

TOPOLOGIE MIT GRUNDLAGEN

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Stetigkeit in abstrakten Räumen	6
1.1	Topologische Räume und Kompatibilitäten	6
1.2	Theorie der topologischen Räume	8
1.3	Metrische Räume	9
1.4	Grenzwerte in metrischen Räumen	15
1.5	Abgeschlossene und offene Teilmengen	18
1.6	Nur noch Übungen zur Topologie	21
1.7	Abgeschlossene Teilmengen topologischer Räume	21
2	Kompaktheit	23
2.1	Kompakte metrische Räume	23
2.2	Affine Räume*	25
2.3	Normierte Räume	27
2.4	Überdeckungen kompakter metrischer Räume	33
2.5	Integrale mit Parametern	37
3	Mengentheoretische Topologie	40
3.1	Topologische Räume	40
3.2	Inneres, Abschluß, Umgebungsbegriff	44
3.3	Zusammenhang	48
3.4	Topologische Mannigfaltigkeiten*	53
3.5	Kompakte Räume	56
3.6	Initialtopologie	59
3.7	Finaltopologie	65
3.8	Abzählbar basierte Einsmannigfaltigkeiten*	72
3.9	Topologisches Exponentialgesetz	74
4	Topologie und algebraische Strukturen	81
4.1	Topologische Gruppen	81
4.2	Quotienten nach Gruppenwirkungen	84
4.3	Projektive Räume	88
4.4	Eigentlichkeit und hausdorffsche Quotienten*	93
5	Homotopie und Fundamentalgruppe	99
5.1	Einführung in die algebraische Topologie	99
5.2	Definition der Fundamentalgruppe	104
5.3	Fundamentalgruppe der Kreislinie	110
5.4	Anwendungen und Beispiele	113
5.5	Homotopien zwischen stetigen Abbildungen	118

5.6	Kategorien und Funktoren	119
5.7	Homotopie und Fundamentalgruppe	125
5.8	Abelisierte Fundamentalgruppe*	132
5.9	Selbsthomotopien der Kreislinie	134
6	Beschreibung einiger Fundamentalgruppen	140
6.1	Produkte und Koprodukte in Kategorien	140
6.2	Kartesische Diagramme	142
6.3	Kokartesische Diagramme	145
6.4	Satz von Seifert und van Kampen	148
6.5	Freie Monoide und freie Gruppen	153
6.6	Push-out von Gruppen	160
6.7	Simplizialkomplexe und triangulierbare Flächen	161
6.8	Klassifikation der geschlossenen Flächen	169
6.9	Gruppen durch Erzeugende und Relationen	178
6.10	Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen	180
7	Überlagerungstheorie	183
7.1	Überlagerungen	183
7.2	Kategorien von Mengen mit Operation	188
7.3	Quotientenabbildungen als Überlagerungen	190
7.4	Lifts und Decktransformationen	193
7.5	Initiale und universelle Überlagerungen	198
7.6	Existenz universeller Überlagerungen	203
8	Überlagerungen und Gruppenwirkungen	208
8.1	Eigenschaften von Funktoren	208
8.2	Transformationen	209
8.3	Adjungierte Funktoren	212
8.4	Überlagerungen und Gruppenwirkungen	215
8.5	Überlagerungen und Fundamentalgruppe	219
8.6	Erzeuger und Relationen für $PSL(2; \mathbb{Z})^*$	228
8.7	Das Yoneda-Lemma*	230
8.8	Mehr zu adjungierten Funktoren*	232
9	Weiterführende Resultate	239
9.1	Die Zopfgruppe	239
9.2	Überlagerungen topologischer Gruppen*	246
9.3	Überlagerungen und Homotopie*	248

10 Kategorien und Funktoren*	252
10.1 Kategorien	252
10.2 Funktoren	259
10.3 Objekte mit Zusatzstrukturen*	264
10.4 Transformationen	267
10.5 Natürliche Konstruktionen in der Geometrie	274
10.6 Köcher*	276
10.7 Produkte und Koprodukte in Kategorien	280
10.8 Produkte und Summen von Vektorräumen*	285
10.9 Algebren*	288
10.10 Yoneda-Lemma*	291
10.11 Universen*	295
11 Danksagung	297
Literaturverzeichnis	298
Indexvorwort	299
Index	300

Diese Zusammenstellung ist ergänzt um die besonders relevanten Abschnitte der Skripte zur Analysis. Alle in der farbigen Darstellung grünen und überwiegend vierteiligen Referenzen beziehen sich auf die **öffentliche Werkbank**. Lädt man diese Datei in denselben Ordner, funktionieren bei modernen Programmen zur Darstellung von pdf-Dateien auch die Hyperlinks.

1 Stetigkeit in abstrakten Räumen

1.1 Topologische Räume und Kompatibilitäten

1.1.1. Gegeben eine Menge X bilden wir die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X , die **Potenzmenge von X** . Weil es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, nenne ich wie in ?? Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ lieber **Systeme von Teilmengen von X** und spreche im folgenden von **Teilsystemen**, wenn ich Teilmengen solcher Mengensysteme meine.

Definition 1.1.2. Gegeben eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Teilmengen einer Menge X im Sinne von ?? erklärt man ihren **Schnitt** und ihre **Vereinigung** durch die Vorschriften

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I}^X X_i := \{x \in X \mid \text{Für alle } i \in I \text{ gilt } x \in X_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I}^X X_i := \{x \in X \mid \text{Es existiert ein } i \in I \text{ mit } x \in X_i\}$$

1.1.3 (**Schnitt und Vereinigung leerer Mengenfamilien**). Insbesondere ist der Schnitt über die leere Familie von Teilmengen von X ganz X und die Vereinigung über die leere Familie von Teilmengen von X ist die leere Menge.

Vorschau 1.1.4. In 10.7.17 und 10.7.7 diskutieren wir allgemeiner Produkte und „disjunkte Vereinigungen“ beliebiger nicht notwendig endlicher Familien von Mengen, die dabei auch nicht als Teilmengen einer vorgegebenen Menge angenommen werden.

Definition 1.1.5. Eine **Topologie \mathcal{T} auf einer Menge X** ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. In Formeln ausgedrückt fordern wir von einer Topologie \mathcal{T} also:

1. $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{T} \Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{T}$ für $n \geq 0$ und insbesondere auch $X \in \mathcal{T}$ als der Spezialfall $n = 0$. Gleichbedeutend dazu sind die beiden Forderungen $X \in \mathcal{T}$ sowie $V, W \in \mathcal{T} \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{T}$;
2. $\mathcal{V} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \in \mathcal{T}$ und damit insbesondere auch $\emptyset \in \mathcal{T}$, da ja das leere Mengensystem $\mathcal{V} = \emptyset$ in jedem Mengensystem enthalten ist.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{T}) bestehend aus einer Menge mitsamt einer Topologie. Statt $V \in \mathcal{T}$ schreiben wir meist

$$V \Subset X$$

und nennen V eine **offene Teilmenge von X** . Die Notation \Subset ist in der Literatur jedoch unüblich.

Definition 1.1.6. Seien X ein topologischer Raum und $P \subset X$ eine Teilmenge. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine **Umgebung U von P in X** , wenn es eine offene Menge $V \Subset X$ gibt mit $P \subset V \subset U$. Im Fall einer einelementigen Teilmenge $P = \{p\}$ sprechen wir auch von einer **Umgebung U von p in X** .

Definition 1.1.7. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig im Punkt** $p \in X$, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **stetig genau** dann, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.

Beispiel 1.1.8 (Standardtopologie auf $\bar{\mathbb{R}}$). Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}}$ der erweiterten reellen Zahlen erklären wir die **Standardtopologie \mathcal{T}** durch die Vorschrift, daß eine Menge $V \subset \bar{\mathbb{R}}$ zu \mathcal{T} gehört genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in V$ eine Intervallumgebung I von p gibt mit $I \subset V$. Die in Bezug auf die Standardtopologie offenen Intervalle V sind dann offensichtlich genau alle Intervalle der Gestalt $V = (a, b), [-\infty, b), (a, \infty]$ oder $[-\infty, \infty]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.1.9 (Kompatibilität unserer Umgebungsbegriffe in $\bar{\mathbb{R}}$). *Gegeben $p \in \bar{\mathbb{R}}$ ist eine Teilmenge $U \subset \bar{\mathbb{R}}$ genau dann eine Umgebung von p in Bezug auf die Standardtopologie, wenn U eine Umgebung von p ist im Sinne unserer Definition ??.*

Beweis. Per definitionem ist jede Umgebung von p in Bezug auf die Standardtopologie auch eine Umgebung im Sinne von ??. Ist umgekehrt U eine Umgebung im Sinne von ??, gibt es also eine Intervallumgebung I von p mit $I \subset U$, gibt es offensichtlich auch eine offene Intervallumgebung $V \Subset \bar{\mathbb{R}}$ von p mit $V \subset I$ und a fortiori $V \subset U$. □

Beispiel 1.1.10 (Standardtopologie auf $\bar{\mathbb{R}}^n$). Auf dem $\bar{\mathbb{R}}^n$ erklären wir die **Standardtopologie \mathcal{T}** durch die Vorschrift, daß eine Menge $V \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ zu \mathcal{T} gehört genau dann, wenn es für jeden Punkt $p = (p_1, \dots, p_n) \in V$ Intervallumgebungen I_ν von p_ν gibt mit $I_1 \times \dots \times I_n \subset V$.

Lemma 1.1.11 (Kompatibilität unserer Umgebungsbegriffe in $\bar{\mathbb{R}}^n$). *Gegeben $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ ist eine Teilmenge $U \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ genau dann eine Umgebung von p in Bezug auf die Standardtopologie, wenn U eine Umgebung von p ist im Sinne unserer Definition ??.*

Beweis. Per definitionem ist jede Umgebung von p in Bezug auf die Standardtopologie auch eine Umgebung im Sinne von ??. Ist umgekehrt U eine Umgebung im Sinne von ??, gibt es also Intervallumgebungen I_ν der Koordinaten p_ν von p mit $I_1 \times \dots \times I_n \subset U$, so gilt es $V \Subset \bar{\mathbb{R}}^n$ zu finden mit $p \in V \subset U$. Wie bereits besprochen finden wir aber offene Intervallumgebungen V_ν der Koordinaten p_ν mit $V_\nu \subset I_\nu$ und dann ist offensichtlich $V := V_1 \times \dots \times V_n$ offen für die Standardtopologie mit $p \in V \subset U$. □

1.1.12 (**Kompatibilität unserer Stetigkeitsbegriffe**). Eine Abbildung $\bar{\mathbb{R}}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ ist topologisch stetig für die Standardtopologien im Sinne der obigen Definition 1.1.7 genau dann, wenn sie stetig ist im Sinne unserer Definition ???. Das folgt unmittelbar aus der Rückwärtskompatibilität des Umgebungsbegriffs 1.1.11.

Definition 1.1.13. Gegeben eine Teilmenge $D \subset X$ eines topologischen Raums X erklärt man die **auf D induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** durch die Vorschrift

$$W \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{X} \text{ mit } W = V \cap D.$$

In Worten ist also eine Teilmenge von D offen für die induzierte Topologie genau dann, wenn sie der Schnitt von D mit einer offenen Teilmenge von X ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge D eines topologischen Raums X als topologischen Raum mit der induzierten Topologie auf.

1.1.14. Es ist klar, daß das in 1.1.13 beschriebene Mengensystem auf einer Teilmenge eines topologischen Raums in der Tat eine Topologie auf besagter Teilmenge liefert und daß die Einbettungsabbildung stetig ist.

Beispiel 1.1.15 (Kompatibilität unserer Stetigkeitsbegriffe zum Zweiten). Eine Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ ist stetig im Sinne unserer Definition ??? genau dann, wenn die Abbildung $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig ist für die auf D induzierte Topologie. Das folgt direkt aus den Definitionen.

1.2 Theorie der topologischen Räume

Satz 1.2.1 (Verknüpfung stetiger Abbildungen). *Jede Verknüpfung von stetigen Abbildungen ist stetig. Sind genauer $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen und ist $p \in X$ ein Punkt und f stetig bei p und g stetig bei $f(p)$, so ist $(g \circ f)$ stetig bei p .*

Beweis. Ist g stetig bei $f(p)$, so finden wir für jede Umgebung U von $g(f(p))$ eine Umgebung U' von $f(p)$ mit $g(U') \subset U$. Ist zusätzlich f stetig bei p , finden wir für diese Umgebung U' von $f(p)$ weiter eine Umgebung U'' von p mit $f(U'') \subset U'$. Damit haben wir aber auch eine Umgebung U'' von p gefunden mit $(g \circ f)(U'') \subset U$. \square

Lemma 1.2.2 (Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie). *Seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, $Z \subset Y$ eine Teilmenge mit $f(X) \subset Z$ und $p \in X$ ein Punkt. Genau dann ist $f : X \rightarrow Y$ stetig bei p , wenn die induzierte Abbildung $f : X \rightarrow Z$ stetig ist bei p für die auf Z induzierte Topologie.*

Beweis. Es ist klar, daß die Umgebungen $U_Z \subset Z$ eines Punktes $q \in Z$ in Bezug auf die induzierte Topologie genau die Schnitte $U_Y \cap Z$ mit Z von Umgebungen $U_Y \subset Y$ von q in Y sind. Genau dann gibt es also für jede Umgebung U_Z von $f(p)$ in Z eine Umgebung $U' \subset X$ von p mit $f(U') \subset U_Z$, wenn es für jede Umgebung U_Y von $f(p)$ in Y eine Umgebung $U' \subset X$ von p mit $f(U') \subset U_Y$, wenn es für jede Umgebung U_Z von $f(p)$ in Z eine Umgebung $U' \subset X$ von p gibt mit $f(U') \subset U_Z$. \square

1.2.3. Wir leiten unsere Aussage ?? über die Stetigkeit der Verknüpfung auch noch aus den obigen Aussagen ab. Gegeben $f : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig bei $p \in D$ und $g : \mathbb{R}^n \supset E \rightarrow \mathbb{R}^l$ mit $f(D) \subset E$ stetig bei $f(p)$ ist ja nach der universellen Eigenschaft der induzierten Topologie auch $f : D \rightarrow E$ stetig bei p . Da nach Annahme $g : E \rightarrow \mathbb{R}^l$ stetig ist bei $f(p)$, folgt die Stetigkeit der Verknüpfung nach ?? aus der Stetigkeit der Verknüpfung nach 1.2.1.

1.2.4. Wenn wir eine Menge einfach nur „offen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen“ gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \Subset Y$, daß M offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Topologie.

Lemma 1.2.5 (Charakterisierung offener Mengen durch Umgebungen). *Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines topologischen Raums X ist offen genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist.*

Beweis. Per definitionem ist eine offene Menge eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte. Ist umgekehrt $Y \subset X$ eine Umgebung jedes Punktes $p \in Y$, so gibt es für alle $p \in Y$ eine offene Menge $V_p \Subset X$ mit $p \in V_p \subset Y$. Es folgt

$$Y = \bigcup_{p \in Y} V_p$$

und damit ist Y offen als Vereinigung offener Teilmengen von X . \square

1.3 Metrische Räume

Definition 1.3.1. Unter einer **Metrik** d auf einer Menge X versteht man eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ derart, daß für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar $X = (X, d)$ bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X .

Beispiel 1.3.2. Der Buchstabe d steht in diesem Zusammenhang vermutlich für das Wort „Distanz“. Auf \mathbb{R}^n liefert der übliche **Skalarproduktabstand**

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

eine Metrik. Die Ungleichung aus der Definition einer Metrik wird in diesem Beispiel in ?? formal bewiesen und bedeutet anschaulich, daß in einem Dreieck mit Seitenlängen a, b, c stets gilt $a \leq b + c$. Sie heißt deshalb auch ganz allgemein die **Dreiecksungleichung**.

Beispiel 1.3.3. Auf dem \mathbb{R}^n ist auch der **Betragsabstand**

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

eine Metrik. Wenn nichts anderes gesagt ist, fassen wir den \mathbb{R}^n stets auf als einen metrischen Raum mit dem Betragsabstand als Metrik. Diese Metrik ist zwar weniger anschaulich als der Skalarproduktabstand, läßt sich aber einfacher handhaben.

Beispiel 1.3.4. Jede Teilmenge eines metrischen Raums ist mit der **induzierten Metrik** selbst ein metrischer Raum.

Definition 1.3.5. Sei X ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$B(x; \varepsilon) := \{z \in X \mid d(x, z) < \varepsilon\}$$

Diese Menge heißt der ε -**Ball** um x oder auch die ε -**Kugel** um x oder auch die ε -**Umgebung** von x .

Beispiel 1.3.6. Für den Skalarproduktabstand im \mathbb{R}^3 ist der Ball um x mit Radius ε anschaulich tatsächlich ein Ball. Für den Betragsabstand hat $B(x; \varepsilon)$ dahingegen die Gestalt eines Würfels mit Mittelpunkt x und Seitenlänge 2ε .

Definition 1.3.7. Eine **Umgebung** eines Punktes in einem metrischen Raum ist eine Teilmenge von besagtem Raum, die einen ganzen Ball um unseren Punkt umfaßt.

1.3.8 (Vom Nutzen des Umgebungsbegriffs). Die Umgebungen eines Punktes im \mathbb{R}^n bezüglich des Betragsabstands sind dieselben wie seine Umgebungen bezüglich des Skalarproduktabstands, was man unschwer explizit prüft und was sich auch als ein Spezialfall der „Äquivalenz von Normen“ 2.3.13 erweisen wird. Das ist der Grund dafür, daß wir im Folgenden unsere Definitionen nach Möglichkeit mithilfe von Umgebungen formulieren: Für so definierte Begriffe ist a priori klar, daß im Fall des \mathbb{R}^n ihre Bedeutung nicht davon abhängt, ob wir mit dem Skalarproduktabstand oder mit dem Betragsabstand arbeiten.

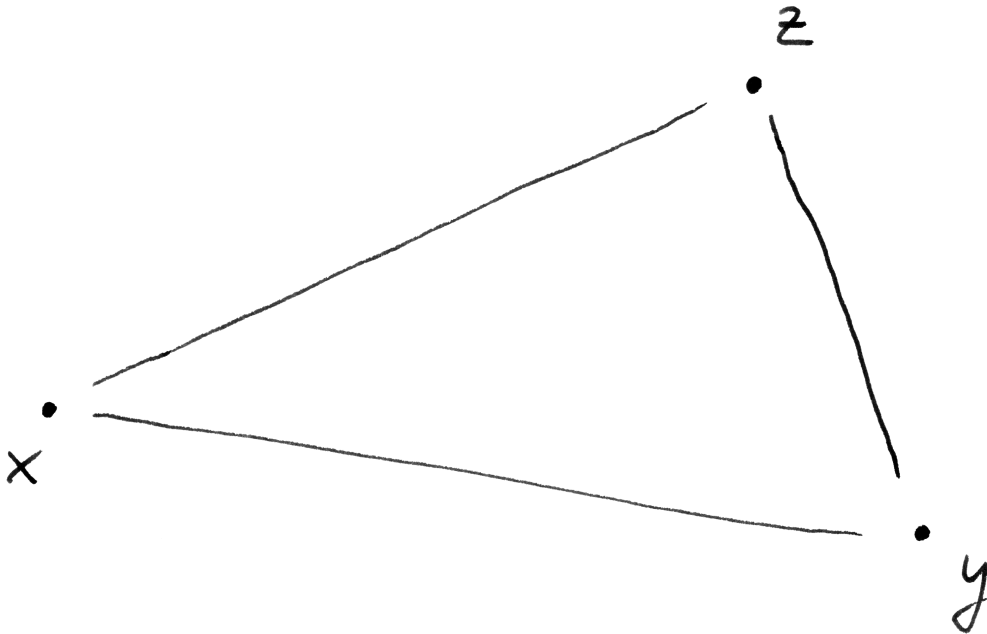
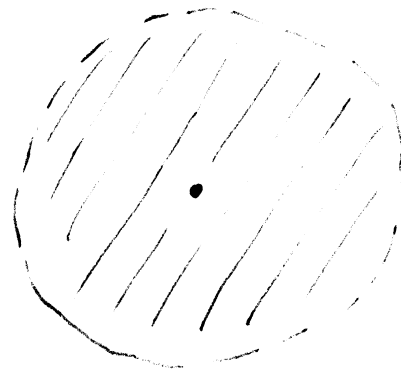
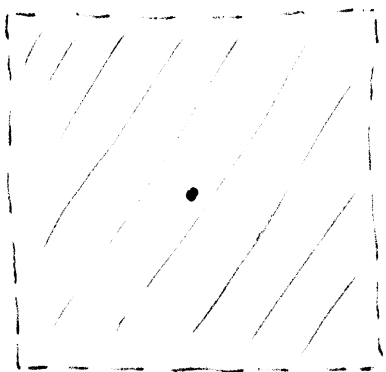


Illustration zur Dreiecksungleichung



Bälle in der Ebene für den Betragsabstand und den Skalarproduktabstand

1.3.9 (**Eigenschaften von Umgebungen**). Der Schnitt von endlich vielen Umgebungen eines Punktes in einem metrischen Raum ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Je zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raums besitzen disjunkte Umgebungen. Genauer sind für x, y mit $d(x, y) = r > 0$ die $(r/2)$ -Bälle um x und y disjunkt. In der Tat folgte für z aus dem Schnitt ja mit Hilfe der Dreiecksungleichung $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < r$, also kann es solch ein z nicht geben.

Definition 1.3.10. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen heißt **stetig im Punkt** $p \in X$, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **stetig**, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.

1.3.11. Offensichtlich ist auch eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen stetig im Punkt $p \in X$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von $f(p)$ ihr Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von p ist.

Lemma 1.3.12 (ε - δ -Kriterium). Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist stetig im Punkt $p \in X$ genau dann, es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, daß gilt $f(B(p; \delta)) \subset B(f(p); \varepsilon)$.

Beweis. Ist f stetig bei p , so finden wir insbesondere für die Umgebung $U := B(f(p); \varepsilon)$ von $f(p)$ eine Umgebung U' von p mit $f(U') \subset U$, und diese Umgebung U' muß dann ihrerseits einen Ball $B(p; \delta)$ umfassen. Gilt umgekehrt das ε - δ -Kriterium und haben wir eine Umgebung U von $f(p)$ gegeben, so finden wir erst ein $\varepsilon > 0$ mit $B(f(p); \varepsilon) \subset U$, können dann dazu ein δ finden mit $f(B(p; \delta)) \subset B(f(p); \varepsilon)$, und $U' := B(p; \delta)$ schließlich ist die gesuchte Umgebung von p mit $f(U') \subset U$. \square

Beispiel 1.3.13. Beispiele für stetige Abbildungen sind Einbettungen von einem Teilraum oder konstante Abbildungen. In diesen Fällen können wir $\delta = \varepsilon$ nehmen.

Beispiel 1.3.14 (Rückwärtskompatibilität der metrischen Stetigkeit). Gegeben $D \subset \mathbb{R}^m$ ist eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ offensichtlich stetig im hier gegebenen Sinne in Bezug auf den Betragsabstand 1.3.3 genau dann, wenn sie stetig ist im Sinne unserer bisherigen Definition ???. Die Rückwärtskompatibilität des Stetigkeitsbegriffs ist damit gesichert.

Definition 1.3.15. Gegeben metrische Räume (X_i, d_i) für $1 \leq i \leq n$ machen wir ihr Produkt $X = X_1 \times \dots \times X_n$ zu einem metrischen Raum durch die **Produktmetrik**

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Beispiel 1.3.16. Der Betragsabstand auf \mathbb{R}^{n+m} ist die Produktmetrik zu den Betragsabständen auf \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m .

Proposition 1.3.17 (Komponentenregel). *Seien Z und X_1, \dots, X_n metrische Räume und $f_i : Z \rightarrow X_i$ Abbildungen. Genau dann ist die Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : Z \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ stetig, wenn alle f_i stetig sind.*

1.3.18. Wenden wir diese Proposition an mit f der Identität auf einem Produkt, so impliziert die Stetigkeit der Identität, daß alle Projektionsabbildungen $\text{pr}_i : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$ stetig sein müssen.

Beweis. Da die Projektionen pr_i Abstände zwischen Punkten nie vergrößern, können wir ihre Stetigkeit direkt zeigen, indem „wir jeweils $\delta = \varepsilon$ nehmen“. Ist f stetig, so sind folglich auch die $f_i = \text{pr}_i \circ f$ stetig als Verknüpfungen stetiger Abbildungen. Sind umgekehrt alle f_i stetig in p , so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ gewisse δ_i mit $d(p, z) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(p), f_i(z)) < \varepsilon$, wo d_i die Metrik auf X_i bezeichnet. Nehmen wir $\delta = \inf \delta_i$, so gilt

$$d(p, z) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(z)) < \varepsilon$$

und das ist gleichbedeutend zu $f(B(p; \delta)) \subset B(f(p); \varepsilon)$. □

Beispiel 1.3.19. Eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ aus einem metrischen Raum X ist genau dann stetig, wenn alle ihre Komponenten $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Korollar 1.3.20 (Summen und Produkte stetiger Abbildungen sind stetig). *Ist X ein metrischer Raum und sind f, g stetige Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$ und fg stetige Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir schreiben $f + g$ beziehungsweise fg als die Verknüpfung der nach der Komponentenregel 1.3.17 stetigen Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))$ mit der nach ?? beziehungsweise ?? stetigen Addition beziehungsweise Multiplikation $\text{add, mult} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. □

Übungen

Übung 1.3.21. Wir versehen den Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} mit der Metrik $d(z, w) = |z - w|$. Man zeige, daß das in der Tat eine Metrik ist, und daß die Addition und die Multiplikation stetige Abbildungen $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind und das Bilden des Inversen eine stetige Abbildung $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$.

Ergänzende Übung 1.3.22. Man zeige, daß das Invertieren von Matrizen eine stetige Abbildung $\text{GL}(n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{C})$ ist. Hinweis: Cramer'sche Regel ??.

Übung 1.3.23. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen, die Abstände nicht verkleinert, in Formeln $d(f(x), f(z)) \geq d(x, z) \forall x, z \in X$. Man zeige, daß f injektiv ist und $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ stetig.

Übung 1.3.24. Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig. Jede multilineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{k(1)} \times \dots \times \mathbb{R}^{k(r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Beispiel 1.3.25 (Rückwärtskompatibilität zur metrischen Stetigkeit). Für jeden metrischen Raum bildet das System seiner im Sinne von 1.5.3 offenen Teilmengen eine Topologie, die **metrische Topologie**. Wir fordern von einer Topologie *nicht*, daß ein beliebiger Schnitt offener Mengen stets wieder offen sein muß: Sonst müßten ja in unserem Beispiel der metrischen Räume alle einpunktigen Mengen offen sein, als Schnitte immer kleinerer Bälle. Da nach 1.5.5 Bälle in metrischen Räumen stets offen sind, ist in metrischen Räumen eine Umgebung eines Punktes im topologischen Sinne 1.1.6 dasselbe wie eine Umgebung im metrischen Sinne 1.3.7. Insbesondere ist eine Abbildung zwischen metrischen Räumen „topologisch stetig“ im Sinne der obigen Definition 1.1.7 genau dann, wenn sie „metrisch stetig“ ist im Sinne unserer Definition 1.3.10.

Beispiele 1.3.26. Es gibt auch Topologien, die unserer bis hierher entwickelten Anschauung eher ungewohnt sein mögen: Auf jeder Menge können wir etwa die **Klumpentopologie** betrachten, die nur aus der ganzen Menge und der leeren Menge besteht, oder die **diskrete Topologie**, bei der wir schlicht alle Teilmengen als offen ansehen. Einen topologischen Raum mit der diskreten Topologie nennen wir auch kurz einen **diskreten Raum**.

Beispiele 1.3.27. Jede konstante Abbildung ist stetig. Die Identität auf einem topologischen Raum ist immer stetig. Jede Abbildung in einen Raum mit der Klumpentopologie ist stetig. Jede Abbildung aus einem Raum mit der diskreten Topologie ist stetig.

Übungen

Ergänzende Übung 1.3.28 (De Morgan'sche Regeln). Man verallgemeinere die Formeln aus ???. Genauer schreibe man in Formeln und zeige, daß der Schnitt einer derartigen Vereinigung mit einer weiteren Menge die Vereinigung der Schnitte ist, die Vereinigung eines derartigen Schnitts mit einer weiteren Menge der Schnitt der Vereinigungen, das Komplement eines Schnitts die Vereinigung der Komplemente und das Komplement einer Vereinigung der Schnitt der Komplemente. Etwas allgemeiner zeige man für zwei Familien $(A_i)_{i \in I}$ und $(B_j)_{j \in J}$ von Teilmengen einer Menge X die Formeln

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j)$$

Besonders Mutige zeigen für eine durch eine Menge A indizierte Familie $(X_a)_{a \in A}$ von Teilmengen einer vorgegebenen Menge X und eine beliebige Abbildung $g : A \rightarrow J$ in eine weitere Menge J die Formel

$$\bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{g(a)=j} X_a\right) = \bigcup_{\substack{s: J \rightarrow A \\ g \circ s = \text{id}}} \left(\bigcap_{j \in J} X_{s(j)}\right)$$

Hier läuft die Vereinigung rechts also über alle Schnitte $s : J \rightarrow A$ von g . Durch Übergang zu den Komplementen folgert man die Gültigkeit einer analogen Formel, in der \cup und \cap vertauscht sind.

Übung 1.3.29. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Ist f stetig in $p \in X$ und g stetig in $f(p) \in Y$, so ist $g \circ f$ stetig in p . Hinweis: 1.2.1.

Übung 1.3.30. Die durch den Betragsabstand auf \mathbb{R}^n gegebene Topologie fällt zusammen mit der durch den Skalarproduktabstand gegebenen Topologie. Da nach 1.3.24 in Bezug auf diese Topologien jede lineare, ja sogar jede multilineare Abbildung stetig ist, können wir auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V seine **natürliche Topologie** durch die Bedingung erklären, daß für einen und jeden Vektorraumisomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ sowohl φ als auch $\varphi^{-1} : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ stetig sein sollen. In derselben Weise erklären wir die **natürliche Topologie** auf jedem endlichdimensionalen reellen affinen Raum.

1.4 Grenzwerte in metrischen Räumen

1.4.1. Ein Punkt p eines metrischen Raums X heißt ein **Häufungspunkt von X** , wenn jede Umgebung von p außer p selbst auch noch weitere Punkte von X enthält.

Definition 1.4.2. Gegeben metrische Räume X, Y und ein Häufungspunkt p von X und eine Abbildung $f : X \setminus p \rightarrow Y$ gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Abbildung $\tilde{f} : X \rightarrow Y$, die stetig ist bei p . Man zeigt das wie in ???. Wenn es so eine Fortsetzung gibt und sie durch den Wert $\tilde{f}(p) = y$ geschieht, so sagen wir, der **Grenzwert von f für $x \rightarrow p$ existiere in Y** und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$$

1.4.3 (**Grenzwerte von Folgen in metrischen Räumen**). Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$ binden wir in den Kontext des Grenzwertbegriffs 1.4.2 für metrische Räume ein, indem wir irgendeine streng monotone Bijektion $[0, 1] \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbb{R}}$ wählen und sie verwenden, um die Betragsmetrik von $[0, 1]$ zu einer Metrik auf $\bar{\mathbb{R}}$ zu übertragen, und uns überlegen, daß Umgebungen und Grenzwerte nach der Stetigkeit von Umkehrfunktionen ?? nicht von der Wahl dieser Bijektion abhängen. Vollständig befriedigend wird das erst im Kontext topologischer Räume ??, der alle bis hierher behandelten Fälle in natürlicher Weise einschließt.

Beispiel 1.4.4. Gegeben $\mathbb{N} \rightarrow Y, n \mapsto y_n$ eine Folge in einem metrischen Raum Y und $y \in Y$ ein Punkt ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

dann gleichbedeutend dazu, daß jede Umgebung von y fast alle Glieder unserer Folge enthält. Wir sagen dann, die Folge y_n **strebt gegen** y oder **konvergiert gegen** x und nennen y den **Grenzwert der Folge**. Gleichbedeutend können wir auch fordern, daß jeder Ball um y fast alle Glieder unserer Folge enthält.

Beispiel 1.4.5. Sei D eine Menge und X ein metrischer Raum. Auf dem Raum $\text{Ens}^b(D, X)$ aller beschränkten Abbildungen $f : D \rightarrow X$ kann man eine Metrik erklären durch die Vorschrift

$$d(f, g) = \sup\{d(f(p), g(p)) \mid p \in D\}$$

im Fall $D \neq \emptyset$ und in offensichtlicher Weise im Fall $D = \emptyset$. Diese Metrik heißt die **Metrik der gleichmäßigen Konvergenz**. In der Tat ist für f_n, f im Funktionenraum $\text{Ens}^b(D, \mathbb{R})$ mit dieser Metrik die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

gleichbedeutend dazu, daß die Abbildungen f_n im Sinne unserer Definition ?? gleichmäßig gegen die Abbildung f konvergieren.

Definition 1.4.6 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz). Sei D eine Menge, X ein metrischer Raum, $f_n : D \rightarrow X$ eine Folge von Abbildungen und $f : D \rightarrow X$ eine weitere Abbildung.

1. Wir sagen, die Folge der f_n **konvergiere punktweise** gegen f , wenn gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p)$ für alle Punkte $p \in D$.
2. Wir sagen, die Folge der f_n **konvergiere gleichmäßig** gegen f , wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon$ gibt mit

$$n \geq N \Rightarrow (d(f_n(p), f(p)) < \varepsilon \forall p \in D)$$

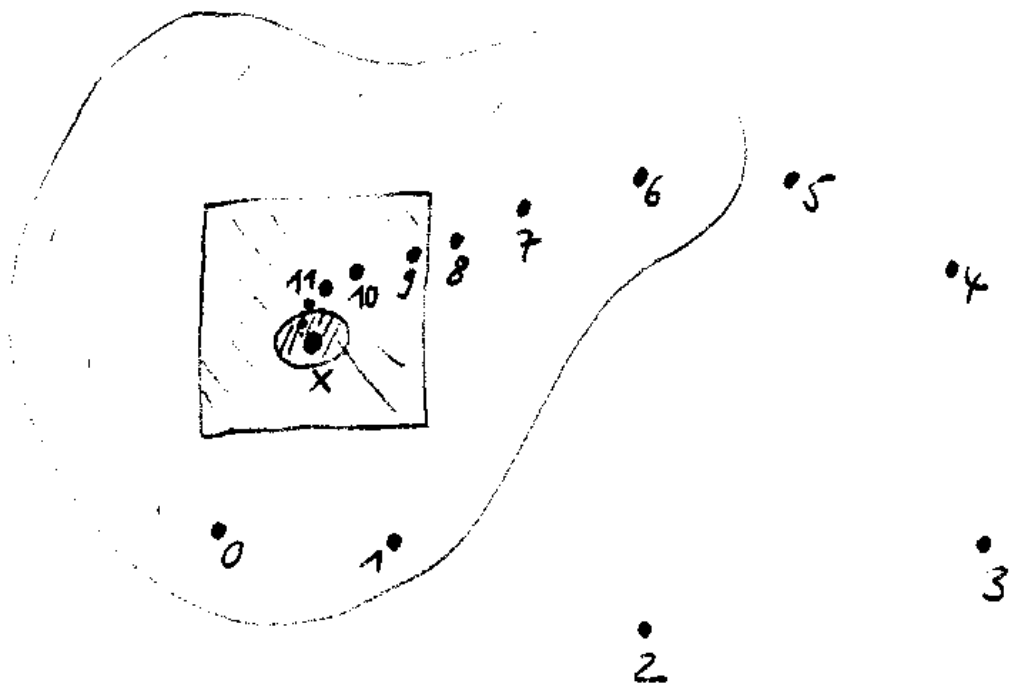


Illustration zur Konvergenz von Folgen. Eingezeichnet sind drei Umgebungen eines Punktes x , in jeder sollen fast alle Folgenglieder liegen.

Übungen

Übung 1.4.7. Sei (x_n, y_n) eine Folge im Produkt $X \times Y$ der metrischen Räume X und Y . Genau dann konvergiert unsere Folge gegen (x, y) , wenn x_n gegen x konvergiert und y_n gegen y . Man formuliere und beweise auch die offensichtliche Verallgemeinerung auf beliebige endliche Produkte metrischer Räume.

Übung 1.4.8. Für beschränkte Abbildungen von einer Menge D in einen metrischen Raum X ist auch in dieser Allgemeinheit gleichmäßige Konvergenz gleichbedeutend zur Konvergenz im Raum $\text{Ens}^b(D, X)$ mit seiner eben erklärten „Metrik der gleichmäßigen Konvergenz“.

Übung 1.4.9. Für jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist die Menge der Folgenglieder beschränkt.

Übung 1.4.10 (Stetigkeit als Folgenstetigkeit). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen. Genau dann ist f stetig in p , wenn für jede Folge x_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p)$. Hinweis: ??.

Übung 1.4.11 (Stetigkeit komplexer Potenzreihen). Man zeige, daß jede komplexe Potenzreihe eine stetige komplexwertige Funktion auf ihrer Konvergenzkreisscheibe $\{z \mid |z| < r\}$ liefert, für r der Konvergenzradius. Hinweis: Man kopiere den Beweis im Reellen. Insbesondere sehen wir so ein zweites Mal, daß die komplexe Exponentialfunktion stetig ist.

1.5 Abgeschlossene und offene Teilmengen

Definition 1.5.1. Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt ein **Berührungspunkt von A** , wenn es eine Folge in A gibt, die gegen x konvergiert. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in X** , wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält, wenn sie also „abgeschlossen ist unter der Bildung von Grenzwerten“. Statt „ A ist eine abgeschlossene Teilmenge von X “ schreiben wir kurz aber unüblich

$$A \not\subset X$$

1.5.2. Wenn wir eine Menge einfach nur „abgeschlossen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „abgeschlossen“ gemeint ist. Ist X ein metrischer Raum und sind $U \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $U \not\subset Y$, daß U abgeschlossen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Metrik.

Definition 1.5.3. Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt **offen** oder genauer **offen in unserem metrischen Raum** genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist, d.h. wenn sie mit jedem Punkt auch einen ganzen Ball

um besagten Punkt enthält. Statt „ U ist eine offene Teilmenge von X “ schreiben wir kurz aber unüblich

$$U \Subset X$$

1.5.4. Wenn wir eine Menge einfach nur „offen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen“ gemeint ist. Ist X ein metrischer Raum und sind $U \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $U \Subset Y$, daß U offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Metrik.

Beispiele 1.5.5. In einem metrischen Raum ist ein Ball $B(x; r)$ stets offen, denn für $z \in B(x; r)$ gilt $d(x, z) < r$, also gibt es $\varepsilon > 0$ mit $d(x, z) < r - \varepsilon$, und dann haben wir aber $B(z; \varepsilon) \subset B(x; r)$ nach der Dreiecksungleichung. Insbesondere umfaßt jede Umgebung eines Punktes eine offene Umgebung desselben Punktes.

Übungen

Übung 1.5.6. Der Schnitt eines beliebigen Systems von abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die leere Menge und der ganze Raum sind abgeschlossen. Jede einpunktige und damit auch jede endliche Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Jedes kompakte reelle Intervall ist abgeschlossen in \mathbb{R} .

Ergänzende Übung 1.5.7. Ein Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn ihr Graph abgeschlossen ist im kartesischen Produkt unserer beiden Räume. Hinweis: 1.4.10

Ergänzende Übung 1.5.8. Jede abgeschlossene echte Untergruppe der reellen Zahlengeraden ist zyklisch, als da heißt von der Gestalt $\mathbb{Z}\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Hinweis: Ist $G \subset \mathbb{R}$ unsere Untergruppe, so betrachte man $\inf(G \cap \mathbb{R}_{>0})$.

Übung 1.5.9. Der Schnitt von endlich vielen offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die Vereinigung eines beliebigen Systems von offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die leere Menge und der ganze Raum sind offen. In einem endlichen metrischen Raum ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen. Die im Sinne unserer hier gegebenen Definition „offenen“ Intervalle von \mathbb{R} sind genau die Intervalle (a, b) für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, als da heißt, unsere „offenen reellen Intervalle“ aus ??.

Übung 1.5.10. Nimmt man zu einer Teilmenge M eines metrischen Raums X alle ihre Berührungspunkte hinzu, so erhält man eine abgeschlossene Menge, genauer: Die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfaßt. Diese Menge heißt auch der **Abschluß** von M in X und wird mit $\text{Cl}_X(M) = \text{Cl}(M) = \overline{M}$ bezeichnet.

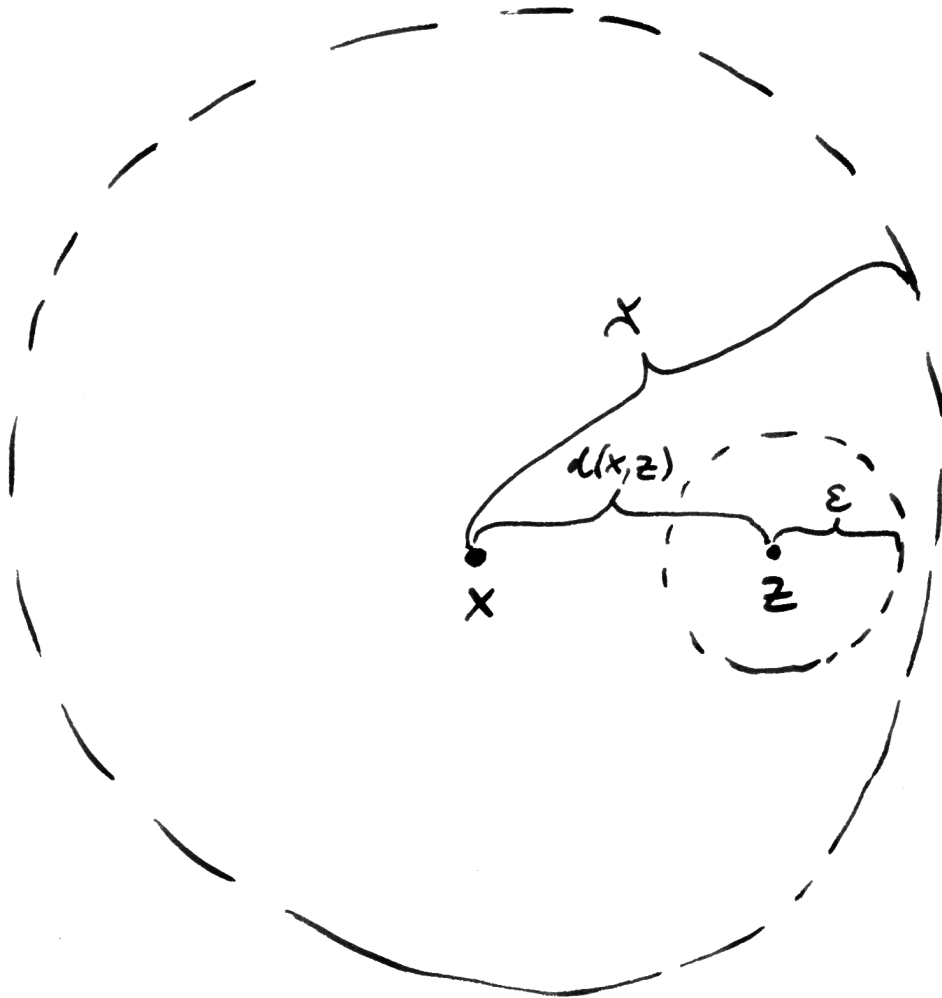


Illustration zu Beispiel 1.5.5: Ein Ball in einem metrischen Raum ist stets offen.

1.5.11 (**Diskussion der Notation**). Diese Notation beißt sich mit unserer Notation $\bar{\mathbb{R}}$ für die erweiterten reellen Zahlen, obwohl natürlich \mathbb{R} schon auch der Abschluß von \mathbb{R} in $\bar{\mathbb{R}}$ ist. Ich hoffe, daß der Leser stets aus dem Kontext erschließen kann, was im Einzelfall jeweils gemeint ist. Soweit ich es abschätzen kann, werde ich \mathbb{R} nie als Bezeichnung für den Abschluß von \mathbb{R} in einem anderen Raum als eben in $\bar{\mathbb{R}}$ selbst verwenden.

Ergänzende Übung 1.5.12. Sei X ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$ disjunkte, abgeschlossene Teilmengen. So gibt es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Hinweis: Man betrachte d_A wie in Übung ?? mache den Ansatz $f(z) = g(d_A(z), d_B(z))$ für geeignetes $g : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow [0, 1]$.

Übung 1.5.13. Sei X ein metrischer Raum, $z \in X$ ein Punkt, $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. So ist die Menge $\{x \in X \mid d(x, z) \leq r\}$ abgeschlossen.

Übung 1.5.14. Ist X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so kann ihr Abschluß \bar{A} in der Notation von ?? beschrieben werden als die Menge $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

Ergänzende Übung 1.5.15. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung metrischer Räume, so ist ihr Graph eine abgeschlossene Teilmenge $\Gamma(f) \subset X \times Y$.

1.6 Nur noch Übungen zur Topologie

Übungen

Übung 1.6.1. Man zeige, daß auf einer Teilmenge eines metrischen Raums die Spurtopologie zur metrischen Topologie mit der Topologie zur induzierten Metrik übereinstimmt.

Übung 1.6.2. Man zeige für jeden topologischen Raum: Der Schnitt von zwei Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Jede Umgebung eines Punktes kann verkleinert werden zu einer offenen Umgebung desselben Punktes.

Übung 1.6.3. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist offen genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist.

Übung 1.6.4. Sei X ein topologischer Raum und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. So ist eine Teilmenge $M \subset U$ offen in U genau dann, wenn sie offen ist in X . In Formeln gilt unter der Voraussetzung $U \subset X$ für Teilmengen $M \subset U$ also $(M \text{ offen in } U \Leftrightarrow M \text{ offen in } X)$.

1.7 Abgeschlossene Teilmengen topologischer Räume

Definition 1.7.1. Gegeben ein topologischer Raum X und eine Teilmenge $M \subset X$ gibt es stets eine kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die M umfaßt,

nämlich den Schnitt über alle abgeschlossenen Teilmengen von X , die M umfassen. Wir notieren diesen Schnitt $\text{Cl}_X(M) = \text{Cl}(M) = \bar{M}$ und nennen sie den **Abschluß von M** oder genauer den **Abschluß von M in X** .

1.7.2 (Diskussion der Notation). Diese Notation beißt sich mit unserer Notation $\bar{\mathbb{R}}$ für die erweiterten reellen Zahlen. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Immerhin ist $\bar{\mathbb{R}}$ auch der Abschluß von \mathbb{R} in den erweiterten reellen Zahlen mit ihrer Topologie aus 1.1.10.

1.7.3. Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn darunter das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist: Das folgt unmittelbar aus dem entsprechenden Satz ?? für offene Mengen, da das Urbild des Komplements einer Menge stets das Komplement ihres Urbilds ist.

Beispiel 1.7.4. Wir geben einen neuen Beweis für die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert ??, der zwar nur für reelle Folgen mit reellen Grenzwerten funktioniert, aber dafür viele Möglichkeiten der Verallgemeinerung aufzeigt. Zunächst ist die Menge $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ abgeschlossen in \mathbb{R}^2 nach 1.7.3 als Urbild der abgeschlossenen Menge $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto y - x$. Ist (x_n, y_n) eine konvergente Folge in H , so liegt mithin auch ihr Grenzwert in H , und das bedeutet gerade die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert.

Übungen

Übung 1.7.5. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge Y zeige man: $A \subset Y \Leftrightarrow \exists B \subset X$ mit $A = B \cap Y$.

Übung 1.7.6. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. So ist eine Teilmenge $B \subset A$ abgeschlossen in A unter der Spurtopologie genau dann, wenn B abgeschlossen ist in X . In Formeln gilt unter der Voraussetzung $A \subset X$ für Teilmengen $B \subset A$ also $(B \subset A \Leftrightarrow B \subset X)$.

Übung 1.7.7. Seien X ein topologischer Raum und Y, Z metrische Räume. Man zeige, daß eine Abbildung $(f, g) : X \rightarrow Y \times Z$ stetig ist genau dann, wenn f und g stetig sind. Man zeige, daß Produkt und Summe von stetigen reellwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum wieder stetig sind.

Vorschau 1.7.8. In ?? werden wir erklären, wie man ganz allgemein das Produkt topologischer Räume so mit einer Topologie versehen kann, daß das Analogon der vorhergehenden Übung auch für beliebige topologische Räume Y, Z gilt.

2 Kompaktheit

2.1 Kompakte metrische Räume

Definition 2.1.1. Ein metrischer Raum heißt **kompakt**, genauer **folgenkompakt**, wenn jede Folge in unserem Raum eine konvergente Teilfolge besitzt.

Vorschau 2.1.2. Wir werden bald sehen, wie sich der Begriff der Kompaktheit im Fall allgemeiner topologischer Räume in die beiden Begriffe „folgenkompakt“ und „überdeckungskompakt“ aufspaltet. Im Fall metrischer Räume fallen zwar beide Begriffe noch zusammen, aber bis zum Beweis dieser Tatsache in 2.4.3 muß man sie auch hier noch auseinanderhalten.

2.1.3. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums nennen wir kompakt oder auch ein **Kompaktum**, wenn sie kompakt ist als metrischer Raum mit der induzierten Metrik, wenn also jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die *gegen einen Punkt aus A* konvergiert.

2.1.4 (**Kompaktheit ist eine absolute Eigenschaft**). Man erliegt beim ersten Lernen leicht der Versuchung, die Begriffe „offen“, „abgeschlossen“ und „kompakt“ auf eine Stufe zu stellen. Ich will deshalb besonders betonen, daß „offen“ und „abgeschlossen“ Eigenschaften sind, die ein Paar $(X \supset Y)$ bestehend aus einem metrischen Raum X mit einer Teilmenge Y hat oder nicht hat, wohingegen „kompakt“ eine Eigenschaft ist, die ein metrischer Raum selbst hat oder nicht hat. Natürlich kann man Kompaktheit auch für Teilmengen metrischer Räume mit ihrer induzierten Metrik diskutieren. Die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ dahingegen sind für einen metrischen Raum allein nicht definiert.

2.1.5. Jeder kompakte metrische Raum ist beschränkt. Ist in der Tat ein Raum nicht beschränkt, so finden wir darin eine Folge x_n mit $d(x_0, x_n) \geq n$, und diese Folge kann nach 1.4.9 keine konvergente Teilfolge haben.

Proposition 2.1.6. *Jedes endliche Produkt von kompakten metrischen Räumen ist kompakt.*

Vorschau 2.1.7. Der Satz von Tychonoff ?? besagt allgemeiner, daß ein beliebiges Produkt von kompakten topologischen Räumen wieder kompakt ist.

Beweis. Sei $X = X_1 \times \dots \times X_n$ mit kompakten X_i . Sei eine Folge in X gegeben. Da X_1 kompakt ist, finden wir eine Teilfolge unserer Folge, die in der ersten Koordinate konvergiert. Da auch X_2 kompakt ist, finden wir von dieser Teilfolge hinwiederum eine Teilfolge, die auch in der zweiten Koordinate konvergiert. Indem wir so weitermachen, finden wir schließlich eine Teilfolge, die in jeder Koordinate konvergiert. Diese Teilfolge konvergiert dann nach 1.4.7 auch in X . \square

Lemma 2.1.8. *Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Sei X unser Raum und $A \subset X$ unsere Teilmenge. Ist A nicht abgeschlossen, so gibt es eine Folge in A , die gegen einen Punkt aus $X \setminus A$ konvergiert. Solch eine Folge kann aber unmöglich eine Teilfolge haben, die gegen einen Punkt aus A konvergiert. \square

Lemma 2.1.9. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten metrischen Raums ist stets kompakt.*

Beweis. Sei X unser Raum und $A \subset X$ unsere Teilmenge. Jede Folge in A besitzt nach unseren Annahmen eine Teilfolge, die gegen einen Punkt aus X konvergiert. Da A abgeschlossen ist, muß dieser Punkt dann bereits in A liegen. \square

Satz 2.1.10 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Nach 2.1.5 und 2.1.8 ist in einem metrischen Raum eine kompakte Teilmenge stets beschränkt und abgeschlossen. In der anderen Richtung wissen wir schon aus ??, daß für jedes $k \geq 0$ das Intervall $[-k, k]$ kompakt ist. Falls eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, finden wir ein k mit $A \subset [-k, k]^n$. Nach 2.1.6 ist nun $[-k, k]^n$ kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist nach 2.1.9 dann auch A selbst kompakt. \square

Beispiel 2.1.11. Die Menge $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist abgeschlossen in \mathbb{Q} und beschränkt, ist aber nicht kompakt für die induzierte Metrik.

Proposition 2.1.12. *Unter einer stetigen Abbildung metrischer Räume werden Kompakta stets auf Kompakta abgebildet.*

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ unsere stetige Abbildung und $A \subset X$ ein Kompaktum. Ist y_n eine Folge in $f(A)$, so finden wir eine Folge x_n in A mit $f(x_n) = y_n$. Falls A kompakt ist, besitzt die Folge x_n eine Teilfolge x_{n_k} , die gegen einen Punkt $x \in A$ konvergiert. Dann ist y_{n_k} nach 1.4.10 eine Teilfolge der Folge y_n , die gegen einen Punkt von $f(A)$ konvergiert, nämlich gegen $f(x)$. \square

Korollar 2.1.13. *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum ist beschränkt und nimmt, wenn unser Raum nicht leer ist, das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte an.*

2.1.14. Ist also in Formeln X ein nichtleerer kompakter Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $p, q \in X$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in X$.

Beweis. Nach 2.1.12 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen. Aus $X \neq \emptyset$ folgt weiter $f(X) \neq \emptyset$. Damit besitzt $f(X)$ ein Supremum und Infimum in \mathbb{R} . Da $f(X)$ kompakt, also abgeschlossen ist, folgt $\sup f(X) \in f(X)$ und $\inf f(X) \in f(X)$. Es gibt in anderen Worten $p, q \in X$ mit $\sup f(X) = f(p)$ und $\inf f(X) = f(q)$. \square

Definition 2.1.15. Eine stetige Abbildung von metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß für beliebige Punkte x, y im Definitionsbereich gilt

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Satz 2.1.16 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta). *Jede stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum in einen weiteren metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Mutatis mutandis zeigt das der Beweis von Satz ?? \square

Vorschau 2.1.17. Einen alternativen Beweis, der vom Begriff der Überdeckungskompaktheit 2.4.5 ausgeht, geben wir in ??.

Übungen

Übung 2.1.18. Endliche Vereinigungen kompakter Teilmengen eines metrischen Raums sind stets wieder kompakt.

Ergänzende Übung 2.1.19. Ist in einem metrischen Raum eine abzählbare Familie kompakter Teilmengen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben mit leerem Schnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$, so gibt es schon ein N mit $K_0 \cap \dots \cap K_N = \emptyset$. Das wird verallgemeinert auf den Fall beliebiger Familien in 2.4.11.

Ergänzende Übung 2.1.20. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$. So gibt es $\delta > 0$ mit $d(x, y) \geq \delta$ für alle $x \in A, y \in K$. Hinweis: ?? und 1.5.14.

2.2 Affine Räume*

2.2.1. Dieser Abschnitt ist ein Auszug aus Abschnitt ?? der linearen Algebra. Ich habe ihn hier nur eingefügt, um Unklarheiten zu vermeiden was die im weiteren verwendeten Notationen und Begriffsbildungen angeht.

Definition 2.2.2. Ein **affiner Raum** oder kurz **Raum** über einem Körper k ist ein Tripel

$$E = (E, \vec{E}, a)$$

bestehend aus einer nichtleeren Menge E , einer abelschen Gruppe $\vec{E} \subset \text{Ens}^\times E$ von Permutationen von E , von der man fordert, daß für alle $p \in E$ das Anwenden auf p eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$ besagter Gruppe mit unserem Raum liefert, sowie einer Abbildung $a : k \times \vec{E} \rightarrow \vec{E}$, die die abelsche Gruppe \vec{E} zu einem k -Vektorraum macht. Die Elemente von \vec{E} heißen die **Translationen** oder **Richtungsvektoren** unseres affinen Raums und den Vektorraum \vec{E} selbst nennen wir den **Richtungsraum** unseres affinen Raums E . Die Operation von k auf \vec{E} mag man die **Reskalierung von Translationen** nennen. Unter der **Dimension** unseres affinen Raums verstehen wir die Dimension seines Richtungsraums. Das Resultat der Operation von $\vec{v} \in \vec{E}$ auf $p \in E$ notieren wir $\vec{v} + p := \vec{v}(p)$ oder manchmal auch $p + \vec{v}$.

2.2.3 (Diskussion der Notation). Die eben eingeführte Notation für den Richtungsraum eines affinen Raums steht in Konflikt mit der Notation aus ??, nach der mit Pfeilen versehene Mannigfaltigkeiten orientierte Mannigfaltigkeiten andeuten sollen. Was jeweils gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

2.2.4. Ist E ein affiner Raum, so liefert nach Annahme für jedes $p \in E$ die Operation eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$, $\vec{u} \mapsto \vec{u} + p$ und es gilt $\vec{0} + p = p$ sowie $\vec{u} + (\vec{v} + p) = (\vec{u} + \vec{v}) + p$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ und $p \in E$. Flapsig gesprochen ist also ein affiner Raum ein „Vektorraum, bei dem man den Ursprung vergessen hat“. Gegeben $p, q \in E$ definieren wir $p - q$ als den Richtungsvektor $\vec{u} \in \vec{E}$ mit $p = \vec{u} + q$.

2.2.5 (Vektorräume als affine Räume). Jeder Vektorraum V kann als ein affiner Raum aufgefaßt werden, indem wir als Translationen die durch die Addition von festen Vektoren gegebenen Abbildungen nehmen, so daß unsere Gruppe von Translationen das Bild des injektiven Gruppenhomomorphismus $V \rightarrow \text{Ens}^\times(V)$, $v \mapsto (v+)$ wird, und die Reskalierung von Translationen dadurch erklären, daß dieser Gruppenhomomorphismus einen Vektorraumisomorphismus auf sein Bild liefern soll. Insbesondere erhalten wir damit eine kanonische Identifikation

$$\text{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$$

zwischen unserem Vektorraum und dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums. Diese Identifikation scheint mir derart kanonisch, daß ich sie von nun an in Sprache und Notation oft so behandeln werde, als seien diese beiden Vektorräume schlicht gleich.

