mathcal{O}(f(K), U)$. Die zweite Behauptung folgt aus $(g\circ)^{-1}\mathcal{O}(K, U') = \mathcal{O}(K, g^{-1}(U'))$. □

1.9.4. Unter einer **Eigenschaft** von Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$ versteht man formal einen Funktor $\mathcal{C}^\times \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ von der Isomorphismenkategorie von $\mathcal{C}$ in die diskrete Kategorie der zweielementigen Menge der Wahrheitswerte.

Definition 1.9.5. Sei (E) eine Eigenschaft topologischer Räume. Sagen wir, ein topologischer Raum X sei **lokal** (E), so meinen wir, daß sich jede Umgebung eines beliebigen Punkts von X verkleinern läßt zu einer Umgebung desselben Punktes, die als topologischer Raum mit der induzierten Topologie die Eigenschaft (E) hat.

Beispiel 1.9.6. Speziell heißt ein topologischer Raum **lokal kompakt**, wenn sich jede Umgebung eines jeden seiner Punkte zu einer kompakten Umgebung des besagten Punktes verkleinern läßt. Diese Terminologie hatten wir bereits in [AN3] 1.10.5 eingeführt.

1.9.7 (**Diskussion der Terminologie**). In der Terminologie von Bourbaki wird von einem lokal kompakten Raum zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft gefordert. Ich schließe mich dieser Terminologie nicht an, da sie im Widerspruch steht zu der eben vereinbarten allgemeinen Bedeutung des Adjektivs „lokal“. Im Deutschen bringt man diesen Unterschied zumindest in der alten Rechtschreibung dadurch zum Ausdruck, daß man „lokalkompakt“ zusammenschreibt, wenn die Hausdorff-Bedingung mit gemeint ist.

Lemma 1.9.8. *Besitzt in einem Hausdorffraum jeder Punkt eine kompakte Umgebung, so ist unser Raum bereits lokal kompakt im Sinne von 1.9.5.*

Beweis. Seien X unser Hausdorffraum und $p \in U \subset K \subset X$ ein Punkt, eine in X offene Menge $U \Subset X$ und ein Kompaktum K. Es gilt, $V \Subset X$ zu finden mit $p \in \bar{V} \subset U$. Nach 1.5.19 finden wir $V, W \Subset K$ disjunkt mit $K \backslash U \subset W$ und $p \in V$. Aus $V \Subset K$ und $V \subset U$ folgt erst $V \Subset U$ und dann $V \Subset X$. Wir haben $\bar{V} := \mathrm{Cl}_X(V) = \mathrm{Cl}_K(V)$ und $V \cap W = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Cl}_K(V) \cap W = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Cl}_K(V) \subset U$ alias $\bar{V} \subset U$ wie gewünscht. □

Satz 1.9.9 (Exponentialgesetz, schwache Form). *Seien X, Y, Z topologische Räume. Ist Y lokal kompakt, so induziert die Bijektion aus dem Exponentialgesetz $\mathrm{Ens}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Ens}(Y, Z))$ eine Bijektion zwischen den entsprechenden Teilmengen von stetigen Abbildungen*

$$\mathrm{Top}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

1.9.10. In der Terminologie der Kategorientheorie [TF] 4.3 bedeutet dieser Satz, daß für lokal kompaktes Y der Funktor $\mathcal{C}(Y, \ ) : \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ rechtsadjungiert ist zum Funktor $\ \times Y$. In Korollar 1.9.13 folgern wir, daß die Abbildung im Satz unter der zusätzlichen Annahme, daß auch X lokal kompakt ist, sogar einen Homöomorphismus $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ induziert. Das heißt dann eigentlich erst das Exponentialgesetz aus Gründen, die dort erläutert werden. In [AN3] 3.10.4 formulieren wir bereits das sehr schwache Exponentialgesetz, nach dem für beliebige Räume X, Y, Z und $f : X \times Y \to Z$ stetig auch die induzierte Abbildung $F : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig ist. Der Beweis wird gleich wiederholt.

Beweis. Sei $f : X \times Y \to Z$ stetig und $F : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ die induzierte Abbildung. Es ist im folgenden wichtig zu unterscheiden zwischen der Abbildung F und der Abbildung $F(x) : Y \to Z$ für festes $x \in X$. Wir wiederholen zunächst, noch ohne irgendwelche Bedingungen an Y, den Beweis aus [AN3] 3.10.4, daß F stetig ist. Es reicht, diese Stetigkeit an jeder Stelle $x \in X$ zu zeigen. Gegeben $K \subset Y$ kompakt und $U \Subset Z$ offen mit $F(x) \in \mathcal{O}(K, U)$ gilt es, eine offene Umgebung V von x zu finden mit $F(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$. In der Tat folgt dann $F^{-1}(\mathcal{O}(K, U)) \Subset X$ und mit 1.7.27 die Stetigkeit von F. Nun besagt unsere Bedingung gerade $(x \times K) \subset f^{-1}(U)$. Wir finden für all $y \in K$ offene Teilmengen $V_y \Subset X$ und $W_y \Subset Y$ mit

$$(x, y) \in V_y \times W_y \subset f^{-1}(U)$$

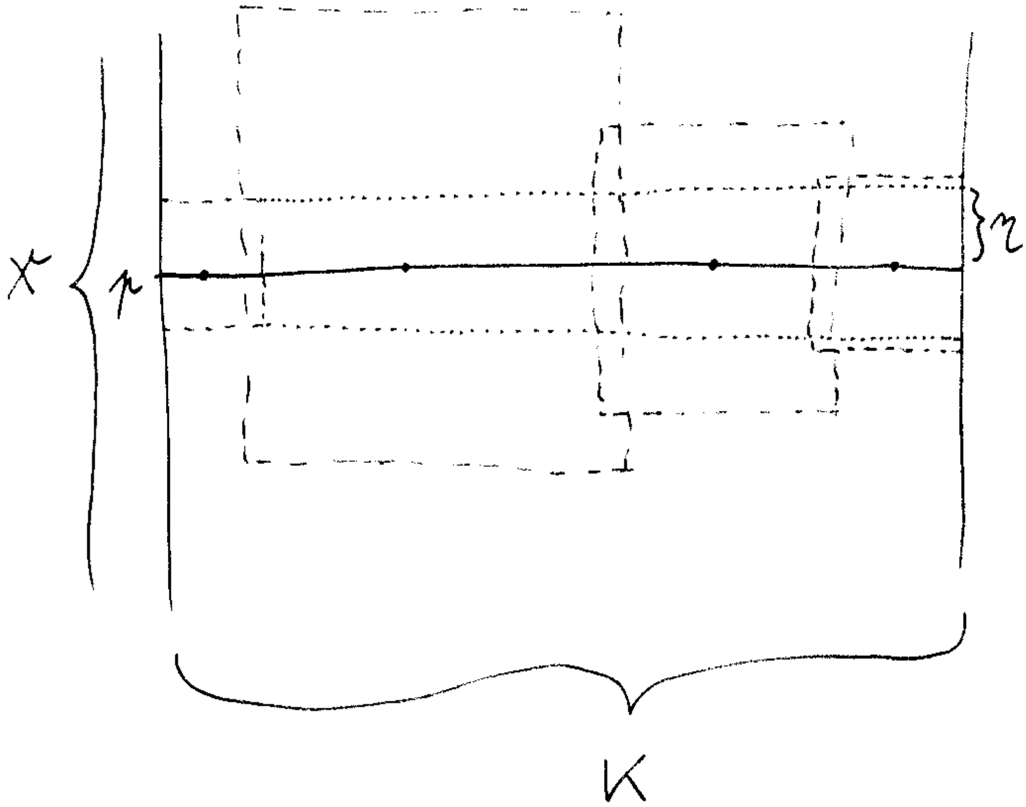


Illustration zum Beweis von Satz 1.9.9. Das Bild kommt von dem Beweis des Spezialfalls [AN1] **??**. Das p im Bild heißt in unserem Beweis x, das η im Bild ist so gewählt, daß der η-Ball um x alias p in V enthalten wäre.

Wegen der Kompaktheit von K finden wir sogar $E \subset K$ endlich mit $K \subset \bigcup_{y \in E} W_y$. Jetzt setzen wir $V := \bigcap_{y \in E} V_y$ und haben $(V \times K) \subset f^{-1}(U)$ alias $F(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$ wie gewünscht. Sei nun umgekehrt $F : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig und sei $f : X \times Y \to Z$ die induzierte Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß f stetig ist an jeder Stelle $(x, y) \in X \times Y$. Sei also $U \Subset Z$ eine offene Umgebung von $f(x, y) = (F(x))(y)$. Nach Annahme ist $F(x) : Y \to Z$ stetig und Y lokal kompakt, folglich gibt es eine kompakte Umgebung K von y mit $(F(x))(K) \subset U$ alias $F(x) \in \mathcal{O}(K, U)$. Da nun auch die Abbildung $F : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig ist bei x, gibt es dann auch eine Umgebung V von x mit $F(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$, also mit $f(V \times K) \subset U$. Damit ist $V \times K$ die gesuchte Umgebung von (x, y), die unter f nach U abgebildet wird. □

Korollar 1.9.11 (Stetigkeit des Auswertens). *Ist Y lokal kompakt und Z ein beliebiger topologischer Raum, so ist das Auswerten $\mathcal{C}(Y, Z) \times Y \to Z$ stetig.*

Beweis. Das Auswerten entspricht unter der Bijektion aus unserem Adjunktionssatz 1.9.9 der Identität auf $\mathcal{C}(Y, Z) = X$ rechts. □

Korollar 1.9.12. *Gegeben ein lokal kompakter topologischer Raum X und eine Familie topologischer Räume (Y_i) liefert die offensichtliche Abbildung einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}\left(X, \prod_i Y_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathcal{C}(X, Y_i)$$

Beweis. In kategorieller Sprache ausgedrückt besagt unser Lemma, daß der Funktor $\mathcal{C}(X, \ ) : \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ verträglich ist mit Produkten. Das folgt mit der Adjunktion 1.9.9 unmittelbar aus der allgemeinen Erkenntnis [TS] 7.1.30, daß ein rechtsadjungierter Funktor stets mit Limites vertauscht. □

Korollar* 1.9.13 (Exponentialgesetz). *Seien X, Y, Z topologische Räume. Sind X und Y lokal kompakt, so induziert unser Exponentialgesetz für Mengen einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

Ergänzung 1.9.14. In der anderen Schreibweise liest sich das $Z^{X \times Y} \xrightarrow{\sim} (Z^Y)^X$, daher die Terminologie. Ich benutze diese Aussage im weiteren nicht und zeige sie nur der Vollständigkeit halber.

Beweis. Die Stetigkeit dieser Abbildung ist nach 1.9.9 gleichbedeutend erst zur Stetigkeit der induzierten Abbildung $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \to \mathcal{C}(Y, Z)$ und durch erneutes Anwenden von 1.9.9 auch zur Stetigkeit der induzierten Abbildung $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \times Y \to Z$. Diese Stetigkeit folgt jedoch aus 1.9.11, da mit X und Y auch $X \times Y$ lokal kompakt ist. Also ist die im Korollar betrachtete Bijektion stetig und es bleibt nur noch, die Stetigkeit ihrer Umkehrabbildung zu zeigen. Die Stetigkeit dieser Umkehrabbildung ist jedoch nach 1.9.9 gleichbedeutend zur Stetigkeit der induzierten Abbildung $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \times Y \to Z$, die hinwiederum stetig sein muß als die Verknüpfung von zwei nach 1.9.9 stetigen Abbildungen $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \times Y \to \mathcal{C}(Y, Z) \times Y \to Z$. □

Proposition 1.9.15. *Ist $p : X \to Y$ final und surjektiv und Z lokal kompakt, so ist auch $p \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ final und surjektiv.*

1.9.16. Wir geben in [TS] 3.4.7 noch einen direkteren Beweis für dieselbe Aussage.

Beweis. Sei W ein topologischer Raum und $g : Y \times Z \to W$ eine Abbildung. Ist $g \circ (p \times \mathrm{id}) : X \times Z \to W$ stetig, so nach 1.9.9 auch die induzierte Abbildung $X \to \mathcal{C}(Z, W)$. Diese Abbildung faktorisiert jedoch als $X \to Y \to \mathcal{C}(Z, W)$ mit p als erstem Pfeil und der von g induzierten Abbildung als zweitem Pfeil, da wir p surjektiv vorausgesetzt hatten. Ist zusätzlich p final, so ist folglich mit $g \circ (p \times \mathrm{id})$ auch die von g induzierte Abbildung $Y \to \mathcal{C}(Z, W)$ stetig und damit nach 1.9.9 wiederum g selbst. □

Ergänzung 1.9.17. Ein Raum Y heißt **kompakt erzeugt**, wenn er Hausdorff ist und wenn die offensichtliche Abbildung $\bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} K \to Y$ final ist, für $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(Y)$ das System aller kompakten Teilräume, vergleiche etwa [**?**]. Man kann zeigen, daß es in der Kategorie der kompakt erzeugten Räume Produkte gibt, die allerdings nicht mit den üblichen Produkten in der Kategorie aller topologischen Räume übereinstimmen, daß das Darankreuzen einen Rechtsadjungierten hat, der allerdings nicht mit dem Raum der stetigen Abbildungen und seiner kompakt-offenen Topologie übereinstimmt, und daß in dieser Begrifflichkeit auch eine Variante des Exponentialgesetzes gilt.

Übungen

Übung 1.9.18. Ist X ein kompakter topologischer Raum, so stimmt die kompakt-offene Topologie auf $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ überein mit der von der Supremumsnorm induzierten Topologie.

Übung 1.9.19. Gegeben topologische Räume X, Y ist diejenige Abbildung $Y \to \mathcal{C}(X, Y)$ stetig, die jedem Punkt $y \in Y$ die entsprechende konstante Abbildung zuordnet, die eben ganz X auf diesen einen Punkt y wirft.

Übung 1.9.20. Gegeben topologische Räume X, Y mit X lokal kompakt ist das Auswerten eine stetige Abbildung $X \to \mathcal{C}(\mathcal{C}(X, Y), Y)$. Hinweis: Man verwende die Stetigkeit des Auswertens 1.9.11 und das sehr schwache Exponentialgesetz 1.9.10.

Übung 1.9.21. Die stetigen Abbildungen von einem lokal kompakten topologischen Raum in einen topologischen Vektorraum bilden unter der punktweisen Verknüpfung und mit der kompaktoffenen Topologie selbst einen topologischen Vektorraum. Hinweis: 1.9.12.

Übung 1.9.22. Ist $Y \to Y'$ initial und X ein beliebiger topologischer Raum, so ist auch $\mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Y')$ initial.

Ergänzende Übung 1.9.23. Man zeige, daß für jeden lokal kompakten Raum Y die Verknüpfung $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$ stetig ist. Hinweis: Gegeben $Q \subset V \Subset Y$ eine kompakte Teilmenge in einer offenen Teilmenge gibt es unter unseren Annahmen stets eine kompakte Teilmenge $R \subset Y$ und eine offene Teilmenge $W \Subset Y$ mit $Q \subset W \subset R \subset V$. Sind X und Y lokal kompakt, folgt das auch leicht aus dem schwachen Exponentialgesetz 1.9.9 und der Stetigkeit des Auswertens 1.9.11.

Übung 1.9.24. Ich erinnere an unsere Abkürzung $\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(X)$. Man zeige: Ist X ein lokal kompakter Raum und $F : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{C}$ differenzierbar nach der ersten Variablen mit stetiger partieller Ableitung $\partial F : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{C}$, so gilt für die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(X)$, $t \mapsto F(t, \ )$ im topologischen Vektorraum $\mathcal{C}(X)$ die Identität

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = (\partial F)(0, \ )$$

Analoges gilt für Abbildungen $F : \mathbb{R} \times X \to V$ in einen beliebigen normierten reellen Vektorraum.

Übung 1.9.25. Jede stetige Surjektion $f : X \twoheadrightarrow Y$ auf einen lokal kompakten Hausdorffraum derart, daß alle Urbilder unter f von Kompakta wieder kompakt sind, ist final. Hinweis: Finalität von Restriktionen 1.7.14 und Lokalität von Finalität in der Basis 1.7.20.

2 Topologie und algebraische Strukturen

2.1 Topologische Gruppen

2.1.1. Ich erinnere an die Produkttopologie 1.6.17. Im folgenden denken wir uns alle Produkte von topologischen Räumen mit dieser Topologie vershehen.

Definition 2.1.2. Ein **topologisches Magma** ist ein Magma M mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $M \times M \to M$ stetig ist.

Definition 2.1.3. Ein **topologisches Monoid** ist ein Monoid M mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $M \times M \to M$ stetig ist.

Definition 2.1.4. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \to G$ und die Inversenabbildung $G \to G$ stetig sind.

2.1.5 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Autoren fordern von ihren topologischen Gruppen zusätzlich auch noch die Hausdorff-Eigenschaft, aber ich schließe mich dieser Konvention nicht an und nenne eine hausdorffsche topologische Gruppe kurz eine **Hausdorffgruppe**.

Ergänzung 2.1.6. Segal und Nikolov haben gezeigt, daß eine kompakte Hausdorffgruppe keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus auf eine unendliche aber endlich erzeugte Gruppe besitzen kann. Gemeint sind hier Homomorphismen von abstrakten Gruppen, also nach Vergessen der Topologie.

Beispiele 2.1.7. Die Gruppen $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ sind topologische Gruppen in der von der natürlichen Topologie auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum aller reellen $(n \times n)$-Matrizen induzierten Topologie. Jeder normierte Vektorraum ist mit der Addition als Verknüpfung und der metrischen Topologie eine topologische Gruppe.

2.1.8 (**Stetigkeit von Translationen**). Gegeben ein topologisches Magma M ist die Linkstranslation $(x\cdot) : M \to M$ stetig als die Verknüpfung

$$M \xrightarrow{(x,\mathrm{id})} M \times M \to M$$

mit x der entsprechenden konstanten Abbildung $M \to M$, die ja stets stetig ist. In derselben Weise folgt, daß auch die Rechtstranslationen $(\cdot x)$ stetig sind und daß im Fall einer topologischen Gruppe alle Translationen und ebenso die Konjugationen $g \mapsto xgx^{-1}$ für alle x Homöomorphismen sind.

2.1.9. Jede offene Untergruppe einer topologischen Gruppe ist auch abgeschlossen als das Komplement der Vereinigung ihrer nichttrivialen Linksnebenklassen.

Lemma 2.1.10. *Eine zusammenhängende topologische Gruppe wird von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt.*

Beweis. In der Tat erzeugt in jeder topologischen Gruppe jede Umgebung des neutralen Elements eine offene Untergruppe. Nach 2.1.9 ist diese offene Untergruppe auch abgeschlossen. Ist unsere Gruppe zusammenhängend, so muß sie also bereits mit besagter Untergruppe übereinstimmen. □

Ergänzung 2.1.11. Ein stetiger Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in eine topologische Gruppe heißt ein **Gruppenweg** in unserer topologischen Gruppe. In der Literatur ist auch die Bezeichnung als **Einparameteruntergruppe** gebräuchlich. In [AN1] **??** bestimmen wir die Gruppenwege in der additiven Gruppe eines normierten reellen Vektorraums, in [ML] 1.4.5 die Gruppenwege in Matrixliegruppen.

Ergänzung 2.1.12. Gegeben eine Umgebung $U \subset G$ des neutralen Elements einer topologischen Gruppe gibt es stets eine weitere Umgebung $V \subset G$ des neutralen Elements mit $V^2 \subset U$ alias $xy \in U \ \forall x, y \in V$. In der Tat gibt es eine Umgebung von $(1, 1)$ in $G \times G$, die unter der Verknüpfung in U landet, und jede solche Umgebung umfaßt eine Umgebung der Gestalt $A \times B$ für Umgebungen A, B von $1 \in G$. Der Schnitt $A \cap B$ ist dann die gesuchte Umgebung V des neutralen Elements.

Übungen

Übung 2.1.13. Ist G eine Hausdorffgruppe und $A \subset G$ eine abelsche Untergruppe, so ist auch der Abschluß $\bar{A}$ unserer Untergruppe abelsch. In der Tat folgt aus $aba^{-1}b^{-1} = 1$ für alle $a, b \in A$ dasselbe zunächst für alle $a \in A, b \in \bar{A}$ und dann für alle $a, b \in \bar{A}$.

Übung 2.1.14. Man zeige, daß eine zusammenhängende topologische Gruppe mit einer abzählbar basierten Umgebung des neutralen Elements stets abzählbar basiert ist. Hinweis: Gegeben eine offene Teilmenge $U \Subset G$ ist die Multiplikation $U^n \to G$ stets offen.

Übung 2.1.15. Jede Untergruppe einer topologischen Gruppe ist mit der induzierten Topologie selbst eine topologische Gruppe. Jedes Produkt topologischer Gruppen ist mit der Produkttopologie wieder eine topologische Gruppe.

Ergänzende Übung 2.1.16. Die Einheiten jeder Banach-Algebra bilden mit der metrischen Topologie eine topologische Gruppe. Die unitären Automorphismen eines Hilbertraums bilden eine abgeschlossene Untergruppe in der Einheitengruppe der Banach-Algebra der beschränkten Operatoren auf unserem Hilbertraum.

Übung 2.1.17. Ein Gruppenhomomorphismus von topologischen Gruppen ist stetig genau dann, wenn er stetig ist beim neutralen Element.

Übung 2.1.18. Gegeben eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist auch ihr Abschluß eine Untergruppe.

Übung 2.1.19. In jeder topologischen Gruppe ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements eine Untergruppe, ja sogar ein Normalteiler. Man nennt sie meist die **Einszusammenhangskomponente** oder kurz **Einskomponente**. Die Einskomponente einer topologischen Gruppe G wird G° notiert.

Übung 2.1.20. In einer topologischen Gruppe erzeugt jede zusammenhängende Umgebung der Eins die Einskomponente.

Übung 2.1.21. Jeder diskrete Normalteiler einer zusammenhängenden topologischen Gruppe liegt bereits im Zentrum besagter Gruppe.

Übung 2.1.22. Sei G eine Gruppe mit einer Topologie. Sind die Translationen $(g\cdot) : G \to G$ und $(\cdot g) : G \to G$ stetig für alle $g \in G$, ist die Inversenbildung stetig beim neutralen Element e, und ist die Verknüpfung $G \times G \to G$ stetig bei (e, e), so ist G eine topologische Gruppe.

Übung 2.1.23. Ein **topologischer Schiefkörper** ist ein Schiefkörper k mit einer Topologie derart, daß die Addition und die Multiplikation stetig sind als Abbildungen $k \times k \to k$ sowie, für die auf $k^\times$ induzierte Topologie, auch das Bilden des Inversen $k^\times \to k^\times$. Man zeige, daß für einen Hausdorff'schen topologischen Schiefkörper k die Gruppen $\mathrm{GL}(d; k)$ topologische Gruppen sind.

Ergänzende Übung 2.1.24. Jede topologische Gruppe, die homöomorph ist zur additiven Gruppe $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, ist bereits als topologische Gruppe isomorph zur Gruppe $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Übung 2.1.25. Ist G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine diskrete Untergruppe, so gibt es eine Umgebung $U \subset G$ des neutralen Elements derart, daß die Multiplikation eine Injektion $H \times U \hookrightarrow G$ induziert. In einer Hausdorffgruppe ist jede diskrete Untergruppe abgeschlossen. Hinweis: Man verwende 2.1.12 und führe für den zweiten Teil die Annahme $\bar{H} \neq H$ zum Widerspruch.

Übung 2.1.26. Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ die Gruppe seiner unitären Automorphismen. Man zeige, daß $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ eine topologische Gruppe wird, wenn wir sie mit der Initialtopologie zu allen Auswertungen an Vektoren $\mathrm{ev}_v : \mathrm{U}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ für $v \in \mathcal{H}$ versehen, der sogenannten **starken Topologie**. Man zeige weiter: Ist G eine topologische Gruppe und $\alpha : G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine Operation durch unitäre Abbildungen, so ist α genau dann stetig, wenn der induzierte Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ stetig ist für die starke Operatortopologie auf $\mathrm{U}(\mathcal{H})$.

Übung 2.1.27. Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ die Gruppe seiner unitären Automorphismen. Man zeige, daß auf $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ die starke Topologie übereinstimmt mit der sogenannten **schwachen Topologie**, die definiert ist als Initialtopologie zu allen Abbildungen $\mathrm{U}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$, $A \mapsto \langle w, Av \rangle$ für $v, w \in \mathcal{H}$. Hinweis: Mit

$|\langle v, Av\rangle - \langle v, v\rangle|$ ist auch $\|v - Av\|$ klein. Man zeige weiter: Ist $\mathcal{H}$ abzählbar basiert, so auch $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ mit seiner starken Topologie.

Übung 2.1.28. Die stetigen Abbildungen von einem lokal kompakten topologischen Raum in eine topologische Gruppe bilden unter der punktweisen Verknüpfung und mit der kompakt-offenen Topologie selbst eine topologische Gruppe. Hinweis: 1.9.12.

2.2 Quotienten nach Gruppenwirkungen

2.2.1. Eine Operation $M \times X \to X$ eines topologischen Monoids auf einem topologischen Raum heißt **stetig**, wenn sie stetig ist in Bezug auf die Produkttopologie auf $M \times X$. Denken wir uns hier M mit der diskreten Topologie versehen, so sprechen wir von einer **Operation durch stetige Abbildungen**.

2.2.2. Stetige Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ final für beliebiges Z nennen wir **produktfest final**. Jede stetige offene Surjektion ist final nach 1.7.16 und bleibt unter dem Darankreuzen beliebiger Identitäten nach 1.6.25 eine stetige offene Surjektion. Stetige offene Surjektionen sind mithin produktfest final.

2.2.3. Operiert eine Gruppe G auf einem topologischen Raum X, so versehen wir den **Bahnenraum** X/G a priori mit der Quotiententopologie zur Projektion $X \twoheadrightarrow X/G$.

Lemma 2.2.4 (**Gruppenquotienten**). *Operiert eine Gruppe G durch stetige Abbildungen auf einem topologischen Raum X, so ist die Quotientenabbildung $\pi : X \twoheadrightarrow X/G$ eine stetige offene Surjektion und insbesondere produktfest final. Ist G endlich, so ist π zusätzlich abgeschlossen.*

2.2.5. Operiert eine Gruppe G durch stetige Abbildungen auf einem topologischen Raum X, so ist nach 2.2.2 insbesondere für jeden weiteren Raum Y die induzierte Abbildung $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times X/G$ final. Mithin ist die Identität ein Homöomorphismus $(Y \times X)/G \xrightarrow{\sim} Y \times X/G$.

Beweis. Das Urbild des Bildes einer Teilmenge $U \subset X$ ist die Vereinigung all ihrer mit der Gruppenoperation verschobenen Kopien, $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$. Aus $U \circledcirc X$ folgt so $\pi^{-1}(\pi(U)) \circledcirc X$ und damit $\pi(U) \circledcirc X/G$. □

Beispiel 2.2.6. Die offensichtliche Operation von $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R})$ auf $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ ist stetig für die Topologie auf $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ als Bahnenraum der Operation von $\mathbb{R}^\times$ auf $\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$. Um das zu sehen, betrachte man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0 & \to & \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^n\mathbb{R} & \to & \mathbb{P}^n\mathbb{R} \end{array}$$

Die obere Horizontale ist offensichtlich stetig und die linke Vertikale ist final nach 2.2.2, da die Quotientenabbildung nach Lemma 2.2.4 produktfest final ist. Mithin ist auch die untere Horizontale stetig.

Definition 2.2.7. Ein topologischer Raum X mit einer stetigen transitiven Operation einer topologischen Gruppe G heißt ein **homogener G-Raum**.

Lemma 2.2.8 (Quotienten als homogene Räume). *Gegeben eine topologische Gruppe G und eine Untergruppe $H \subset G$ ist die Operation von G auf G/H stetig.*

Beweis. Man betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times G/H & \to & G/H \end{array}$$

und beachte, daß die linke Vertikale nach 2.2.4 final ist. □

2.2.9. Gegeben eine Menge X mit einer transitiven Operation einer topologischen Gruppe G gibt es offensichtlich genau eine Topologie auf X derart, daß für jeden Punkt $x \in X$ das Anwenden $G \to X$, $g \mapsto gx$ eine finale Abbildung ist. Wir nennen sie die **feinste Topologie als homogener Raum** auf X. In der Tat ist für jeden Punkt $x \in X$ die offensichtliche Bijektion $G/G_x \xrightarrow{\sim} X$ automatisch stetig und ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn X die feinste Topologie als homogener Raum trägt.