Beispiel 2.2.6. Es scheint mir besonders sinnfällig, den uns umgebenden Raum mathematisch als dreidimensionalen reellen affinen Raum zu modellieren: Hierbei denkt man sich \vec{E} als die Gruppe aller „Parallelverschiebungen“. Ähnlich mag man die Zeit modellieren als einen eindimensionalen reellen affinen Raum. Die leere Menge kann in meinen Konventionen nie ein affiner Raum sein, es gibt hierzu jedoch auch andere Konventionen.

Ergänzung 2.2.7. Meist findet man in der Literatur die begriffliche Variante eines **affinen Raums über einem vorgegebenen Vektorraum**: Darunter versteht man dann eine Menge E mit einer freien transitiven Operation des vorgegebenen Vektorraums. Ich ziehe die oben gegebene Variante vor, da sie jeden Bezug auf einen vorgegebenen Vektorraum vermeidet und den Anschauungsraum meines Erachtens besser modelliert.

Definition 2.2.8. Eine Abbildung $\varphi : E \rightarrow E'$ zwischen affinen Räumen heißt eine **affine Abbildung** genau dann, wenn es eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Richtungsräumen $\vec{\varphi} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ gibt mit

$$\varphi(p) - \varphi(q) = \vec{\varphi}(p - q) \quad \forall p, q \in E$$

Diese lineare Abbildung $\vec{\varphi}$ ist dann durch φ eindeutig bestimmt und heißt der **lineare Anteil** unserer affinen Abbildung.

2.3 Normierte Räume

2.3.1. Unter einem **reellen Vektorraum** beziehungsweise einem **reellen Raum** verstehen wir einen Vektorraum beziehungsweise einen affinen Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Wollen wir einen reellen Vektorraum beziehungsweise affinen Raum mit einer Metrik versehen, so reicht es, wenn wir jedem seiner Vektoren beziehungsweise Richtungsvektoren in geeigneter Weise eine „Länge“ zuordnen. Einen solchen abstrakten Längenbegriff für die Vektoren eines Vektorraums nennt man eine „Norm“. Die Details folgen.

Definition 2.3.2. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, v \mapsto \|v\|$ derart, daß gilt:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R};$
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V.$

Unter einem **normierten Vektorraum** versteht man ein Paar $(V, \| \cdot \|)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einer Norm $\| \cdot \|$ auf V . Fordert man nur die erste und dritte Bedingung, so spricht man von einer **Halbnorm**.

Ergänzung 2.3.3. Für Leser, die schon mit komplexen Zahlen vertraut sind, sei noch erwähnt, daß man von einer Norm auf einem komplexen Vektorraum stärker fordert, daß die erste Bedingung sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten soll, wobei $|\lambda|$ als die „Norm der komplexen Zahl λ “ im Sinne von ?? zu verstehen ist.

2.3.4. Jeder normierte Vektorraum wird ein metrischer Raum mittels der **durch die Norm induzierten Metrik**

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Zum Beispiel gehört unser Betragsabstand auf dem \mathbb{R}^n zur Maximumsnorm. Wir dürfen damit in normierten Vektorräumen über Stetigkeit und Konvergenz von Folgen reden. Allgemeiner verstehen wir unter einem **normierten affinen Raum** einen reellen oder komplexen affinen Raum im Sinne von 2.2.2, dessen Richtungsraum mit einer Norm versehen ist. Auch jeder normierte affine Raum trägt eine natürliche Metrik, die durch dieselbe Formel beschrieben wird. Reden wir ohne nähere Spezifikation von einem **normierten Raum**, so meinen wir einen normierten affinen Raum. Leser, die mit dem Begriff eines affinen Raums noch nicht vertraut sind, mögen sich aber auch einen normierten Vektorraum denken.

Beispiel 2.3.5. Mit $v \mapsto \|v\|$ ist für jedes $\alpha > 0$ auch $v \mapsto \alpha\|v\|$ eine Norm. Auf dem Nullraum gibt es nur eine Norm, die eben den Nullvektor auf Null wirft.

Beispiel 2.3.6. Auf dem \mathbb{R}^n definiert man die **Skalarproduktnorm** eines Vektors $v = (v_1, \dots, v_n)$ durch $\|v\| = \|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$. Wie man formal zeigt, daß das tatsächlich eine Norm ist, wird in ?? diskutiert.

Beispiel 2.3.7. Auf dem \mathbb{R}^n für $n > 0$ definiert man die **Maximumsnorm** von $v = (v_1, \dots, v_n)$ durch $|v| = \|v\|_\infty = \max(|v_1|, \dots, |v_n|)$.

Beispiel 2.3.8. Auf dem Raum $V = \text{Ens}^b(D, \mathbb{R})$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer Menge D haben wir die **Supremumsnorm**, gegeben für $D \neq \emptyset$ durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

und im Fall $D = \emptyset$ als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Für eine endliche Menge D mit n Punkten erhalten wir unsere Maximumsnorm auf dem \mathbb{R}^n als Spezialfall der Supremumsnorm. Noch allgemeiner definieren wir für jeden normierten Vektorraum $(W, \|\cdot\|)$ auf dem Raum $V = \text{Ens}^b(D, W)$ aller beschränkten Abbildungen von D nach W die Supremumsnorm durch $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in D\}$ im Fall $D \neq \emptyset$ und im Fall $D = \emptyset$ als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Die zu unserer Supremumsnorm gehörige Metrik ist in allen diesen Fällen die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.

Beispiel 2.3.9. Sind V_1, \dots, V_n normierte Vektorräume, so erklären wir auf ihrem Produkt $V_1 \times \dots \times V_n$ die **Produktnorm** durch die Vorschrift $\|(v_1, \dots, v_n)\| = \sup \|v_i\|$ im Fall $n > 0$ und als die einzige Norm auf dem Nullraum im Fall $n = 0$. Offensichtlich induziert die Produktnorm die Produktmetrik.

Satz 2.3.10 (Stetigkeit linearer Abbildungen). *Eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen $f : V \rightarrow W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt mit*

$$\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$$

2.3.11. Wir werden in 2.3.14 sehen, daß lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen normierten reellen Vektorräumen immer stetig sind. Sie werden in 2.3.26 sogar folgern, daß lineare Abbildungen von einem endlichdimensionalen normierten reellen Vektorraum in einen beliebigen weiteren normierten reellen Vektorraum immer stetig sind.

Beweis. Ist f stetig, so gibt es $\delta > 0$ mit $\|v - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(0)\| \leq 1$. Setzen wir $C = 1/\delta$, so folgt $\|f(v)\| \leq C\|v\|$ zunächst für alle Vektoren v der Norm $\|v\| = \delta$ und dann durch Multiplikation mit Skalaren für alle $v \in V$. Gibt es umgekehrt ein $C > 0$ mit $\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$, so finden wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \varepsilon/C > 0$ so daß gilt

$$\|v - w\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| \leq C\delta = \varepsilon \quad \square$$

Definition 2.3.12. Zwei Normen $\|\cdot\|, |\cdot|$ auf einem reellen Vektorraum V heißen **äquivalent**, wenn es positive Konstanten $c, C > 0$ gibt mit

$$\|v\| \leq C|v| \quad \text{und} \quad |v| \leq c\|v\| \quad \forall v \in V$$

Satz 2.3.13 (Äquivalenz von Normen). Auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß V der \mathbb{R}^n ist mit $n \geq 1$ und daß eine unserer Normen die Maximumsnorm $|v|$ ist. Sei $\|\cdot\|$ eine zweite Norm. Bezeichnet e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbb{R}^n und ist $v = v_1e_1 + \dots + v_n e_n$, so haben wir

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|v_1e_1 + \dots + v_n e_n\| \\ &\leq |v_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |v_n| \cdot \|e_n\| \\ &\leq |v| \cdot C \end{aligned}$$

mit $C = \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$. Insbesondere folgern wir, daß $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine $|\cdot|$ -stetige Abbildung ist, also stetig für die durch die Maximumsnorm $|\cdot|$ gegebene Metrik auf \mathbb{R}^n , denn aus $d(x, y) = |x - y| < \varepsilon/C$ folgt $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \varepsilon$. Nun ist aber die Oberfläche

$$F := \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}$$

des Hyperkubus $|\cdot|$ -kompakt nach 2.1.10 und nicht leer falls $n \geq 1$. Nach 2.1.13 nimmt folglich die Funktion $\|\cdot\|$ auf F ein Minimum a an, und da F nicht den Nullvektor enthält, ist dies Minimum notwendig positiv, $a > 0$. Wir folgern zunächst einmal $a|v| \leq \|v\|$ für alle $v \in F$. Dann gilt aber natürlich auch $a|\lambda v| \leq \|\lambda v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in F$, also $a|w| \leq \|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$. Mit $c = 1/a$ gilt also $|w| \leq c\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$. \square

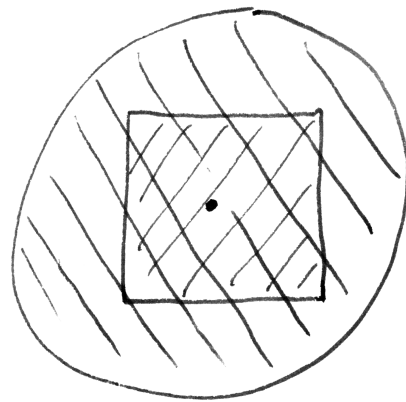
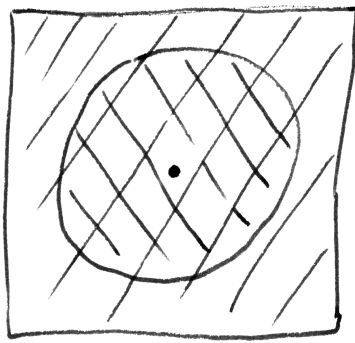


Illustration zur Äquivalenz von Normen am Beispiel der Betragsnorm und der Skalarproduktnorm auf dem \mathbb{R}^2 .

Variante zum Schluß des vorhergehenden Beweises. Statt mit Kompaktheit zu argumentieren, kann man hier alternativ auch mit Induktion über n und „Vollständigkeit“ argumentieren, wenn man denn diesen Begriff bereits kennt. Die Argumentation verläuft dann wie folgt: Wir betrachten die affinen Hyperebenen $H_i = \{x \mid x_i = 1\}$. Aus der Induktionsannahme können wir durch Widerspruch folgern, daß es positive Konstanten $a_i > 0$ gibt mit

$$a_i \leq \|w\| \quad \forall w \in H_i$$

In der Tat gäbe es sonst in H_i eine Folge w_ν mit $\|w_\nu\| \rightarrow 0$ für $\nu \rightarrow \infty$. Diese Folge wäre im Sinne von ?? eine Cauchy-Folge für die von $\|\cdot\|$ auf H_i induzierte Metrik. Dann wäre sie aber wegen der Äquivalenz der Normen nach der Induktionsannahme auch eine Cauchy-Folge für die von der Maximumsnorm $|\cdot|$ auf H_i induzierte Metrik und müßte nach ?? konvergieren gegen einen Punkt $w \in H_i$ mit $\|w\| = 0$. Widerspruch! Nun gibt es für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stets $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| = |v|$ derart, daß $\lambda^{-1}v$ in einer der affinen Hyperebenen H_i liegt. Mit $a = \inf(a_i)$ folgt $a \leq \|\lambda^{-1}v\|$ und $|v| \leq c\|v\|$ für $c = 1/a$. \square

Korollar 2.3.14. *Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen ist stetig.*

Beweis. Jeder Vektorraumisomorphismus zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen ist stetig nach dem Satz über die Äquivalenz von Normen 2.3.13 und dem Kriterium für die Stetigkeit linearer Abbildungen 2.3.10. So können wir uns beim Beweis des Korollars auf den Fall 1.3.24 linearer Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zurückziehen. \square

2.3.15. Wir nennen eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums **offen**, wenn sie offen ist für die von irgendeiner Norm auf seinem Richtungsraum induzierte Metrik. Nach unserem Satz 2.3.13 über die Äquivalenz von Normen ist sie dann notwendig offen für jede von einer Norm induzierte Metrik. Die so erklärten offenen Teilmengen bilden die sogenannte **natürliche Topologie** auf unserem endlichdimensionalen reellen Raum.

Definition 2.3.16. Ist $f : V \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung normierter Vektorräume, so heißt die kleinstmögliche Konstante $C \geq 0$ wie in 2.3.10 auch die **Operatornorm** $\|f\|$ von f , in Formeln

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$$

2.3.17. Die stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W nennt man auch **beschränkte Operatoren**, da sie nach 2.3.10 genau die linearen Abbildungen sind, die den Einheitsball auf eine beschränkte Menge abbilden. Ich notiere die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\mathcal{B}(V, W)$ oder

auch $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(V, W)$, wenn ich besonders betonen will, daß reell-lineare Abbildungen gemeint sind und nicht etwa „komplex-lineare“ Abbildungen, wie wir sie später für gewöhnlich betrachten werden. Ich werde die Notation \mathcal{B} benutzen, die Terminologie jedoch vermeiden und nach Möglichkeit von **stetigen Operatoren** reden, da diese ja keineswegs beschränkte Abbildungen im Sinne von ?? zu sein brauchen.

Übungen

Übung 2.3.18. Gegeben ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ sind die folgenden Abbildungen stetig: Die Norm $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, die Addition $V \times V \rightarrow V$, und die Multiplikation mit Skalaren $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$. Ist unsere Norm die Skalarproduktnorm zu einem Skalarprodukt $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, so ist auch dies Skalarprodukt stetig. Leser, die bereits mit komplexen Zahlen vertraut sind, zeigen Analoges auch für komplexe Vektorräume.

Übung 2.3.19 (Gruppenwege in normierten Vektorräumen). Die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die additive Gruppe eines normierten reellen Vektorraums sind genau die linearen Abbildungen. Hinweis: ??.

Ergänzende Übung 2.3.20. In einem normierten reellen Vektorraum ist jede nicht-leere offene Teilmenge bereits ein Erzeugendensystem.

Übung 2.3.21. Man zeige: Jede stetige lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen ist gleichmäßig stetig.

Übung 2.3.22. Die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem Raum X notiere ich $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Das \mathcal{C} steht hier für englisch „continuous“ und französisch „continu“. Man zeige: Versehen wir die Menge $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten reellen Intervall $[a, b]$ mit der Supremumsnorm, so wird das Integral $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ eine stetige Abbildung $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Übung 2.3.23. Bezeichnet $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ den Teilraum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen, so ist das Ableiten $f \mapsto f'$ keine stetige Abbildung $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Übung 2.3.24. Seien U, V, W normierte Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $F : U \times V \rightarrow W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|F(u, v)\| \leq C\|u\|\|v\|$. Man formuliere und beweise die analoge Aussage auch für multilineare Abbildungen.

Übung 2.3.25. Gegeben eine Menge D und ein normierter Vektorraum V erkläre man auf dem Raum $\text{Ens}^b(D, V)$ der beschränkten Abbildungen $D \rightarrow V$ eine

Norm derart, daß die zugehörige Metrik die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz aus 1.4.5 wird.

Übung 2.3.26. Jede lineare Abbildung von einem endlichdimensionalen Vektorraum in einen normierten Vektorraum W ist stetig. Sind allgemeiner endlichdimensionale Vektorräume V_1, \dots, V_n gegeben, so ist jede multilineare Abbildung $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ stetig. Hinweis: Das Bild liegt immer in einem endlichdimensionalen Teilraum. Man erinnere 2.3.14 und 1.3.24.

Übung 2.3.27. Sind $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow X$ stetige Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen, so gilt $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Übung 2.3.28. Man zeige: Der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ aller stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W ist ein Untervektorraum im Raum $\text{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W , und die in 2.3.16 eingeführte Abbildung $f \mapsto \|f\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(V, W)$.

Ergänzende Übung 2.3.29. Sind normierte Vektorräume V_1, \dots, V_n und W gegeben und ist $f : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ eine stetige multilineare Abbildung, so heißt die kleinstmögliche Konstante $C \geq 0$ wie in 2.3.24 die **Norm** von f und wird notiert

$$\|f\| := \sup\{\|f(v_1, \dots, v_n)\| \mid \|v_i\| \leq 1\}$$

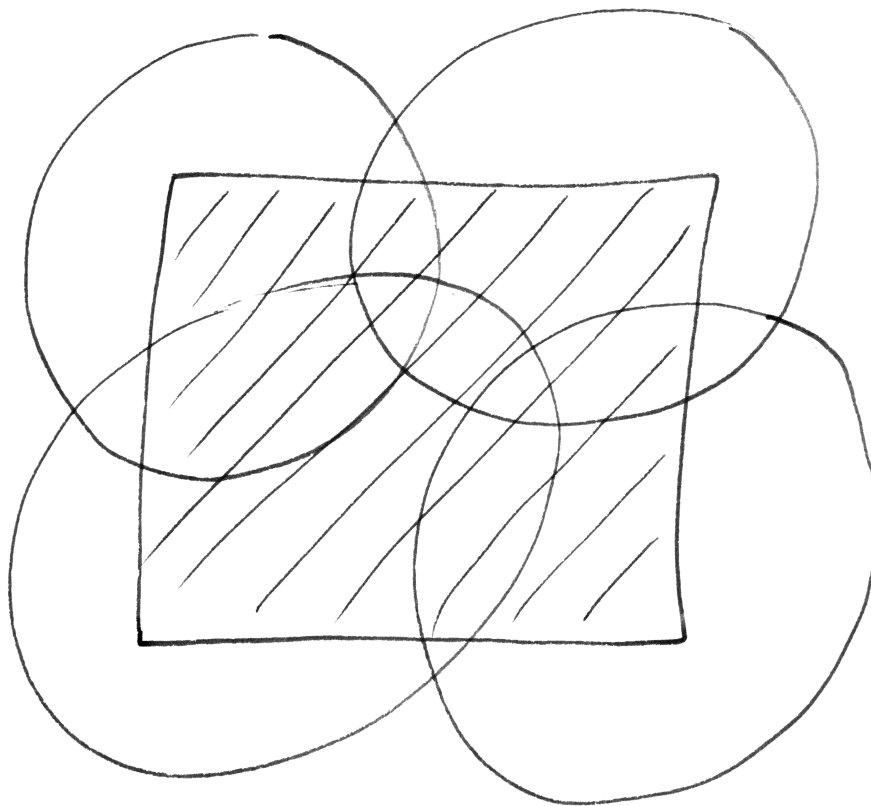
Man zeige, daß wir so eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{B}(V_1, \dots, V_n; W)$ aller stetigen multilinearen Abbildungen erhalten. Weiter zeige man: Die offensichtliche Abbildung liefert einen Isomorphismus von normierten Räumen

$$\mathcal{B}(V_1, \mathcal{B}(V_2, \dots, V_n; W)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(V_1, \dots, V_n; W)$$

Übung 2.3.30. Seien V ein komplexer Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm als reeller Vektorraum, also $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß die Multiplikation mit komplexen Skalaren $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$ stetig ist. Man zeige, daß wir dann mit dem Supremum über komplexen Zahlen α auf dem Einheitskreis $\|v\|_c := \sup_{|\alpha|=1} \|\alpha v\|$ eine Norm $\|\cdot\|_c$ auf V als komplexer Vektorraum erhalten, und daß diese Norm äquivalent ist zu unserer ursprünglichen Norm.

2.4 Überdeckungen kompakter metrischer Räume

Definition 2.4.1. Sei X eine Menge. Unter einer **Überdeckung** von X versteht man ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X mit Vereinigung X , in Formeln ausgedrückt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Unter einer **Teilüberdeckung** einer Überdeckung \mathcal{U} versteht man ein Teilsystem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, das auch selbst schon eine Überdeckung ist.



Eine Überdeckung eines Quadrats durch vier Kreisscheiben

Definition 2.4.2. Unter einer **offenen Überdeckung** eines metrischen Raums oder allgemeiner eines topologischen Raums versteht man eine Überdeckung, die aus offenen Teilmengen besteht.

Satz 2.4.3 (Kompaktheit und offene Mengen). *Ein metrischer Raum ist folgenkompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

2.4.4. Ich hoffe, daß Sie im weiteren Verlauf dieser Vorlesung noch sehen werden, wie wichtig diese Charakterisierung der Kompaktheit ist. Im Kontext topologischer Räume wird Satz 2.4.3 sogar die Definition der Kompaktheit. Sie ist so wichtig, daß ich sie nicht im Fließtext verstecken will. Eine ausführlichere Diskussion des Begriffs geben wir in ?? und sehr ähnlich auch in 3.5.

Definition 2.4.5. Ein topologischer Raum heißt **kompakt** und manchmal auch ausführlicher **überdeckungskompakt**, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

2.4.6. In dieser Terminologie besagt unser Satz 2.4.3, daß ein metrischer Raum genau dann folgenkompakt ist, wenn er überdeckungskompakt ist.

2.4.7 (**Diskussion der Terminologie**). Nennen wir einen topologischen Raum kompakt, so meinen wir a priori überdeckungskompakt. Topologische Räume mit der Eigenschaft, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, heißen dahingegen **folgenkompakt**. In der französischen Literatur ist eine abweichende Terminologie üblich: Unsere überdeckungskompakten oder kurz kompakten topologischen Räume heißen dort **quasikompakt**, und „kompakt“ meint dort „überdeckungskompakt und Hausdorff“.

Ergänzung 2.4.8. Ein Beispiel für einen folgenkompakten aber nicht überdeckungskompakten topologischen Raum finden Sie in ?? oder ??. Besitzt ein überdeckungskompakter topologischer Raum die zusätzliche Eigenschaft, daß man für jeden seiner Punkte eine Folge von Umgebungen derart finden kann, daß jede seiner Umgebungen mindestens eine Umgebung dieser Folge umfaßt, so ist er auch folgenkompakt mit demselben Argument, wie wir es im Beweis des Satzes verwenden.

Beweis von Satz 2.4.3. Sei X ein metrischer Raum. Ist X nicht folgenkompakt, so finden wir in X eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Dann besitzt jeder Punkt von X eine offene Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, und alle diese offenen Umgebungen bilden eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung. Das zeigt die eine Richtung. Den Beweis der anderen Richtung beginnen wir mit einem Lemma, das auch für sich genommen oft hilfreich ist.

Lemma 2.4.9 (Überdeckungssatz von Lebesgue). *Ist X ein folgenkompakter metrischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X , so gibt es $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle Punkte $x \in X$ der ε -Ball $B(x; \varepsilon)$ um x ganz in einer der überdeckenden offenen Mengen $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.*

Erster Beweis. Gäbe es kein solches $\varepsilon > 0$, so könnten wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ einen Punkt $x_n \in X$ finden derart, daß $B(x_n; 1/n)$ in keinem $U \in \mathcal{U}$ enthalten wäre. Durch Übergang zu einer Teilfolge könnten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß die Folge der x_n konvergiert, etwa gegen $x \in X$. Nun finden wir jedoch ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und dazu $\rho > 0$ mit $B(x; \rho) \subset U$ und dazu N mit $d(x_N, x) < \rho/2$ und $1/N < \rho/2$, und dann gälte $B(x_N; 1/N) \subset B(x_N; \rho/2) \subset B(x; \rho) \subset U$ im Widerspruch zur Wahl der x_n . \square

Zweiter Beweis. Man betrachte die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) := \sup\{r \leq 1 \mid \text{Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B(x; r) \subset U\}$$

Die Dreiecksungleichung liefert $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$, insbesondere ist f stetig. Sicher dürfen wir $X \neq \emptyset$ annehmen. Dann nimmt f nach 2.1.13 sein Minimum an und jede positive Zahl echt unterhalb dieses Minimums ist ein mögliches ε . \square

Um die andere Implikation im Satz zu zeigen sei nun X folgenkompakt und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Es gilt zu zeigen, daß sie eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wählen wir zu unserer Überdeckung \mathcal{U} ein ε wie im Überdeckungssatz 2.4.9, so reicht es auch zu zeigen, daß es eine endliche Teilmenge $E \subset X$ gibt mit

$$X = \bigcup_{x \in E} B(x; \varepsilon)$$

In der Tat liegt ja der ε -Ball $B(x; \varepsilon)$ um ein beliebiges $x \in X$ nach Wahl von ε schon in einem der $U \in \mathcal{U}$. Gäbe es aber für ein $\varepsilon > 0$ keine endliche Überdeckung von X durch ε -Bälle, so könnten wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren mit $x_n \notin \bigcup_{0 \leq \nu < n} B(x_\nu; \varepsilon)$ für alle n , also $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für $n \neq m$, und diese Folge könnte keine konvergente Teilfolge haben, im Widerspruch zur Annahme. \square

2.4.10. Sei X eine Menge. Unter einer **Überdeckung einer Teilmenge** $Y \subset X$ durch Teilmengen von X versteht man ein Mengensystem $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $Y \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Nach unseren Definitionen ist eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X kompakt für die induzierte Topologie genau dann, wenn jede Überdeckung von Y durch offene Teilmengen von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Übungen

Übung 2.4.11 (Nichtleere Schnitte in Kompakta). Ist in einem kompakten topologischen Raum X ein System abgeschlossener Teilmengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ mit leerem Schnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \emptyset$ gegeben, so gibt es bereits ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ mit leerem Schnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{E}} K = \emptyset$.

Ergänzende Übung 2.4.12 (Satz von Dini). Eine monoton wachsende Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf einem kompakten Raum, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert sogar gleichmäßig. Hinweis: 2.4.11.

Ergänzende Übung 2.4.13. Man zeige, daß das Bild eines kompakten topologischen Raums unter einer stetigen Abbildung kompakt ist für die Spurtopologie. Insbesondere ist jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum beschränkt.

Ergänzende Übung 2.4.14. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer offenen Überdeckung \mathcal{U} zeige man: Eine Teilmenge Y unseres Raums ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit jeder Teilmenge unserer Überdeckung abgeschlossenen Schnitt hat, in Formeln

$$Y \text{ abgeschlossen in } X \Leftrightarrow (Y \cap U) \text{ abgeschlossen in } U \quad \forall U \in \mathcal{U}$$

Die fraglichen Schnitte sollen hierbei abgeschlossen sein in U , nicht in X .

2.5 Integrale mit Parametern

Satz 2.5.1 (über Integrale mit Parametern). Gegeben ein metrischer Raum X und eine stetige Funktion $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ stetig.

2.5.2. Ich zeige diesen Satz in großer Allgemeinheit als Anwendung unserer neuen Charakterisierung der Kompaktheit und als Illustration für die Kraft der allgemeinen Theorie metrischer Räume. Ist X offen oder abgeschlossen in einem \mathbb{R}^n , so kann man auch elementarer mit der gleichmäßigen Stetigkeit argumentieren. Diesen Beweis gebe ich als Alternative auch noch an.

Beweis. Versetzen wir den Raum $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$ mit der Supremumsnorm, so ist nach dem gleich folgenden Satz 2.5.4 die von f induzierte Abbildung $\tilde{f} : X \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $x \mapsto f(x, \cdot)$ stetig. Nach Übung 2.3.22 ist weiter das Integrieren $\int : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Damit ist unsere Abbildung $\int \circ \tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig als eine Verknüpfung stetiger Abbildungen. \square

Alternativer Beweis. Ist X offen oder abgeschlossen in einem \mathbb{R}^n , so kann man auch elementarer argumentieren. Zunächst reicht es ja, die Stetigkeit an jeder Stelle $x \in X$ nachzuweisen. Mit dieser Überlegung können wir uns leicht auf den Fall zurückziehen, daß X kompakt ist. Dann ist aber auch $X \times [a, b]$ kompakt und nach 2.1.16 ist f dort gleichmäßig stetig. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es insbesondere $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(y, t)| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Aus $|x - y| < \delta$ folgt mithin

$$\left| \int_a^b f(x, t) dt - \int_a^b f(y, t) dt \right| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(y, t)| dt \leq (b - a)\varepsilon$$

und das zeigt die Behauptung. □

2.5.3. Den Raum aller stetigen Abbildungen von einem kompakten Raum X in einen metrischen Raum Y , versehen mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, wird $\mathcal{C}(X, Y)$ notiert. Das \mathcal{C} steht hier für englisch „continuous“ und französisch „continu“.

Satz 2.5.4 (Stetige Abbildungen in Abbildungsräume). *Seien X, Y und K metrische Räume. Ist K kompakt, so ist eine Abbildung $f : X \times K \rightarrow Y$ stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung $\tilde{f} : X \rightarrow \mathcal{C}(K, Y)$ stetig ist für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{C}(K, Y)$.*

Beweis. Daß aus der Stetigkeit von \tilde{f} die Stetigkeit von f folgt, sieht man ohne weitere Schwierigkeiten. Wir zeigen nun die andere Richtung und müssen die Stetigkeit von \tilde{f} an jeder Stelle $p \in X$ nachweisen. Sei diese Stelle p ab jetzt fest gewählt und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es für jedes $s \in K$ ein $\delta_s > 0$ mit

$$f B((p, s); \delta_s) \subset B(f(p, s); \varepsilon)$$

Nun gilt für unsere Metrik auf $X \times K$ ja $B((p, s); \delta) = B(p; \delta) \times B(s; \delta)$ und nach 2.4.3 gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{s \in E} B(s; \delta_s)$. Für $\eta = \min_{s \in E} \delta_s$ behaupten wir dann

$$x \in B(p; \eta) \Rightarrow d(f(x, t), f(p, t)) < 2\varepsilon \quad \forall t \in K$$

In der Tat finden wir für jedes $t \in K$ ein $s \in E$ mit $t \in B(s; \delta_s)$ und für dies s liegen (p, t) und (x, t) beide in $B((p, s); \delta_s)$. Damit ist die Stetigkeit von \tilde{f} bei p gezeigt. □

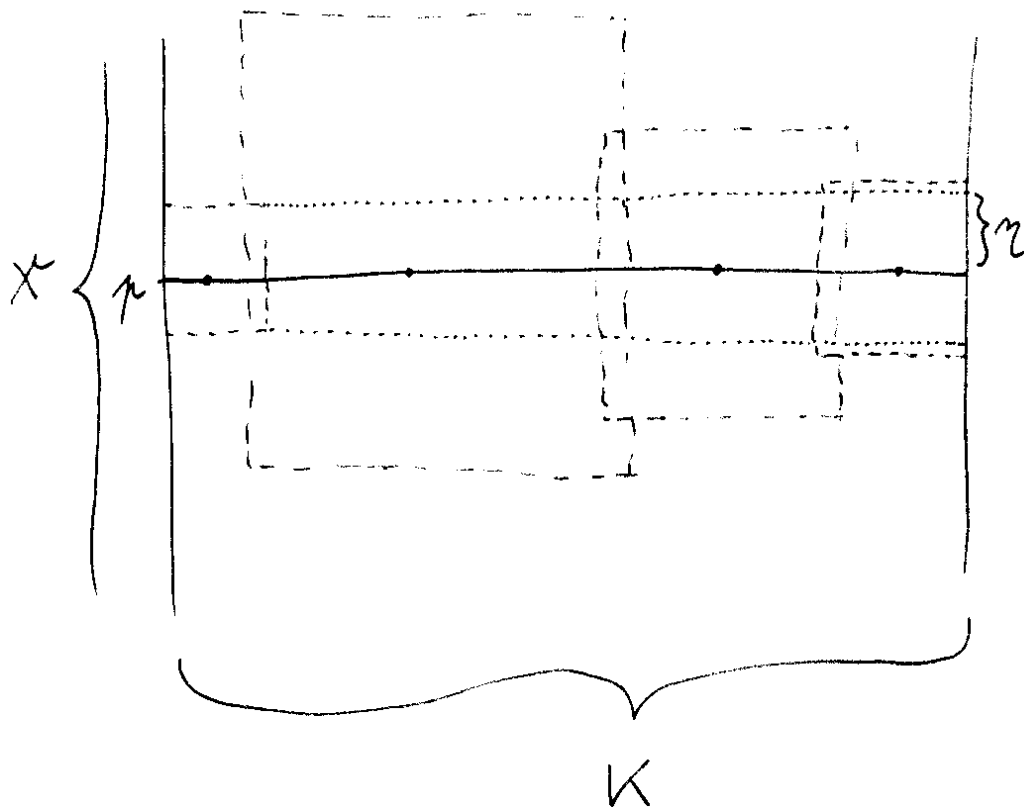


Illustration zum Beweis von Satz 2.5.4. Die mit gestrichelten Rändern eingezeichneten Quadrate sind so gewählt, daß unsere Abbildung f auf jedem Quadrat höchstens um den Abstand ε von ihrem Wert im Zentrum des jeweiligen Quadrats abweicht. Die gepunkteten Linien begrenzen einen Streifen der Breite 2η , in dem unsere Funktion auf jeder Vertikalen höchstens um 2ε von ihrem Wert am Schnittpunkt der besagten Vertikalen mit der fett eingezeichneten Horizontalen abweicht.

3 Mengentheoretische Topologie

3.1 Topologische Räume

3.1.1. Wir beginnen mit einigen Erinnerungen zur Begriffswelt der topologischen Räume aus 1.1, wo im wesentlichen derselbe Stoff in größerer Ausführlichkeit und unter besonderer Betonung der Motivation durch Fragen der Analysis entwickelt wurde.

3.1.2. Gegeben eine Menge X können wir die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X bilden, die sogenannte Potenzmenge von X . Weil es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, nenne ich wie in ?? Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ lieber **Systeme von Teilmengen von X** und spreche im folgenden von **Teilsystemen**, wenn ich Teilmengen solcher Mengensysteme meine.

Definition 3.1.3. Eine **Topologie \mathcal{T} auf einer Menge X** ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{T}) bestehend aus einer Menge mitsamt einer Topologie. Statt $U \in \mathcal{T}$ schreiben wir meist

$$U \Subset X$$

und nennen U eine **offene Teilmenge von X** . Die Notation \Subset ist in der Literatur nicht üblich.

3.1.4. In Formeln ausgedrückt fordern wir von einer Topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ auf einer Menge X also:

1. $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$ für $n \geq 0$ und insbesondere auch $X \in \mathcal{T}$ als der Spezialfall $n = 0$. Gleichbedeutend dazu sind die beiden Forderungen $X \in \mathcal{T}$ sowie $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$;
2. $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$ und damit insbesondere auch $\emptyset \in \mathcal{T}$, da ja das leere Mengensystem $\mathcal{U} = \emptyset$ in jedem Mengensystem enthalten ist.

Beispiel 3.1.5. Für jeden metrischen Raum bildet das System seiner im Sinne von 1.5.3 offenen Teilmengen eine Topologie, die **metrische Topologie**. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum liefert jede Norm auf seinem Richtungsraum eine Metrik auf unserem affinen Raum und diese liefert dann eine Topologie. Der Satz über die Äquivalenz von Normen 2.3.13 zeigt nun, daß diese Topologie gar nicht von der gewählten Norm abhängt, vergleiche 2.3.15. Sie heißt die **natürliche Topologie** auf unserem endlichdimensionalen reellen affinen Raum.

Beispiel 3.1.6. Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, \infty\}$ der erweiterten reellen Zahlen erklären wir eine Topologie, indem wir alle Teilmengen offen nennen, die mit jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein ganzes offenes Intervall um unseren Punkt enthalten, mit ∞ ein ganzes Intervall der Gestalt $(a, \infty]$ für $a \in \mathbb{R}$ und mit $-\infty$ ein ganzes Intervall der Gestalt $[-\infty, b)$ für $b \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.1.7. Auf jeder Menge können wir die **Klumpentopologie** betrachten, die nur aus der ganzen Menge und der leeren Menge besteht, oder die **diskrete Topologie**, bei der wir alle Teilmengen als offen ansehen. Einen topologischen Raum mit der diskreten Topologie nennen wir auch kurz einen **diskreten Raum**.

Definition 3.1.8. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so erklärt man die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** auf Y durch die Vorschrift

$$U \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } Y \Leftrightarrow \exists V \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } X \text{ mit } U = V \cap Y$$

In Worten ist also eine Teilmenge von Y offen für die induzierte Topologie, wenn sie der Schnitt von Y mit einer offenen Teilmenge von X ist. Es ist klar, daß dieses Mengensystem in $\mathcal{P}(Y)$ in der Tat eine Topologie auf Y ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge Y eines topologischen Raums X auf als topologischen Raum mit der induzierten Topologie.

3.1.9 (Offen als relativer Begriff). Wenn wir eine Menge einfach nur „offen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen“ gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } Y$, daß M offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Topologie.

3.1.10. Gegeben ein topologischer Raum X gilt $V \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } U \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } X \Rightarrow V \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } X$. Ist in der Tat V offen in der Spurtopologie, so gibt es $W \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } X$ mit $V = W \cap U$ und daraus folgt $V \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } X$.

Definition 3.1.11. Eine Abbildung von einem topologischen Raum in einen weiteren heißt **stetig**, wenn darunter das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Satz 3.1.12. *Die Verknüpfung stetiger Abbildungen ist stetig.*

Beweis. Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig, so gelten beide Implikationen der Implikationskette $V \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } Z \Rightarrow g^{-1}(V) \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } Y \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \text{ } \textcircled{\subset} \text{ } X$. Da nun gilt $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$, ist damit auch $(g \circ f)$ stetig. \square

Beispiele 3.1.13. Jede konstante Abbildung ist stetig. Die Identität auf einem topologischen Raum ist immer stetig. Jede Abbildung in einen Raum mit der Klumpentopologie ist stetig. Jede Abbildung aus einem Raum mit der diskreten Topologie ist stetig.

Beispiel 3.1.14 (Metrische Stetigkeit als topologische Stetigkeit). Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist „metrisch stetig“ im Sinne von 1.3.10 genau dann, wenn sie „topologisch stetig“ ist im Sinne unserer Definition 3.1.11. In der Tat, sei $f : X \rightarrow Y$ unsere Abbildung zwischen metrischen Räumen. Jeder Ball $B(y; \varepsilon)$ im metrischen Raum Y ist offen nach 1.5.5. Ist f topologisch stetig, so ist demnach sein Urbild $f^{-1}B(y; \varepsilon)$ offen in X . Für jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt es nach der Definition der metrischen Topologie also $\delta > 0$ mit $B(x; \delta) \subset f^{-1}B(y; \varepsilon)$ alias $f(B(x; \delta)) \subset B(y; \varepsilon)$, und das zeigt die metrische Stetigkeit von f . Ist umgekehrt f metrisch stetig, so ist nach derselben Argumentation das Urbild jedes Balls offen, und dann natürlich auch das Urbild jeder offenen Menge als Vereinigung von Urbildern solcher Bälle.

Lemma 3.1.15 (Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie). Gegeben $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $Z \subset Y$ eine Teilmenge mit $f(X) \subset Z$ ist f stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung $f : X \rightarrow Z$ stetig ist für die auf Z induzierte Topologie.

Beweis. Die Einbettung $i : Z \hookrightarrow Y$ ist offensichtlich stetig. Ist also $f : X \rightarrow Z$ stetig, so auch $f : X \rightarrow Y$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen. Sei umgekehrt $f : X \rightarrow Y$ stetig mit $f(X) \subset Z$. Gegeben $U \subseteq Z$ existiert $V \subseteq Y$ mit $V \cap Z = U$. Dann ist $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ offen in X aufgrund der Stetigkeit von $f : X \rightarrow Y$. \square

Definition 3.1.16. Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in X** und wir schreiben in Formeln $M \subseteq X$, wenn ihr Komplement $X \setminus M$ offen ist.

3.1.17 (Abgeschlossen als relativer Begriff). Wenn wir eine Menge einfach nur „abgeschlossen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „abgeschlossen“ gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \subseteq Y$, daß M abgeschlossen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Topologie 3.1.8.

Lemma 3.1.18. Jede endliche Vereinigung und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beweis. Das folgt mit der Definition einer Topologie sofort aus der Formel

$$X \setminus \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} (X \setminus M)$$

Diese Formel gilt ganz allgemein für jedes System $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X . \square

3.1.19 (**Stetigkeit und abgeschlossene Mengen**). Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn darunter das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist: Das folgt unmittelbar aus der Definition 3.1.11, da das Urbild des Komplements einer Menge stets das Komplement ihres Urbilds ist.

Proposition 3.1.20. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung topologischer Räume.

1. Gegeben \mathcal{U} eine **offene Überdeckung** von X alias ein System offener Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ist f stetig genau dann, wenn $f|_U$ stetig ist für alle $U \in \mathcal{U}$. Etwas vage gesprochen ist demnach **Stetigkeit eine lokale Eigenschaft**.
2. Gegeben eine **endliche abgeschlossene Überdeckung** von X , in Formeln $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, ist f stetig genau dann, wenn $f|_{A_i}$ stetig ist für alle $i = 1, \dots, n$.

Vorschau 3.1.21. Etwas allgemeiner gilt das auch noch für eine „lokal endliche abgeschlossene Überdeckung“, vergleiche 3.7.19.

Beweis. Ist f stetig, so sind alle $f|_U$ stetig als Verknüpfung von f mit der stetigen Inklusion $U \hookrightarrow X$. Sind andererseits alle $f|_U$ stetig, so ist für alle $W \subseteq Y$ und alle $U \in \mathcal{U}$ das Urbild $f^{-1}(W) \cap U$ offen in U , nach 3.1.10 ist also $f^{-1}(W) \cap U$ sogar offen in X , und damit ist dann natürlich auch $f^{-1}(W) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(W) \cap U$ offen in X als Vereinigung offener Mengen. Mithin ist f stetig. Teil 2 zeigt man ähnlich: Nach 3.1.19 muß nur gezeigt werden, daß für jede abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq Y$ von Y ihr Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist in X . Da aber gilt $f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup \dots \cup f_n^{-1}(B)$ und $f_i^{-1}(B) \subseteq A_i$ nach Annahme folgt die Proposition aus Übung 3.1.25 und den Definitionen. \square

Definition 3.1.22. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt ein **Homöomorphismus** oder auch eine **topologische Abbildung**, wenn sie stetig und bijektiv ist und zusätzlich die inverse Abbildung auch stetig ist. Zwei topologische Räume heißen **homöomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus gibt. In Formeln schreiben wir dann $X \cong Y$.

Übungen

Übung 3.1.23. Auf jeder Menge kann man die **koendliche Topologie** erklären durch die Vorschrift, daß außer der leeren Menge nur die Komplemente endlicher Mengen offen sein sollen.

Übung 3.1.24. Auf jeder teilgeordneten Menge kann man die **Ordnungstopologie**, auch genannt **Alexandroff-Topologie**, erklären durch die Vorschrift, daß

genau die Teilmengen offen sein sollen, die mit einem Element auch jedes kleinere Element enthalten. Genau dann entsteht eine Topologie in dieser Weise aus einer Teilordnung, wenn es für jedes Element eine kleinste offene Menge gibt, die es umfaßt.

Übung 3.1.25. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge Y zeige man: $A \triangleleft Y \Leftrightarrow \exists B \triangleleft X$ mit $A = B \cap Y$. Weiter zeige man für Teilmengen $B \subset A \subset X$ die Implikation $(B \triangleleft A \triangleleft X) \Rightarrow B \triangleleft X$.

Übung 3.1.26. Gegeben ein topologischer Raum X und eine Menge Y und eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zeige man, daß $\{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \triangleleft X\}$ eine Topologie auf Y ist. Sie heißt die **Finaltopologie** zu f . Weiter zeige man für jeden weiteren topologischen Raum Z , daß eine Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ genau dann stetig ist, wenn $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig ist. Diese Übung ist im folgenden wichtig, wenn man die allgemeine Initialtopologie vor der allgemeinen Finaltopologie behandelt.

3.2 Inneres, Abschluß, Umgebungsbegriff

Definition 3.2.1. Seien X ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge.

1. Es gibt eine größte offene Teilmenge $\text{Inn}_X(M) = \text{Inn}(M) = M^\circ$ von X , die in M enthalten ist, nämlich die Vereinigung über alle offenen Teilmengen U von X , die in M enthalten sind. M° heißt der **offene Kern** oder auch das **Innere**, englisch **interior** von M in X .
2. Es gibt eine kleinste abgeschlossene Teilmenge $\text{Cl}_X(M) = \text{Cl}(M) = \overline{M}$ von X , die M umfaßt, nämlich den Schnitt über alle abgeschlossenen Teilmengen A von X , die M umfassen. Diese Menge \overline{M} heißt der **Abschluß**, englisch **closure** von M in X .
3. Man definiert den **Rand** oder genauer den **topologischen Rand** von M in X als $\partial_X M = \partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$. Er ist stets abgeschlossen in X .

3.2.2. Die Herkunft der Bezeichnung ∂M für den Rand von M wird in ?? diskutiert. Ich habe die englische Abkürzung Cl für den Abschluß vorgezogen, weil ich das Kürzel Ab für die „Kategorie der abelschen Gruppen“ reservieren will.

Beispiele 3.2.3. Für eine beliebige Teilmenge M der abgeschlossenen Kreisscheibe $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, die die offene Kreisscheibe umfaßt, ist der offene Kern von M in \mathbb{R}^2 die offene Kreisscheibe, der Abschluß M in \mathbb{R}^2 die abgeschlossene Kreisscheibe, und der Rand M in \mathbb{R}^2 die Kreislinie. Für einen beliebigen topologischen Raum X ist natürlich der offene Kern von X in X ebenso wie der Abschluß von X in X schlicht X selber, und der Rand von X in X ist leer.

Lemma 3.2.4. Seien X ein topologischer Raum und $M, N \subset X$ Teilmengen.

1. Es gilt $\overline{X \setminus M} = X \setminus M^\circ$ und $(X \setminus M)^\circ = X \setminus \overline{M}$;
2. Es gilt $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ und $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$.

Beweis. 1. Wir rechnen

$$X \setminus M^\circ = X \setminus \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subset M}} U = \bigcap_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subset M}} (X \setminus U) = \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ A \supset (X \setminus M)}} A = \overline{X \setminus M}$$

Die Gleichheit $(X \setminus M)^\circ = X \setminus \overline{M}$ ergibt sich, wenn wir in der schon bewiesenen Gleichheit auf beiden Seiten das Komplement nehmen und M durch $X \setminus M$ ersetzen.

2. $\overline{M \cup N}$ ist abgeschlossen und umfaßt M und N , also auch \overline{M} und \overline{N} . Andererseits ist $\overline{M} \cup \overline{N}$ abgeschlossen und umfaßt $M \cup N$, also auch $\overline{M \cup N}$. Die Gleichheit $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$ zeigt man analog. \square

Definition 3.2.5. Seien X ein topologischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge und $p \in X$ ein Punkt. So benutzt man die Sprechweisen

$$\begin{aligned} p \in M^\circ &\Leftrightarrow p \text{ ist } \mathbf{innerer Punkt} \text{ von } M; \\ p \in \overline{M} &\Leftrightarrow p \text{ ist } \mathbf{Berührungspunkt} \text{ von } M; \\ p \in \partial M &\Leftrightarrow p \text{ ist } \mathbf{Randpunkt} \text{ von } M. \end{aligned}$$

Hier ist wieder zu beachten, daß es ganz entscheidend von X abhängt, welche Punkte nun innere Punkte, Berührungspunkte oder Randpunkte von M sind.

Definition 3.2.6. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **dicht**, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist.

Definition 3.2.7. Seien X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine **Umgebung von A** , wenn es eine offene Menge $V \Subset X$ gibt mit $A \subset V \subset U$. Im Fall einer einelementigen Teilmenge $A = \{p\}$ sprechen wir auch von einer **Umgebung von p** .

3.2.8. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist genau dann offen, wenn sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist. In der Tat, ist sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte, so ist sie eine Vereinigung von offenen Mengen und damit offen. Die andere Implikation ist eh klar.

Definition 3.2.9. Gegeben $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von topologischen Räumen und $p \in X$ ein Punkt heißt f **stetig bei p** , wenn für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(p)$ ihr Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von p ist.

3.2.10. Eine Abbildung von topologischen Räumen $X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn sie an jedem Punkt $p \in X$ stetig ist. Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

Lemma 3.2.11. *Gegeben X ein topologischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge und $p \in X$ ein Punkt haben wir:*

1. $p \in M^\circ \Leftrightarrow M$ ist eine Umgebung von p ;
2. $p \in \overline{M} \Leftrightarrow M$ trifft jede Umgebung von p ;
3. $p \in \partial M \Leftrightarrow M$ und $X \setminus M$ treffen jede Umgebung von p .

Beweis. 1 ist klar nach den Definitionen. Für 2 bemerken wir, daß nach Lemma 3.2.4.1 gilt

$$\begin{aligned} p \in \overline{M} &\Leftrightarrow p \notin (X \setminus M)^\circ \\ &\Leftrightarrow X \setminus M \text{ ist keine Umgebung von } p \\ &\Leftrightarrow \text{jede Umgebung von } p \text{ trifft } M. \end{aligned}$$

Sicher gilt weiter $p \in \partial M \Leftrightarrow p \in \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$. Nun folgt 3 aus der eben unter 2 bewiesenen Aussage. \square

3.2.12. Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff**, wenn darin je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. Gleichbedeutend wird auch die Bezeichnung **separiert** verwendet.

Beispiel 3.2.13. Die metrische Topologie einer Metrik ist stets Hausdorff. Die Klumpentopologie auf einer Menge mit mindestens zwei Elementen ist nicht Hausdorff. Die koendliche Topologie auf einer unendlichen Menge ist nicht Hausdorff.

3.2.14. Ein Punkt eines topologischen Raums X heißt ein **Häufungspunkt von X** , wenn die nur aus unserem Punkt bestehende Teilmenge nicht offen ist. Man mag gleichbedeutend von einem **nichtoffenen Punkt** reden.

Satz 3.2.15 (Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten). *Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \setminus p \rightarrow Y$ eine Abbildung. Ist Y Hausdorff, so gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Abbildung $\hat{f} : X \rightarrow Y$, die stetig ist bei p .*

Beweis. Wäre sonst \hat{f} eine weitere bei p stetige Fortsetzung mit $\hat{f}(p) \neq \tilde{f}(p)$, so fänden wir disjunkte Umgebungen \hat{V} und \tilde{V} dieser beiden Bildpunkte und dazu Umgebungen \hat{U} und \tilde{U} von p mit $\hat{f}(\hat{U}) \subset \hat{V}$ und $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$. Daraus folgte aber

$$f(\hat{U} \cap \tilde{U} \setminus p) \subset \hat{V} \cap \tilde{V} = \emptyset$$

im Widerspruch dazu, daß die Umgebung $\hat{U} \cap \tilde{U}$ von p nicht nur aus unserem Häufungspunkt p selbst bestehen darf. \square

Definition 3.2.16. Seien X, Y topologische Räume mit Y Hausdorff. Seien weiter $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \setminus p \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei schließlich $b \in Y$ ein Punkt. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen b für $x \rightarrow p$** und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$$

als Abkürzung für die Aussage, daß die Fortsetzung von f zu $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ durch $\tilde{f}(p) := b$ stetig ist bei p . In diesem Fall nennen wir b den **Grenzwert** oder lateinisch **Limes** der Funktion f für $x \rightarrow p$. Nach der Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen 3.2.15 ist dieser Grenzwert eindeutig bestimmt, wenn er existiert.

3.2.17. Salopp gesprochen verhält es sich demnach so, daß eine Abbildung in einen Hausdorffraum mit einer einpunktigen Definitionslücke an einem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs auf höchstens eine Weise stetig in diese Definitionslücke hinein fortgesetzt werden kann. Der Wert dieser an besagter Stelle stetigen Fortsetzung heißt dann der Grenzwert unserer Abbildung an besagter Stelle. Dieselbe Definition hatten wir bereits in der Analysis in ?? gegeben.

3.2.18. Grenzwerte von Folgen sind der Spezialfall $X := \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ mit der von $\overline{\mathbb{R}}$ induzierten Topologie und dem Häufungspunkt $p = \infty$. Ausgeschrieben bedeutet $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, daß in jeder Umgebung von b fast alle Glieder unserer Folge alias alle bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen liegen.

3.2.19. Eine Teilmenge F eines topologischen Raums X heißt **folgenabgeschlossen**, wenn sie mit jeder in X konvergierenden Folge auch deren Grenzwerte enthält. In metrischen Räumen sind folgenabgeschlossene Teilmengen stets abgeschlossen. In beliebigen topologischen Räumen gilt das nicht mehr, wie das im folgenden diskutierte Beispiel 3.2.26 zeigt.

Übungen

Übung 3.2.20. Man zeige, daß im allgemeinen gilt $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$. Welche Inklusion gilt stets?

Übung 3.2.21. In jedem topologischen Raum ist der Schnitt einer offenen dichten Teilmenge mit einer beliebigen dichten Teilmenge wieder dicht.

Übung 3.2.22. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn für alle Teilmengen $M \subset X$ gilt $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.

Übung 3.2.23. Man zeige für jeden topologischen Raum: Der Schnitt von zwei Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Jede Umgebung eines Punktes kann verkleinert werden zu einer offenen Umgebung desselben Punktes.

Übung 3.2.24. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist offen genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist.

Übung 3.2.25. Eine Teilmenge eines topologischen Raums $T \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß $T \cap U$ abgeschlossen ist in U .

Ergänzende Übung 3.2.26 (Folgenabgeschlossen heißt nicht abgeschlossen). Diese Übung liefert ein Beispiel für eine folgenabgeschlossene aber nicht abgeschlossene Teilmenge eines Hausdorffraums. Wir betrachten auf der Menge $\text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die „Topologie der punktweisen Konvergenz“ : Eine Teilmenge $U \subset \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist in Bezug auf diese Topologie offen genau dann, wenn es für jedes $f \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine endliche Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ gibt mit

$$(|g(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in E) \Rightarrow g \in U$$

Man zeige, daß das in der Tat eine Topologie ist, daß in dieser Topologie je zwei verschiedene Funktionen disjunkte Umgebungen besitzen, und daß die meßbaren Funktionen darin eine unter Konvergenz von Folgen abgeschlossene aber nicht topologisch abgeschlossene Teilmenge bilden. Unsere „Topologie der punktweisen Konvergenz“ wird sich im übrigen in 3.6.17 folgende als ein Spezialfall der sogenannten „Produkttopologie“ erweisen.

Ergänzende Übung 3.2.27. Unter einer **Umgebungsbasis** eines Punktes in einem topologischen Raum versteht man ein System von Umgebungen besagten Punktes derart, daß jede Umgebung unseres Punktes mindestens eine Umgebung unseres Systems umfaßt. Man zeige: Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so ist jede unter Konvergenz von Folgen abgeschlossene Teilmenge bereits abgeschlossen, und jede „folgenstetige“ Abbildung in einen weiteren topologischen Raum ist bereits stetig.

Ergänzung 3.2.28. Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so sagt man auch, er „gehörte dem **ersten Abzählbarkeitsaxiom**“.

Übung 3.2.29. Sind X, Y, Z topologische Räume und ist $f : X \rightarrow Y$ stetig in p und $g : Y \rightarrow Z$ stetig in $f(p)$, so ist $g \circ f$ stetig in p .

3.3 Zusammenhang

Definition 3.3.1. Ist X ein topologischer Raum und sind $x, y \in X$ Punkte, so nennen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ von einem mehrpunktigen kompakten reellen Intervall $[a, b]$ nach X mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ einen **Weg von x nach y** . Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn

er nicht leer ist und es für je zwei Punkte unseres Raums einen Weg vom einen zum anderen gibt.

3.3.2. Das Bild eines wegzusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist offensichtlich stets wieder wegzusammenhängend.

Definition 3.3.3. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Teilmengen schreiben läßt.

Beispiel 3.3.4. Ein diskreter topologischer Raum ist zusammenhängend genau dann, wenn er aus genau einem Punkt besteht.

3.3.5. Gleichbedeutend könnten wir natürlich auch fordern, daß unser Raum nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen schreiben läßt. Eine Teilmenge eines topologischen Raums nennen wir nach unseren allgemeinen Konventionen zusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist als topologischer Raum mit der induzierten Topologie.

3.3.6 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur wird meist auch die leere Menge zusammenhängend genannt. Mir scheint das unnatürlich, da sich mit dieser Konvention jeder zusammenhängende Raum in eine Vereinigung von zwei disjunkten offenen zusammenhängenden Teilmengen zerlegen ließe.