Proposition 2.2.10 (Quotienten nach abgeschlossenen Untergruppen). *Eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist abgeschlossen genau dann, wenn der Quotient nach unserer Untergruppe Hausdorff ist.*

Beweis. Seien $G \supset H$ besagte Gruppen. Ist der Quotient G/H Hausdorff, so sind seine Punkte abgeschlossen und damit ist auch H abgeschlossen in G als Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von G/H. Für die Umkehrung gilt es nach 1.6.22 zu zeigen, daß die Diagonale $\Delta_{G/H}$ in $G/H \times G/H$ abgeschlossen ist. Das Produkt der Projektionen $G \times G \to G/H \times G/H$ ist als Produkt offener stetiger Surjektionen auch selbst final. Es reicht also zu zeigen, daß das Urbild der Diagonale $\Delta_{G/H}$ in $G \times G$ abgeschlossen ist. Dies Urbild kann aber auch beschrieben werden als das Urbild von H unter der Abbildung $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ und ist abgeschlossen, wenn H abgeschlossen ist. □

2.2.11 (**Zusammenhangskomponenten von Bahnenräumen**). Operiert eine zusammenhängende topologische Gruppe G stetig auf einem topologischen Raum X, so ist X zusammenhängend genau dann, wenn X/G zusammenhängend ist. Operiert allgemeiner eine zusammenhängende topologische Gruppe G stetig auf einem topologischen Raum X, so induziert die Quotientenabbildung $X \twoheadrightarrow X/G$ eine Bijektion zwischen der Menge $\mathrm{Zus}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ der Zusammenhangskomponenten von X und der Menge $\mathrm{Zus}(X/G) \subset \mathcal{P}(X/G)$ der Zusammenhangskomponenten von X/G. Das alles folgt sofort aus Übung 1.7.29 über finale Abbildungen und Zusammenhang.

Beispiel 2.2.12 (**Zusammenhang der speziellen orthogonalen Gruppen**). Die Gruppen $\mathrm{SO}(n)$ sind zusammenhängend. In der Tat folgt mit der Finalität 1.7.17 stetiger Surjektionen von kompakten Räumen auf Hausdorffräume, daß die Operation auf der n-Sphäre S^n einen Homöomorphismus $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \xrightarrow{\sim} S^n$ liefert, und mit Induktion über n und 2.2.11 folgt die Behauptung. In derselben Weise zeigt man, daß auch die Gruppen $\mathrm{SU}(n)$ zusammenhängend sind. Ein Beweis mit mehr Algebra und weniger Topologie wird in [AN2] 8.5.19 skizziert.

Übungen

Übung 2.2.13. Ist $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine stetige offene Surjektion von topologischen Räumen, die äquivariant ist für Operationen einer Gruppe G auf beiden Räumen, in Formeln $f(gx) = gf(x)$, und ist G mit einer Topologie versehen, für die die Operation auf X stetig ist, so ist auch die Operation auf Y stetig. Hinweis: 2.2.8.

Übung 2.2.14. Operiert eine kompakte Hausdorffgruppe stetig auf einem lokal kompakten Hausdorffraum, so ist auch der Bahnenraum Hausdorff. Hinweis: Man beginne mit einem Punkt aus einer von zwei Bahnen und wähle dazu eine kompakte Umgebung, die die andere Bahn nicht trifft. Die Aussage gilt im übrigen auch ohne die Annahme lokal kompakt nach 2.4.5, aber dann kenne ich keinen so direkten Beweis.

Übung 2.2.15. Gegeben eine topologische Gruppe G und eine normale Untergruppe $N \subset G$ ist der Quotient G/N mit seiner Quotiententopologie und der induzierten Verknüpfung eine topologische Gruppe.

Übung 2.2.16. Operiert eine topologische Gruppe G stetig auf einem topologischen Raum X und ist $N \subset G$ ein Normalteiler, dessen Elemente X punktweise festhalten, so ist auch die induzierte Operation von G/N auf X stetig.

Übung 2.2.17. Gegeben $G \supset H \supset K$ eine topologische Gruppe mit zwei Normalteilern ist der Isomorphismus aus dem noetherschen Isomorphiesatz [LA2] 4.2.15 ein Homöomorphismus $G/H \xrightarrow{\sim} (G/K)/(H/K)$.

Übung 2.2.18. Man zeige, daß die Einbettung $\mathrm{U}(n) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ einen Homöomorphismus $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ induziert.

Übung 2.2.19. Der Abschluß des neutralen Elements in einer topologischen Gruppe ist stets ein Normalteiler und der Quotient danach eine Hausdorffgruppe und die Surjektion auf den Quotienten nicht nur final, sondern auch initial.

Übung 2.2.20. Seien X ein topologischer Raum und $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Ist X/R Hausdorff, so ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen. Ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen und $X \twoheadrightarrow X/R$ offen, so ist X/R Hausdorff. Hinweis: Jede stetige offene Surjektion ist produktfest final.

Übung 2.2.21. Ist $Y \to X$ eine initiale stetige G-äquivariante Abbildung von topologischen Räumen mit einer stetigen Operation einer Gruppe G, so ist auch die induzierte Abbildung $Y/G \to X/G$ initial. Hinweis: Es gilt zu zeigen, daß jede für die Quotiententopologie auf Y/G offene Menge auch für die Initialtopologie offen ist.

Ergänzende Übung 2.2.22 (**Zusammenhangskomponenten von** $\mathrm{SO}(p,1)$). Gegeben $p, q \in \mathbb{N}$ betrachte man die Diagonalmatrizen mit p Einsen und q Minus--Einsen $J = J_{p,q} := \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ und erkläre Gruppen

$$\mathrm{GO}(p,q) \supset \mathrm{O}(p,q) \supset \mathrm{SO}(p,q)$$

wie folgt: $\mathrm{O}(p,q) := \{A \in \mathrm{GL}(p+q;\mathbb{R}) \mid A^\top J A = J\}$, $\mathrm{SO}(p,q) := \{A \in \mathrm{O}(p,q) \mid \det A = 1\}$, und $\mathrm{GO}(p,q) := \mathbb{R}^\times \mathrm{O}(p,q)$. Im Spezialfall $q = 1$ betrachten wir die Quadrik $Q := \{v \in \mathbb{R}^{p+1} \mid v^\top J v = -1\}$. Man zeige, daß sie genau zwei Komponenten hat. Wir erklären weiter

$$\mathrm{SO}(p,1)^+ \subset \mathrm{O}(p,1)^+$$

als die Gruppe aller Elemente von $\mathrm{SO}(p,1)$ beziehungsweise $\mathrm{O}(p,1)$, die beide Komponenten von Q stabilisieren. Man zeige, daß $\mathrm{SO}(p,1)^+$ die Einskomponente von $\mathrm{O}(p,1)$ ist. Hinweis: Der Satz von Witt [LA2] 2.4.2 zeigt, daß $\mathrm{O}(p,1)$ transitiv auf Q operiert. Etwas Nachdenken zeigt dasselbe für $\mathrm{SO}(p,1)$ unter der Annahme $p > 0$. In diesem Fall zeige man, daß wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$(\det, \mathrm{komp}) : \mathrm{O}(p,1) \twoheadrightarrow \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$$

erhalten, wo komp erklärt sei durch $\mathrm{komp}(g) = 1$, wenn g beide Komponenten von Q stabilisiert.

Übung 2.2.23. Der Quotient G/G° einer Gruppe nach ihrer Einskomponente heißt die **Komponentengruppe** von G. Ist G° offen in G, so ist besagte Komponentengruppe diskret. Ist G außerdem kompakt, so ist die Komponentengruppe endlich. Gegeben ein stetiger surjektiver Gruppenhomomorphismus einer kompakten Gruppe mit endlicher Komponentengruppe in eine Hausdorffgruppe ist das Bild der Einskomponente die Einskomponente.

Übung 2.2.24 (**Realisierung von** $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ **durch Matrizen**). Wir betrachten die Menge $Y \subset \mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$ aller positiv definiten Matrizen mit der Determinante Eins und fassen sie auf als eine Menge von Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^2$.

Sie trägt eine transitive Wirkung von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ durch die Vorschrift $A \cdot S := ASA^\top$ und die Standgruppe der Einheitsmatrix alias des Standardskalarprodukts ist $\mathrm{SO}(2)$. Also erhalten wir eine Bijektion $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}(2) \xrightarrow{\sim} Y$ durch $A \mapsto AA^\top$. Sie besitzt eine stetige Spaltung, die wir etwa erhalten können, indem wir jedem Skalarprodukt die Matrix zuordnen, in deren Spalten die Vektoren derjenigen Orthonormalbasis stehen, die in ihm aus der Standardbasis durch das Gram-Schmidt-Verfahren entsteht. Folglich ist die von $\mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$ induzierte Topologie auf Y auch in der Tat die feinste Topologie als homogener Raum. Diese Realisierung ist eng verwandt zur Polarzerlegung [LA2] 1.12.23. Eine alternative Realisierung als obere Halbebene besprechen wir in 2.3.16.

Übung 2.2.25. Gegeben ein Körper $\mathbb{K}$ erinnere man aus [LA2] 5.6.1 die Bruhat-Zerlegung

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})/B = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB/B$$

für B die invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen und zeige für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ die Existenz von Homöomorphismen $BwB/B \cong \mathbb{K}^{l(w)}$ für $l(w)$ die Zahl der Fehlstände der Permutation w.

2.3 Projektive Räume

Beispiele 2.3.1. Die wichtigsten hausdorffschen topologischen Schiefkörper sind für uns im folgenden der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$.

Definition 2.3.2. Die **projektiven Räume** $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ für $n \geq 0$ und einen hausdorffschen topologischen Schiefkörper $\mathbb{K}$ erhält man als die Menge aller Ursprungsgeraden oder genauer aller von einem von Null verschiedenen Element erzeugten Rechtsuntermoduln in $\mathbb{K}^{n+1}$. Wir versehen unsere projektiven Räume mit der Quotiententopologie bezüglich der offensichtlichen Surjektionen

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{K}^{n+1}\backslash 0 & \twoheadrightarrow & \mathbb{P}^n\mathbb{K} \\ & x & \mapsto & x\mathbb{K} \end{array}$$

Die natürliche Operation von $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K})$ auf $\mathbb{K}^{n+1}$ induziert eine Operation von $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K})$ auf $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$, von der man wie in 2.2.6 sieht, daß sie stetig sein muß.

Lemma 2.3.3. *Gegeben ein hausdorffscher topologischer Schiefkörper $\mathbb{K}$ stimmt auf $\mathbb{K}^d\backslash 0$ die von $\mathbb{K}^d$ induzierte Topologie überein mit der feinsten Topologie als homogener Raum von $\mathrm{GL}(d;\mathbb{K})$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß das Anwenden auf den ersten Vektor der Standardbasis $\pi : A \mapsto A\,\mathrm{e}_1$ eine finale Abbildung $\mathrm{GL}(d;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^d\backslash 0$ ist. Da Finalität nach 1.7.20 lokal ist in der Basis, reicht es, für jeden Vektor $v \neq 0$ eine offene Umgebung U zu finden derart, daß $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ final ist. Nach 1.7.5 reicht es, besagte offene Umgebung U so zu finden, daß $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ einen stetigen Schnitt besitzt. Dazu wählen wir zu unserem von Null verschiedenen Vektor v eine invertierbare Matrix $A = (v|a_2|\ldots|a_d)$ mit erster Spalte v und nehmen als $U := \mathbb{K}^d \backslash \langle a_2, \ldots, a_d \rangle$ das Komplement des Rechtserzeugnisses ihrer anderen Spalten und als stetigen Schnitt auf U die Abbildung $w \mapsto (w|a_2|\ldots|a_d)$, die jedem $w \in U$ diejenige Matrix zuordnet, die aus A entsteht beim Ersetzen der ersten Spalte durch w. Die Hausdorffeigenschaft haben wir dabei implizit verwendet, um zu sehen, daß das Erzeugnis $\langle a_2, \ldots, a_d \rangle$ abgeschlossen ist. □

2.3.4. Alternativ könnte man argumentieren, daß unsere Abbildung π eine stetige offene Surjektion ist, weil sie lokal stetige Schnitte besitzt. Bei dieser Argumentation braucht man weniger Wissen über finale Abbildungen.

2.3.5 (**Existenz globaler Schnitte**). Der Beweis von Lemma 2.3.3 beruht auf der Erkenntnis, daß die Abbildung, die jeder invertierbaren Matrix ihre erste Spalte zuordnet, lokal stetige Schnitte besitzt. Im Fall von $\mathrm{GL}(2; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 \backslash 0$ ist es auch nicht schwer, einen globalen stetigen Schnitt anzugeben. Im Fall von $\mathrm{GL}(3; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 \backslash 0$ hingegen gibt es keinen globalen stetigen Schnitt: Aus solch einem Schnitt könnte man nämlich unschwer eine „Kämmung des Igels" konstruieren, und wir werden in [TF] 1.4.4 zeigen, daß es solch eine Kämmung nicht geben kann.

Lemma 2.3.6 (Projektive Räume als homogene Räume). *Gegeben ein hausdorffscher topologischer Schiefkörper $\mathbb{K}$ stimmt die Topologie auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1} \backslash 0$ überein mit der feinsten Topologie als homogener Raum in Bezug auf die offensichtliche Operation von $\mathrm{GL}(n+1; \mathbb{K})$. Insbesondere ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ Hausdorff.*

Beweis. Wir versehen $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ mit seiner Topologie als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1} \backslash 0$ und betrachten die Abbildungen

$$\mathrm{GL}(n+1; \mathbb{K}) \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K}$$

gegeben durch das Anwenden auf den ersten Vektor der Standardbasis e_1 und die offensichtliche Projektion. Die erste Abbildung ist final nach Lemma 2.3.3, die zweite nach Annahme. Also ist nach 1.7.5 auch ihre Verknüpfung final. Damit stimmt auf $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ die feinste Topologie als homogener Raum überein mit der Topologie als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1} \backslash 0$ aus 2.3.2. Die Hausdorffeigenschaft folgt dann aus 2.2.10, da die Standgruppen unseres homogenen Raums $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ offensichtlich abgeschlossen sind. □

Proposition 2.3.7 (Projektive Räume als Mannigfaltigkeiten). *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n(\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K})$.*

Beispiele 2.3.8. Die reelle projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ ist homöomorph ist zu einer Kreislinie S^1, die komplexe projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ zur Kugelschale S^2, und die quaternionale projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$ homöomorph zur 4-Sphäre S^4. Weiter ist $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ homöomorph ist zu einer Kugelschale, in die man ein kreisrundes Loch geschnitten hat, um dort ein Möbiusband einzukleben. All das zu zeigen ist eine gute Übung.

Vorschau 2.3.9. Die offensichtlichen Projektionen von den geeignet erklärten Einheitssphären auf die jeweiligen projektiven Räume $S^2 \to \mathbb{P}^1\mathbb{R} \cong S^1$, $S^3 \to \mathbb{P}^1\mathbb{C} \cong S^2$ und $S^7 \to \mathbb{P}^1\mathbb{H} \cong S^4$ sind Faserbündel, ja sogar Hauptfaserbündel mit Fasern S^0, S^1 und S^3. Faserbündel mit Basis, Faser und Totalraum jeweils einer Sphäre heißen **Hopf-Faserungen**. Mithilfe der Oktonionen kann man auch eine Hopf-Faserung über der S^8 mit Faser S^7 und Totalraum S^{15} konstruieren. Man kann sogar zeigen, daß es außerhalb dieser Dimensionen keine Hopf-Faserungen gibt, aber das ist für uns vorerst außer Reichweite.

Beweis von 2.3.7. Identifizieren wir in $\mathbb{R}$-linearer Weise $\mathbb{K}^{n+1} \cong \mathbb{R}^m$ und bezeichnen mit $S := S^{m-1} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ die Menge aller Vektoren der Länge Eins für das Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{R}^m$, eine hochdimensionale Sphäre, so erhalten wir eine stetige Surjektion $S \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K}$. Als Bilder kompakter Räume sind demnach unsere projektiven Räume kompakt. Somit müssen wir nur noch für jeden Punkt eine zu $\mathbb{K}^n$ homöomorphe offene Umgebung finden. Wir betrachten dazu einen beliebigen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum W und zeigen, daß für jede affine Hyperebene $H \subset W$, die den Ursprung vermeidet, die Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ gegeben durch $v \mapsto \langle v \rangle$ eine offene Einbettung ist. Ist in der Tat $\vec{H} \subset W$ der Richtungsraum unserer affinen Hyperebene H, so ist $\pi^{-1}(\pi(H)) = W \backslash \vec{H}$ offen in $W \backslash 0$. Mithin hat unsere Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ offenes Bild. Nun betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & W \backslash \vec{H} \arrow[dl] \arrow[dr, "\pi"] & \\ H \arrow[rr] & & i_H(H) \end{tikzcd}$$

Der linke schräge Pfeil ordne jedem Punkt den Schnittpunkt mit H der durch ihn verlaufenden Ursprungsgeraden zu. Er ist stetig, denn ist $\lambda_H : W \to k$ die Linearform, deren Niveaufläche zum Wert Eins gerade H ist, so wird er gegeben durch die Formel $w \mapsto w\lambda_H(w)^{-1}$. Er ist nach 1.7.5 sogar final, da er einen Schnitt besitzt, eben die Einbettung $H \hookrightarrow W \backslash \vec{H}$. Der rechte schräge Pfeil ist final nach 1.7.14 als Einschränkung einer finalen Abbildung auf eine offene Teilmenge der Basis. Zusammen folgt, daß die horizontale Bijektion ein Homöomorphismus $H \xrightarrow{\sim} i_H(H)$ sein muß. Damit ist $\mathbb{P}W$ in der Tat eine Mannigfaltigkeit. □

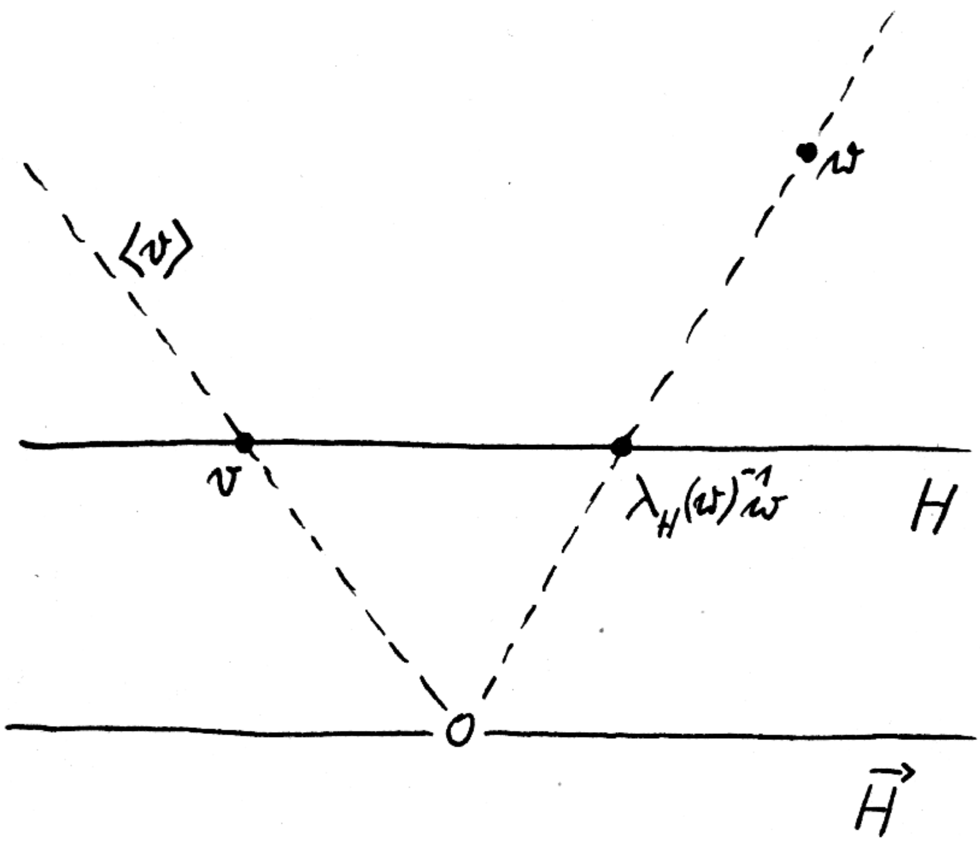


Illustration zum Beweis von 2.3.7

Beispiel 2.3.10. Unter einer **vollständigen Fahne** von Untervektorräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem Körper k versteht man eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

mit $\dim V_i = i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}(V)$ und nennen sie die Fahnenmannigfaltigkeit. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Die Standgruppe der Fahne

$$k^n = \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n \rangle \supset \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{n-1} \rangle \supset \ldots \supset \langle \mathrm{e}_1 \rangle \supset 0$$

ist die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen $B \subset \mathrm{GL}(n;k)$. Wir erhalten so eine Bijektion

$$\mathrm{GL}(n;k)/B \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(k^n)$$

Analoges gilt für einen Schiefkörper k, wobei wir vereinbaren, Vektorräume als Rechtsmoduln verstehen zu wollen. Arbeiten wir über dem Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder dem Schiefkörper $\mathbb{H}$, so ist die Fahnenmannigfaltigkeit mit ihrer feinsten Topologie als homogener Raum kompakt aufgrund der Iwasawa-Zerlegung [LA2] 1.11.9, [LA2] 1.11.11 und [ML] 1.6.11.

Übungen

Übung 2.3.11. Man prüfe die Beschreibungen von $\mathbb{P}^1\mathbb{K}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ aus 2.3.8.

Übung 2.3.12. Man zeige, daß $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ homöomorph ist zu einer Kreislinie S^1, $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ homöomorph zur Kugelschale S^2, und $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$ homöomorph zur 4-Sphäre S^4. Man zeige weiter, daß $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ homöomorph ist zu einer Kugelschale, in die man ein kreisrundes Loch geschnitten hat, um dort ein Möbiusband einzukleben.

Übung 2.3.13. Sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Wir betrachten in $\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V)$ alle Paare bestehend aus einer Halbebene und einer Halbgeraden auf ihrem Rand, also alle Paare (H, L), für die es $v, w \in V$ gibt mit $H = \mathbb{R}_{\geq 0} w + \mathbb{R} v$ und $L = \mathbb{R}_{\geq 0} v$. Man zeige, daß die Menge aller derartigen Paare ein homogener Raum für $\mathrm{GL}(V)$ ist und daß dieser homogene Raum kompakt ist.

Übung 2.3.14. Man zeige, daß die Gruppe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})^+$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen mit positiver Determinante zusammenhängend ist. Hinweis: Induktion über n. Aus 2.3.3 folgert man unschwer, daß im Fall $n > 1$ für den homogenen Raum $\mathbb{R}^n \backslash 0$ unserer Gruppe seine Topologie als homogener Raum mit der offensichtlichen Topologie übereinstimmt, so daß dieser homogene Raum zusammenhängend ist. Damit müssen wir nach 2.2.11 nur noch zeigen, daß die Standgruppe eines Punktes zusammenhängend ist.

Übung 2.3.15. Versehen wir $\mathbb{R}^d \backslash 0$ mit der von $\mathbb{R}^d$ induzierten Topologie, so liefert für $d > 1$ das Anwenden auf einen beliebigen von Null verschiedenen Vektor eine finale Abbildung $\mathrm{SL}(d; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d \backslash 0$. Dasselbe gilt im Komplexen.

Übung 2.3.16 (**Realisierung von** $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2)$ **als obere Halbebene**). Wir betrachten die Operation von $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2; \mathbb{C})$ auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Sie stabilisiert den Äquator $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ und man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie außer dem Äquator nur zwei weitere Bahnen hat, nämlich die „nördliche und die südliche Hemisphäre". Die Kreislinie $\mathrm{SO}(2)$ operiert durch Rotationen um die Polachse, aber „mit verdoppelter Geschwindigkeit". Insbesondere operiert $(-\mathrm{I})$ als die Identität und unsere Operation faktorisiert über eine Operation von $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2; \mathbb{R}) / \{\pm \mathrm{I}\}$. Die Standgruppe jedes der beiden Pole unter $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ ist $\mathrm{SO}(2)$ und wir erhalten so je eine Bijektion von $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2)$ mit jeder der beiden Hemisphären. Unter der natürlichen Identifikation $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $z \mapsto \langle 1, z \rangle$ entsprechen unsere beiden Hemisphären den beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ und die Pole den Punkten $\pm \mathrm{i}$ und die Operation erhält die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{c + dz}{a + bz}$$

wie in [LA2] 5.1.25. Wählen wir stattdessen die Identifikation $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $z \mapsto \langle z, 1 \rangle$, so erhält unsere Operation die den meisten Mathematikern besser vertraute Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Man findet leicht eine stetige Spaltung, explizit hat man etwa auf der oberen Halbebene die Spaltung

$$x + y\mathrm{i} \;\mapsto\; y^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$$

Diese Spaltung zeigt, daß die von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ induzierte Topologie auf unserer Hemisphäre mit ihrer feinsten Topologie also homogener Raum von $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ übereinstimmt. Sie ist auch eine unmittelbare Konsequenz der Iwasawa-Zerlegung [LA2] 1.11.9. Diese Spaltungen zeigen im übrigen sehr direkt, daß das Urbild jedes Kompaktums unter $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2)$ kompakt ist, was nach 2.4.17 und 2.4.20 auch ganz allgemein für Quotienten einer topologischen Gruppe nach einer kompakten Untergruppe gilt. Eine alternative Realisierung durch Matrizen haben wir in 2.2.24 besprochen.

2.4 Eigentlichkeit und hausdorffsche Quotienten*

Definition 2.4.1. Eine Abbildung von topologischen Räumen $f : X \to Y$ heißt **eigentlich**, wenn sie stetig ist und wenn darüber hinaus für jeden weiteren Raum

Z die Abbildung $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ abgeschlossen ist.

2.4.2 (**Diskussion der Terminologie**). Auf Französisch verwendet man für „eigentlich“ den Begriff **propre**, auf Deutsch sagt man alternativ auch **universell abgeschlossen**. In einer hoffentlich selbsterklärenden Terminologie, die ich hier nicht formal einführen will, könnte man auch **produktfest abgeschlossen** sagen. Die Terminologie ist nicht ganz einheitlich, in der Literatur werden verschiedene andere Varianten der Definition des Begriffs einer eigentlichen Abbildung verwendet.

Vorschau 2.4.3. Wir zeigen in 2.4.13, daß eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen eigentlich ist genau dann, wenn das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist. Das mag eine erste Anschauung für dieses Konzept geben.

Lemma 2.4.4 (**Eigentliche Abbildungen auf einen Punkt**). *Ein topologischer Raum ist kompakt genau dann, wenn die konstante Abbildung von besagtem Raum auf den einpunktigen Raum eigentlich ist.*

Beweis. Sei X kompakt und Z beliebig. Ich denke mir X vertikal und Z horizontal. Sei $A \overset{\scriptscriptstyle A}{\subset} X \times Z$ abgeschlossen und $z \in Z$ gegeben derart, daß A die vertikale Faser bei z nicht trifft, in Formeln $A \cap (X \times \{z\}) = \emptyset$. So gibt es für jedes $x \in X$ offene Umgebungen $U_x \overset{\circ}{\subset} X$ von x und $V_x \overset{\circ}{\subset} Z$ von z mit $A \cap (U_x \times V_x) = \emptyset$. Endlich viele U_x überdecken nun aber X und der Schnitt der zugehörigen V_x ist eine offene Umgebung von z, die die Projektion von A nicht trifft. Also ist die konstante Abbildung von einem Kompaktum auf einen einpunktigen Raum eigentlich. Die Umkehrung ist für uns weniger wichtig. Um sie zu zeigen, betrachten irgendein System abgeschlossener Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit nichtleeren endlichen Schnitten und müssen nach 1.5.18 nur zeigen, daß auch sein gesamter Schnitt nicht leer ist. Dazu dürfen wir annehmen, daß $\mathcal{A}$ stabil ist unter endlichen Schnitten, und bilden den Raum

$$Z := X \sqcup \{\infty\}$$

mit der Topologie, für die die offenen Teilmengen alle Teilmengen sind, die entweder ∞ vermeiden oder ∞ enthalten und mindestens ein $A \in \mathcal{A}$ umfassen. Aufgrund unserer Annahme an $\mathcal{A}$ liegt ∞ im Abschluß von $X \subset Z$. Betrachten wir die Diagonale $\Delta \subset X \times Z$, so muß das Bild ihres Abschlusses $\bar{\Delta}$ unter der Projektion auf die zweite Koordinate ganz Z sein. Es gibt also ein $x \in X$ mit $(x, \infty) \in \bar{\Delta}$ und daraus folgt sofort $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. □

Proposition 2.4.5. *Operiert eine kompakte topologische Gruppe G auf einem Hausdorffraum X, so ist auch der Bahnenraum X/G Hausdorff.*

2.4.6. Ich hätte einen Beweis vorgezogen, der das Konzept eigentlicher Abbildungen vermeidet, aber mir ist keiner eingefallen. Unter stärkeren Voraussetzungen wird der Beweis einfacher, vergleiche 2.2.14.

Beweis. Wegen der Kompaktheit von G ist die Projektion $G \times X \to X$ eigentlich. Damit ist auch die Wirkung eigentlich als Komposition der Projektion mit dem Homöomorphismus $G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X$, $(g, x) \mapsto (g, gx)$. Damit ist auch das Produkt der Wirkung $G \times X \times X \to X \times X$ mit der Identität auf X eine eigentliche Abbildung, und schalten wir $\mathrm{id} \times \Delta$ davor, so erkennen wir mit 1.6.22 und Übung 2.4.16, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \times X \\ (g\ ,\ x) & \mapsto & (gx, x) \end{array}$$

eigentlich ist. Insbesondere ist ihr Bild $\Gamma \subset X \times X$ abgeschlossen und das Komplement offen. Dann ist aber nach 2.2.3 und 2.2.4 auch das Bild dieses Komplements in $X/G \times X/G$ offen und die Diagonale in $X/G \times X/G$ folglich abgeschlossen. □

Ergänzung 2.4.7. Die Operation einer topologischen Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt **eigentlich**, wenn die Abbildung $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ eigentlich ist. Die zweite Hälfte des Beweises von 2.4.5 zeigt, daß bei einer eigentlichen Operation der Bahnenraum stets Hausdorff ist. Die erste Hälfte des Beweises von 2.4.5 zeigt, daß eine Operation einer kompakten Gruppe stets eigentlich ist.