Proposition 3.3.7. *Das Bild eines zusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets zusammenhängend.*

Beweis. Es reicht, wenn wir für eine stetige Surjektion $f : X \rightarrow Y$ aus Y nicht zusammenhängend folgern, daß auch X nicht zusammenhängend ist. Ist jedoch $Y = Y_0 \sqcup Y_1$ eine Zerlegung in zwei offene, disjunkte, nichtleere Teilmengen, so auch $X = f^{-1}(Y_0) \sqcup f^{-1}(Y_1)$. Ist Y leer, so auch X . Die Proposition folgt. \square

Proposition 3.3.8 (Charakterisierung zusammenhängender Räume). *Gegeben ein topologischer Raum sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Raum ist zusammenhängend;*
2. *Jede stetige Abbildung von unserem Raum in einen Raum mit der diskreten Topologie ist einwertig;*
3. *Jede stetige Abbildung von unserem Raum in einen zweielementigen Raum mit der diskreten Topologie ist einwertig.*

3.3.9. Wir verwenden hier unsere Konvention ??, nach der eine Abbildung einwertig heißt, wenn ihr Bild aus genau einem Element besteht.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ folgt aus 3.3.7, da das Bild einer stetigen Abbildung unseres zusammenhängenden Raums in einen diskreten Raum notwendig zusammenhängend und diskret ist und damit nach 3.3.4 aus einem einzigen Punkt bestehen muß. $2 \Rightarrow 3$ ist klar. $3 \Rightarrow 1$ zeigt man durch Widerspruch: Ist unser Raum nicht zusammenhängend, so ist er entweder leer und die einzige Abbildung in unseren zweielementigen Raum ist nicht einwertig, oder er besitzt eine Zerlegung in zwei disjunkte nichtleeren offenen Teilmengen. Dann aber können wir eine stetige nicht einwertige Abbildung in unsere zweielementige Menge angeben durch die Vorschrift, daß sie auf der einen Teilmenge das eine Element als Wert annehmen soll und auf der anderen das andere. \square

Lemma 3.3.10 (Zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R}). *Eine Teilmenge der reellen Zahlengerade ist zusammenhängend genau dann, wenn sie ein nichtleeres Intervall ist.*

Beweis. Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und kein Intervall, so gibt es $p \in \mathbb{R} \setminus A$ mit $A \cap \mathbb{R}_{<p} \neq \emptyset \neq A \cap \mathbb{R}_{>p}$, und das ist eine Zerlegung von A in zwei nichtleere offene Teilmengen. Umgekehrt ist jedes nichtleere reelle Intervall zusammenhängend nach Proposition 3.3.8 und dem Zwischenwertsatz. Man kann auch ohne den Zwischenwertsatz argumentieren wie folgt. Sei sonst $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall mit einer Zerlegung $I = I_0 \sqcup I_1$ in zwei für die Spurtopologie offene nichtleere Teilmengen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, es gebe $a \in I_0$ und $b \in I_1$ mit $a < b$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, es sei sogar $I = [a, b]$. Nun sind I_0, I_1 auch abgeschlossen in I und damit in \mathbb{R} . Für $p = \sup I_0$ folgt $p \in I_0$ und $p < b$ und damit $(p, b] \subset I_1$ und dann auch $p \in I_1$, im Widerspruch zu $I_0 \cap I_1 = \emptyset$. Von dieser Argumentation ausgehend können wir nun sogar den Zwischenwertsatz als Korollar unseres Lemmas erhalten, nach 3.3.7 sind ja Bilder zusammenhängender Räume zusammenhängend und damit nach unserem Lemma Bilder nichtleerer reeller Intervalle unter stetigen reellwertigen Funktionen wieder nichtleere reelle Intervalle. \square

3.3.11 (Wegzusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R}). *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend genau dann, wenn A ein nichtleeres Intervall ist. In der Tat ist jedes nichtleere reelle Intervall offensichtlich wegzusammenhängend. Ist umgekehrt $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und kein Intervall, so gibt es reelle Zahlen $x < p < y$ mit $x, y \in A$ aber $p \notin A$. Dann aber kann es nach dem Zwischenwertsatz keinen Weg von x nach y geben, der ganz in A verläuft.*

3.3.12. Wir sehen insbesondere, daß die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{Q} genau die einelementigen Teilmengen sind. Topologische Räume mit dieser Eigenschaft heißen **total unzusammenhängend**.

Satz 3.3.13. *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch. Sei X nicht leer und nicht zusammenhängend, also die disjunkte Vereinigung $X = U \sqcup V$ zweier nichtleerer offener Teilmengen. Gäbe es einen Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow X$ mit $\varphi(a) \in U$ und $\varphi(b) \in V$, so wäre $[a, b] = \varphi^{-1}(U) \sqcup \varphi^{-1}(V)$ eine disjunkte Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in zwei nichtleere offene Teilmengen, und das stünde im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß Intervalle zusammenhängend sind. Also kann es keinen solchen Weg geben und X ist auch nicht wegzusammenhängend. \square

Definition 3.3.14. Auf jedem topologischen Raum X definiert man die Relation W der **Wegverbindbarkeit** durch die Vorschrift, daß gilt xWy , wenn es in X einen Weg von x nach y gibt. Man zeige, daß das eine Äquivalenzrelation ist. Hinweis: Die Transitivität ergibt sich durch das „Aneinanderhängen von Wegen“ und die Stetigkeit der so entstehenden Wege folgt mit 3.1.20.2. Die Äquivalenzklassen für die Äquivalenzrelation der Wegverbindbarkeit heißen die **Wegzusammenhangskomponenten** unseres Raums. Die Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines Raums X notieren wir $\pi_0(X)$.

Lemma 3.3.15. *Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind seine Wegzusammenhangskomponenten offen und unser Raum zusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Besitzt jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind die Wegzusammenhangskomponenten sicher offen. Ist unser Raum nicht leer und nicht wegzusammenhängend, so hat er mindestens zwei Wegzusammenhangskomponenten, und nehmen wir eine dieser Komponenten und die Vereinigung der Übrigen, so erhalten wir eine Überdeckung durch zwei nichtleere offene Teilmengen. Also ist unter diesen Voraussetzungen unser Raum auch nicht zusammenhängend. Daß umgekehrt jeder wegzusammenhängende Raum auch zusammenhängend ist, wissen wir bereits aus 3.3.13. \square

Definition 3.3.16. Eine maximale zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums heißt eine **Zusammenhangskomponente**.

Proposition 3.3.17 (Zerlegung in Zusammenhangskomponenten). *Gegeben ein topologischer Raum X gilt:*

1. *Jeder Punkt liegt in genau einer Zusammenhangskomponente;*
2. *Ist eine Teilmenge unseres Raums zusammenhängend, so ist auch ihr Abschluß zusammenhängend. Insbesondere sind Zusammenhangskomponenten stets abgeschlossen;*

3. Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von zusammenhängenden Teilmengen von X mit nichtleerem Schnitt $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ zusammenhängend.

Beweis. 2. Sei A unsere zusammenhängende Teilmenge. Da nach Annahme A nicht leer ist, gilt dasselbe für \bar{A} . Ist \bar{A} nicht zusammenhängend, so zerfällt \bar{A} also in zwei nichtleere disjunkte abgeschlossene Teilmengen $\bar{A} = A_1 \sqcup A_2$. Nach der Definition von \bar{A} kann keines der A_i schon A enthalten, also ist $A = (A_1 \cap A) \sqcup (A_2 \cap A)$ eine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen, und damit ist auch A nicht zusammenhängend im Widerspruch zur Voraussetzung.

3. Wir setzen $Y = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Sei $Y = U \cup V$ eine Zerlegung von Y in zwei offene disjunkte Teilmengen. Es gilt zu zeigen, daß U oder V schon ganz Y sein muß. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen $U \cap \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$. Da die A zusammenhängend sind, folgt dann schon $U \supset A$ für alle A und damit $U = Y$.

1. Nach 3 ist die Vereinigung über alle zusammenhängenden Teilmengen, die einen gegebenen Punkt enthalten, selbst zusammenhängend. \square

Ergänzung 3.3.18. Wir geben einen alternativen Beweis für den Satz 3.3.13, nach dem jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist. Sei dazu X unser Raum. Als wegzusammenhängender Raum ist X nicht leer. Ist $x \in X$ ein Punkt, so ist X die Vereinigung über die Bilder aller Wege γ in X mit Anfangspunkt x , in Formeln

$$X = \bigcup_{\gamma(0)=x} \gamma([0, 1])$$

Alle diese Bilder $\gamma([0, 1])$ sind zusammenhängend als Bilder zusammenhängender Mengen und ihr Schnitt ist nicht leer, denn er enthält x . Nach 3.3.17.3 ist also X zusammenhängend.

Definition 3.3.19. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **diskret**, wenn sie mit der **Spurtopologie** ein **diskreter topologischer Raum** wird.

3.3.20. Der Leser möge sich zur Übung überlegen, daß das gleichbedeutend ist zu unserer Bedingung in ??, daß jeder Punkt unserer Teilmenge eine Umgebung besitzt, in der kein anderer Punkt besagter Teilmenge liegt.

Beispiel 3.3.21. Die Menge aller Brüche $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ mit einer Eins im Zähler ist eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlengeraden.

3.3.22 (**Diskussion der Terminologie**). Andere Autoren verstehen unter einer „diskreten Teilmenge“ eines topologischen Raums abweichend, was in unserer Terminologie eine „diskrete abgeschlossene Teilmenge“ ist.

Übungen

Übung 3.3.23 (Die Sinuskurve des Topologen). Man betrachte in \mathbb{R}^2 die Vereinigung des Graphen der Funktion $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(1/x)$ mit der y -Achse. Man zeige zur Übung, daß diese Teilmenge von \mathbb{R}^2 zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Übung 3.3.24. Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raums eine zusammenhängende Umgebung, so sind seine Zusammenhangskomponenten offen.

Übung 3.3.25. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer zusammenhängenden offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist für $n > 1$ zusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung „abgeschlossen“, ist dann aber schwerer zu zeigen.

Übung 3.3.26. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum einer Dimension $\dim A \leq n - 2$ alias einer Kodimension mindestens Zwei, so ist auch $U \setminus A$ zusammenhängend. Für Teilräume A der Kodimension Eins alias affine Hyperebenen A gilt das natürlich nicht!

3.4 Topologische Mannigfaltigkeiten*

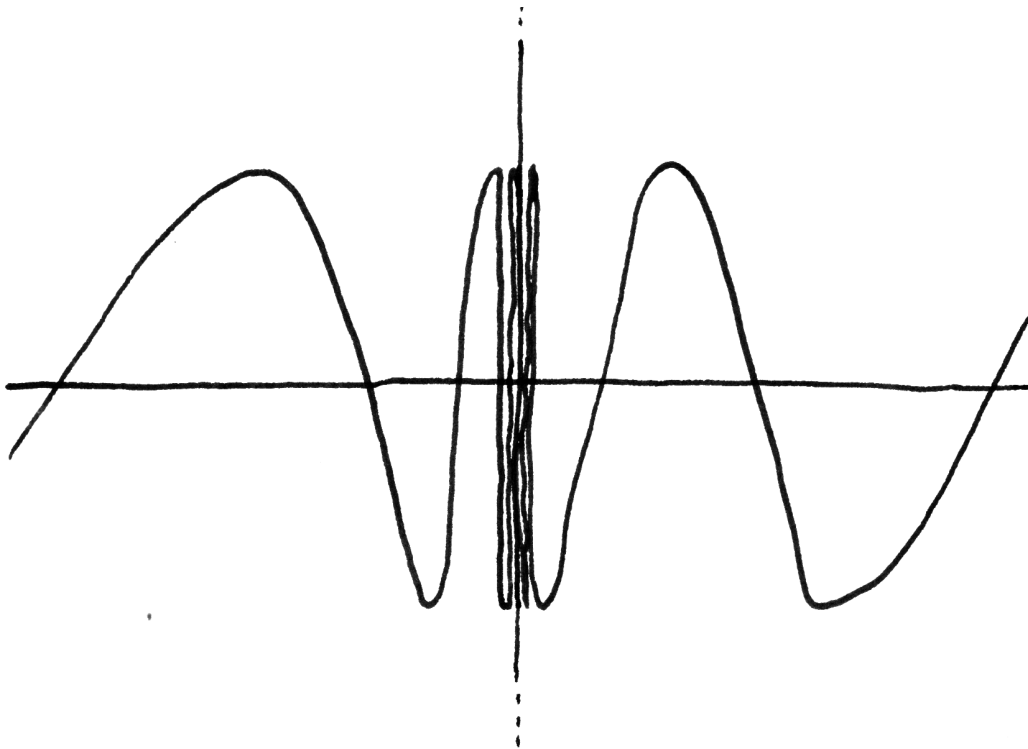
Definition 3.4.1. Eine stetige Abbildung topologischer Räume heißt eine **topologische Einbettung** oder kürzer **Einbettung**, wenn sie einen Homöomorphismus mit ihrem Bild induziert, für die induzierte Topologie auf besagtem Bild.

Vorschau 3.4.2. Ist allgemeiner \mathcal{C} eine Kategorie mit einem ausgezeichneten Funktor $v : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ in die Kategorie der Mengen, so nennen wir einen Morphismus $i : U \rightarrow X$ in \mathcal{C} eine **Einbettung** oder genauer eine **v -Einbettung**, wenn $v(i)$ injektiv ist und für alle $Z \in \mathcal{C}$ das Nachschalten von i eine Bijektion

$$\mathcal{C}(Z, U) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \mathcal{C}(Z, X) \mid \text{im}(v(\varphi)) \subset \text{im}(v(i))\}$$

induziert. In anderen Worten stehen rechts alle Morphismen φ , für die $v(\varphi)$ über $v(i)$ faktorisiert. In dieser Situation nennen wir weiter eine Teilmenge $T \subset v(X)$ ein **v -Unterobjekt** alias **v -Teilobjekt**, wenn es eine Einbettung $i : U \rightarrow X$ gibt mit $\text{im}(v(i)) = T$. Die Bijektion $v(i) : v(U) \xrightarrow{\sim} T$ mag man die **induzierte \mathcal{C} -Struktur auf T** nennen.

Definition 3.4.3. Eine **d -Mannigfaltigkeit** oder ausführlicher **d -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand** ist ein topologischer Hausdorffraum X , in dem jeder Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^d .



Ein Teil der Sinuskurve des Topologen, die in der Nähe der y -Achse allerdings schwer zu zeichnen ist

3.4.4. Viele Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß sie „parakompakt“ sein soll, oder sogar noch stärker, daß ihre Topologie „eine abzählbare Basis“ haben soll. Wir werden solche Bedingungen stets explizit erwähnen, bis jetzt sind sie für uns belanglos.

3.4.5. Bis jetzt haben wir unter „Mannigfaltigkeiten“ meist „eingebettete C^1 -Mannigfaltigkeiten“ im Sinne von ?? verstanden. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welcher Begriff jeweils gemeint ist.

3.4.6. Genau dann ist ein Hausdorffraum eine d -Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu \mathbb{R}^d .

Beispiele 3.4.7. Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit. Die Sphäre S^d ist eine d -Mannigfaltigkeit.

Beispiel 3.4.8. Welche Fälle die Bedingung „Hausdorff“ in der Definition einer Mannigfaltigkeit ausschließt, erkennt man am Beispiel der **Zahlengeraden mit verdoppeltem Nullpunkt**. Wir betrachten genauer die disjunkte Vereinigung $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\tilde{0}\}$ von \mathbb{R} mit einer einelementigen Menge $\{\tilde{0}\}$ und die Abbildung $\pi : \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\pi(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}, \pi(\tilde{0}) = 0$. Auf $\tilde{\mathbb{R}}$ erklären wir eine Topologie durch die Vorschrift „ U ist offen in $\tilde{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn $\pi(U)$ offen ist in \mathbb{R} “. In diesem topologischen Raum haben 0 und $\tilde{0}$ in $\tilde{\mathbb{R}}$ keine disjunkten Umgebungen, aber jeder Punkt besitzt eine zu \mathbb{R} homöomorphe offene Umgebung.

Übungen

Übung 3.4.9. Man zeige, daß die Verknüpfung von zwei Einbettungen stets wieder eine Einbettung ist.

Übung 3.4.10. Ist ein \mathbb{R}^n homöomorph zur reellen Geraden \mathbb{R} , so folgt $n = 1$. In Formeln gilt also $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R} \Rightarrow n = 1$. Hinweis: Das Komplement eines beliebigen Punktes in \mathbb{R} ist nicht wegzusammenhängend.

Übung 3.4.11. Man zeige: Das Achsenkreuz $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ ist nicht homöomorph zur Zahlengerade \mathbb{R} .

Übung 3.4.12. Je zwei nichtleere offene konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n sind homöomorph. Sind unsere Mengen zusätzlich beschränkt, so gibt es sogar einen Homöomorphismus zwischen ihren Abschlüssen, der Homöomorphismen zwischen ihren Rändern induziert.

Übung 3.4.13. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension mindestens zwei ist zusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung „abgeschlossen“, ist dann aber schwerer zu zeigen.

Übung 3.4.14. Jede Wegzusammenhangskomponente einer Mannigfaltigkeit ist in unserer Mannigfaltigkeit sowohl offen als auch abgeschlossen. Eine Mannigfaltigkeit ist insbesondere wegzusammenhängend genau dann, wenn sie zusammenhängend ist.

3.5 Kompakte Räume

3.5.1. Ich erinnere nun an Grundlagen zum Begriff der Kompaktheit allgemeiner topologischer Räume aus ?? und beginne mit einer Wiederholung der Definition.

Definition 3.5.2. Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

3.5.3. Ist X unser topologischer Raum, so fordern wir also in Formeln ausgedrückt, daß es für jedes System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ gibt mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$.

3.5.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Konventionen sind, was den Begriff der Kompaktheit angeht, nicht einheitlich. Die hier gewählte Konvention ist im englischen Sprachraum weit verbreitet. Bourbaki und mit ihm die meisten französischen und auch viele andere Autoren nennen die in unserem Sinne kompakten Räume nur „quasikompakt“ und fordern von kompakten Räumen zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft. Eine Teilmenge eines topologischen Raums, deren Abschluß kompakt ist, nennt man **relativ kompakt**.

3.5.5 (**Kompaktheit metrischer Räume**). Nach 2.4.3 ist ein metrischer Raum „folgenkompakt“, als da heißt, jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge, genau dann, wenn er für seine metrische Topologie kompakt ist im Sinne der obigen Definition 3.5.2.

Beispiele 3.5.6. Eine Menge mit der diskreten Topologie ist kompakt genau dann, wenn sie endlich ist. Eine Menge mit der Klumpentopologie ist stets kompakt.

3.5.7 (**Ausformulierung der Kompaktheit in der Spurtopologie**). Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. So sind gleichbedeutend nach unseren Definitionen (1) die Teilmenge A ist kompakt mit der induzierten Topologie und (2) für jedes System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ finden wir ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$.

3.5.8 (**Kompaktheit ist ein absoluter Begriff**). Man beachte, daß „kompakt“ im Gegensatz zu „offen“ oder „abgeschlossen“ eine Eigenschaft topologischer Räume ist und nicht nur eine Eigenschaft von Teilmengen topologischer Räume.

Lemma 3.5.9. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist stets kompakt.*

Beweis. Sei X unser kompakter Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Ist \mathcal{U} ein System von offenen Teilmengen von X , deren Vereinigung A umfaßt, so schließen wir

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U &\Rightarrow X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \\ &\Rightarrow X = (X \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_k \\ &\Rightarrow A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \end{aligned}$$

für geeignete $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$. □

Satz 3.5.10. *Das Bild eines kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets kompakt.*

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und X kompakt. Es gilt zu zeigen, daß auch $f(X)$ kompakt ist. Sei dazu \mathcal{U} ein System von offenen Teilmengen von Y . So gilt

$$\begin{aligned} f(X) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U &\Rightarrow X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U) \\ &\Rightarrow X = f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k) \\ &\Rightarrow f(X) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \end{aligned}$$

für geeignete $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$. □

Lemma 3.5.11. *Eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Durch Widerspruch. Sei X unser Hausdorffraum und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Ist A nicht abgeschlossen, so gibt es $x \in \bar{A} \setminus A$. Für jedes $a \in A$ finden wir in X disjunkte offene Umgebungen U_a und V_a von a und x . Natürlich gilt $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$, also gibt es auch endlich viele $a, \dots, b \in A$ mit $A \subset U_a \cup \dots \cup U_b$. Als endlicher Schnitt offener Mengen ist dann jedoch auch $V_a \cap \dots \cap V_b$ offen und nach Konstruktion gilt $A \cap V_a \cap \dots \cap V_b = \emptyset$ im Widerspruch zu unserer Annahme $x \in \bar{A}$. □

Definition 3.5.12. Eine nicht notwendig stetige Abbildung von topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen ist.

Satz 3.5.13. *Eine stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist stets abgeschlossen. Eine stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist stets ein Homöomorphismus.*

Beweis. Seien X kompakt, Y Hausdorff und $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv. Es reicht zu zeigen, daß f abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet. Aber in der Tat gilt ja $A \triangleleft X \Rightarrow A$ kompakt $\Rightarrow f(A)$ kompakt $\Rightarrow f(A) \triangleleft Y$ nach 3.5.9 und 3.5.10 und 3.5.11. □

3.5.14 (Hausdorffeigenschaft versus Kompaktheit). Die Hausdorffeigenschaft und die Kompaktheit sind Antagonisten: Die Hausdorffeigenschaft verlangt nach vielen offenen Mengen und die Kompaktheit nach wenigen. Ist beides gleichzeitig erfüllt, so kann man nach dem vorhergehenden Satz 3.5.13 keine zusätzlichen Mengen als offen deklarieren, ohne die Kompaktheit zu verlieren, und nicht weniger Mengen als offen deklarieren, ohne die Hausdorffeigenschaft zu verlieren.

Satz 3.5.15 (Extrema auf Kompakta). *Eine stetige reellwertige Funktion auf einem nichtleeren kompakten Raum ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an.*

Beweis. Ist X kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt nach 3.5.10, also beschränkt und abgeschlossen nach Erkenntnissen aus der Analysis. Haben wir zusätzlich $X \neq \emptyset$, so folgt $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$. \square

Vorschau 3.5.16. Aus der Analysis vertraute Kriterien für Abgeschlossenheit, Stetigkeit, Kompaktheit und dergleichen über Eigenschaften von Folgen übertragen sich erst auf beliebige topologische Räume, wenn man den Begriff der Folge zu dem des Filters verallgemeinert. Wir stellen die Diskussion dieses Begriffs zurück bis zum Beweis des Satzes von Tychonoff ???. Daß „folgenabgeschlossen“ keineswegs „abgeschlossen“ impliziert, zeigt das Beispiel 3.2.26.

Lemma 3.5.17 (Überdeckungssatz von Lebesgue). *Ist X ein folgenkompakter metrischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X , so gibt es $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle Punkte $x \in X$ der ε -Ball $B(x; \varepsilon)$ um x ganz in einer der überdeckenden offenen Mengen $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.*

Beweis. Man betrachte die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) := \sup\{r \leq 1 \mid \text{Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B(x; r) \subset U\}$$

Die Dreiecksungleichung liefert $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$, insbesondere ist f stetig. Sicher dürfen wir $X \neq \emptyset$ annehmen. Dann nimmt f nach 3.5.15 sein Minimum an und jede positive Zahl echt unterhalb dieses Minimums ist ein mögliches ε . \square

Übungen

Übung 3.5.18. Man sagt, ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X habe **nichtleere endliche Schnitte**, wenn für jedes endliche Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ der Schnitt $\bigcap_{A \in \mathcal{E}} A$ nicht leer ist. Man zeige: Ein topologischer Raum X ist kompakt genau dann, wenn für jedes System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit nichtleeren endlichen Schnitten auch der gesamte Schnitt nicht leer ist, in Formeln $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.

Übung 3.5.19 (Disjunkte Umgebungen disjunkter Kompakta). Sind A, B disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums X , so gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß A nur aus einem Punkt besteht.

Übung 3.5.20. In einem kompakten Hausdorffraum läßt sich jede Umgebung eines Punktes zu einer abgeschlossenen Umgebung desselben Punktes verkleinern. Hinweis: 3.5.19.

Übung 3.5.21. Die Abbildung $(0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$ ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

Übung 3.5.22. Gegeben ein topologischer Raum X können wir auf $X \sqcup \{\infty\}$ eine Topologie \mathcal{T} erklären durch die Vorschrift

$$\mathcal{T} := \{U \mid U \subseteq X\} \sqcup \{U \sqcup \{\infty\} \mid U \subseteq X \text{ mit } X \setminus U \text{ kompakt}\}$$

Man zeige, daß $X \sqcup \{\infty\}$ mit dieser Topologie ein kompakter topologischer Raum ist. Er heißt die **Ein-Punkt-Kompaktifizierung von X** . Gegeben irgendeine weitere Menge Z und eine Hausdorff'sche Topologie auf $X \sqcup Z$, für die in_X eine offene Einbettung ist, muß dann die Abbildung $X \sqcup Z \rightarrow X \sqcup \{\infty\}$ stetig sein, die auf X die Identität ist und auf Z konstant den Wert ∞ annimmt.

3.6 Initialtopologie

3.6.1. Die Initialtopologie ist eine Verallgemeinerung der induzierten Topologie von der Einbettung einer Teilmenge in einen topologischen Raum zu Familien von Abbildungen einer vorgegebenen Menge in verschiedene topologische Räume. Wir besprechen im folgenden diese Konstruktion und ihre Eigenschaften.

3.6.2. Gegeben Topologien $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ auf derselben Menge X sagt man, \mathcal{T} sei **größergleich** \mathcal{S} , wenn gilt

$$\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$$

In diesem Zusammenhang nennt man eine größere Topologie auch **feiner** und eine kleinere Topologie entsprechend **gröber**.

3.6.3 (**Schnitt von Topologien**). Sind $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(X)$ Topologien auf ein- und derselben Menge X , für i aus einer Indexmenge I , so ist offensichtlich auch ihr Schnitt $\mathcal{T} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ eine Topologie.

Definition 3.6.4. Ist X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X , so erklärt man auf X die **von \mathcal{E} erzeugte Topologie** $\langle \mathcal{E} \rangle$ als den Schnitt in $\mathcal{P}(X)$ über alle Topologien auf X , die \mathcal{E} umfassen, alias die kleinste Topologie auf X , die \mathcal{E} umfaßt.

3.6.5. In der teilgeordneten Menge aller Topologien auf einer vorgegebenen „Trägermenge“ hat jede Menge von Topologien ein Supremum nach 3.6.4 und ein Infimum nach 3.6.3.

3.6.6 (**Von Mengensystem erzeugte Topologie, explizite Beschreibung**). Natürlich ist $\langle \mathcal{E} \rangle$ damit die kleinste Topologie auf X , die \mathcal{E} umfaßt. Wir können $\langle \mathcal{E} \rangle$ alternativ auch wie folgt beschreiben: Zunächst bilden wir das Mengensystem $\tilde{\mathcal{E}} = \{U \subset X \mid \exists V_1, \dots, V_k \in \mathcal{E} \text{ mit } U = V_1 \cap \dots \cap V_k\}$ aller endlichen Schnitte von Mengen aus \mathcal{E} , mitgemeint ist hier $X \in \tilde{\mathcal{E}}$ als der „Schnitt über gar keine Menge aus \mathcal{E} “, und anschließend bilden wir das Mengensystem $\langle \mathcal{E} \rangle = \{W \subset X \mid \text{Es gibt } \mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{E}} \text{ mit } W = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\}$ aller beliebigen Vereinigungen von Mengen aus $\tilde{\mathcal{E}}$, mitgemeint ist hier $\emptyset \in \langle \mathcal{E} \rangle$ als die „Vereinigung über gar keine Menge aus $\tilde{\mathcal{E}}$ “. In der Tat ist auch das so konstruierte Mengensystem $\langle \mathcal{E} \rangle$ eine Topologie auf X , und für jede Topologie \mathcal{T} auf X mit $\mathcal{T} \supset \mathcal{E}$ folgt umgekehrt erst $\mathcal{T} \supset \tilde{\mathcal{E}}$ und dann $\mathcal{T} \supset \langle \mathcal{E} \rangle$.

Definition 3.6.7. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine **Subbasis** der Topologie \mathcal{T} , wenn es die Topologie erzeugt, in Formeln $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{T}$. Es heißt eine **Basis** der Topologie, wenn die offenen Mengen unseres topologischen Raums X gerade alle beliebigen Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{E} sind.

Beispiel 3.6.8. Die übliche Topologie aus 1.1.10 auf der Menge der erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ können wir in dieser Terminologie beschreiben als die Topologie, die erzeugt wird von allen Teilmengen der Gestalt $\{x \mid x < a\}$ und allen Teilmengen der Gestalt $\{x \mid x > a\}$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

Definition 3.6.9. Eine Familie von stetigen Abbildungen $f_i : X \rightarrow Y_i$ heißt **gesamthaft initial**, wenn für jede Abbildung $e : W \rightarrow X$ von einem weiteren topologischen Raum nach X gilt:

$$(f_i \circ e \text{ stetig } \forall i) \Rightarrow (e \text{ stetig})$$

3.6.10. Wir nennen eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ **initial**, wenn sie als elementige Familie gesamthaft initial ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem topologischen Raum stets initial. Eine initiale injektive Abbildung topologischer Räume nennen wir eine **topologische Einbettung**.

Lemma 3.6.11. Gegeben X eine Menge, Y_i topologische Räume indiziert durch $i \in I$ und $f_i : X \rightarrow Y_i$ eine Familie von Abbildungen gibt es genau eine Topologie auf X derart, daß unsere Familie gesamthaft initial wird. Sie heißt die **Initialtopologie** zu unserer Familie.

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind \mathcal{T} und \mathcal{S} zwei Topologien auf X , für die unsere Familie gesamthaft initial wird, so sind sowohl $\text{id} : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ als auch $\text{id} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S})$ stetig. Das zeigt $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ und die Eindeutigkeit ist bewiesen. Nun zeigen wir noch, daß die kleinste Topologie \mathcal{I} auf X , für die alle die f_i stetig werden, die von einer Initialtopologie geforderte Eigenschaft hat. In der Tat ist die Finaltopologie zu e aus Übung 3.1.26 auch eine Topologie auf X , für die alle f_i stetig sind, und es folgt $\mathcal{T} \supset \mathcal{I}$ alias e stetig. \square

3.6.12. Explizit kann man die Initialtopologie für $(f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ beschreiben als die Topologie auf X , die von allen $f_i^{-1}(V)$ mit $i \in I$ und $V \in \mathcal{T}_i$ erzeugt wird.

Beispiel 3.6.13. Ist Y ein topologischer Raum und $X \subset Y$ eine Teilmenge, so stimmt die auf X induzierte Topologie überein mit der Initialtopologie zur Inklusion $X \hookrightarrow Y$.

3.6.14 (**Transitivität gesamthaft initialer Familien**). Seien $f_i : X \rightarrow Y_i$ und $g_{ji} : Y_i \rightarrow Z_{ji}$ Familien von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Ist die Familie der $g_{ji}f_i$ gesamthaft initial, so auch die Familie der f_i . Ist die Familie der $(g_{ji})_j$ gesamthaft initial für alle i und die Familie der f_i gesamthaft initial, so ist auch die Familie der $g_{ji}f_i$ gesamthaft initial. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

3.6.15. Die vorhergehende Bemerkung 3.6.14 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Abbildungen stets initial ist und daß eine Verknüpfung $g \circ f$ von zwei stetigen Abbildungen nur dann initial sein kann, wenn f initial ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung initial, die eine stetige Linksinverse besitzt.

Vorschau 3.6.16. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ nennen wir ganz allgemein eine Familie von Morphismen $f_i : X \rightarrow Y_i$ in \mathcal{S} **gesamthaft initial in Bezug auf v** , wenn für alle $W \in \mathcal{S}$ gilt

$$v : \mathcal{S}(W, X) \xrightarrow{\sim} \{e \in \mathcal{C}(vW, vX) \mid v f_i \circ e \in v(\mathcal{S}(W, Y_i)) \forall i\}$$

Unsere Aussagen zur Transitivität gesamthaft initialer Familien gelten auch in dieser Allgemeinheit. Im Fall des Vergißfunktors $v : \mathcal{U}\text{Top} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$ für geeignete Mengensysteme \mathcal{U} erhalten wir die obigen Resultate zurück. Die Initialtopologie kann als Spezialfall der „initialen (\mathcal{S}, v) -Struktur“ verstanden werden, wie wir im Zusammenhang mit sogenannten „ (\mathcal{S}, v) -Strukturen auf Objekten von \mathcal{C} “ an anderer Stelle diskutieren.

Definition 3.6.17. Gegeben $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume ist die **Produkttopologie** auf ihrem kartesischen Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ definiert als die Initialtopologie zu den Projektionen auf die Koordinaten $\text{pr}_j : \prod X_i \rightarrow X_j$.

3.6.18. Abstrakt gefaßt erhalten wir so genau das Produkt im Sinne der Kategorientheorie 10.7.1 in der Kategorie der topologischen Räume. Im Fall von zwei Faktoren erhalten wir unsere Produkttopologie aus ?? zurück.

3.6.19. Ausformuliert bedeutet diese Definition: Alle pr_j sind stetig, und eine Abbildung $e : W \rightarrow \prod X_i$ von einem topologischen Raum W in das Produkt ist stetig genau dann, wenn alle $\text{pr}_j e : W \rightarrow X_j$ es sind. Etwas expliziter liefert die Konstruktion der Initialtopologie, daß die Produkttopologie auf $\prod X_i$ erzeugt wird durch alle Mengen der Form $\text{pr}_i^{-1}(U_i)$ für $i \in I$ und $U_i \subseteq X_i$. Eine Basis der Topologie wird folglich gegeben durch alle endlichen Schnitte solcher Mengen alias die „offenen Quader“

$$U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_k} X_i$$

mit $U_{i_\nu} \subseteq X_{i_\nu}$ für paarweise verschiedene i_ν .

3.6.20. Auf einem endlichen Produkt metrischer Räume liefert die Produktmetrik „Maximum der Abstände auf den Koordinaten“ stets die Produkttopologie. Speziell stimmt auf dem \mathbb{R}^n die Produkttopologie überein mit der natürlichen Topologie aus 2.3.15.

3.6.21 (**Initialität ist verträglich mit Produkten**). Das Produkt einer Familie von stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen ist eine stetige Abbildung zwischen den Produkten der jeweiligen Räume. Sind hier alle Abbildungen Einbettungen, so auch ihr Produkt. Sind alle Abbildungen initial, so auch ihr Produkt. Das alles ist eine einfache Anwendung unserer allgemeinen Aussagen zur Transitivität gesamthaft initialer Familien 3.6.14.

Proposition 3.6.22 (Abgeschlossenheit der Diagonale bedeutet hausdorffsch). Genau dann ist ein topologischer Raum X hausdorffsch, wenn die Diagonale eine abgeschlossene Teilmenge des Produkts unseres Raums mit sich selbst ist, in Formeln

$$\Delta(X) \subseteq X \times X$$

Beweis. Ist X hausdorffsch, so gibt es für $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta(X)$ disjunkte offene Umgebungen $U, V \subseteq X$ von x beziehungsweise y . Dann ist $(U \times V) \subseteq (X \times X)$ eine offene Umgebung von (x, y) , die die Diagonale nicht trifft, also liegt (x, y) nicht im Abschluß der Diagonale. Ist umgekehrt die Diagonale abgeschlossen, so gibt es für $x \neq y$ eine offene Umgebung von (x, y) , die die Diagonale nicht trifft. Diese Umgebung ist eine Vereinigung von Quadern $U \times V$ mit $U, V \subseteq X$ und U disjunkt zu V , und einer von diesen Quadern muß (x, y) enthalten, wir haben also also $x \in U$ und $y \in V$ und X ist hausdorffsch. \square

Definition 3.6.23. Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **offen**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist. Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist. Wir fordern von einer offenen oder abgeschlossenen Abbildung nicht, daß sie stetig sein muß.

Beispiel 3.6.24. Die Projektionen eines Produkts von topologischen Räumen auf seine Faktoren sind stets offen, sie sind jedoch im allgemeinen nicht abgeschlossen. Zum Beispiel ist die sogenannte Hyperbel $\{(x, y) \mid xy = 1\}$ eine abgeschlossene Teilmenge der Ebene \mathbb{R}^2 , ihre Projektion auf die x -Achse ist jedoch keine abgeschlossene Teilmenge der Zahlengerade \mathbb{R} .

3.6.25 (Produkte offener Abbildungen). Jedes endliche Produkt von offenen Abbildungen ist offen. Jedes beliebige Produkt von offenen Surjektionen ist eine offene Surjektion. Beides folgt leicht aus der expliziten Beschreibung der Produkttopologie 3.6.19.

Satz 3.6.26 (Zusammenhang von Produkten). *Ein Produkt von topologischen Räumen ist zusammenhängend genau dann, wenn alle Faktoren zusammenhängend sind.*

3.6.27. Um diesen Satz so prägnant formulieren zu können, müssen wir unsere Konvention zugrundelegen, nach der die leere Menge kein zusammenhängender topologischer Raum ist.

Beweis. Ist das Produkt zusammenhängend, so nach 3.3.7 auch die Faktoren als die Bilder der stetigen Projektionen. Für die Rückrichtung prüfen wir unser Zusammenhangskriterium 3.3.8. Sei $(X_i)_{i \in I}$ unsere Familie von topologischen Räumen und $f : \prod X_i \rightarrow \{0, 1\}$ stetig. Wenn X_i zusammenhängend ist, so folgt $f(x) = f(y)$, wenn sich x und y nur in der i -ten Koordinate unterscheiden. Daraus folgt induktiv $f(x) = f(y)$, wenn sich x und y nur in endlich vielen Koordinaten unterscheiden. Gilt nun $f^{-1}(0) \neq \emptyset$, so folgt $f^{-1}(0) \supset U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_k} X_i$ für geeignete paarweise verschiedene Indizes i_1, \dots, i_k und geeignete nichtleere offene Teilmengen $U_{i_1} \subset X_{i_1}, \dots, U_{i_k} \subset X_{i_k}$. Mit unserer Vorüberlegung folgt daraus sofort, daß f konstant sein muß. \square

Übungen

Übung 3.6.28. Für jeden topologischen Raum X ist die diagonale Einbettung $X \rightarrow X \times X$ initial.

Übung 3.6.29. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und Y Hausdorff, so ist der Graph von f eine abgeschlossene Teilmenge $\Gamma(f) \triangleleft X \times Y$.

Übung 3.6.30. Stimmen zwei stetige Abbildungen von einem topologischen Raum in einen Hausdorffraum auf einer dichten Teilmenge überein, so sind sie gleich. Hinweis: Zusammen liefern unsere beiden stetigen Abbildungen eine Abbildung in das kartesische Produkt, unter der das Urbild der Diagonale wegen 3.6.22 abgeschlossen sein muß.

Ergänzende Übung 3.6.31. Ein Produkt von abgeschlossenen Teilmengen ist stets eine abgeschlossene Teilmenge des Produkts. Allgemeiner zeige man für topologische Räume X, Y und Teilmengen $A \subset X$ und $B \subset Y$ die Gleichheit $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ des Abschlusses des Produkts mit dem Produkt der Abschlüsse.

Übung 3.6.32. Für beliebige topologische Räume X, Y, Z ist die offensichtliche Abbildung $X \times Y \times Z \rightarrow (X \times Y) \times Z$ ein Homöomorphismus.

Übung 3.6.33. Ein beliebiges Produkt von Hausdorffräumen ist Hausdorff.

Ergänzende Übung 3.6.34. Man zeige, daß die Menge aller $(x, y) \in \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$ mit $x \leq y$ abgeschlossen ist. Man folgere, daß bei Grenzwerten von Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$ Ungleichungen erhalten bleiben. Hinweis: 3.2.22.

Ergänzende Übung 3.6.35. Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen, so ist auch die Abbildung $H : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $(x, \tau) \mapsto \tau f(x) + (1 - \tau)g(x)$ stetig.

Ergänzende Übung 3.6.36. Das Produkt von zwei Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n und m ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n + m$.

Ergänzende Übung 3.6.37. Jede kompakte d -Mannigfaltigkeit X läßt sich stetig in einen \mathbb{R}^n einbetten. Hinweis: Man findet für jedes $x \in X$ eine stetige Abbildung $f_x : X \rightarrow \mathbb{R}^d$, die injektiv ist auf einer offenen Umgebung U_x von x . Endlich viele dieser U_x überdecken X .

Übung 3.6.38. Man zeige: Das Produkt von zwei kompakten Räumen ist kompakt. Der Satz von Tychonoff ?? wird uns sagen, daß sogar ein beliebiges Produkt von kompakten Räumen kompakt ist.

Ergänzende Übung 3.6.39. Gegeben topologische Räume X und Y sowie Kompakta $K \subset X$ und $L \subset Y$ sowie $W \Subset X \times Y$ mit $K \times L \subset W$ gibt es $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ mit $K \subset U$ und $L \subset V$ sowie

$$U \times V \subset W$$

Ergänzende Übung 3.6.40. Man zeige, daß es keinen topologischen Raum X gibt derart, daß $X \times X$ homöomorph ist zu \mathbb{R} . Hinweis: Man zeige, daß für X zusammenhängend mit mehr als einem Punkt das Komplement eines Punktes in $X \times X$ auch zusammenhängend ist. Man zeige allgemeiner, daß es keine zwei topologischen Räume X, Y mit jeweils mindestens zwei Punkten so gibt, daß $X \times Y$ homöomorph ist zu \mathbb{R} . Höherdimensionale Analoga zeigen wir in ??.

Ergänzende Übung 3.6.41. Auf dem Produkt einer abzählbaren Familie metrischer Räume existieren stets Metriken, die die Produkttopologie induzieren. Weiter zeige man, daß das Produkt einer abzählbaren Familie kompakter metrischer Räume kompakt ist. Hinweis: Man mag sich an ?? orientieren. In ?? zeigen wir allgemeiner aber auch mühsamer den Satz von Tychonoff, nach dem beliebige Produkte kompakter Räume kompakt sind.

3.7 Finaltopologie

3.7.1. Die Finaltopologie in Bezug auf eine Abbildung von einem topologischen Raum in eine Menge kennen wir bereits aus 3.1.26. Hier besprechen wir eine Variante für Familien von Abbildung von topologischen Räumen in eine Menge und Eigenschaften dieser Konstruktion.

Definition 3.7.2. Eine Familie von stetigen Abbildungen $f_i : X_i \rightarrow Y$ heißt **gesamthaft final**, wenn für jede Abbildung $h : Y \rightarrow W$ in einen weiteren topologischen Raum gilt:

$$(hf_i \text{ stetig } \forall i) \Rightarrow (h \text{ stetig})$$

3.7.3. Wir eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ **final**, wenn sie als einelementige Familie gesamthaft final ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem topologischen Raum stets final. Wir sagen, eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sei **final auf ihr Bild**, wenn die induzierte Abbildung $f : X \rightarrow f(X)$ final ist.

Lemma 3.7.4. Gegeben $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, Y eine Menge und $f_i : X_i \rightarrow Y$ eine Familie von Abbildungen gibt es genau eine Topologie auf Y , für die unsere Familie gesamthaft final wird. Sie heißt die **Finaltopologie** zu unserer Familie.

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind \mathcal{T} und \mathcal{S} zwei Topologien auf Y , für die unsere Familie gesamthaft final wird, so sind sowohl $\text{id} : (Y, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ als auch $\text{id} : (Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ stetig. Das zeigt $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ und so die Eindeutigkeit. Andererseits ist klar, daß $\mathcal{T} := \{V \subset Y \mid f_i^{-1}(V) \in \mathcal{X}_i \forall i\}$ eine Topologie ist und die von einer Finaltopologie geforderte Eigenschaft hat. \square

3.7.5 (**Transitivität gesamthaft finaler Familien**). Seien $e_{ij} : W_{ij} \rightarrow X_i$ und $f_i : X_i \rightarrow Y$ Familien von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Ist die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final, so auch die Familie der f_i . Ist die Familie der e_{ij} gesamthaft final für alle i und die Familie der f_i gesamthaft final, so ist auch die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

3.7.6. Die vorhergehende Bemerkung 3.7.5 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei finalen Abbildungen stets final ist und daß eine Verknüpfung fe von zwei stetigen Abbildungen nur dann final sein kann, wenn f final ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung final, die eine stetige Rechtsinverse alias einen stetigen **Schnitt** besitzt. Gibt es in anderen Worten eine stetige Abbildung s mit $f \circ s = \text{id}$, so ist f final. Insbesondere ist jede Projektion von einem Produkt mit nichtleeren Faktoren auf einen der Faktoren final.

3.7.7. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Surjektion, so heißt die Finaltopologie auf Y auch die **Quotiententopologie**.

3.7.8. In unserem abstrakten Kontext aus 3.6.16 sind gesamthaft finale Familien stetiger Abbildungen genau die gesamthaft initialen Familien in Bezug auf den treuen Funktor $v^{\text{opp}} : \mathcal{U}\text{Top}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}^{\text{opp}}$ für jedes Mengensystem \mathcal{U} , das alle beteiligten Räume X_i, Y enthält.

Beispiel 3.7.9. Wir konstruieren das **Möbiusband**. Zu dem Behufe betrachten wir auf $[0, 1] \times [-1, 1]$ die Äquivalenzrelation \sim , die erzeugt wird von $(0, y) \sim (1, -y)$. Die Menge der Äquivalenzklassen versehen wir mit der Quotiententopologie, und fertig ist das Möbiusband. Als Übung zeige man, daß unser so konstruiertes Möbiusband kompakt ist.

Beispiel 3.7.10 (Verkleben topologischer Räume). Wir zeigen, wie man mit unserem Formalismus zwei topologische Räume X und Y verkleben kann. Wir brauchen dazu als „Kleber“ eine Menge K und Abbildungen $f : K \rightarrow X, g : K \rightarrow Y$. Dann betrachten wir auf der disjunkten Vereinigung $Y \sqcup X$ die Äquivalenzrelation \sim erzeugt von $f(z) \sim g(z) \quad \forall z \in K$ und nehmen als Topologie auf der Verklebung

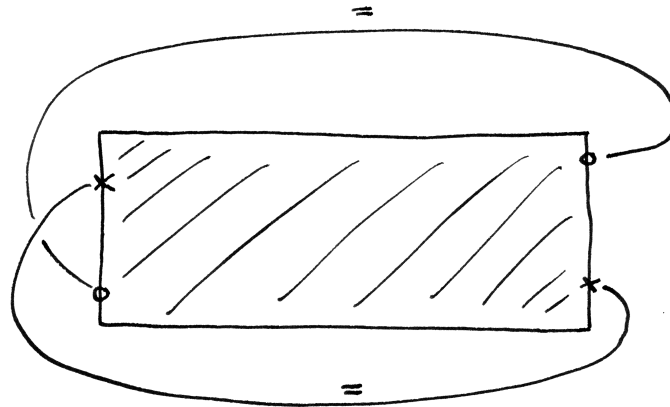
$$Y \sqcup_K X = (Y \sqcup X) / \sim$$

die Finaltopologie zu den beiden offensichtlichen Abbildungen $X \rightarrow Y \sqcup_K X, Y \rightarrow Y \sqcup_K X$.

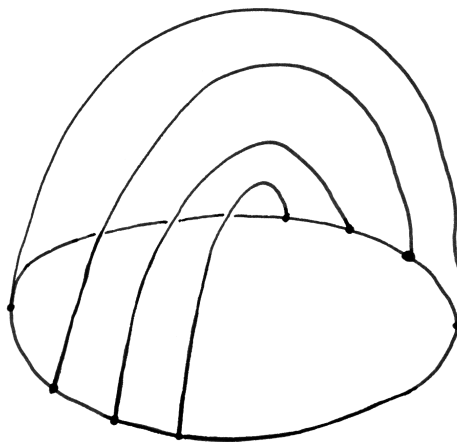
Definition 3.7.11. Gegeben $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume erklärt man ihre **topologische Summe** als ihre disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ definiert als die finale Topologie zu den Injektionen $\text{in}_j : X_j \rightarrow \bigsqcup X_i$.

3.7.12. Abstrakt gefaßt erhalten wir so genau das Koproduct im Sinne der Kategorientheorie 10.7.16 in der Kategorie der topologischen Räume.

3.7.13. Ausformuliert bedeutet diese Definition: Alle in_j sind stetig, und eine Abbildung $g : \bigsqcup X_i \rightarrow Z$ vom Koproduct in einen topologischen Raum Z ist stetig genau dann, wenn alle $g \circ \text{in}_j : X_j \rightarrow Z$ es sind. Etwas expliziter liefert die Konstruktion der Finaltopologie, daß eine Teilmenge der topologischen Summe genau dann offen ist, wenn ihr Schnitt mit jedem X_j offen ist in X_j .



Versuch einer graphischen Darstellung unserer Konstruktion des Möbiusbands.
 Der besseren Vorstellung halber habe ich hier das Rechteck $[0, 5] \times [-1, 1]$ gezeichnet und die Identifikationsvorschrift für die senkrechten Kanten durch mit $=$ bezeichnete Linien beispielhaft angedeutet.



Man erhält eine stetige Abbildung des Möbiusbands nach $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mittels der Formel $(t, \tau) \mapsto (\tau e^{\pi i t}, \sqrt{1 - \tau^2} \cos^2 \pi t)$. Anschaulich gesprochen verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte des Einheitskreises durch einen Bogen mit variierender mittlerer Höhe. Das Bild ist eine sich selbst durchdringende räumliche Fläche, bei der man sich die Selbstdurchdringung leicht wegdenken kann. Man nennt sie auch die **Kreuzhaube**. In dieser Anschauung für das Möbiusband bezahlt man in gewisser Weise mit der Selbstdurchdringung für die gute Sichtbarkeit des Randkreises.

Lemma 3.7.14 (Finalität von Restriktionen). *Ist $f : X \rightarrow Y$ eine finale Abbildung von topologischen Räumen und ist $V \subset Y$ offen oder abgeschlossen, so ist auch die induzierte Abbildung $f : f^{-1}(V) \rightarrow V$ final. Dasselbe gilt analog auch für gesamthaft finale Familien.*

3.7.15. Für beliebiges $V \subset Y$ ist die entsprechende Aussage meines Wissens nicht richtig.

Beweis. Wir zeigen das nur im Fall $V \Subset Y$, den anderen Fall behandelt man analog. Es gilt für $U \subset V$ zu zeigen $U \Subset V \Leftrightarrow f^{-1}(U) \Subset f^{-1}(V)$. Dazu überlegen wir uns $U \Subset V \Leftrightarrow U \Subset Y \Leftrightarrow f^{-1}(U) \Subset X \Leftrightarrow f^{-1}(U) \Subset f^{-1}(V)$. Die äußeren Implikationen folgen dabei aus 3.1.10, die mittlere aus der Finalität von f . \square

Lemma 3.7.16 (Finalität von Surjektionen). *Jede stetige offene oder abgeschlossene Surjektion ist final.*

Beweis. Gegeben eine Surjektion $f : X \rightarrow Y$ gilt für jede Teilmenge $V \subset Y$ bereits $V = f(f^{-1}(V))$. Ist f zusätzlich offen, so folgt aus $f^{-1}(V) \Subset X$ also $V \Subset Y$ und f ist in der Tat final. Im Fall einer stetigen abgeschlossenen Surjektion argumentiert man genauso. \square

Beispiel 3.7.17. Jede stetige Surjektion von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist final nach 3.7.16, denn sie ist abgeschlossen nach 3.5.13.

3.7.18. Sei X ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt **lokal endlich**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der Teilmengen unseres Systems trifft.

Proposition 3.7.19 (Gesamthafte Finalität von Überdeckungen). *Gegeben eine offene oder eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung eines topologischen Raums bilden die zugehörigen Einbettungen eine gesamthaft finale Familie.*

Beweis. Im Fall einer offenen Überdeckung ist das nur eine Umformulierung unserer Proposition 3.1.20, nach der Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist. Im Fall einer endlichen abgeschlossenen Überdeckung folgt das ebenso direkt aus Proposition 3.1.20. Im Fall einer lokal endlichen abgeschlossenen Überdeckung folgt es aus einer Kombination dieser beiden Aussagen oder alternativ, da je eine Abbildung stetig ist, wenn sie stetig ist in jedem Punkt. \square

Beispiel 3.7.20 (Finalität ist lokal in der Basis). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Mit der „Basis“ ist der Raum Y gemeint. Besitzt diese Basis Y eine offene Überdeckung \mathcal{V} derart, daß $f : f^{-1}(V) \rightarrow V$ final ist für alle $V \in \mathcal{V}$, zum Beispiel weil es jeweils einen Schnitt besitzt, so ist auch f selbst final. In der Tat bilden dann nach der Transitivität gesamthaft finaler Familien 3.7.5 und der

gesamthaften Finalität von Überdeckungen 3.7.19 die Abbildungen $f^{-1}(V) \rightarrow Y$ eine gesamthaft finale Familie, und da diese über $f : X \rightarrow Y$ faktorisiert, ist nach der zweiten Aussage in 3.7.5 auch f final.

Beispiel 3.7.21. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ist final, da sie lokal stetige Schnitte besitzt, zum Beispiel über jeder geschlitzten Ebene. Eine Funktion $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ ist also genau dann stetig, wenn $f \circ \exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist.

Beispiel 3.7.22. Das Potenzieren $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ ist final für $n \geq 1$. In diesem Fall besitzt \mathbb{C} nämlich eine endliche Überdeckung durch abgeschlossene Teilmengen, etwa geeignete abgeschlossene Winkelsegmente, auf denen sie jeweils einen stetigen Schnitt besitzt, und man kann 3.7.28 anwenden. Alternativ mögen sie aus der Funktionentheorie wissen, daß nichtkonstante holomorphe Abbildungen mit zusammenhängendem Definitionsbereich offen sind, und offene stetige Surjektionen sind nach 3.7.16 final. Als drittes Argument mögen sie nochmal mit 3.7.28 argumentieren und eine lokal endliche Überdeckung durch abgeschlossene Kreise konstruieren, auf die zurückgezogen unsere Abbildung jeweils final ist nach 3.7.17 als stetige surjektive Abbildung von einem Kompaktum auf einen Hausdorffraum.

Vorschau 3.7.23 (Finalität und Produkte). Es ist meines Wissens im allgemeinen nicht richtig, daß für $f : X \rightarrow Y$ final und Z ein beliebiger topologischer Raum auch $f \times \text{id} : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ final wäre. Wir zeigen jedoch in 3.9.15, daß gegeben eine finale Surjektion $f : X \rightarrow Y$ und Z lokal kompakt auch $f \times \text{id} : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ final ist.

Übungen

Übung 3.7.24. Gegeben ein diskreter Raum F und ein beliebiger Raum X stimmt die Produkttopologie auf $X \times F$ überein mit der Finaltopologie in Bezug auf die Abbildungen $i_f : X \rightarrow X \times F$ für alle $f \in F$, die gegeben werden durch $x \mapsto (x, f)$.

Übung 3.7.25 (Eigenschaften stetiger offener Surjektionen). Wir wissen aus 3.7.16 bereits, daß stetige offene Surjektionen final sind. Man zeige darüber hinaus die folgenden Eigenschaften.

1. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige offene Surjektion und Z ein topologischer Raum, so ist auch $f \times \text{id} : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ eine stetige offene Surjektion;
2. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige offene Surjektion und $V \subset X$ ein Teilmenge, so ist auch $f : f^{-1}(V) \rightarrow V$ eine stetige offene Surjektion;
3. Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen und ist $gf : X \rightarrow Z$ eine stetige offene Surjektion, so auch g . Insbesondere ist jede stetige Abbildung, die einen stetigen Schnitt besitzt, eine stetige offene Surjektion;

4. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $Y = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ eine offene Überdeckung derart, daß alle $f : f^{-1}(V) \rightarrow V$ stetige offene Surjektionen sind, so ist auch f eine stetige offene Surjektion.

Salopp gesprochen sind stetige offene Surjektionen „die besseren finalen Abbildungen“.

Übung 3.7.26 (Verträglichkeit von endlichen Produkten mit Koprodukten). In der Kategorie der Mengen kommutieren Koprodukte mit beliebigen Produkten. In der Kategorie der topologischen Räume kommutieren Koprodukte mit beliebigen endlichen Produkten. In der Kategorie der abelschen Gruppen gilt noch nicht einmal das.

Übung 3.7.27. Gegeben X ein topologischer Raum, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ ein Mengensystem ist f stetig für die von \mathcal{E} erzeugte Topologie auf Y genau dann, wenn die Urbilder aller $V \in \mathcal{E}$ offen sind in X . Hinweis: Sind die Urbilder aller $V \in \mathcal{E}$ offen, so ist \mathcal{E} enthalten in der finalen Topologie auf Y .

Übung 3.7.28 (Finalitätskriterium über abgeschlossene Überdeckungen). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Besitzt die Basis \mathcal{V} eine lokal endliche Überdeckung durch abgeschlossene Teilmengen derart, daß $f : f^{-1}(V) \rightarrow V$ final ist für alle $V \in \mathcal{V}$, so ist auch f selbst final. Hinweis: Man passe die Argumentation aus 3.7.20 an.

Übung 3.7.29 (Finale Abbildungen und Zusammenhang). Ist $f : X \rightarrow Y$ final mit zusammenhängenden Fasern, so sind die Zusammenhangskomponenten von X die Urbilder der Zusammenhangskomponenten von Y . Ist insbesondere Y zusammenhängend, so auch X .

Ergänzende Übung 3.7.30. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Surjektion auf einen Hausdorffraum. Besitzt Y eine lokal endliche Überdeckung durch Teilmengen, deren Urbilder unter f kompakt sind, so ist f final. Hinweis: 3.7.17 und 3.7.28. Besitzt insbesondere ein Hausdorffraum eine lokal endliche Überdeckung durch Kompakta, so kann man keine offenen Mengen hinzufügen, ohne die lokal endliche Überdeckbarkeit durch Kompakta zu verlieren.

Übung 3.7.31 (Stetigkeitseigenschaften der Nullstellen von Polynomen). Die Vorschrift $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$ liefert für jedes n eine finale Abbildung $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \text{Pol}^n$ in den affinen Raum Pol aller normierten komplexen Polynome vom Grad n , und die davon induzierte Abbildung ist ein Homöomorphismus

$$\mathbb{C}^n / \mathcal{S}_n \xrightarrow{\sim} \text{Pol}^n$$

Hier meint $\mathbb{C}^n / \mathcal{S}_n$ den Bahnenraum für die Operation der symmetrischen Gruppe durch Vertauschung der Koordinaten mit der Quotiententopologie alias den Raum der Multimengen komplexer Zahlen der Kardinalität n . Auf unserem Raum Pol^n

dahingegen betrachten wir die natürliche Topologie. Unser Satz ist ein topologisches Analogon des Hauptsatzes über symmetrische Polynome ??, vergleiche ?. Hinweis: Man mag etwa davon ausgehen, daß aufgrund der Abschätzung ?? Urbilder von Kompakta K unter π stets wieder kompakt sind.

Beispiel 3.7.32. Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Abbildung $\text{Pol} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n) \mapsto f(\lambda_1) + \dots + f(\lambda_n)$ stetig.

Übung 3.7.33. Man zeige, daß im Raum aller normierten reellen Polynome vom Grad n die über \mathbb{R} zerfallenden Polynome eine abgeschlossene Teilmenge bilden und daß darin die offene Teilmenge der Polynome ohne Nullstelle bei Null in $(n + 1)$ Zusammenhangskomponenten zerfällt, die durch die Zahl der mit Vielfachheit genommenen positiven Nullstellen der in ihnen enthaltenen Polynome charakterisiert werden können.

Vorschau 3.7.34. In der Homotopietheorie arbeitet man oft mit sogenannten **CW-Komplexen**. Darunter versteht man einen Hausdorffraum X mit einer Familie von stetigen Abbildungen $\varphi_\alpha : D^{n(\alpha)} \rightarrow X$ von geschlossenen Bällen $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ nach X derart, daß gilt:

1. Die Restriktionen unserer Abbildungen auf die offenen Bälle sind Homöomorphismen auf ihr Bild $\varphi_\alpha : (D^{n(\alpha)} \setminus S^{n(\alpha)}) \xrightarrow{\sim} \varphi_\alpha(D^{n(\alpha)} \setminus S^{n(\alpha)})$ und unser Raum X ist als Menge die disjunkte Vereinigung der Bilder der offenen Bälle $X = \bigsqcup_\alpha \varphi_\alpha(D^{n(\alpha)} \setminus S^{n(\alpha)})$. Diese Bilder der offenen Bälle heißen die **Zellen** unseres CW-Komplexes;
2. Für jedes α ist $\varphi_\alpha(S^{n(\alpha)})$ enthalten in einer endlichen Vereinigung von Bildern von anderen φ_β mit $n(\beta) < n(\alpha)$;
3. Der Raum X trägt die finale Topologie in Bezug auf die Familie der $\varphi_\alpha : D^{n(\alpha)} \rightarrow X$.

Die zweite Bedingung heißt auf Englisch „closure finiteness“, die Dritte „weak topology“, daher die Terminologie. Große Vorsicht ist bei Produkten angesagt: Das Produkt von zwei CW-Komplexen mit seiner offensichtlichen Zellstruktur muß keineswegs wieder ein CW-Komplex sein, sondern kann mehr offene Teilmengen haben als die finale Topologie zur offensichtlichen Zellstruktur. Mehr Details stehen bei Hatcher.

Ergänzende Übung 3.7.35. Gegeben ein CW-Komplex X ist die Vereinigung $X^{\leq n}$ aller Zellen der Dimension $\leq n$ abgeschlossen. Sie heißt das **n -Skelett** unseres CW-Komplexes.

Ergänzende Übung 3.7.36. Ein Kompaktum in einem CW-Komplex trifft höchstens endlich viele Zellen. Hinweis: Eine Teilmenge, die jede Zelle nur in endlich vielen Punkten trifft, ist diskret.

3.8 Abzählbar basierte Einsmannigfaltigkeiten*

3.8.1. Dieser Abschnitt ist für das Weitere entbehrlich. Er dient im Wesentlichen dazu, den Leser davon zu überzeugen, daß die bisher entwickelten abstrakten Begriffsbildungen immer noch eine enge Beziehung zur Anschauung haben.

Satz 3.8.2 (Klassifikation kompakter Einsmannigfaltigkeiten). *Jede zusammenhängende kompakte topologische Einsmannigfaltigkeit ist homöomorph zur Kreislinie S^1 .*

3.8.3. Weitere Resultate in dieser Richtung kann man etwa in [FR84, p. 139] finden. Wir schicken dem eigentlichen Beweis ein Lemma voraus.

Lemma 3.8.4. *Läßt sich ein zusammenhängender Hausdorffraum schreiben als Vereinigung von zwei offenen zu \mathbb{R} homöomorphen Teilmengen, so ist er homöomorph zur Zahlengeraden \mathbb{R} oder zur Kreislinie S^1 .*

Beweis. Sei X unser Raum und seien $\varphi, \psi : \mathbb{R} \hookrightarrow X$ stetige offene Einbettungen, deren Bilder X überdecken. Da X zusammenhängend ist, haben wir $\varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Sicher ist $\varphi^{-1}(\psi(\mathbb{R}))$ offen in \mathbb{R} , folglich ist jede Zusammenhangskomponente dieser Menge ein offenes Intervall. Wäre solch eine Zusammenhangskomponente beschränkt, sagen wir von der Gestalt (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, so folgte $(\psi^{-1} \circ \varphi)((a, b)) = (\psi^{-1} \circ \varphi)([a, b])$, und da $\varphi([a, b])$ kompakt und damit abgeschlossen ist, wäre $(\psi^{-1} \circ \varphi)((a, b))$ sowohl offen als auch abgeschlossen und damit ganz \mathbb{R} und es folgte $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} X$ und wir wären fertig. Wir dürfen also annehmen, jede Zusammenhangskomponente von $\varphi^{-1}(\psi(\mathbb{R}))$ sei ein unbeschränktes Intervall. Folglich besitzt dieser Raum und damit auch $\varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R})$ entweder eine oder zwei Zusammenhangskomponenten. Wir beginnen mit dem Fall einer Komponente. Indem wir notfalls φ beziehungsweise ψ durch ihre Verknüpfung mit $t \mapsto -t$ ersetzen, dürfen wir annehmen, daß es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß φ und ψ Homöomorphismen

$$(-\infty, a) \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R}) \xleftarrow{\sim} (b, \infty)$$

induzieren. Die Verknüpfung ist also streng monoton. Wäre sie streng monoton fallend, so hätten wir

$$\lim_{x \nearrow a} \varphi(x) = \varphi(a) = \psi(b) = \lim_{y \searrow b} \psi(y)$$

im Widerspruch zur Wahl von a und b . Also ist unsere Verknüpfung streng monoton wachsend und gegeben c, d mit $\varphi(c) = \psi(d)$ haben wir

$$X = \psi((-\infty, d]) \cup \varphi([c, \infty))$$

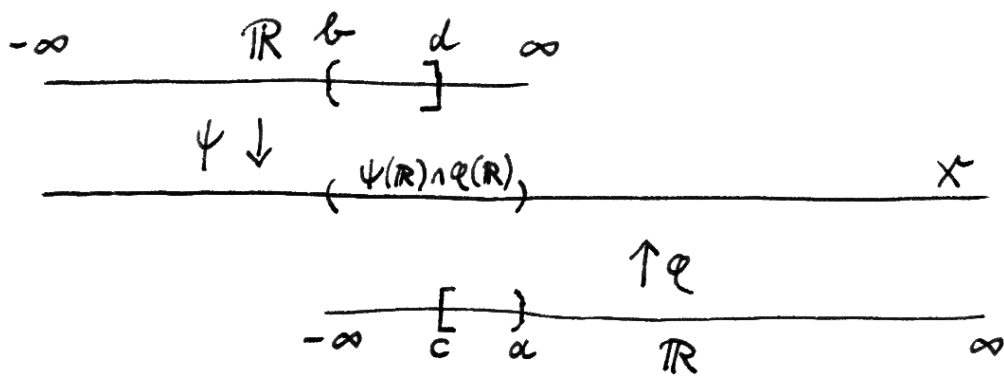


Illustration zum Beweis von 3.8.4.

wobei $\varphi(c) = \psi(d)$ der einzige gemeinsame Punkt dieser beiden Mengen ist. Sie sind beide abgeschlossen in X , da ihre Urbilder unter ψ und φ es sind. Daraus folgt dann, daß X homöomorph ist zu \mathbb{R} . Im Fall zweier Komponenten argumentieren wir analog. \square

Beweis von Satz 3.8.2. Sei $X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r$ eine offene Überdeckung durch zu \mathbb{R} homöomorphe Teilmengen. Wir können die Mengen unserer Überdeckung so anordnen, daß $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i$ für jedes $i \geq 1$ zusammenhängend ist. Ist i minimal derart, daß $U_1 \cup \dots \cup U_i$ nicht homöomorph ist zu \mathbb{R} , so muß nach dem Lemma diese Vereinigung bereits homöomorph zu S^1 sein und damit als nichtleere abgeschlossene und offene Teilmenge mit ganz X zusammenfallen. \square

Satz 3.8.5 (Klassifikation abzählbar basierter Einsmannigfaltigkeiten). *Jede abzählbar basierte topologische Einsmannigfaltigkeit besitzt abzählbar viele Zusammenhangskomponenten und jede von diesen ist homöomorph zur Kreislinie S^1 oder zur reellen Zahlengerade \mathbb{R} .*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß jede nichtkompakte abzählbar basierte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeit M homöomorph zur reellen Zahlengeraden \mathbb{R} ist. Per definitionem besitzt M eine abzählbare Überdeckung durch zu \mathbb{R} homöomorphe offene Teilmengen $M = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$. Wir greifen willkürlich ein $I \in \mathcal{I}$ heraus und nennen es $U_0 := I_0$. Gilt $U_0 = M$, so sind wir fertig und setzen nur proForma $U_1 := U_0$. Andernfalls muß es es, da M zusammenhängend vorausgesetzt war, $I_1 \in \mathcal{I}$ geben mit $U_0 \cap I_1 \neq \emptyset$. Nach 3.8.4 ist $U_0 \cup I_1$ homöomorph zu S^1 oder zu \mathbb{R} . Im ersteren Fall wäre $U_0 \cup I_1$ kompakt, also abgeschlossen, also ganz M im Widerspruch zu unserer Annahme. Also gilt $U_0 \cup I_1 \cong \mathbb{R}$ und wir setzen $U_1 := U_0 \cup I_1$. So machen wir immer weiter und finden eine Überdeckung

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$$

durch eine Folge von zu \mathbb{R} homöomorphen offenen Teilmengen

$$U_0 \subset U_1 \subset \dots$$

Offensichtlich finden wir dann eine monoton fallende Folge a_n und eine monoton wachsende Folge b_n in \mathbb{R} und mit den Einbettungen verträgliche Homöomorphismen $(a_n, b_n) \xrightarrow{\sim} U_n$. Der Satz folgt. \square

3.9 Topologisches Exponentialgesetz

Definition 3.9.1. Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\text{Top}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y . Gegeben Teilmengen $K \subset X$

und $U \subset Y$ bezeichne

$$\mathcal{O}(K, U) \subset \text{Top}(X, Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(K) \subset U$. Die auf $\text{Top}(X, Y)$ von den Mengen $\mathcal{O}(K, U)$ für $K \subset X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen erzeugte Topologie heißt wie in ?? die **kompakt-offene Topologie**. Wir denken uns Räume stetiger Abbildungen im Zweifelsfall stets mit dieser Topologie versehen und verwenden für den so entstehenden topologischen Raum die Notation

$$\mathcal{C}(X, Y)$$

3.9.2 (Diskussion der Notation). Manche Quellen verwenden die Notation $Y^X = \mathcal{C}(X, Y)$. Ich will versuchen, diese exponentielle Schreibweise zu vermeiden. Sie hat den Nachteil, daß in wieder anderen Quellen die Notation Y^X vielmehr die Menge aller Abbildungen $\text{Ens}(X, Y)$ bezeichnet.

Lemma 3.9.3 (Funktorialitäten). *Gegeben stetige Abbildungen $f : X' \rightarrow X$ und $g : Y \rightarrow Y'$ sind auch die induzierten Abbildungen $(\circ f) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X', Y)$ und $(g \circ) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')$ stetig.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus $(\circ f)^{-1}\mathcal{O}(K', U) = \mathcal{O}(f(K), U)$. Die zweite Behauptung folgt aus $(g \circ)^{-1}\mathcal{O}(K, U') = \mathcal{O}(K, g^{-1}(U'))$. \square

3.9.4. Unter einer **Eigenschaft** von Objekten einer Kategorie \mathcal{C} versteht man formal einen Funktor $\mathcal{C}^\times \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$ von der Isomorphismenkategorie von \mathcal{C} in die diskrete Kategorie der zweielementigen Menge der Wahrheitswerte.

Definition 3.9.5. Sei (E) eine Eigenschaft topologischer Räume. Sagen wir, ein topologischer Raum X sei **lokal** (E) , so meinen wir, daß sich jede Umgebung eines beliebigen Punktes von X verkleinern läßt zu einer Umgebung desselben Punktes, die als topologischer Raum mit der induzierten Topologie die Eigenschaft (E) hat.

Beispiel 3.9.6. Speziell heißt ein topologischer Raum **lokal kompakt**, wenn sich jede Umgebung eines jeden seiner Punkte zu einer kompakten Umgebung des besagten Punktes verkleinern läßt. Diese Terminologie hatten wir bereits in ?? eingeführt.

3.9.7 (Diskussion der Terminologie). In der Terminologie von Bourbaki wird von einem lokal kompakten Raum zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft gefordert. Ich schließe mich dieser Terminologie nicht an, da sie im Widerspruch steht zu der eben vereinbarten allgemeinen Bedeutung des Adjektivs „lokal“. Im Deutschen bringt man diesen Unterschied zumindest in der alten Rechtschreibung dadurch zum Ausdruck, daß man „lokalkompakt“ zusammenschreibt, wenn die Hausdorff-Bedingung mit gemeint ist.

Lemma 3.9.8. *Besitzt in einem Hausdorffraum jeder Punkt eine kompakte Umgebung, so ist unser Raum bereits lokal kompakt im Sinne von 3.9.5.*

Beweis. Seien X unser Hausdorffraum und $p \in U \subset K \subset X$ ein Punkt, eine in X offene Menge $U \Subset X$ und ein Kompaktum K . Es gilt, $V \Subset X$ zu finden mit $p \in \bar{V} \subset U$. Nach 3.5.19 finden wir $V, W \Subset K$ disjunkt mit $K \setminus U \subset W$ und $p \in V$. Aus $V \Subset K$ und $V \subset U$ folgt erst $V \Subset U$ und dann $V \Subset X$. Wir haben $\bar{V} := \text{Cl}_X(V) = \text{Cl}_K(V)$ und $V \cap W = \emptyset \Rightarrow \text{Cl}_K(V) \cap W = \emptyset \Rightarrow \text{Cl}_K(V) \subset U$ alias $\bar{V} \subset U$ wie gewünscht. \square

Satz 3.9.9 (Exponentialgesetz, schwache Form). *Seien X, Y, Z topologische Räume. Ist Y lokal kompakt, so induziert die Bijektion aus dem Exponentialgesetz $\text{Ens}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, \text{Ens}(Y, Z))$ eine Bijektion zwischen den entsprechenden Teilmengen von stetigen Abbildungen*

$$\text{Top}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

3.9.10. In der Terminologie der Kategorientheorie 8.3 bedeutet dieser Satz, daß für lokal kompaktes Y der Funktor $\mathcal{C}(Y, _): \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ rechtsadjungiert ist zum Funktor $_ \times Y$. In Korollar 3.9.13 folgern wir, daß die Abbildung im Satz unter der zusätzlichen Annahme, daß auch X lokal kompakt ist, sogar einen Homöomorphismus $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ induziert. Das heißt dann eigentlich erst das Exponentialgesetz aus Gründen, die dort erläutert werden. In ?? formulieren wir bereits das sehr schwache Exponentialgesetz, nach dem für beliebige Räume X, Y, Z und $f: X \times Y \rightarrow Z$ stetig auch die induzierte Abbildung $F: X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig ist. Der Beweis wird gleich wiederholt.

Beweis. Sei $f: X \times Y \rightarrow Z$ stetig und $F: X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ die induzierte Abbildung. Es ist im folgenden wichtig zu unterscheiden zwischen der Abbildung F und der Abbildung $F(x): Y \rightarrow Z$ für festes $x \in X$. Wir wiederholen zunächst, noch ohne irgendwelche Bedingungen an Y , den Beweis aus ??, daß F stetig ist. Es reicht, diese Stetigkeit an jeder Stelle $x \in X$ zu zeigen. Gegeben $K \subset Y$ kompakt und $U \Subset Z$ offen mit $F(x) \in \mathcal{O}(K, U)$ gilt es, eine offene Umgebung V von x zu finden mit $F(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$. In der Tat folgt dann $F^{-1}(\mathcal{O}(K, U)) \Subset X$ und mit 3.7.27 die Stetigkeit von F . Nun besagt unsere Bedingung gerade $(x \times K) \subset f^{-1}(U)$. Wir finden für all $y \in K$ offene Teilmengen $V_y \Subset X$ und $W_y \Subset Y$ mit

$$(x, y) \in V_y \times W_y \subset f^{-1}(U)$$

Wegen der Kompaktheit von K finden wir sogar $E \subset K$ endlich mit $K \subset \bigcup_{y \in E} W_y$. Jetzt setzen wir $V := \bigcap_{y \in E} V_y$ und haben $(V \times K) \subset f^{-1}(U)$ alias $F(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$ wie gewünscht. Sei nun umgekehrt $F: X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig

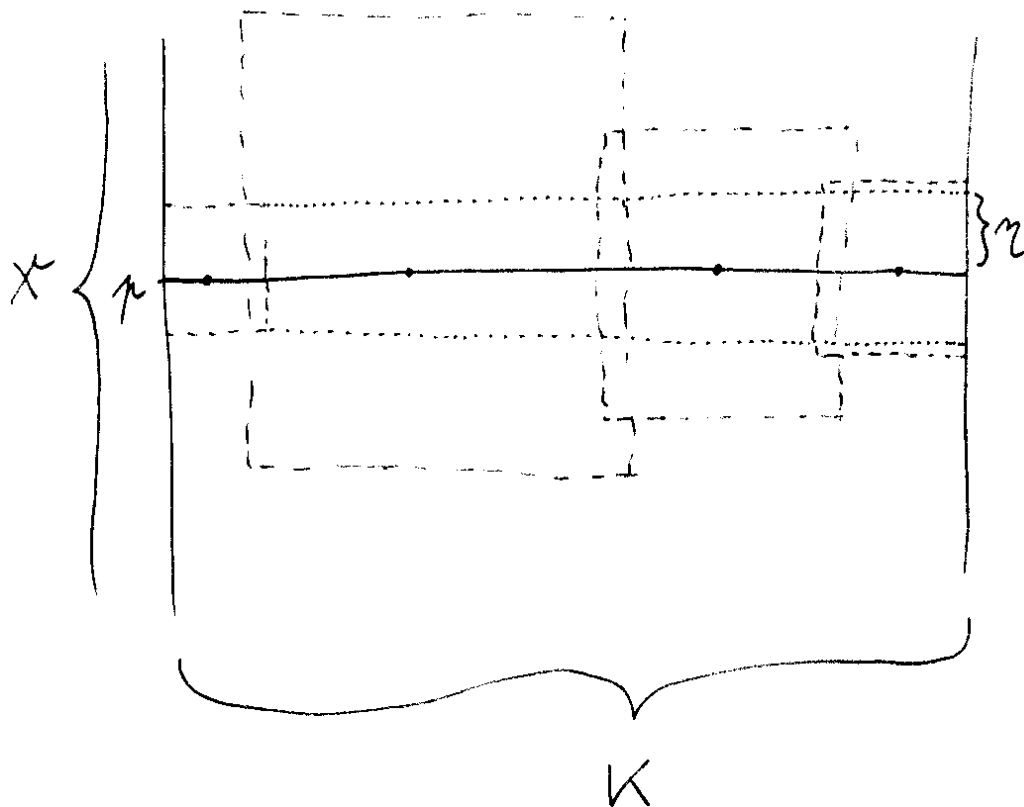


Illustration zum Beweis von Satz 3.9.9. Das Bild kommt von dem Beweis des Spezialfalls 2.5.4. Das p im Bild heißt in unserem Beweis x , das η im Bild ist so gewählt, daß der η -Ball um x alias p in V enthalten wäre.

und sei $f : X \times Y \rightarrow Z$ die induzierte Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß f stetig ist an jeder Stelle $(x, y) \in X \times Y$. Sei also $U \subseteq Z$ eine offene Umgebung von $f(x, y) = (F(x))(y)$. Nach Annahme ist $F(x) : Y \rightarrow Z$ stetig und Y lokal kompakt, folglich gibt es eine kompakte Umgebung K von y mit $(F(x))(K) \subset U$ alias $F(x) \in \mathcal{O}(K, U)$. Da nun auch die Abbildung $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig ist bei x , gibt es dann auch eine Umgebung V von x mit $F(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$, also mit $f(V \times K) \subset U$. Damit ist $V \times K$ die gesuchte Umgebung von (x, y) , die unter f nach U abgebildet wird. \square

Korollar 3.9.11 (Stetigkeit des Auswertens). *Ist Y lokal kompakt und Z ein beliebiger topologischer Raum, so ist das Auswerten $\mathcal{C}(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$ stetig.*

Beweis. Das Auswerten entspricht unter der Bijektion aus unserem Adjunktionsatz 3.9.9 der Identität auf $\mathcal{C}(Y, Z) = X$ rechts. \square

Korollar 3.9.12. *Gegeben ein lokal kompakter topologischer Raum X und eine Familie topologischer Räume (Y_i) liefert die offensichtliche Abbildung einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}\left(X, \prod_i Y_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathcal{C}(X, Y_i)$$

Beweis. In kategorieller Sprache ausgedrückt besagt unser Lemma, daß der Funktor $\mathcal{C}(X, _): \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ verträglich ist mit Produkten. Das folgt mit der Adjunktion 3.9.9 unmittelbar aus der allgemeinen Erkenntnis ??, daß ein rechtsadjungierter Funktor stets mit Limites vertauscht. \square

Korollar* 3.9.13 (Exponentialgesetz). *Seien X, Y, Z topologische Räume. Sind X und Y lokal kompakt, so induziert unser Exponentialgesetz für Mengen einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

Ergänzung 3.9.14. In der anderen Schreibweise liest sich das $Z^{X \times Y} \xrightarrow{\sim} (Z^Y)^X$, daher die Terminologie. Ich benutze diese Aussage im weiteren nicht und zeige sie nur der Vollständigkeit halber.

Beweis. Die Stetigkeit dieser Abbildung ist nach 3.9.9 gleichbedeutend erst zur Stetigkeit der induzierten Abbildung $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ und durch erneutes Anwenden von 3.9.9 auch zur Stetigkeit der induzierten Abbildung $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \times Y \rightarrow Z$. Diese Stetigkeit folgt jedoch aus 3.9.11, da mit X und Y auch $X \times Y$ lokal kompakt ist. Also ist die im Korollar betrachtete Bijektion stetig und es bleibt nur noch, die Stetigkeit ihrer Umkehrabbildung zu zeigen. Die Stetigkeit dieser Umkehrabbildung ist jedoch nach 3.9.9 gleichbedeutend zur Stetigkeit der induzierten Abbildung $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \times Y \rightarrow Z$, die hinwiederum

stetig sein muß als die Verknüpfung von zwei nach 3.9.9 stetigen Abbildungen $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \times Y \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$. \square

Proposition 3.9.15. *Ist $p : X \rightarrow Y$ final und surjektiv und Z lokal kompakt, so ist auch $p \times \text{id} : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ final und surjektiv.*

3.9.16. Wir geben in ?? noch einen direkteren Beweis für dieselbe Aussage.

Beweis. Sei W ein topologischer Raum und $g : Y \times Z \rightarrow W$ eine Abbildung. Ist $g \circ (p \times \text{id}) : X \times Z \rightarrow W$ stetig, so nach 3.9.9 auch die induzierte Abbildung $X \rightarrow \mathcal{C}(Z, W)$. Diese Abbildung faktorisiert jedoch als $X \rightarrow Y \rightarrow \mathcal{C}(Z, W)$ mit p als erstem Pfeil und der von g induzierten Abbildung als zweitem Pfeil, da wir p surjektiv vorausgesetzt hatten. Ist zusätzlich p final, so ist folglich mit $g \circ (p \times \text{id})$ auch die von g induzierte Abbildung $Y \rightarrow \mathcal{C}(Z, W)$ stetig und damit nach 3.9.9 wiederum g selbst. \square

Ergänzung 3.9.17. Ein Raum Y heißt **kompakt erzeugt**, wenn er Hausdorff ist und wenn die offensichtliche Abbildung $\bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} K \rightarrow Y$ final ist, für $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(Y)$ das System aller kompakten Teilräume, vergleiche etwa [?]. Man kann zeigen, daß es in der Kategorie der kompakt erzeugten Räume Produkte gibt, die allerdings nicht mit den üblichen Produkten in der Kategorie aller topologischen Räume übereinstimmen, daß das Darankreuzen einen Rechtsadjungierten hat, der allerdings nicht mit dem Raum der stetigen Abbildungen und seiner kompakt-offenen Topologie übereinstimmt, und daß in dieser Begrifflichkeit auch eine Variante des Exponentialgesetzes gilt.

Übungen

Übung 3.9.18. Ist X ein kompakter topologischer Raum, so stimmt die kompakt-offene Topologie auf $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ überein mit der von der Supremumsnorm induzierten Topologie.

Übung 3.9.19. Gegeben topologische Räume X, Y ist diejenige Abbildung $Y \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ stetig, die jedem Punkt $y \in Y$ die entsprechende konstante Abbildung zuordnet, die eben ganz X auf diesen einen Punkt y wirft.

Übung 3.9.20. Gegeben topologische Räume X, Y mit X lokal kompakt ist das Auswerten eine stetige Abbildung $X \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}(X, Y), Y)$. Hinweis: Man verwende die Stetigkeit des Auswertens 3.9.11 und das sehr schwache Exponentialgesetz 3.9.10.

Übung 3.9.21. Die stetigen Abbildungen von einem lokal kompakten topologischen Raum in einen topologischen Vektorraum bilden unter der punktweisen Verknüpfung und mit der kompakt-offenen Topologie selbst einen topologischen Vektorraum. Hinweis: 3.9.12.

Übung 3.9.22. Ist $Y \rightarrow Y'$ initial und X ein beliebiger topologischer Raum, so ist auch $\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')$ initial.

Ergänzende Übung 3.9.23. Man zeige, daß für jeden lokal kompakten Raum Y die Verknüpfung $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ stetig ist. Hinweis: Gegeben $Q \subset V \Subset Y$ eine kompakte Teilmenge in einer offenen Teilmenge gibt es unter unseren Annahmen stets eine kompakte Teilmenge $R \subset Y$ und eine offene Teilmenge $W \Subset Y$ mit $Q \subset W \subset R \subset V$. Sind X und Y lokal kompakt, folgt das auch leicht aus dem schwachen Exponentialgesetz 3.9.9 und der Stetigkeit des Auswertens 3.9.11.

Übung 3.9.24. Ich erinnere an unsere Abkürzung $\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(X)$. Man zeige: Ist X ein lokal kompakter Raum und $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar nach der ersten Variablen mit stetiger partieller Ableitung $\partial F : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{C}$, so gilt für die Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}(X)$, $t \mapsto F(t, \cdot)$ im topologischen Vektorraum $\mathcal{C}(X)$ die Identität

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = (\partial F)(0, \cdot)$$

Analoges gilt für Abbildungen $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow V$ in einen beliebigen normierten reellen Vektorraum.

Übung 3.9.25. Jede stetige Surjektion $f : X \rightarrow Y$ auf einen lokal kompakten Hausdorffraum derart, daß alle Urbilder unter f von Kompakta wieder kompakt sind, ist final. Hinweis: Finalität von Restriktionen 3.7.14 und Lokalität von Finalität in der Basis 3.7.20.

4 Topologie und algebraische Strukturen

4.1 Topologische Gruppen

4.1.1. Ich erinnere an die Produkttopologie 3.6.17. Im folgenden denken wir uns alle Produkte von topologischen Räumen mit dieser Topologie verstehen.

Definition 4.1.2. Ein **topologisches Magma** ist ein Magma M mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $M \times M \rightarrow M$ stetig ist.

Definition 4.1.3. Ein **topologisches Monoid** ist ein Monoid M mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $M \times M \rightarrow M$ stetig ist.

Definition 4.1.4. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ und die Inversenabbildung $G \rightarrow G$ stetig sind.

4.1.5 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Autoren fordern von ihren topologischen Gruppen zusätzlich auch noch die Hausdorff-Eigenschaft, aber ich schließe mich dieser Konvention nicht an und nenne eine hausdorffsche topologische Gruppe kurz eine **Hausdorffgruppe**.

Ergänzung 4.1.6. Segal und Nikolov haben gezeigt, daß eine kompakte Hausdorffgruppe keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus auf eine unendliche aber endlich erzeugte Gruppe besitzen kann. Gemeint sind hier Homomorphismen von abstrakten Gruppen, also nach Vergessen der Topologie.

Beispiele 4.1.7. Die Gruppen $GL(n; \mathbb{R})$ sind topologische Gruppen in der von der natürlichen Topologie auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum aller reellen $(n \times n)$ -Matrizen induzierten Topologie. Jeder normierte Vektorraum ist mit der Addition als Verknüpfung und der metrischen Topologie eine topologische Gruppe.

4.1.8 (**Stetigkeit von Translationen**). Gegeben ein topologisches Magma M ist die Linkstranslation $(x \cdot) : M \rightarrow M$ stetig als die Verknüpfung

$$M \xrightarrow{(x, \text{id})} M \times M \rightarrow M$$

mit x der entsprechenden konstanten Abbildung $M \rightarrow M$, die ja stets stetig ist. In derselben Weise folgt, daß auch die Rechtstranslationen $(\cdot x)$ stetig sind und daß im Fall einer topologischen Gruppe alle Translationen und ebenso die Konjugationen $g \mapsto xgx^{-1}$ für alle x Homöomorphismen sind.

4.1.9. Jede offene Untergruppe einer topologischen Gruppe ist auch abgeschlossen als das Komplement der Vereinigung ihrer nichttrivialen Linksnebenklassen.

Lemma 4.1.10. Eine zusammenhängende topologische Gruppe wird von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt.

Beweis. In der Tat erzeugt in jeder topologischen Gruppe jede Umgebung des neutralen Elements eine offene Untergruppe. Nach 4.1.9 ist diese offene Untergruppe auch abgeschlossen. Ist unsere Gruppe zusammenhängend, so muß sie also bereits mit besagter Untergruppe übereinstimmen. \square

Ergänzung 4.1.11. Ein stetiger Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in eine topologische Gruppe heißt ein **Gruppenweg** in unserer topologischen Gruppe. In der Literatur ist auch die Bezeichnung als **Einparameteruntergruppe** gebräuchlich. In 2.3.19 bestimmen wir die Gruppenwege in der additiven Gruppe eines normierten reellen Vektorraums, in ?? die Gruppenwege in Matrixliegruppen.

Ergänzung 4.1.12. Gegeben eine Umgebung $U \subset G$ des neutralen Elements einer topologischen Gruppe gibt es stets eine weitere Umgebung $V \subset G$ des neutralen Elements mit $V^2 \subset U$ alias $xy \in U \forall x, y \in V$. In der Tat gibt es eine Umgebung von $(1, 1)$ in $G \times G$, die unter der Verknüpfung in U landet, und jede solche Umgebung umfaßt eine Umgebung der Gestalt $A \times B$ für Umgebungen A, B von $1 \in G$. Der Schnitt $A \cap B$ ist dann die gesuchte Umgebung V des neutralen Elements.

Übungen

Übung 4.1.13. Ist G eine Hausdorffgruppe und $A \subset G$ eine abelsche Untergruppe, so ist auch der Abschluß \bar{A} unserer Untergruppe abelsch. In der Tat folgt aus $aba^{-1}b^{-1} = 1$ für alle $a, b \in A$ dasselbe zunächst für alle $a \in A, b \in \bar{A}$ und dann für alle $a, b \in \bar{A}$.

Übung 4.1.14. Man zeige, daß eine zusammenhängende topologische Gruppe mit einer abzählbar basierten Umgebung des neutralen Elements stets abzählbar basiert ist. Hinweis: Gegeben eine offene Teilmenge $U \Subset G$ ist die Multiplikation $U^n \rightarrow G$ stets offen.

Übung 4.1.15. Jede Untergruppe einer topologischen Gruppe ist mit der induzierten Topologie selbst eine topologische Gruppe. Jedes Produkt topologischer Gruppen ist mit der Produkttopologie wieder eine topologische Gruppe.

Ergänzende Übung 4.1.16. Die Einheiten jeder Banach-Algebra bilden mit der metrischen Topologie eine topologische Gruppe. Die unitären Automorphismen eines Hilbertraums bilden eine abgeschlossene Untergruppe in der Einheitengruppe der Banach-Algebra der beschränkten Operatoren auf unserem Hilbertraum.

Übung 4.1.17. Ein Gruppenhomomorphismus von topologischen Gruppen ist stetig genau dann, wenn er stetig ist beim neutralen Element.

Übung 4.1.18. Gegeben eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist auch ihr Abschluß eine Untergruppe.

Übung 4.1.19. In jeder topologischen Gruppe ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements eine Untergruppe, ja sogar ein Normalteiler. Man nennt sie meist die **Einszusammenhangskomponente** oder kurz **Einskomponente**. Die Einskomponente einer topologischen Gruppe G wird G° notiert.

Übung 4.1.20. In einer topologischen Gruppe erzeugt jede zusammenhängende Umgebung der Eins die Einskomponente.

Übung 4.1.21. Jeder diskrete Normalteiler einer zusammenhängenden topologischen Gruppe liegt bereits im Zentrum besagter Gruppe.

Übung 4.1.22. Sei G eine Gruppe mit einer Topologie. Sind die Translationen $(g \cdot) : G \rightarrow G$ und $(\cdot g) : G \rightarrow G$ stetig für alle $g \in G$, ist die Inversenbildung stetig beim neutralen Element e , und ist die Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ stetig bei (e, e) , so ist G eine topologische Gruppe.

Übung 4.1.23. Ein **topologischer Schiefkörper** ist ein Schiefkörper k mit einer Topologie derart, daß die Addition und die Multiplikation stetig sind als Abbildungen $k \times k \rightarrow k$ sowie, für die auf k^\times induzierte Topologie, auch das Bilden des Inversen $k^\times \rightarrow k^\times$. Man zeige, daß für einen Hausdorff'schen topologischen Schiefkörper k die Gruppen $GL(d; k)$ topologische Gruppen sind.

Ergänzende Übung 4.1.24. Jede topologische Gruppe, die homöomorph ist zur additiven Gruppe \mathbb{R} der reellen Zahlen, ist bereits als topologische Gruppe isomorph zur Gruppe \mathbb{R} der reellen Zahlen.

Übung 4.1.25. Ist G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine diskrete Untergruppe, so gibt es eine Umgebung $U \subset G$ des neutralen Elements derart, daß die Multiplikation eine Injektion $H \times U \hookrightarrow G$ induziert. In einer Hausdorffgruppe ist jede diskrete Untergruppe abgeschlossen. Hinweis: Man verwende 4.1.12 und führe für den zweiten Teil die Annahme $\bar{H} \neq H$ zum Widerspruch.

Übung 4.1.26. Seien \mathcal{H} ein Hilbertraum und $U(\mathcal{H})$ die Gruppe seiner unitären Automorphismen. Man zeige, daß $U(\mathcal{H})$ eine topologische Gruppe wird, wenn wir sie mit der Initialtopologie zu allen Auswertungen an Vektoren $ev_v : U(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$ für $v \in \mathcal{H}$ versehen, der sogenannten **starken Topologie**. Man zeige weiter: Ist G eine topologische Gruppe und $\alpha : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine Operation durch unitäre Abbildungen, so ist α genau dann stetig, wenn der induzierte Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow U(\mathcal{H})$ stetig ist für die starke Operator-topologie auf $U(\mathcal{H})$.

Übung 4.1.27. Seien \mathcal{H} ein Hilbertraum und $U(\mathcal{H})$ die Gruppe seiner unitären Automorphismen. Man zeige, daß auf $U(\mathcal{H})$ die starke Topologie übereinstimmt mit der sogenannten **schwachen Topologie**, die definiert ist als Initialtopologie zu allen Abbildungen $U(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$, $A \mapsto \langle w, Av \rangle$ für $v, w \in \mathcal{H}$. Hinweis: Mit

$|\langle v, Av \rangle - \langle v, v \rangle|$ ist auch $\|v - Av\|$ klein. Man zeige weiter: Ist \mathcal{H} abzählbar basiert, so auch $U(\mathcal{H})$ mit seiner starken Topologie.

Übung 4.1.28. Die stetigen Abbildungen von einem lokal kompakten topologischen Raum in eine topologische Gruppe bilden unter der punktweisen Verknüpfung und mit der kompakt-offenen Topologie selbst eine topologische Gruppe. Hinweis: 3.9.12.

4.2 Quotienten nach Gruppenwirkungen

4.2.1. Eine Operation $M \times X \rightarrow X$ eines topologischen Monoids auf einem topologischen Raum heißt **stetig**, wenn sie stetig ist in Bezug auf die Produkttopologie auf $M \times X$. Denken wir uns hier M mit der diskreten Topologie versehen, so sprechen wir von einer **Operation durch stetige Abbildungen**.

4.2.2. Stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f \times \text{id} : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ final für beliebiges Z nennen wir **produktfest final**. Jede stetige offene Surjektion ist final nach 3.7.16 und bleibt unter dem Darankreuzen beliebiger Identitäten nach 3.6.25 eine stetige offene Surjektion. Stetige offene Surjektionen sind mithin produktfest final.

4.2.3. Operiert eine Gruppe G auf einem topologischen Raum X , so versehen wir den **Bahnenraum** X/G a priori mit der Quotiententopologie zur Projektion $X \twoheadrightarrow X/G$.

Lemma 4.2.4 (Gruppenquotienten). *Operiert eine Gruppe G durch stetige Abbildungen auf einem topologischen Raum X , so ist die Quotientenabbildung $\pi : X \twoheadrightarrow X/G$ eine stetige offene Surjektion und insbesondere produktfest final. Ist G endlich, so ist π zusätzlich abgeschlossen.*

4.2.5. Operiert eine Gruppe G durch stetige Abbildungen auf einem topologischen Raum X , so ist nach 4.2.2 insbesondere für jeden weiteren Raum Y die induzierte Abbildung $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times X/G$ final. Mithin ist die Identität ein Homöomorphismus $(Y \times X)/G \xrightarrow{\sim} Y \times X/G$.

Beweis. Das Urbild des Bildes einer Teilmenge $U \subset X$ ist die Vereinigung all ihrer mit der Gruppenoperation verschobenen Kopien, $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$. Aus $U \subseteq X$ folgt so $\pi^{-1}(\pi(U)) \subseteq X$ und damit $\pi(U) \subseteq X/G$. \square

Beispiel 4.2.6. Die offensichtliche Operation von $GL(n+1; \mathbb{R})$ auf $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ ist stetig für die Topologie auf $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ als Bahnenraum der Operation von \mathbb{R}^\times auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$. Um das zu sehen, betrachte man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} GL(n+1; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 & \twoheadrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL(n+1; \mathbb{R}) \times \mathbb{P}^n \mathbb{R} & \twoheadrightarrow & \mathbb{P}^n \mathbb{R} \end{array}$$

Die obere Horizontale ist offensichtlich stetig und die linke Vertikale ist final nach 4.2.2, da die Quotientenabbildung nach Lemma 4.2.4 produktfest final ist. Mithin ist auch die untere Horizontale stetig.

Definition 4.2.7. Ein topologischer Raum X mit einer stetigen transitiven Operation einer topologischen Gruppe G heißt ein **homogener G -Raum**.

Lemma 4.2.8 (Quotienten als homogene Räume). *Gegeben eine topologische Gruppe G und eine Untergruppe $H \subset G$ ist die Operation von G auf G/H stetig.*

Beweis. Man betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times G/H & \rightarrow & G/H \end{array}$$

und beachte, daß die linke Vertikale nach 4.2.4 final ist. □

4.2.9. Gegeben eine Menge X mit einer transitiven Operation einer topologischen Gruppe G gibt es offensichtlich genau eine Topologie auf X derart, daß für jeden Punkt $x \in X$ das Anwenden $G \rightarrow X, g \mapsto gx$ eine finale Abbildung ist. Wir nennen sie die **feinste Topologie als homogener Raum** auf X . In der Tat ist für jeden Punkt $x \in X$ die offensichtliche Bijektion $G/G_x \xrightarrow{\sim} X$ automatisch stetig und ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn X die feinste Topologie als homogener Raum trägt.

Proposition 4.2.10 (Quotienten nach abgeschlossenen Untergruppen). *Eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist abgeschlossen genau dann, wenn der Quotient nach unserer Untergruppe Hausdorff ist.*

Beweis. Seien $G \supset H$ besagte Gruppen. Ist der Quotient G/H Hausdorff, so sind seine Punkte abgeschlossen und damit ist auch H abgeschlossen in G als Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von G/H . Für die Umkehrung gilt es nach 3.6.22 zu zeigen, daß die Diagonale $\Delta_{G/H}$ in $G/H \times G/H$ abgeschlossen ist. Das Produkt der Projektionen $G \times G \rightarrow G/H \times G/H$ ist als Produkt offener stetiger Surjektionen auch selbst final. Es reicht also zu zeigen, daß das Urbild der Diagonale $\Delta_{G/H}$ in $G \times G$ abgeschlossen ist. Dies Urbild kann aber auch beschrieben werden als das Urbild von H unter der Abbildung $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy^{-1}$ und ist abgeschlossen, wenn H abgeschlossen ist. □

4.2.11 (**Zusammenhangskomponenten von Bahnräumen**). Operiert eine zusammenhängende topologische Gruppe G stetig auf einem topologischen Raum X , so ist X zusammenhängend genau dann, wenn X/G zusammenhängend ist. Operiert allgemeiner eine zusammenhängende topologische Gruppe G stetig auf

einem topologischen Raum X , so induziert die Quotientenabbildung $X \rightarrow X/G$ eine Bijektion zwischen der Menge $Zus(X) \subset \mathcal{P}(X)$ der Zusammenhangskomponenten von X und der Menge $Zus(X/G) \subset \mathcal{P}(X/G)$ der Zusammenhangskomponenten von X/G . Das alles folgt sofort aus Übung 3.7.29 über finale Abbildungen und Zusammenhang.

Beispiel 4.2.12 (Zusammenhang der speziellen orthogonalen Gruppen). Die Gruppen $SO(n)$ sind zusammenhängend. In der Tat folgt mit der Finalität 3.7.17 stetiger Surjektionen von kompakten Räumen auf Hausdorffräume, daß die Operation auf der n -Sphäre S^n einen Homöomorphismus $SO(n+1)/SO(n) \xrightarrow{\sim} S^n$ liefert, und mit Induktion über n und 4.2.11 folgt die Behauptung. In derselben Weise zeigt man, daß auch die Gruppen $SU(n)$ zusammenhängend sind. Ein Beweis mit mehr Algebra und weniger Topologie wird in ?? skizziert.

Übungen

Übung 4.2.13. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige offene Surjektion von topologischen Räumen, die äquivariant ist für Operationen einer Gruppe G auf beiden Räumen, in Formeln $f(gx) = gf(x)$, und ist G mit einer Topologie versehen, für die die Operation auf X stetig ist, so ist auch die Operation auf Y stetig. Hinweis: 4.2.8.

Übung 4.2.14. Operiert eine kompakte Hausdorffgruppe stetig auf einem lokal kompakten Hausdorffraum, so ist auch der Bahnenraum Hausdorff. Hinweis: Man beginne mit einem Punkt aus einer von zwei Bahnen und wähle dazu eine kompakte Umgebung, die die andere Bahn nicht trifft. Die Aussage gilt im übrigen auch ohne die Annahme lokal kompakt nach 4.4.5, aber dann kenne ich keinen so direkten Beweis.

Übung 4.2.15. Gegeben eine topologische Gruppe G und eine normale Untergruppe $N \subset G$ ist der Quotient G/N mit seiner Quotiententopologie und der induzierten Verknüpfung eine topologische Gruppe.

Übung 4.2.16. Operiert eine topologische Gruppe G stetig auf einem topologischen Raum X und ist $N \subset G$ ein Normalteiler, dessen Elemente X punktweise festhalten, so ist auch die induzierte Operation von G/N auf X stetig.

Übung 4.2.17. Gegeben $G \supset H \supset K$ eine topologische Gruppe mit zwei Normalteilern ist der Isomorphismus aus dem noetherschen Isomorphiesatz ?? ein Homöomorphismus $G/H \xrightarrow{\sim} (G/K)/(H/K)$.

Übung 4.2.18. Man zeige, daß die Einbettung $U(n) \hookrightarrow GL(n; \mathbb{C})$ einen Homöomorphismus $U(n)/O(n) \xrightarrow{\sim} GL(n; \mathbb{C})/GL(n; \mathbb{R})$ induziert.

Übung 4.2.19. Der Abschluß des neutralen Elements in einer topologischen Gruppe ist stets ein Normalteiler und der Quotient danach eine Hausdorffgruppe und die Surjektion auf den Quotienten nicht nur final, sondern auch initial.

Übung 4.2.20. Seien X ein topologischer Raum und $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Ist X/R Hausdorff, so ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen. Ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen und $X \rightarrow X/R$ offen, so ist X/R Hausdorff. Hinweis: Jede stetige offene Surjektion ist produktfest final.

Übung 4.2.21. Ist $Y \rightarrow X$ eine initiale stetige G -äquivalente Abbildung von topologischen Räumen mit einer stetigen Operation einer Gruppe G , so ist auch die induzierte Abbildung $Y/G \rightarrow X/G$ initial. Hinweis: Es gilt zu zeigen, daß jede für die Quotiententopologie auf Y/G offene Menge auch für die Initialtopologie offen ist.

Ergänzende Übung 4.2.22 (Zusammenhangskomponenten von $SO(p, 1)$). Gegeben $p, q \in \mathbb{N}$ betrachte man die Diagonalmatrizen mit p Einsen und q Minus-Einsen $J = J_{p,q} := \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ und erkläre Gruppen

$$GO(p, q) \supset O(p, q) \supset SO(p, q)$$

wie folgt: $O(p, q) := \{A \in GL(p+q; \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$, $SO(p, q) := \{A \in O(p, q) \mid \det A = 1\}$, und $GO(p, q) := \mathbb{R}^\times O(p, q)$. Im Spezialfall $q = 1$ betrachten wir die Quadrik $Q := \{v \in \mathbb{R}^{p+1} \mid v^T J v = -1\}$. Man zeige, daß sie genau zwei Komponenten hat. Wir erklären weiter

$$SO(p, 1)^+ \subset O(p, 1)^+$$

als die Gruppe aller Elemente von $SO(p, 1)$ beziehungsweise $O(p, 1)$, die beide Komponenten von Q stabilisieren. Man zeige, daß $SO(p, 1)^+$ die Einskomponente von $O(p, 1)$ ist. Hinweis: Der Satz von Witt ?? zeigt, daß $O(p, 1)$ transitiv auf Q operiert. Etwas Nachdenken zeigt dasselbe für $SO(p, 1)$ unter der Annahme $p > 0$. In diesem Fall zeige man, daß wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$(\det, \text{komp}) : O(p, 1) \rightarrow \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$$

erhalten, wo komp erklärt sei durch $\text{komp}(g) = 1$, wenn g beide Komponenten von Q stabilisiert.

Übung 4.2.23. Der Quotient G/G° einer Gruppe nach ihrer Einskomponente heißt die **Komponentengruppe** von G . Ist G° offen in G , so ist besagte Komponentengruppe diskret. Ist G außerdem kompakt, so ist die Komponentengruppe endlich. Gegeben ein stetiger surjektiver Gruppenhomomorphismus einer kompakten Gruppe mit endlicher Komponentengruppe in eine Hausdorffgruppe ist das Bild der Einskomponente die Einskomponente.

Übung 4.2.24 (Realisierung von $SL(2; \mathbb{R})/SO(2)$ durch Matrizen). Wir betrachten die Menge $Y \subset \text{Mat}(2; \mathbb{R})$ aller positiv definiten Matrizen mit der Determinante Eins und fassen sie auf als eine Menge von Skalarprodukten auf \mathbb{R}^2 .

Sie trägt eine transitive Wirkung von $SL(2; \mathbb{R})$ durch die Vorschrift $A \cdot S := ASA^\top$ und die Standgruppe der Einheitsmatrix alias des Standardskalarprodukts ist $SO(2)$. Also erhalten wir eine Bijektion $SL(2; \mathbb{R})/SO(2) \xrightarrow{\sim} Y$ durch $A \mapsto AA^\top$. Sie besitzt eine stetige Spaltung, die wir etwa erhalten können, indem wir jedem Skalarprodukt die Matrix zuordnen, in deren Spalten die Vektoren derjenigen Orthonormalbasis stehen, die in ihm aus der Standardbasis durch das Gram-Schmidt-Verfahren entsteht. Folglich ist die von $Mat(2; \mathbb{R})$ induzierte Topologie auf Y auch in der Tat die feinste Topologie als homogener Raum. Diese Realisierung ist eng verwandt zur Polarzerlegung ???. Eine alternative Realisierung als obere Halbebene besprechen wir in 4.3.16.

Übung 4.2.25. Gegeben ein Körper \mathbb{K} erinnere man aus ??? die Bruhat-Zerlegung

$$GL(n; \mathbb{K})/B = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB/B$$

für B die invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen und zeige für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ die Existenz von Homöomorphismen $BwB/B \cong \mathbb{K}^{l(w)}$ für $l(w)$ die Zahl der Fehlstände der Permutation w .

4.3 Projektive Räume

Beispiele 4.3.1. Die wichtigsten hausdorffschen topologischen Schiefkörper sind für uns im folgenden der Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} , der Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} und der Schiefkörper der Quaternionen \mathbb{H} .

Definition 4.3.2. Die **projektiven Räume** $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ für $n \geq 0$ und einen hausdorffschen topologischen Schiefkörper \mathbb{K} erhält man als die Menge aller Ursprungsgeraden oder genauer aller von einem von Null verschiedenen Element erzeugten Rechtsuntermoduln in \mathbb{K}^{n+1} . Wir versehen unsere projektiven Räume mit der Quotiententopologie bezüglich der offensichtlichen Surjektionen

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0 &\twoheadrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K} \\ x &\mapsto x\mathbb{K} \end{aligned}$$

Die natürliche Operation von $GL(n+1; \mathbb{K})$ auf \mathbb{K}^{n+1} induziert eine Operation von $GL(n+1; \mathbb{K})$ auf $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$, von der man wie in 4.2.6 sieht, daß sie stetig sein muß.

Lemma 4.3.3. *Gegeben ein hausdorffscher topologischer Schiefkörper \mathbb{K} stimmt auf $\mathbb{K}^d \setminus 0$ die von \mathbb{K}^d induzierte Topologie überein mit der feinsten Topologie als homogener Raum von $GL(d; \mathbb{K})$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß das Anwenden auf den ersten Vektor der Standardbasis $\pi : A \mapsto A e_1$ eine finale Abbildung $GL(d; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^d \setminus 0$ ist. Da Finalität

nach 3.7.20 lokal ist in der Basis, reicht es, für jeden Vektor $v \neq 0$ eine offene Umgebung U zu finden derart, daß $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ final ist. Nach 3.7.5 reicht es, besagte offene Umgebung U so zu finden, daß $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ einen stetigen Schnitt besitzt. Dazu wählen wir zu unserem von Null verschiedenen Vektor v eine invertierbare Matrix $A = (v|a_2|\dots|a_d)$ mit erster Spalte v und nehmen als $U := \mathbb{K}^d \setminus \langle a_2, \dots, a_d \rangle$ das Komplement des Rechtserzeugnisses ihrer anderen Spalten und als stetigen Schnitt auf U die Abbildung $w \mapsto (w|a_2|\dots|a_d)$, die jedem $w \in U$ diejenige Matrix zuordnet, die aus A entsteht beim Ersetzen der ersten Spalte durch w . Die Hausdorffeigenschaften haben wir dabei implizit verwendet, um zu sehen, daß das Erzeugnis $\langle a_2, \dots, a_d \rangle$ abgeschlossen ist. \square

4.3.4. Alternativ könnte man argumentieren, daß unsere Abbildung π eine stetige offene Surjektion ist, weil sie lokal stetige Schnitte besitzt. Bei dieser Argumentation braucht man weniger Wissen über finale Abbildungen.

4.3.5 (**Existenz globaler Schnitte**). Der Beweis von Lemma 4.3.3 beruht auf der Erkenntnis, daß die Abbildung, die jeder invertierbaren Matrix ihre erste Spalte zuordnet, lokal stetige Schnitte besitzt. Im Fall von $GL(2; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ ist es auch nicht schwer, einen globalen stetigen Schnitt anzugeben. Im Fall von $GL(3; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus 0$ hingegen gibt es keinen globalen stetigen Schnitt: Aus solch einem Schnitt könnte man nämlich unschwer eine „Kämmung des Igels“ konstruieren, und wir werden in 5.4.4 zeigen, daß es solch eine Kämmung nicht geben kann.

Lemma 4.3.6 (Projektive Räume als homogene Räume). *Gegeben ein hausdorffscher topologischer Schiefkörper \mathbb{K} stimmt die Topologie auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$ überein mit der feinsten Topologie als homogener Raum in Bezug auf die offensichtliche Operation von $GL(n+1; \mathbb{K})$. Insbesondere ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ Hausdorff.*

Beweis. Wir versehen $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ mit seiner Topologie als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$ und betrachten die Abbildungen

$$GL(n+1; \mathbb{K}) \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}$$

gegeben durch das Anwenden auf den ersten Vektor der Standardbasis e_1 und die offensichtliche Projektion. Die erste Abbildung ist final nach Lemma 4.3.3, die zweite nach Annahme. Also ist nach 3.7.5 auch ihre Verknüpfung final. Damit stimmt auf $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ die feinste Topologie als homogener Raum überein mit der Topologie als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$ aus 4.3.2. Die Hausdorffeigenschaft folgt dann aus 4.2.10, da die Standgruppen unseres homogenen Raums $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ offensichtlich abgeschlossen sind. \square

Proposition 4.3.7 (Projektive Räume als Mannigfaltigkeiten). *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n(\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K})$.*

Beispiele 4.3.8. Die reelle projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ ist homöomorph zu einer Kreislinie S^1 , die komplexe projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ zur Kugelschale S^2 , und die quaternionale projektive Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$ homöomorph zur 4-Sphäre S^4 . Weiter ist $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ homöomorph zu einer Kugelschale, in die man ein kreisrundes Loch geschnitten hat, um dort ein Möbiusband einzukleben. All das zu zeigen ist eine gute Übung.

Vorschau 4.3.9. Die offensichtlichen Projektionen von den geeignet erklärten Einheitskugeln auf die jeweiligen projektiven Räume $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{R} \cong S^1$, $S^3 \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \cong S^2$ und $S^7 \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{H} \cong S^4$ sind Faserbündel, ja sogar Hauptfaserbündel mit Fasern S^0 , S^1 und S^3 . Faserbündel mit Basis, Faser und Totalraum jeweils einer Sphäre heißen **Hopf-Faserungen**. Mithilfe der Oktonionen kann man auch eine Hopf-Faserung über der S^8 mit Faser S^7 und Totalraum S^{15} konstruieren. Man kann sogar zeigen, daß es außerhalb dieser Dimensionen keine Hopf-Faserungen gibt, aber das ist für uns vorerst außer Reichweite.

Beweis von 4.3.7. Identifizieren wir in \mathbb{R} -linearer Weise $\mathbb{K}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ und bezeichnen mit $S := S^{2n+1} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ die Menge aller Vektoren der Länge Eins für das Standard-Skalarprodukt des \mathbb{R}^{2n+2} , eine hochdimensionale Sphäre, so erhalten wir eine stetige Surjektion $S \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K}$. Als Bilder kompakter Räume sind demnach unsere projektiven Räume kompakt. Somit müssen wir nur noch für jeden Punkt eine zu \mathbb{K}^n homöomorphe offene Umgebung finden. Wir betrachten dazu einen beliebigen endlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum W und zeigen, daß für jede affine Hyperebene $H \subset W$, die den Ursprung vermeidet, die Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ gegeben durch $v \mapsto \langle v \rangle$ eine offene Einbettung ist. Ist in der Tat $\vec{H} \subset W$ der Richtungsraum unserer affinen Hyperebene H , so ist $\pi^{-1}(\pi(H)) = W \setminus \vec{H}$ offen in $W \setminus \{0\}$. Mithin hat unsere Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ offenes Bild. Nun betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & W \setminus \vec{H} & \\ \swarrow & & \searrow \pi \\ H & \xrightarrow{\quad} & i_H(H) \end{array}$$

Der linke schräge Pfeil ordnet jedem Punkt den Schnittpunkt mit H der durch ihn verlaufenden Ursprungsgeraden zu. Er ist stetig, denn ist $\lambda_H : W \rightarrow k$ die Linearform, deren Niveaufläche zum Wert Eins gerade H ist, so wird er gegeben durch die Formel $w \mapsto w\lambda_H(w)^{-1}$. Er ist nach 3.7.5 sogar final, da er einen Schnitt besitzt, eben die Einbettung $H \hookrightarrow W \setminus \vec{H}$. Der rechte schräge Pfeil ist final nach 3.7.14 als Einschränkung einer finalen Abbildung auf eine offene Teilmenge der Basis. Zusammen folgt, daß die horizontale Bijektion ein Homöomorphismus $H \xrightarrow{\sim} i_H(H)$ sein muß. Damit ist $\mathbb{P}W$ in der Tat eine Mannigfaltigkeit. \square

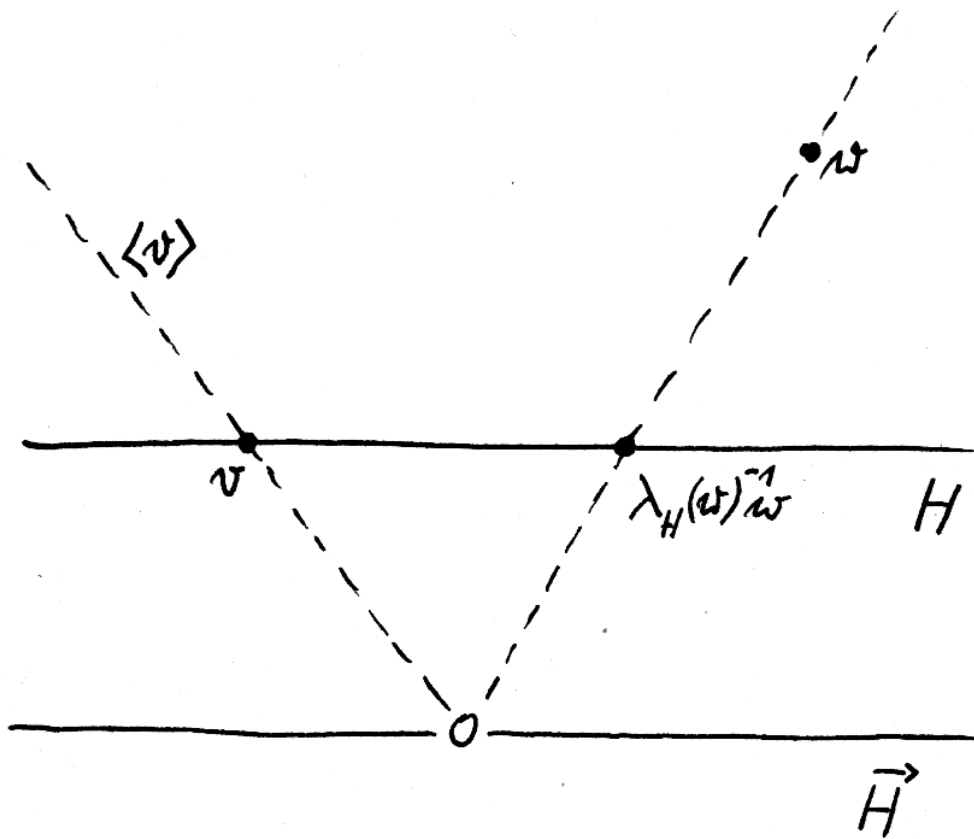


Illustration zum Beweis von 4.3.7

Beispiel 4.3.10. Unter einer **vollständigen Fahne** von Untervektorräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem Körper k versteht man eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

mit $\dim V_i = i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}(V)$ und nennen sie die Fahnenmannigfaltigkeit. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $GL(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Die Standgruppe der Fahne

$$k^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \supset \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \supset \dots \supset \langle e_1 \rangle \supset 0$$

ist die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen $B \subset GL(n; k)$. Wir erhalten so eine Bijektion

$$GL(n; k)/B \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(k^n)$$

Analoges gilt für einen Schiefkörper k , wobei wir vereinbaren, Vektorräume als Rechtsmoduln verstehen zu wollen. Arbeiten wir über dem Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} oder dem Schiefkörper \mathbb{H} , so ist die Fahnenmannigfaltigkeit mit ihrer feinsten Topologie als homogener Raum kompakt aufgrund der Iwasawa-Zerlegung ??, ?? und ??.