Ergänzung 2.4.8. Man kann zeigen, daß eine stetige Abbildung eigentlich ist genau dann, wenn sie abgeschlossen ist und alle ihre Fasern kompakt sind. Bei Bourbaki kann man nachlesen, warum ein beliebiges Produkt von eigentlichen Abbildungen wieder eigentlich ist. Diese Aussage heißt der **Satz von Frolik-Tychonoff**.

Definition 2.4.9. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **separiert**, wenn die Diagonale eine abgeschlossene Teilmenge $X \overset{\Delta}{\subset} X \times_Y X$ ist.

Beispiele 2.4.10. Die konstante Abbildung von einem topologischen Raum auf einen Punkt ist nach 1.6.22 separiert genau dann, wenn der fragliche Raum Hausdorff alias separiert ist. Jede topologische Einbettung ist separiert. Ist in einem kartesischen Diagramm topologischer Räume ein Ursprungspfeil separiert, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.

Lemma 2.4.11. *Ist $g \circ f$ eigentlich und g separiert, so ist auch f eigentlich.*

2.4.12. Landet g in einem Punkt, so liefert dieses Lemma insbesondere die bereits aus 1.5 bekannte Aussage, daß das Bild einer stetigen Abbildung von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum stets abgeschlossen ist. Bei Bourbaki findet sich unser Lemma zumindest schon einmal für g injektiv.

Beweis. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Wir betrachten zum Morphismus f das in Top_Z kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \times_Z Y \arrow[r] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

aus [TF] 2.2.13 und sehen, daß mit der Diagonale $Y \hookrightarrow Y \times_Z Y$ auch die Abbildung $(\mathrm{id}, f) : X \to X \times_Z Y$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Der Morphismus f ergibt sich als deren Verknüpfung mit dem eigentlichen da durch Basiswechsel aus $X \to Z$ entstehenden Morphismus $X \times_Z Y \to Y$. □

Lemma 2.4.13. *Eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen ist eigentlich genau dann, wenn das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist.*

Beweis. Daß Urbilder von Kompakta unter eigentlichen Abbildungen stets kompakt sind, haben wir bereits in 2.4.17 gesehen. Daß eine stetige Abbildung von kompakten Hausdorffräumen eigentlich ist, folgt aus 2.4.11 und aus der Erkenntnis 2.4.4, daß die konstante Abbildung eines Kompaktums auf einen Punkt eigentlich ist. Das Lemma folgt damit aus der Lokalität der Eigentlichkeit in der Basis 2.4.15. □

2.4.14. Eine Teilmenge in einem topologischen Raum heißt **relativ Hausdorff**, wenn je zwei verschiedene Punkte unserer Teilmenge disjunkte Umgebungen im ursprünglichen Raum besitzen.

Übungen

Übung 2.4.15 (**Eigentlichkeit ist lokal in der Basis**). Seien $f : X \to Y$ stetig und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine offene Überdeckung von Y. Genau dann ist f eigentlich, wenn die induzierten Abbildungen $f^{-1}(U) \to U$ eigentlich sind für alle $U \in \mathcal{U}$.

Übung 2.4.16 (**Permanenzeigenschaften eigentlicher Abbildungen**). Die Verknüpfung eigentlicher Abbildungen ist eigentlich. Eine Einbettung ist eigentlich genau dann, wenn sie abgeschlossen ist. Ist $g \circ f$ eigentlich und f surjektiv, so ist auch g eigentlich. Landet g in einem Punkt, so spezialisiert die letzte Behauptung zur Aussage, daß stetige Bilder von Kompakta stets kompakt sind.

Ergänzende Übung 2.4.17 (**Eigentlichkeit ist stabil unter Basiswechsel**). Leser, die bereits mit Faserprodukten [TF] 2.2.8 vertraut sind, werden leicht zeigen können, daß gegeben eine eigentliche Abbildung $X \to Y$ und eine beliebige stetige Abbildung $Z \to Y$ auch die erweiterte Abbildung $X \times_Y Z \to Z$ eigentlich ist. Insbesondere bedeutet das im Fall von einpunktigem Z, daß alle Fasern einer eigentlichen Abbildung kompakt sind, und im Fall einer kompakten Teilmenge $K \subset Y$ ergibt sich mit 2.4.16 und 2.4.4, daß die Urbilder von Kompakta unter eigentlichen Abbildungen kompakt sind.

Übung 2.4.18. Sind $X \to Y$ und $X' \to Y$ eigentlich, so auch $(X \sqcup X') \to Y$. Ist insbesondere $Z \to Y$ stetig und sind Teilräume $X, X' \subset Z$ gegeben mit $X \to Y$ und $X' \to Y$ eigentlich, so ist auch $(X \cup X') \to Y$ eigentlich mit der vorhergehenden Übung 2.4.16.

Übung 2.4.19. Gegeben eine kompakte Hausdorff'sche Gruppe enthält jede Umgebung des neutralen Elements eine unter Konjugation stabile offene Umgebung des neutralen Elements.

Weiterführende Übung 2.4.20. Ist G eine topologische Gruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe, so ist die Multiplikation $G \times K \twoheadrightarrow G$ eigentlich. Hinweis: 2.4.17. Ist G eine topologische Gruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe, so ist die Projektion $G \twoheadrightarrow G/K$ eigentlich. Hinweis: Man verwende das kartesische Diagramm zum Quotienten [TF] 2.2.15 und die Erkenntnis, daß Quotienten nach 2.2.4 produktfest final sind.

Weiterführende Übung 2.4.21. Seien G eine Hausdorffgruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe. So besitzt jeder Punkt $x \in G/K$ eine offene Umgebung U mit der Eigenschaft, daß für $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\gamma(U) \cap U \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \gamma(x) = x \text{ und } \gamma(U) = U.$$

Hinweis: Die Untergruppe Γ ist abgeschlossen nach 2.1.25 und für jede Teilmenge $A \subset \Gamma$ ist dann $AK \mathrel{\underset{\not\triangle}{\subset}} G$ abgeschlossen in G nach 2.4.20.

Übung 2.4.22. Die Quotientenabbildung für die Operation einer endlichen Gruppe auf einem topologischen Raum ist stets eigentlich. Hinweis: Quotienten nach Gruppenoperationen sind produktfest final nach 2.2.4.

Übung 2.4.23. Ist $X \to Y$ eine eigentliche äquivariante Abbildung von Räumen mit einer Operation einer Gruppe G durch stetige Abbildungen, so ist auch die auf den Bahnenräumen induzierte Abbildung $X/G \to Y/G$ eigentlich. Hinweis: Quotientenabbildungen sind produktfest final.

Übung 2.4.24. Es operiere eine topologische Gruppe G auf einem Raum X und sei $P \subset G$ eine Untergruppe mit G/P kompakt. Man zeige, daß die Operation eine eigentliche Abbildung $G \times_{/P} X \to X$ induziert. Hinweis: Man betrachte

$G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X$ mit $(g, x) \mapsto (g, gx)$. Ist weiter $A \underset{\text{\tiny{A}}}{\subset} X$ abgeschlossen und P-stabil, so ist auch GA abgeschlossen in X. Hinweis: $G \times_{/P} A \to G \times_{/P} X$ ist eine abgeschlossene Einbettung. Diese Übung verallgemeinert unsere Erkenntnis 2.4.7, daß Operationen kompakter Gruppen stets eigentlich sind.

Übung 2.4.25 (**Bruhatzellen sind offen in ihrem Abschluß**). Wir betrachten $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und betrachten in $G := \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen B. Wir wollen zeigen, daß jede Doppelnebenklasse BwB offen in ihrem Abschluß ist. Dazu zeige man der Reihe nach: (1) Ist s die Permutationsmatrix einer Permutation mit nur einem Fehlstand, so ist $P_s := B \sqcup BsB$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ aus „Block-oberen Dreiecksmatrizen mit einem (2×2)-Block und sonst nur (1×1)-Blöcken. (2) Die Quotienten P_s/B sind homöomorph zu $\mathbb{P}^1\mathbb{K}$ und insbesondere kompakt. (3) Alle Produkte der Gestalt $P_r P_s \ldots P_t$ sind abgeschlossen in G wegen 2.4.24. (4) Ist die Zahl $l(x)$ der Fehlstände eines Produkts $x = rs \ldots t$ die Zahl seiner Faktoren, so ist das Produkt $P_r P_s \ldots P_t$ nach [LA2] 5.6.4 die Vereinigung der Doppelnebenklasse $Brs \ldots tB$ mit Doppelnebenklassen BxB für $l(x) < l(rs \ldots t)$. Im übrigen zeigen wir für Bahnen von „algebraischen Gruppen auf algebraischen Varietäten“ in [AAG] 2.3.7 in voller Allgemeinheit, daß sie offen sind in ihrem Abschluß und das sogar in Bezug auf die „Zariski-Topologie“.

Übung 2.4.26. Eine stetige Abbildung ist separiert genau dann, wenn alle ihre Fasern relativ Hausdorff sind im Sinne von 2.4.14. Jede Verknüpfung separierter Abbildungen ist separiert. Das Urbild einer relativ Hausdorff'schen Teilmenge unter einer separierten Abbildung ist wieder relativ Hausdorff'sch.

Übung 2.4.27. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine relativ Hausdorff'sche Teilmenge. Gegeben zwei zueinander disjunkte Kompakta $K, L \subset Y$ gibt es dann disjunkte offene Mengen $U, V \underset{\circ}{\subset} X$ mit $K \subset U$ und $L \subset V$.

Übung 2.4.28. Ist $f : X \to Y$ eigentlich und separiert und $i : A \hookrightarrow X$ eine Einbettung derart, daß $f \circ i$ eigentlich ist, so muß i eine abgeschlossene Einbettung sein. Hinweis: 2.4.11 und 2.4.16.

3 Funktionen auf topologischen Räumen

3.1 Stetige Funktionen auf normalen Räumen

Definition 3.1.1. Ein topologischer Raum heißt **normal**, wenn sich je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen unseres Raums zu disjunkten offenen Teilmengen vergrößern lassen.

Ergänzung 3.1.2. In der Literatur ist es üblich, von normalen Räumen zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft zu fordern und unsere normalen Räume „T_4-Räume“ zu nennen. Die Bezeichnung T_4 steht für das **vierte Trennungsaxiom**. Das Trennungsaxiom T_2 ist synonym zu Hausdorff. Die Trennungsaxiome T_0, T_1 und T_3 spielen für uns keine Rolle.

Beispiel 3.1.3. Nach Übung 1.5.19 ist jeder kompakte Hausdorffraum normal.

Lemma 3.1.4. *Jeder metrische Raum ist normal.*

Beweis. Sei (X, d) unser metrischer Raum. Gegeben eine nichtleere Teilmenge $M \subset X$ betrachten wir die Funktion $d_M : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d_M(x) := \inf\{d(y, x) \mid y \in M\}$. Wie Sie in [AN1] **??** zeigen durften, ist sie stetig mit Nullstellenmenge $d_M^{-1}(0) = \bar{M}$. Gegeben $Y, Z \underset{\mathsf{A}}{\subset} X$ disjunkte abgeschlossene nichtleere Teilmengen sind nun sicher $U := \{x \in X \mid d_Y(x) < d_Z(x)\}$ und $V := \{x \in X \mid d_Y(x) > d_Z(x)\}$ disjunkte offene Teilmengen mit $U \supset Y$ und $V \supset Z$. □

Satz 3.1.5 (**Tietze's Erweiterungslemma**). *Jede stetige Abbildung von einer abgeschlossenen Teilmenge eines normalen Raums in ein nichtleeres reelles Intervall läßt sich fortsetzen zu einer stetigen Abbildung des ganzen Raums in besagtes Intervall.*

3.1.6. Wir behandeln zunächst als Spezialfall das sogenannte „Lemma von Urysohn“ und im Anschluß den Fall der Intervalle $[0, 1]$ und $[0, 1)$. Der allgemeine Fall bleibt von da an dem Leser überlassen.

Lemma 3.1.7 (**von Urysohn**). *Gegeben ein normaler Raum X und disjunkte abgeschlossene Teilmengen $A, B \underset{\mathsf{A}}{\subset} X$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.*

Beispiel 3.1.8. Im Fall eines metrischen Raums ist das leicht zu sehen: Wir dürfen ohne Beschränkung annehmen, daß weder A noch B leer sind. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} g: & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (d_A(x), d_B(x)) \end{array}$$

ist in diesem Fall stetig mit Werten im ersten Quadranten ohne Ursprung, in Formeln mit Werten in $Q = (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 \backslash (0,0)$. Ist nun $h : Q \to [0,1]$ eine stetige Abbildung derart, daß h auf der Achse $\mathbb{R}_{>0} \times 0$ konstant Eins ist und auf der Achse $0 \times \mathbb{R}_{>0}$ konstant Null, so ist die Abbildung $f = h \circ g : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Ist X normal und sind Teilmengen $C \subset U \subset X$ gegeben mit $C \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\triangle} X$ und $U \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} X$, so gibt es eine offene Menge $W \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} X$ mit

$$C \subset W \subset \overline{W} \subset U$$

Um das einzusehen nehme man disjunkte offene Umgebungen W von C und D von $X \backslash U$, dann gilt nämlich $C \subset W \subset \overline{W} \subset X \backslash D \subset U$. Das war unsere Vorüberlegung. Wir finden danach $U(0) \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} X$ mit

$$A \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \quad \subset \quad X \backslash B$$

Wir finden danach weiter $U(1/2) \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} X$ mit

$$\overline{U(0)} \subset U(1/2) \subset \overline{U(1/2)} \subset X \backslash B$$

Indem wir so weitermachen finden wir induktiv für alle $r \in [0,1)$ der Form $r = k/2^n$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine offene Menge $U(r) \subset X \backslash B$ derart, daß gilt $r < r' \Rightarrow \overline{U(r)} \subset U(r')$. Schließlich setzen wir noch $U(1) = X$ und erklären $f : X \to [0,1]$ durch

$$f(x) := \inf\{r \in [0,1] \mid x \in U(r)\}$$

Sicher gilt $f|_A = 0$, $f|_B = 1$. Wir müssen nur noch zeigen, daß f stetig ist. Für $0 < t < 1$ finden wir schon mal

$$\begin{array}{rcll} f^{-1}([0,t)) & = & \bigcup_{r<t} U(r) & \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} X \\ f^{-1}((t,1]) & = & \bigcup_{r>t} X \backslash U(r) & \\ & = & \bigcup_{s>t} X \backslash \overline{U(s)} & \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} X \end{array}$$

Da aber die Intervalle $[0,t)$ und $(t,1]$ die metrische Topologie auf $[0,1]$ erzeugen, ist f damit nach 1.7.27 stetig. □

3.1.9. Im folgenden Beweis verwenden wir, daß die Summe von zwei stetigen reellwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum wieder stetig ist. Das hatten wir uns bereits in [AN1] **??** überlegt. Es folgt aber auch sofort aus der universellen Eigenschaft der Produkttopologie 1.6.17 zusammen mit der Stetigkeit der Addition $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Beweis des Erweiterungslemmas 3.1.5. Jetzt zeigen wir das Erweiterungslemma für das Intervall $[0, 1]$. Sei wieder X unser Raum und $Y \subset\!\!\!\!\!{}^{\circ}\!\!\!\!\!\!\!\!\;\; X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : Y \to [0, 1]$ eine stetige Abbildung. Wir suchen $F : X \to [0, 1]$ stetig mit $F|_Y = f$. Nach Urysohn finden wir $F_0 : X \to [0, 1/3]$ stetig mit $f(x) \leq 1/3 \Rightarrow F_0(x) = 0$ und $f(x) \geq 2/3 \Rightarrow F_0(x) = 1/3$ für alle $x \in Y$. Es folgt

$$F_0(x) \leq f(x) \leq 2/3 + F_0(x)$$

für alle $x \in Y$. Nun nehmen wir die Funktion $f_1 := f - F_0 : Y \to [0, 2/3]$ und finden ebenso $F_1 : X \to [0, (1/3)(2/3)]$ mit $F_1(x) \leq f_1(x) \leq (2/3)^2 + F_1(x)\ \forall x \in Y$ und mithin

$$F_0(x) + F_1(x) \leq f(x) \leq (2/3)^2 + F_0(x) + F_1(x)$$

für alle $x \in Y$. Wir machen immer so weiter und konstruieren schließlich F als Summe der gleichmäßig konvergenten Reihe

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \dots$$

Sie strebt gegen eine stetige Funktion wegen [AN1] **??**. Jetzt zeigen wir das Erweiterungslemma noch für das Intervall $[0, 1)$. Wir benutzen dieselben Notationen wie eben und finden nach dem vorhergehenden jedenfalls eine stetige Erweiterung von f zu einer stetigen Abbildung $F : X \to [0, 1]$. Dann ist natürlich $F^{-1}(1)$ abgeschlossen in X und disjunkt zu Y. Wir finden also $G : X \to [0, 1]$ stetig mit $G|_Y = 1$ und $G|_{F^{-1}(1)} = 0$ und $H = \inf(F, G)$ ist unsere gesuchte stetige Erweiterung von f. Den Rest des Beweises können wir getrost dem Leser überlassen. $\square$

Übungen

Übung 3.1.10. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum läßt sich jede auf einer kompakten Teilmenge definierte stetige reellwertige Funktion stetig auf den ganzen Raum fortsetzen, und das sogar zu einer Funktion mit kompaktem Träger.

Übung 3.1.11. Jede offene Teilmenge eines lokal kompakten abzählbar basierten Hausdorff-Raums X läßt sich darstellen als abzählbare Vereinigung von Mengen der Gestalt $\{x \mid f(x) > 0\}$ für $f : X \to [0, \infty)$ stetig mit kompaktem Träger.

Übung 3.1.12. Jede abgeschlossene Teilmenge eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt.

Übung 3.1.13. Ein topologischer Raum ist genau dann Hausdorff und lokal kompakt, wenn seine Ein-Punkt-Kompaktifizierung Hausdorff und kompakt ist.

3.2 Filter und Satz von Tychonoff

Definition 3.2.1. Sei X eine Menge. Ein System von Teilmengen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein **Filter auf** X, wenn es stabil ist unter endlichen Schnitten und dem Bilden von Obermengen, in Formeln

1. $(A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F})$ und $X \in \mathcal{F}$;
2. $(A \in \mathcal{F}$ und $B \supset A) \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

Unter einem **echten Filter** verstehen wir einen Filter, der nicht die ganze Potenzmenge ist. Gleichbedeutend ist die Forderung $\emptyset \notin \mathcal{F}$. In vielen Quellen wird ein Filter abweichend definiert als das, was wir hier einen echten Filter nennen.

Ergänzung 3.2.2 (**Filter und Ideale**). Unter der Bijektion $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$, die jeder Teilmenge die charakteristische Funktion ihres Komplements zuordnet, entsprechen die Filter eineindeutig den Idealen des Funktionenrings.

Beispiele 3.2.3. Ist X eine Menge und $x \in X$ ein Punkt, so ist das System aller Teilmengen von X, die den Punkt x enthalten, ein Filter. Ist $x_0, x_1, \ldots$ eine Folge in X, so ist das System derjenigen Teilmengen von X, die fast alle Folgenglieder enthalten, ein Filter. Ist $Y \subset X$ eine unendliche Teilmenge von X, so ist das System derjenigen Teilmengen von X, die fast alle Elemente von Y enthalten, ein Filter. Ist X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt, so bilden alle Umgebungen von x einen Filter, den **Umgebungsfilter** $\mathcal{U}_x$ **von** x. Das leere Mengensystem ist kein Filter.

Definition 3.2.4. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Filter und $x \in X$ ein Punkt. Wir sagen, der **Filter** $\mathcal{F}$ **konvergiert gegen den Punkt** x, wenn jede Umgebung von x zum Filter $\mathcal{F}$ gehört, in Formeln $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$. Wir sagen, der **Filter** $\mathcal{F}$ **konvergiert**, wenn es einen Punkt $x \in X$ gibt derart, daß $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert.

Definition 3.2.5. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X heißt ein **Ultrafilter**, wenn er ein echter Filter ist und wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder A selbst oder ihr Komplement $X \backslash A$ zu $\mathcal{F}$ gehört.

Beispiel 3.2.6. Ist X eine Menge und $x \in X$ ein Punkt, so ist das System aller Teilmengen von X, die x enthalten, ein Ultrafilter.

Lemma 3.2.7. *Die Ultrafilter auf einer Menge sind genau die maximalen Elemente der Menge der echten Filter und jeder echte Filter läßt sich vergrößern zu einem Ultrafilter.*

Beweis. Ein Ultrafilter ist offensichtlich maximal in der Menge aller echten Filter. Ist umgekehrt $\mathcal{F}$ ein echter Filter aber kein Ultrafilter, so gibt es $B \subset X$ mit $B \notin \mathcal{F}$ und $X \backslash B \notin \mathcal{F}$. Wir behaupten, daß entweder gilt $B \cap F \neq \emptyset \ \forall F \in \mathcal{F}$ oder $(X \backslash B) \cap F \neq \emptyset \ \forall F \in \mathcal{F}$. Sonst gäbe es nämlich $F, G \in \mathcal{F}$ mit $B \cap F = \emptyset$ und $(X \backslash B) \cap G = \emptyset$ und damit $F \cap G = \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme, daß $\mathcal{F}$ ein echter Filter ist. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B \cap F \neq \emptyset \ \forall F \in \mathcal{F}$. Dann bilden alle Obermengen zu solchen Schnitten selbst einen echten Filter $\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$ mit $B \in \tilde{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{F}$ war nicht maximal in der Menge der echten Filter. Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit dem Zorn'schen Lemma [LA1] 1.9.15. Es gilt nur zu beachten, daß eine aufsteigende Vereinigung von Filtern wieder ein Filter ist und eine aufsteigende Vereinigung von echten Filtern wieder ein echter Filter, da die Vereinigung ja nicht $\emptyset$ enthalten kann, wenn keine der vereinigten Filter $\emptyset$ enthält. □

Ergänzung 3.2.8. Unter der Bijektion $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$, die jeder Teilmenge die charakteristische Funktion ihres Komplements zuordnet, entsprechen die Ultrafilter eineindeutig den maximalen Idealen, die ja auch als maximale echte Ideale definiert sind.

Lemma 3.2.9. *Ein topologischer Raum ist kompakt genau dann, wenn jeder Ultrafilter in besagtem Raum konvergiert.*

Beweis. $\Rightarrow$). Sei X kompakt. Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ein echter Filter, so hat die Familie $(F)_{F \in \mathcal{F}}$ und dann erst recht die Familie $(\bar{F})_{F \in \mathcal{F}}$ nichtleere endliche Schnitte. Mit Übung 1.5.18 folgt $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F} \neq \emptyset$. Wählen wir x aus diesem Schnitt und U eine Umgebung von x, so gilt $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Aus $U \cap (X \backslash U) = \emptyset$ folgt dann $(X \backslash U) \notin \mathcal{F}$, und wenn $\mathcal{F}$ sogar ein Ultrafilter ist folgt weiter $U \in \mathcal{F}$. Also konvergiert dann $\mathcal{F}$ gegen x.

$\Leftarrow$). Ist X nicht kompakt, so finden wir wieder nach Übung 1.5.18 eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen mit nichtleeren endlichen Schnitten, für die gilt $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$. Alle Mengen, die einen Schnitt von endlich vielen unserer A_i umfassen, bilden einen echten Filter. Folglich gibt es auch einen Ultrafilter, der alle A_i enthält. Nun besitzt aber jeder Punkt von x eine Umgebung, die eines der A_i nicht trifft und die also nicht in unserem Ultrafilter liegt. Daher kann unser Ultrafilter gegen keinen Punkt $x \in X$ konvergieren. □

Satz 3.2.10 (Tychonoff). *Das Produkt über eine beliebige Familie von kompakten Räumen ist kompakt.*

3.2.11. Den einfacheren Fall einer abzählbaren Familie kompakter metrischer Räume sollten Sie bereits als Übung 1.6.41 erledigt haben. Es scheint, daß man das Auswahlaxiom hier nur in seiner vollen Stärke braucht, wenn die beteiligten Räume nicht Hausdorff sind, um im letzten Schritt des folgenden Beweises eine Familie von y_i auszuwählen. Für die anderen Argumente reicht schon das schwächere „Ultrafilterlemma“.

Beweis. Seien $(Y_i)_{i\in I}$ unsere Familie von kompakten Räumen und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter im Produktraum. Für jedes $i \in I$ betrachten wir in Y_i den Ultrafilter

$$\mathcal{F}_i := \{F \subset Y_i \mid F \times \prod_{j\neq i} Y_j \in \mathcal{F}\}$$

Da die Y_i kompakt sind, gibt es $y_i \in Y_i$ derart, daß $\mathcal{F}_i$ gegen y_i konvergiert. Dann konvergiert aber offensichtlich $\mathcal{F}$ gegen $y := (y_i)_{i\in I}$. □

3.2.12 (**Ein folgenkompakter aber nicht kompakter Raum**). Wir können nun auch ein Beispiel für einen folgenkompakten aber nicht überdeckungskompakten Hausdorffraum angeben: Der Raum $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, [0, 1])$ aller Abbildungen $\mathbb{R} \to [0, 1]$, aufgefaßt als Produkt von Kopien des kompakten Intervalls $[0, 1]$, ist kompakt nach dem Satz von Tychonoff. Die borelmeßbaren Funktionen bilden darin eine folgenabgeschlossene, aber nicht abgeschlossene Teilmenge, wie wir bereits in 1.2.26 gesehen haben. Folglich bilden die borelmeßbaren Funktionen mit der induzierten Topologie auch einen folgenkompakten aber nach 1.5.11 nicht kompakten topologischen Hausdorffraum.

Ergänzung 3.2.13. Gegeben eine Boole'sche Algebra B im Sinne von [GR] 2.6.1 betrachten wir die Menge aller Homomorphismen $\mathrm{Boole}(B, \{0, 1\})$ in die zweielementige Boole'sche Algebra. Als Teilmenge von $\mathrm{Ens}(B, \{0, 1\}) = \{0, 1\}^B$ mit seiner Produkttopologie ist $\mathrm{Boole}(B, \{0, 1\})$ offensichtlich abgeschlossen und wird so ein kompakter Hausdorffraum. Er heißt der **Stone-Raum** unserer Boole'schen Algebra. Der **Satz von Stone** besagt, daß der so konstruierte Funktor

$$\mathrm{Boole} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{opp}}$$

volltreu ist und eine Äquivalenz der Kategorie der Boole'schen Algebren mit der Opponierten der Kategorie der total unzusammenhängenden kompakten Hausdorffräume induziert. Hier meint total unzusammenhängend, daß jede offene Teilmenge eine Vereinigung von abgeschlossen-offenen Mengen ist, also von Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Es scheint, daß das im Fall kompakter Hausdorffräume dazu gleichbedeutend ist, daß nur die einpunktigen Teilmengen zusammenhängend sind, aber das habe ich mir nicht überlegt. Im übrigen hat unser Funktor einen Rechtsadjungierten, der jedem topologischen Raum die Boole-Algebra seiner abgeschlossen-offenen Mengen zuordnet. Mehr dazu mag man im Buch von Halmos „Boolean Algebras“ nachlesen. Jede Boole'sche Algebra ist nach [GR] 2.6.7 ein Verband und kann so nach [AN1] 2.3.9 als eine spezielle teilgeordnete Menge aufgefaßt werden. Eine Boole'sche Algebra heißt

vollständig, wenn in der zugehörigen teilgeordneten Menge jede Teilmenge ein Supremum und gleichbedeuten ein Infimum hat. Ich habe bei Wikipedia gelernt, daß unter obigem Funktor die vollständigen Boole'schen Algebren den extremal unzusammenhängenden kompakten Hausdorffräumen entsprechen, also den kompakten Hausdorffräumen, in denen der Abschluß jeder offenen Menge offen ist.

Übungen

Übung 3.2.14. Ist X ein Hausdorffraum und konvergiert ein echter Filter gegen die Punkte x und y aus X, so gilt $x = y$.

Übung 3.2.15. Die Charaktergruppe $\mathfrak{X}(\Gamma)$ einer diskreten Gruppe Γ ist mit ihrer kompakt-offenen Topologie eine kompakte topologische Gruppe. Hinweis: Man schreibe sie als abgeschlossene Untergruppe eines Produkts von Kreisgruppen. Daß das eine topologische Gruppe ist, wissen wir bereits aus 1.9.21 oder auch [AN3] 3.10.9.

Übung 3.2.16. Viele Aussagen verallgemeinern sich von metrischen auf beliebige topologische Räume, wenn man „Folgen durch Filter ersetzt". Zum Beispiel zeige man, daß eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen genau dann stetig ist, wenn sie **filterstetig** ist, als da heißt, wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X mit Grenzwert $x \in X$ der **Bildfilter** $f_*\mathcal{F} := \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Übung 3.2.17 (**Topologie durch Umgebungsfilter**). Sei X eine Menge und sei für jeden Punkt $x \in X$ ein Filter $\mathcal{U}_x$ von X gegeben, das aus Obermengen von $\{x\}$ besteht. Genau dann ist unser Datum das Datum der Umgebungsfilter einer Topologie auf X, wenn es für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathcal{U}_x$ ein $V \in \mathcal{U}_x$ gibt mit $V \subset U$ und $y \in V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_y$.