Übungen

Übung 4.3.11. Man prüfe die Beschreibungen von $\mathbb{P}^1\mathbb{K}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ aus 4.3.8.

Übung 4.3.12. Man zeige, daß $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ homöomorph ist zu einer Kreislinie S^1 , $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ homöomorph zur Kugelschale S^2 , und $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$ homöomorph zur 4-Sphäre S^4 . Man zeige weiter, daß $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ homöomorph ist zu einer Kugelschale, in die man ein kreisrundes Loch geschnitten hat, um dort ein Möbiusband einzukleben.

Übung 4.3.13. Sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Wir betrachten in $\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V)$ alle Paare bestehend aus einer Halbebene und einer Halbgeraden auf ihrem Rand, also alle Paare (H, L) , für die es $v, w \in V$ gibt mit $H = \mathbb{R}_{\geq 0}w + \mathbb{R}v$ und $L = \mathbb{R}_{\geq 0}v$. Man zeige, daß die Menge aller derartigen Paare ein homogener Raum für $GL(V)$ ist und daß dieser homogene Raum kompakt ist.

Übung 4.3.14. Man zeige, daß die Gruppe $GL(n; \mathbb{R})^+$ aller reellen $(n \times n)$ -Matrizen mit positiver Determinante zusammenhängend ist. Hinweis: Induktion über n . Aus 4.3.3 folgert man unschwer, daß im Fall $n > 1$ für den homogenen Raum $\mathbb{R}^n \setminus 0$ unserer Gruppe seine Topologie als homogener Raum mit der offensichtlichen Topologie übereinstimmt, so daß dieser homogene Raum zusammenhängend ist. Damit müssen wir nach 4.2.11 nur noch zeigen, daß die Standgruppe eines Punktes zusammenhängend ist.

Übung 4.3.15. Versehen wir $\mathbb{R}^d \setminus 0$ mit der von \mathbb{R}^d induzierten Topologie, so liefert für $d > 1$ das Anwenden auf einen beliebigen von Null verschiedenen Vektor eine finale Abbildung $SL(d; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus 0$. Dasselbe gilt im Komplexen.

Übung 4.3.16 (Realisierung von $SL(2; \mathbb{R})/SO(2)$ als obere Halbebene). Wir betrachten die Operation von $SL(2; \mathbb{R}) \subset GL(2; \mathbb{C})$ auf der Riemann'schen Zahlkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Sie stabilisiert den Äquator $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ und man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie außer dem Äquator nur zwei weitere Bahnen hat, nämlich die „nördliche und die südliche Hemisphäre“. Die Kreislinie $SO(2)$ operiert durch Rotationen um die Polachse, aber „mit verdoppelter Geschwindigkeit“. Insbesondere operiert $(-I)$ als die Identität und unsere Operation faktorisiert über eine Operation von $PSL(2; \mathbb{R}) := SL(2; \mathbb{R})/\{\pm I\}$. Die Standgruppe jedes der beiden Pole unter $SL(2; \mathbb{R})$ ist $SO(2)$ und wir erhalten so je eine Bijektion von $SL(2; \mathbb{R})/SO(2)$ mit jeder der beiden Hemisphären. Unter der natürlichen Identifikation $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $z \mapsto \langle 1, z \rangle$ entsprechen unsere beiden Hemisphären den beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und die Pole den Punkten $\pm i$ und die Operation erhält die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{c + dz}{a + bz}$$

wie in ???. Wählen wir stattdessen die Identifikation $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $z \mapsto \langle z, 1 \rangle$, so erhält unsere Operation die den meisten Mathematikern besser vertraute Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Man findet leicht eine stetige Spaltung, explizit hat man etwa auf der oberen Halbebene die Spaltung

$$x + yi \mapsto y^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$$

Diese Spaltung zeigt, daß die von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ induzierte Topologie auf unserer Hemisphäre mit ihrer feinsten Topologie also homogener Raum von $SL(2; \mathbb{R})$ übereinstimmt. Sie ist auch eine unmittelbare Konsequenz der Iwasawa-Zerlegung ???. Diese Spaltungen zeigen im übrigen sehr direkt, daß das Urbild jedes Kompaktums unter $SL(2; \mathbb{R}) \rightarrow SL(2; \mathbb{R})/SO(2)$ kompakt ist, was nach 4.4.17 und 4.4.20 auch ganz allgemein für Quotienten einer topologischen Gruppe nach einer kompakten Untergruppe gilt. Eine alternative Realisierung durch Matrizen haben wir in 4.2.24 besprochen.

4.4 Eigentlichkeit und hausdorffsche Quotienten*

Definition 4.4.1. Eine Abbildung von topologischen Räumen $f : X \rightarrow Y$ heißt **eigentlich**, wenn sie stetig ist und wenn darüber hinaus für jeden weiteren Raum

Z die Abbildung $f \times \text{id} : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ abgeschlossen ist.

4.4.2 (Diskussion der Terminologie). Auf Französisch verwendet man für „eigentlich“ den Begriff **propre**, auf Deutsch sagt man alternativ auch **universell abgeschlossen**. In einer hoffentlich selbsterklärenden Terminologie, die ich hier nicht formal einführen will, könnte man auch **produktfest abgeschlossen** sagen. Die Terminologie ist nicht ganz einheitlich, in der Literatur werden verschiedene andere Varianten der Definition des Begriffs einer eigentlichen Abbildung verwendet.

Vorschau 4.4.3. Wir zeigen in 4.4.13, daß eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen eigentlich ist genau dann, wenn das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist. Das mag eine erste Anschauung für dieses Konzept geben.

Lemma 4.4.4 (Eigentliche Abbildungen auf einen Punkt). *Ein topologischer Raum ist kompakt genau dann, wenn die konstante Abbildung von besagtem Raum auf den einpunktigen Raum eigentlich ist.*

Beweis. Sei X kompakt und Z beliebig. Ich denke mir X vertikal und Z horizontal. Sei $A \subseteq X \times Z$ abgeschlossen und $z \in Z$ gegeben derart, daß A die vertikale Faser bei z nicht trifft, in Formeln $A \cap (X \times \{z\}) = \emptyset$. So gibt es für jedes $x \in X$ offene Umgebungen $U_x \subseteq X$ von x und $V_x \subseteq Z$ von z mit $A \cap (U_x \times V_x) = \emptyset$. Endlich viele U_x überdecken nun aber X und der Schnitt der zugehörigen V_x ist eine offene Umgebung von z , die die Projektion von A nicht trifft. Also ist die konstante Abbildung von einem Kompaktum auf einen einpunktigen Raum eigentlich. Die Umkehrung ist für uns weniger wichtig. Um sie zu zeigen, betrachten irgendein System abgeschlossener Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit nichtleeren endlichen Schnitten und müssen nach 3.5.18 nur zeigen, daß auch sein gesamter Schnitt nicht leer ist. Dazu dürfen wir annehmen, daß \mathcal{A} stabil ist unter endlichen Schnitten, und bilden den Raum

$$Z := X \sqcup \{\infty\}$$

mit der Topologie, für die die offenen Teilmengen alle Teilmengen sind, die entweder ∞ vermeiden oder ∞ enthalten und mindestens ein $A \in \mathcal{A}$ umfassen. Aufgrund unserer Annahme an \mathcal{A} liegt ∞ im Abschluß von $X \subset Z$. Betrachten wir die Diagonale $\Delta \subset X \times Z$, so muß das Bild ihres Abschlusses $\bar{\Delta}$ unter der Projektion auf die zweite Koordinate ganz Z sein. Es gibt also ein $x \in X$ mit $(x, \infty) \in \bar{\Delta}$ und daraus folgt sofort $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. \square

Proposition 4.4.5. *Operiert eine kompakte topologische Gruppe G auf einem Hausdorffraum X , so ist auch der Bahnenraum X/G Hausdorff.*

4.4.6. Ich hätte einen Beweis vorgezogen, der das Konzept eigentlicher Abbildungen vermeidet, aber mir ist keiner eingefallen. Unter stärkeren Voraussetzungen wird der Beweis einfacher, vergleiche 4.2.14.

Beweis. Wegen der Kompaktheit von G ist die Projektion $G \times X \rightarrow X$ eigentlich. Damit ist auch die Wirkung eigentlich als Komposition der Projektion mit dem Homöomorphismus $G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X, (g, x) \mapsto (g, gx)$. Damit ist auch das Produkt der Wirkung $G \times X \times X \rightarrow X \times X$ mit der Identität auf X eine eigentliche Abbildung, und schalten wir $\text{id} \times \Delta$ davor, so erkennen wir mit 3.6.22 und Übung 4.4.16, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \times X \\ (g, x) &\mapsto (gx, x) \end{aligned}$$

eigentlich ist. Insbesondere ist ihr Bild $\Gamma \subset X \times X$ abgeschlossen und das Komplement offen. Dann ist aber nach 4.2.3 und 4.2.4 auch das Bild dieses Komplements in $X/G \times X/G$ offen und die Diagonale in $X/G \times X/G$ folglich abgeschlossen. \square

Ergänzung 4.4.7. Die Operation einer topologischen Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt **eigentlich**, wenn die Abbildung $G \times X \rightarrow X \times X, (g, x) \mapsto (gx, x)$ eigentlich ist. Die zweite Hälfte des Beweises von 4.4.5 zeigt, daß bei einer eigentlichen Operation der Bahnenraum stets Hausdorff ist. Die erste Hälfte des Beweises von 4.4.5 zeigt, daß eine Operation einer kompakten Gruppe stets eigentlich ist.

Ergänzung 4.4.8. Man kann zeigen, daß eine stetige Abbildung eigentlich ist genau dann, wenn sie abgeschlossen ist und alle ihre Fasern kompakt sind. Bei Bourbaki kann man nachlesen, warum ein beliebiges Produkt von eigentlichen Abbildungen wieder eigentlich ist. Diese Aussage heißt der **Satz von Frolik-Tychonoff**.

Definition 4.4.9. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **separiert**, wenn die Diagonale eine abgeschlossene Teilmenge $X \not\subset X \times_Y X$ ist.

Beispiele 4.4.10. Die konstante Abbildung von einem topologischen Raum auf einen Punkt ist nach 3.6.22 separiert genau dann, wenn der fragliche Raum Hausdorff alias separiert ist. Jede topologische Einbettung ist separiert. Ist in einem kartesischen Diagramm topologischer Räume ein Ursprungspfeil separiert, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.

Lemma 4.4.11. *Ist $g \circ f$ eigentlich und g separiert, so ist auch f eigentlich.*

4.4.12. Landet g in einem Punkt, so liefert dieses Lemma insbesondere die bereits aus 3.5 bekannte Aussage, daß das Bild einer stetigen Abbildung von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum stets abgeschlossen ist. Bei Bourbaki findet sich unser Lemma zumindest schon einmal für g injektiv.

Beweis. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$. Wir betrachten zum Morphismus f das in Top_Z kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X \times_Z Y & \longrightarrow & Y \times_Z Y \end{array}$$

aus 6.2.13 und sehen, daß mit der Diagonale $Y \hookrightarrow Y \times_Z Y$ auch die Abbildung $(\text{id}, f) : X \rightarrow X \times_Z Y$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Der Morphismus f ergibt sich als deren Verknüpfung mit dem eigentlichen da durch Basiswechsel aus $X \rightarrow Z$ entstehenden Morphismus $X \times_Z Y \rightarrow Y$. \square

Lemma 4.4.13. *Eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen ist eigentlich genau dann, wenn das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist.*

Beweis. Daß Urbilder von Kompakta unter eigentlichen Abbildungen stets kompakt sind, haben wir bereits in 4.4.17 gesehen. Daß eine stetige Abbildung von kompakten Hausdorffräumen eigentlich ist, folgt aus 4.4.11 und aus der Erkenntnis 4.4.4, daß die konstante Abbildung eines Kompaktums auf einen Punkt eigentlich ist. Das Lemma folgt damit aus der Lokalität der Eigentlichkeit in der Basis 4.4.15. \square

4.4.14. Eine Teilmenge in einem topologischen Raum heißt **relativ Hausdorff**, wenn je zwei verschiedene Punkte unserer Teilmenge disjunkte Umgebungen im ursprünglichen Raum besitzen.

Übungen

Übung 4.4.15 (Eigentlichkeit ist lokal in der Basis). Seien $f : X \rightarrow Y$ stetig und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine offene Überdeckung von Y . Genau dann ist f eigentlich, wenn die induzierten Abbildungen $f^{-1}(U) \rightarrow U$ eigentlich sind für alle $U \in \mathcal{U}$.

Übung 4.4.16 (Permanenzeigenschaften eigentlicher Abbildungen). Die Verknüpfung eigentlicher Abbildungen ist eigentlich. Eine Einbettung ist eigentlich genau dann, wenn sie abgeschlossen ist. Ist $g \circ f$ eigentlich und f surjektiv, so ist auch g eigentlich. Landet g in einem Punkt, so spezialisiert die letzte Behauptung zur Aussage, daß stetige Bilder von Kompakta stets kompakt sind.

Ergänzende Übung 4.4.17 (Eigentlichkeit ist stabil unter Basiswechsel). Leser, die bereits mit Faserprodukten 6.2.8 vertraut sind, werden leicht zeigen können, daß gegeben eine eigentliche Abbildung $X \rightarrow Y$ und eine beliebige stetige Abbildung $Z \rightarrow Y$ auch die erweiterte Abbildung $X \times_Y Z \rightarrow Z$ eigentlich ist. Insbesondere bedeutet das im Fall von einpunktigem Z , daß alle Fasern einer eigentlichen Abbildung kompakt sind, und im Fall einer kompakten Teilmenge $K \subset Y$ ergibt sich mit 4.4.16 und 4.4.4, daß die Urbilder von Kompakta unter eigentlichen Abbildungen kompakt sind.

Übung 4.4.18. Sind $X \rightarrow Y$ und $X' \rightarrow Y$ eigentlich, so auch $(X \sqcup X') \rightarrow Y$. Ist insbesondere $Z \rightarrow Y$ stetig und sind Teilräume $X, X' \subset Z$ gegeben mit $X \rightarrow Y$ und $X' \rightarrow Y$ eigentlich, so ist auch $(X \cup X') \rightarrow Y$ eigentlich mit der vorhergehenden Übung 4.4.16.

Übung 4.4.19. Gegeben eine kompakte Hausdorff'sche Gruppe enthält jede Umgebung des neutralen Elements eine unter Konjugation stabile offene Umgebung des neutralen Elements.

Weiterführende Übung 4.4.20. Ist G eine topologische Gruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe, so ist die Multiplikation $G \times K \rightarrow G$ eigentlich. Hinweis: 4.4.17. Ist G eine topologische Gruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe, so ist die Projektion $G \rightarrow G/K$ eigentlich. Hinweis: Man verwende das kartesische Diagramm zum Quotienten 6.2.15 und die Erkenntnis, daß Quotienten nach 4.2.4 produktfest final sind.

Weiterführende Übung 4.4.21. Seien G eine Hausdorffgruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe. So besitzt jeder Punkt $x \in G/K$ eine offene Umgebung U mit der Eigenschaft, daß für $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\gamma(U) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \gamma(x) = x \text{ und } \gamma(U) = U.$$

Hinweis: Die Untergruppe Γ ist abgeschlossen nach 4.1.25 und für jede Teilmenge $A \subset \Gamma$ ist dann $AK \triangleleft G$ abgeschlossen in G nach 4.4.20.

Übung 4.4.22. Die Quotientenabbildung für die Operation einer endlichen Gruppe auf einem topologischen Raum ist stets eigentlich. Hinweis: Quotienten nach Gruppenoperationen sind produktfest final nach 4.2.4.

Übung 4.4.23. Ist $X \rightarrow Y$ eine eigentliche äquivariante Abbildung von Räumen mit einer Operation einer Gruppe G durch stetige Abbildungen, so ist auch die auf den Bahnräumen induzierte Abbildung $X/G \rightarrow Y/G$ eigentlich. Hinweis: Quotientenabbildungen sind produktfest final.

Übung 4.4.24. Es operiere eine topologische Gruppe G auf einem Raum X und sei $P \subset G$ eine Untergruppe mit G/P kompakt. Man zeige, daß die Operation eine eigentliche Abbildung $G \times_P X \rightarrow X$ induziert. Hinweis: Man betrachte

$G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X$ mit $(g, x) \mapsto (g, gx)$. Ist weiter $A \overline{\cap} X$ abgeschlossen und P -stabil, so ist auch GA abgeschlossen in X . Hinweis: $G \times_P A \rightarrow G \times_P X$ ist eine abgeschlossene Einbettung. Diese Übung verallgemeinert unsere Erkenntnis 4.4.7, daß Operationen kompakter Gruppen stets eigentlich sind.

Übung 4.4.25 (Bruhatzellen sind offen in ihrem Abschluß). Wir betrachten $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und betrachten in $G := \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen B . Wir wollen zeigen, daß jede Doppelnebenklasse BwB offen in ihrem Abschluß ist. Dazu zeige man der Reihe nach: (1) Ist s die Permutationsmatrix einer Permutation mit nur einem Fehlstand, so ist $P_s := B \sqcup BsB$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ aus „Block-oberen Dreiecksmatrizen mit einem (2×2) -Block und sonst nur (1×1) -Blöcken. (2) Die Quotienten P_s/B sind homöomorph zu $\mathbb{P}^1 \mathbb{K}$ und insbesondere kompakt. (3) Alle Produkte der Gestalt $P_r P_s \dots P_t$ sind abgeschlossen in G wegen 4.4.24. (4) Ist die Zahl $l(x)$ der Fehlstände eines Produkts $x = rs \dots t$ die Zahl seiner Faktoren, so ist das Produkt $P_r P_s \dots P_t$ nach ?? die Vereinigung der Doppelnebenklasse $Brs \dots tB$ mit Doppelnebenklassen BxB für $l(x) < l(rs \dots t)$. Im übrigen zeigen wir für Bahnen von „algebraischen Gruppen auf algebraischen Varietäten“ in ?? in voller Allgemeinheit, daß sie offen sind in ihrem Abschluß und das sogar in Bezug auf die „Zariski-Topologie“.

Übung 4.4.26. Eine stetige Abbildung ist separiert genau dann, wenn alle ihre Fasern relativ Hausdorff sind im Sinne von 4.4.14. Jede Verknüpfung separierter Abbildungen ist separiert. Das Urbild einer relativ Hausdorff’schen Teilmenge unter einer separierten Abbildung ist wieder relativ Hausdorff’sch.

Übung 4.4.27. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine relativ Hausdorff’sche Teilmenge. Gegeben zwei zueinander disjunkte Kompakta $K, L \subset Y$ gibt es dann disjunkte offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $K \subset U$ und $L \subset V$.

Übung 4.4.28. Ist $f : X \rightarrow Y$ eigentlich und separiert und $i : A \hookrightarrow X$ eine Einbettung derart, daß $f \circ i$ eigentlich ist, so muß i eine abgeschlossene Einbettung sein. Hinweis: 4.4.11 und 4.4.16.

5 Homotopie und Fundamentalgruppe

5.1 Einführung in die algebraische Topologie

5.1.1. Ich erinnere an den vertrauten Begriff der Stetigkeit von Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen. Weiter bezeichne $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Skalarprodukt-norm, $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, und

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

die n -dimensionale **Kugelschale** oder n -**Sphäre**. Es ist also $S^{-1} = \emptyset$, $S^0 = \{+1, -1\}$, S^1 die Kreislinie, S^2 die Kugelschale und so weiter. Zur Motivation liste ich nun einige typische Probleme der Topologie auf.

1. Man zeige, daß es für $n \geq 0$ keine stetige Injektion $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ der n -dimensionalen Kugelschale in die n -dimensionale Ebene gibt. Als Übung empfehlen sich die Fälle $n = 0, 1$. Der Fall $n = 2$ wird in 5.9.10 erledigt, der allgemeine Fall ergibt sich als Konsequenz aus ??.
2. „Ein Igel läßt sich nicht kämmen ohne Wirbel“. In Formeln zeige man: Es gibt keine stetige Abbildung $\kappa : S^2 \rightarrow S^2$ derart, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2$. Wir zeigen das in 5.4.4.
3. Es bezeichne stets $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ die n -**dimensionale Vollkugel**. Es ist also D^0 ein Punkt, $D^1 = [-1, +1]$ ein kompaktes Intervall, D^2 die abgeschlossene Kreisscheibe und so weiter. Man zeige, daß jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ von einer abgeschlossenen Vollkugel in sich selber einen Fixpunkt hat. Diese Aussage heißt der **Brouwer'sche Fixpunktsatz**. Als Übung empfehlen sich wieder die Fälle $n = 0, 1$. Der Fall $n = 2$ wird in 5.4.3 behandelt, der allgemeine Fall in ??.

5.1.2. Gegeben Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ heißt eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt ein **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv ist und ihre Inverse $f^{-1} : B \rightarrow A$ auch stetig ist. Des weiteren heißen A und B **homöomorph**, wenn es einen Homöomorphismus von A nach B gibt. Wir schreiben kurz $A \cong B$ für die Aussage „ A ist homöomorph zu B “. Anschaulich bedeutet $A \cong B$, daß sich A durch „Verbeulen und Verbiegen“ aus B erhalten läßt. Zum Beispiel sind je zwei offene Intervalle in \mathbb{R} homöomorph, und „Die Oberfläche einer Kaffeetasse mit einem Henkel ist homöomorph zur Oberfläche eines Rettungsrings“. Man bezeichnet die Topologie deshalb auch scherzhaft als „Gummigeometrie“. Zur weiteren Motivation liste ich auch noch einige typische Probleme im Zusammenhang mit dem Homöomorphiebegriff auf.

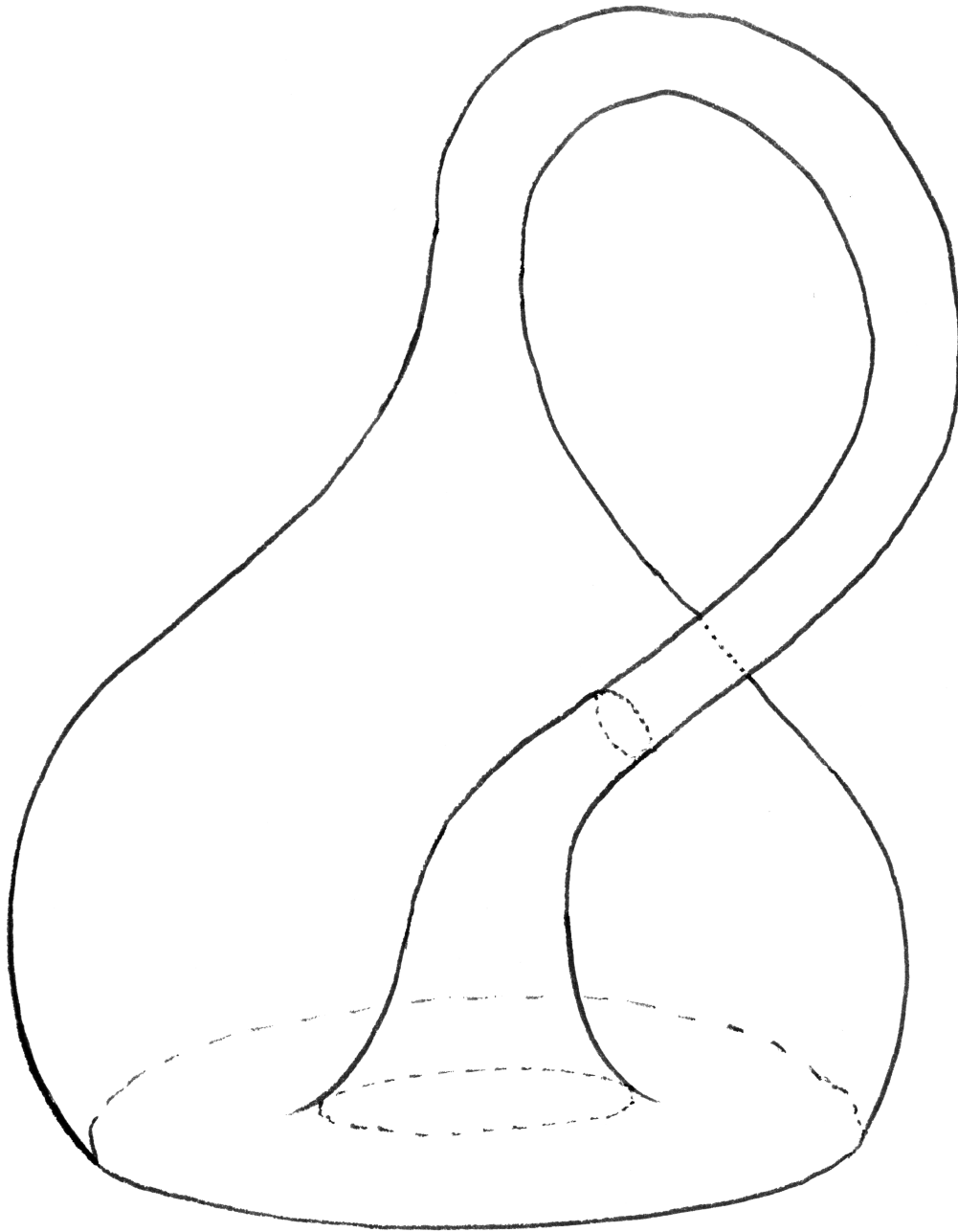
1. **Invarianz der Dimension:** Man zeige, daß für natürliche Zahlen $n, m \geq 0$ gilt $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Rightarrow n = m$. In Worten sind also endlichdimensionale reelle Räume verschiedener Dimension, wenn man sie mit ihrer natürlichen Topologie versieht, auch nicht homöomorph.
2. Man zeige, daß der Rettungsring, auch genannt der zweidimensionale **Torus** $S^1 \times S^1$, nicht homöomorph ist zur 2-Sphäre S^2 .
3. Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge der Ebene, die homöomorph ist zur Kreislinie, $S \cong S^1$. Man zeige, daß auch das Komplement von S homöomorph ist zum Komplement der Kreislinie, $\mathbb{R}^2 \setminus S \cong \mathbb{R}^2 \setminus S^1$. Der Beweis dieser Aussage gelingt erst unter Zuhilfenahme von Methoden der Analysis. Man kann sie etwa aus ?? zusammen mit ?? und dem „kleinen“ Riemann'schen Abbildungssatz ?? der Funktionentheorie recht leicht folgern.

Ergänzung 5.1.3. Man kann für $S \subset \mathbb{R}^2$ homöomorph zur Kreislinie sogar zeigen, daß es einen Homöomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ gibt mit $f(S^1) = S$, aber den Beweis dieses **Satzes von Schönflies** werden wir nicht behandeln. Im übrigen erweisen sich die höherdimensionalen Analoga der Aussagen des letzten Punktes der vorangehenden Aufzählung sämtlich als falsch: Zum Beispiel ist die sogenannte **gehörnte Sphäre von Alexander** eine zur Kugelschale S^2 homöomorphe Teilmenge des Raums \mathbb{R}^3 , bei der eine Zusammenhangskomponente des Komplements noch nicht einmal schleifenfüllend ist.

5.1.4. In mathematisch nicht ganz so präziser Formulierung will ich auch noch die Klassifikation zusammenhängender geschlossener Flächen besprechen. Ich gebe zunächst eine Definition, die etwas unbeholfen ist, da sie die Sprache der Topologie noch weitgehend vermeidet.

Definition 5.1.5. Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine **geschlossene topologische in \mathbb{R}^n eingebettete d -Mannigfaltigkeit** genau dann, wenn F kompakt ist und es für jeden Punkt $p \in F$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $p \in U$ und $U \cap F \cong \mathbb{R}^d$.

5.1.6. Beispiele für geschlossene d -Mannigfaltigkeiten sind die Sphären S^d . Wir zeigen in 3.8.2, daß jede geschlossene 1-Mannigfaltigkeit homöomorph ist zu einer endlichen disjunkten Vereinigung von Kopien von S^1 . Eine geschlossene 2-Mannigfaltigkeit nennen wir auch eine **geschlossene Fläche**. Beispiele für geschlossene Flächen sind die Kugelschale S^2 , der Torus $S^1 \times S^1$, oder auch die Oberfläche einer massiven Acht, die homöomorph ist zur Oberfläche einer dickwandigen Suppentasse mit zwei Henkeln. Ein etwas komplizierteres Beispiel für eine geschlossene Fläche ist die sogenannte **Klein'sche Flasche**, die man erhält, indem man bei einer Flasche den Flaschenhals langzieht, umbiegt, ihn von aussen



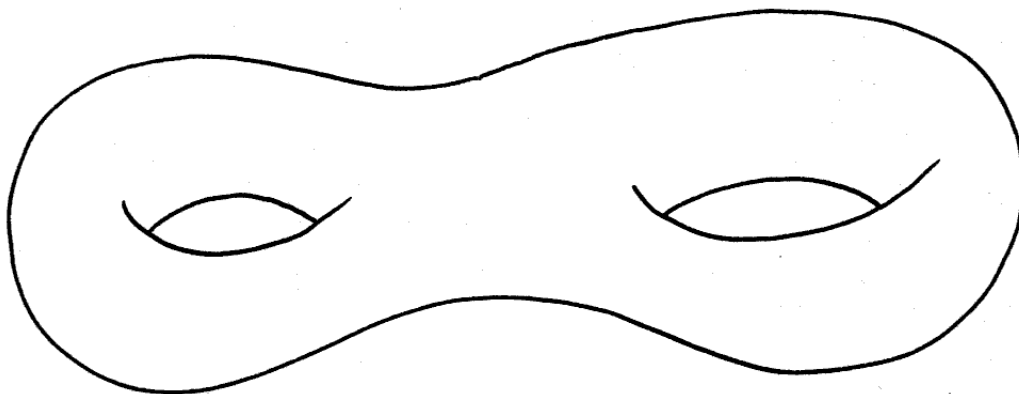
Die Klein'sche Flasche

unter Durchdringung der Flaschenwand ins Innere der Flasche schiebt, dann ein kreisrundes Loch in den Boden der Flasche schneidet, und schließlich die Flaschenöffnung in das Loch unten am Boden einklebt. Genauer erhält man so in der Anschauung noch keine geschlossene Fläche in unserem Sinne, da sich unsere Fläche selbst überschneidet an der Stelle, an der der Flaschenhals in die Flasche eindringt. In der vierten Dimension jedoch kann man diese Selbstüberschneidung vermeiden. Stellen wir uns dazu die vierte Koordinate als Farbe vor und malen unsere Flasche changierend so an, daß der Flaschenhals und der Flaschenboden rot, der Flaschenkörper aber blau sind. Dann ist klar, daß unsere Fläche ohne Selbstüberschneidung im vierdimensionalen Raum liegt, und das ist dann wirklich unsere Klein'sche Flasche. Die Klein'sche Flasche ist nicht homöomorph zu einer Teilmenge des \mathbb{R}^3 , wie wir in ?? beweisen werden. Im folgenden Satz brauchen wir noch das berühmte Möbiusband, das man erhält, wenn man einen Papierstreifen einmal verdrillt zu einem Ring verklebt. Der Rand des Möbiusbandes ist eine einzige geschlossene Kreislinie.

Satz 5.1.7 (Klassifikation der geschlossenen Flächen). *Jede zusammenhängende geschlossene Fläche ist homöomorph zu genau einer der im folgenden beschriebenen Flächen:*

- *Man nehme die Kugelschale S^2 , schneide in diese $2g$ kreisrunde Löcher hinein und verbinde diese Löcher paarweise durch g hohle Henkel. Für $g = 0, 1, 2, \dots$ liefert das jeweils eine Fläche, die **orientierbare Fläche vom Geschlecht g** ;*
- *Man nehme die Kugelschale S^2 , schneide in diese g kreisrunde Löcher hinein und klebe Möbiusbänder in diese Löcher ein. Für $g = 1, 2, \dots$ liefert das jeweils eine Fläche, die **nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht g** .*

5.1.8. Die orientierbaren Flächen vom Geschlecht $g = 0, 1, 2$ sind die Kugelschale, der Torus und die Oberfläche einer Kaffeetasse mit zwei Henkeln oder auch eines Abseilachters, wie ihn Bergsteiger verwenden. Die nichtorientierbaren Flächen vom Geschlecht $g = 1, 2$ sind die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ aus 4.3 und die Klein'sche Flasche. Die nicht orientierbaren Flächen zeichnen sich dadurch aus, daß man bei einem Rundweg als Spaziergänger auf der Fläche unter Umständen „mit dem Kopf nach unten“ wieder am Ausgangspunkt ankommt. Statt des Einklebens von Möbiusbändern mag man sich gleichbedeutend auch das Ankleben sogenannter „Kreuzhauben“ vorstellen, wie sie auf Seite 177 vorgestellt werden. Zum Nachdenken hier noch eine Frage: Welche Fläche unserer Liste erhält man, wenn man an die Klein'sche Flasche einen Henkel anklebt? Die Antwort liefert die „Henkelelimination“ im Beweis des Klassifikationssatzes 6.8.11: Wir erhalten die nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht 4. Jetzt gilt es aber zunächst, einen



Eine orientierbare kompakte Fläche vom Geschlecht zwei

präzisen und effektiven Begriffsapparat für die Behandlung derartiger Fragestellungen aufzubauen.

Übungen

Übung 5.1.9. Läßt man aus der Kugelschale S^n für $n \geq 0$ einen Punkt weg, so entsteht ein zu \mathbb{R}^n homöomorpher Raum. Hinweis: Stereographische Projektion.

5.2 Definition der Fundamentalgruppe

5.2.1. Ich erinnere daran, daß wir einen Weg in einem topologischen Raum in ?? definiert hatten als eine stetige Abbildung eines mehrpunktigen kompakten reellen Intervalls in besagten Raum. Ist unser Intervall das Einheitsintervall $[0, 1]$, so reden wir von einem **normierten Weg** oder einfach von einem **Weg** in der Hoffnung, daß aus dem Kontext heraus klar wird, was gemeint ist.

Definition 5.2.2. Seien X ein topologischer Raum und $x, y \in X$ Punkte. Die Menge aller normierten Wege von x nach y bezeichnen wir mit

$$\Omega(X, x, y) := \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \mid \alpha \text{ ist stetig, } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

Für zwei Wege $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ und $\gamma \in \Omega(X, y, z)$, von denen der eine da aufhört wo der andere anfängt, erklären wir ihre **Verknüpfung** oder auch **Aneinanderhängung** $\gamma * \alpha \in \Omega(X, x, z)$ durch

$$(\gamma * \alpha)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2; \\ \gamma(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

5.2.3. Die Abbildung $\gamma * \alpha$ ist stetig nach 3.1.20, da es eine Überdeckung ihres Definitionsbereichs durch zwei abgeschlossene Mengen gibt derart, daß die Restriktion darauf jeweils stetig ist.

5.2.4. Anschaulich gesprochen entsteht der Weg $\gamma * \alpha$ dadurch, daß wir erst den Weg α und dann den Weg γ jeweils mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen, so daß wir insgesamt wieder einen normierten alias durch das Einheitsintervall parametrisierten Weg erhalten.

5.2.5. Sei X ein topologischer Raum. Wir erklären für $x \in X$ den **konstanten Weg** $\varepsilon_x \in \Omega(X, x, x)$ durch $\varepsilon_x(t) = x \forall t \in [0, 1]$. Wir erklären zu jedem Weg $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ den **umgekehrten Weg** $\bar{\alpha} \in \Omega(X, y, x)$ durch die Vorschrift $\bar{\alpha}(t) := \alpha(1 - t)$. Ein Weg, bei dem Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, heißt **geschlossen**.

Definition 5.2.6. Seien x, y Punkte eines topologischen Raums X . Zwei Wege α, β von x nach y heißen **homotop** oder präziser **homotop mit festen Randpunkten** und wir schreiben $\alpha \simeq \beta$, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- beziehungsweise Oberkante unseres Quadrats mit α beziehungsweise β übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also $h(t, 0) = \alpha(t)$ und $h(t, 1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sowie $h(0, \tau) = x$ und $h(1, \tau) = y$ für alle $\tau \in [0, 1]$. Wir schreiben unter diesen Umständen auch kurz

$$h : \alpha \simeq \beta$$

Definition 5.2.7. Ein geschlossener Weg heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg.

5.2.8. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie von Wegen dahingehend interpretieren, daß es eine durch $\tau \in [0, 1]$ parametrisierte Familie h_τ von normierten Wegen von x nach y geben soll derart, daß gilt $h_0 = \alpha$, $h_1 = \beta$ und daß unsere Familie stetig von τ abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung $[0, 1]^2 \rightarrow X$, $(t, \tau) \mapsto h_\tau(t)$ stetig ist.

Beispiel 5.2.9 (Konvexität impliziert Homotopie von Wegen). Gegeben $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $x, y \in X$ sind je zwei Wege $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$ homotop mittels $h(t, \tau) = (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$.

Beispiel 5.2.10 (Bilder homotoper Wege sind homotop). Ist genauer eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig, so folgt aus $h : \alpha \simeq \beta$ schon $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$.

Beispiel 5.2.11 (Umparametrisierungen liefern homotope Wege). Ein Weg ist homotop zu jeder seiner Umparametrisierungen. Ist genauer $v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $v(0) = 0$ und $v(1) = 1$ und ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg, so folgt $\gamma \simeq \gamma \circ v$. In der Tat finden wir erst $\text{id} \simeq v$ mit 5.2.9, da das eben beides Wege in der konvexen Teilmenge $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ sind, und dann $\gamma \circ \text{id} \simeq \gamma \circ v$, da nach 5.2.10 Bilder homotoper Wege homotop sind.

Lemma 5.2.12 (Homotopie ist eine Äquivalenzrelation). Für jeden topologischen Raum X und beliebige Punkte $x, y \in X$ ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\Omega(X, x, y)$ aller Wege von x nach y .

Beweis. Wir müssen zeigen, daß gilt erstens $\alpha \simeq \alpha$, zweitens $\alpha \simeq \beta \Rightarrow \beta \simeq \alpha$, und daß drittens aus $\alpha \simeq \beta$ und $\beta \simeq \gamma$ folgt $\alpha \simeq \gamma$. Wir überlassen dem Leser

den Beweis der beiden ersten Aussagen und zeigen nur die letzte Aussage. Seien also $h : \alpha \simeq \beta$ und $g : \beta \simeq \gamma$ Homotopien. Wir definieren $f : [0, 1]^2 \rightarrow X$ durch

$$f(t, \tau) = \begin{cases} h(t, 2\tau) & 0 \leq \tau \leq 1/2; \\ g(t, 2\tau - 1) & 1/2 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist in der Tat die Abbildung f stetig, denn ihre Restriktionen auf die abgeschlossenen Teilmengen $[0, 1] \times [0, 1/2]$ und $[0, 1] \times [1/2, 1]$ des Einheitsquadrats sind es und wir können 3.1.20 anwenden. Nach Konstruktion ist aber nun f eine Homotopie $f : \alpha \simeq \gamma$. \square

Definition 5.2.13. Äquivalenzklassen von Wegen unter der Äquivalenzrelation der Homotopie nennen wir **Homotopieklassen von Wegen**. Die Menge aller Homotopieklassen von Wegen von einem Punkt x zu einem Punkt y in einem Raum X notieren wir $\pi_1(X, x, y)$. In Formeln setzen wir also

$$\pi_1(X, x, y) := \Omega(X, x, y) / \simeq$$

Die Homotopieklasse eines Weges α notieren wir $[\alpha]$.

Definition 5.2.14. Ein **bepunkteter Raum** (X, x) ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten Punkt $x \in X$, seinem **Basispunkt**. Für einen bepunkteten Raum (X, x) vereinbaren wir die Abkürzungen $\Omega(X, x) := \Omega(X, x, x)$ für die Menge aller Wege mit unserem ausgezeichneten Punkt x als Anfangs- und Endpunkt sowie $\pi_1(X, x) := \pi_1(X, x, x)$ für die Menge aller Homotopieklassen derartiger Wege.

5.2.15 (Diskussion der Terminologie). In der Literatur nennt man einen bepunkteten Raum auch häufig einen „punktierten Raum“. Ich ziehe es vor, von einem bepunkteten Raum zu reden, da man wieder an anderer Stelle unter einer „punktierten Ebene“ oder einer „punktierten Kreisscheibe“ für gewöhnlich das Komplement eines Punktes in der Ebene oder das Komplement des Ursprungs in der Kreisscheibe versteht. Auf Englisch wird unterschieden zwischen „pointed space“ und „punctured plane“ oder auch „punctured disc“. Ich vermute sorglose Übersetzung als Grund für die unklare Terminologie im Deutschen.

Vorschau 5.2.16. Versehen wir die Menge $\Omega(X, x, y)$ mit der kompakt-offenen Topologie 3.9.1 und setzen $h(t, \tau) = h_\tau(t)$, so ist h nach dem Exponentialgesetz 3.9.9 stetig genau dann, wenn die Abbildung $[0, 1] \rightarrow \Omega(X, x, y)$, $\tau \mapsto h_\tau$ stetig ist. Mit dieser Topologie heißt $\Omega(X, x, y)$ ein **Wegeraum** und zwei Wege sind homotop genau dann, wenn sie zur selben Wegzusammenhangskomponente des Wegeraums gehören. Speziell heißt $\Omega(X, x)$ ein **Schleifenraum** und $\pi_1(X, x)$ ist die Menge der Wegzusammenhangskomponenten des Schleifenraums. Notieren wir $\pi_0(X)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen

Raums X , so haben wir demnach in Formeln $\pi_1(X, x) = \pi_0(\Omega(X, x))$ und Lemma 5.2.12 erweist sich als Spezialfall der allgemeinen Erkenntnis 3.3.14, daß auf jedem topologischen Raum die Wegverbindbarkeit eine Äquivalenzrelation ist.

Satz 5.2.17 (Fundamentalgruppe). *Gegeben ein bepunkteter Raum (X, x) induziert das Verknüpfen von Wegen eine Verknüpfung auf der Menge $\pi_1(X, x)$ aller Homotopieklassen von Wegen von x nach x und mit dieser Verknüpfung wird diese Menge eine Gruppe, die **Fundamentalgruppe unseres bepunkteten Raums***

$$\pi_1(X, x)$$

Beispiel 5.2.18. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge, so ist die Fundamentalgruppe von X nach 5.2.9 für jeden Basispunkt $x \in X$ trivial.

Beweis. Die beiden ersten Aussagen des anschließenden Lemmas 5.2.19 sagen uns, daß die Homotopieklassse der Verknüpfung von zwei Wegen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Wege abhängt. Die weiteren Aussagen liefern das neutrale Element, die Inversen und das Assoziativgesetz. \square

Lemma 5.2.19. *Wann immer die folgenden Verknüpfungen von Wegen in einem topologischen Raum X sinnvoll sind in dem Sinne, daß der eine aufhört wo der andere anfängt, gilt:*

1. $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta$
2. $\beta \simeq \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha * \beta'$
3. $\varepsilon * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * \varepsilon$
4. $\alpha * \bar{\alpha} \simeq \varepsilon, \bar{\alpha} * \alpha \simeq \varepsilon$
5. $\overline{(\alpha * \beta)} = \bar{\beta} * \bar{\alpha}$
6. $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$

Beweis. Wir zeigen nur beispielhaft die letzte Behauptung. Sicher gilt

$$\alpha * (\beta * \gamma) = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ v$$

für eine stetige Umparametrisierung alias eine stetige Abbildung $v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $v(0) = 0$ und $v(1) = 1$. Da nach 5.2.11 ein Weg homotop ist zu allen seinen derartigen Umparametrisierungen, folgt die Behauptung. \square

5.2.20. Ein topologischer Raum heißt **schleifenfüllend**, wenn jeder geschlossene Weg in unserem Raum zusammenziehbar ist. Er heißt **einfach wegzusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend und schleifenfüllend ist.

Satz 5.2.21 (Kriterium für schleifenfüllende Räume). *Kann ein topologischer Raum überdeckt werden durch zwei schleifenfüllende offene Teilmengen mit wegzusammenhängendem Schnitt, so ist er bereits selbst schleifenfüllend.*

Vorschau 5.2.22. Das Resultat wird sich später als ein Spezialfall des Satzes von Seifert-van Kampen 6.4.1 erweisen.

Beweis. Sei $X = U \cup V$ unser Raum mit seiner Überdeckung. Nach Übung 5.2.27 reicht es zu zeigen, daß $\pi_1(X, x)$ für $x \in U \cap V$ trivial ist. Sei dazu $\gamma \in \Omega(X, x)$ ein geschlossener Weg. Nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue 3.5.17 gibt es eine Unterteilung des Einheitsintervalls $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ derart, daß $[a_{i-1}, a_i]$ unter γ abwechselnd ganz in U oder ganz in V landet. Dann gilt $\gamma(a_i) \in U \cap V \forall i$ und wir finden für $0 < i < n$ Wege β_i , die in $U \cap V$ von x nach $\gamma(a_i)$ laufen. Bezeichnet andererseits $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow X$ den „auf dem Intervall $[a_{i-1}, a_i]$ reparametrisierten“ Weg $\gamma_i := \gamma \circ v_i$ für $v_i : [0, 1] \xrightarrow{\sim} [a_{i-1}, a_i]$ die Restriktion auf $[0, 1]$ der affinen Abbildung mit $v_i(0) = a_{i-1}$ und $v_i(1) = a_i$, so ist nach 5.2.11 unser Weg γ homotop zu $\gamma_n * \gamma_{n-1} * \dots * \gamma_2 * \gamma_1$, wobei es auf die Klammerung nach Lemma 5.2.19 nicht ankommt, da wir nur an „Wegen bis auf Homotopie“ interessiert sind. Nach Lemma 5.2.19 ist das nun weiter homotop zu

$$\gamma_n * (\beta_{n-1} * \bar{\beta}_{n-1}) * \gamma_{n-1} * (\beta_{n-2} * \bar{\beta}_{n-2}) * \dots * \gamma_2 * (\beta_1 * \bar{\beta}_1) * \gamma_1$$

und dann auch homotop zu

$$(\gamma_n * \beta_{n-1}) * (\bar{\beta}_{n-1} * \gamma_{n-1} * \beta_{n-2}) * \dots * (\bar{\beta}_2 * \gamma_2 * \beta_1) * (\bar{\beta}_1 * \gamma_1)$$

Da aber nach Annahme $\gamma_n * \beta_{n-1}$ beziehungsweise $\bar{\beta}_i * \gamma_i * \beta_{i-1}$ beziehungsweise $\bar{\beta}_1 * \gamma_1$ jeweils ein geschlossener Weg ist, der ganz in U oder ganz in V verläuft und somit homotop ist zum konstanten Weg ε_x nach Annahme, muß dann auch die ganze Verknüpfung homotop sein zum konstanten Weg ε_x . \square

Korollar 5.2.23. *Die Sphären S^n sind für $n \geq 2$ schleifenfüllend.*

5.2.24. Daß jeder Weg in einer n -Sphäre für $n \geq 2$, der nicht surjektiv ist, bereits zusammenziehbar sein muß, zeigt man leicht mit einer geeigneten stereographischen Projektion. Es gibt jedoch auch in höherdimensionalen Sphären surjektive Wege, die man etwa mit Hilfe der Hilbertkurve ?? konstruieren kann. Der Beweis gilt diesen Fällen.

Beweis. Entfernen wir für $n \geq 0$ aus S^n einen Punkt, so erhalten wir einen topologischen Raum, der homöomorph ist zu \mathbb{R}^n mittels einer stereographischen Projektion und der insbesondere schleifenfüllend ist. Nehmen wir U das Komplement eines Punktes und V das Komplement eines anderen Punktes, so ist $S^n = U \cup V$ eine offene Überdeckung. Ab $n \geq 2$ ist außerdem $U \cap V$ wegzusammenhängend, und dann greift unser Kriterium 5.2.21 für schleifenfüllende Räume. \square

Vorschau 5.2.25. Die **Poincaré-Vermutung** besagt, daß jede wegzusammenhängende schleifenfüllende topologische kompakte 3-Mannigfaltigkeit ohne Rand homöomorph ist zur dreidimensionalen Sphäre S^3 . Sie wurde 2002 mit analytischen Methoden von G. Perelman bewiesen.

5.2.26 (Funktorialität der Fundamentalgruppe). Sei $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ein **Morphismus bepunkteter Räume** alias eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = y$. So erhält man einen Homomorphismus der Fundamentalgruppen $\pi_1(f) = f_{\#}$ durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \pi_1(f) = f_{\#} : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, y) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da nach 5.2.10 Bilder homotoper Wege homotop sind. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, da stets gilt $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$. Offensichtlich haben wir $\text{id}_{\#} = \text{id}$ und $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$ wann immer $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ und $g : (Y, y) \rightarrow (Z, z)$ Morphismen bepunkteter Räume sind. In der Terminologie, die wir gleich in 5.6 besprechen, ist die Fundamentalgruppe demnach ein „Funktorkonstrukt von der Kategorie der bepunkteten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen“.

Übungen

Übung 5.2.27. Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist genau dann schleifenfüllend, wenn seine Fundamentalgruppe in Bezug auf einen und gleichbedeutend jeden Basispunkt trivial ist.

Übung 5.2.28 (Komplemente von Geradenstücken im Raum). Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und eine echte Teilmenge eines Untervektorraums der Kodimension Zwei. So ist die Fundamentalgruppe des Komplements von I trivial, in Formeln $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus I, p) = 1$ für jeden Punkt p des Komplements. Ein Argument, das ohne die Bedingung I abgeschlossen auskommt, findet man in 5.7.12. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\emptyset \neq I \subsetneq 0 \times \mathbb{R}^{n-2}$. Jetzt lasse man die Sonne aus der Richtung der positiven ersten Koordinatenachse leuchten und betrachte die Menge U_+ aller Punkte, die nicht auf I oder im Schatten von I liegen, also

$$U_+ := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \leq 0 \Rightarrow (0, x_2, x_3, \dots, x_n) \notin I\}$$

Ähnlich erkläre man U_- durch Beleuchtung aus der Richtung der negativen ersten Koordinatenachse. So erhalten wir eine Überdeckung unseres Komplements durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen mit wegzusammenhängendem Schnitt.

Übung 5.2.29. Sei G ein topologischer Raum mit einer stetigen Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ und sei $e \in G$ ein neutrales Element. Man zeige, daß unter diesen Annahmen die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ kommutativ ist.

Ergänzende Übung 5.2.30 (Endlich erzeugte Fundamentalgruppen). Man zeige: Die Fundamentalgruppe einer bepunkteten kompakten Mannigfaltigkeit ist stets endlich erzeugt. Hinweis: Bezeichne $B = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1\}$ den 1-Ball um den Ursprung und $\bar{B} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ seinen Abschluß. Für unsere Mannigfaltigkeit X wähle man stetige Karten $\varphi_1, \dots, \varphi_r : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ derart, daß die $\varphi_i(B)$ schon X überdecken. Für jedes Paar von Indizes i, j mit $i \neq j$ wähle man eine endliche Überdeckung des Schnitts $\varphi_i(\bar{B}) \cap \varphi_j(\bar{B})$ durch zusammenhängende offene Teilmengen U_{ij}^ν von $\varphi_i(\mathbb{R}^n) \cap \varphi_j(\mathbb{R}^n)$. Für jedes ν wähle man einen Weg γ_{ij}^ν von $\varphi_j(0)$ nach $\varphi_i(0)$, der erst innerhalb von $\varphi_j(\mathbb{R}^n)$ nach U_{ij}^ν läuft und dann innerhalb von $\varphi_i(\mathbb{R}^n)$ nach $\varphi_i(0)$. Seien β_i Wege von $p := \varphi_1(0)$ nach $\varphi_i(0)$ mit der einzigen Einschränkung, daß β_1 der konstante Weg sein soll. So erzeugen die Verknüpfungen $\bar{\beta}_i * \gamma_{ij}^\nu * \beta_j$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, p)$.

Ergänzende Übung 5.2.31 (Abzählbare Fundamentalgruppen). Man zeige: Die Fundamentalgruppe einer bepunkteten abzählbar basierten Mannigfaltigkeit ist stets abzählbar. Hinweis: Man orientiere sich an den Hinweisen zur vorhergehenden Übung 5.2.30.

5.3 Fundamentalgruppe der Kreislinie

Satz 5.3.1 (Fundamentalgruppe der Kreislinie). Die Fundamentalgruppe der Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist isomorph zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen. Genauer ist die Abbildung, die jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Homotopieklasse des Weges $[0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi int)$ zuordnet, ein Isomorphismus

$$\begin{aligned} \text{wind} : \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1) \\ n &\mapsto [t \mapsto \exp(2\pi int)] \end{aligned}$$

5.3.2. Unter der **Umlaufzahl** eines Weges $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$ versteht man das Urbild seiner Homotopieklasse $[\gamma]$ unter diesem Isomorphismus. In anderen Worten ist also die Umlaufzahl von γ diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ homotop ist zum Weg $t \mapsto \exp(2\pi int)$.

Ergänzung 5.3.3. Arbeiten wir mit einem Körper \mathbb{C} von vergesslichen komplexen Zahlen im Sinne von [LA1] ??, so liefert uns die obige Konstruktion einen kanonischen Isomorphismus $2\pi i\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1)$, der jedem $a \in \ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$ eben den normierten Weg $t \mapsto \exp(ta)$ zuordnet. Man notiert diese Gruppe auch $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(1) := \ker(\exp)$ und nennt sie den **Tate-Twist von \mathbb{Z}** .

Beweis. Zur Vereinfachung betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Exp} : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

Mit der Euler'schen Formel können wir auch schreiben $\text{Exp}(t) = \exp(2\pi it)$. Das erklärt erstens unsere Notation und zweitens sieht man so leichter, daß Exp ein Gruppenhomomorphismus ist von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen der Länge 1. Anschaulich wickelt Exp die reelle Gerade auf die Kreislinie auf und aufgrund des Faktors 2π haben wir $\text{Exp}^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. In dieser Notation erhält die Abbildungsvorschrift aus unserem Satz die Gestalt

$$\text{wind} : n \mapsto [t \mapsto \text{Exp}(nt)]$$

Als erstes zeigen wir nun, daß sie einen Gruppenhomomorphismus definiert. Gegeben $m, n \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $(m + n \cdot)$ den normierten Weg $t \mapsto m + nt$ aus $\Omega(\mathbb{R}, m, m + n)$. Da je zwei Wege in \mathbb{R} mit denselben Endpunkten homotop sind, haben wir

$$(n + m \cdot) * (n \cdot) \simeq ((m + n) \cdot)$$

Diese Homotopie bleibt bestehen, wenn wir beide Seiten mit Exp verknüpfen. Dies Exp dürfen wir dann auf die beiden Faktoren des $*$ -Produkts verteilen und wegen $\text{Exp} \circ (n + m \cdot) = \text{Exp} \circ (m \cdot)$ erkennen wir, daß unsere Abbildungsvorschrift $\text{wind} : n \mapsto [\text{Exp} \circ (n \cdot)]$ in der Tat einen Gruppenhomomorphismus liefert. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, konstruieren wir eine inverse Abbildung. Der erste Schritt dazu ist die folgende Definition.

Definition 5.3.4. Gegeben Y ein topologischer Raum und $f : Y \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung heißt eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{Exp} \circ \tilde{f} = f$ ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von f .

Lemma 5.3.5 (Eindeutigkeit von Lifts). Seien Y zusammenhängend, $f : Y \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung und $\tilde{f}, \hat{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lifts von f . So gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{f}(y) = \tilde{f}(y) + k$ für alle $y \in Y$.

Beweis. Sicher gilt $\text{Exp}(\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)) = 1$, also $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y) \in \mathbb{Z}$ für alle $y \in Y$. Ist nun Y zusammenhängend, so muß $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)$ nach 3.3.8 konstant sein. \square

Lemma 5.3.6. Jede stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ besitzt einen Lift.