3.3 Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen*

Definition 3.3.1 (Produkt von Meßräumen). Gegeben eine Familie von Meßräumen $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ erklärt man ihr Produkt, indem man die Produktmenge

$$\prod_{i\in I} \Omega_i$$

mit der kleinsten σ-Algebra versieht derart, daß die Projektionsabbildungen auf die Faktoren Ω_i alle meßbar werden.

Übung 3.3.2. Eine Abbildung von einem Meßraum in ein Produkt von Meßräumen ist meßbar genau dann, wenn alle ihre Komponenten meßbar sind. Hinweis:

Man betrachte das Bild der σ-Algebra der meßbaren Mengen aus dem Definitionsbereich unserer Abbildung. In kategorientheoretischer Terminologie ist unser Produkt von Meßräumen also in der Tat das Produkt in der Kategorie der Meßräume.

Definition 3.3.3. Ein Meßraum heißt **diskret**, wenn seine meßbaren Teilmengen alle Teilmengen der Grundmenge sind. Ein Meßraum heißt **Borel'sch**, oder ein **Borelraum**, wenn er isomorph ist zu einer meßbaren Teilmenge eines abzählbaren Produkts endlicher diskreter Meßräume.

Beispiele 3.3.4. Die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ ist mit ihrer Borel'schen σ-Algebra ein Borel'scher Meßraum. In der Tat liefert die Dezimalbruchentwicklung „ohne Neunerperioden" eine meßbare Abbildung $[0,1) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, \{0,1,\ldots,9\})$ mit meßbarem Bild. Umgekehrt ist auch jeder Borel'sche Meßraum isomorph zu einer meßbaren Teilmenge der reellen Zahlengeraden. In der Tat können wir ihn leicht als meßbare Teilmenge von $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, \{0,1,\ldots,8\})$ realisieren, und die Dezimalbruchentwicklung realisiert das hinwiederum als meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. Damit ist auch jeder Borel'sche Meßraum isomorph zu einer meßbaren Teilmenge des Intervalls $[0,1]$.

Ergänzung 3.3.5. Im allgemeinen weiß ich nicht, wie man ein beliebiges Produkt von beliebigen Wahrscheinlichkeitsräumen wieder mit der Struktur eines Wahrscheinlichkeitsraums versehen sollte. Man konstruiert zwar relativ leicht eine Abbildung von den offensichtlichen Erzeugern der σ-Algebra nach $[0,1]$, es aber gelingt mir im allgemeinen nicht, deren σ-Additivität nachzuweisen. Im folgenden zeigen wir, wie das im Fall eines Produkts von Borelräumen doch gelingt.

Lemma 3.3.6 (Projektiver Limes von Maßräumen). *Sei T eine Indexmenge und sei für jedes endliche $I \subset T$ ein endliches Maß μ_I auf $\mathrm{Ens}(I,[0,1])$ gegeben derart, daß für $J \subset I$ und mit der Notation $\Phi_I^J : \mathrm{Ens}(I,[0,1]) \to \mathrm{Ens}(J,[0,1])$ für das Vorschalten der Injektion $J \hookrightarrow I$ stets gilt*

$$\left(\Phi_I^J\right)_* \mu_I = \mu_J$$

So existiert genau ein Borelmaß μ auf $\mathrm{Ens}(T,[0,1])$ mit $\left(\Phi_T^I\right)_* \mu = \mu_I$ für alle endlichen $I \subset T$.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß die Mengen $\left(\Phi_T^I\right)^{-1}(A)$ für $A \subset \mathrm{Ens}(I,[0,1])$ meßbar und $I \subset T$ endlich aber beliebig einen Mengenring $\mathcal{I}$ bilden, und daß es genau eine Abbildung μ von diesem Mengenring $\mathcal{I}$ nach $[0,\infty)$ gibt mit

$$\mu\left(\left(\Phi_T^I\right)^{-1}(A)\right) = \mu_I(A)$$

wann immer $I \subset T$ endlich ist und $A \subset \operatorname{Ens}(I, [0,1])$ meßbar. Ebenso leicht sieht man, daß diese Abbildung μ additiv ist. Sobald wir die σ-Additivität von μ zeigen können, folgt unser Lemma aus dem Maßfortsetzungssatz von Caratheodory. Um die σ-Additivität zu zeigen, argumentieren wir wie im Vorfeld der Konstruktion des Lebesguemaßes beim Beweis von Lemma [AN3] 1.2.7. Es gilt zu zeigen, daß für $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine disjunkte Vereinigung mit $A, A_n \in \mathcal{I}$ gilt

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Offensichtlich gilt schon einmal $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C)$ für $B, C \in \mathcal{I}$ disjunkt. Wir setzen nun $B_n = A \backslash (A_0 \cup \ldots \cup A_n)$. Natürlich gehören dann auch die B_n zu $\mathcal{I}$, es gilt $B_0 \supset B_1 \supset \ldots$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$, und es reicht, wenn wir zeigen

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = 0$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Regularität von Borel-Maßen auf $[0,1]^r$ nach [AN3] 1.10.10 und dem Satz von Tychonoff 3.2.10 finden wir für jedes n eine kompakte Menge $C_n \subset B_n$ aus $\mathcal{I}$ für die gilt

$$\mu(B_n \backslash C_n) \leq 2^{-n} \varepsilon$$

Jetzt betrachten wir $D_n = C_0 \cap \ldots \cap C_n$. Auch die D_n gehören zu $\mathcal{I}$, es gilt $D_n \subset C_n \subset B_n$, und zusätzlich haben wir $D_0 \supset D_1 \supset D_2 \ldots$ Wir zeigen nun $\mu(B_n \backslash D_n) \leq 2\varepsilon$ für alle n. In der Tat gilt ja

$$B_n \backslash D_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_n \backslash C_k \subset \bigcup_{k=0}^{n} B_k \backslash C_k$$

und folglich

$$\mu(B_n \backslash D_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k \backslash C_k) \leq \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Nun folgt aber aus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \emptyset$ und der Kompaktheit der D_n und [AN1] **??** schon $D_N = \emptyset$ für ein N, und damit ergibt sich $\mu(B_n) \leq 2\varepsilon$ für $n \geq N$. □

Satz 3.3.7 (von Kolmogoroff für projektive Limites von Borelräumen). *Sei T eine Indexmenge und sei für jedes $i \in T$ ein Borelraum B_i gegeben und für jedes endliche $I \subset T$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_I auf $\prod_{i \in I} B_i$ derart, daß für $J \subset I$ und mit der Notation Φ_I^J für die Projektion auf den entsprechenden Teil der Faktoren stets gilt*

$$\left(\Phi_I^J\right)_* \mu_I = \mu_J$$

So existiert genau ein Borelmaß μ auf $\prod_{i \in T} B_i$ mit $\left(\Phi_T^I\right)_* \mu = \mu_I$ für alle endlichen $I \subset T$.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Lemma 3.3.6. □

3.4 Topologische Räume und Kringalgebren*

3.4.1. Unter einer **Ringalgebra über** $\mathbb{C}$ verstehen wir nach [LA2] 7.9.1 einen Vektorraum A über $\mathbb{C}$ mit einer bilinearen Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \to & A \\ (a, b) & \mapsto & ab \end{array}$$

derart, daß das Assoziativgesetz $a(bc) = (ab)c$ gilt und daß es ein Element $1_A = 1 \in A$ gibt mit $1a = a1 = a \;\forall a \in A$. Ein **Ringalgebrenhomomorphismus** von einer Ringalgebra A in eine weitere Ringalgebra Z ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\varphi : A \to Z$ derart, daß gilt $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in A$. Wir bezeichnen die Menge all dieser Ringalgebrenhomomorphismen mit $\mathrm{Ralg}_{\mathbb{C}}(A, Z)$ oder kurz $\mathrm{Ralg}(A, Z)$. Eine kommutative Ringalgebra nennen wir abkürzend eine **Kringalgebra**.

3.4.2. Jedem topologischen Raum X können wir die $\mathbb{C}$-Kringalgebra

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$$

der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X zuordnen. Wir benutzen im weiteren Verlauf dieses Abschnitts für den Wert einer Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$ an einer Stelle $x \in X$ die symmetrischere Notation $f(x) = \langle f, x\rangle$ und erhalten eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X) \times X & \to & \mathbb{C} \\ (f\ ,\ x) & \mapsto & \langle f, x\rangle \end{array}$$

3.4.3. Jeder $\mathbb{C}$-Ringalgebra A ordnen wir umgekehrt einen topologischen Raum $\mathrm{Spek}\, A$ zu, das **Spektrum von** A. Als zugrundeliegende Menge nehmen wir die Menge

$$\mathrm{Spek}\, A := \mathrm{Ralg}(A, \mathbb{C})$$

aller Homomorphismen von $\mathbb{C}$-Ringalgebren $A \to \mathbb{C}$. Für $a \in A$ und $\varphi \in \mathrm{Spek}\, A$ benutzen wir analog wie oben die Notation $\varphi(a) = \langle a, \varphi\rangle$ und erhalten eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathrm{Spek}\, A & \to & \mathbb{C} \\ (a\ ,\ \varphi) & \mapsto & \langle a, \varphi\rangle \end{array}$$

Wir definieren die Topologie auf $\mathrm{Spek}\, A$ als die Initialtopologie zur Familie von Abbildungen $\langle a,\ \rangle : \mathrm{Spek}\, A \to \mathbb{C}$ für $a \in A$. Die komplexen Zahlen denken wir uns dabei mit ihrer natürlichen Topologie versehen.

Vorschau 3.4.4 (**Bezug zum Spektrum eines Operators**). Wie unser Spektrum hier mit dem Spektrum eines Operators zusammenhängt, wird in 3.4.23 erklärt.

Vorschau 3.4.5 (**Bezug zum Spektrum in der kommutativen Algebra**). In der kommutativen Algebra in [KAG] 4.2.4 definieren wir das Spektrum $\operatorname{Spec} R$ eines kommutativen Rings abweichend als die Menge aller Primideale von R. Allerdings schreiben wir dann auch $\operatorname{Spec} R$ mit einem c und nicht wie hier mit k. Für jede $\mathbb{C}$-Kringalgebra A liefert die Abbildungsvorschrift $\phi \mapsto \ker \phi$ eine Einbettung $\operatorname{Spek} A \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$, deren Bild wir $\operatorname{Max}_{\mathbb{C}} A$ notieren und das für ringendliche $\mathbb{C}$-Kringalgebren nach dem Hilbert'schen Nullstellensatz mit der Menge $\operatorname{Max} A$ aller maximalen Ideale von A übereinstimmt.

Satz 3.4.6 (Räume und ihre Ringe). *Das Spektrum des Rings der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum ist homömorph zu unserem kompakten Hausdorffraum selber.*

Ergänzung 3.4.7. Analoges gilt mit demselben Beweis auch, wenn man im vorhergehenden $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt. Allerdings gilt der anschließende Satz 3.4.19 von Gelfand-Naimark nicht mehr analog über $\mathbb{R}$. Das ist der Grund, warum ich mich hier auf die komplexe Version konzentriere.

Vorschau 3.4.8. Die Sprache der Kategorientheorie und insbesondere der adjungierten Funktoren [TF] 4.3 erlauben es, die Struktur der folgenden Argumentation besonders gut herauszuarbeiten. In dieser Sprache konstruiert man zunächst eine Adjunktion zwischen dem Funktor $\operatorname{Spek} : \operatorname{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{opp}} \to \operatorname{Top}$ als Rechtsadjungiertem zum Funktor $\mathcal{C} : \operatorname{Top} \to \operatorname{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{opp}}$ als seinem Linksadjungierten. Unsere Konstruktionen aus 3.4.10 erweisen sich als der Opponierte der Koeinheit und die Einheit dieser Adjunktion. Die Präzisierung 3.4.11 des Satzes besagt in dieser Sprache, daß diese Einheit der Adjunktion für kompakte Hausdorffräume stets ein Isomorphismus ist. Nach den allgemeinen Erkenntnissen [TF] 4.8.15 zu adjungierten Funktoren ist damit der Funktor $\mathcal{C} : \operatorname{Top} \to \operatorname{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{opp}}$ volltreu auf der Kategorie der kompakten Hausdorffräume mit Spek als Quasiinversem wie in 3.4.6 behauptet.

Scholium 3.4.9. Ein kompakter Hausdorffraum X ist also vollständig „kodiert“ in der $\mathbb{C}$-Ringalgebra $\mathcal{C}(X)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X, einem rein algebraischen Objekt. Eine Variante dieser Entsprechung zwischen „Räumen und Ringen“ steht im Zentrum der „algebraischen Geometrie“. Eine andere Variante führt zur sogenannten „nichtkommutativen Geometrie“. Die Grundidee ist hierbei, daß ja nur ganz spezielle kommutative Ringe kompakte Hausdorffräume beschreiben. Allgemeinere Klassen von eventuell nichtkommutativen Ringen kann man aber in analoger Weise auch „geometrisch“ verstehen und so neue Arten von „nichtkommutativen Räumen“ gewinnen.

3.4.10. Bevor wir den Satz beweisen, will ich seine Aussage noch etwas präzisieren. Per definitionem haben wir ja für jede $\mathbb{C}$-Ringalgebra A einen Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Ringalgebren $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spek} A)$, $a \mapsto \langle a, \ \rangle$. Ebenso haben wir für jeden topologischen Raum X eine stetige Abbildung $\mathrm{ev} : X \to \mathrm{Spek}\,\mathcal{C}(X)$, $x \mapsto \langle\ , x\rangle$. Wir werden den obigen Satz in der folgenden präziseren Form zeigen:

Satz 3.4.11 (Räume und ihre Ringe). *Gegeben ein kompakter Hausdorffraum X ist unsere Evaluationsabbildung* ev *ein Homöomorphismus*

$$\mathrm{ev} : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spek}\,\mathcal{C}(X)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\mathrm{Spek}\,\mathcal{C}(X)$ und sogar allgemeiner $\mathrm{Spek}\,A$ für eine beliebige $\mathbb{C}$-Ringalgebra A ein Hausdorffraum ist. In der Tat, sind $\varphi, \psi : A \to \mathbb{C}$ zwei verschiedene Elemente von $\mathrm{Spek}\,A$, so gibt es $a \in A$ mit $\langle a, \varphi\rangle \neq \langle a, \psi\rangle$. Die Urbilder unter $\langle a,\ \rangle$ von disjunkten offenen Umgebungen dieser verschiedenen komplexen Zahlen sind dann disjunkte offene Umgebungen von φ und ψ im $\mathrm{Spek}\,A$. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß für kompaktes und Hausdorff'sches X unsere Evaluationsabbildung $\mathrm{ev} : X \to \mathrm{Spek}\,\mathcal{C}(X)$ bijektiv ist, denn nach 1.5.13 ist eine stetige Bijektion von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum stets ein Homöomorphismus. Aus Urysohns Lemma folgt bereits, daß ev injektiv ist, denn für $x \neq y$ gibt es $f \in \mathcal{C}(X)$ mit $\langle f, x\rangle \neq \langle f, y\rangle$ und daraus folgt $\langle\ , x\rangle \neq \langle\ , y\rangle$. Es bleibt zu zeigen, daß ev surjektiv ist. Ist in anderen Worten $\varphi : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$ ein Ringalgebrenhomomorphismus, so müssen wir $x \in X$ finden mit $\varphi = \langle\ , x\rangle$. Finden wir $x \in X$ mit $\langle \ker\varphi, x\rangle = 0$, so ist notwendig $\varphi = \langle\ , x\rangle$, denn beide Seiten sind dann Linearformen, die denselben Kern haben und die konstante Funktion $1 \in \mathcal{C}(X)$ auf $1 \in \mathbb{C}$ werfen. Wir nehmen also an, es gebe keinen Punkt $x \in X$, an dem alle Funktionen aus $\ker\varphi$ verschwinden, und führen diese Annahme zum Widerspruch. In der Tat gäbe es ja dann für jeden Punkt $x \in X$ eine Funktion $f_x \in \ker\varphi$ mit $f_x(x) \neq 0$. Natürlich gibt es dann auch eine offene Umgebung U_x von x, auf der f_x nicht verschwindet. Endlich viele dieser U_x überdecken aber X, es gäbe also eine endliche Teilmenge $E \subset X$ mit $X = \bigcup_{x\in E} U_x$ und $f = \sum_{x\in E} f_x \bar{f}_x$ wäre ein Element von $\ker\varphi$ ohne Nullstelle. Dann wäre aber auch $1/f \in \mathcal{C}(X)$ eine wohldefinierte stetige Funktion auf X, es folgte $1 = (1/f)f \in \ker\varphi$ und das kann nicht sein. □

Ergänzung 3.4.12 (**Bezug zwischen stetigen und polynomialen Funktionen**). Gegeben ein Kring R und ein Ideal $I \subset R[T_1, \ldots, T_n]$ mit simultaner Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) \subset R^n$ ist es im Rahmen der Algebra unmittelbar klar, daß wir eine Bijektion

$$\mathcal{Z}(I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^R(R[T_1, \ldots, T_n]/I, R)$$

erhalten, wenn wir jedem Punkt den zugehörigen Auswertungshomomorphismus zuordnen. Ist speziell $R = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen und $\mathcal{Z}(I)$ kompakt in der von der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie, so liefert nach 3.4.7 andererseits dieselbe Abbildungsvorschrift auch eine Bijektion

$$\mathcal{Z}(I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^{\mathbb{R}}(\mathcal{C}(\mathcal{Z}(I), \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

In anderen Worten läßt sich also unter diesen Annahmen jeder $\mathbb{R}$-lineare Ringhomomorphismus $\mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]/I \to \mathbb{R}$ auf genau eine Weise zu einem $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus $\mathcal{C}(\mathcal{Z}(I), \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ausdehnen. Das ist explizit deshalb klar, da jeder Ringhomomorphismus der letzteren Art nach 3.4.7 stetig sein muß in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz und da die polynomialen Funktionen für diese Norm dicht liegen nach dem Satz von Stone-Weierstraß.

3.4.13. Diejenigen komplexen Ringalgebren, die isomorph sind zur Ringalgebra der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum, werden charakterisiert durch den Satz von Gelfand-Naimark 3.4.19, den wir im folgenden beweisen. Wir beginnen mit einigen Erinnerungen. Eine **Banach-Ringalgebra** ist nach [AN3] 4.3.1 ein Banachraum A mit einer stetigen bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$, die A zu einem Ring macht. Auf jeder Banach-Ringalgebra gibt es nach loc.cit. genau eine zur urprünglichen Norm äquivalente Norm $\| \ \|$ mit der Eigenschaft $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ und $\|1\| \leq 1$. Wir nennen sie die kanonische Norm und denken uns jede Banachringalgebra mit ihrer kanonischen Norm versehen. Man prüft leicht $\|1\| = 1$ falls $A \neq 0$. Das **Spektrum** eines Elements a einer Banachringalgebra ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $(a - \lambda 1)$ nicht invertierbar. Es ist nach [AN3] 4.3.13 stets kompakt und enthalten in der abgeschlossenen Kreischeibe $\bar{\mathrm{B}}(0; \|a\|)$. Das Supremum über die Beträge der Elemente des Spektrums von a heißt der **Spektralradius** $\rho(a)$ **von** a, so daß sich unsere Aussage als die Ungleichung $\rho(a) \leq \|a\|$ schreiben läßt. In [AN3] 4.4.4 zeigen wir unter Vorwegnahme von Resultaten aus der Funktionentheorie für jede von Null verschiedene Banachringalgebra A, daß jedes Element $a \in A$ nichtleeres Spektrum hat und daß genauer gilt

$$\rho(a) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$$

Im übrigen zeigen wir in [AN3] 4.4.8 für jede Banachkringalgebra A, daß die Abbildung, die jedem Ringalgebrenhomomorphismus nach $\mathbb{C}$ seinen Kern zuordnet, eine Bijektion

$$\operatorname{Spek} A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} A$$

mit der Menge der rein algebraisch zu verstehenden maximalen Ideale von A induziert.

Satz 3.4.14 (Kompaktheit von Spektren). *Für jede Banachringalgebra A ist ihr Spektrum* $\operatorname{Spek} A$ *ein kompakter Hausdorffraum.*

Beweis. Gegeben ein Ringalgebrenhomomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{C}$ muß $\varphi(a)$ stets Werte im Spektrum annehmen, da φ keine invertierbaren Elemente von A auf Null schicken kann. Wir betrachten die Injektion $\operatorname{Spek} A \hookrightarrow \prod_{a \in A} \bar{\mathrm{B}}(0; \|a\|)$, $\varphi \mapsto (\varphi(a))_{a \in A}$ unseres Spektrums in ein Produkt abgeschlossener Kreisscheiben in der komplexen Zahlenebene, deren Existenz durch die Abschätzung $\rho(a) \leq \|a\|$

gesichert ist. Per definitionem trägt $\operatorname{Spek} A$ die Spurtopologie. Andererseits ist $\operatorname{Spek} A$ genau die Menge aller Tupel $(\psi(a))_{a\in A}$ mit $\psi(1) = 1, \psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$ und $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$ für alle $a, b \in A$ und damit eine abgeschlossene Teilmenge. Nach dem Satz von Tychonoff 3.2.10 ist also $\operatorname{Spek} A$ kompakt, und als Teilraum eines Hausdorffraums ist $\operatorname{Spek} A$ eh Hausdorff. □

Definition 3.4.15. Eine **Involution** und genauer **schieflineare Involution** auf einer $\mathbb{C}$-Algebra A ist eine $\mathbb{C}$-schieflineare Abbildung $a \mapsto a^*$ derart, daß gilt $a^{**} = a$ und $(ab)^* = b^*a^*$ für alle $a, b \in A$.

Definition 3.4.16. Eine C^***-Ringalgebra** ist ein Tripel $(A, \| \ \|, *)$ bestehend aus einer Banachringalgebra mit kanonischer Norm im Sinne von [AN3] 4.3.1 und einer schieflinearen Involution derart, daß gilt $\|aa^*\| = \|a\|^2 \ \forall a \in A$. Ein **Homomorphismus von** C^***-Ringalgebren** ist ein stetiger Ringalgebrenhomomorphismus, der verträglich ist mit den Involutionen. Eine kommutative C^*-Ringalgebra nennen wir eine C^***-Kringalgebra**.

3.4.17 (**Diskussion der Terminologie**). In Teilen der Literatur heißen unsere C^*-Ringalgebren abweichend C^***-Algebren** oder B^***-Algebren**. Vielfach wird aber bei einer C^*-Algebra auch nur die Assoziativität gefordert und nicht die Existenz einer Einselements.

Beispiel 3.4.18. Die Ringalgebra $\mathcal{C}(X)$ aller stetigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum X mit der Norm $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ und der durch $f \mapsto \bar{f}$ gegebenen Involution ist eine C^*-Kringalgebra.

Satz 3.4.19 (Gelfand-Naimark). *Gegeben eine* C^**-Kringalgebra* A *ist* $\operatorname{Spek} A$ *ein kompakter Hausdorffraum und die offensichtliche Abbildung liefert einen Isomorphismus von* $\mathbb{C}$*-Kringalgebren*

$$h : A \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{C}(\operatorname{Spek} A)$$

Dieser Isomorphismus identifiziert die Norm und Involution auf A *mit der offensichtlichen Norm und Involution auf* $\mathcal{C}(\operatorname{Spek} A)$.

3.4.20. Dieser Satz sagt insbesondere, daß die Norm und die Involution auf einer C^*-Kringalgebra schon durch die unterliegende Struktur einer $\mathbb{C}$-Kringalgebra eindeutig festgelegt sind, ja daß der vergeßliche Funktor von den C^*-Kringalgebren in die $\mathbb{C}$-Kringalgebren volltreu ist.

3.4.21. In der Terminologie, wie wir sie in [LA2] 7.2.19 einführen, liefern die Funktoren Spek und $\mathcal{C}$ sogar zueinander quasiinverse Äquivalenzen von Kategorien

$$\left\{\begin{array}{c}\text{kompakte}\\ \text{Hausdorffräume,}\\ \text{stetige Abbildungen}\end{array}\right\} \underset{\operatorname{Spek}}{\overset{\mathcal{C}}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\mathrm{C}^*\text{-Kringalgebren,}\\ \text{Homomorphismen von}\\ \mathbb{C}\text{-Kringalgebren}\end{array}\right\}^{\mathrm{opp}}$$

3.4.22. Wir haben bereits besprochen, daß $h(a)$ nur Werte aus dem Spektrum von a annehmen kann. In Übung [AN3] 4.4.8 haben wir genauer gesehen, daß im Fall einer kommutativen Banachringalgebra A umgekehrt alle Elemente des Spektrums eines Elements $a \in A$ auch tatsächlich als Werte der Funktion $h(a)$ angenommen werden.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \neq 0$, also $\|1\| = 1$. Zunächst zeigen wir, daß für $a = a^* \in A$ unser $h(a)$ eine reellwertige Funktion ist. Haben wir nämlich $h(a) = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so folgt $h(a + \mathrm{i}t1) = \alpha + \mathrm{i}(\beta + t)$ und für $b := a + \mathrm{i}t1$ mit $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich die von der Mitte zu entwickelnde Ungleichungskette

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2 = |h(b)|^2 \leq \|b\|^2 = \|bb^*\| = \|a^2 + t^2 1\| \leq \|a\|^2 + t^2$$

Da kann aber nur dann für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten, wenn gilt $\beta = 0$. Indem wir ein beliebiges $a \in A$ als $(a+a^*)/2+\mathrm{i}((a-a^*)/2\mathrm{i})$ schreiben, folgern wir $h(a^*) = \overline{h(a)}$ für alle $a \in A$. Dann zeigt Stone-Weierstraß, daß $h(A)$ dicht liegt in $\mathcal{C}(\mathrm{SpekA})$ für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Gegeben ein Element a einer Banachringalgebra erinnere ich nun aus [AN3] 4.4.4 an die Formel

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$$

für den Spektralradius, deren Beweis mit einem Vorgriff auf Methoden aus der Funktionentheorie gelang. Ist A sogar eine C*-Kringalgebra, so folgt aus der Identität $\|aa^*\| = \|a\|^2$ sofort $\rho(b) = \|b\|$ für alle $b \in A$ mit $b^* = b$. Gegeben $a \in A$ und $b = aa^*$ erhalten wir damit $\rho(b) = \|b\|$, mit unserer Vorbemerkung 3.4.22 also $\|h(b)\|_\infty = \|b\|$. Daraus aber folgt $\|a\|^2 = \|aa^*\| = \|b\| = \|h(b)\|_\infty = \|h(a)\|_\infty^2$ alias $\|a\| = \|h(a)\|_\infty$ für alle $a \in A$. Also ist h isometrisch. Da A vollständig ist, muß h abgeschlossenes Bild haben. Also ist h ein isometrischer Isomorphismus. □

3.4.23. Wir geben noch eine konkrete Anwendung. Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator, als da heißt eine stetige lineare Abbildung. Man nennt N **normal**, wenn N mit seinem Adjungierten N^* kommutiert. Normal sind also insbesondere alle beschränkten selbstadjungierten Operatoren und ebenso alle unitären Operatoren. Das **Spektrum** $\sigma(N) \subset \mathbb{C}$ eines beschränkten Operators N ist die Menge

$$\sigma(N) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid N - \lambda \,\mathrm{id} \text{ ist nicht invertierbar}\}$$

Das Spektrum eines beschränkten Operators ist nach [AN3] 4.3.13 stets eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Nun bilden wir in der Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ aller beschränkten Operatoren von $\mathcal{H}$ in sich selber die von N und N^* erzeugte Unterringalgebra und bezeichnen mit A ihren Abschluß bezüglich der Operatornorm. So ist A eine C^*-Kringalgebra, nach Gelfand-Naimark 3.4.19 ist also die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$A \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\operatorname{Spek} A)$$

Andererseits kann man zeigen, daß das Auswerten an N einen Homöomorphismus $\operatorname{Spek} A \xrightarrow{\sim} \sigma(N)$ liefert. In der Tat entspricht nach Gelfand-Naimark unter jeden Ringalgebrenhomomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{C}$ die Abbildung $a \mapsto a^*$ der komplexen Konjugation und stetig ist er auch, also festgelegt durch seinen Wert an der Stelle N. Mithin liefert das Auswerten eine Injektion $\operatorname{Spek} A \hookrightarrow \mathbb{C}$. Sie ist per definitionem stetig. Ihr Bild muß in $\sigma(N)$ landen, da invertierbare Elemente unter φ invertierbar bleiben. Andererseits erzeugt jede Nichteinheit von A ein maximales Ideal, das einem Element von $\operatorname{Spek} A$ entspricht. So erkennt man, daß das Bild unserer Injektion genau das Spektrum $\sigma(N)$ von N ist. Zusammengesetzt ergibt sich so ein Isomorphismus

$$\mathcal{C}(\sigma(N)) \xrightarrow{\sim} A$$

Wir kürzen ihn $f \mapsto f(N)$ ab. Er ist sehr nützlich, zum Beispiel, wenn man eine Wurzel aus dem Operator N ziehen will. Wir haben die Verknüpfung unseres Isomorphismus mit der Einbettung $A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bereits in [AN3] 4.8 kennengelernt.

4 Funktionen auf topologischen Gruppen*

4.1 Uniforme Strukturen

4.1.1. Der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit kann nicht sinnvoll von Abbildungen zwischen metrischen Räumen auf Abbildungen zwischen beliebigen topologischen Räumen erweitert werden. Eine derartige Erweiterung gelingt jedoch für Räume mit einer sogenannten „uniformen Struktur“ und insbesondere für topologische Gruppen und Teilmengen derselben. Das soll im folgenden diskutieren werden.

Definition 4.1.2. Gegeben eine Menge X und eine Relation auf X alias eine Teilmenge $A \subset X \times X$ setzen wir

$$\begin{array}{ll} A^{-1} & := \{(y,x) \mid (x,y) \in A\} \\ A^2 & := \{(x,z) \mid \exists y \in A \text{ mit } (x,y) \in A \text{ und } (y,z) \in A\} \end{array}$$

Definition 4.1.3. Eine **uniforme Struktur auf einer Menge** X ist ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ derart, daß gilt:

1. $\mathcal{A}$ ist stabil unter endlichen Schnitten und enthält demnach insbesondere auch ganz $X \times X$;

2. Mit einer Menge gehört auch jede ihrer Obermengen zu $\mathcal{A}$;

3. Alle Mengen aus $\mathcal{A}$ umfassen die Diagonale;

4. Mit A gehört auch A^{-1} zu $\mathcal{A}$;

5. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gibt es $B \in \mathcal{A}$ mit $B^2 \subset A$.

Die beiden ersten Bedingungen lassen sich in der in 3.2.1 eingeführten Terminologie auch als die Forderung zusammenfassen, daß $\mathcal{A}$ ein Filter sein soll. Eine Menge mit einer ausgezeichneten uniformen Struktur heißt ein **uniformer Raum**. Die Elemente von $\mathcal{A}$ nennen wir **verallgemeinerte Abstände** oder auch kürzer **Abstände**.

Beispiel 4.1.4. Für jede Metrik oder allgemeiner Pseudometrik d auf einer Menge X erhält man eine uniforme Struktur $\mathcal{A}$ auf X durch die Vorschrift

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \times X \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } (d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow (x,y) \in A)\}$$

Es gibt jedoch bereits in dieser uniformen Struktur im allgemeinen sehr viel mehr Möglichkeiten für Abstände als im zugrundeliegenden metrischen Raum.

Beispiel 4.1.5. Jede Teilmenge eines uniformen Raums erbt eine uniforme Struktur in offensichtlicher Weise.

Beispiel 4.1.6. Auf jeder topologischen Gruppe G erhält man zwei uniforme Strukturen $\mathcal{A}_l$ und $\mathcal{A}_r$ durch die Vorschriften

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A}_l & := & \{A \subset G \times G \mid \exists V \Subset G \text{ mit } e \in V \text{ und } (x^{-1}y \in V \Rightarrow (x,y) \in A)\} \\ \mathcal{A}_r & := & \{A \subset G \times G \mid \exists V \Subset G \text{ mit } e \in V \text{ und } (xy^{-1} \in V \Rightarrow (x,y) \in A)\} \end{array}$$

Beispiel 4.1.7. Gegeben eine abelsche Gruppe G mit einem System von Untergruppen $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(G)$, das stabil ist unter endlichen Schnitten, können wir auf G eine uniforme Struktur erklären durch die Vorschrift

$$\mathcal{A} := \{A \subset G \times G \mid \exists V \in \mathcal{U} \text{ mit } (x - y \in V \Rightarrow (x,y) \in A)\}$$

Definition 4.1.8. Gegeben ein Punkt $x \in X$ und ein Abstand $A \in \mathcal{A}$ erklären wir den A**-Ball um** x als die Menge

$$\mathrm{B}(x; A) := \{y \in X \mid (y, x) \in A\}$$

Wir nennen eine Menge $U \subset X$ **uniform offen** oder meist einfach nur **offen**, wenn sie mit einem Element stets auch einen ganzen Ball um besagtes Element umfaßt. Die uniform offenen Mengen bilden dann eine Topologie auf X, die **uniforme Topologie**.

Beispiel 4.1.9. Unsere uniformen Strukturen auf einer topologischen Gruppe aus 4.1.6 geben uns beide als uniforme Topologie die ursprüngliche Topologie unserer topologischen Gruppe zurück.

4.1.10 (**Offene Kerne in der uniformen Topologie**). Bezüglich der uniformen Topologie auf einem uniformen Raum X besteht der offene Kern einer Menge $M \subset X$ genau aus allen Punkten $p \in M$, um die es einen Ball $\mathrm{B}(p; A)$ gibt, der auch noch ganz in M enthalten ist. In der Tat ist diese Menge offen, denn für jedes A finden wir C mit $C^2 \subset A$ und für jeden Punkt $q \in \mathrm{B}(p; C)$ ist damit auch $\mathrm{B}(q; C)$ noch ganz in M enthalten. Daß unser offener Kern in spe die größtmögliche in M enthaltene offene Menge ist, ist dann eh klar. Insbesondere ist jeder Ball um einen Punkt auch eine Umgebung von besagtem Punkt. Dahingegen müssen unsere Bälle keineswegs offen sein.

Definition 4.1.11. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen uniformen Räumen $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es für jedes $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $(f \times f)(A) \subset B$ alias $f(\mathrm{B}(x; A)) \subset \mathrm{B}(f(x); B)$ für alle $x \in X$.

Satz 4.1.12 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta). *Jede stetige Abbildung von einem kompakten uniformen Raum in einen weiteren uniformen Raum ist gleichmäßig stetig.*

Beweis für metrische Räume. Im Fall metrischer Räume haben wir dafür bereits in [AN1] **??** einen Beweis skizziert, der vom Begriff der Folgenkompaktheit ausgeht. Zur Vorübung geben wir nun erst einmal einen alternativen Beweis im Fall metrischer Räume, der vom Begriff der Überdeckungskompaktheit ausgeht. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ unsere stetige Abbildung. Gegeben $\beta > 0$ setzen wir $\gamma := \beta/2$ und gegeben $x \in X$ finden wir $\alpha_x > 0$ mit $f(\mathrm{B}(x; \alpha_x)) \subset \mathrm{B}(f(x); \gamma)$. Nun setzen wir $\delta_x := \alpha_x/2$ und Wegen der Kompaktheit von X gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset X$ derart, daß die Bälle $\mathrm{B}(x; \delta_x)$ für $x \in E$ bereits ganz X überdecken. Jedes $z \in X$ liegt also in einem $\mathrm{B}(x; \delta_x)$ für ein $x \in E$ und damit gilt auch $\mathrm{B}(z; \delta_x) \subset \mathrm{B}(x; \alpha_x)$. Nehmen wir nun $\delta := \min\{\delta_x \mid x \in E\}$, so gibt es für jedes $z \in X$ ein $x \in E$ mit $\mathrm{B}(z; \delta) \subset \mathrm{B}(x; \alpha_x)$ und folglich $f(\mathrm{B}(z; \delta)) \subset \mathrm{B}(f(x); \gamma)$. Nun haben aber je zwei Elemente des γ-Balls einen Abstand unter $2\gamma = \beta$ und so folgt $f(\mathrm{B}(z; \delta)) \subset \mathrm{B}(f(z); \beta)$. □

Beweis. Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ unsere uniformen Räume und $f : X \to Y$ unsere stetige Abbildung. Gegeben $B \in \mathcal{B}$ wählen wir zunächst $C \in \mathcal{B}$ mit $C = C^{-1}$ und $C^2 \subset B$. Für jedes $x \in X$ finden wir dann $A_x \in \mathcal{A}$ mit $f(\mathrm{B}(x; A_x)) \subset \mathrm{B}(f(x); C)$. Weiter finden wir $D_x \in \mathcal{A}$ mit $D_x^2 \subset A_x$ und $D_x = D_x^{-1}$. Wegen der Kompaktheit von X gibt es nun eine endliche Teilmenge $E \subset X$ derart, daß die Bälle $\mathrm{B}(x; D_x)$ für $x \in E$ bereits ganz X überdecken. Jedes $z \in X$ liegt also in einem $\mathrm{B}(x; D_x)$ für ein $x \in E$ und damit gilt auch $\mathrm{B}(z; D_x) \subset \mathrm{B}(x; A_x)$. Nehmen wir nun $D := \bigcap_{x \in E} D_x$, so gibt es für jedes $z \in X$ ein $x \in E$ mit $\mathrm{B}(z; D) \subset \mathrm{B}(x; A_x)$ und folglich $f(\mathrm{B}(z; D)) \subset \mathrm{B}(f(x); C)$. Für alle Elemente von $\mathrm{B}(f(x); C)$ und insbesondere für $f(z)$ gilt aber $\mathrm{B}(f(z); C^2) \supset \mathrm{B}(f(x); C)$. So folgt schließlich $f(\mathrm{B}(z; D)) \subset \mathrm{B}(f(z); B)$. □

Übungen

Übung 4.1.13. Jede stetige Abbildung von einem uniformen Raum in einen weiteren uniformen Raum, die außerhalb von einem Kompaktum konstant ist, ist gleichmäßig stetig. Hinweis: Man arbeite zunächst auf dem besagten Kompaktum K und finde dort zu B ein A. Dann betrachte man $F \in \mathcal{A}$ mit $F = F^{-1}$ und $F^2 \subset A$. Trifft nun ein Ball $\mathrm{B}(z; F)$ das Kompaktum K, so ist er bereits in einem Ball $\mathrm{B}(y; A)$ mit $y \in K$ enthalten.

Übung 4.1.14. Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ eine uniforme Struktur. Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ heißt ein **Erzeugendensystem der uniformen Struktur** $\mathcal{A}$, wenn die Elemente von $\mathcal{A}$ genau alle Obermengen von Elementen von $\mathcal{E}$ sind. Man zeige, daß in einer abzählbar erzeugten uniformen Struktur jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Übung 4.1.15. Jede Verknüpfung gleichmäßig stetiger Abbildungen zwischen uniformen Räumen ist gleichmäßig stetig. Die Identität auf einem uniformen Raum ist gleichmäßig stetig. Die uniformen Räume bilden mithin eine Kategorie Unif. Man zeige, daß diese Kategorie Produkte besitzt.

4.2 Riesz'scher Darstellungssatz

4.2.1. Unter einem **Borelmaß** auf einem topologischen Raum verstehen wir wie in [AN3] 1.1.22 ein topologisches Maß, das auf allen abgeschlossenen Kompakta unseres Raums endliche Werte annimmt. Diese Terminologie ist gängig, aber kein universeller Standard. Wir werden jedoch Borelmaße eh nur auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen betrachten, für die die Konventionen der meisten Autoren dieselben Borelmaße liefern. Die Menge aller Borelmaße auf X notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{bor}}(X; [0, \infty])$$

Definition 4.2.2. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt **nichtnegativ**, wenn sie jeder nichtnegativen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet. Eine nichtnegative Linearform heißt ein **Radon-Maß** oder genauer ein **nichtnegatives Radon-Maß** auf unserem topologischen Raum. Die Menge aller nichtnegativen Radonmaße auf X notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X; [0, \infty))$$

4.2.3. Ein Radon-Maß ist kein Maß im Sinne einer Funktion auf einer σ-Algebra [AN3] 1.1.11. Der folgende Satz zeigt jedoch, daß diese Begriffe eng verwandt sind. Man beachte, daß wir von unserer Linearform keinerlei zusätzliche Stetigkeitseigenschaften fordern. Wir werden in 4.2.7 sehen, daß die Forderung der Nichtnegativität bereits gewisse Stetigkeitseigenschaften impliziert.

Satz 4.2.4 (**Riesz'scher Darstellungssatz**). *Für jeden lokal kompakten abzählbar basierten Hausdorffraum X liefert das Bilden des Integrals eine Bijektion*

$$\mathrm{M}^{\mathrm{bor}}(X; [0, \infty]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X; [0, \infty))$$

zwischen der Menge aller Borelmaße und der Menge aller Radonmaße auf X.

4.2.5. In anderen Worten können wir also jede nichtnegative Linearform durch genau ein Borelmaß darstellen, deshalb auch die Bezeichnung als Darstellungssatz. Wir beginnen den Beweis des Satzes mit dem Nachweis, daß nichtnegative Linearformen automatisch gewisse Stetigkeitseigenschaften haben.

Ergänzung 4.2.6 (**Verallgemeinerung auf nicht abzählbar basierte Räume**). Für jeden lokal kompakten Hausdorffraum X liefert allgemeiner das Bilden des Integrals eine Bijektion

$$\{\text{Reguläre Borelmaße auf } X\} \quad \xrightarrow{\sim} \quad \{\text{Radonmaße auf } X\}$$

Hier sind reguläre Borelmaße wie in [AN3] 1.10.12 zu verstehen als Borelmaße mit den Eigenschaften, daß (1) das Maß jeder offenen Menge das Supremum über die Maße der in ihr enthaltenen Kompakta ist und (2) das Maß jeder meßbaren Menge das Infimum über die Maße der sie umfassenden offenen Mengen. Man mag das in [Hal70] oder [Rud87] oder [**?**] nachlesen. Betrachten wir zum Beispiel eine überabzählbare Menge mit der diskreten Topologie und das Borelmaß, das jeder abzählbaren Menge Null zuordnet und jeder überabzählbaren Menge Unendlich, so ist das Integral jeder stetigen Funktion mit kompaktem Träger Null, obwohl unser Maß nicht identisch verschwindet. Allerdings sind in diesem Fall auch unsere Regularitätsbedingungen nicht erfüllt, genauer ist hier unsere erste Regularitätsbedingung verletzt. Meines Erachtens sind auf topologischen Räumen Radonmaße der natürlichere Begriff. Dennoch ist der Übergang zu regulären Borelmaßen oft von Nutzen.

Lemma 4.2.7 (**Stetigkeitseigenschaften nichtnegativer Linearformen**). *Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und eine nichtnegative Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ und ein Kompaktum $K \subset X$ ist die Einschränkung von Λ auf den Raum $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit Träger in K stetig für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.*

Beweis. Das Lemma von Urysohn oder genauer 3.1.10 liefert eine stetige nichtnegative Funktion $h \in \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$, die auf unserem Kompaktum K konstant Eins ist. Für $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ gilt dann $-\|f\|_\infty \, h \leq f \leq \|f\|_\infty \, h$ und Anwenden von Λ liefert $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(h) \, \|f\|_\infty$. □

Ergänzung 4.2.8. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X verstehen wir unter einem **reellen Radonmaß auf** X eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum $K \subset X$ die Einschränkung von Λ auf den Raum $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit Träger in K stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Den Vektorraum der reellen Radonmaße notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X; \mathbb{R})$$

Das Analogon des Riesz'schen Darstellungssatzes für reelle Maße gilt nicht. Bereits für $X = \mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie ist $f \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n f(n)$ ein reelles Radonmaß, das nicht als eine Integration über ein reelles Borelmaß $\mu \in \mathrm{M}^{\mathrm{bor}}(X; \mathbb{R})$ realisiert werden kann.

Beweis des Darstellungssatzes 4.2.4. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung und betrachten die σ-Algebra aller Borelmengen in $X \times \mathbb{R}$. Wir behaupten, daß sie bereits erzeugt wird von den „Graphenflächen"

$$G(f) = \{(x,t) \mid 0 \leq t < f(x)\}$$

für alle nichtnegativen $f \in \mathcal{C}_!(X,[0,\infty))$ sowie ihren in der zweiten Koordinate verschobenen Kopien $\{(x,t) \mid 0 \leq t+a < f(x)\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Um das nachzuweisen, reicht es zu zeigen, daß die von den verschobenen Graphenflächen erzeugte σ-Algebra bereits alle Quader $U \times [a,b)$ mit $U \Subset X$ offen enthält. Sicher dürfen wir uns hier auf Quader $U \times [0,b)$ beschränken, und nach 3.1.11 dürfen wir, da wir X abzählbar basiert voraussetzen, sogar annehmen, daß gilt $U = \{x \mid f(x) > 0\}$ für eine stetige Funktion $f : X \to [0,\infty)$ mit kompaktem Träger. Dann aber erhalten wir für den fraglichen Quader die Darstellung

$$U \times [0,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G(\inf(nf,b))$$

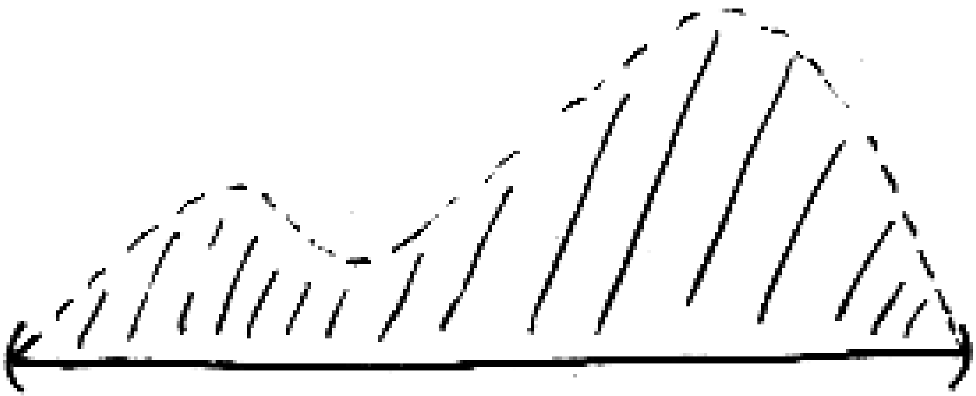
Bezeichne nun $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X \times \mathbb{R})$ den von allen verschobenen Graphenflächen erzeugten Mengenring und bezeichne λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Wir behaupten, daß für alle $G \in \mathcal{G}$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f_G : & X & \to & [0,\infty) \\ & x & \mapsto & \lambda(G \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)) \end{array}$$

stetig ist. Um das zu sehen, betrachten wir für alle stetigen $f : X \to \mathbb{R}$ den „Halbraum"

$$H(f) := \{(x,t) \mid t < f(x)\}$$

Sicher gilt $H(f) \cap H(g) = H(\inf(f,g))$ und $H(f) \cup H(g) = H(\sup(f,g))$. Betrachten wir die leere Menge und die ganze Menge auch als Halbräume, so ist das System aller Halbräume mithin stabil unter endlichen Schnitten und endlichen Vereinigungen. Der von allen Halbräumen erzeugte Mengenring besteht nach [AN3] 1.2.33 folglich aus endlichen disjunkten Vereinigungen von Differenzmengen von derartigen Halbräumen. Insbesondere ist jede Menge $G \in \mathcal{G}$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Mengen der Gestalt $H(f)\backslash H(g)$ mit $f,g : X \to \mathbb{R}$ stetig, und das zeigt, daß f_G stetig ist für alle $G \in \mathcal{G}$. Wir behaupten nun, daß für $\Lambda : \mathcal{C}_!(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Linearform die Zuordnung $G \mapsto \Lambda(f_G)$ sogar ein Prämaß auf $\mathcal{G}$ ist. In der Tat folgt das aus der Stetigkeitseigenschaft 4.2.7 nichtnegativer Linearformen mit dem Satz von Dini [AN1] **??**, der besagt, daß auf einem Kompaktum jede monotone Folge stetiger reellwertiger Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, bereits gleichmäßig konvergieren muß. Jede nichtnegative Linearform auf $\mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$ liefert so erst ein Prämaß auf $\mathcal{G}$ und mit dem Erweiterungssatz von Caratheodory



Eine verschobene Graphenfläche

[AN3] 1.2.11 dann ein topologisches Maß π_Λ auf $X \times \mathbb{R}$. Wir erhalten schließlich ein topologisches Maß μ_Λ auf X, indem wir für jede topologisch meßbare Teilmenge $A \subset X$ setzen

$$\mu_\Lambda(A) = \pi_\Lambda(A \times [0,1))$$

Dieses Maß μ_Λ ist endlich auf Kompakta, da wir nach 3.1.10 für jedes Kompaktum K die konstante Funktion Eins auf K zu einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger $h : X \to [0,\infty)$ ausdehnen können, und aus $K \times [0,1) \subset G(h)$ folgt dann sofort $\mu_\Lambda(K) \leq \Lambda(h)$. Damit haben wir zu unserer durch das Integrieren erklärten Abbildung im Darstellungssatz eine Abbildung in die Gegenrichtung konstruiert, der man ohne Schwierigkeiten ansieht, daß sie eine Rechtsinverse ist, in Formeln $\int f\mu_\Lambda = \Lambda(f)$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Abbildung aus unserem Satz injektiv ist, als da heißt, daß verschiedene Borelmaße $\mu \neq \nu$ auf X auch verschiedene Funktionale auf $\mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$ liefern. Sicher liefern sie verschiedene Maße $\mu \boxtimes \lambda \neq \nu \boxtimes \lambda$ auf $X \times \mathbb{R}$ und wegen der Eindeutigkeitsaussage im Maßerweiterungssatz [AN3] 1.2.11 nehmen sie dann auch auf mindestens einer Menge $G \in \mathcal{G}$ verschiedene Werte an. Mit Fubini folgt daraus aber, daß μ und ν verschieden sind auf $f_G \in \mathcal{C}_!(X,\mathbb{R})$. $\square$

Übungen

Übung 4.2.9. Gegeben ein reguläres Borelmaß μ auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X liegen die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht im Raum der L^p-Funktionen für jedes $p < \infty$, in Formeln

$$\overline{\mathcal{C}_!(X)} = \mathrm{L}^p(X;\mu)$$

Hinweis: Nach [AN3] 2.3.21 liegt das Erzeugnis der charakteristischen Funktionen von Mengen endlichen Maßes dicht. Aufgrund der Regularität liegt sogar das Erzeugnis der charakteristischen Funktionen von offenen Mengen endlichen Maßes dicht. Und wieder aufgrund der Regularität können wir in jede offene Menge endlichen Maßes eine kompakte Menge fast desselben Maßes hineinlegen und dann eine nichtnegative stetige Funktion mit kompaktem Träger finden, die auf diesem Kompaktum Eins ist und außerhalb unserer offenen Menge Null.

Übung 4.2.10. Jedes reelle Radonmaß auf einem lokal kompakten Hausdorffraum ist die Differenz von zwei nichtnegativen Radonmaßen. Hinweis: Man orientiert sich an den Hinweisen zu [AN3] 4.6.6.

Übung 4.2.11. Gegeben ein lokal kompakter abzählbar basierter Hausdorffraum X liefert das Bilden des Produkts mit dem Lebesguemaß eine Bijektion

$$\{\text{Borelmaße auf } X\} \xrightarrow{\sim} \{\text{translationsinvariante Borelmaße auf } X \times \mathbb{R}\}$$

4.3 Haarmaße

4.3.1. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Ich erinnere daran 4.2.2, daß nach wir unter einem **Radonmaß auf** X eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ verstehen, die jeder nichtnegativen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet.

Definition 4.3.2. Unter einem **Haar-Maß** oder genauer einem **linksinvarianten Haar-Radonmaß** auf einer topologischen Gruppe G verstehen wir ein von Null verschiedenes nichtnegatives Radonmaß μ mit der Eigenschaft $\mu(f \circ (x\cdot)) = \mu(f)$ für alle $x \in G$ und alle $f \in \mathcal{C}_!(G, \mathbb{R})$.

Satz 4.3.3 (über Haar'sche Maße). *1. Auf jeder lokal kompakten Hausdorffgruppe gibt es ein Haarmaß und je zwei Haarmaße darauf unterscheiden sich höchstens um einen positiven konstanten reellen Faktor;*

2. Ein Haarmaß auf einer lokal kompakten Hausdorffgruppe ordnet jeder von Null verschiedenen nichtnegativen Funktion mit kompaktem Träger eine positive Zahl zu.

Ergänzung 4.3.4. Die Hausdorff-Bedingung im Satz ist überflüssig. Genauer kann man mit 2.2.19 den allgemeinen Fall auf den Fall einer Hausdorffgruppe zurückführen.

Beispiele 4.3.5. Haarmaße auf Matrixliegruppen werden in [ML] 2.4 diskutiert, Haarmaße auf beliebigen Liegruppen in [ML] 5.9.23. Typische Beispiele sind das Zählmaß auf diskreten Gruppen, das Lebesguemaß auf den additiven Gruppen $\mathbb{R}$ und allgemeiner $\mathbb{R}^n$, sowie das Maß $f \mapsto \int f(t)t^{-1}\,\mathrm{d}t$ auf der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^\times$.

4.3.6. Ein Haarmaß auf einer kompakten topologischen Gruppe, das der konstanten Funktion Eins den Wert Eins zuordnet, heißt ein **normiertes Haarmaß**.

Ergänzung 4.3.7. Ich gebe hier einen Beweis der Existenz, der den Satz von Tychonoff 3.2.10 verwendet und so implizit das Auswahlaxiom. Es ist natürlich merkwürdig, das Auswahlaxiom zu verwenden bei der Konstruktion von etwas, das im wesentlichen eindeutig ist. Einen etwas längeren Beweis, der ohne das Auswahlaxiom auskommt, kann man in [HR63] finden.

Beweis. Bezeichne $\mathcal{C}_!^+(G)$ die Menge aller $f \in \mathcal{C}_!(G, \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Gegeben $f, g \in \mathcal{C}_!^+(G)$ mit $g \neq 0$ gibt es $x_1, \ldots, x_n \in G$ und $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ mit

$$f(z) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i g(x_i z) \quad \forall z \in G$$

Wir definieren $(f : g) \in \mathbb{R}$ als das Infimum der möglichen $\sum_{i=1}^n a_i$ für alle Wahlen wie eben und haben für alle $f, f_1, f_2, h \in \mathcal{C}_!^+(G)$ offensichtlich

1. $(f \circ (x\cdot) : g) = (f : g) \;\; \forall x \in G$;
2. $(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g)$;
3. $(cf : g) = c(f : g) \quad$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;
4. $f_1 \leq f_2 \Rightarrow (f_1 : g) \leq (f_2 : g)$;
5. $(f : g) \leq (f : h)(h : g) \quad$ falls $h \neq 0$;
6. $f \neq 0 \Rightarrow (f : g) > 0$.

Jetzt wählen wir ein für allemal ein festes $w \in \mathcal{C}_!^+(G)$ mit $w(e) \neq 0$. Es existiert, denn das neutrale Element besitzt eine offene Umgebung mit kompaktem Abschluß und wir können nach Urysohn 3.1.7 eine stetige Funktion von diesem Abschluß nach $[0, 1]$ finden, die auf seinem Rand Null ist und beim neutralen Element Eins. Dann dehnen wir diese stetige Funktion durch Null aus auf die ganze Gruppe. Jetzt betrachten wir für jedes von Null verschiedene $g \in \mathcal{C}_!^+(G)$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \mu_g : & \mathcal{C}_!^+(G) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & f & \mapsto & \mu_g(f) = (f : g)/(w : g) \end{array}$$

Diese Abbildungen sind zu verstehen als Approximationen unseres Haar'schen Maßes, normalisiert durch die Bedingung $\mu_g(w) = 1$. Sicher gilt für diese Approximationen:

1. $\mu_g(f \circ (x\cdot)) = \mu_g(f) \;\; \forall x \in G$;
2. $\mu_g(cf) = c\mu_g(f) \quad$ für beliebiges $c \geq 0$;
3. $\mu_g(f_1 + f_2) \leq \mu_g(f_1) + \mu_g(f_2)$.

Des weiteren gelten für beliebige von Null verschiedene $f, g \in \mathcal{C}_!^+(G)$ die Abschätzungen

$$(f : w) = \frac{(f : w)(w : g)}{(w : g)} \geq \mu_g(f) \geq \frac{(f : g)}{(w : f)(f : g)} = \frac{1}{(w : f)}$$

Wir zeigen als Zwischenschritt sogar eine Abschätzung in der Gegenrichtung.