Beweis. Unser Exp liefert Homöomorphismen $\text{Exp}_x : (x, x + 1) \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus \text{Exp}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, siehe Übung 3.5.21. Ist also f nicht surjektiv, liegt sagen wir $\text{Exp}(x)$ nicht in seinem Bild, so ist $\text{Exp}_x^{-1} \circ f = \tilde{f}$ ein Lift und wir sind fertig. Weil nun f gleichmäßig stetig ist, finden wir $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = 1$ derart, daß f auf allen Teilintervallen $[a_{i-1}, a_i]$ nicht surjektiv ist. Wir wählen nun

Lifts \tilde{f}_i von $f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ für $i = 1, \dots, k$ und können diese Lifts durch Addition von Elementen von \mathbb{Z} so abändern, daß stets gilt $\tilde{f}_i(a_i) = \tilde{f}_{i+1}(a_i)$. Dann erklären wir \tilde{f} durch $\tilde{f}|_{[a_i, a_{i+1}]} = \tilde{f}_i$ und sind fertig. \square

Lemma 5.3.7. *Jede stetige Abbildung $f : [0, 1]^2 \rightarrow S^1$ besitzt einen Lift.*

Beweis. Wir zerlegen zunächst unser Quadrat $[0, 1]^2$ in so kleine Schachfelder, daß das Bild keines unserer Felder ganz S^1 ist. Die Einschränkung von f auf jedes dieser Felder läßt sich wie im Beweis zuvor leicht liften. Als nächstes konzentrieren wir uns auf eine Zeile von Schachfeldern und ändern in dieser Zeile unsere Lifts so um Konstanten aus \mathbb{Z} ab, daß sie auf dem Schnitt benachbarter Felder zusammenpassen. So erhalten wir einen Lift auf der ganzen Zeile. Das machen wir für jede Zeile, passen dann diese Lifts wieder aneinander an, und erhalten so schließlich einen Lift auf unserem ganzen Quadrat. \square

5.3.8. Gegeben $x \in S^1$ und einen geschlossenen Weg $\alpha \in \Omega(S^1, x)$ erklären wir seine **Ganghöhe** $\text{gh}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ durch

$$\text{gh}(\alpha) := \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)$$

für einen und jeden Lift $\tilde{\alpha}$ von α . Am Ende des Beweises werden wir sehen, daß die Ganghöhe mit der Umlaufzahl übereinstimmt.

Proposition 5.3.9. *Geschlossene Wege in der Kreislinie sind homotop genau dann, wenn sie dieselbe Ganghöhe haben. In Formeln gilt für Wege $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ also*

$$\alpha \simeq \beta \Leftrightarrow \text{gh}(\alpha) = \text{gh}(\beta)$$

Beweis. \Rightarrow) Zu jeder Homotopie $h : \alpha \simeq \beta$ finden wir mit Lemma 5.3.7 einen Lift \tilde{h} . Sicher ist \tilde{h} auf der Unterkante des Einheitsquadrats ein Lift $\tilde{\alpha}$ von α und auf der Oberkante ein Lift $\tilde{\beta}$ von β . Weiter muß \tilde{h} auf der Vorder- und Hinterkante wie h selbst konstant sein. Insbesondere haben wir $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ und $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ und damit folgt $\text{gh}(\alpha) = \text{gh}(\beta)$.

\Leftarrow) Die Gleichheit der Ganghöhen $\text{gh}(\alpha) = \text{gh}(\beta)$ bedeutet, daß je zwei Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ von α und β mit demselben Anfangspunkt auch denselben Endpunkt haben. Als Wege in \mathbb{R} mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt sind dann aber besagte Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ homotop nach 5.2.9. Da Bilder homotoper Wege homotop sind nach 5.2.10, folgt $\alpha \simeq \beta$. \square

Unsere Ganghöhe $\text{gh} : \Omega(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ induziert nach der vorhergehenden Proposition 5.3.9 eine wohlbestimmte injektive Abbildung

$$\text{gh} : \pi_1(S^1, 1) \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

Es reicht zu zeigen, daß sie linksinvers ist zur Abbildung aus unserem Satz, in Formeln $\text{gh} \circ \text{wind} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Das prüft man ohne Schwierigkeiten. \square

5.3.10 (Fundamentalgruppe der punktierten Ebene). Geht man alle Argumente dieses Abschnitts noch einmal durch, so sieht man, daß wir überall statt S^1 genausogut \mathbb{C}^\times hätten schreiben können, wenn wir statt $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ eben $\text{Exp} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ betrachten. Wieder besitzt jeder Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ einen Lift, der bis auf eine additive Konstante $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt ist, und wieder erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \\ n &\mapsto [t \mapsto \exp(2\pi i n t)] \end{aligned}$$

und dessen Inverses wird durch die Ganghöhe gegeben. In 7.1.1 folgende werden wir sogenannte „Überlagerungen“ betrachten, denen sich diese beiden Situationen als Spezialfälle unterordnen.

Beispiel 5.3.11 (Unmöglichkeit komplexer Wurzelfunktionen). Mit den hier entwickelten Hilfsmitteln können wir sehr schnell sehen, daß es keine stetige Abbildung $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $q \circ w = \text{id}$ für $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ das Quadrieren. In der Tat gälte ja $q_\# \circ w_\# = \text{id}$ auf $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ und diese Gruppe ist isomorph zu \mathbb{Z} und wir haben $q_\#(c) = c^2$, wie Sie sich gleich in 5.3.13 überlegen dürfen. Es gibt jedoch, jetzt in additiver Notation, keine Abbildung $w_\# : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $2w_\#(n) = n \forall n \in \mathbb{Z}$.

Übungen

Übung 5.3.12. Sei (X, x) ein bepunkteter Raum. Ist $\alpha \in \Omega(X, x)$ ein geschlossener Weg, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$ mit $\alpha = \hat{\alpha} \circ \text{Exp}$, und die Verknüpfung von $\hat{\alpha}_\# : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(X, x)$ mit dem Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1)$ aus unserem Satz 5.3.1 wird gegeben durch $n \mapsto [\alpha]^n$.

Übung 5.3.13. Die Abbildung $[n] : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ induziert auf der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 1)$ die Abbildung $[n]_\# : c \mapsto c^n$ in multiplikativer Schreibweise, also $[n]_\# : c \mapsto nc$ in additiver Schreibweise.

Übung 5.3.14. Ist Y ein kartesisches Produkt von endlich vielen reellen Intervallen, so besitzt jede stetige Abbildung $Y \rightarrow S^1$ einen Lift.

Übung 5.3.15. Man zeige: Ein geschlossener Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ in $\mathbb{R}_{>0}$ und der Eigenschaft, daß es $a \in (0, 1)$ gibt mit $\gamma(a) \in \mathbb{R}_{<0}$ und $\text{Im}(\gamma(t)) \geq 0 \forall t \in [0, a]$ und $\text{Im}(\gamma(t)) \leq 0 \forall t \in [a, 1]$, hat die Umlaufzahl Eins um den Ursprung.

5.4 Anwendungen und Beispiele

Satz 5.4.1 (Retraktionen einer Kreisscheibe auf ihren Rand). *Es gibt keine stetige Abbildung von einer abgeschlossenen Kreisscheibe auf ihren Randkreis, deren Einschränkung auf besagten Randkreis die Identität ist.*

5.4.2. Ist $X \supset A$ ein topologischer Raum mit einer Teilmenge, so versteht man ganz allgemein unter einer **Retraktion von X auf A** eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$.

Beweis. Bezeichne $D = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$ ihren Randkreis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, es gäbe solch eine stetige Abbildung $r : D \rightarrow S^1$ mit $r(z) = z$ für alle $z \in S^1$. Bezeichne $i : S^1 \hookrightarrow D$ die Einbettung. Wir hätten also ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i} & D \\ & \searrow \text{id} & \downarrow r \\ & & S^1 \end{array}$$

und erhielten nach 5.2.26 mit π_1 ein kommutatives Diagramm von Gruppen

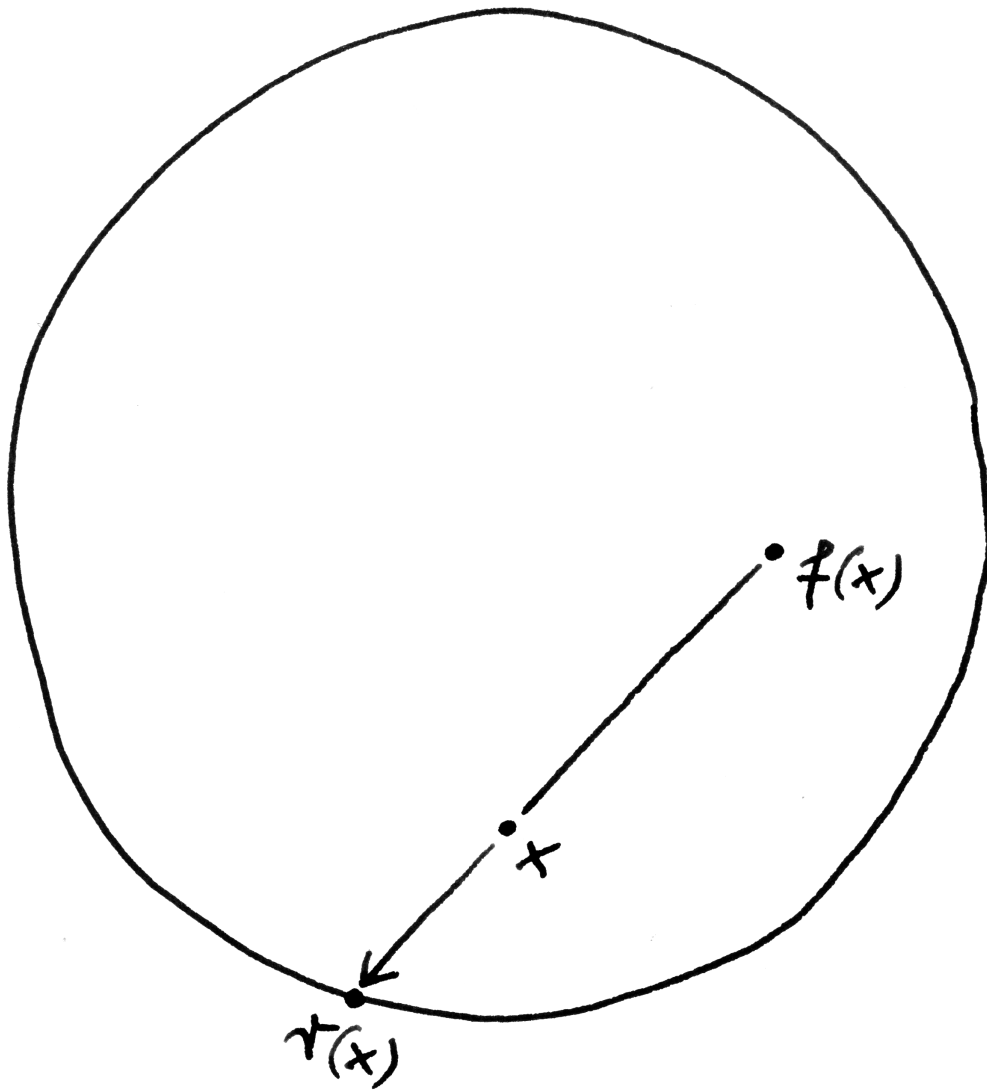
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(D, 1) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow r_\# \\ & & \pi_1(S^1, 1) \end{array}$$

Das ist aber unmöglich, da ja gilt $\pi_1(D, 1) \cong 1$ nach 5.2.9 und $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ nach 5.3.1. □

Satz 5.4.3 (Fixpunktsatz von Brouwer für die Kreisscheibe). *Jede stetige Abbildung von der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich selbst hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f : D \rightarrow D$ unsere stetige Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe D . Wäre $f : D \rightarrow D$ stetig mit $f(x) \neq x$ für alle $x \in D$, so könnten wir eine Abbildung $r : D \rightarrow S^1$ der Einheitskreisscheibe auf ihren Rand S^1 definieren durch die Vorschrift, daß sie jedem $x \in D$ denjenigen Punkt $r(x) \in S^1$ zuordnet, „in dem der Strahl, der in $f(x)$ beginnt und durch x läuft, die Kreislinie S^1 trifft“. Offensichtlich wäre r stetig und $r(z) = z$ für alle $z \in S^1$, als da heißt, r wäre eine Retraktion der Kreisscheibe auf ihren Rand, im Widerspruch zum vorhergehenden Satz 5.4.1. □

Satz 5.4.4 (vom Igel). *Es gibt keine stetige Selbstabbildung der Kugelschale $\kappa : S^2 \rightarrow S^2$ derart, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2$.*



Die Retraktion r aus dem Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer

5.4.5. Man stelle sich vor, die Abbildung κ ordne jedem Punkt x auf der Außenfläche eines kugelförmig zusammengerollten Igels die Richtung $\kappa(x)$ des dort entspringenden Stachels zu. Diese Vorstellung mag auf bei Nachvollziehen des anschließenden Beweises hilfreich sein. Die Bedingung „ $\kappa(x)$ steht senkrecht auf x “ bedeutet, daß die Stacheln flach anliegen müssen, und unser Satz sagt, daß sich ein Igel nicht „wirbelfrei kämmen läßt“. Man beachte jedoch, daß sich ein „Igel von der Form eines Rettungsringes“ durchaus wirbelfrei kämmen läßt.

Vorschau 5.4.6. Einen eleganteren Beweis einer allgemeineren Aussage werden wir mit singulärer Homologie in ?? geben können.

Beweis. Wir zeigen das durch Widerspruch und nehmen also an, es gäbe so eine Kämmung κ . Bezeichne S_+^2 beziehungsweise S_-^2 die nördliche beziehungsweise südliche abgeschlossene Hemisphäre und $S^1 = S_+^2 \cap S_-^2$ den Äquator. Für $p \in S_+^2$ bezeichne R_p^+ die Rotation mit Rotationsachse in der Äquatorebene, die p auf den Nordpol $(0, 0, 1)$ dreht. Dann ist $p \mapsto R_p^+(\kappa(p))$ eine stetige Abbildung $\kappa_+ : S_+^2 \rightarrow S^1$. Analog definieren wir $\kappa_- : S_-^2 \rightarrow S^1$. Offensichtlich gilt für alle p auf dem Äquator $p \in S^1$ die Beziehung

$$\kappa_+(p) = s_p(\kappa_-(p)),$$

mit $s_p : S^1 \rightarrow S^1$ der Spiegelung an der zu p senkrechten Geraden in der Äquatorebene, die also p auf $-p$ abbildet. Fassen wir $S^1 \subset \mathbb{C}$ auf als die komplexen Zahlen der Länge 1, so wird die Abbildung $s : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$, $(p, x) \mapsto s_p(x)$ beschrieben durch die Formel $(p, x) \mapsto -p^2 x^{-1}$. Wir erhalten also

$$-\kappa_+(p)\kappa_-(p) = p^2 \quad \forall p \in S^1$$

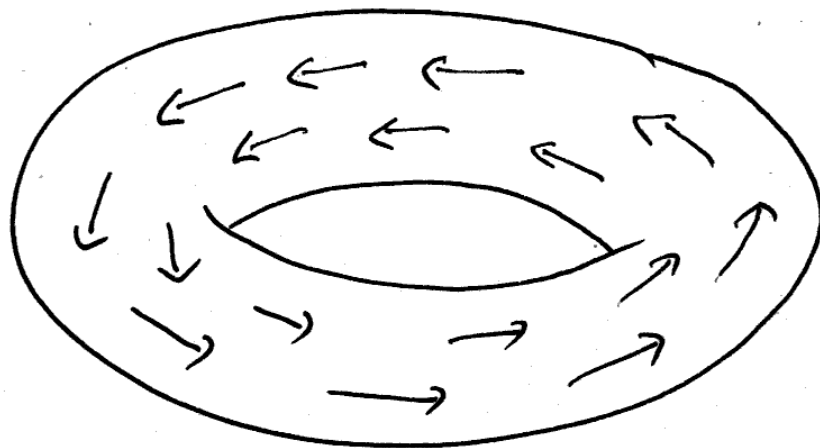
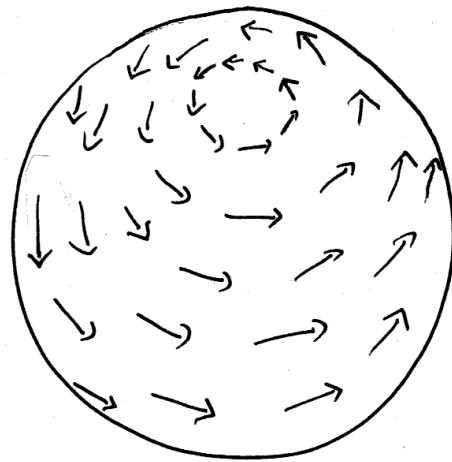
Das ist aber unmöglich, denn $p \mapsto p^2$ induziert auf $\pi_1(S^1, 1)$ nach 5.3.13 die Multiplikation mit 2, wohingegen die linke Seite auf $\pi_1(S^1, 1)$ eine konstante Abbildung liefert: In der Tat läßt sich die stetige Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$, $p \mapsto -\kappa_+(p)\kappa_-(p)$ ja faktorisieren in

$$S^1 \xrightarrow{\Delta} (S_+^2 \times S_-^2) \xrightarrow{\kappa_+ \times \kappa_-} (S^1 \times S^1) \xrightarrow{\text{mult}} S^1 \xrightarrow{(-1)} S^1$$

mit $\Delta(z) = (z, z)$. Die Fundamentalgruppe von $(S_+^2 \times S_-^2)$ ist jedoch trivial, da dieser Raum homöomorph ist zur konvexen Teilmenge $D \times D \subset \mathbb{R}^4$. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. \square

Übungen

Übung 5.4.7 (Jeder Mensch hat einen Haarwirbel). Wir gehen dabei davon aus, daß die Haare am Rand des Haarwuchses alle nach unten wachsen. Man zeige:



Satz vom Igel

Wirbelfreie Kämmung eines toridalen Igels

Es gibt keine stetige Abbildung $\kappa : S_+^2 \rightarrow S^2$ von der oberen Hemisphäre in die Sphäre, die den Äquator in die untere Hemisphäre abbildet und so, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S_+^2$.

Übung 5.4.8 (Die Fundamentalgruppe von einem Produkt). Man zeige: Für zwei bepunktete Räume (X, x) und (Y, y) induzieren die beiden Projektionen pr_1 und pr_2 von $X \times Y$ auf X und Y einen Isomorphismus

$$(\pi_1(\text{pr}_1), \pi_1(\text{pr}_2))^{\top} : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

und dessen Inverses wird gegeben durch $(\pi_1(\text{id}_X, y), \pi_1(x, \text{id}_Y))$ mit der Notation (id_X, y) für die Abbildung $X \rightarrow X \times Y$ gegeben durch $x \mapsto (x, y)$. Der Rettungsring $S^1 \times S^1$ hat also für jeden Basispunkt die Fundamentalgruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Anschaulich liefert ja auch jeder geschlossene Weg auf dem Rettungsring zwei Umlaufzahlen: „Wie oft der Weg um die Luftkammer läuft“ und „Wie oft er um den hypothetischen Matrosen im Ring läuft“.

5.5 Homotopien zwischen stetigen Abbildungen

Definition 5.5.1. Seien $f, g : Y \rightarrow X$ stetige Abbildungen. Eine **Homotopie von f nach g** ist eine stetige Abbildung

$$H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$$

derart, daß gilt $H(y, 0) = f(y)$ und $H(y, 1) = g(y)$ für alle $y \in Y$. Man sagt, die Abbildung f sei **homotop zu g** und schreibt $f \simeq g$, wenn es eine Homotopie von f nach g gibt.

5.5.2 (Diskussion der Terminologie). Dieser Begriff von Homotopie ist für Wege wesentlich verschieden von unserem Begriff aus 5.2.6, den wir deshalb genauer die **Homotopie mit festen Randpunkten** genannt haben. Es gibt jedoch eine gemeinsame Verallgemeinerung, bei der man zusätzlich eine Teilmenge $Z \subset Y$ festlegt und fordert, daß $H(z, \tau)$ für $z \in Z$ von τ unabhängig sein soll. Zwei Abbildungen $f, g : Y \rightarrow X$, die in dieser Weise homotop sind und die damit auf Z übereinstimmen müssen, heißen **homotop relativ zu Z** . Für $Y = [0, 1]$ und $Z = \{0, 1\}$ erhält man dann unsere Homotopie mit festen Randpunkten als Spezialfall.

Proposition 5.5.3. Gegeben topologische Räume X, Y ist die Relation \simeq eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\text{Top}(X, Y)$ aller stetigen Abbildungen von X nach Y .

Beweis. Wir überlassen den Nachweis der Symmetrie und Reflexivität dem Leser und zeigen nur die Transitivität ($f \simeq g$ und $g \simeq h$) \Rightarrow $f \simeq h$. Gegeben Homotopien F, G von f nach g beziehungsweise von g nach h erhält man eine Homotopie H von f nach h durch

$$H(x, \tau) = \begin{cases} F(x, 2\tau) & 0 \leq \tau \leq 1/2; \\ G(x, 2\tau - 1) & 1/2 \leq \tau \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

Definition 5.5.4. Die Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung f unter der Äquivalenzrelation der Homotopie bezeichnen wir mit $[f]$ und nennen sie die **Homotopieklasse von f** . Gegeben topologische Räume X, Y verwenden wir die beiden Notationen $\text{hTop}(X, Y) = [X, Y]$ für die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von X nach Y .

5.5.5. Bei dieser Notation ist Vorsicht geboten, denn für Wege α hat nun das Symbol $[\alpha]$ zwei verschiedene Bedeutungen. Im Zweifelsfall ist bei Wegen immer die Homotopieklasse von α unter Homotopie mit festen Randpunkten gemeint.

Beispiel 5.5.6. Gegeben $D \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und Y ein beliebiger topologischer Raum sind je zwei stetige Abbildungen $f, g : Y \rightarrow D$ homotop. In der Tat ist $H(y, \tau) = \tau f(y) + (1 - \tau)g(y)$ eine Homotopie.

Proposition 5.5.7. Seien $f, g : Y \rightarrow X$ stetige homotope Abbildungen, in Formeln $f \simeq g$. So gilt auch $h \circ f \simeq h \circ g$ für jede stetige Abbildung $h : X \rightarrow Z$ und $f \circ h \simeq g \circ h$ für jede stetige Abbildung $h : Z \rightarrow Y$.

Beweis. Ist $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie von f nach g , so ist die Abbildung $h \circ H : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ eine Homotopie von $h \circ f$ nach $h \circ g$ und die Abbildung $H \circ (h \times \text{id}) : Z \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie von $f \circ h$ nach $g \circ h$. \square

5.5.8. Da nach Proposition 5.5.7 die Homotopieklasse einer Verknüpfung von stetigen Abbildungen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Abbildungen abhängt, können wir eine **Verknüpfung von Homotopieklassen** definieren durch die Vorschrift $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

5.6 Kategorien und Funktoren

5.6.1. An dieser Stelle möchte ich damit beginnen, in die Sprache der Kategorien und Funktoren einzuführen, die auch in 10.1.1 in größerer Ausführlichkeit und vor einem anderen Hintergrund besprochen wird.

Definition 5.6.2. Eine **Kategorie** \mathcal{C} ist ein Datum bestehend aus:

- a. einer Menge von **Objekten** $\text{Ob } \mathcal{C}$;

- b. einer Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ von **Morphismen** für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$;
- c. einer Abbildung $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$, $(f, g) \mapsto g \circ f$ für je drei Objekte $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, genannt die **Verknüpfung** von Morphismen,

derart, daß folgende Axiome erfüllt sind:

1. Die Morphismenmengen sind paarweise disjunkt;
2. Die Verknüpfung ist **assoziativ**, als da heißt, es gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für Morphismen f, g und h , wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind;
3. Für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$, die **Identität auf X** , so daß gilt $\text{id}_X \circ f = f$ und $g \circ \text{id}_X = g$ für Morphismen f und g wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind. Die üblichen Argumente zeigen, daß es für jedes X höchstens einen derartigen Morphismus geben kann, womit auch die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt wäre.

5.6.3. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ Objekte. Statt $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ sagen wir auch, f sei ein **Morphismus von X nach Y** und schreiben kurz

$$f : X \rightarrow Y$$

Statt id_X schreiben wir oft nur id . Statt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ schreiben wir oft kürzer $X \in \mathcal{C}$. Statt $\mathcal{C}(X, X)$ schreibe ich gerne kürzer $\mathcal{C}(X)$ und nenne diese Menge mit ihrer Verknüpfung das **Monoid der Endomorphismen von X** .

Beispiel 5.6.4 (Kategorie der topologischen Räume). Als erstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie $\mathcal{C} = \text{Top}$ aller topologischen Räume eingeführt, mit topologischen Räumen als Objekten und stetigen Abbildungen als Morphismen. Das ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, da die „Gesamtheit aller Mengen“ nach ?? nicht als Menge angesehen werden darf, und da wir von unseren Kategorien stets annehmen, daß ihre Objekte eine Menge bilden sollen. Um diese Untiefen der Logik zu umschiffen, betrachten wir feiner ein Mengensystem alias eine Menge \mathcal{U} von Mengen und die Kategorie

$$\mathcal{U}\text{Top}$$

aller topologischen Räume X , die als Menge betrachtet Elemente unseres Mengensystems \mathcal{U} sind, in Formeln $X \in \mathcal{U}$. Meist wird das Mengensystem \mathcal{U} in der Notation dann aber doch weggelassen und nur insgeheim dazugedacht. So wollen wir es im folgenden meist auch halten.

5.6.5 (**Morphismen versus Abbildungen**). Das vorhergehende Beispiel ist zwar typisch, aber man lasse sich davon nicht in die Irre führen. Bei einer allgemeinen Kategorie müssen die Objekte a priori keineswegs Mengen mit Zusatzstruktur sein und die Morphismen keineswegs strukturerhaltenden Abbildungen.

5.6.6. In vielen Quellen fordert man stattdessen, daß die Objekte einer Kategorie eine „Klasse“ bilden sollen. Mir gefällt die hier gegebene Formulierung besser, da sie im Rahmen der Terminologie der Mengenlehre bleibt. Statt mit „Klassen“ werden wir zu gegebener Zeit mit „Universen“ arbeiten. Das hat den zusätzlichen Vorteil, daß man, wenn es einmal nötig sein sollte und man etwa die Kategorie aller Kategorien betrachten will, noch zu höheren Universen aufsteigen kann. Es hat den Nachteil, beim Aufbau im Rahmen der Mengenlehre, wie er hier jedenfalls im Hintergrund mitgedacht wird, recht starke zusätzliche Axiome der Mengenlehre zu benötigen, die Existenz sogenannter „unerreichbarer Kardinalzahlen“.

Beispiel 5.6.7 (Homotopiekategorie der topologischen Räume). Wir betrachten die Kategorie hTop aller topologischen Räume mit Homotopieklassen stetiger Abbildungen als Morphismen, also

$$\text{hTop}(X, Y) := \text{Top}(X, Y) / \simeq$$

Die Verknüpfung von Abbildungen kommt dabei von 5.5.8 her. Die Axiome einer Kategorie sind offensichtlich erfüllt. Für die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen zwei Räumen ist auch die Notation $\text{hTop}(X, Y) = [X, Y]$ gebräuchlich.

Beispiel 5.6.8 (Kategorie der Mengen). Wir betrachten die Kategorie aller Mengen Ens oder genauer die Kategorie

$$\mathfrak{U}\text{Ens}$$

aller Mengen $X \in \mathfrak{U}$ für ein vorgegebenes Mengensystem \mathfrak{U} . Ihre Objekte sind beliebige Mengen $X \in \mathfrak{U}$. Für zwei Mengen $X, Y \in \mathfrak{U}$ ist die Morphismenmenge $\text{Ens}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y . Die Verknüpfung ordnet jedem Paar (f, g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu, und $\text{id}_X \in \text{Ens}(X)$ ist schlicht die identische Abbildung $\text{id}_X(x) = x \forall x \in X$.

Beispiel 5.6.9 (Kategorie der Gruppen). Wir betrachten die Kategorie Grp aller Gruppen mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Definition 5.6.10. 1. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie heißt ein **Isomorphismus** oder **Iso** und als Adjektiv **iso**, wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$. Wir notieren Isomorphismen oft $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

2. Zwei Objekte X und Y einer Kategorie heißen **isomorph**, wenn es einen Iso $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt. Man schreibt dann auch kurz $X \cong Y$.

Beispiele 5.6.11. Isomorphismen in der Kategorie der Mengen nennt man Bijektionen, Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume Homöomorphismen, Isomorphismen in der Kategorie der Gruppen Isomorphismen von

Gruppen. Stetige Abbildungen, die Isomorphismen in der Homotopiekategorie der topologischen Räume repräsentieren, heißen **Homotopieäquivalenzen**. Zwei topologische Räume heißen **homotopieäquivalent**, wenn es eine Homotopieäquivalenz vom einen zum anderen gibt.

5.6.12. In der Linearen Algebra erklärt man oft Isomorphismen als „bijektive Homomorphismen“. Das ist in meinen Augen didaktisch verwerflich, da es zwar im Fall der Kategorien der Mengen, Gruppen, Vektorräume, Ringe und Körper eine alternative Beschreibung der Isomorphismen im Sinne der Kategorientheorie liefert, aber die korrekte Definition im Fall allgemeiner Kategorien nicht vorspart, sondern eher verdeckt.

5.6.13. Eine stetige Abbildung heißt **nullhomotop**, wenn sie homotop ist zu einer einwertigen Abbildung alias konstanten Abbildung mit nichtleerem Bild, wenn sie also in der Homotopiekategorie über den einpunktigen Raum faktorisiert. Ein Raum X heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotopieäquivalent ist zu einem Punkt. Das ist gleichbedeutend dazu, daß die Identität auf X nullhomotop ist.

5.6.14. Ausgeschrieben ist ein topologischer Raum X also zusammenziehbar genau dann, wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ und eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $H(x, 0) = x_0$ und $H(x, 1) = x$ für alle $x \in X$. Zum Beispiel ist jede konvexe Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar.

5.6.15. Eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist, heißt ein **Gruppoid**. Man erklärt zu jedem topologischen Raum X das **fundamentale Gruppoid** $\mathcal{W} = \mathcal{W}_X = \mathcal{W}(X)$. Seine Objekte sind die Punkte von X , in Formeln $\text{Ob}(\mathcal{W}) = X$, und die Morphismenmenge $\mathcal{W}(x, y)$ besteht aus allen Homotopie- klassen von Wegen mit Anfangspunkt x und Endpunkt y , in Formeln

$$\mathcal{W}(x, y) := \pi_1(X, x, y)$$

Die Verknüpfung von Morphismen ist das Aneinanderhängen von Wegen. Man benutzt Lemma 5.2.19, um die Axiome einer Kategorie zu prüfen. Unsere Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ ist damit genau das Monoid der Endomorphismen des Punktes x im fundamentalen Gruppoid, in Formeln $\pi_1(X, x) = \mathcal{W}_X(x)$.

Definition 5.6.16. Ein **Funktor** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ von einer Kategorie \mathcal{A} in eine Kategorie \mathcal{B} ist ein Datum bestehend aus:

- a. einer Abbildung $F : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}, X \mapsto FX$;
- b. einer Abbildung $F : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(FX, FY), f \mapsto Ff$ für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$,

derart, daß gilt:

1. $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$ für beliebige verknüpfbare Morphismen f und g aus der Kategorie \mathcal{A} ;
2. $F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$ für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$.

Ich nenne in diesem Zusammenhang \mathcal{A} die **Ausgangskategorie** und \mathcal{B} die **Zielkategorie** des Funktors F .

5.6.17. Man gibt bei einem Funktor F meist nur die Abbildung $X \mapsto FX$ auf den Objekten an in der Hoffnung, daß dadurch vom Leser erraten werden kann, welche Abbildung $f \mapsto Ff$ auf den Morphismen gemeint ist.

Beispiel 5.6.18 (Die Fundamentalgruppe als Funktor). Man betrachte die Kategorie Top^* der bepunkteten topologischen Räume alias topologischen Räume mit einem ausgezeichnetem Punkt, dem **Basispunkt**. Morphismen sind stetige Abbildungen, die den ausgezeichnetem Punkt in den ausgezeichnetem Punkt überführen. Das Bilden der Fundamentalgruppe ist dann ein Funktor

$$\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$$

Jedem bepunkteten Raum $(X, x) \in \text{Top}^*$ wird eine Gruppe $\pi_1(X, x) \in \text{Grp}$ zugeordnet und jeder stetigen basispunkterhaltenden Abbildung $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ein Gruppenhomomorphismus $f_{\#} = \pi_1(f) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$. Daß diese Daten die Eigenschaften eines Funktors haben, steht in 5.2.26. Jetzt haben wir allerdings den Ärger, daß für ein beliebig vorgegebenes Mengensystem \mathcal{U} die Fundamentalgruppe keineswegs einen Funktor $\pi_1 : \mathcal{U}\text{Top}^* \rightarrow \mathcal{U}\text{Grp}$ zu induzieren braucht. Diesem Ärger kann man jedoch entgehen, indem man annimmt, daß das zugrundeliegende Mengensystem ein „Universum“ im Sinne von 10.11.3 sein soll, vergleiche auch 10.11.6. Im weiteren will ich diese Feinheiten schlicht ignorieren.

Beispiel 5.6.19 (Vorschub als Funktor der fundamentalen Gruppoide). Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ liefert einen Funktor zwischen den zugehörigen fundamentalen Gruppoiden $f_{\#} : \mathcal{W}(X) \rightarrow \mathcal{W}(Y)$, der ein Objekt $x \in X$ auf das Objekt $f(x) \in Y$ abbildet und einen Morphismus $[\gamma]$ auf den Morphismus $[f \circ \gamma]$.

Beispiel 5.6.20 (Wegzusammenhangskomponenten als Funktor). Das Bilden der Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums ist ein Funktor $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Ens}$. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist dabei $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ zu verstehen als die Abbildung, die jeder Wegzusammenhangskomponente $Z \in \pi_0(X)$ von X diejenige Wegzusammenhangskomponente $W \in \pi_0(Y)$ von Y zuordnet, für die gilt $f(Z) \subset W$.

Vorschau 5.6.21. Man mag die **Homotopiekategorie bepunkteter Räume** betrachten mit bepunkteten Räumen als Objekten und Homotopieklassen für basispunkterhaltende Homotopie alias Homotopie relativ zum Basispunkt im Sinne von

5.5.2 als Morphismen. Wir notieren sie hTop^* . So wird die Fundamentalgruppe, aufgefaßt als Funktor $\pi_1 : \text{hTop}^* \rightarrow \text{Ens}$, dargestellt im Sinne von 10.10.7 durch die bepunktete Kreislinie. Die bepunktete Kreislinie kann im Übrigen versehen werden mit der Struktur eines „Gruppenobjekts“ in $(\text{hTop}^*)^{\text{opp}}$ im Sinne von ???. Das liefert in diesem Kontext die Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x)$.

Übungen

Übung 5.6.22. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn es Morphismen $g, h \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $h \circ f = \text{id}_X$, und unter diesen Voraussetzungen gilt bereits $g = h$. Wir nennen diesen Morphismus dann den **inversen Morphismus zu f** und notieren ihn f^{-1} .

Übung 5.6.23. Gegeben Morphismen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ in einer Kategorie derart, daß $f \circ g$ und $g \circ f$ Isomorphismen sind, müssen f und g bereits selbst Isomorphismen sein.

Übung 5.6.24. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus. Man zeige, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Vorschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Z)$ induziert. Man zeige dual, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Nachschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Z, Y)$ induziert. Genauere Aussagen in dieser Richtung macht das sogenannte Yoneda-Lemma 10.10.2.

Übung 5.6.25. Man zeige, daß eine stetige Abbildung $S^n \rightarrow X$ von einer Sphäre in einen topologischen Raum X genau dann nullhomotop ist, wenn sie sich stetig auf das Innere der Sphäre fortsetzen läßt.

Übung 5.6.26. Man zeige, daß eine stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn sie einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen $\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^\times, f(1))$ induziert.

Übung 5.6.27. Ist Y beliebig und X zusammenziehbar, so sind je zwei Abbildungen $f, g : Y \rightarrow X$ homotop. Ist zusätzlich Y wegzusammenhängend, so sind auch je zwei Abbildungen $X \rightarrow Y$ homotop.

Übung 5.6.28. Jeder zusammenziehbare Raum ist wegzusammenhängend.

Übung 5.6.29. Die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ ist eine Homotopieäquivalenz. Allgemeiner zeige man, daß für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und jedes $r \geq 0$ mit $r + \|y\| < 1$ die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus A(y; r)$ eine Homotopieäquivalenz ist, für $A(y; r) = \{x \mid \|x - y\| \leq r\}$ der abgeschlossene Ball. Ebenso zeige man, daß für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und jedes $r > 0$ mit $r + \|y\| \leq 1$ die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus B(y; r)$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Übung 5.6.30 (Funktoeren erhalten Isomorphie). Ein Funktor bildet stets Isomorphismen auf Isomorphismen ab. Insbesondere haben isomorphe Objekte unter einem Funktor stets isomorphe Bilder.

Übung 5.6.31. Homotope Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ induzieren dieselben Abbildungen auf der Menge der Wegzusammenhangskomponenten, in Formeln $f \cong g \Rightarrow \pi_0(f) = \pi_0(g) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$. Das Bild der Menge der Wegzusammenhangskomponenten liefert mithin sogar einen Funktor

$$\pi_0 : \mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{Ens}$$

5.7 Homotopie und Fundamentalgruppe

5.7.1. Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und Homotopie. Zunächst interessieren wir uns dafür, wie die Fundamentalgruppe vom Basispunkt abhängt. Falls es keinen Weg von x nach y gibt, haben $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, y)$ nichts miteinander zu tun. Gibt es aber einen Weg, so erhalten wir isomorphe Gruppen. Genauer gilt:

Satz 5.7.2 (Wechsel des Basispunkts). *Gegeben Punkte x, y eines topologischen Raums X liefert jeder stetige Weg γ von x nach y einen Isomorphismus*

$$i_\gamma : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X, y) \\ [\alpha] & \mapsto & [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}] \end{array}$$

5.7.3. Hier und im folgenden kürzen wir $\alpha * (\beta * \gamma)$ mit $\alpha * \beta * \gamma$ ab, für verknüpfbare Wege α, β und γ . Wann immer wir diese Notation verwenden, wird es eh nicht auf die Klammern ankommen, da wir Wege nur bis auf Homotopie betrachten.

Beweis. $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \gamma * \alpha * \bar{\gamma} \simeq \gamma * \alpha' * \bar{\gamma}$ nach Lemma 5.2.19, also ist i_γ wohldefiniert. Wegen $\bar{\gamma} * \gamma \simeq \varepsilon_x$ und $\gamma * \bar{\gamma} \simeq \varepsilon_y$ ist $i_{\bar{\gamma}}$ invers zu i_γ und insbesondere i_γ eine Bijektion. Um zu prüfen, daß i_γ auch ein Gruppenhomomorphismus ist, rechnen wir

$$\begin{aligned} i_\gamma([\alpha] * [\beta]) &= [\gamma * (\alpha * \beta) * \bar{\gamma}] \\ i_\gamma([\alpha]) * i_\gamma([\beta]) &= [(\gamma * \alpha * \bar{\gamma}) * (\gamma * \beta * \bar{\gamma})] \end{aligned}$$

und sehen, daß auf der rechten Seite in der oberen und unteren Zeile dieselbe Homotopieklasse steht. \square

Alternativer Beweis in der Sprache der Kategorien. Ist $\gamma : A \xrightarrow{\sim} B$ ein Isomorphismus zwischen zwei Objekten einer Kategorie \mathcal{C} , so erhalten wir offensichtlich einen Isomorphismus zwischen den Monoiden der Endomorphismen unserer beiden Objekte

$$i_\gamma : \mathcal{C}(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(B)$$

durch die Vorschrift $i_\gamma : \alpha \mapsto \gamma \alpha \gamma^{-1}$. Unser Satz 5.7.2 und sein Beweis spezialisieren diese Erkenntnis auf den Fall des fundamentalen Gruppoids eines topologischen Raums. \square

Satz 5.7.4 (Homotopie und Fundamentalgruppe). *Seien stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ gegeben und sei H eine Homotopie von f nach g . Sei $x \in X$ ein fest gewählter Basispunkt und bezeichne γ den Weg $\gamma(t) = H(x, t)$ von $f(x)$ nach $g(x)$. So gilt $g_{\#} = i_{\gamma} \circ f_{\#}$, als da heißt, es kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(Y, f(x)) \\ \parallel & & \wr \downarrow i_{\gamma} \\ \pi_1(X, x) & \xrightarrow{g_{\#}} & \pi_1(Y, g(x)) \end{array}$$

Vorschau 5.7.5. Eine noch etwas allgemeinere und natürlichere Aussage dürfen Sie als Übung 8.2.9 selbst zeigen: Jede Homotopie $H : f \cong g$ induziert eine „Isotransformation“ $H_{\#} : f_{\#} \xrightarrow{\cong} g_{\#}$ zwischen den auf den fundamentalen Gruppoïden induzierten Funktoren.

Beweis. Es gilt zu zeigen $\bar{\gamma} * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq (f \circ \alpha)$ für alle $\alpha \in \Omega(X, x)$. Es reicht dazu, eine Homotopie $\bar{\gamma} * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq \varepsilon * (f \circ \alpha) * \varepsilon$ anzugeben. Zunächst ist $H \circ \alpha : [0, 1]^2 \rightarrow Y$ auf der unteren Kante $f \circ \alpha$, auf der oberen Kante $g \circ \alpha$ und auf der linken und rechten Kante γ . Weiter ist $[0, 1]^2 \rightarrow Y$ gegeben durch $(t, \tau) \mapsto \gamma(t\tau)$ auf der oberen und auf der rechten Kante γ , auf der unteren und linken Kante dahingegen konstant $f(x)$. Schließlich ist $[0, 1]^2 \rightarrow Y$ gegeben durch $(t, \tau) \mapsto \gamma((1-t)\tau)$ auf der der rechten Kante γ , auf der oberen Kante $\bar{\gamma}$ und auf der unteren und linken Kante konstant $f(x)$. Setzen wir unsere drei Quadrate richtig nebeneinander, so verkleben unsere Abbildungen längs der senkrechten Kanten zu einer stetigen Abbildung $[0, 3] \times [0, 1] \rightarrow Y$ und Umparametrisieren in x -Richtung liefert die gesuchte Homotopie. Unsere Zwischenwege bestehen anschaulich darin, daß wir erst γ ein Stück weit gehen, dann das mit der Homotopie deformierte $f \circ \alpha$ herumgehen und anschließend wieder mit γ zurückgehen. \square

Korollar 5.7.6 (Fundamentalgruppen homotopieäquivalenter Räume). *Jede Homotopieäquivalenz induziert Isomorphismen auf den Fundamentalgruppen. Jede nullhomotope Abbildung induziert die konstante Abbildung auf den Fundamentalgruppen. Die Fundamentalgruppe eines zusammenziehbaren Raums ist trivial.*

Beweis. Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$, die homotop ist zur Identität, induziert die Identität auf der Menge der Wegzusammenhangskomponenten. Das folgt formal aus Übung 5.6.31 und ist auch so klar. Sie induziert auch Isomorphismen $f_{\#} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, f(x))$ nach unserem Satz 5.7.4 über Homotopie und Fundamentalgruppe. Ist $u : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so gibt es per definitionem eine Abbildung $v : Y \rightarrow X$ mit $u \circ v \simeq \text{id}$ und $v \circ u \simeq \text{id}$. Also liefern $(u \circ v)_{\#} = u_{\#} \circ v_{\#}$ und $(v \circ u)_{\#} = v_{\#} \circ u_{\#}$ Isomorphismen $\pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, v(u(x)))$ und $\pi_1(Y, y) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, u(v(y)))$. Daraus folgt aber sofort, daß $v_{\#} : \pi_1(Y, u(x)) \rightarrow \pi_1(X, v(u(x)))$ für alle $x \in X$ injektiv

und surjektiv, mithin ein Isomorphismus sein muß. Ist $y \in Y$ beliebig, so gibt es nach 5.6.31 einen Punkt $x \in X$ und einen Weg γ von y nach $u(x)$ und da offensichtlich gilt $v_{\sharp} \circ i_{\gamma} = i_{v \circ \gamma} \circ v_{\sharp} : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, v(u(x)))$ muß schließlich $v_{\sharp} : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, v(y))$ für alle $y \in Y$ ein Isomorphismus sein. Die anderen Aussagen des Korollars sind offensichtlich. \square

Beispiel 5.7.7 (Fundamentalgruppe der punktierten Ebene). Wir können nun ein weiteres Mal beweisen, daß die Fundamentalgruppe des Komplements eines Punktes in der Ebene zu \mathbb{Z} isomorph ist: Die Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ ist nämlich nach Übung 5.6.29 eine Homotopieäquivalenz und induziert folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen. In derselben Weise folgt, daß für $x \neq z$ zwei Punkte der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} der Weg $t \mapsto z + x \exp(2\pi it)$ einen Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{C} \setminus z, x)$ repräsentiert.

5.7.8. Gegeben $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in der komplexen Zahlenebene und $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ ein Punkt, der nicht auf besagtem Weg liegt, erklären wir die **Umlaufzahl**

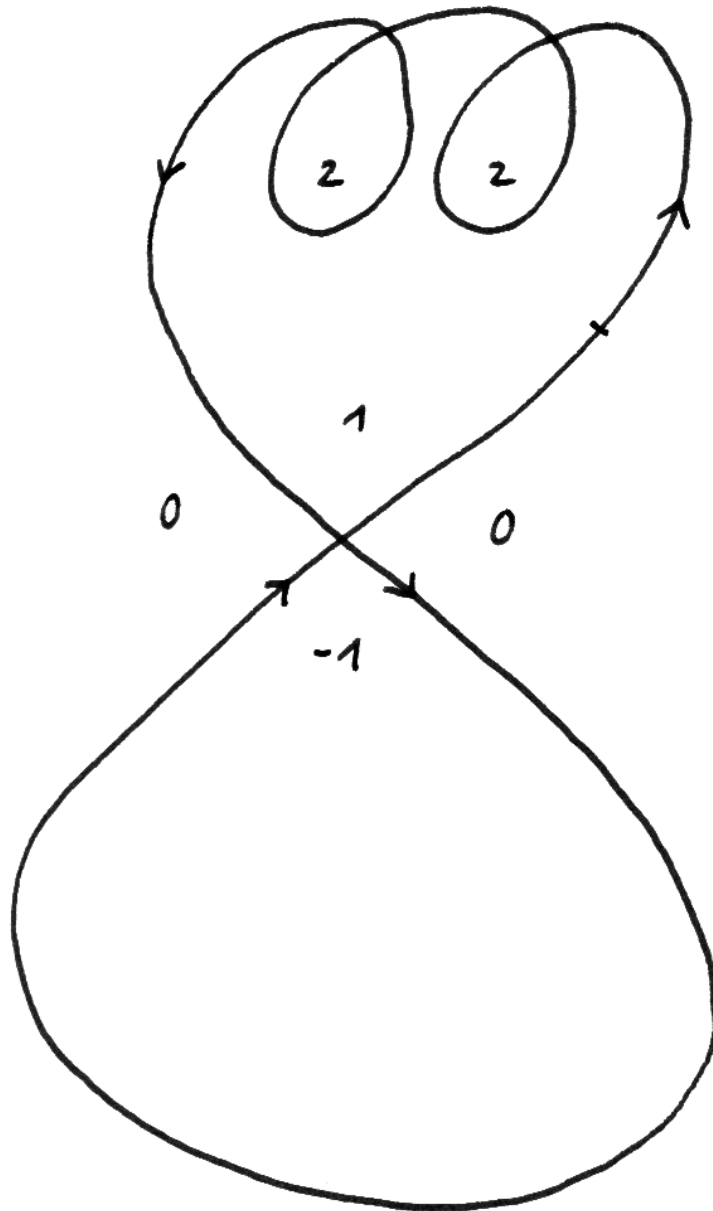
$$\text{Um}(\gamma, z)$$

von unserem Weg γ um unseren Punkt z als diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ als Weg in $\mathbb{C} \setminus z$ homotop ist zum Weg $t \mapsto z + (\gamma(0) - z) \exp(2\pi int)$. Nach dem vorhergehenden gibt es stets genau eine solche Zahl.

Proposition 5.7.9 (Stetigkeit der Umlaufzahl). *Gegeben ein geschlossener Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene liefert die Umlaufzahl eine stetige Abbildung $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{Z}$, $z \mapsto \text{Um}(\gamma, z)$, die auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ verschwindet.*

Beweis. Gegeben eine offene Kreisscheibe von endlichem Radius $D \Subset \mathbb{C}$ und $z \in D$ ist $\mathbb{C} \setminus D \hookrightarrow \mathbb{C} \setminus z$ eine Homotopieäquivalenz und induziert folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen. Trifft unser geschlossener Weg γ die Kreisscheibe D nicht und ist zusätzlich der Durchmesser von D kleiner als der Abstand von D zu $\gamma(0)$, so kann die Umlaufzahl $\text{Um}(\gamma, z)$ mithin beschrieben werden als diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ als Weg in $\mathbb{C} \setminus D$ homotop ist zum Weg $t \mapsto z + (\gamma(0) - z) \exp(2\pi int)$. Alle diese Wege für verschiedene $z \in D$ sind jedoch offensichtlich zueinander homotop in $\mathbb{C} \setminus D$. Das zeigt, daß die Umlaufzahl von γ um alle Punkte von D dieselbe sein muß. Liegt schließlich z außerhalb einer Kreisscheibe K , die das Bild unseres Weges umfaßt, so ist unser Weg in K und erst recht in $\mathbb{C} \setminus z$ zusammenziehbar und muß um z die Umlaufzahl Null haben. \square

Satz* 5.7.10 (Umlaufzahlen kreuzungsfreier Wege in der Ebene). *Ein geschlossener Weg in der punktierten Ebene $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$, der in der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^{\times}, 1)$ weder das neutrale Element noch einen Erzeuger repräsentiert, kann nicht auf $(0, 1]$ injektiv sein.*



In jede Zusammenhangskomponente aus dem Komplement des hier gezeichneten Weges habe ich hier die Umlaufzahl des besagten Weges um einen und jeden Punkt aus besagter Zusammenhangskomponente geschrieben.

5.7.11. Einen alternativen Beweis, der auch höherdimensionale Analoga unserer Aussage zeigt, geben wir in ??.

Beweis. Repräsentiert ein Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ das n -fache eines Erzeugers der Fundamentalgruppe und gilt $n \neq 0$, so können wir nach 5.3.10 einen Lift $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ finden alias eine stetige Abbildung mit $\text{Exp} \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, und dann ist $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $\alpha(t) = \text{Exp} \circ \tilde{\gamma}(t/n)$ ein geschlossener Weg mit $\gamma(t) = \alpha(t)^n$ für alle t . Induziert nun γ eine Einbettung $\hat{\gamma} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$, so hätte die von α induzierte Abbildung $\hat{\alpha} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ die Eigenschaft $z \neq w \Rightarrow \hat{\alpha}(z) \neq \zeta \hat{\alpha}(w)$ für jede n -te Einheitswurzel $\zeta \neq 1$. Wir erhielten mithin für jede n -te Einheitswurzel $\zeta \neq 1$ eine stetige Abbildung

$$\varphi = \varphi_\zeta : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

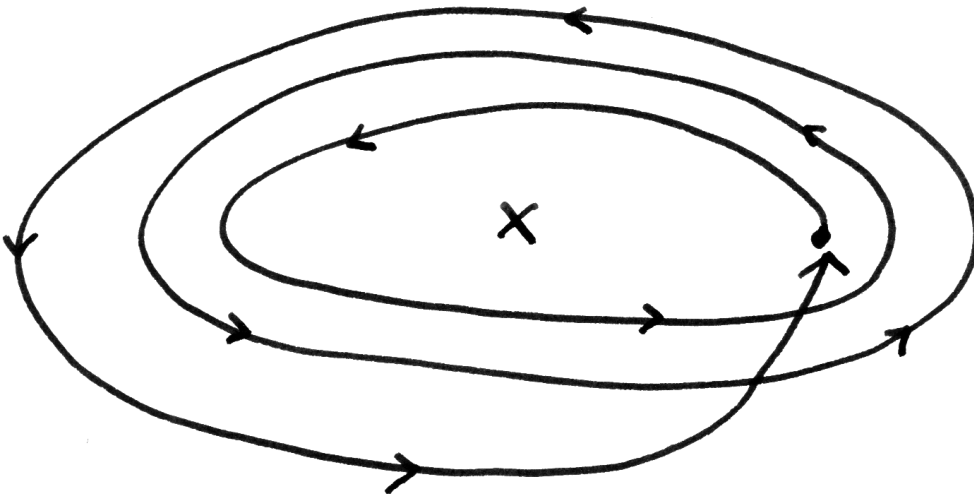
durch die Vorschrift $\varphi(z, w) = \hat{\alpha}(z) - \zeta \hat{\alpha}(w)$. Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^1 & & \\ & \searrow^{(\text{id}, 1)} & \\ S^1 & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & S^1 \times S^1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^\times \\ & \nearrow_{(1, \text{id})} & \\ S^1 & & \end{array}$$

Ich behaupte, daß darin alle drei Kompositionen Homotopieäquivalenzen sind alias, nach Übung 5.6.26 gleichbedeutend, daß sie Isomorphismen auf den Fundamentalgruppen induzieren. Zunächst induziert nach Konstruktion $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen und ist also eine Homotopieäquivalenz. Dasselbe gilt für die mittlere Komposition $z \mapsto (1 - \zeta)\hat{\alpha}(z)$, denn sie ist zu $\hat{\alpha}$ homotop. Die obere Komposition hinwiederum ist homotop zu $z \mapsto \hat{\alpha}(z) - \zeta \hat{\alpha}(w)$ für alle $w \in S^1$. Wählen wir w_0 mit $|\hat{\alpha}(w_0)|$ kleinstmöglich, so liegt $\zeta \hat{\alpha}(w_0)$ in derselben Komponente von $\mathbb{C} \setminus \hat{\alpha}(S^1)$ wie der Ursprung. Aus der Stetigkeit der Umlaufzahl 5.7.9 folgt $\text{Um}(\alpha, \zeta \hat{\alpha}(w_0)) = \text{Um}(\alpha, 0) = 1$ und damit ist $z \mapsto \hat{\alpha}(z) - \zeta \hat{\alpha}(w)$ eine Homotopieäquivalenz erst für $w = w_0$ und dann für alle w , insbesondere auch für $w = 1$. Für die untere Komposition argumentiert man genauso, also haben wir in der Tat drei Homotopieäquivalenzen vor uns. Das aber widerspricht der Tatsache, daß nach 5.4.8 für $c \in \pi_1(S^1, 1)$ gilt

$$(\text{id}, 1)_\# c + (1, \text{id})_\# c = (\text{id}, \text{id})_\# c$$

und damit $\varphi_\#(\text{id}, 1)_\# c + \varphi_\#(1, \text{id})_\# c = \varphi_\#(\text{id}, \text{id})_\# c$ in $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ im Widerspruch dazu, daß für jeden Erzeuger c von $\pi_1(S^1, 1)$ alle diese drei Elemente nach dem bereits Bewiesenen Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ sein müssen. \square



Ein geschlossener Weg in der punktierten Ebene mit Umlaufzahl Drei um den als Kreuz eingezeichneten Punkt, der „so injektiv ist wie irgend möglich“.

Proposition* 5.7.12 (Schleifenfüllende Komplemente). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $W \subset V$ ein Teilraum der Kodimension zwei. So ist für $I \subsetneq W$ eine echte Teilmenge das Komplement $V \setminus I$ schleifenfüllend, für alle Punkte $*$ unseres Komplements gilt also in Formeln

$$\pi_1(V \setminus I, *) = 1$$

Beweis. Den Fall $I \not\subset W$ haben Sie bereits in 5.2.28 behandelt. Um das im allgemeinen zu sehen, dürfen wir $V = \mathbb{C} \times Y$ annehmen mit einem endlichdimensionalen Vektorraum Y und $W = 0 \times Y$. Es gilt für irgendeinen Basispunkt $*$ zu zeigen, daß gilt $\pi_1(V \setminus I, *) = 1$, etwa für den Basispunkt $* := (1, 0)$. Es reicht zu zeigen, daß jeder geschlossene Weg von $*$ nach $*$ homotop ist in $V \setminus W$, denn die Abbildung $\pi_1(V \setminus W, *) \rightarrow \pi_1(V \setminus I, *)$ ist sicher konstant. Es reicht also zu zeigen, daß jeder Weg $\gamma \in \Omega(V \setminus I, *)$, der W trifft, homotop ist zum konstanten Weg. Wir schreiben dazu $\gamma(t) = (z(t), y(t))$. Auf $U := \{t \in [0, 1] \mid z(t) \neq 0\}$ können wir dann $\varphi : U \rightarrow S^1$ erklären durch $\varphi(t) = z(t)/|z(t)|$. Nun gilt $U \supseteq [0, 1]$ und $0, 1 \in U$, aber nach Annahme $U \neq [0, 1]$. Mithin existiert ein stetiger Lift $\tilde{\varphi} : U \rightarrow i\mathbb{R}$ mit $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}(1) = 0$ und $\varphi(t) = \exp(\tilde{\varphi}(t))$ für alle $t \in U$. Es gilt also $z(t) = \exp(\tilde{\varphi}(t))|z(t)|$ für alle $t \in U$. Jetzt erklären wir $h : [0, 1]^2 \rightarrow V \setminus I$ durch die Vorschrift

$$h(t, \tau) = \begin{cases} (\exp(\tilde{\varphi}(\tau t))|z(t)|, y(t)) & \text{falls } t \in U, \\ (0, y(t)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist sicher stetig an allen Stellen (t, τ) mit $t \in U$. An Stellen (t, τ) mit $t \notin U$ kann man die Stetigkeit aber auch zeigen, da in einer Umgebung von $t \notin U$ unser $|z(t)|$ sehr klein sein muß. Damit ist $h(t, \tau)$ eine Homotopie in $V \setminus I$ zwischen unserem Weg γ und dem Weg $t \mapsto (|z(t)|, y(t))$, der seinerseits offensichtlich in $V \setminus I$ zusammenziehbar ist. \square

Übungen

Ergänzende Übung 5.7.13. Feiner liefert der Beweis von 5.7.10 bei Betrachtung aller n -ten Einheitswurzeln $\zeta \neq 1$, daß der in gewisser Weise die Zahl der Selbstüberkreuzungen messende Ausdruck $\sum_{p \in \gamma[0,1]} (|\gamma^{-1}(p)| - 1)$ mindestens so groß sein muß wie der Betrag der Umlaufzahl. Das mag der Leser zur Übung ausarbeiten.