Lemma 4.3.8. *Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_!^+(G)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. So gibt es eine offene Umgebung $V = V(f_1, f_2, \varepsilon)$ von $e \in G$ derart, daß für alle $g \in \mathcal{C}_!^+(V)\backslash 0$ gilt*

$$\mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) \leq \mu_g(f_1 + f_2) + \varepsilon$$

Beweis. Zunächst einmal finden wir eine Funktion $h \in \mathcal{C}_!^+(G)$ mit $h(z) = 1$ $\forall z \in \operatorname{supp}(f_1 + f_2)$. Diese Funktion halten wir für den folgenden Beweis fest. Gegeben ein $\delta > 0$, das am Schluß genügend klein gewählt werden muß, setzen wir nun $f = f^\delta = f_1 + f_2 + \delta h$ und betrachten die Funktionen $h_\nu = h_\nu^\delta = f_\nu / f$, stetig fortgesetzt durch Null auf die Nullstellenmenge von f. Wegen der in 4.1.13 gezeigten gleichmäßigen Stetigkeit der h_ν finden wir eine offene Umgebung $V = V(\delta, f_1, f_2)$ des neutralen Elements mit $|h_\nu(z) - h_\nu(y)| < \delta$ falls $y \in zV$ für $\nu = 1, 2$. Nehmen wir nun irgendein $g \in \mathcal{C}_!^+(G)$ mit $g \neq 0$ und wählen irgendwelche $a_i \geq 0$ und $x_i \in G$ mit

$$f(z) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i g(x_i z) \quad \forall z,$$

so folgt unter der Zusatzbedingung $\operatorname{supp}(g) \subset V$ bereits

$$\begin{array}{rcl} f_\nu(z) & \leq & \sum_{i=1}^n a_i g(x_i z) h_\nu(z) \\ & \leq & \sum_{i=1}^n a_i g(x_i z)(h_\nu(x_i^{-1}) + \delta) \end{array}$$

da ja gilt $g(x_i z) \neq 0 \Rightarrow x_i z \in V \Rightarrow z \in x_i^{-1} V$. Immer unter unserer Zusatzbedingung $\operatorname{supp}(g) \subset V$ folgt weiter erst

$$(f_\nu : g) \leq \sum a_i (h_\nu(x_i^{-1}) + \delta)$$

und wegen $h_1 + h_2 \leq 1$ dann

$$\begin{array}{rcl} (f_1 : g) + (f_2 : g) & \leq & \sum a_i (1 + 2\delta) \\ (f_1 : g) + (f_2 : g) & \leq & (f : g)(1 + 2\delta) \\ & \leq & ((f_1 + f_2 : g) + \delta(h : g))(1 + 2\delta) \\ \mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) & \leq & (\mu_g(f_1 + f_2) + \delta \mu_g(h))(1 + 2\delta) \\ & \leq & (\mu_g(f_1 + f_2) + \delta(h : w))(1 + 2\delta) \end{array}$$

Das Lemma ergibt sich, wenn wir zu Beginn δ in Abhängigkeit von ε klein genug wählen und das zugehörige V nehmen. □

Setzen wir für $f \neq 0$ nun $I_f = [(w : f)^{-1}, (f : w)]$, so gilt nach einer früheren Abschätzung $\mu_g(f) \in I_f$ für alle $f \neq 0$. Damit kann man μ_g auffassen als einen Punkt des Produkts

$$I := \prod_{0 \neq f \in \mathcal{C}_!^+(G)} I_f$$

Mit der Produkttopologie wird I ein Kompaktum nach dem Satz von Tychonoff 3.2.10. Für $V \Subset G$ eine offene Umgebung des neutralen Elements betrachten wir nun

$$K_V := \overline{\{\mu_g | \operatorname{supp} g \subset V\}} \subset I$$

Sicher gilt $V \subset W \Rightarrow K_V \subset K_W$ und wir folgern, daß es ein $\mu \in I$ gibt mit $\mu \in K_V \; \forall V$. Wir verstehen nun μ als eine Abbildung $\mu : \mathcal{C}_!^+(G) \to \mathbb{R}$, indem wir $\mu(f)$ als die Projektion von μ auf seine f-Komponente definieren für $f \neq 0$ und $\mu(0) = 0$ setzen. Dann behaupten wir, daß das so erklärte μ additiv ist und mit der Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren vertauscht. Gegeben $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_!^+(G)$ und $\varepsilon > 0$ und V eine Umgebung des neutralen Elements finden wir ja nach der Definition der Produkttopologie ein $g \in \mathcal{C}_!^+(V)$ mit

$$|\mu(f_i) - \mu_g(f_i)| < \varepsilon \text{ für } i = 1, 2.$$

Es folgt für $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}_!^+(G)$ bereits $\mu(cf) = c\mu(f)$ falls $c \geq 0$, $\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2)$ sowie $\mu(f \circ (x\cdot)) = \mu(f) \quad \forall x \in G$. Für beliebiges $f \in \mathcal{C}_!(G)$ setzen wir $f^{\pm} = \sup(\pm f, 0)$ und $\mu(f) = \mu(f^+) - \mu(f^-)$ und haben damit die Existenz eines Haar'schen Maßes nachgewiesen. Wir zeigen nun noch die Eindeutigkeit. Dazu benötigen wir Produktmaße, wie sie im Anschluß in 4.3.10 diskutiert werden. Gegeben zwei Haarmaße μ, ν auf einer lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe G benutzen wir im Folgenden die Konvention, nach der über die Variable x nach μ und über die Variable y nach ν integriert werden möge. Damit finden wir nach 4.3.10 oder im abzählbar basierten Fall auch alternativ nach Riesz 4.2.4 und Fubini [AN3] 1.7.16 für $f, h \in \mathcal{C}_!(G, \mathbb{R})$ beliebig

$$\begin{aligned} \mu(f)\nu(h) - \nu(f)\mu(h) &= \int f(x)h(y) - f(y)h(x) \\ &= \int f(x)h(x^{-1}y) - f(y)h(x) \\ &= \int f(yx)h(x^{-1}) - f(y)h(x) \end{aligned}$$

Unter der zusätzlichen Annahme, daß h nichtnegativ und symmetrisch sei, in Formeln $h \geq 0$ und $h(x) = h(x^{-1}) \; \forall x \in G$, ergibt sich die Abschätzung

$$|\mu(f)\nu(h) - \nu(f)\mu(h)| \leq \mu(h) \sup |f(yx) - f(y)|$$

Dabei ist das Supremum über alle $x \in \operatorname{supp} h$ und $y \in G$ zu bilden. Indem wir die gleichmäßige Stetigkeit von f nach 4.1.13 ausnützen und h mit sehr kleinem Träger um das neutrale Element herum wählen, finden wir bei festem $f \geq 0$ mit $f \neq 0$ für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung des neutralen Elements derart, daß für alle $h \geq 0$ mit $h \neq 0$ und Träger in dieser Umgebung $U(f, \varepsilon)$ gilt

$$\left| \frac{\nu(h)}{\mu(h)} - \frac{\nu(f)}{\mu(f)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(f)}$$

Daraus folgt dann die Eindeutigkeit, denn gegeben von Null verschiedene $f, g \geq 0$ kommen wir mit demselben $\frac{\nu(h)}{\mu(h)}$ sowohl an $\frac{\nu(f)}{\mu(f)}$ als auch an $\frac{\nu(g)}{\mu(g)}$ beliebig nah heran. $\square$

4.3.9. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X mit einem Radonmaß μ und eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $f : X \to \mathbb{C}$ verwende ich auch die Schreibweise

$$\mu(f) =: \int_X f(x)\mu\langle x\rangle$$

Proposition 4.3.10 (Produkte von Radonmaßen). *Seien lokal kompakte Hausdorffräume X, Y mit Radonmaßen μ, ν gegeben. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Radonmaß $\mu \boxtimes \nu$ auf dem Produktraum $X \times Y$ mit*

$$\int f(x)g(y)(\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle = \left(\int f(x)\mu\langle x\rangle\right)\left(\int g(y)\nu\langle y\rangle\right)$$

   für alle $f \in \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{C}_!(Y, \mathbb{R})$;

2. *Für alle $h \in \mathcal{C}_!(X \times Y; \mathbb{R})$ gehört die Abbildung $x \mapsto \int h(x, y)\nu(y)$ zu $\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ und es gilt $\int h(x, y)(\mu \boxtimes \nu)\langle x, y\rangle = \int(\int h(x, y)\nu\langle y\rangle)\mu\langle x\rangle$;*

Insbesondere darf also die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

4.3.11. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und ein Kompaktum $K \subset X$ bezeichne $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ den Raum aller stetigen reellen Funktionen mit Träger in K, versehen mit seiner $\sup$-Norm. In dieser Situation ist jedes positive Funktional $\varphi : \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$, denn es gibt $h \in \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ mit $h \geq 0$ und $h_K = 1$, und für $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ folgt aus $\|f\| \leq 1$ sofort $|\varphi(f)| = |\varphi(f^+) - \varphi(f^-)| \leq \varphi(h)$.

Beweis. Ist X ein beliebiger topologischer Raum und Y kompakt, so macht die offensichtliche Identifikation $\operatorname{Ens}(X \times Y, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(X, \operatorname{Ens}(Y, \mathbb{R}))$ jede stetige Abbildung $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $X \to \mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$ für die $\sup$-Norm auf $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$, vergleiche 1.9.9. Sind also X und Y lokal kompakte Hausdorffräume und ist $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger und ν ein Radonmaß auf Y, so ist auch $x \mapsto \int h(x, y)\nu\langle y\rangle$ stetig mit kompaktem Träger. Das zeigt schon mal, daß das Doppelintegral im zweiten Teil des Satzes existiert wie behauptet. Insbesondere erhalten wir so ein Radonmaß auf $X \times Y$, das die Bedingung aus Teil 1 erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß es das Einzige ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß sich für beliebige Kompakta $K \subset X$ und $L \subset Y$ jedes $h \in \mathcal{C}_{K \times L}(X \times Y, \mathbb{R})$ beliebig gut gleichmäßig appoximieren läßt durch endliche Linearkombinationen von äußeren Produkten $u \boxtimes v$ mit $u \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}_L(Y, \mathbb{R})$. Auf dem kompakten Raum Z, der aus $X \times Y$ entsteht, wenn man den Abschluß des Komplements von $K \times L$ zu einem Punkt $*$ identifiziert, bilden diese Linearkombinationen aber zusammen mit der Eins eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(Z, \mathbb{R})$, die die Punkte trennt. Damit sagt uns Stone-Weierstraß [AN1] **??**, daß wir beliebige $h \in \mathcal{C}(Z, \mathbb{R})$ beliebig gut durch Elemente dieser Unteralgebra approximieren können, und Funktionen mit $h(*) = 0$ sogar beliebig gut durch Linearkombinationen von externen Produkten $u \boxtimes v$. $\square$

4.3.12 (**Modulare Funktion**). Gegeben eine Gruppe G und $h \in G$ ist das Vorschalten der Rechtsverschiebung $(\cdot h) : G \to G$ eine Abbildung $(\circ(\cdot h)) : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G)$. Gegeben eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G mit Haarmaß μ ist für jedes Gruppenelement $h \in G$ auch $\mu \circ (\circ(\cdot h))$ ein Haarmaß und es gibt folglich $\Delta(h) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\mu \circ (\circ(\cdot h)) = \Delta(h)\mu$. Offensichtlich ist dann

$$\Delta : G \to \mathbb{R}_{>0}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Er heißt die **modulare Funktion** von G. Sie ist stetig, denn halten wir eine nichtnegative von Null verschiedene stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit kompaktem Träger fest und wählen eine kompakte Umgebung $K \subset G$ des neutralen Elements, so gibt es eine stetige Funktion $s : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s = 1$ auf $(\operatorname{supp} f)K$ und $s = 0$ außerhalb von $(\operatorname{supp} f)K^2$ und aus Gründen der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_ε des neutralen Elements mit $|f(g) - f(gx)| \leq \varepsilon \ \forall x \in U_\varepsilon, \ g \in G$. Für $x \in U_\varepsilon \cap K$ folgt $|\mu(f) - \mu(f \circ (\cdot x))| \leq \varepsilon\mu(s)$ und das zeigt die Stetigkeit von Δ bei $h = 1$ und damit die Stetigkeit überhaupt.

Definition 4.3.13. Unter einem **Haar'schen Borelmaß** oder genauer einem **linksinvarianten Haar'schen Borelmaß** auf einer topologischen Gruppe G verstehen wir ein von Null verschiedenes nichtnegatives Borelmaß μ mit der Eigenschaft $\mu(gA) = \mu(A)$ für jede Borelmenge $A \subset G$ und alle $g \in G$.

Korollar* 4.3.14 (Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Borelmaße). *Auf jeder abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe gibt es ein Haar'sches Borelmaß, und je zwei Haar'sche Borelmaße auf einer derartigen topologischen Gruppe unterscheiden sich höchstens um einen konstanten positiven reellen Faktor.*

Beweis. Man kombiniere die Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Radonmaße 4.3.3 mit dem Riesz'schen Darstellungssatz 4.2.4. $\square$

Ergänzung 4.3.15. Die Forderung der Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie ist jedenfalls notwendig, um die Eindeutigkeit bis auf einen konstanten Faktor zu sichern. Ist zum Beispiel G eine überabzählbare Gruppe mit der diskreten Topologie, so wäre das Zählmaß ein Haar'sches Borelmaß in unserem Sinne, aber auch das Maß, das jeder abzählbaren Teilmenge das Maß Null zuordnet und jeder überabzählbaren Teilmenge das Maß Unendlich. In diesem Fall gälte die Eindeutigkeit bis auf einen konstanten Faktor also nicht. Man kann die Eindeutigkeit Haar'scher Borelmaße durch zusätzliche Forderungen an die fraglichen

Borelmaße auch in dieser Allgemeinheit sichern, vergleiche etwa [**?**]. Diesen Aufwand will ich jedoch vermeiden, da den meisten von uns aller Voraussicht nach kaum einmal lokal kompakte topologische Gruppen begegnen werden, die nicht abzählbar basiert sind.

Übungen

Übung 4.3.16. Man zeige, daß jedes linksinvariante Haarmaß auf einer kompakten topologischen Gruppe auch rechtsinvariant ist.

Übung 4.3.17. Gegeben ein Haar'sches Borelmaß auf einer abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe hat jede nichtleere offene Teilmenge positives Maß. Hinweis: Urysohn.

Übung 4.3.18. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G mit einem Haar'schen Radonmaß μ ist jedes Radonmaß π auf $X \times G$, das unter G linksinvariant ist, von der Gestalt $\pi = \nu \boxtimes \mu$ für ein wohlbestimmtes Radonmaß ν auf X. Hinweis: Für $f \in \mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ erkläre man $\mu_f : \mathcal{C}_!(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $\mu_f(k) := \pi(f \boxtimes k)$ und erhält ein Haarmaß, also $\mu_f = \nu(f)\mu$ für eine wohlbestimmte Konstante $\nu(f)$.

Übung 4.3.19. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X mit einem Radonmaß ν und eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G mit einem Haar'schen Radonmaß μ ist das Produktmaß $\nu \boxtimes \mu$ invariant unter der Eichgruppe des trivialen G-Hauptfaserbündels $X \times G$, als da heißt unter allen Abbildungen der Gestalt $(x, g) \mapsto (x, s(x)g)$ für $s : X \to G$ stetig.

Übung 4.3.20. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und eine lokal kompakte Hausdorffgruppe G und ein G-Hauptfaserbündel $P \twoheadrightarrow X$ bilden wir ein $\mathbb{R}_{>0}$-Hauptfaserbündel $\Delta(P)$, indem wir jedem Punkt $x \in X$ den $\mathbb{R}_{>0}$-Torsor der G-rechtsinvarianten Haarmaße auf der Faser P_x zuordnen und die disjunkte Vereinigung dieser $\mathbb{R}_{>0}$-Torsoren in der offensichtlichen Weise mit einer Topologie versehen.

Übung 4.3.21 (**Formelsammlung für Radonmaße**). Bildmaße von Radonmaßen konstruiert man leicht für eigentliche stetige Abbildungen sowie im Fall kompakt getragener Radonmaße auch für beliebige stetige Abbildungen, jeweils von lokal kompakten Hausdorffräumen. Man zeige, daß in beiden Fällen alle Formeln unserer Formelsammlung [AN3] 1.7.25 gelten, als da wären die Natürlichkeit, Eins, Assoziativität und Kommutativität von Produktmaßen sowie die Funktorialität von Bildmaßen.

4.4 Matrixkoeffizienten

4.4.1. Ich beginne mit Erinnerungen zu [NAS] 4.5.4. Ist V eine Darstellung eines Monoids G über einem Körper k, so erklärt man für $v \in V$ und $\varphi \in V^*$ den **Matrixkoeffizienten** $c_{\varphi,v} : G \to k$ durch die Vorschrift $c_{\varphi,v}(g) := \varphi(gv)$ für alle $g \in G$. So erhalten wir eine Abbildung, die **Matrixkoeffizientenabbildung**

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_k V^* & \to & \mathrm{Ens}(G, k) \\ v \otimes \varphi & \mapsto & c_{\varphi,v} \end{array}$$

4.4.2. Jedes Monoid G trägt eine natürliche Operation des Monoids $G \times G^{\mathrm{opp}}$ vermittels der Vorschrift $(x, y^\circ)z := xzy$. Gegeben eine Menge E erhalten wir auch eine Operation von $G \times G^{\mathrm{opp}}$ auf $\mathrm{Ens}(G, E)$ durch die Vorschrift $((y, x^\circ)f)(z) := f(xzy)$. Ich verwende die abkürzenden Notationen (yf) für die Funktion gegeben durch $(yf)(z) = f(zy)$ und $(x^\circ f) = (fx)$ für die Funktion gegeben durch $(x^\circ f)(z) = (fx)(z) = f(xz)$. Insbesondere erhalten wir damit $u^\circ(x^\circ f) = (u^\circ x^\circ)f = (xu)^\circ f$, was im Sinne unserer Notation [GR] 2.3.33 vernünftig ist. Gegeben ein Körper k und eine Darstellung V von G über k ist unsere Matrixkoeffizientenabbildung ein Homomorphismus

$$V \boxtimes_k V^* \to \mathrm{Ens}(G, k)$$

von Darstellungen des Monoids $G \times G^{\mathrm{opp}}$.

4.4.3 (**Funktionen auf Monoiden als Matrixkoeffizienten**). Sei G ein Monoid und k ein Körper. Jede Abbildung $f : G \to k$ ist der Matrixkoeffizient $c_{\delta,f}$ der Linksoperation von G auf $V := \mathrm{Ens}(G, k)$ für $\delta := \delta_e \in V^*$ das Auswerten am neutralen Element. In der Tat rechnen wir $c_{\delta,f}(a) = \delta(af) = (af)(e) = f(a)$. Analog gilt für die Linksoperation von G^{opp} auf demselben Raum auch die Gleichheit $c_{\delta,f} = f$ von Funktionen auf G^{opp}.

Lemma 4.4.4 (Darstellende Funktionen). *Sei k ein Körper. Für eine k-wertige Funktion auf einem Monoid sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller k-wertigen Funktionen auf unserem Monoid auf;*

2. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller k-wertigen Funktionen auf unserem Monoid auf;*

3. *Unsere Funktion ist ein Matrixkoeffizient einer endlichdimensionalen Darstellung unseres Monoids über k.*

Beweis. Gegeben eine Darstellung eines Monoids G durch Endomorphismen eines endlichdimensionalen k-Vektorraums V liefern die Matrixkoeffizienten eine $(G \times G^{\mathrm{opp}})$-äquivariante Abbildung $V \boxtimes_k V^* \to \mathrm{Ens}(G, k)$ unter der Operation aus 4.4.2. Damit erhalten wir sofort $3 \Rightarrow 1\&2$. Spannt umgekehrt eine Funktion $f : G \to k$ mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum $V \subset \mathrm{Ens}(G, k)$ auf, so ist f eben der Matrixkoeffizient dieser endlichdimensionalen Darstellung zum Vektor $f \in V$ und dem Auswerten am neutralen Element $\delta \in V^*$. Das zeigt $2 \Rightarrow 3$. Spannt schließlich f mit seinen Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum $W \subset \mathrm{Ens}(G, k)$ auf, so ist f Matrixkoeffizient der endlichdimensionalen Darstellung W von G^{opp}, und dann ist f auch ein Matrixkoeffizient der kontragredienten Darstellung W^* von G. □

Lemma 4.4.5 (Stetige darstellende Funktionen). *Für eine stetige Funktion auf einem topologischen Monoid, reellwertig oder komplexwertig oder auch mit Werten in einem beliebigen topologischen Körper, sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller Funktionen auf unserem Monoid auf;*

2. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller Funktionen auf unserem Monoid auf;*

3. *Unsere Funktion ist ein Matrixkoeffizient einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung unseres Monoids.*

Beweis. Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung V eines topologischen Monoids G liefern die Matrixkoeffizienten eine $(G \times G^{\mathrm{opp}})$-äquivariante Abbildung $V \boxtimes V^* \to \mathcal{C}(G)$. Damit erhalten wir sofort $3 \Rightarrow 1\&2$. Ist umgekehrt eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und spannt mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum $V \subset \mathcal{C}(G)$ auf, so finden wir $x_1, \ldots, x_n \in G$ derart, daß die Rechtstranslate $x_1 f, \ldots, x_n f$ eine Basis dieses Teilraums bilden. Da eine Funktion, die an jeder Stelle verschwindet, schon identisch Null ist, finden wir Stellen $y_1, \ldots, y_n \in G$ derart, daß die Auswertungen dort eine Basis des Dualraums V^* liefern. Da die zugehörigen Matrixkoeffizienten $g \mapsto (gx_i f)(y_j) = f(y_j g x_i)$ alle stetig sind, muß V eine stetige Darstellung von G sein. Und nun ist f eben der Matrixkoeffizient dieser stetigen endlichdimensionalen Darstellung zum Vektor $f \in V$ und dem Auswerten am neutralen Element $\varphi \in V^*$. Das zeigt $2 \Rightarrow 3$. Spannt schließlich f mit seinen Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum $W \subset \mathrm{Ens}(G, k)$ auf, so ist f Matrixkoeffizient der endlichdimensionalen Darstellung W von G^{opp}, und dann ist f auch ein Matrixkoeffizient der kontragredienten Darstellung W^* von G. □

4.4.6 (**Die Ringalgebra der darstellenden Funktionen**). Gegeben ein ein topologisches Monoid G bilden die stetigen komplexwertigen darstellenden Funktionen in $\mathcal{C}(G)$ eine unter der komplexen Konjugation stabile Unterringalgebra

$$\mathcal{R}(G)$$

Ist in der Tat $f = c_{\varphi,v}$ für $v \in V$ und $\varphi \in V^*$, so haben wir $\bar{f} = c_{\bar{\varphi},\bar{v}}$ für $\bar{v} \in \overline{V}$, $\bar{\varphi} \in \overline{V}^*$ im Sinne von [LA2] 7.4.22. Spannen weiter $f_1, \ldots, f_d$ und $h_1, \ldots, h_s$ jeweils einen unter Linkstranslation invarianten Teilraum von $\mathcal{C}(G)$ auf, so gilt offensichtlich dasselbe für die Produkte $f_i h_j$.

Übungen

Ergänzende Übung 4.4.7. Sei G eine kompakte Liegruppe und $f : G \to \mathbb{C}$ eine darstellende Funktion mit $f(e) = 1$. Gibt es stets eine stetige Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$, für die wir $f = \rho_{11}$ haben?

Ergänzende Übung 4.4.8. Der Ring der stetigen reellen oder komplexen darstellenden Funktionen auf der Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ besteht genau aus allen Funktionen, die sich durch Polynome in den vier Matrixeinträgen ausdrücken lassen. Hinweis: [ML] 2.3.16.

4.5 Kompakte Operatoren

Definition 4.5.1. Eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen heißt **kompakt**, wenn sie die Einheitskugel auf eine Menge mit kompaktem Abschluß abbildet.

Satz 4.5.2 (Spektrum kompakter selbstadjungierter Operatoren). *Gegeben ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum ist das Erzeugnis seiner Eigenräume dicht und alle seine Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten sind endlichdimensional.*

Beweis. Sei $\mathcal{H}$ unser Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unser kompakter selbstadjungierter Operator. Wir zeigen zunächst, daß unter der Annahme $\mathcal{H} \neq 0$ entweder $\|T\|$ oder $-\|T\|$ ein Eigenwert ist, und wiederholen dazu erst einmal den Beginn des Beweises für den Satz über den Spektralradius [AN3] 4.5.1. Gegeben ein Vektor v der Länge Eins gilt $\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^2 v \rangle \leq \|v\| \|T^2 v\| = \|T^2 v\|$. Das zeigt $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$. Die andere Ungleichung gilt eh, womit wir für jeden selbstadjungierten Operator T folgern

$$\|T\|^2 = \|T^2\|$$

Unter der Annahme $\mathcal{H} \neq 0$ finden wir in $\mathcal{H}$ eine Folge von Einheitsvektoren v_n mit $\lim_{n\to\infty} \|T^2 v_n\| = \|T^2\|$. Wegen $\|T^2 v_n\| \leq \|T\|\|Tv_n\| \leq \|T\|^2 = \|T^2\|$ folgt $\lim_{n\to\infty} \|Tv_n\| = \|T\|$ zumindest falls $\|T\| \neq 0$, und im Fall $\|T\| = 0$ ist das eh klar. Wir setzen nun $c = \|T\|$ und behaupten zunächst, daß c^2 ein Eigenwert von von T^2 ist. In der Tat gilt ja

$$\|(T^2 - c^2)v_n\|^2 = \langle v_n, (T^4 - 2c^2T^2 + c^4)v_n\rangle = \|T^2 v_n\|^2 - 2c^2\|Tv_n\|^2 + c^4$$

und das strebt für $n \to \infty$ offensichtlich gegen Null. Da wir nun T kompakt angenommen hatten, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Folge Tv_n konvergent annehmen. Im Fall $c = 0$ ist unsere Behauptung eh klar, und im Fall $c \neq 0$ folgt erst die Konvergenz von $T^2 v_n$ und dann die Konvergenz der Folge $c^2 v_n$ und damit die Konvergenz der Folge v_n selber. Gilt nun etwa $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, so folgt unmittelbar $\|v\| = 1$ und $T^2 v = c^2 v$ und c^2 ist in der Tat ein Eigenwert von von T^2. Aus $(T + c)(T - c)v = 0$ folgt dann aber auch, daß entweder v ein Eigenvektor von T zum Eigenwert c ist, oder $(T - c)v$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert $-c$. Damit haben wir gezeigt, daß in der Tat entweder $\|T\|$ oder $-\|T\|$ ein Eigenwert von T ist. Der Rest des Beweises ist nun schnell erledigt. Wäre das Erzeugnis der Eigenräume nicht dicht, so wäre sein orthogonales Komplement nicht Null und unser Operator hätte darin folglich einen Eigenvektor, Widerspruch. Wäre der Eigenraum zu einem von Null verschiedenen Eigenwert nicht endlichdimensional, so gäbe es darin eine Folge von paarweise orthogonalen Einheitsvektoren, und deren Bild könnte keine konvergente Teilfolge besitzen, Widerspruch. □

Übungen

Ergänzende Übung 4.5.3. Eine Komposition von zwei stetigen Operatoren zwischen normierten Vektorräumen ist kompakt, wenn einer der Faktoren kompakt ist.

Ergänzende Übung 4.5.4. Die kompakten linearen Abbildungen von einem normierten Vektorraum in einen Banachraum bilden eine abgeschlossene Teilmenge im Raum aller stetigen linearen Abbildungen mit der Operatornorm.

Übung 4.5.5. Ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum ist genau dann kompakt, wenn das Erzeugnis seiner Eigenräume dicht liegt, alle seine Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten endlichdimensional sind, und wenn zusätzlich in jeder Umgebung von Null fast alle seiner Eigenwerte enthalten sind.

Ergänzende Übung 4.5.6. Gegeben ein kompakter Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ von einem Hilbertraum in einen weiteren Hilbertraum gibt es durch eine abzählbare

Menge N indizierte Orthonormalsysteme $(v_n)_{n\in N}$ von $\mathcal{H}$ und $(w_n)_{n\in N}$ von $\mathcal{H}'$ und $\lambda_n > 0$ derart, daß für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt

$$T(v) = \sum_{n\in N} \lambda_n \langle v_n, v\rangle w_n$$

Hinweis: Man gehe von einer Hilbertbasis aus Eigenvektoren des kompakten selbstadjungierten Operators T^*T aus.

4.6 Faltungen als kompakte Operatoren

4.6.1. Ein metrischer Raum heißt **total beschränkt**, wenn er für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung durch ε-Bälle besitzt.