Übung 5.7.14. Für die Basispunktwechsellisomorphismen i_γ aus 5.7.2 zeige man: Homotope Wege liefern denselben Isomorphismus, in Formeln $\gamma \simeq \delta \Rightarrow i_\gamma = i_\delta$. Außerdem gilt $i_{\gamma * \delta} = i_\gamma \circ i_\delta$ für verknüpfbare Wege γ, δ , für γ ein Weg von x zu sich selbst ist $i_\gamma = \text{int } \gamma$ die Konjugation mit γ , und für den konstanten Weg $\varepsilon = \varepsilon_x$ ist speziell i_ε die Identität auf $\pi_1(X, x)$.

Übung 5.7.15 (Fundamentalgruppe und freie Homotopie). Gegeben ein bepunkteter wegzusammenhängender Raum (X, x) zeige man, daß die Abbildung $\Omega(X, x) \rightarrow \text{hTop}(S^1, X)$, die jedem geschlossenen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ die Homotopieklasse der induzierten Abbildung $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow X$ zuordnet, eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen in $\pi_1(X, x)$ und $\text{hTop}(S^1, X)$ induziert.

Übung 5.7.16 (Fundamentalsatz der Algebra). Man zeige den Fundamentalsatz der Algebra mit den hier entwickelten Methoden. Man zeige also in anderen Worten, daß jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten eine Nullstelle hat. Hinweis: Hat unsere Polynomfunktion $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ keine Nullstelle, so sind die Abbildungen $P_\tau : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto P(\tau z)$ alle homotop zur konstanten Abbildung P_0 .

Übung 5.7.17. Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Komplements einer Gerade im \mathbb{R}^3 isomorph ist zu \mathbb{Z} . Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Raums, der entsteht, wenn man aus dem \mathbb{R}^3 die z -Achse sowie den Einheitskreis in der xy -Ebene herausnimmt, isomorph ist zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hinweis: 5.4.8. Eventuell benötigte Homotopien sollen anschaulich plausibel gemacht werden, eine formelhafte Ausarbeitung ist nicht gefordert.

5.8 Abelisierte Fundamentalgruppe*

Definition 5.8.1. Gegeben eine Gruppe G definiert man ihren **maximalen kommutativen Quotienten**, auch genannt ihre **Abelisierung**, als den Quotienten

$$G^{\text{ab}} := G/(G, G)$$

nach dem Normalteiler $(G, G) \subset G$, der von allen **Kommutatoren** $ghg^{-1}h^{-1}$ mit $g, h \in G$ erzeugt wird. Die Untergruppe (G, G) heißt im übrigen die **derivierte Gruppe** von G .

5.8.2 (Diskussion der Notation). Die Notation (G, G) geht zurück auf die in der Gruppentheorie übliche Notation $ghg^{-1}h^{-1} = : (g, h)$ für den Kommutator. Im Sinne unserer allgemeinen Konvention ?? sollte natürlich (G, G) eigentlich nur die Menge aller Kommutatoren aus G bezeichnen und der davon erzeugte Normalteiler sollte $\langle\langle(G, G)\rangle\rangle$ notiert werden. Da aber letzteres Konzept soviel häufiger vorkommt, ist es üblich, hier eine Ausnahme zu machen und mit (G, G) kurzerhand den von den Kommutatoren erzeugten Normalteiler zu bezeichnen, der nebenbei bemerkt mit der von den Kommutatoren erzeugten Untergruppe übereinstimmt.

Lemma 5.8.3 (Universelle Eigenschaft der Abelisierung). Für jede Gruppe G ist ihre Abelisierung G^{ab} eine abelsche Gruppe, und jeder Morphismus von G

in eine abelsche Gruppe faktorisiert über G^{ab} . In Formeln liefert also für jede abelsche Gruppe A das Verknüpfen mit der Projektion $G \rightarrow G^{\text{ab}}$ eine Bijektion

$$\text{Grp}(G^{\text{ab}}, A) \xrightarrow{\sim} \text{Grp}(G, A)$$

Beweis. Dem Leser überlassen. □

5.8.4. Ist X ein wegzusammenhängender Raum und sind $x, y \in X$ Punkte, so liefern nach 5.7.2 je zwei Wege γ von x nach y denselben Isomorphismus $i_\gamma : \pi_1(X, x)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, y)^{\text{ab}}$, den wir dann auch i_{yx} nennen dürfen, und für je drei Punkte x, y, z gilt $i_{zx} = i_{zy}i_{yx}$. Folglich können wir für jeden wegzusammenhängenden Raum X die **basispunktfreie abelisierte Fundamentalgruppe** erklären als die Untergruppe

$$\pi_1(X)^{\text{ab}} \subset \prod_{x \in X} \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

aller Tupel $(\alpha_x)_{x \in X}$ mit $i_{yx}(\alpha_x) = (\alpha_y)$ für alle $x, y \in X$. Die Projektion auf den entsprechenden Faktor liefert dann für jeden Punkt einen kanonischen Isomorphismus $\pi_1(X)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$. Sind alle Fundamentalgruppen eh abelsch, so schreiben wir statt $\pi_1(X)^{\text{ab}}$ auch kürzer $\pi_1(X)$. Ist weiter $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung von wegzusammenhängenden Räumen, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $f_\# : \pi_1(X)^{\text{ab}} \rightarrow \pi_1(Y)^{\text{ab}}$, der für alle $x \in X$ mit unseren $f_\# : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ verträglich ist in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Wir erhalten so einen Funktor $X \mapsto \pi_1(X)^{\text{ab}}$ von der Kategorie der wegzusammenhängenden topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Vorschau 5.8.5 (Umlaufzahl und Orientierung). Wir betrachten die Kategorie $\text{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^\times$ mit zweidimensionalen reellen Vektorräumen als Objekten und Vektorraumisomorphismen als Morphismen. Wir erhalten einen Funktor

$$\text{dreh} : \text{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^\times \rightarrow \text{Ens}$$

durch die Vorschrift, daß wir jedem zweidimensionalen reellen Vektorraum V die Menge der beiden Erzeuger der basispunktfreien abelisierten Fundamentalgruppe $\pi_1(V \setminus 0)^{\text{ab}}$ des Komplements des Ursprungs zuordnen. Andererseits erinnern wir den Funktor $\text{or} : \text{Mod}_{\mathbb{R}}(2)^\times \rightarrow \text{Ens}$ aus ??, der jedem zweidimensionalen reellen Vektorraum die Menge seiner beiden Orientierungen zuordnet. Es gibt nun offensichtlich genau zwei Transformationen $\text{or} \Rightarrow \text{dreh}$ und ebenso offensichtlich sind sie beide Isotransformationen. Wir vereinbaren, daß wir von nun an diejenige dieser beiden Transformationen als die **Standardtransformation**

$$\text{std} : \text{or} \xrightarrow{\sim} \text{dreh}$$

auszeichnen, die unserer Standardorientierung von \mathbb{C} mittels der angeordneten Basis $(1, i)$ den durch $t \mapsto \exp(2\pi it)$ repräsentierten Erzeuger der Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus 0$ zuordnet. Mit dem **durch eine Orientierung gegebenen Drehsinn** meinen wir den durch diese Standardtransformation unserer Orientierung zugeordneten Drehsinn.

5.9 Selbsthomotopien der Kreislinie

Satz 5.9.1 (Selbstabbildungen der Kreislinie bis auf Homotopie). *Man erhält eine Bijektion zwischen der Menge der ganzen Zahlen und der Menge aller Homotopieklassen von Selbstabbildungen der Kreislinie, indem man jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Homotopieklasse des n -fachen Potenzierens $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ zuordnet. In Formeln haben wir also eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \text{hTop}(S^1, S^1) \\ n & \mapsto & [z \mapsto z^n] \end{array}$$

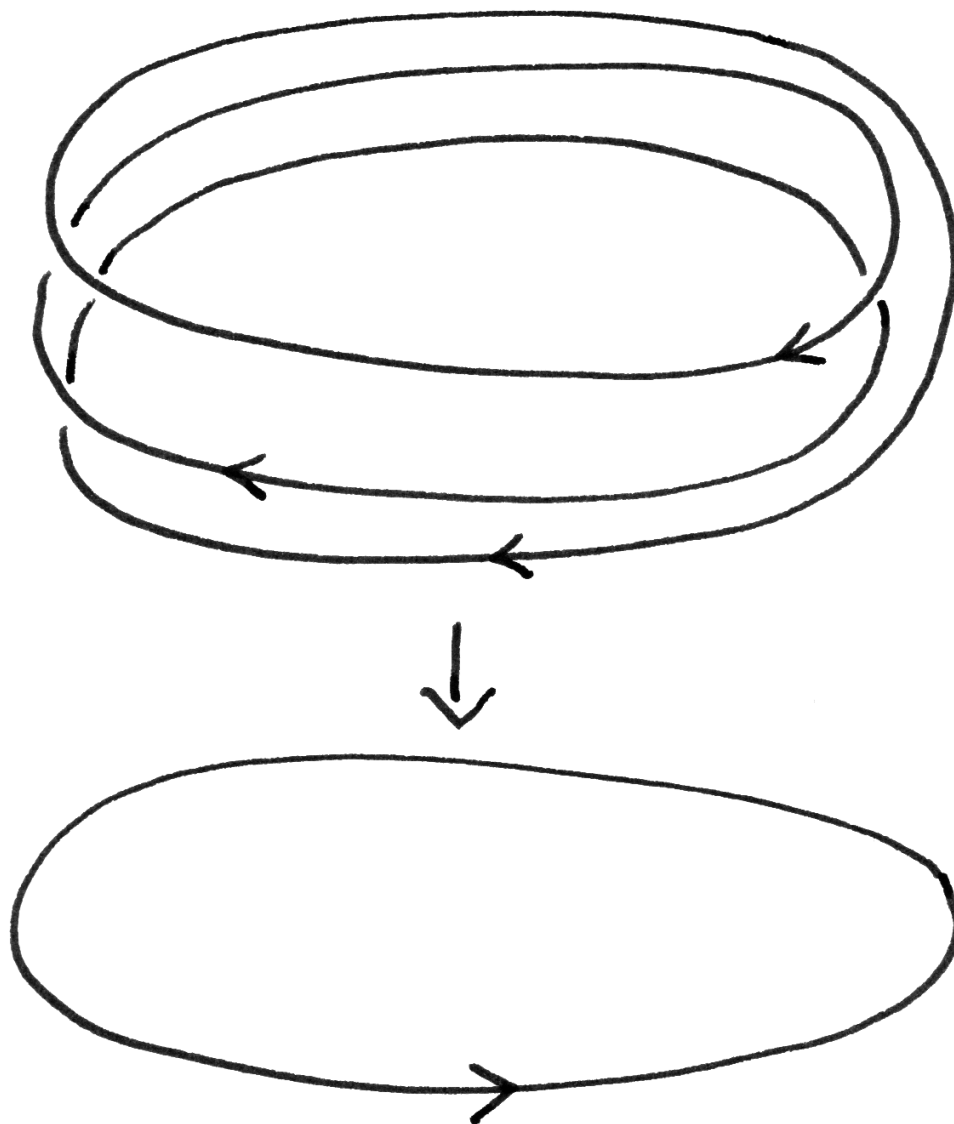
5.9.2. Mit dem **Abbildungsgrad** $\text{grad}(f)$ einer stetigen Selbstabbildung der Kreislinie $f : S^1 \rightarrow S^1$ meint man das Urbild ihrer Homotopieklasse unter dieser Bijektion. In anderen Worten ist also der Abbildungsgrad einer stetigen Selbstabbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die f homotop ist zu $z \mapsto z^n$. In ?? führen wir allgemeiner den Abbildungsgrad stetiger Abbildungen zwischen „kompakten orientierten zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten derselben Dimension“ ein.

5.9.3. Eine Selbstabbildung der Kreislinie, die nicht surjektiv ist, ist nullhomotop. Eine nicht nullhomotope Selbstabbildung der Kreislinie muß also surjektiv sein.

Beweis. Das folgt sofort aus Übung 5.7.15 über den Zusammenhang zwischen freier Homotopie geschlossener Wege und Fundamentalgruppe. \square

Zweiter Beweis. Wir konstruieren explizit eine Inverse zur Zuordnung aus unserem Satz. Dazu erinnern wir an unsere Abbildung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi it)$. Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig. Da wir den Begriff des Abbildungsgrads eben schon vergeben haben, erklären wir nur für diesen Beweis die **Ganghöhe** $\text{gh}(f) \in \mathbb{Z}$ von f durch die Formel $\text{gh}(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$, wo $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ein beliebiger Lift von $f \circ \text{Exp} : [0, 1] \rightarrow S^1$ ist, als da heißt eine Abbildung derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$



Eine Selbstabbildung der Kreislinie vom Abbildungsgrad (-3) .

Nach 5.3.6 gibt es stets solch ein \tilde{f} und es ist sogar eindeutig bis auf eine additive Konstante aus \mathbb{Z} . Folglich ist die Ganghöhe $\text{gh}(f)$ wohldefiniert.

Lemma 5.9.4. *Genau dann sind zwei Selbstabbildungen der Kreislinie homotop, wenn sie dieselbe Ganghöhe haben.*

Beweis. Seien $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ gegeben und sei $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ eine Homotopie von f nach g . Nach unseren Erkenntnissen 5.3.7 zum Liften von auf dem Einheitsquadrat definierten Abbildungen finden wir $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{H}} & \mathbb{R} \\ \text{Exp} \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ S^1 \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & S^1 \end{array}$$

Es folgt $\tilde{H}(0, \tau) - \tilde{H}(1, \tau) \in \mathbb{Z} \quad \forall \tau$, mithin ist diese Abbildung konstant und wir erhalten $\text{gh}(f) = \text{gh}(g)$. Also haben homotope Selbstabbildungen der Kreislinie dieselbe Ganghöhe. Seien umgekehrt $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ zwei stetige Selbstabbildungen der Kreislinie mit derselben Ganghöhe. Es gilt zu zeigen, daß sie homotop sind. Seien dazu $\tilde{f}, \tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gewählt wie in der Definition der Ganghöhe. Wir erklären $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\tilde{H}(t, \tau) = (1 - \tau)\tilde{f}(t) + \tau\tilde{g}(t)$$

Aus $\text{gh}(f) = \text{gh}(g)$ folgt nun $\tilde{H}(0, \tau) + \text{gh}(f) = \tilde{H}(1, \tau)$, also $(\text{Exp} \circ \tilde{H})(0, \tau) = (\text{Exp} \circ \tilde{H})(1, \tau)$ für alle τ . Folglich gibt es eine Abbildung von Mengen H wie in der unteren Zeile des obigen Diagramms derart, daß das Diagramm kommutiert. Da $\text{Exp} \times \text{id} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$ nach 3.7.17 final ist, ist H sogar stetig. Das ist dann die gesuchte Homotopie von f nach g . \square

Nach Lemma 5.9.4 liefert unsere Ganghöhe eine Injektion

$$\text{gh} : \text{hTop}(S^1, S^1) \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

Aus den Definitionen folgt mühelos, daß $z \mapsto z^n$ die Ganghöhe n hat. Der Satz ist bewiesen und wir haben zusätzlich gezeigt, daß der Abbildungsgrad mit der Ganghöhe übereinstimmt, in Formeln $\text{grad}(f) = \text{gh}(f)$. \square

5.9.5. Wir nennen eine Abbildung f **gerade** beziehungsweise **ungerade**, wenn gilt $f(-x) = f(x)$ beziehungsweise $f(-x) = -f(x)$ für alle x , und das in großer Allgemeinheit und einem vorsätzlich offen gelassenen Kontext.

Proposition 5.9.6. *Jede stetige ungerade Selbstabbildung der Kreislinie hat ungeraden Abbildungsgrad und ist insbesondere nie nullhomotop.*

5.9.7 (**Versuch einer Veranschaulichung**). Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ unsere stetige ungerade Selbstabbildung der Kreislinie. Das Urbild

$$\tilde{\Gamma} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Exp}(y) = f(\text{Exp}(x))\}$$

des Graphen von f unter $\text{Exp} \times \text{Exp}$ ist dann stabil unter der Verschiebung mit den Vektoren $\pm(1, 0)$, $\pm(0, 1)$ und $\pm(1/2, 1/2)$ und zu jedem x haben je zwei y, z mit $(x, y), (x, z) \in \tilde{\Gamma}$ ganzzahlige Differenz $y - z \in \mathbb{Z}$.

Beweis. In Formeln gilt es zu zeigen, daß für $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig mit $f(-x) = -f(x) \forall x$ der Abbildungsgrad von f notwendig ungerade ist. Nach 5.3.6 finden wir stets $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig derart, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Aus $f(-x) = -f(x)$ folgt $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) \in \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ für alle t , es gibt also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + k \forall t \in \mathbb{R}$. Wir erhalten insbesondere

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1) &= \tilde{f}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + k \\ &= \tilde{f}(0) + 1 + 2k \end{aligned}$$

und folglich $\text{grad}(f) = \text{gh}(f) = 1 + 2k$. □

Satz 5.9.8 (Borsuk-Ulam). *Jede stetige ungerade Abbildung von der Kugelschale in die Ebene hat eine Nullstelle.*

5.9.9. Versuchen wir einmal, uns das vorzustellen. Eine ungerade Abbildung $f_1 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die nicht identisch verschwindet, nimmt an einer Stelle einen positiven Wert an und gegenüber einen negativen Wert. Denken wir uns ihre Nullstellenmenge als die Menge der Punkte auf einem Globus, an denen Land ist und nicht Meer, so könnten wir nicht mit einem Schiff vom Norpol zum Südpol segeln. Es ist dann zumindest anschaulich klar, daß es auf unserer Landmasse zwei gegenüberliegende Städte geben sollte derart, daß wir trockenen Fußes von der einen zur anderen wandern können, mit beliebig kleiner positiv vorgegebener erlaubter Schrittweite. Hätten wir nun eine zweite ungerade Funktion f_2 und hätten f_1, f_2 keine gemeinsame Nullstelle, so könnten wir von einer dieser Städte zur anderen gehen ohne Nullstellen von f_2 zu treffen. Das stünde jedoch im Widerspruch zur Stetigkeit von f_2 . Ein ähnliches Resultat wird in ?? diskutiert. Diese Überlegungen mögen den Satz anschaulicher machen, dürfen aber nicht als Beweisskizze geschweige denn als Beweis mißverstanden werden.

Beweis. Gegeben $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig mit $f(-x) = -f(x) \forall x \in S^2$ gilt es zu zeigen, daß ein $x \in S^2$ existiert mit $f(x) = 0$. Sonst wäre jedoch $x \mapsto f(x)/\|f(x)\|$ eine stetige ungerade Abbildung $g : S^2 \rightarrow S^1$. Die Einschränkung von g auf den Äquator $S^1 \subset S^2$ wäre also nicht nullhomotop nach Proposition 5.9.6, aber sie faktorisiert über die zusammenziehbare nördliche Hemisphäre $S^2_+ \subset S^2$. Widerspruch! \square

Korollar 5.9.10 (Das Plattdrücken einer Kugelschale ist nie injektiv). Für jede stetige Abbildung der Kugelschale in die Ebene gibt es sogar ein Paar von gegenüberliegenden Punkten der Kugelschale, die auf denselben Punkt der Ebene abgebildet werden.

5.9.11. Daß eine stetige Abbildung von der Kugelschale in die Ebene nie injektiv sein kann, ist Ihnen hoffentlich anschaulich sofort klar. Ich kenne jedoch keinen einfacheren Beweis.

Beweis. Sei $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ unsere stetige Abbildung. Gäbe es kein $x \in S^2$ mit $h(x) = h(-x)$, so wäre $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = h(x) - h(-x)$ stetig und ungerade ohne Nullstelle, im Widerspruch zum Satz 5.9.8 Borsuk-Ulam. \square

Korollar 5.9.12 (Satz vom Butterbrot mit Schinken). Gegeben drei kompakte Teilmengen des Raums gibt es stets eine Ebene, die sie alle drei in jeweils zwei volumengleiche Teile teilt.

5.9.13. Ist also ein Butterbrot mit Schinken gegeben und betrachtet man die Mengen der Punkte des Raums, an denen sich Schinken beziehungsweise Butter beziehungsweise Brot befindet, so kann man mit einem Schnitt das Brot so teilen, daß zwei Hungerige jeweils gleichviel sowohl vom Schinken, als auch von der Butter als auch vom Brot erhalten.

Beweis. Um dieses Korollar zu beweisen, formulieren wir es zunächst einmal um. Seien $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$ unsere drei Kompakta. Sicher finden wir eine stetige Abbildung $\alpha : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß für alle $x \in S^2$ die Ebene durch den Punkt $\alpha(x)x$ mit Normalenvektor x die Menge A halbiert: Hat A nicht Volumen Null, so ordnen wir zum Beispiel jedem x das maximal mögliche $\alpha(x)$ zu, sonst dürfen wir $\alpha(x)$ eh beliebig wählen. Sicher dürfen wir weiter sogar α ungerade annehmen, indem wir sonst α durch $(\alpha(x) - \alpha(-x))/2$ ersetzen. Ebenso finden wir stetige ungerade $\beta, \gamma : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für B und C , und es gilt zu zeigen, daß wir $x \in S^2$ finden mit $\alpha(x) = \beta(x) = \gamma(x)$. Nach dem Satz 5.9.8 von Borsuk-Ulam hat aber jede stetige ungerade Abbildung von der Kugelschale in die Ebene eine Nullstelle, insbesondere also auch die Abbildung

$$\begin{aligned} f : S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (\alpha(x) - \beta(x), \beta(x) - \gamma(x)) \end{aligned} \quad \square$$

Korollar* 5.9.14 (Lusternik-Schnirelmann). *Gegeben eine Überdeckung der Kugelschale durch drei abgeschlossene Teilmengen enthält mindestens eine unserer drei Mengen ein Paar von gegenüberliegenden Punkten.*

Beweis. Wäre $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ein Gegenbeispiel, so könnten wir stetige ungerade Funktionen $f_i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ finden mit $f_i(x) = 1$ für $x \in A_i$, zum Beispiel indem wir mit den Funktionen $d(A_i, \cdot)$ spielen, oder indem wir nach Tietze's Erweiterungssatz ?? eine stetige Funktion g_i finden mit $g_i(\pm x) = \pm 1$ für $x \in A_i$ und dann $f_i(y) = (g_i(y) - g_i(-y))/2$ setzen für alle y . Dann könnten wir den Satz von Borsuk-Ulam 5.9.8 anwenden auf $f = (f_1, f_2) : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und fänden $x \in S^2$ mit $\pm x \notin A_1, \pm x \notin A_2$, also notwendig $x, -x \in A_3$. \square

Übungen

Übung 5.9.15. Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig. Für alle $z \in S^1$ enthält $f^{-1}(z)$ mindestens $|\text{grad } f|$ Punkte.

Übung 5.9.16. Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig, $z \in S^1$. So kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(S^1, z) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(S^1, f(z)) \\
 \text{Um} \downarrow & & \downarrow \text{Um} \\
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{(\text{grad } f)} & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

wo in der unteren Horizontale die Multiplikation mit $(\text{grad } f)$ gemeint ist. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $f(z) = z^n$ zurück.

6 Beschreibung einiger Fundamentalgruppen

6.1 Produkte und Koproducte in Kategorien

Definition 6.1.1. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und A, B Objekte von \mathcal{C} . Ein **Produkt** von A und B ist ein Datum (P, p, q) bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p : P \rightarrow A$ und $q : P \rightarrow B$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $T \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f : T \rightarrow A, g : T \rightarrow B$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $h : T \rightarrow P$ mit $p \circ h = f$ und $q \circ h = g$. Wir notieren diesen Morphismus dann $h = (f, g)$ oder, ganz pedantisch und wenn wir ihn von den Morphismen aus einem Koproduct absetzen wollen, als Spalte $h = (f, g)^\top$.

Beispiele 6.1.2. In der Kategorie der Mengen ist $P = A \times B$ mit p, q den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt von A und B . Dasselbe gilt in der Kategorie der topologischen Räume, wenn wir $A \times B$ mit der Produkttopologie versehen.

6.1.3 (Eindeutigkeit von Produkten). Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer (P, p, q) und $(\tilde{P}, \tilde{p}, \tilde{q})$ zwei mögliche Produkte der Objekte A und B , so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $h : \tilde{P} \rightarrow P$ mit $p \circ h = \tilde{p}$ und $q \circ h = \tilde{q}$ und ebenso genau ein $\tilde{h} : P \rightarrow \tilde{P}$ mit $\tilde{p} \circ \tilde{h} = p$ und $\tilde{q} \circ \tilde{h} = q$. Weiter gibt es auch genau ein $i : P \rightarrow P$ mit $p \circ i = p$ und $q \circ i = q$, und da sowohl $i = \text{id}$ als auch $i = h \circ \tilde{h}$ diese Bedingung erfüllen, folgt $h \circ \tilde{h} = \text{id}$. Ebenso erhalten wir $\tilde{h} \circ h = \text{id}$, mithin sind c und d zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$(A \times B, \text{pr}_A, \text{pr}_B)$$

Sind schließlich Morphismen $u : A \rightarrow X, v : B \rightarrow Y$ gegeben und existieren die Produkte $A \times B$ und $X \times Y$, so benutzen wir die Abkürzung $(u \circ \text{pr}_A, v \circ \text{pr}_B) = u \times v$ und nennen diesen Morphismus den **Produktmorphismus**

$$u \times v : A \times B \rightarrow X \times Y$$

6.1.4. Analoge Definitionen sind auch für größere Familien von Objekten ein- und derselben Kategorie sinnvoll, vergleiche 10.7.8.

Beispiel 6.1.5. Für jede Kategorie \mathcal{C} bildet man die **opponierte Kategorie** \mathcal{C}^{opp} wie folgt: Man setzt

$$\text{Ob } \mathcal{C}^{\text{opp}} := \text{Ob } \mathcal{C} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}^{\text{opp}}(A, B) := \mathcal{C}(B, A)$$

und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in \mathcal{C}^{opp} wie folgt: Man notiert einen Morphismus f als f° , wenn er in der opponierten Kategorie aufgefaßt werden soll, und setzt $g^\circ \circ f^\circ := (f \circ g)^\circ$.

6.1.6. Produkte in der opponierten Kategorie heißen „Koprodukte“. Im folgenden sprechen wir diese Definition gleich für Familien explizit aus.

Definition 6.1.7. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus \mathcal{C} . Ein **Koprodukt** der A_i ist ein Datum $(K, (\text{in}_i)_{i \in I})$ bestehend aus einem Objekt $K \in \mathcal{C}$ und Morphismen $\text{in}_i : A_i \rightarrow K$ derart, daß gilt: Ist $T \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f_i : A_i \rightarrow T$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $f : K \rightarrow T$ mit $f \circ \text{in}_i = f_i \quad \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann auch $(f_i)_{i \in I}$ und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann damit ein Morphismus aus einem Koprodukt und wann ein Morphismus in ein Produkt gemeint ist. Wenn es drauf ankommt, mag ein Morphismus in ein Produkt eben als Spalte mit einem hochgestellten \top notiert werden und ein Morphismus aus einem Koprodukt als Zeile. Wir notieren Koprodukte $\bigsqcup_{i \in I} A_i$, bei endlich vielen Faktoren auch $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$.

Beispiele 6.1.8. In der Kategorie der Mengen ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} A_i$, vergleiche 10.7.17. In der Kategorie der topologischen Räume gilt dasselbe. Kategorie der bepunkteten topologischen Räume ist das Koprodukt die **Einpunktverbindung** $\bigvee_{i \in I} A_i = \bigsqcup A_i / \sim$, wo die Äquivalenzrelation \sim dadurch erklärt sei, daß alle Basispunkte der verschiedenen A_i unter \sim eine Äquivalenzklasse bilden und die anderen Äquivalenzklassen einelementig sind.

Definition 6.1.9. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **verträglich mit beliebigen Produkten** genau dann, wenn für jedes Produkt $(P, (p_i)_{i \in I})$ einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Objekten von \mathcal{A} das Datum $(F(P), (F(p_i))_{i \in I})$ ein Produkt in \mathcal{B} der Familie $(F(A_i))_{i \in I}$ ist. Gilt das nur für Produkte endlicher Familien, so sagen wir, unser Funktor sei **verträglich mit endlichen Produkten**. Dual erklären wir die Verträglichkeit mit beliebigen beziehungsweise endlichen Koprodukten.

Beispiel 6.1.10. Der vergeßliche Funktor $\text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ ist verträglich mit beliebigen Produkten, aber nicht mit beliebigen, ja noch nicht einmal mit endlichen Koprodukten. Der Funktor der Fundamentalgruppe $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$ ist verträglich mit endlichen Produkten nach 5.4.8, ja er ist sogar mit derselben Argumentation verträglich mit beliebigen Produkten.

Übungen

Übung 6.1.11. Gegeben Objekte X, Y, Z einer Kategorie derart, daß das iterierte Produkt $(X \times Y) \times Z$ existiert, zeige man, daß es zusammen mit den Abbildungen $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_1, \text{pr}_2 \circ \text{pr}_1$ und pr_2 die universelle Eigenschaft hat, die das Produkt $X \times Y \times Z$ charakterisiert.

Übung 6.1.12. Sei k ein Körper. Man zeige daß der Dualraumfunktor $\text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k^{\text{opp}}$ verträglich ist mit endlichen Produkten aber nicht mit beliebigen Produkten.

Übung 6.1.13. Man zeige, daß das Bilden der Fundamentalgruppe $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$ verträglich ist mit beliebigen Produkten.

6.2 Kartesische Diagramme

Definition 6.2.1. Ein Diagramm in einer Kategorie \mathcal{C} der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & A \\ \downarrow q & & \downarrow a \\ B & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

heißt **kartesisch** oder ein **pull-back-Diagramm**, wenn es kommutativ ist, in Formeln $ap = bq$, und wenn es für ein beliebiges Objekt $T \in \mathcal{C}$ und Morphismen $f : T \rightarrow A$ und $g : T \rightarrow B$ mit $af = bg$ genau einen Morphismus $h : T \rightarrow P$ gibt mit $f = hp$ und $g = hq$, im Diagramm

Definition 6.2.2. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erklären wir die Kategorie \mathcal{C}_X der **Objekte von \mathcal{C} über X** . Objekte von \mathcal{C}_X sind Paare (A, a) mit $A \in \mathcal{C}$ und $a \in \mathcal{C}(A, X)$, Morphismen in \mathcal{C}_X von einem Objekt (A, a) in ein weiteres Objekt (B, b) sind Morphismen $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} mit $b \circ f = a$, in Formeln

$$\mathcal{C}_X(A, B) := \{f \in \mathcal{C}(A, B) \mid bf = a\}$$

mit der abkürzenden Notation A, B für $(A, a), (B, b)$ auf der linken Seite. Wir nennen sie auch die **Morphismen über X** .

6.2.3 (Kartesische Diagramme als Produkte). Ein kommutatives Quadrat wie oben ist genau dann kartesisch, wenn mit dem diagonalen Morphismus $d := ap = bq : P \rightarrow X$ das Tripel $((P, d), p, q)$ in der Kategorie \mathcal{C}_X der Objekte über X ein Produkt von (A, a) und (B, b) ist. Das zeigt insbesondere, daß darin (P, p, q) durch (A, a, B, b, X) bereits eindeutig festgelegt ist bis auf eindeutigen Isomorphismus in derselben Weise, wie wir es für Produkte ausformuliert hatten.

Definition 6.2.4. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erklären wir opponiert die Kategorie \mathcal{C}^X der **Objekte von \mathcal{C} unter X** . Objekte von \mathcal{C}^X sind Paare (a, A) mit $A \in \mathcal{C}$ und $a \in \mathcal{C}(X, A)$, Morphismen in \mathcal{C}^X von einem Objekt (a, A) in ein weiteres Objekt (b, B) sind Morphismen $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} mit $f \circ a = b$, in Formeln

$$\mathcal{C}^X(A, B) := \{f \in \mathcal{C}(A, B) \mid fa = b\}$$

mit der abkürzenden Notation A, B für $(a, A), (b, B)$ auf der linken Seite. Wir nennen sie auch die **Morphismen unter X** .

6.2.5. Wir erhalten einen Isomorphismus von Kategorien $(\mathcal{C}^{\text{opp}})_X \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^X)^{\text{opp}}$ durch die Vorschrift $(A, a^\circ) \mapsto (a, A)$ auf Objekten und $f^\circ \mapsto f$ auf Morphismen. Bei der Diskussion allgemeiner Aussagen können wir uns deshalb meist auf einen dieser beiden Fälle beschränken.

Beispiele 6.2.6. Die Kategorie der bepunkteten topologischen Räume Top^* ist die „Kategorie der topologischen Räume unter dem einpunktigen Raum“. Die Kategorie der Körpererweiterungen eines Körpers k ist die „Kategorie aller Körper unter k “.

6.2.7. Daß ein Diagramm kartesisch ist, mag man auch durch das Symbol \lrcorner in seiner Mitte notieren, etwa in der Form

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dies Symbol deutet an, aus welchem Winkel unser Diagramm durch pullback entsteht.

6.2.8. Ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

nennen wir ein **Winkeldiagramm** oder kurz einen **Winkel**. In einer beliebigen Kategorie läßt sich nicht jeder Winkel zu einem kartesischen Diagramm vervollständigen, aber wenn er sich vervollständigen läßt, dann ist diese Vervollständigung als ein Produkt in \mathcal{C}_Y im wesentlichen eindeutig. Wir erlauben uns deshalb den bestimmten Artikel, schreiben

$$W = X \times_Y Z$$

und nennen dieses Objekt das **Faserprodukt** von X mit Z über Y . Vom Morphismus $X \times_Y Z \rightarrow Z$ sagen wir, er entstehe aus f durch **Zurückholen mit p** oder gleichbedeutend durch **Basiswechsel**.

6.2.9 (Herkunft der Terminologie). Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $y \in Y$ ein Punkt, so nennt man sein Urbild $X_y = f^{-1}(y)$ vielfach auch die „Faser“ über y . Das Faserprodukt in der Kategorie der Mengen können wir nun verstehen als ein „faserweises Produkt“, in der Kategorie der Mengen ist nämlich

$$X \times_Y Z := \{(x, z) \in Y \times Z \mid f(x) = p(z)\}$$

mit den offensichtlichen Projektionen ein Rückzug und wir haben insbesondere $(X \times_Y Z)_y = X_y \times Z_y$ für alle $y \in Y$. Im Fall einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ topologischer Räume denken wir uns die Fasern X_y mit ihrer induzierten Topologie versehen und verstehen so unsere Abbildung als eine durch $y \in Y$ indizierte „topologische Familie topologischer Räume über der Basis Y “. Der Übergang zur Abbildung $X \times_Y Z \rightarrow Z$ bedeutet in diesem semantischen Umfeld dann einen „Wechsel der Basis“.

Übungen

Übung 6.2.10 (Transitivität des Rückzugs). Sei in einer Kategorie ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z \end{array}$$

gegeben mit einem kartesischen Quadrat rechts. Man zeige, daß dann das linke Quadrat genau dann kartesisch ist, wenn das einhüllende Rechteck kartesisch ist, mit den horizontalen Verknüpfungen als horizontalen Pfeilen.

Übung 6.2.11. Man zeige: Ist $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung eines Teilraums und $f : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist das folgende Diagramm kartesisch in der Kategorie der topologischen Räume:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \hookrightarrow & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Übung 6.2.12. Gegeben zwei kartesische Quadrate ist auch das „Produktquadrat“, bei dem an jeder Ecke das Produkt der zugehörigen Objekte aus unseren beiden Ausgangsquadraten steht, ein kartesisches Quadrat, wenn diese vier Produkte alle existieren.

Übung 6.2.13. Seien ein kartesisches Diagramm in einer Kategorie

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

und ein Objekt V gegeben, dessen Produkte mit den Objekten der unteren Horizontale existieren. So erhalten wir für jeden Morphismus $h : X \rightarrow V$ ein weiteres kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q} & X \\ (g,hq) \downarrow & & \downarrow (f,h) \\ W \times V & \xrightarrow{p \times \text{id}} & Y \times V \end{array}$$

Übung 6.2.14. Gegeben ein kartesisches Diagramm in der Kategorie der topologischen Räume zeige man: Ist eine Ausgangskante offen, so auch die gegenüberliegende Kante aus dem Faserprodukt. Ist eine Ausgangskante surjektiv, so auch die gegenüberliegende Kante aus dem Faserprodukt.

Übung 6.2.15. Gegeben $G \supset H$ eine topologische Gruppe mit einer Untergruppe erhalten wir ein kartesisches Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} G \times H & \xrightarrow{\text{mult}} & G \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

6.3 Kokartesische Diagramme

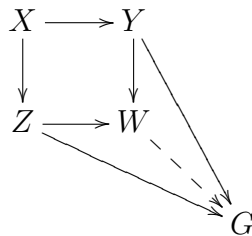
Definition 6.3.1. Kartesische Diagramme in der opponierten Kategorie heißen **kokartesische Diagramme** oder auch **push-out-Diagramme**. Ausgeschrieben heißt ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow c_y \\ Z & \xrightarrow{c_z} & W \end{array}$$

also kokartesisch, wenn es kommutiert und wenn es für jedes andere kommutative Diagramm

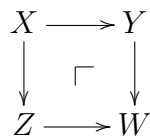
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

genau einen Morphismus $u : W \rightarrow G$ gibt mit $f = u \circ c_y$ und $g = u \circ c_z$. Man mag diese verschiedenen Daten auch zusammenfassen im Diagramm



Unsere Eindeutigkeitsaussagen 6.2.8 für kartesische Diagramme gelten entsprechend auch für kokartesische Diagramme. Winkeldiagramme in der opponierten Kategorie nennen wir **Kowinkeldiagramme** oder kurz **Kowinkel**.

6.3.2. Daß ein Diagramm kokartesisch ist, notiert man auch durch das Symbol \sqsupset in seiner Mitte, etwa in der Form



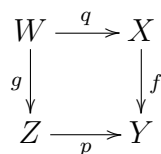
Dies Symbol deutet an, aus welchen Kowinkel unser Diagramm durch pushout entsteht.

Übungen

Übung 6.3.3. Man beschreibe den push-out in der Kategorie der Mengen. Hinweis: $W = (Z \sqcup Y) / \sim$ für \sim die Äquivalenzrelation, die von $\text{in}_Y(f(x)) \sim \text{in}_Z(g(x))$ für $x \in X$ erzeugt wird. Ist f injektiv, so ist diese Relation bereits eine Äquivalenzrelation. Dann können wir uns den pushout vorstellen als den Raum, der entsteht, indem wir Y an Z ankleben längs $f(X) \subset Y$ in der durch $g \circ f^{-1} : f(X) \rightarrow Z$ spezifizierten Weise.

Übung 6.3.4. Ist in einem kartesischen oder kokartesischen Diagramm ein Ursprungspfeil ein Isomorphismus, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem pull-back beziehungsweise in den push-out.

Ergänzende Übung 6.3.5 (Mengentheoretischer Basiswechsel). In einem kartesischen Diagramm von Mengen



gilt für jede Teilmenge $A \subset X$ die Gleichheit $p^{-1}(f(A)) = g(q^{-1}(A))$ von Teilmengen von Z . In einem kokartesischen Diagramm gilt das im allgemeinen nicht mehr. Es gilt jedoch unter der Zusatzannahme, daß q oder g injektiv sind.

Übung 6.3.6 (Pushout und pullback für abelsche Gruppen). In der Kategorie der abelschen Gruppen ist ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

kartesisch beziehungsweise kokartesisch genau dann, wenn die Sequenz $W \rightarrow X \oplus Z \rightarrow Y$ mit Morphismen $(q, g)^T$ und $(f, -p)$ linksexakt beziehungsweise rechtsexakt ist. Insbesondere läßt sich jeder Winkel beziehungsweise Kowinkel zu einem kartesischen beziehungsweise kokartesischen Diagramm vervollständigen. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen von zwei parallelen Pfeilen einer eine Surjektion, so auch der andere. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen ein Ursprungspfeil eine Injektion, so auch der gegenüberliegende Pfeil in den push-out. Hinweis: Man argumentiere mit einer expliziten Konstruktion des push-out. Wer spickeln will, vergleiche ?? . Ein allgemeines Argument wird in ?? gegeben.

Ergänzende Übung 6.3.7 (Basiswechsel für Untergruppen). Sowohl in einem kartesischen als auch in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

gilt für jede Untergruppe $A \subset X$ die Gleichheit $p^{-1}(f(A)) = g(q^{-1}(A))$ von Untergruppen von Z . Hinweis: Jedes kartesische Diagramm von abelschen Gruppen ist kartesisch als Diagramm von Mengen. Jedes kokartesische Diagramm von abelschen Gruppen wird kartesisch, wenn wir seine obere linke Ecke ersetzen durch ihren Quotienten nach dem Schnitt der Kerne der von ihr ausgehenden Morphismen. So kann man sich auf 6.3.5 zurückziehen. In der größerer Allgemeinheit der „abelschen Kategorien“ diskutieren wir das in ?? .

Übung 6.3.8. Jeder Rückzug einer offenen Abbildung von topologischen Räumen ist offen. Hinweise: Mengentheoretischer Basiswechsel 6.3.5. Produkte offener Abbildungen sind offen. Die Einbettung des Definitionsbereichs einer stetigen Abbildung in ihren Graphen ist initial.

Ergänzende Übung 6.3.9 (Pushout von Krings). Die algebraisch Gebildeten unter Ihnen mögen sich überlegen, daß in der Kategorie **Kring** der kommutativen Ringe alle Diagramme der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} C & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrow & A \otimes_C B \end{array}$$

kokartesisch sind, mit beliebigen Ringhomomorphismen $C \rightarrow A$ und $C \rightarrow B$, der hoffentlich offensichtlichen Multiplikation auf dem Tensorprodukt, und den hoffentlich offensichtlichen Ringhomomorphismen in das Tensorprodukt.

Ergänzende Übung 6.3.10. In der Kategorie der Mengen ist das Faserprodukt zweier Objekte über ihrem Koprodukt stets das initiale Objekt alias die leere Menge. Der Pushout eines Produkts dahingegen ist nur dann das finale Objekt alias die einpunktige Menge, wenn keiner der beiden Faktoren die leere Menge ist.

6.4 Satz von Seifert und van Kampen

Satz 6.4.1 (Seifert-van Kampen). *Sei ein topologischer Raum X die Vereinigung zweier offener Teilmengen $U, V \subseteq X$. Ist der Schnitt $U \cap V$ wegzusammenhängend, so bilden für jeden Basispunkt $x \in U \cap V$ die Vorschübe der Fundamentalgruppen ein kokartesisches Diagramm von Gruppen*

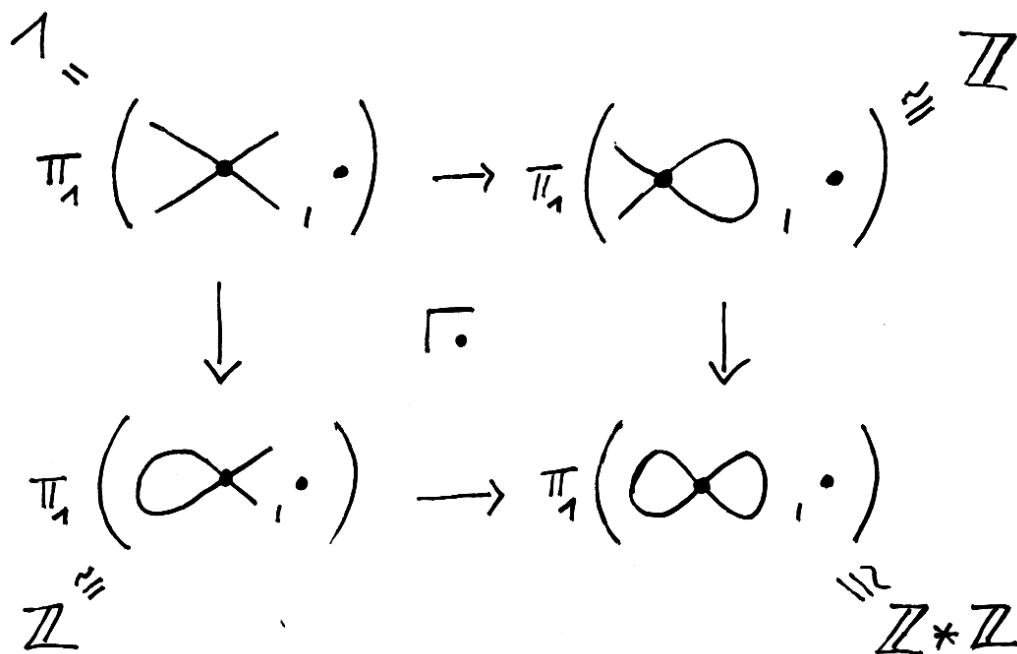
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \longrightarrow & \pi_1(V, x) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \pi_1(U, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

6.4.2. Der Beweis dieses Satzes wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. In 6.6.4 diskutieren wir ganz allgemein, daß und wie sich jeder Kowinkel von Gruppen zu einem kokartesischen Diagramm ergänzen läßt. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

6.4.3 (**Die Kategorie der Kategorien**). Die Gesamtheit aller Kategorien bildet mit Funktoren als Morphismen selbst eine Kategorie

Cat

Etwas sorgfältiger sollte man ein Universum \mathcal{U} festhalten und dann etwa die Kategorie $\mathcal{U}\text{Cat}$ aller Kategorien betrachten, deren Morphismenmengen und Objektmenge Elemente von \mathcal{U} sind, aber diese Feinheiten sind hier nicht relevant.



Berechnung der Fundamentalgruppe der Figur 8 mit Seifert-van Kampen. Das Symbol in der Mitte soll andeuten, daß wir ein push-out-Diagramm vor uns haben. Die Formel $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ meint das Koprodukt von Gruppen, wie es in 6.6.2 noch ausführlicher besprochen werden wird. Ich hoffe, es verwirrt nicht zu sehr, daß die triviale Gruppe darin multiplikativ notiert ist als 1, wohingegen die freie Gruppe mit einem Erzeuger darin \mathbb{Z} notiert wird, also in additiver Notation mit dem neutralen Element 0.

6.4.4. Wir erinnern aus 5.6.15 das fundamentale Gruppoid $\mathcal{W}_X = \mathcal{W}(X)$ eines topologischen Raums X . Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist die Objektabbildung eines Funktors $f : \mathcal{W}(X) \rightarrow \mathcal{W}(Y)$, dessen Effekt auf Morphismen durch $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ gegeben wird.

Satz 6.4.5 (Seifert-van Kampen für das fundamentale Gruppoid). *Gegeben ein topologischer Raum X mit einer Überdeckung $X = U \cup V$ durch zwei offene Teilmengen $U, V \Subset X$ erhalten wir mit den durch die Einbettungen gegebenen Funktoren in der Kategorie der Kategorien ein kokartesisches Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(U \cap V) & \longrightarrow & \mathcal{W}(V) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{W}(U) & \longrightarrow & \mathcal{W}(X) \end{array}$$

Beweis. Für den Beweis verwenden wir eine andere Schreibweise und setzen $U = U_+$ und $V = U_-$ und $U \cap V = U_+ \cap U_-$. Jeder Morphismus in $\mathcal{W}(X)$ läßt sich als Verknüpfung von Morphismen schreiben, die von $\mathcal{W}(U_+)$ oder von $\mathcal{W}(U_-)$ herkommen. In der Tat gibt es für jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r = 1$ des Einheitsintervalls derart, daß für $1 \leq \rho \leq r$ gilt $\gamma[a_{\rho-1}, a_\rho] \subset U_+$ oder $\gamma[a_{\rho-1}, a_\rho] \subset U_-$. Das folgt etwa aus dem Überdeckungssatz von Lebesgue 2.4.9 angewandt auf die offene Überdeckung des Kompaktums $[0, 1]$ durch $\gamma^{-1}(U_+)$ und $\gamma^{-1}(U_-)$. Ein Funktor $F : \mathcal{W}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ in eine weitere Kategorie \mathcal{C} wird also bereits eindeutig festgelegt durch die Funktoren $F \circ i_+ : \mathcal{W}(U_+) \rightarrow \mathcal{C}$ und $F \circ i_- : \mathcal{W}(U_-) \rightarrow \mathcal{C}$, wobei $i_\pm : U_\pm \hookrightarrow X$ ebenso die Einbettungen wie die zugehörigen Funktoren auf den fundamentalen Gruppoiden bezeichnen. Es bleibt zu zeigen, daß es für eine weitere Kategorie \mathcal{C} und Funktoren $I_\pm : \mathcal{W}(U_\pm) \rightarrow \mathcal{C}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(U_\cap) & \longrightarrow & \mathcal{W}(U_-) \\ \downarrow & & \downarrow I_- \\ \mathcal{W}(U_+) & \xrightarrow{I_+} & \mathcal{C} \end{array}$$

kommutiert, auch in der Tat einen Funktor $F : \mathcal{W}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ gibt mit $F \circ i_\pm = I_\pm$. Konstruieren wir also einen derartigen Funktor F . Auf Objekten ist klar, welche Abbildungsvorschrift wir nehmen können und müssen. Es ist auch klar, daß der Funktor F , wenn es ihn denn gibt, auf einem Morphismus $g \in \mathcal{W}_X(x, y)$ wie folgt berechnet werden kann: Man wählt einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von x nach y mit $g = [\gamma]$, wählt dazu eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r = 1$ wie oben, wählt für jedes ρ ein Vorzeichen $\varepsilon(\rho)$ mit $\gamma[a_{\rho-1}, a_\rho] \subset U_{\varepsilon(\rho)}$, bezeichnet mit $\gamma_\rho : [0, 1] \rightarrow U_{\varepsilon(\rho)}$ den zugehörigen auf das Einheitsintervall umparametrisierten

Weg, bezeichnet mit $[\gamma_\rho]_{\varepsilon(\rho)}$ den zugehörigen Morphismus in $\mathcal{W}(U_{\varepsilon(\rho)})$, und hat dann

$$F(g) = (I_{\varepsilon(r)}[\gamma_r]_{\varepsilon(r)}) \circ \dots \circ (I_{\varepsilon(2)}[\gamma_2]_{\varepsilon(2)}) \circ (I_{\varepsilon(1)}[\gamma_1]_{\varepsilon(1)})$$

Es ist schließlich klar, daß wir einen Funktor F mit den gesuchten Eigenschaften durch diese Vorschrift konstruieren können, wenn es gelingt zu zeigen, daß $F(g)$ unabhängig ist von allen diesen Wahlen. Daß es auf die Wahl der jeweiligen Vorzeichen $\varepsilon(\rho)$ nicht ankommt, folgt aus unserer Annahme der Kommutativität des letzten Diagramms. Daß es auf die Wahl der Unterteilung von γ nicht ankommt, erkennt man, indem man bei zwei Wahlen zu einer gemeinsamen Verfeinerung übergeht und die Annahme ausnutzt, daß unsere I_\pm Funktoren sind. Damit liefert jeder Repräsentant γ von g schon mal ein wohldefiniertes $F_\gamma(g)$. Bleibt zu zeigen, daß es auch auf die Wahl des Repräsentanten γ der Homotopieklasse g nicht ankommt. Aber sei sonst ψ ein weiterer Repräsentant und $h : \gamma \simeq \psi$ eine Homotopie mit festen Endpunkten. Wieder nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue gibt es Unterteilungen $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r = 1$ und $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_s = 1$ derart, daß jedes Feld $[a_{\rho-1}, a_\rho] \times [b_{\sigma-1}, b_\sigma]$ unter unserer Homotopie h ganz nach U_+ oder ganz nach U_- abgebildet wird. Sind p, q benachbarte Ecken eines Feldes, so bezeichnen wir mit $d_{p,q} : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ die affine Abbildung mit $d_{p,q}(0) = q$, $d_{p,q}(1) = p$ und setzen $\gamma_{p,q} = h \circ d_{p,q}$. Für ein von h ganz nach U_ε abgebildetes Feld mit Ecken

$$\begin{pmatrix} y & z \\ x & w \end{pmatrix}$$

sind die Wege $\gamma_{z,w} * \gamma_{w,x}$ und $\gamma_{z,y} * \gamma_{y,x}$ dann in U_ε homotop. In der Tat folgt aus 5.2.9 sofort die Homotopie $d_{z,w} * d_{w,x} \simeq d_{z,y} * d_{y,x}$ in $\Omega(\text{Feld}, x, z)$. Betrachten wir nun irgendeinen Weg ϕ im Einheitsquadrat, dem Definitionsbereich unserer Homotopie h , der mit konstanter absoluter Geschwindigkeit auf den Kanten unserer Felder von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ läuft und dabei immer nach rechts oder nach oben läuft. Nach dem vorhergehenden ist $F_{h \circ \phi}(g)$ unabhängig von ϕ . Andererseits gilt, jetzt mit der Notation ε für konstante Wege, offensichtlich $\varepsilon * \gamma = h \circ \phi_1$ für ϕ_1 das ϕ , das erst die Unterkante entlangläuft und dann die rechte Seite hoch, und $\psi * \varepsilon = h \circ \phi_2$ für ϕ_2 das ϕ , das erst die linke Seite hochläuft und dann die Oberkante entlang. So aber folgt

$$F_\gamma(g) = F_{\varepsilon * \gamma}(g) = F_{h \circ \phi_1}(g) = F_{h \circ \phi_2}(g) = F_{\psi * \varepsilon}(g) = F_\psi(g) \quad \square$$

Beweis von Seifert-van Kampen. Gegeben ein Monoid M bezeichne $[M]$ die zugehörige **Ein-Objekt-Kategorie** mit einem einzigen Objekt, dessen Monoid von Endomorphismen gerade M ist. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} und ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ haben wir stets einen tautologischen Funktor $[\mathcal{C}(A)] \rightarrow \mathcal{C}$, der das einzige Objekt auf das Objekt A abbildet. Ein Gruppoid heißt **zusammenhängend**, wenn es

zwischen je zwei seiner Objekte mindestens einen Morphismus gibt. Ist \mathcal{W} ein zusammenhängendes Gruppoid und wählen wir ein Objekt $x \in \mathcal{W}$ und für jedes $y \in \mathcal{W}$ einen ausgezeichneten Morphismus $g_y : x \rightarrow y$, so erhalten wir umgekehrt einen Funktor $\mathcal{W} \rightarrow [\mathcal{W}(x)]$ durch die Vorschrift $f \mapsto g_z^{-1} \circ f \circ g_y$ für alle Morphismen $f : y \rightarrow z$. Ist dabei speziell $g_x = \text{id}_x$, so ist die Verknüpfung

$$[\mathcal{W}(x)] \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow [\mathcal{W}(x)]$$

unserer beiden eben diskutierten Funktoren der Identitätsfunktor. Beim Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen dürfen wir nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit außer $U \cap V$ auch U und V und damit X wegzusammenhängend annehmen, indem wir andernfalls jeweils zur Wegzusammenhangskomponente unseres Basispunkts x übergehen. Dann können wir für jeden Punkt $y \in X$ einen Weg von x nach y wählen so, daß unser Weg der konstante Weg ist im Fall $y = x$ und ganz in U beziehungsweise V verläuft, falls y in U beziehungsweise V liegt. Mit diesen Wahlen erhalten wir nach dem vorhergehenden im Schaubild

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(U \cap V) & \longrightarrow & \mathcal{W}(V) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{W}(U) & \longrightarrow & \mathcal{W}(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [\pi_1(U \cap V, x)] & \longrightarrow & [\pi_1(V, x)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\pi_1(U, x)] & \longrightarrow & [\pi_1(X, x)] \end{array}$$

Funktoren von allen vier Ecken des linken in alle vier Ecken des rechten Diagramms. Sie lassen sogar einen kommutativen Würfel entstehen und sind halbunivers zu den offensichtlichen Einbettungen. Da das linke Diagramm kokartesisch ist, folgt dasselbe für das rechte Diagramm. Ist genauer G eine Gruppe, so liefert jede Ergänzung des Kowinkels im rechten Diagramm zu einem kommutativen Quadrat

$$\begin{array}{ccc} [\pi_1(U \cap V, x)] & \longrightarrow & [\pi_1(V, x)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\pi_1(U, x)] & \longrightarrow & [G] \end{array}$$

eine Ergänzung des Kowinkels im linken Diagramm zu einem kommutativen Quadrat mit $[G]$ als rechter unterer Ecke. Diese Ergänzung muß von einem Funktor $\mathcal{W}(X) \rightarrow [G]$ herkommen, der dann hinwiederum einen möglichen Funktor $[\pi_1(X, x)] \rightarrow [G]$ liefert, der zu dem ursprünglichen kommutativen Quadrat führt. Jeder derartige Funktor hinwiederum kommt von einem eindeutig bestimmten Funktor $\mathcal{W}(X) \rightarrow [G]$ her und ist damit auch selbst eindeutig bestimmt. \square

Übungen

Übung 6.4.6. Ist M eine zusammenhängende d -Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 3$ und $E \subset M$ eine endliche Teilmenge, so induziert die Einbettung $M \setminus E \hookrightarrow$

M einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen.

Übung 6.4.7. Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Komplements einer Kreislinie im \mathbb{R}^3 isomorph ist zu \mathbb{Z} . Hinweis: Die Fundamentalgruppe ändert sich nach 6.4.6 nicht, wenn wir den \mathbb{R}^3 durch Hinzufügen eines Punktes zur S^3 machen. Dann kann man 5.7.17 anwenden.

6.5 Freie Monoide und freie Gruppen

Satz 6.5.1. 1. Gegeben eine Menge X existiert ein Paar (W, ε) bestehend aus einem Monoid W und einer Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow W$ derart, daß für jedes weitere Monoid M das Vorschalten von ε eine Bijektion

$$(\circ\varepsilon) : \text{Mon}(W, M) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, M)$$

zwischen der Menge aller Monoidhomomorphismen $W \rightarrow M$ und der Menge aller Abbildungen $X \rightarrow M$ induziert. Wir nennen solch ein ε eine **universelle Mengen-Monoid-Abbildung**;

2. Gegeben zwei universelle Mengen-Monoid-Abbildungen $\varepsilon : X \rightarrow W$ und $\tau : X \rightarrow V$ existiert genau ein Monoidhomomorphismus $c : W \rightarrow V$ mit $c \circ \varepsilon = \tau$ und genau ein Monoidhomomorphismus $d : V \rightarrow W$ mit $d \circ \tau = \varepsilon$, und diese Abbildungen c und d sind zueinander inverse Isomorphismen.