Satz 4.6.2. *Ein metrischer Raum ist kompakt genau dann, wenn er vollständig und total beschränkt ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß jeder kompakte metrische Raum vollständig ist. In der Tat besitzt ja unter unserer Annahme insbesondere auch jede Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge und muß damit schon selbst konvergent sein. Daß jeder kompakte metrische Raum total beschränkt sein muß, ist eh klar. Sei nun umgekehrt X vollständig und total beschränkt und sei $v : \mathbb{N} \to X$ eine Folge in X. Wir überdecken X durch endlich viele Bälle mit Radius 1. In einem dieser Bälle müssen unendlich viele Folgenglieder liegen, und diese bilden eine Teilfolge $v^1 = v \circ i_1$ für eine geeignete Injektion $i_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Als nächstes überdecken wir X durch endlich viele Bälle vom Radius $1/2$. In einem dieser Bälle müssen unendlich viele Folgenglieder der Folge v^1 liegen, und diese bilden eine Teilfolge $v^2 = v^1 \circ i_2$ von v^1, für eine geeignete Injektion $i_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Als nächstes überdecken wir X durch endlich viele Bälle vom Radius $1/3$, und indem wir immer so weitermachen erhalten wir eine Kette von Teilfolgen v^ν derart, daß Folgenglieder von v^ν höchstens den Abstand $2/\nu$ voneinander haben. Die Folge $y_\nu = v^\nu(\nu)$ ist dann eine Teilfolge unserer Folge v, die eine Cauchy-Folge ist und mithin konvergiert. □

Definition 4.6.3. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Abbildungen von einem topologischen Raum X in einen metrischen Raum heißt **gleichgradig stetig**, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(x, \varepsilon)$ von x gibt derart, daß gilt

$$y \in U(x, \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) \le \varepsilon \;\forall f \in \mathcal{F}$$

Satz 4.6.4 (Arzela-Ascoli). *Im Raum aller stetigen Abbildungen eines kompakten Raums in einen kompakten metrischen Raum, versehen mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, hat eine Teilmenge kompakten Abschluß genau dann, wenn sie gleichgradig stetig ist.*

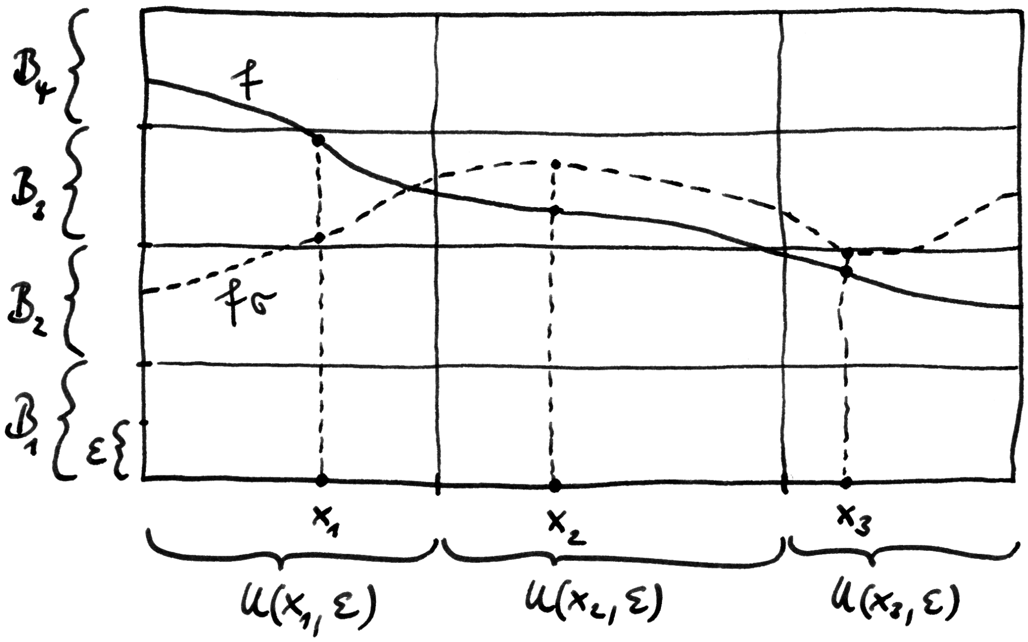


Illustration zum Beweis von Arzela-Ascoli. Die Bälle B_i sowie die Umgebungen $U(x_i, \varepsilon)$ sind hier abgeschlossen zu verstehen, das ist im Beweis unerheblich. Im allgemeinen würden sich natürlich unsere Bälle in M und auch die Umgebungen in X sehr viel mehr überlappen, aber dann kann man im Bild kaum noch etwas sehen. In unserem Fall wäre das einzig mögliche σ zu f gegeben durch $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$. Alle Funktionen, insbesondere auch f und f_σ, können auf $U(x_i, \varepsilon)$ höchstens um ε von ihrem Wert bei x_i abweichen. Ich hoffe, man kann nun sehen, daß f höchstens um 4ε von jedem zu σ gewählten f_σ abweichen kann.

Beweis. Unser Raum von stetigen Abbildungen ist nach [AN1] **??** schon mal vollständig in seiner Metrik der gleichmäßigen Konvergenz. Nach 4.6.2 reicht es also zu zeigen, daß eine Teilmenge darin total beschränkt ist genau dann, wenn sie gleichgradig stetig ist. Die Herleitung gleichgradigen Stetigkeit aus der totalen Beschränktheit überlassen wir dem Leser als Übung 4.6.8. Ist umgekehrt eine Menge $\mathcal{F}$ von Abbildungen $f : X \to M$ gleichgradig stetig, so finden wir ja für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x, \varepsilon)$ von x derart, daß gilt

$$y \in U(x, \varepsilon) \;\Rightarrow\; d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \; \forall f \in \mathcal{F}$$

Endlich viele dieser $U(x, \varepsilon)$ überdecken dann X, etwa die zu den Punkten x_1, ..., x_r, und endlich viele ε-Bälle $B_1, \ldots, B_s$ überdecken M. Für jede Abbildung $\sigma : \{1, \ldots r\} \to \{1, \ldots s\}$ wählen wir nun wenn möglich eine Funktion $f_\sigma \in \mathcal{F}$ mit $f_\sigma(x_i) \in B_{\sigma(i)}$ $\forall i$ und behaupten, daß die Bälle um diese f_σ mit Radius 4ε bereits ganz $\mathcal{F}$ überdecken. In der Tat, zu jeder Funktion $f \in \mathcal{F}$ gibt es ja mindestens ein σ mit $f(x_i) \in B_{\sigma(i)}$ $\forall i$. Für solch ein σ existiert dann notwendig auch ein f_σ und es gilt offensichtlich $d(f(x_i), f_\sigma(x_i)) \leq 2\varepsilon$ für alle i. Da jedes x in einem $U(x_i, \varepsilon)$ liegt, folgt dann jedoch $d(f(x), f_\sigma(x)) \leq 4\varepsilon$ für alle $x \in X$. □

Definition 4.6.5. Eine lineare Abbildung von einem reellen Vektorraum mit einer Seminorm in einen reellen topologischen Vektorraum heißt **kompakt**, wenn sie die Menge aller Vektoren der Seminorm ≤ 1 auf eine Menge mit kompaktem Abschluß abbildet.

Proposition 4.6.6 (Kompaktheit gewisser Konvolutionsoperatoren). *Gegeben kompakte Räume X, Y mit X Hausdorff und ein Radonmaß μ auf X und eine stetige Funktion $h \in \mathcal{C}(Y \times X)$ erhalten wir einen kompakten Operator $K = K_h : (\mathcal{C}(X), \|\;\|_{2,\mu}) \to (\mathcal{C}(Y), \|\;\|_\infty)$ durch die Abbildungsvorschrift*

$$(Kf)(y) := \int_X h(y, x) f(x) \mu\langle x\rangle$$

Beweis. Wir versehen hier $\mathcal{C}(X)$ mit der positiv semidefiniten Sesquilinearform $\langle f, g\rangle := \int_X \bar{f} g \mu$ und $\|f\|_{2,\mu} := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ meint die zugehörige Seminorm. Gegeben $y \in Y$ erklären wir $h_y \in \mathcal{C}(X)$ durch $h_y : x \mapsto h(x, y)$. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung oder genauer ihrer Variante [LA2] 1.3.30 finden wir die Abschätzung

$$|(Kf)(y)| = |\langle h_y, f\rangle| \leq \|h_y\|_2 \, \|f\|_2 \leq \|h_y\|_\infty \mu(X) \|f\|_2$$

Nun erinnern wir aus 1.9.9, daß wegen X kompakt Hausdorff und damit insbesondere X lokal kompakt die Abbildung $Y \to \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, $y \mapsto h_y$ stetig ist für die kompakt-offene Topologie alias die Topologie zur Norm $\|\;\|_\infty$ auf $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Punkt $y \in Y$ existiert folglich eine Umgebung U_ε von y mit $z \in U_\varepsilon \Rightarrow \|h_z - h_y\|_\infty < \varepsilon$. Wir folgern für $z \in U_\varepsilon$

$$|(Kf)(z) - (Kf)(y)| = |\langle h_z - h_y, f\rangle| \leq \|h_z - h_y\|_\infty \mu(X)\|f\|_2 \leq \varepsilon\mu(X)\|f\|_2$$

Insgesamt ist folglich die Menge $\mathcal{F} := \{Kf \mid \|f\|_2 \leq 1\} \subset \mathcal{C}(Y)$ gleichgradig stetig. Unsere obige Abschätzung zeigt weiter, daß sie in $\mathcal{C}(Y, M)$ liegt für $M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|h\|_\infty \mu(X)\}$. Nach Arzela-Ascoli 4.6.4 hat dann $\mathcal{F}$ kompakten Abschluß in $\mathcal{C}(Y, M)$ oder gleichbedeutend in $\mathcal{C}(Y)$ und unser Operator K ist kompakt. □

Ergänzung 4.6.7. Eine stetige lineare Abbildung von topologischen Vektorräumen heißt ein **Fredholm-Operator**, wenn ihr Bild abgeschlossen ist und ihr Kern und ihr Kokern endliche Dimension haben. Der **Index** eines Fredholmoperators $A : X \to Y$ ist die ganze Zahl

$$\operatorname{ind}(A) := \dim(\ker A) - \dim(\operatorname{coker} A)$$

Ist $A : X \to X$ ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum, so zeigt der Spektralsatz, daß $A - \operatorname{id}$ Fredholm vom Index Null ist. Allgemeiner folgt sofort, daß $A - \lambda \operatorname{id}$ Fredholm vom Index Null ist für alle $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Man kann das auch allgemeiner für einen beliebigen kompakten Operator auf einem Banachraum zeigen, aber das soll an dieser Stelle nicht ausgeführt werden.

Übungen

Übung 4.6.8. Man zeige, daß eine Menge beschränkter stetiger Abbildungen von einem topologischen Raum in einen metrischen Raum, die für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz total beschränkt ist im Sinne von 4.6.1, schon gleichgradig stetig sein muß.

Übung 4.6.9. Die Kompaktheit des Ausgangsraums ist wesentlich im Satz von Arzela-Ascoli: So ist etwa für die „Dächle-Funktion“ $d(x) = \sup(1 - |x|, 0)$ auf $\mathbb{R}$ die Menge ihrer verschobenen Kopien $f_n(x) = d(x - n)$ zwar gleichgradig stetig, hat aber keinen kompakten Abschluß.

Übung 4.6.10 (**Nocheinmal die hängende Kette**). Ich erinnere an den Begriff eines rektifizierbaren Weges in einem metrischen Raum [AN1] **??**. Man zeige, daß die rektifizierbaren nach der Bogenlänge parametrisierten Wege $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit vorgegebenem Ausgangs- und Endpunkt $\gamma(a), \gamma(b)$ und vorgegebener Länge L eine kompakte Teilmenge im Raum aller stetigen Abbildungen mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz bilden. Man zeige, daß im Fall $n = 2$ das Kurvenintegral $\gamma \mapsto \int_\gamma y$ im Sinne von [AN1] 7.1.23 eine stetige Funktion auf dieser kompakten Teilmenge ist und folglich ihr Minimum annimmt. Das zeigt, daß es

„im Fall einer hängenden Kette eine Lösung kleinster potentieller Energie gibt“. Jetzt wäre noch zu zeigen, daß im Fall $\gamma_1(a) \neq \gamma_1(b)$ von Aufhängepunkten mit verschiedener x-Koordinate jede Kette kleinster Energie durch den Graphen einer stetigen Funktion beschrieben wird. Hinweis: Trifft unser Weg eine nicht vertikale Gerade in $\gamma(s)$ und $\gamma(t)$ aber nicht für $\tau \in (s,t)$, so muß er für $\tau \in (s,t)$ unterhalb besagter Gerade verlaufen. Hinweis: Vertikale Stücke oder Stücke und vertikale Tangenten kann man ausschließen, indem man zuerst das Argument zu Ende bringt und zeigt, daß Stücke ohne dem Kettenlinien sind; daß diese Funktion konvex sein muß; daß sie damit in jedem Punkt im Inneren des Definitionsintervalls linksseitig und rechtsseitig differenzierbar sein muß; daß sie unter der Annahme minimaler Energie sogar differenzierbar sein muß; daß die Ableitung monoton und dann nach [AN1] 3.3.2 und [AN1] 5.5.21 sogar stetig sein muß; und daß man dann mit Methoden der Variationsrechnung, wie mir Ernst erklärt hat, zeigen kann, daß nur die Kettenlinie als Möglichkeit übrigbleibt.

4.7 Satz von Peter und Weyl

4.7.1. Auf jeder kompakten Hausdorffgruppe G existiert nach 4.3.3 genau ein normiertes Haar-Radonmaß $\mu = \mu_G$. Wir machen $\mathcal{C}(G)$ zu einem Prähilbertraum vermittels der Vorschrift

$$\langle f, h\rangle := \int_G \bar{f} h \mu$$

Die Vervollständigung dieses Prähilbertraums notieren wir $\mathrm{L}^2(G)$ und ignorieren hierbei im allgemeinen die Frage, inwieweit man Elemente dieser Vervollständigung als Äquivalenzklassen von Funktionen auf G interpretieren kann. Ist G abzählbar basiert, so können wir unser Haar-Radonmaß nach 4.3.14 mit einem Haar-Borelmaß identifizieren und unsere Vervollständigung ist kanonisch isomorph zum zugehörigen Raum quadratintegrierbarer Funktionen aus [AN3] 2.2.20.

4.7.2. Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe G mit normiertem Haar-Maß μ erklären wir auf $\mathcal{C}(G)$ die **Faltung** $(h, f) \mapsto h * f$ alias **Konvolution** durch die Vorschrift

$$(h * f)(x) := \int_G h(y) f(y^{-1}x) \mu\langle y\rangle$$

Unsere Erkenntnisse 4.3.10 über Produkte von Radonmaßen zeigen, daß auch $h*f$ stetig ist. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung zeigt $|(h * f)(x)| \leq \|h\|_2 \|f\|_2$ und impliziert insbesondere, daß sich $(h*)$ zu einer stetigen Abbildung von normierten Vektorräumen $(h*) : \mathrm{L}^2(G) \to \mathcal{C}(G)$ fortsetzen läßt.

Lemma 4.7.3. *Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe ist für jede stetige Funktion $h \in \mathcal{C}(G)$ die Faltung mit h ein kompakter Operator*

$$(h*) : \mathrm{L}^2(G) \to \mathcal{C}(G)$$

Beweis. Das folgt aus Proposition 4.6.6 zur Stetigkeit von Konvolutionen, indem wir unsere Definition umschreiben zu $(h * f)(x) = \int_G h(xy^{-1})f(y)\mu\langle y\rangle$. □

Lemma 4.7.4. *Sei G eine kompakte Hausdorffgruppe. Gegeben $h, k \in \mathcal{C}(G)$ mit $\overline{h(x)} = k(x^{-1})$ für alle $x \in G$ sind $(h*)$ und $(k*)$ als Operatoren auf $\mathrm{L}^2(G)$ zueinander adjungiert.*

Ergänzung 4.7.5. Die Operation durch Verschiebung von G auf $\mathrm{L}^2(G)$ geschieht durch unitäre Operatoren, so daß offensichtlich das Verschieben um $x \in G$ adjungiert ist zum Verschieben um sein Inverses $x^{-1} \in G$. Unser Lemma und diese Aussage haben eine gemeinsame Verallgemeinerung im Rahmen der Faltung von Maßen mit Funktionen, deren Ausformulierung dem Leser überlassen bleiben möge.

Beweis. Gegeben $f, g \in \mathrm{L}^2(G)$ gilt es zu zeigen $\langle h * f, g\rangle = \langle f, k * g\rangle$. Es reicht, das für $f, g \in \mathcal{C}(G)$ zu zeigen. In diesem Fall können wir unsere Behauptung ausschreiben zu

$$\int\int \overline{h(xy^{-1})f(y)}g(x) = \int\int \overline{f(x)}k(xy^{-1})g(y)$$

Hier ist zu verstehen, daß jeweils über x und y integriert werden soll. Um diese Identität einzusehen, müssen wir nur auf einer Seite unserer Gleichung x mit y vertauschen. □

4.7.6 (**Eigenfunktionen von Faltungen als darstellende Funktionen**). Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe G und $h : G \to \mathbb{R}$ stetig mit $h(x) = h(x^{-1})$ für alle x ist $(h*) : \mathrm{L}^2(G) \to \mathrm{L}^2(G)$ nach 4.7.4 ein selbstadjungierter Operator und nach 4.7.3 auch ein kompakter Operator mit Bild in $\mathcal{C}(G)$. Seine Eigenräume sind offensichtlich stabil unter allen Rechtstranslationen und seine Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten bestehen aus stetigen darstellenden Funktionen: Stetig, da sie im Bild unseres Operators enthalten sind, darstellend, da die fraglichen Eigenräume sowohl endlichdimensional als auch unter allen Rechtstranslationen stabil sind.

Satz 4.7.7 (Peter-Weyl). *Auf einer kompakten Hausdorffgruppe kann jede stetige Funktion beliebig gut gleichmäßig durch darstellende Funktionen approximiert werden.*

Beweis. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Nach 4.1.12 ist f gleichmäßig stetig, es gibt also eine Umgebung V des neutralen Elements mit $|f(zx) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in G$ und $z \in V$. Wählen wir nun eine stetige Funktion $h : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit Träger in V und Integral $\int h = 1$, so folgt

$$|(h * f)(x) - f(x)| = \left| \int h(z^{-1})(f(zx) - f(x))\mu\langle z\rangle \right| \leq \varepsilon$$

für alle $x \in G$ und damit

$$\|h * f - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

Nehmen wir nun zusätzlich $h(z) = h(z^{-1})$ für alle $z \in G$ an und betrachten die Eigenräume $\mathrm{L}^2(G)_\lambda$ von $(h*)$, so liegt nach dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren 4.5.2 deren Erzeugnis $\bigoplus \mathrm{L}^2(G)_\lambda$ dicht in $\mathrm{L}^2(G)$ und wir finden folglich ein g aus diesem Erzeugnis mit $\|g - f\|_2 \leq \varepsilon/\|h\|_2$. Daraus folgt dann aber

$$\|h * g - h * f\|_\infty \leq \varepsilon$$

und $\|h * g - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$ und damit haben wir gewonnen, da $h * g \in \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathrm{L}^2(G)_\lambda$ nach unserer Vorbemerkung 4.7.6 eine darstellende Funktion ist. $\square$

Korollar 4.7.8 (Diskret-kompakte Pontrjagin-Dualität). *1. Gegeben eine kompakte abelsche Hausdorffgruppe A ist die Menge ihrer Charaktere $\mathfrak{X}(A) \subset \mathrm{L}^2(A)$ eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf unserer Gruppe;*

2. *Gegeben eine diskrete abelsche Gruppe Γ ist ihre Charaktergruppe $\mathfrak{X}(\Gamma)$ eine kompakte Hausdorffgruppe und die Auswertungsabbildung ein Isomorphismus von topologischen Gruppen $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$;*

3. *Gegeben eine kompakte abelsche Hausdorffgruppe A ist ihre Charaktergruppe $\mathfrak{X}(A)$ eine diskrete abelsche Gruppe und die Auswertungsabbildung ein Isomorphismus von topologischen Gruppen $A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$.*

Beweis. 1. Wie in [AN3] 2.7.23 oder in größerer Allgemeinheit gleich anschließend in 4.9.15 zeigt man, daß die Charaktere ein Orthonormalsystem bilden. Sein Vektorraumerzeugnis ist ein Teilraum des Raums der darstellenden Funktionen. Wäre unser Orthonormalsystem nicht vollständig, so müßte es nach dem Satz von Peter und Weyl 4.7.7 ein echter Teilraum sein, und damit müßte es in seinem orthogonalen Komplement eine von Null verschiedene darstellende Funktion geben. Nach dem Schur'schen Lemma [NAS] 3.2.1 sind in unserem Fall jedoch alle endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen eindimensional, es müßte also in diesem orthogonalen Komplement eine Funktion geben, die mit ihren Translaten einen eindimensionalen Teilraum aufspannt. Damit müßte es dann in diesem orthogonalen Komplement noch einen weiteren Charakter geben, und dieser Widerspruch zeigt die erste Aussage.

2. Daß die Charaktergruppe $\mathfrak{X}(\Gamma)$ eine kompakte Hausdorffgruppe ist, folgt aus dem Satz von Tychnoff und Sie durften es als Übung 3.2.15 ausarbeiten. Es ist nun klar, daß das Bild der natürlichen Einbettung $\Gamma \hookrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ eine Menge von Funktionen $\Gamma \subset \mathcal{C}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ ist, die die Punkte trennt und stabil ist unter der komplexen Konjugation. Der vom Bild von Γ erzeugte Untervektorraum $B \subset \mathcal{C}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ ist sogar eine Unterringalgebra, die die Punkte trennt und stabil ist unter der komplexen Konjugation. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß [AN1] **??** ist folglich B dicht in der Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Das aber zeigt, daß B auch dicht liegt im Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\mathfrak{X}(\Gamma))$. Folglich ist das Bild von Γ bereits eine Hilbertbasis von $\mathrm{L}^2(\mathfrak{X}(\Gamma))$ und $\mathfrak{X}(\Gamma)$ kann keine weiteren Charaktere besitzen und die natürliche Abbildung ist ein Gruppenisomorphismus $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$. Daß die kompakt-offene Topologie auf $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ diskret ist, überlegen wir wir uns gleich beim Beweis des letzten Teils.

3. Das Bild jedes nichttrivialen Charakters unserer abelschen kompakten Hausdorffgruppe A ist eine kompakte nichttriviale Untergruppe der Kreisgruppe und jede echte kompakte Untergruppe der Kreisgruppe ist zyklisch nach [AN1] **??**. Insbesondere enthält sie ein Element, das vom neutralen Element einen Abstand ≥ 1 hat. Es folgt, daß die kompakt-offene Topologie auf $\mathfrak{X}(A)$ diskret ist. Nach Teil 2 ist damit $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$ kompakt. Andererseits ist die Einbettung $A \hookrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$ stetig nach 1.9.20 und 1.9.22. Ihr Bild ist also eine kompakte und damit abgeschlossene Untergruppe. Der Quotient $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))/A$ ist nach 2.2.10 und 2.2.15 selbst wieder eine kompakte Hausdorffgruppe. Wäre er nicht trivial, so besäße er mithin einen nichttrivialen Charakter $\chi \neq 1$. Die induzierte Abbildung $\theta : \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))) \to \mathfrak{X}(A)$ wäre also kein Isomorphismus. Wir wissen aber bereits für jede diskrete abelsche Gruppe Γ um den kanonischen Isomorphismus $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ und mit [GR] 1.6.13 ist leicht zu sehen, daß im Fall $\Gamma = \mathfrak{X}(A)$ dieser Isomorphismus gefolgt von θ die Identität auf $\mathfrak{X}(A)$ induzieren muß. Folglich muß auch θ ein Isomorphismus sein, und damit die Einbettung $A \hookrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$ eine Bijektion $A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(A))$. Als stetige bijektive Abbildung eines Kompaktums auf einen Hausdorffraum ist sie dann nach 1.5.13 sogar ein Homöomorphismus. $\square$

Übungen

Übung 4.7.9. Seien $G \supset H$ eine kompakte Hausdorffgruppe mit einer abgeschlossenen Untergruppe. Man zeige: Induziert die Einschränkung auf den komplexen darstellenden Funktionen einen Isomorphismus $\mathcal{R}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(H)$, so gilt schon $G = H$. Hinweis: Man kopiere die im Beweis von [AAG] 1.9.3 gegebene Argumentation.

4.8 Ringalgebra der kompakt getragenen Maße

4.8.1. Im Fall einer diskreten Gruppe hatten wir den Gruppenring definiert als den Vektorraum aller Funktionen auf der Gruppe mit einer etwas merkwürdigen nichtkommutativen Multiplikation. Im Fall einer lokal kompakten Hausdorffgruppe zersplittert dieses Konzept in eine Vielzahl vernünftiger feinerer Begriffsbildungen. Besonders wichtig scheint mir der Vektorraum der komplexen kompakt getragenen Radonmaße, der im folgenden diskutiert werden soll. Es ist möglich und sogar üblich, die Diskussion dieses Konzeptes zu vermeiden. Dabei büßen allerdings die Formeln in meinen Augen viel von ihrer Transparenz ein.

Definition 4.8.2. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X versteht man unter einem **komplexen Radonmaß auf** X eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_!(X) \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum $K \subset X$ die Einschränkung von Λ auf den Raum $\mathcal{C}_K(X)$ aller stetigen Funktionen mit Träger in K stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Die Gesamtheit aller komplexen Radonmaße auf X notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X)$$

Dieser Raum wird ein Modul über dem Ring $\mathcal{C}(X)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X, indem wir $f\mu$ erklären durch die Vorschrift $(f\mu)(g) := \mu(fg)$ für $f, g \in \mathcal{C}(X)$ und $\mu \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X)$.

4.8.3. Gegeben ein kompakter Hausdorffraum X ist insbesondere ein komplexes Radonmaß auf X eine Linearform $\mu : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$, die stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.

Definition 4.8.4. Gegeben eine eigentliche Abbildung $f : X \to Y$ von lokal kompakten Hausdorffräumen induziert die transponierte Abbildung zur Restriktion $(\circ f) : \mathcal{C}_!(Y) \to \mathcal{C}_!(X)$ eine Abbildung auf Radonmaßen, das **direkte Bild**

$$f_* : \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X) \to \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(Y)$$

Statt $f_*\mu = \nu$ schreiben wir auch $f : \mu \rightsquigarrow \nu$ und sagen, unsere Maße seien **verwandt unter** f.

4.8.5 (**Produkt komplexer Radonmaße**). Gegeben lokal kompakte Hausdorffräume X, Y mit komplexen Radonmaßen μ, ν zeigt man, wie es im Fall reeller Maße in 4.3.10 bereits ausgeführt wurde, die Existenz eines eindeutig bestimmten Radonmaßes

$$\mu \boxtimes \nu \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X \times Y)$$

mit $(\mu \boxtimes \nu)(f \boxtimes g) = \mu(f)\nu(g)$ für alle $f \in \mathcal{C}_!(X)$ und $g \in \mathcal{C}_!(Y)$. Auf dem einpunktigen Raum betrachten wir das Radonmaß $\delta \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(\mathrm{top})$, das jeder Funktion ihren einzigen Wert zuordnet, und verstehen es als „das Produktmaß mit gar keinem Faktor über dem Produkt einer leeren Familie von Räumen“.

4.8.6. Für Radonmaße auf lokal kompakten Hausdorffräumen und ihre Produkte und Bildmaße unter eigentlichen Abbildungen gelten offensichtlich alle Formeln unserer Formelsammlung für das Produktmaß aus [AN3] 1.7.25 analog, als da wären die Natürlichkeit, Eins, Assoziativität, Kommutativität und Funktorialität.

4.8.7. Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X und $x \in X$ bezeichne $\mathrm{em}_x : \mathrm{top} \to X$ die Abbildung mit Bild x und $\delta_x := \mathrm{em}_{x*}\,\delta \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X)$ das Bildmaß des Diracmaßes auf dem einpunktigen Raum. Auf stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger haben wir dann $\delta_x(f) = f(x)$.

4.8.8 (**Radonmaße mit kompaktem Träger**). Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Standardargumente mit Teilungen der Eins zeigen, daß für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X gilt

$$\mathcal{C}_!(X) = \sum_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}_!(U)$$

mit den implizit verstandenen Einbettungen $\mathcal{C}_!(U) \hookrightarrow \mathcal{C}_!(X)$ vermittels der jeweiligen Ausdehnung durch Null. Für jedes Radonmaß $\mu \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(X)$ gibt es folglich eine größte offene Teilmenge $U \circledcirc X$ mit $\mu(f) = 0\ \forall f \in \mathcal{C}_!(U)$. Deren Komplement heißt der **Träger** unseres Radonmaßes und wir notieren sie $\operatorname{supp}\mu$. Den Raum der Radonmaße auf X mit kompaktem Träger notieren wir

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}_!(X)$$

4.8.9 (**Bilder von Radonmaßen mit kompaktem Träger**). Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum X gilt offensichtlich

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}_!(X) = \bigcup_{K \subset X \text{ kompakt}} i_{K*}\left(\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(K)\right)$$

mit $i_K : K \hookrightarrow X$ der jeweiligen Einbettung. Wir folgern, daß das Produkt von kompakt getragenen Maßen kompakt getragen ist und daß es für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ in einen weiteren lokal kompakten Hausdorffraum Y genau eine Abbildung

$$f_* : \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}_!(X) \to \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}_!(Y)$$

gibt mit $f_*(i_{K*}\mu) = (f \circ i_K)_*\mu$ für alle Kompakta $K \subset X$ und alle $\mu \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(K)$. Hier steht uns das Bild $(f \circ i_K)_*$ bereits zur Verfügung, da $f \circ i_K$ eigentlich ist.

4.8.10. Für kompakte getragene Radonmaße auf lokal kompakten Hausdorffräumen und ihre Produkte und Bildmaße unter beliebigen Abbildungen gelten nun offensichtlich auch alle Formeln unserer Formelsammlung für das Produktmaß aus [AN3] 1.7.25 alias unsere Verschmelzungsidentitäten analog, als da wären die Natürlichkeit, Eins, Assoziativität, Kommutativität und Funktorialität.

4.8.11 (**Maßring einer lokal kompakten Hausdorffgruppe**). Der komplexe Vektorraum $\mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(G)$ der Radonmaße auf einem lokal kompakten Hausdorffmonoid G wird eine komplexe Ringalgebra mit der Faltung

$$\mu * \nu := \mathrm{mult}_*(\mu \boxtimes \nu)$$

als Multiplikation. Man zeigt das genau wie in [AN3] 3.5.9. Die Vorschrift $x \mapsto \delta_x$ liefert einen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}G \hookrightarrow \mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(G)$, der im Fall eines diskreten Monoids G ein Isomorphismus ist.

4.8.12 (**Faltung von Funktionen**). Gegeben eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und ein Haarmaß μ ist das Bild der Einbettung $\mathcal{C}_!(G) \to \mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(G)$ gegeben durch $f \mapsto f\mu$ stabil unter Faltung. In der Tat finden wir für $f, g, h \in \mathcal{C}_!(G)$ unschwer

$$\begin{array}{rcl} (f\mu * g\mu)(h) & = & \int_{G\times G} f(x)g(y)h(xy)(\mu \boxtimes \mu)\langle x, y\rangle \\ & = & \int_G f(x) \left(\int_G g(y)h(xy)\mu\langle y\rangle\right) \mu\langle x\rangle \\ & = & \int_G f(x) \left(\int_G g(x^{-1}y)h(y)\mu\langle y\rangle\right) \mu\langle x\rangle \\ & = & \left(\int_G f(x)g(x^{-1}y)\mu\langle x\rangle\right) h(y)\mu\langle y\rangle \\ & = & ((f *_\mu g)\mu)(h) \end{array}$$

für die Funktion $f *_\mu g$ gegeben durch $(f *_\mu g)(y) := \int_G f(x)g(x^{-1}y)\mu\langle x\rangle$, die wir bereits in 4.7.2 im kompakten Fall kennengelernt und $f * g$ notiert hatten.

4.8.13 (**Integration vektorwertiger Funktionen**). Gegeben X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $\mu \in \mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(X)$ ein komplexes kompakt getragenes Radonmaß auf X, ja ein beliebiger topologischer Raum X mit einer Linearform $\mu : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$, erhalten wir für jeden endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V eine lineare Abbildung

$$\mu = \mu_V : \mathcal{C}(X, V) \to V$$

als die Verknüpfung des Inversen zum hoffentlich offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{C}(X) \otimes V \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{C}(X, V)$ mit $\mu \otimes \mathrm{id}$. Im Fall $V = \mathbb{C}^n$ ist das schlicht die komponentenweise Integration. Wir schreiben $\mu_V(f) = \int_X f(x)\mu\langle x\rangle$. Man prüft auch leicht für jede lineare Abbildung $L : V \to W$ von endlichdimensionalen komplexen Vektorräumen die Verträglichkeit $\mu_W(L \circ f) = L(\mu_V f)$ für alle stetigen Funktionen $f : X \to V$.

4.8.14 (**Darstellungen als Moduln über dem Maßring**). Gegeben eine endlichdimensionale komplexe stetige Darstellung V eines lokal kompakten Hausdorffmonoids G läßt sich die Operation des Monoidrings $\mathbb{C}G$ auf V mit unserem Integral vektorwertiger Funktionen aus 4.8.13 offensichtlich erweitern zu einer Operation des Maßrings $\mathrm{M}_!^{\mathrm{rad}}(G)$ durch die Vorschrift

$$\mu * v := \int gv\; \mu\langle g\rangle$$

Ist G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und μ ein Haarmaß auf G und $f \in \mathcal{C}_!(G)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger auf G, so verwenden wir die Abkürzung $f *_\mu v := (f\mu) * v$ und schreiben dafür im kompakten Fall mit dem normierten Haarmaß auch noch kürzer $f * v$.

4.9 Fouriertheorie für kompakte Gruppen

Lemma 4.9.1 (Existenz invarianter Skalarprodukte). *Auf jeder endlichdimensionalen stetigen reellen oder komplexen Darstellung einer kompakten Hausdorffgruppe gibt es ein invariantes Skalarprodukt.*

Beweis. Bezeichne K unsere kompakte Hausdorffgruppe und V unsere Darstellung. Nach 4.3.3 gibt es ein Haarmaß μ auf K. Ist nun $b : V \times V \to \mathbb{C}$ irgendein Skalarprodukt, so liefert die Formel

$$(v, w) := \int_K b(gv, gw)\ \mu\langle g\rangle$$

ein K-invariantes Skalarprodukt, es gilt also $(gv, gw) = (v, w) \forall g \in K$. Damit das richtig ist, muß a priori μ ein rechtsinvariantes Haarmaß sein. Im kompakten Fall wissen wir aber bereits, daß linksinvariante Haarmaße auch rechtsinvariant sind und umgekehrt. □

4.9.2 (**Eindeutigkeit invarianter Skalarprodukte**). Auf einer irreduziblen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellung V einer kompakten Hausdorffgruppe K gibt es bis auf eine multiplikative Konstante in $\mathbb{R}_{>0}$ nur ein invariantes Skalarprodukt. In der Tat ist der Raum der hermiteschen Sesquilinearformen eindimensional nach dem Schur'schen Lemma, da er mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C},K}(\bar{V}, V^*)$ identifiziert werden kann.

Satz 4.9.3 (Vollständige Reduzibilität). *Jede stetige Darstellung endlicher Dimension einer kompakten Hausdorffgruppe ist eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen.*

Beweis. Nach Lemma 4.9.1 finden wir auf unserer Darstellung stets ein unter der Gruppenoperation invariantes Skalarprodukt. Nun argumentieren wir durch Induktion über die Dimension unserer Darstellung. Ist sie Null, so ist nichts zu zeigen. Sonst besitzt sie eine einfache Unterdarstellung, und deren orthogonales Komplement ist auch eine Unterdarstellung, auf die wir dann nur noch die Induktionsannahme anzuwenden brauchen. □

4.9.4. Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe G bezeichne $\hat{G}$ die Menge aller Isomorphieklassen von endlichdimensionalen irreduziblen unitären Darstellungen von G. Gegeben eine irreduzible unitäre Darstellung L wissen wir aus 4.9.1, daß sie ein invariantes Skalarprodukt besitzt, und aus 4.9.2, daß dieses eindeutig bestimmt ist bis auf eine multiplikative Konstante aus $\mathbb{R}_{>0}$. Insbesondere hängt für $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ der Adjungierte $A^\dagger$ nicht von dieser Wahl ab und die Vorschrift $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\dagger B)$ liefert ein wohlbestimmtes Skalarprodukt auf $\operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$.

Satz 4.9.5 (Fourierreihe für kompakte Gruppen). *Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe G gibt es genau einen Isomorphismus von Hilberträumen*

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^2(G) \xrightarrow{\sim} \hat{\bigoplus}_{L \in \hat{G}} (\operatorname{End}_{\mathbb{C}} L)_{\dim L}$$

mit der Eigenschaft, daß jede stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(G)$ darunter auf das Tupel der Endomorphismen $(f*) : L \to L$ abgebildet wird. Unter der Umkehrabbildung wird dabei $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ abgebildet auf $c_A^* : g \mapsto (\dim L) \operatorname{tr}\left(\rho_L(g^{-1})A|L\right)$.

4.9.6. Die Notation $(f*)$ wurde in 4.8.14 eingeführt. Auf der rechten Seite meint der untere Index $\dim L$, daß das von einem und jedem invarianten Skalarprodukt auf L nach 4.9.4 herkommende Skalarprodukt auf dem Raum der Endomorphismen noch mit diesem Faktor zu multiplizieren ist. Der Hut über der direkten Summe meint, daß die algebraische direkte Summe mit dem offensichtlichen Skalarprodukt noch zu einem Hilbertraum zu vervollständigen ist. Der Stern bei der Notation c_A^* erinnert daran, daß das nicht genau die Matrixkoeffizientenabbildung ist, die ich in [NAS] 4.2.3 im Fall endlicher Gruppen $c_A : g \mapsto \operatorname{tr}\left(\rho_L(g)A|L\right)$ notiert habe.

4.9.7. Den Fall einer endlichen Gruppe G haben wir bereits in [NAS] 4.3.5 behandelt. Im Fall der Kreisgruppe $G = S^1$ spezialisiert unsere Inverse der Fourierentwicklung $\mathcal{F}$ zum durch das Aufsummieren der Fouriereihe gegebenen Isomorphismus $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^2(S^1)$.

Beweis. Zunächst einmal behauptet unser Satz, daß gegeben $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ und $B \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} M$ mit M, L nichtisomorphen irreduziblen Darstellungen in $\mathcal{C}(G)$ gilt $\langle c_A^*, c_B^* \rangle = 0$. Sicher dürfen wir dazu annehmen, daß A und B Rang höchstens Eins haben, sagen wir $A : l \mapsto \langle a, l \rangle v$ für $a, v \in L$ und $B : m \mapsto \langle b, m \rangle w$ für $b, w \in M$ und jeweils fest gewählte invariante Skalarprodukte. Dann ergibt sich

$$\frac{\langle c_A^*, c_B^* \rangle}{(\dim L)^2} = \int \overline{\langle a, gv \rangle} \langle b, gw \rangle = \int \langle v, g^{-1}a \rangle \langle b, gw \rangle = \langle v| \left(\int g^{-1} |a\rangle\langle b| g \right) |w\rangle$$

mit der Notation $|a\rangle\langle b|$ für die lineare Abbildung $M \to L$ gegeben durch $w \mapsto \langle b, w \rangle a$. Dann steht in der großen Klammer rechts ein Homomorphismus von Darstellungen $M \to L$, also die Null, und das zeigt $\langle c_A^*, c_B^* \rangle = 0$. Im Fall $M = L$ steht dahingegen in der großen Klammer ein Vielfaches von id_L mit derselben

Spur wie $|a\rangle\langle b|$, also das Vielfache $(\langle b,a\rangle/\mathrm{dim}L)\,\mathrm{id}_L$, und wir folgern mit elementarer Rechnung

$$\frac{\langle c_A^*, c_B^*\rangle}{(\dim L)^2} = \frac{\langle b,a\rangle\langle v,w\rangle}{\dim L} = \frac{\mathrm{tr}(A^\dagger B|L)}{\dim L}$$

Damit wissen wir schon einmal, daß unsere Abbildungsvorschrift $A \mapsto c_A^*$ einen Homomorphismus von Prähilberträumen

$$\mathcal{C}(G) \leftarrow \bigoplus_{L\in\hat{G}} (\mathrm{End}_{\mathbb{C}} L)_{\dim L}$$

liefert. Da die darstellenden Funktionen aber nach dem Satz 4.7.7 von Peter-Weyl dicht liegen im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, muß die auf den Vervollständigungen induzierte Abbildung ein Isomorphismus von Hilberträumen sein. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß dessen Umkehrabbildung jeder stetigen Funktion $f \in \mathcal{C}(G)$ das Tupel der Endomorphismen $(f*) : L \to L$ zuordnet. Da nun die darstellenden Funktionen nach dem Satz 4.7.7 von Peter-Weyl sogar für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz dicht liegen in $\mathcal{C}(G)$, müssen wir das nur für darstellende Funktionen f prüfen. Für $L \in \hat{G}$ und $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L$ müssen wir also zeigen, daß gilt $c_A^* * w = 0\ \forall w \in M$ mit $M \not\cong L$ und $c_A^* * w = Aw\ \forall w \in L$. Nun dürfen wir sicher wieder $A(l) = \langle a, l\rangle v$ annehmen, also haben wir diesmal $c_A^*(g) = (\dim L)\langle a, g^{-1}v\rangle = (\dim L)\overline{\langle v, ga\rangle}$ und erhalten mit unseren Ergebnissen vom ersten Teil des Beweises

$$\langle b|c_A^* * w\rangle = \langle b| \int c_A^*(g) g w\rangle = (\dim L)\int \overline{\langle v, ga\rangle}\langle b, gw\rangle = 0$$

falls $M \not\cong L$, wohingegen sich im Fall $M = L$ gerade $\langle b,v\rangle\langle a,w\rangle = \langle b, Aw\rangle$ ergibt. □

4.9.8. Ich erinnere an unsere Inversionsformel für Fouriergruppen [AN3] 3.7.13 und will nun eine analoge Formel für nicht notwendig kommutative kompakte Liegruppen G angeben. Im Fall endlicher Gruppen habe ich das bereits in [NAS] 4.3.5 ausgeführt. Bezeichne $\hat{G}$ die Menge der Isomorphieklassen von endlichdimensionalen irreduziblen stetigen Darstellungen. Bezeichne $\mathcal{S}^{\mathrm{alg}}(G) := \mathcal{R}(G)$ den Ring der darstellenden Funktionen und $\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}(G)$ den Teilring des Maßrings, der aus allen Produkten einer darstellenden Funktion mit einem Haarmaß besteht. So erhalten wir, indem wir jedem derartigen Maß das Tupel der davon induzierten Endomorphismen der irreduziblen Darstellungen zuordnen, die obere Horizontale eines Zykels aus Isomorphismen der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}(G) \arrow[r, "\sim"'] & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[d, "\cdot\mu", "\wr"'] \\
\mathcal{S}^{\mathrm{alg}}(G)^{\leftrightarrow} \arrow[u, "\cdot\lambda", "\wr"'] & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[l, "c^*"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

mit der Eigenschaft, daß einmal im Kreis herumgehen die Identität liefert. Als untere Horizontale nehme ich die Variante der Matrixkoeffizientenabbildung, unter der $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$ auf die Funktion $c_A^* : g \mapsto \operatorname{tr}\left(\rho_L(g^{-1})A : L \to L\right)$ abgebildet wird. Der obere Index $\leftrightarrow$ erinnert daran, daß die Operation von $G \times G^{\mathrm{opp}}$ anders als für Funktionenräume natürlich zu verstehen ist, wenn man erreichen will, daß alle beteiligten Abbildungen äquivariant werden. Die linke Vertikale ist die Multiplikation mit einem Haarmaß λ, die rechte Vertikale ist die Multiplikation mit dem zugehörigen Plancherelmaß μ, hier einer reellwertigen Funktion auf $\hat{G}$, die dadurch bestimmt wird, daß „einmal im Kreis herumgehen an jeder Stelle die Identität ist“. Ist λ normiert auf Gesamtmasse $\lambda(G) = 1$, so müssen wir nach 4.9.5 für μ die Funktion $\mu(L) = \dim L$ nehmen. Arbeiten wir über $\mathbb{C}$, so können wir unser Diagramm ergänzen zu einem kommutativen nach [AN3] 3.7.21 modellierten Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^{\mathrm{alg}}(G) \arrow[rr, "\sim"] & & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[dr, "\cdot\sqrt{\mu}", "\sim"'] & \\
\mathcal{H}^{\mathrm{alg}}(G) \arrow[ur, "\cdot\sqrt{\lambda}", "\sim"'] \arrow[r, hook] & \mathrm{L}^2(G) \arrow[rr, leftrightarrow, "\sim"] & & \hat{\bigoplus}_{L\in\hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\sim", "\cdot\sqrt{\mu}"'] \\
 & \mathcal{S}^{\mathrm{alg}}(G)^{\leftrightarrow} \arrow[ul, "\sim", "\cdot\sqrt{\lambda}"'] & & \bigoplus_{L\in\hat{G}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L \arrow[ll, "c^*", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

Hier meint $\mathcal{H}^{\mathrm{alg}}(G)$ einen Raum von „algebraischen Halbdichten auf G“, den man formal als einen Teilraum des Raums aller „Schwartz-Halbdichten“ erklären mag, vergleiche [AN3] 3.7.21. Das äußere Sechseck besteht wieder aus Isomorphismen und einmal im Kreis herumgehen liefert die Identität. Darüber hinaus ist aber der Isomorphismus zwischen den sich horizontal gegenüberliegenden Räumen in der mittleren Horizontale ein Isomorphismus von Prähilberträumen für die explizit beschriebenen Skalarprodukte und induziert einen Isomorphismus von Hilberträumen der in der Mitte des Diagramms angedeuteten Gestalt. Dies Diagramm, wenn wir es zum normierten Haarmaß $\lambda(G) = 1$ und der zugehörigen Funktion $\mu(L) = \dim L$ spezialisieren, liefert sofort Korollar 4.9.12.

4.9.9. Wir erinnern daran, daß wir in [NAS] 4.2.19 für jede endlichdimensionale Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Gruppe G über einem Körper k ihren **Charakter** $\chi_\rho : G \to k$ erklärt hatten durch die Formel $\chi_\rho(g) := \operatorname{tr}(\rho(g))$, und daß wir so eine **Klassenfunktion** erhalten, also eine Funktion, die konstant ist auf Konjugationsklassen.

Korollar 4.9.10 (Charakter-Projektor-Formel). *Sei G eine kompakte Hausdorffgruppe mit Haarmaß μ. Wir erklären für jede endlichdimensionale einfache* *komplexe Darstellung L von G den* **Projektor** $\mathrm{e}_L \in \mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(G)$ *im Maßring durch die Vorschrift*

$$\mathrm{e}_L := \frac{\dim L}{\mu(G)}(\chi_L \circ \mathrm{inv})\mu$$

So gilt $\mathrm{e}_L * \mathrm{e}_L = \mathrm{e}_L$ *und* $\mathrm{e}_L * v = v \ \forall v \in L$. *Für jede nicht zu L isomorphe endlichdimensionale einfache Darstellung M gilt dahingegen* $\mathrm{e}_L * \mathrm{e}_M = 0$ *und damit dann natürlich auch* $\mathrm{e}_L * w = 0 \ \forall w \in M$.

4.9.11. Hier meint $\mathrm{inv} : G \to G$ das Invertieren. Im Fall einer endlichen Gruppe kennen wir unsere Formel bereits aus [NAS] 4.2.19.

Beweis. Wir dürfen unser Haarmaß μ ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen. Die Identität $c^*_{\mathrm{id}_L} = (\dim L)(\chi_L \circ \mathrm{inv})$ und die Behauptung folgen dann sofort aus unseren Formeln in 4.9.5 oder vielleicht direkter 4.9.8. □

Korollar 4.9.12 (Orthogonalität komplexer Matrixkoeffizienten). *Bilden gewisse $\rho_L : G \to \mathrm{U}(d_L)$ ein Repräsentantensystem für die einfachen unitären Darstellungen einer kompakten Hausdorffgruppe G, so bilden die renormalisierten Matrixkoeffizienten $\sqrt{d_L}\,(\rho_L)_{ij}$ eine Hilbertbasis von $\mathrm{L}^2(G)$.*

Beweis. Die Matrizen E_{ij} bilden eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Mat}(d; \mathbb{C})$ für das durch $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\dagger B)$ gegebene Skalarprodukt. Die $(1/\sqrt{d})E_{ij}$ bilden folglich eine Orthonormalbasis für denselben Raum $\mathrm{Mat}(d; \mathbb{C})_d$ mit dem um den Faktor d vergrößerten Skalarprodukt. Unter der inversen Fouriertransformation gehen die nun aber gerade in die Funktionen $\sqrt{d_L}\,(\rho_L)_{ij} \circ \mathrm{inv}$ über. Die Behauptung folgt so aus unseren Fourierformeln 4.9.5 oder vielleicht direkter 4.9.8. □

4.9.13 (**Darstellende Funktionen kompakter Matrixliegruppen**). Gegeben eine kompakte Matrixliegruppe $G \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ liefert die Restriktion von Funktionen eine Surjektion

$$\mathbb{R}[X_{ij}] \twoheadrightarrow \mathcal{R}(G, \mathbb{R})$$

des Polynomrings in den Matrixeinträgen auf die Ringalgebra der reellwertigen darstellenden Funktionen. In der Tat restringieren Polynomfunktionen offensichtlich zu darstellenden Funktionen, genauer zu allen Matrixkoeffizienten von einfachen Darstellungen, die in einer Tensorpotenz der durch unsere Einbettung gegebenen Darstellung $\mathbb{R}^n$ auftreten. Nach Stone-Weierstraß restringieren sie sogar zu einem bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz dichten Teilraum von $\mathcal{C}(G, \mathbb{R})$. Dann aber können die Matrixkoeffizienten keiner endlichdimensionalen stetigen irreduziblen Darstellung fehlen, da diese sonst nach 4.9.5 orthogonal auf allen stetigen Funktionen stehen müßten.

4.9.14. Sei G eine kompakte Hausdorffgruppe. Unter dem Raum der **quadratintegrierbaren Klassenfunktionen** auf G verstehen wir den Raum der unter der Operation durch Konjugation invarianten Elemente von $\mathrm{L}^2(G)$.

Satz 4.9.15 (Klassenfunktionen kompakter Hausdorffgruppen). *Gegeben eine kompakte Hausdorffgruppe bilden die Charaktere der einfachen komplexen Darstellungen eine Hilbertbasis des Raums aller quadratintegrierbaren Klassenfunktionen auf unserer Gruppe und spannen einen in der Supremumsnorm dichten Teilraum des Raums der stetigen Klassenfunktionen auf.*

Beweis. Unsere **irreduziblen Charaktere** bilden nach 4.9.8 ein Orthonormalsystem. Jetzt betrachten wir die nach 4.3.10 wohldefinierte Abbildung $P : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G)$ gegeben durch

$$(Pf)(x) = \int f(g^{-1}xg)\mu\langle g\rangle$$

Sie ist eine Projektion auf den Raum der stetigen Klassenfunktionen und ist stetig für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Folglich liegen die Bilder der Matrixkoeffizienten in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz dicht im Raum der stetigen Klassenfunktionen. Das Bild eines Matrixkoeffizienten einer irreduziblen Darstellung ist jedoch offensichtlich wieder ein Matrixkoeffizient besagter Darstellung und damit ein Vielfaches ihres Charakters. Das zeigt die gleichmäßige Dichtigkeit im Raum der stetigen Klassenfunktionen. Weiter bemerken wir, daß eine quadratintegrierbare Klassenfunktion f senkrecht stehen muß auf jedem unter Konjugation stabilen endlichdimensionalen Teilraum $E \subset \mathcal{C}(G)$, in dem die triviale Darstellung nicht als Summand auftritt, da ja für $h \in E$ offensichtlich gilt $\langle f, h\rangle = \langle f, Ph\rangle$. Damit muß eine quadratintegrierbare Klassenfunktion senkrecht stehen auf den Bildern unter der Matrixkoeffizientenabbildung aller $\{A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$ für $L \in \hat{G}$, und damit muß sie dann sogar im Abschluß des Erzeugnisses der irreduziblen Charaktere liegen. □

Übungen

Übung 4.9.16. Auf einer kompakten Hausdorffgruppe ist das Faltungsprodukt von Matrixkoeffizienten zu nichtisomorphen endlichdimensionalen einfachen Darstellungen stets Null. Gegeben eine einfache unitäre Darstellung $\rho : G \to \mathrm{U}(d)$ gilt dagegen für die Faltung der Matrixkoeffizienten $\rho_{ij} * \rho_{kl} = d^{-1}\delta_{jk}\rho_{il}$.

Übung 4.9.17. Eine endlichdimensionale Darstellung V einer kompakten Hausdorffgruppe, für die die Matrixkoeffizientenabbildung $V \otimes_{\mathbb{C}} V^* \to \mathcal{C}(G)$ injektiv ist, muß irreduzibel sein oder Null.

Übung 4.9.18. Man beschreibe die Verknüpfung der Matrixkoeffizientenabbildung $\bigoplus_{L\in\hat{G}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L \to \mathcal{C}(G)$ mit dem Integral nach dem normierten Haarmaß.

Übung 4.9.19. Man zeige, daß für eine kompakte Hausdorffgruppe G die Fouriertransformation von Maßen nach 4.8.14 stets eine Injektion

$$\mathrm{M}^{\mathrm{rad}}(G) \hookrightarrow \prod_{M \in \operatorname{irrf} G} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} M$$

liefert. Hinweis: Man zeige als Zwischenschritt: Konvolutiert ein Maß mit jeder darstellenden Funktion zur Nullfunktion, so konvolutiert es mit jeder stetigen Funktion zur Nullfunktion und ist folglich das Nullmaß.

5 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Olaf Schnürer, Leonardo Patimo, . . .

6 Vorlesung Topologie SS 22

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

25.4 Topologische Räume 1.1. Inneres, Abschluß, Umgebungsbegriff 1.2. Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten noch nicht bewiesen.

27.4 Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen und Grenzwertbegriff. Zusammenhang. Topologische Mannigfaltigkeiten.

2.5 Kompaktheit. Initialtopologie, insbesondere Produkttopologie. Hausdorff bedeutet abgeschlossene Diagonale.

4.5 Gesamthaft finale Familien und Finaltopologie. Reelle projektive Räume. Quotienten nach Gruppen sind offen. Anwenden auf einen festen Vektor ist finale Abbildung $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \backslash 0$, da es lokal stetige Schnitte gibt.

9.5 Topologische Gruppen. Quotient nach abgeschlossener Untergruppe Hausdorff. Projektive Räume Hausdorff und Mannigfaltigkeiten. Kompakt-offene Topologie. Exponentialgesetz formuliert. Gezeigt, daß kompakte Hausdorffräume normal sind, ohne den Begriff normal einzuführen. Gezeigt, daß Hausdorffräume, in denen jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt, lokal kompakt sind.

11.5 Exponentialgesetz bewiesen. Lemma von Urysohn bewiesen. Erweiterungslemma von Tietze formuliert, aber mit Beweis nicht fertig geworden. Das soll nicht mehr aufgegriffen werden.

16.5 Patimo: Tychonov mit Beweis. Klassifikation kompakter Einsmannigfatigkeiten, Beweis nicht ganz fertig gemacht.

18.5 Fundamentalgruppe bis Kriterium für wegweise einfachen Zusammenhang.

23.5 Funktorialität der Fundamentalgruppe. Fundamentalgruppe der Kreislinie mit Anwendungen bis zum Satz vom Igel einschließlich.

25.5 Homotopie, Kategorientheorie. Eigenschaften von Funktoren, Äquivalenz von Kategorien.

30.5 Homotopie und Fundamentalgruppe. Wege in der Ebene ohne Selbstüberschneidungen.

1.6 Homotopieklassen von Selbstabbildungen der Kreislinie mit Anwendungen, insbesondere Unmöglichkeit des Plattdrückens einer Kugelschale und Satz vom Butterbrot mit Schinken. Produkte und Koprodukte in Kategorien.

13.6 Seifert-van Kampen mit Beweis. Kartesische und kokartesische Diagramme.

15.6 Freie Monoide und Gruppen. Koprodukt und Pushout von Gruppen. Fundamentalgruppe des Komplements einer endlichen Teilmenge der Ebene. Nicht Abelisierung und Rang einer freien Gruppe.

20.6 Klassifikation von Flächen, Aussage. Simplizialkomplexe und ihre geomerische Realisierung. Kombinatorische Flächen. Zerschneidbarkeit zu einem Vieleck.

22.6 Fläche eines Flächenworts. Umformungen von Flächenworten. Eckenreduktion, Kreuzhaubennormierung. Henkelnormierung vermurkst.

27.6 Klassifikation von Flächen. Abelisierung und Rang einer freien Gruppe. Beginn der Überlagerungstheorie: Definition einer Überlagerungsabbildung, étale Abbildungen, Überlagerungsabbildungen sind étale.

29.6 Bis bepunktet universelle Überlagerungen, nur Definition, Beispiele dazu, keine Sätze. Sonst Quotienten als Überlagerungen, Eindeutigkeit von Lifts, Deckbewegungen und Decktransformationen. Blätterzahl. Lemma zu étalen Abbildungen.

4.7 Quotient einer universellen Überlagerung nach ihrer Deckbewegungsgruppe. Decktransformationen sind selber Überlagerungen im Fall einer lokal zusammenhängenden Basis. Einfacher Zusammenhang. Bedeutet, daß die Identität eine universelle Überlagerung ist. Liften bei einfachem Zusammenhang. Intervalle und Einheitsquadrat sind einfach zusammenhängend. Noch nicht Bezug zu wegweise einfach zusammenhänged.

6.7 Statt „einfach zusammenhängend“ sage „überlagerungstrivial“. Jeder geeignete Raum besitzt eine schleifenfüllende (neu für einfach wegzusammenhängend) wegzusammenhängende Überlagerung, die dann notwendig auch universell ist. Letzter Teil vom Beweis vermurkst, dabei isses ganz einfach.

11.7 Leonardo Patimo vertritt mich. Ende des Beweises für die Existenz von universellen Überlagerungen. Treue Funktoren und Äquivalenzen von Kategorien. Transformationen von Funktoren. Adjunktion von Funktoren und Konstruktion der Einheit und der Koeinheit (noch ohne Beweis)

13.7 Adjunktion und Transformationen, Beispiele. Lemma über Äquivalenz von Kategorien durch Adjunktion mit Beweis. Eindeutigkeit von Adjungierten und Adjunktion durch Einheit und Koeinheit ohne Beweis.

18.7 Giovanni Zaccanelli vertritt mich und erklärt die Äquivalenzen von Kategorien zwischen Mengen mit Operation der Deckbewegungsgruppe einer universellen Überlagerung, Mengen mit Operation der Fundamentalgruppe und Überlagerungen. Außerdem erklärt er das Beispiel einer Deckselbsttransformation einer zusammenhängenden Überlagerung, die keine Deckbewegung ist. Nicht diskutiert wurde wie abgesprochen das Liftbarkeitskriterium über die Fundamentalgruppe.

20.7 Idem.

25.7 Erzeuger und Relationen für $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$. Etwas knapp geraten, muß noch mit Bildern angereichert werden.

27.7 Klausur.

Literatur

[AAG] Skriptum Affine Algebraische Gruppen. Wolfgang Soergel.

[AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.

[AN1] Skriptum Analysis 1. Wolfgang Soergel.

[AN2] Skriptum Analysis 2. Wolfgang Soergel.

[AN3] Skriptum Analysis 3. Wolfgang Soergel.

[FR84] D. B. Fuks and V. A. Rokhlin. *Beginner's course in topology*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Geometric chapters, Translated from the Russian by A. Iacob, Springer Series in Soviet Mathematics.

[GR] Skriptum Grundlagen. Wolfgang Soergel.

[Hal70] Paul R. Halmos. *Measure Theory*, volume 18 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1970.

[HR63] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 115. Academic Press Inc., 1963.

[KAG] Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie. Wolfgang Soergel.

[LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.

[LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.

[ML] Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen. Wolfgang Soergel.

[NAS] Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie. Wolfgang Soergel.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.

[TF] Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie. Wolfgang Soergel.

[TS] Skriptum Singuläre Homologie. Wolfgang Soergel.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das $\cup$ dem Buchstaben u oder das $\subset$ dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index