6.5.2. Unsere Paare (W, ε) sind nach Teil 2 eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Eine universelle Mengen-Monoid-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow W$ verdient damit den bestimmten Artikel. Man nennt (W, ε) das **freie Monoid über X** . Wir verwenden für die universelle Mengen-Monoid-Abbildung aus einer Menge X die Notation

$$\varepsilon : X \rightarrow \text{Mon}^{\wedge} X$$

6.5.3. Die charakterisierende Eigenschaft einer universellen Mengen-Monoid-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow W$ bedeutet in anderen Worten: Ist M ein Monoid und $\varphi : X \rightarrow M$ eine Abbildung von Mengen, so soll es genau einen Monoidhomomorphismus $\hat{\varphi} : W \rightarrow M$ geben mit $\hat{\varphi} \circ \varepsilon = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon} & W \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \hat{\varphi} \\ & & M \end{array}$$

Beispiele 6.5.4. Für das einelementige Monoid $\{1\}$ ist die Abbildung $\emptyset \rightarrow \{1\}$ universell. Das freie Monoid über der leeren Menge besteht in anderen Worten nur aus dem neutralen Element. Für das additive Monoid $(\mathbb{N}, +)$ ist die Abbildung $\{*\} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $* \mapsto 1$ universell. Das freie Monoid über der einelementigen Menge ist in anderen Worten das additive Monoid der natürlichen Zahlen.

Beweis. Gegeben eine Menge X konstruieren wir eine universelle Abbildung von X in ein Monoid W wie folgt: Für $n = 0, 1, 2, \dots$ betrachten wir zunächst die Mengen $W_n := \text{Ens}(\{1, \dots, n\}, X)$. Wir notieren unsere Abbildungen $a : \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ als $a : i \mapsto a_i$ und interpretieren Elemente $a \in W_n$ als endliche Wörter $a_1 a_2 \dots a_n$ aus Elementen von X . Die Menge W_0 besteht insbesondere nur aus einem Wort, dem „leeren“ Wort, notiert e . Wir betrachten dann die „Menge aller Wörter“ $W := \bigsqcup_{n \geq 0} W_n$ und erklären darauf die Verknüpfung des „Hinter-einanderschreibens von Wörtern“

$$\begin{aligned} W \times W &\rightarrow W \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

Diese Verknüpfung ist offensichtlich assoziativ, die Längen von Wörtern addieren sich beim Verknüpfen und das leere Wort ist ein neutrales Element. Die Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow W$, die jedem Element $x \in X$ das Wort $x \in W_1$ bestehend aus x als einzigem Buchstaben zuordnet, ist dann offensichtlich eine universelle Mengen-Monoid-Abbildung. Die Argumentation ist beim Beweis von Teil 2 sehr ähnlich wie beim Nachweis der Eindeutigkeit von Produkten bis auf eindeutigen Isomorphismus 6.1.3 und bleibe dem Leser überlassen. Formal sind alle diese Aussagen Spezialfälle der Eindeutigkeit darstellender Objekte 10.10.17. \square

Satz 6.5.5. 1. Gegeben eine Menge X existiert ein Paar (F, ε) bestehend aus einer Gruppe F und einer Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ derart, daß für jede weitere Gruppe G das Vorschalten von ε eine Bijektion

$$(\circ\varepsilon) : \text{Grp}(F, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, G)$$

zwischen der Menge aller Gruppenhomomorphismen $F \rightarrow G$ und der Menge aller Abbildungen $X \rightarrow G$ induziert. Wir nennen solch ein ε eine **universelle Mengen-Gruppen-Abbildung**:

2. Gegeben zwei universelle Mengen-Gruppen-Abbildungen $\varepsilon : X \rightarrow F$ und $\tau : X \rightarrow H$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $c : F \rightarrow H$ mit $c \circ \varepsilon = \tau$ und genau ein Gruppenhomomorphismus $d : H \rightarrow F$ mit $d \circ \tau = \varepsilon$, und diese Abbildungen c und d sind zueinander invers.

6.5.6. Unsere Paare (F, ε) sind nach Teil 2 „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie existieren. Eine universelle Mengen-Gruppen-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ verdient damit den bestimmten Artikel. Man nennt (F, ε) die **freie Gruppe über X** . Wir verwenden für die universelle Mengen-Gruppen-Abbildung aus einer Menge X die Notation

$$\varepsilon : X \rightarrow \text{Grp}^\wedge X$$

6.5.7. Die charakterisierende Eigenschaft einer universellen Mengen-Gruppen-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ bedeutet in anderen Worten: Ist G eine Gruppe und $\varphi : X \rightarrow G$ eine Abbildung von Mengen, so soll es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : F \rightarrow G$ geben mit $\tilde{\varphi} \circ \varepsilon = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon} & F \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & G \end{array}$$

Beispiele 6.5.8. Für die einelementige Gruppe $\{1\}$ ist die Abbildung $\emptyset \rightarrow \{1\}$ universell. Die freie Gruppe über der leeren Menge besteht in anderen Worten nur aus dem neutralen Element. Für die additive Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist sowohl die Abbildung $\{*\} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto 1$ als auch die Abbildung $\{*\} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto -1$ universell.

Beweis. Gegeben eine Menge X konstruieren wir eine universelle Mengen-Gruppen-Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ wie folgt: Wir beginnen mit dem freien Monoid

$$W^\pm := \text{Mon}^\wedge(X \times \{+1, -1\})$$

über dem kartesischen Produkt $X \times \{+1, -1\}$. Wir interpretieren Elemente a dieses Monoids als endliche Wörter $a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots a_n^{\sigma_n}$ mit $a_i \in X$ und $\sigma_i \in \{+1, -1\}$. Ein typisches Element unseres Monoids wäre etwa das Wort $xyx^{-1}xy^{-1}$ mit $x, y \in X$. Sei nun \sim die kleinste Äquivalenzrelation auf W^\pm derart, daß mit unserer Notation e für das leere Wort gilt:

1. $xx^{-1} \sim e \sim x^{-1}x \quad \forall x \in X$;
2. $a \sim b \Rightarrow ca \sim cb$ und $ac \sim bc \quad \forall a, b, c \in W^\pm$.

Bezeichne $F := W^\pm / \sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Die Klasse von $a \in W^\pm$ heiße $[a]$. Offensichtlich definiert die Verknüpfung auf W^\pm eine Verknüpfung auf F . Das Assoziativgesetz gilt schon in W^\pm , also erst recht in F . Das leere Wort e ist schon neutral in W^\pm , also ist erst recht $[e]$ neutral in F . Um die Existenz von Inversen nachzuweisen, betrachte man zu $a = a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots a_n^{\sigma_n}$ das Wort $b = a_n^{-\sigma_n} \dots a_2^{-\sigma_2} a_1^{-\sigma_1}$ oder in Formeln zu $a : \{1, \dots, n\} \rightarrow (X \times \{+1, -1\})$ das Wort b gegeben durch $b(i) = (a_{n-i}, -\sigma_{n-i})$. Ist zum Beispiel $a = xyx^{-1}yx^{-1}$, so nehmen wir $b = x^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}$. Dann gilt offensichtlich $[b][a] = [a][b] = [e]$. Mithin ist F eine Gruppe. Wir betrachten nun die Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ gegeben durch $x \mapsto [x]$ und zeigen sie universell ist. Seien dazu G eine Gruppe und $\varphi : X \rightarrow G$ eine Abbildung. Man definiere $\hat{\varphi} : W^\pm \rightarrow G$ durch

$$\hat{\varphi}(a_1^{\sigma_1} \dots a_n^{\sigma_n}) = \varphi(a_1)^{\sigma_1} \dots \varphi(a_n)^{\sigma_n}$$

Betrachten wir auf W^\pm die Äquivalenz-Relation $a \sim_\varphi b \Leftrightarrow \hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}(b)$, so erfüllt \sim_φ sicher die Bedingungen 1 und 2 an unsere Äquivalenzrelation auf W^\pm . Also ist $\hat{\varphi}$ konstant auf den Äquivalenzklassen zu \sim und definiert eine Abbildung $\tilde{\varphi} : F \rightarrow G$ mit $\tilde{\varphi}([a]) = \hat{\varphi}(a)$. Damit ist die Existenz von $\tilde{\varphi}$ gezeigt. Die Eindeutigkeit ist klar, unsere Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow F$ ist also in der Tat universell. Die Argumentation ist beim Beweis von Teil 2 sehr ähnlich wie beim Nachweis der Eindeutigkeit von Produkten bis auf eindeutigen Isomorphismus 6.1.3 und bleibe dem Leser überlassen. Formal sind alle diese Aussagen Spezialfälle der Eindeutigkeit darstellender Objekte 10.10.17. \square

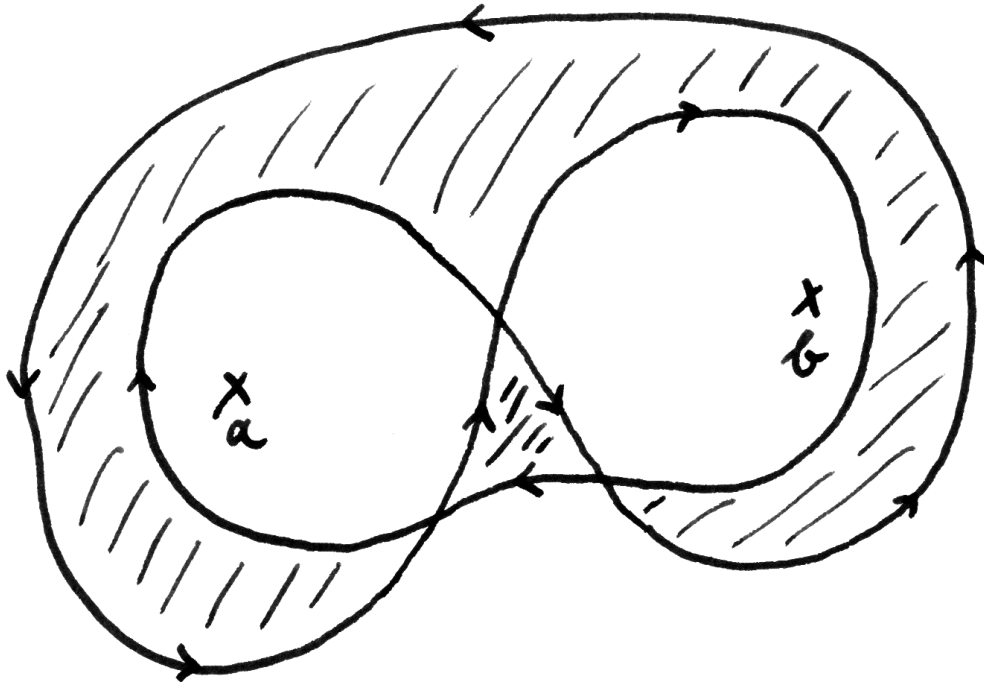
Vorschau 6.5.9. Die Notationen $\text{Mon}^\wedge X$ und $\text{Grp}^\wedge X$ werden in 8.8.7 verallgemeinert auf beliebige Kategorien \mathcal{C} mit einem ausgezeichneten Funktor in die Kategorie der Mengen $v : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$. Auch in dieser Situation erklären wir eine „universelle Mengen- \mathcal{C} -Abbildung“ als eine Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow vC$ mit $X \in \text{Ens}$ und $C \in \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft, daß das Anwenden von v und Vorschalten von ε für alle $D \in \mathcal{C}$ eine Bijektion $(\circ\varepsilon) : \mathcal{C}(C, D) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, vD)$ liefert. Auch in dieser Allgemeinheit notieren wir C dann gerne $C \setminus X$.

Beispiel 6.5.10 (Fundamentalgruppe koendlicher Teilmengen der Ebene). Gegeben $E \subset \mathbb{C}$ eine endliche Teilmenge und $* \in \mathbb{C} \setminus E$ ein Basispunkt derart, daß keine zwei Punkte aus E mit $*$ kollinear sind, erhalten wir einen Isomorphismus

$$\text{Grp}^\wedge E \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C} \setminus E, *)$$

durch die Vorschrift $p \mapsto [\alpha_p]$ mit α_p einem Weg, der erst auf geradem Wege von $*$ so nah an p herangeht, daß man näher bei p ist als bei allen anderen $q \in E$, dann einmal im Gegenuhrzeigersinn um p herum, und dann wieder auf geradem Wege zu $*$ zurück“. Das folgert man induktiv mit Seifert-van Kampen und Übung 6.5.16 und der offenen Überdeckung, die wir erhalten, indem wir erst die Ebene von $*$ ausgehend so in Kuchenstücke aufschneiden, daß in jedem Kuchenstück genau ein Punkt von E liegt, und dann diese Kuchenstücke etwas aufdicken, indem wir alle Punkte mit einem Abstand $< \varepsilon$ vom gegebenen Kuchenstück mit dazunehmen und dabei $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß auch in jedem dieser aufgedickten Kuchenstücke nur genau ein Punkt von E liegt. Im Fall eines allgemeinen Basispunktes können wir uns mit unseren Erkenntnisse zum Wechsel des Basispunktes 5.7.2 unschwer auf den bereits behandelten Fall zurückziehen.

Ergänzung 6.5.11. Gegeben eine Menge X kann man die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}X$ aller derjenigen Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{Z}$ betrachten, die an höchstens endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annehmen. Die Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{Z}X$, die jedem Element von X seine charakteristische Funktion zuordnet, hat dann die universelle Eigenschaft, daß das Vorschalten dieser Abbildung für jede abelsche



Ein geschlossener nicht zusammenziehbarer Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Denken wir uns das Mittelkreuz als Basispunkt und bezeichnet α beziehungsweise β in der Fundamentalgruppe das Umrunden gegen den Uhrzeigersinn von a beziehungsweise b , so ist unser Fundamentalgruppe nach 6.5.10 frei erzeugt von α und β und unser Weg repräsentiert das Element $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ in der Fundamentalgruppe. Denken wir uns an den beiden Kreuzen je einen Nagel in die Wand geschlagen, bleibt unsere Schnur hängen, weil sie eben ein nichttriviales Element der Fundamentalgruppe repräsentiert. Sobald wir einen der beiden Nägel herausziehen, wird jedoch die Fundamentalgruppe des Komplements des verbleibenden Nagels kommutativ und die Schnur fällt herunter.

Gruppe A eine Bijektion

$$(\circ\varepsilon) : \text{Ab}(\mathbb{Z}X, A) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, A)$$

zwischen der Menge aller Homomorphismen von abelschen Gruppen $\mathbb{Z}X \rightarrow A$ und der Menge aller Abbildungen $X \rightarrow A$ induziert. Sie ist also eine universelle Mengen-(abelsche-Gruppen)-Abbildung. Aufgrund dieser universellen Eigenschaft heißt $\mathbb{Z}X$ die **freie abelsche Gruppe über X** und wir notieren sie auch $\text{Ab}^\wedge X$ und notieren unsere universelle Abbildung $\varepsilon : X \rightarrow \text{Ab}^\wedge X$. Wieder legt diese universelle Eigenschaft unser Paar $(\varepsilon, \mathbb{Z}X)$ bereits bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig fest. So erkennen wir, daß der durch das letztere ε induzierte Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varepsilon} : \text{Grp}^\wedge X \rightarrow \text{Ab}^\wedge X$ einen Isomorphismus

$$(\text{Grp}^\wedge X)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \text{Ab}^\wedge X$$

von der Abelisierung im Sinne von 5.8.1 der freien Gruppe über X in die freie abelsche Gruppe über X induzieren muß. Das hinwiederum zeigt, daß die freien Gruppen über zwei Mengen X, Y nur dann isomorph sein können, wenn gilt $|X| = |Y|$, denn für $A := \text{Ab}^\wedge X$ können wir das daraus folgern, daß $A/2A$ in Bijektion ist zur Menge aller endlichen Teilmengen von X . Wir nennen die Kardinalität von X den **Rang** der freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge X$.

Vorschau 6.5.12. Da die Vorschrift $X \mapsto \mathbb{Z}X$ einen kovarianten Funktor $\text{Ens} \rightarrow \text{Ab}$ liefert, ist es richtiger, die Elemente von $\mathbb{Z}X$ als eine Art „kompakt getragener Maße“ auf X aufzufassen. Wenn wir diesen Gesichtspunkt betonen wollen, verwenden wir die Notation $\mathbb{Z}X = \text{Maß}_i(X)$ und $\varepsilon(x) = \delta_x$.

Ergänzung 6.5.13 (Freie Untergruppen einer Matrixgruppe). Man kann sich mit Möbiusgeometrie anschaulich leicht klar machen, daß die Gruppe $\text{GL}(2; \mathbb{C})$, ja selbst die Gruppe $\text{PGL}(2; \mathbb{C})$ freie Untergruppen von beliebigem endlichem Rang besitzt. Dazu betrachtet man ihre Operation auf der Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Für jedes Paar von abgeschlossenen Kreisscheiben $K, L \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $K \subset L^\circ$ findet man $\gamma \in \text{PGL}(2; \mathbb{C})$ mit $\gamma(K^\circ) = L^\circ$. Erinnert man etwa $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ und nimmt zwei konzentrische Kreisscheiben in \mathbb{C} , so wäre etwa eine geeignete Streckung ein mögliches γ . Wählt man nun endlich viele paarweise disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben $K_i \subset L^\circ$ und betrachtet das Untergruppenerzeugnis $\Gamma := \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle$ der zugehörigen γ_i , so erhält man eine freie Gruppe vom Rang r . In der Tat, betrachtet man die Menge A aller Translate des $A := \Gamma(\partial L)$ des Randkreises von L und die Menge $E := \text{Zus}(A)$ ihrer Zusammenhangskomponenten und verbindet je zwei Elemente $p, q \in E$ durch eine Kante, wenn die entsprechenden Kreise im Abschluß derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus A$ liegen. So erhält man einen zykliefreien eindimensionalen Simplizialkomplex alias Baum, bei dem von jeder Ecke $2r$ Kanten ausgehen. Die induzierte Operation

von Γ auf diesem Simplicialkomplex geschieht in der Weise, daß unsere Erzeuger γ_i und ihre Inversen jede Ecke $p \in E$ auf alle ihre $2r$ Nachbarn schieben. So kann man zumindest anschaulich gut einsehen, daß Γ eine freie Gruppe vom Rang r sein muß. Diese freien Untergruppen von $\text{PGL}(2; \mathbb{C})$ heißen **Schottky-Gruppen**.

Übungen

Übung 6.5.14 (Freie Gruppe als Menge unkürzbarer Worte). Sei X eine Menge. Man zeige, daß jedes Element der freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge X$ über X genau einen Repräsentanten kürzester Länge im freien Monoid $\text{Mon}^\wedge(X \times \{+1, -1\})$ hat, und daß diese Repräsentanten genau die „unkürzbaren Worte“ aus diesem freien Monoid sind. Hinweis: Man konstruiere eine Operation der Gruppe $\text{Grp}^\wedge X$ auf der Menge aller unkürzbaren Worte.

Übung 6.5.15. Man zeige, daß x und $a := yxyx^{-1}y^{-1}$ in der freien Gruppe über den beiden Symbolen x, y eine echte Untergruppe erzeugen, die surjektiv auf die Abelianisierung unserer freien Gruppe abbildet. Hinweis: 6.5.14.

Übung 6.5.16. Jede Abbildung von Mengen $\varphi : X \rightarrow Y$ setzt sich auf genau eine Weise fort zu einer Abbildung von Gruppen $\text{Grp}^\wedge X \rightarrow \text{Grp}^\wedge Y$, und unser Grp^\wedge ist so in natürlicher Weise ein Funktor von den Mengen in die Gruppen. Man zeige, daß dieser Funktor Grp^\wedge kokartesische Diagramme von Mengen zu kokartesischen Diagrammen von Gruppen macht. Das wird später zu 8.3.12 verallgemeinert. Sind insbesondere X und Y zwei Mengen, so ist das folgende Diagramm kokartesisch in der Kategorie der Gruppen:

$$\begin{array}{ccc} \text{Grp}^\wedge(X \cap Y) & \rightarrow & \text{Grp}^\wedge X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grp}^\wedge Y & \rightarrow & \text{Grp}^\wedge(X \cup Y) \end{array}$$

Übung 6.5.17. Man zeige, daß wir einen Isomorphismus zwischen der freien Gruppe über einer endlichen Menge I und der Fundamentalgruppe der Einpunktverbindung $\bigvee_{i \in I} S^1$ von Kopien der bepunkteten Räume $(S^1, 1)$ erhalten, wenn wir jedem $i \in I$ das „einfache Durchlaufen der i -ten Kreislinie“ zuordnen.

Übung 6.5.18 (Verschlungene und nicht verschlungene Kreislinien). Die Fundamentalgruppe des Komplements der Vereinigung von zwei „nicht ineinander verschlungenen“ Kreislinien in \mathbb{R}^3 ist isomorph zur freien Gruppe in zwei Erzeugern. Hinweis: 6.4.7. Die Fundamentalgruppe des Komplements von zwei „ineinander verschlungenen“ Kreislinien in \mathbb{R}^3 ist isomorph zur freien abelschen Gruppe in zwei Erzeugern. Hinweis: \mathbb{R}^3 mithilfe von 6.4.6 zu S^3 ergänzen, 5.7.17 anwenden. Es gibt also keinen Homöomorphismus des \mathbb{R}^3 mit sich selber, der ein Paar von verschlungenen Kreislinien zu einem Paar von nicht verschlungenen Kreislinien macht.

Übung 6.5.19. Man bestimme die Fundamentalgruppe des Komplements einer Acht in \mathbb{R}^3 .

6.6 Push-out von Gruppen

6.6.1. Schon beim Satz von Seifert und van Kampen wird sich der Leser gefragt haben, ob sich jedes Kowinkeldiagramm von Gruppen zu einem kokartesischen Diagramm vervollständigen läßt. Das ist in der Tat der Fall und soll nun bewiesen werden. Wir beginnen mit einem besonders einfachen Fall.

Satz 6.6.2 (Koprodukte von Gruppen). *In der Kategorie der Gruppen existiert zu je zwei Gruppen ein Koprodukt.*

Ergänzung 6.6.3. Man zeigt ähnlich, daß für eine beliebige Familie von Gruppen ein Koprodukt in der Kategorie der Gruppen existiert.

Beweis. Das Koprodukt von zwei Gruppen G_1 und G_2 heißt auch das **freie Produkt** der Gruppen G_1 und G_2 und wird notiert als

$$G_1 * G_2$$

Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge G$ über der Menge G haben wir für jede Gruppe G genau einen Gruppenhomomorphismus $\eta = \eta_G : \text{Grp}^\wedge G \rightarrow G$, dessen Verknüpfung mit $\varepsilon : G \rightarrow \text{Grp}^\wedge G$ die Identität auf G ist. Den Kern $RG \subset \text{Grp}^\wedge G$ dieses Gruppenhomomorphismus nennen wir die „Relationen von G “. Wir definieren die Gruppe $G_1 * G_2$ als den Quotienten der freien Gruppe über der disjunkten Vereinigung unserer beiden Gruppen nach dem von den Relationen in beiden Gruppen erzeugten Normalteiler, in Formeln

$$G_1 * G_2 := \text{Grp}^\wedge(G_1 \sqcup G_2) / \langle\langle RG_1 \cup RG_2 \rangle\rangle$$

Hier haben wir der Einfachheit halber das Bild von RG_i unter der von der Inklusion induzierten Abbildung $\text{Grp}^\wedge G_i \rightarrow \text{Grp}^\wedge(G_1 \sqcup G_2)$ auch mit RG_i bezeichnet. Wir behaupten nun, daß diese Gruppe $G_1 * G_2$ mit den offensichtlichen Abbildungen $\text{can}_i : G_i \rightarrow G_1 * G_2$ ein Koprodukt ist. In der Tat, ist irgendeine Gruppe H gegeben mitsamt Abbildungen $f_1 : G_1 \rightarrow H$ und $f_2 : G_2 \rightarrow H$, so erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $f : \text{Grp}^\wedge(G_1 \sqcup G_2) \rightarrow H$. Ist zusätzlich f_i ein Gruppenhomomorphismus, so liegt RG_i im Kern von f . Sind f_1, f_2 Gruppenhomomorphismen, so definiert f mithin einen Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : G_1 * G_2 \rightarrow H$. \square

Korollar 6.6.4. *Jedes Kowinkeldiagramm von Gruppen läßt sich zu einem push-out-Diagramm vervollständigen.*

6.6.5. Man nennt so einen push-out auch ein **amalgamiertes Produkt** und bezeichnet ihn mit $G_1 *_G G_2$.

Beweis. Sei

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_2} & G_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \\ G_1 & & \end{array}$$

unser Kowinkeldiagramm. Wir konstruieren dann unseren Pushout als den Quotienten $G_1 * G_2 / \langle\langle \varphi_1(x)^{-1} \varphi_2(x) \mid x \in G \rangle\rangle$ und überlassen es dem Leser, die universelle Eigenschaft zu prüfen. \square

Übungen

Übung 6.6.6. Ist in einem kokartesischen Diagramm von Gruppen einer der Ausgangspfeile eine Surjektion, so auch der parallele Pfeil in den Pushout. Hinweis: Sein Bild hat die universelle Eigenschaft.

Übung 6.6.7 (Explizite Beschreibung des freien Produkts). Seien G_1, G_2 Gruppen. Man zeige, daß sich jedes Element des freien Produkts $G_1 * G_2$ in eindeutiger Weise als ein Produkt $g_1 g_2 \dots g_n$ schreiben läßt mit $n \geq 0$ und $g_k \in G_{\varepsilon(k)}$ nicht das neutrale Element und $\varepsilon(k) \neq \varepsilon(k+1)$ für $1 \leq k < n$. Wie üblich soll hier das leere Produkt mit $n = 0$ das neutrale Element von $G_1 * G_2$ darstellen. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von Übung 6.5.14.

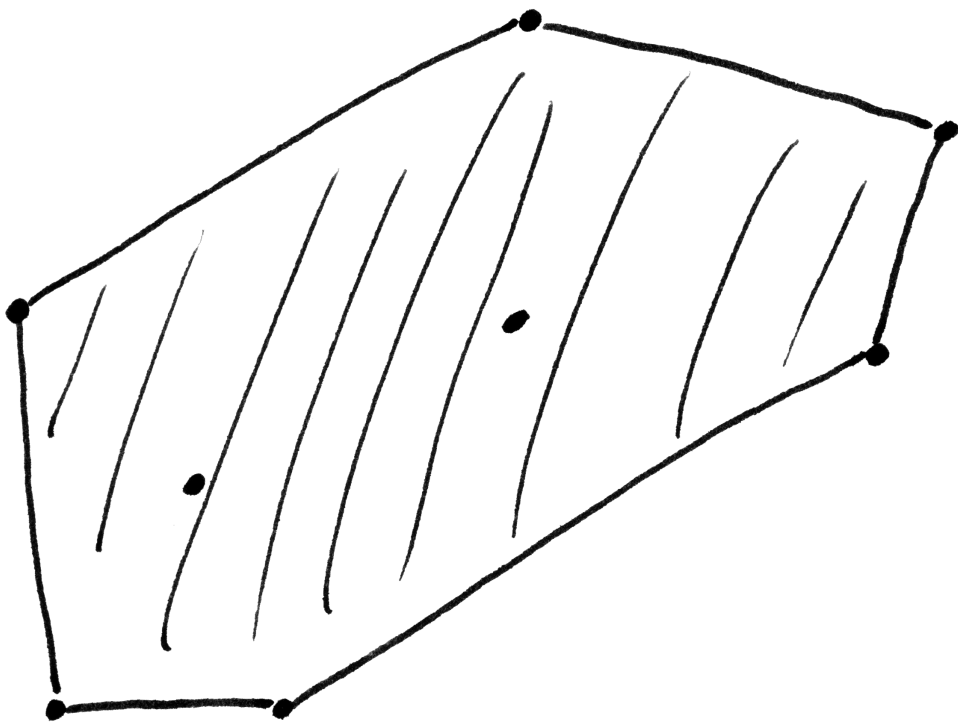
6.7 Simplicialkomplexe und triangulierbare Flächen

6.7.1. Gegeben V ein reeller Raum und $M \subset V$ eine Teilmenge definiert man die **konvexe Hülle von M** als den Schnitt aller konvexen Teilmengen von V , die M umfassen. Explizit wird die konvexe Hülle einer nichtleeren Menge im Fall eines Vektorraums gegeben durch die Vorschrift

$$\text{konv}(M) := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i p_i \mid n \geq 0, p_i \in M, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

Im Fall eines affinen Raums gilt dieselbe Formel, wenn man die Summe interpretiert als $q + \sum_{i=0}^n t_i (p_i - q)$ für irgendeinen Punkt q .

Definition 6.7.2. Ich erinnere daran, daß eine nichtleere Familie (p_0, \dots, p_n) von Punkten eines reellen affinen Raums **affin unabhängig** heißt, wenn es keinen $(n-1)$ -dimensionalen affinen Teilraum gibt, der alle ihre Punkte enthält. Dann nennt man ihre konvexe Hülle $\text{konv}(p_0, \dots, p_n)$ den **vollen Simplex mit Ecken p_0, \dots, p_n** .



Eine endliche Teilmenge der Ebene, dargestellt durch fette Punkte, und ihre konvexe Hülle, dargestellt als schraffierter Bereich.

Beispiele 6.7.3. Ein einzelner Punkt p ist stets affin unabhängig und wir haben $\text{konv}(p) = \{p\}$. Ein Zweitupel (p, q) von Punkten ist affin unabhängig genau dann, wenn die beiden Punkte verschieden sind, und in diesem Fall ist $\text{konv}(p, q)$ das „abgeschlossene Streckenstück zwischen p und q “, das wir manchmal auch $[p, q]$ notieren. Ein Dreitupel (p, q, r) von Punkten ist affin unabhängig genau dann, wenn die drei Punkte nicht auf einer affinen Gerade liegen, und in diesem Fall ist $\text{konv}(p, q, r)$ die „abgeschlossene Fläche des Dreiecks mit den Ecken p, q und r “.

6.7.4 (Diskussion der Terminologie). Die Bezeichnung „Simplex“ kann wohl zurückgeführt werden auf denselben Wortstamm wie „simpel“. In jedem Fall werden volle Simplizes verwendet als einfachste Grundbausteine bei der Konstruktion komplizierterer Räume. Die Konstruktionsvorschrift ist dabei ein rein kombinatorisches Datum, das wir gleich definieren und einen „Simplizialkomplex“ nennen werden. Den zugehörigen topologischen Raum nennen wir dann seine „topologische Realisierung“.

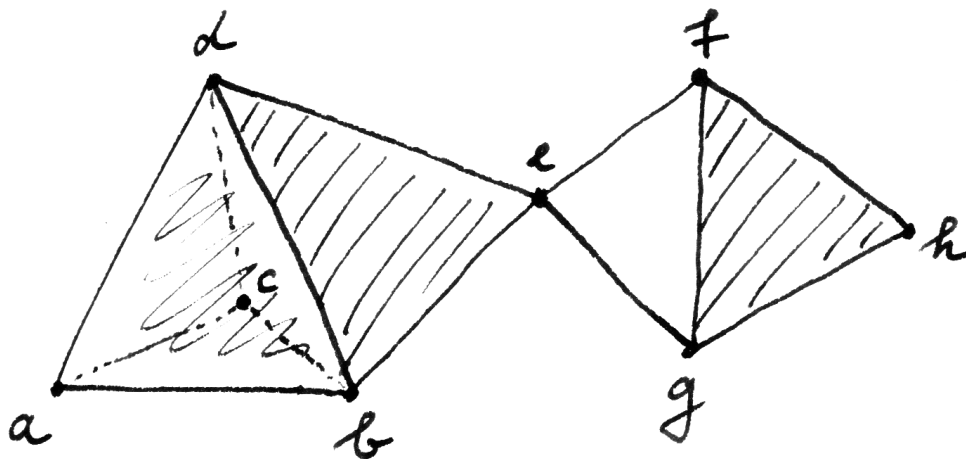
Definition 6.7.5. Ein **Simplizialkomplex** $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ist eine Menge E mit samt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen von E , das unter dem Bilden von nichtleeren Teilmengen stabil ist und alle einelementigen Teilmengen von E enthält. In Formeln ausgedrückt fordern wir von unserem Mengensystem $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ also:

1. $0 < |K| < \infty \forall K \in \mathcal{K}$;
2. $(K \in \mathcal{K} \text{ und } \emptyset \neq L \subset K) \Rightarrow L \in \mathcal{K}$;
3. $\{e\} \in \mathcal{K} \forall e \in E$.

Wir nennen die Elemente von E die **Ecken** und die Elemente von \mathcal{K} die **Simplizes** oder ausführlicher **kombinatorischen Simplizes** unseres Simplizialkomplexes. Die Simplizes der Kardinalität $(n + 1)$ nennen wir **n -Simplizes** und die Menge aller n -Simplizes notieren wir \mathcal{K}_n . Wir identifizieren oft stillschweigend die Menge E der Ecken mit der Menge \mathcal{K}_0 der 0-Simplizes.

Vorschau 6.7.6 (Diskussion der Terminologie). Wenn in der Literatur von einem Simplizialkomplex die Rede ist, ist auch oft eine „Menge mit einer simplizialen Teilordnung“ im Sinne von Übung 6.7.19 gemeint. Wir diskutieren dort, inwiefern das „im wesentlichen dasselbe Datum“ ist wie ein Simplizialkomplex.

Beispiel 6.7.7. Jede Menge E ist mit dem System $\mathcal{K} = \mathcal{M}_E$ all ihrer nichtleeren endlichen Teilmengen ein Simplizialkomplex $\mathcal{M}_E = (E, \mathcal{M}_E)$. Ich nenne ihn den **maximalen Simplizialkomplex mit Eckenmenge E** .



Versuch der graphischen Darstellung der topologischen Realisierung eines
 Simplicialkomplexes mit acht Ecken $E = \{a, b, \dots, h\}$, einem 3-Simplex
 $\{a, b, c, d\}$, sechs 2-Simplizes $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, d, e\}$,
 $\{f, g, h\}$, und dreizehn 1-Simplizes.

Definition 6.7.8. Wir ordnen jedem Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ einen topologischen Raum $\Delta(\mathcal{K})$ zu, den wir seine **topologische Realisierung** oder kurz **Realisierung** nennen. Als zugrundeliegende Menge nehmen wir

$$\Delta(\mathcal{K}) := \left\{ t : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \begin{array}{l} \text{Es gibt einen kombinatorischen Simplex } \sigma \in \mathcal{K} \\ \text{mit } (\text{supp } t) = \sigma \text{ und es gilt } \sum_{e \in E} t(e) = 1 \end{array} \right\}$$

Hier verwenden wir die übliche Notation $\text{supp } t := \{e \in E \mid t(e) \neq 0\}$ für den Träger oder englisch und französisch „support“ von t . Unsere Menge $\Delta(\mathcal{K})$ ist enthalten im Vektorraum $\mathbb{R}E$ aller Abbildungen $E \rightarrow \mathbb{R}$ mit endlichem Träger. Für $\sigma \in \mathcal{K}$ betrachten wir nun die Teilmenge $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ aller t mit Träger in σ . Bezeichnen wir für $e \in E$ mit $1e = \delta_e \in \mathbb{R}E$ das zugehörige Element der Standardbasis und besteht σ aus den $n + 1$ Ecken $e_0, \dots, e_n \in E$, so ist $\Delta(\sigma)$ gerade die konvexe Hülle der $1e_i$, in Formeln

$$\Delta(\sigma) = \text{konv}(1e_0, \dots, 1e_n)$$

Unsere topologische Realisierung ist die Vereinigung aller dieser vollen Simplexes. Ist E endlich, so nehmen wir als Topologie auf $\Delta(\mathcal{K})$ schlicht die Topologie, die induziert wird von der natürlichen Topologie auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}E$. Im allgemeinen verstehen wir $\Delta(\mathcal{K})$ mit der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$ von Realisierungen endlicher Unterkomplexe $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ oder gleichbedeutend der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ der vollen Simplexes zu $\sigma \in \mathcal{K}$. In Übung 6.7.17 wird erklärt, warum wir unsere Menge nicht mit der Kofinaltopologie zur Familie der Auswertungen an allen Ecken E unseres Komplexes verstehen wollen.

Ergänzung 6.7.9. Für die Realisierung eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} ist statt $\Delta(\mathcal{K})$ auch die Notation $|\mathcal{K}|$ gängig. Ob im Zweifelsfall die Kardinalität der Menge \mathcal{K} oder die Realisierung des Simplizialkomplexes \mathcal{K} gemeint ist, muß der Leser dann aus dem Kontext erschließen.

Ergänzung 6.7.10. Ein grundlegendes und weitgehend ungelöstes Problem der Topologie ist die Klassifikation aller Realisierungen endlicher Simplizialkomplexe bis auf Homotopie, vergleiche zum Beispiel den Artikel von Baues in [Jam95].

6.7.11 (Sparsame Realisierung von Simplizialkomplexen). Wir können die Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines Simplizialkomplexes (E, \mathcal{K}) oft auch in affine Räume X einer Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X < |E|$ einbetten. Ist genauer $E \rightarrow X, e \mapsto \bar{e}$ irgendeine Abbildung der Ecken unseres Simplizialkomplexes in einen reellen affinen Raum X , so gibt es genau eine affine Abbildung $\{t \in \mathbb{R}E \mid \sum t(e) = 1\} \rightarrow X$ mit $e \mapsto \bar{e}$. Ist diese Abbildung darüber hinaus injektiv auf $\Delta(\mathcal{K})$ und ist X endlichdimensional und unser Simplizialkomplex endlich, so induziert unsere Abbildung

nach 3.5.13 einen Homöomorphismus von der geometrischen Realisierung unseres Simplizialkomplexes mit ihrem Bild. Dasselbe gilt mit 3.7.30, wenn wir statt $|\mathcal{K}| < \infty$ schwächer nur fordern, daß die Bilder der vollen Simplizes eine lokal endliche Überdeckung des Bildes von $\Delta(\mathcal{K})$ bilden. Notwendig und hinreichend für die Injektivität ist, daß (1) für jeden Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ die Familie $(\bar{p})_{p \in \sigma}$ affin unabhängig ist in X und daß (2) gegeben zwei Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ für die vollen Simplizes $\text{konv}(\bar{\sigma}) \subset X$ gilt $\text{konv}(\bar{\sigma}) \cap \text{konv}(\bar{\tau}) = \text{konv}(\overline{\sigma \cap \tau})$.

Definition 6.7.12. Eine **simpliziale Abbildung** φ von einem Simplizialkomplex (E, \mathcal{K}) in einen Simplizialkomplex (F, \mathcal{L}) ist eine Abbildung auf den Ecken $\varphi : E \rightarrow F$ derart, daß gilt $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \varphi(\sigma) \in \mathcal{L}$. So eine simpliziale Abbildung liefert eine stetige Abbildung $\Delta(\varphi) : \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{L})$ zwischen den zugehörigen topologischen Räumen durch „affine Fortsetzung auf das Innere der vollen Simplizes“, in Formeln $\Delta(\varphi) : t \mapsto s$ mit

$$s(f) := \sum_{\varphi(e)=f} t(e) \quad \forall f \in F$$

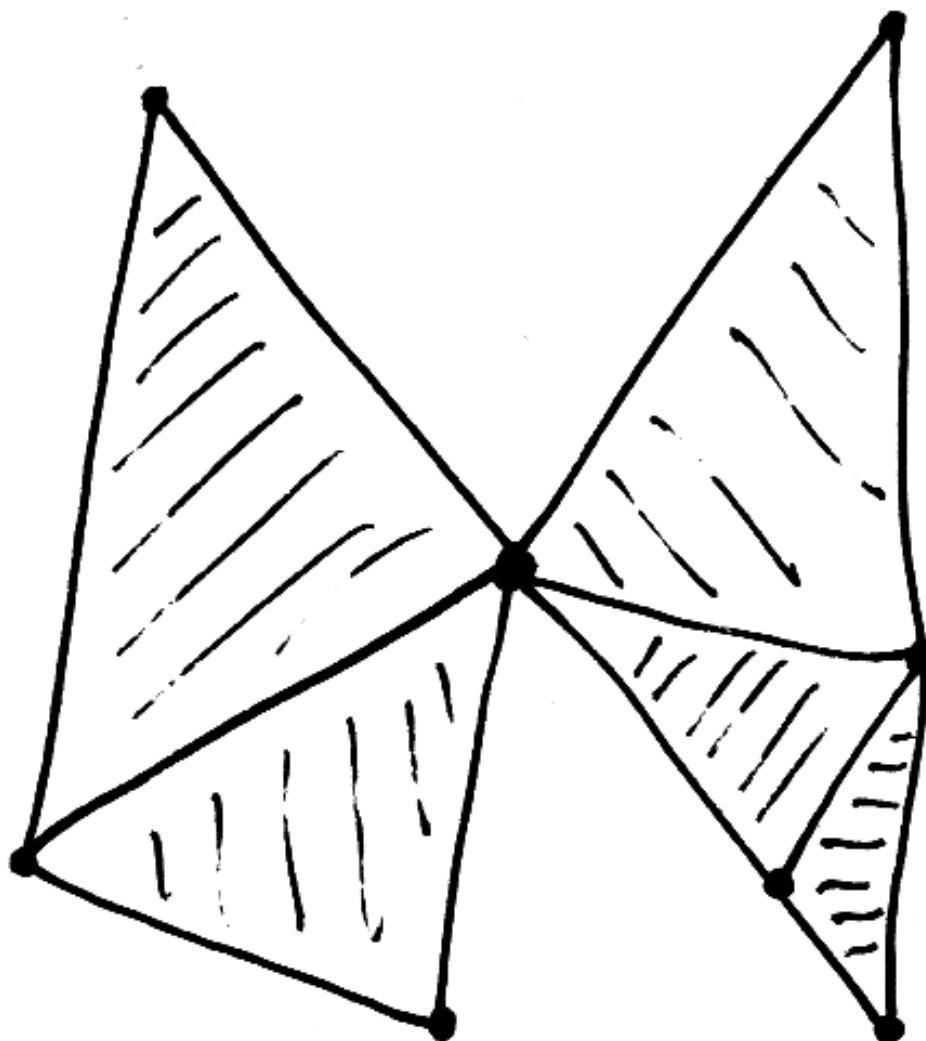
Wir nennen $\Delta(\varphi)$ die **topologische Realisierung** unserer simplizialen Abbildung und schreiben oft einfacher φ statt $\Delta(\varphi)$.

Definition 6.7.13. Eine **kombinatorische Fläche** ist ein endlicher Simplizialkomplex \mathcal{F} derart, daß gilt:

1. Jeder Simplex liegt in einem 2-Simplex;
2. Jeder 1-Simplex liegt in höchstens zwei 2-Simplizes;
3. Alle 2-Simplizes, die einen gegebenen 0-Simplex enthalten, lassen sich so durchnummerieren als $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, daß jeweils σ_i und σ_{i+1} eine Kante gemeinsam haben, in Formeln $|\sigma_i \cap \sigma_{i+1}| = 2$ für $1 \leq i < r$.

Diejenigen 1-Simplizes, die nur zu einem einzigen 2-Simplex gehören, nennen wir die **Randkanten** unserer kombinatorischen Fläche. Gehört sogar jeder 1-Simplex zu genau zwei 2-Simplizes, so nennen wir unseren Simplizialkomplex eine **geschlossene kombinatorische Fläche** oder auch eine **kombinatorische Fläche ohne Rand**.

6.7.14. Es ist leicht zu sehen und auch nicht schwer zu beweisen, daß die topologische Realisierung einer geschlossenen kombinatorischen Fläche \mathcal{F} eine geschlossene Fläche $\Delta(\mathcal{F})$ alias eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit im Sinne unserer Definition 5.1.5 ist.



Dieser Simplicialkomplex ist keine kombinatorische Fläche, da im „mittleren Punkt“ die dritte Bedingung unserer Definition 6.7.13 verletzt ist.

Definition 6.7.15. Eine **Triangulierung** einer geschlossenen Fläche X ist ein Paar bestehend aus einer geschlossenen kombinatorischen Fläche \mathcal{F} und einem Homöomorphismus $\Delta(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} X$.

Ergänzung 6.7.16. Rado [?, ?] hat gezeigt, daß jede geschlossene Fläche eine Triangulierung besitzt. Der Beweis ist nicht ganz einfach. In höheren Dimensionen gibt es kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, die nicht homöomorph sind zur Realisierung eines Simplicialkomplexes, die also „nicht triangulierbar“ sind.

Übungen

Übung 6.7.17. Die Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines Simplicialkomplexes (E, \mathcal{K}) ist stets Hausdorff und jede kompakte Teilmenge $A \subset \Delta(\mathcal{K})$ ist schon enthalten in einer Vereinigung von endlich vielen vollen Simplex. Hinweis: Eine Teilmenge von $\Delta(\mathcal{K})$, die jeden Simplex in höchstens endlich vielen Punkten trifft, ist stets abgeschlossen und diskret. Besteht unser Simplicialkomplex aus abzählbar vielen Kanten, die in einen zentralen Punkt hereinlaufen, so gälte diese Aussage nicht für die von den Auswertungen an allen Ecken induzierte Initialtopologie.

Übung 6.7.18. Ein Simplicialkomplex heißt **lokal endlich**, wenn jede seiner Ecken nur zu endlich vielen Simplex gehört. Man zeige, daß ein Simplicialkomplex genau dann lokal endlich ist, wenn seine topologische Realisierung lokal kompakt ist. Hinweis: 6.7.17.

Übung 6.7.19. Ein Teilordnung \leq auf Menge K heiße **simplicial**, wenn gilt:

1. K hat ein kleinstes Element;
2. Jede zweielementige Teilmenge von K besitzt eine größte untere Schranke;
3. Die Menge aller Elemente kleinergleich einem beliebig vorgegebenen Element ist als teilgeordnete Menge isomorph zum System aller Teilmengen einer endlichen Menge.

Gegeben ein Simplicialkomplex (E, \mathcal{K}) setzen wir $\tilde{\mathcal{K}} := \mathcal{K} \sqcup \{\emptyset\}$ und nennen diese Menge seine **Augmentierung**. Dann ist für jeden Simplicialkomplex im Sinne von 6.7.5 die auf seiner Augmentierung $\tilde{\mathcal{K}}$ durch die Inklusion gegebenen Teilordnung simplicial. Man zeige, daß auch umgekehrt jede Menge mit einer simplicialen Teilordnung isomorph ist zur Augmentierung eines bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmten Simplicialkomplexes im Sinne von 6.7.5.

Ergänzende Übung 6.7.20. Gegeben eine Menge E nennen wir die topologische Realisierung $\Delta(\mathcal{M}_E)$ des maximalen Simplicialkomplexes \mathcal{M}_E mit Eckenmenge E den **vollen Simplex mit Eckenmenge E** . Man zeige, daß für $E \neq \emptyset$ der volle Simplex $\Delta(\mathcal{M}_E)$ zusammenziehbar ist.

6.8 Klassifikation der geschlossenen Flächen

6.8.1. Wir werden im folgenden den in 5.1.7 formulierten Satz unter der Zusatzannahme der „Triangulierbarkeit“ beweisen, wir klassifizieren also die triangulierbaren geschlossenen Flächen bis auf Homöomorphie. Dieser Abschnitt nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als die Argumentation nicht so weit in die formalen Details getrieben wird wie in den übrigen Abschnitten.

Definition 6.8.2. Sei \mathcal{F} eine kombinatorische Fläche. Eine **Zerschneidung von \mathcal{F}** ist eine kombinatorische Fläche \mathcal{Z} mit einer simplizialen Abbildung $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{F}$, die auf den 2-Simplizes eine Bijektion $\varphi : \mathcal{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_2$ induziert. Umgekehrt sagen wir in dieser Situation auch, \mathcal{F} entstehe durch **Verklebung von \mathcal{Z}** .

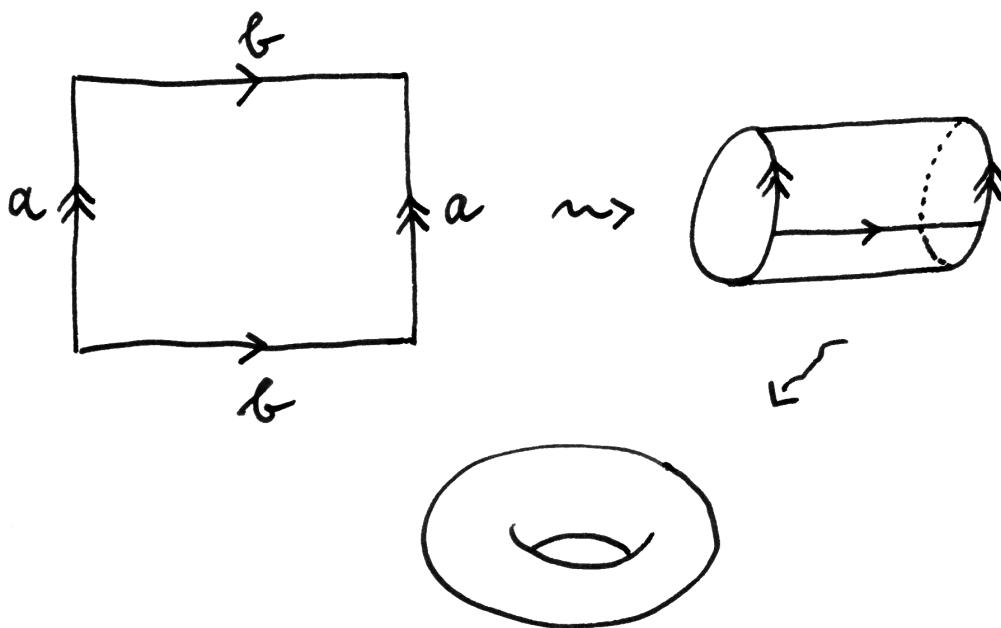
Definition 6.8.3. Eine kombinatorische Fläche \mathcal{Z} heiße ein **Vieleck**, wenn ihre topologische Realisierung $\Delta(\mathcal{Z})$ homöomorph ist zur abgeschlossenen Kreisscheibe $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Lemma 6.8.4. *Ist eine kombinatorische Fläche \mathcal{Z} ein Vieleck und $\varphi : D^2 \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{Z})$ ein Homöomorphismus, so ist das Bild der Kreislinie $\varphi(S^1)$ die Vereinigung der Randkanten von \mathcal{Z} im Sinne von 6.7.13.*

Beweis. Das Komplement von S^1 kann man in der Kreisscheibe D^2 charakterisieren als die Menge aller Punkte z , die eine zusammenziehbare Umgebung U besitzen derart, daß $U \setminus z$ nichttriviale Fundamentalgruppe hat. Das Komplement der Vereinigung der Randkanten in $\Delta(\mathcal{Z})$ kann man genauso charakterisieren. \square

Lemma 6.8.5. *Jede zusammenhängende kombinatorische Fläche besitzt eine Zerschneidung zu einem Vieleck.*

Beweis. Sei \mathcal{F} unsere kombinatorische Fläche. Sicher gibt es eine Zerschneidung von \mathcal{F} in eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Vielecke. Sei $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{F}$ eine solche Zerschneidung mit der kleinstmöglichen Zahl von Zusammenhangskomponenten. Nehmen wir einmal an, es gäbe hier mehr als eine Komponente. Dann könnten wir also 2-Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{F}_2$ finden, die von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von \mathcal{Z} herkommen. Da \mathcal{F} zusammenhängend ist, könnten wir σ, τ in \mathcal{F} durch eine Kette von 2-Simplizes $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r = \tau$ verbinden derart, daß gilt $\sigma_i \cap \sigma_{i+1} \neq \emptyset$. Aufgrund unserer Annahmen an eine kombinatorische Fläche können wir sogar annehmen, daß $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ jeweils ein 1-Simplex ist. Dann finden wir aber notwendig ein i derart, daß σ_i und σ_{i+1} von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von \mathcal{Z} herkommen. Verkleben wir nun diese beiden Zusammenhangskomponenten entlang der Randkante $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$, so erhalten wir eine Zerschneidung von \mathcal{F} in weniger Vielecke, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität. \square



Dieses Bild zeigt eine Zerschneidung des Schwimmrings alias Torus zu einem Viereck. In der demnächst eingeführten Terminologie wird es auch die Definition der Fläche $F(aba^{-1}b^{-1})$ anschaulich machen. Verkleben wir nur längs der b -Kanten, so entsteht eine Klopapierrolle. Verkleben weiter längs der a -Kanten, so entsteht ein Schwimmring alias Torus.

6.8.6. Seien \mathcal{F} eine geschlossene kombinatorische Fläche und $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{F}$ eine Zerschneidung zu einem Vieleck. Sicher werden unter φ die Randkanten von \mathcal{Z} paarweise identifiziert. Insbesondere ist also die Zahl der Randkanten unseres Vielecks gerade. Im folgenden führen wir eine Notation für mögliche Identifizierungsvorschriften der Randkanten eines Vielecks mit einer geraden Anzahl von Kanten ein.

Definition 6.8.7. Sei A eine endliche Menge, die wir in diesem Zusammenhang unser „Alphabet“ nennen, mit $|A| = r \geq 0$ Elementen, den „Buchstaben“. Ein **Flächenwort** im Alphabet A ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3, \dots, 2r\} &\rightarrow A \times \{1, -1\} \\ i &\mapsto (a(i), \varepsilon(i)) \end{aligned}$$

derart, daß jeder Buchstabe genau zweimal als ein $a(i)$ vorkommt.

6.8.8. Wir schreiben Flächenworte in der Form $a(1)^{\varepsilon(1)} \dots a(2r)^{\varepsilon(2r)}$ und nennen $2r$ die „Länge“ so eines Flächenworts. Beispiele für Flächenworte im Alphabet $A = \{a, b\}$ sind etwa die Ausdrücke $aabb^{-1}$ und $aba^{-1}b$.

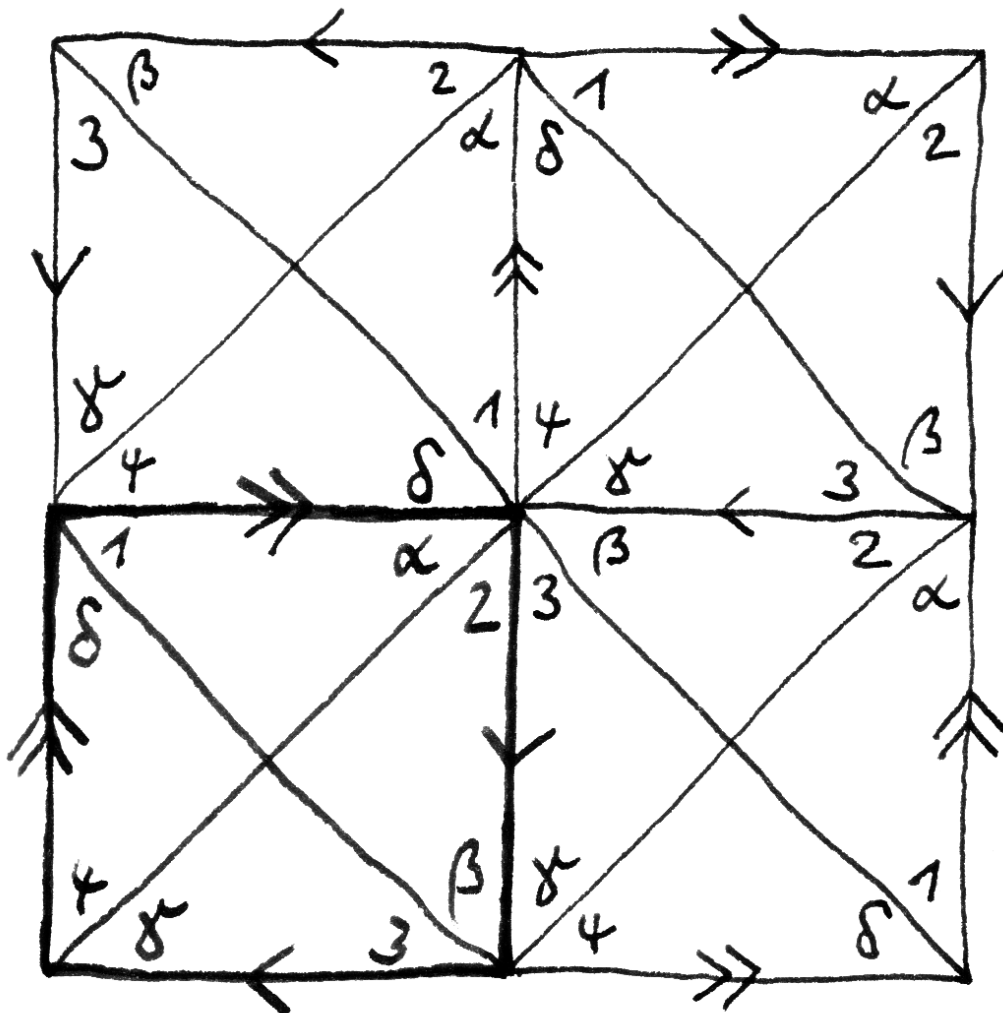
6.8.9. Gegeben ein Flächenwort w in $r \geq 2$ Buchstaben konstruieren wir einen topologischen Raum

$$F(w)$$

wie folgt: Wir betrachten ein regelmäßiges $2r$ -Eck, mit $2r$ der Länge unseres Flächenworts, und schreiben die Buchstaben unseres Flächenworts der Reihe nach an seine Kanten. Weiter versehen jede Kante mit einem Pfeil im Gegenuhrzeigersinn beziehungsweise im Uhrzeigersinn, je nachdem ob der Exponent ihres Buchstabens 1 beziehungsweise -1 ist. Dann verkleben wir jeweils die Kanten mit den gleichen Buchstaben so, daß die Spitzen der Pfeile identifiziert werden. Im Fall $r = 1$ erlauben wir dem 2-Eck krumme Kanten und erhalten so zum Beispiel $F(aa) \cong \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ und $F(aa^{-1}) \cong S^2$. Im Fall $r = 0$ setzen wir $F(\) = S^2$.

Lemma 6.8.10 (Fläche zu einem Flächenwort). *Der auf diese Weise zu einem Flächenwort w konstruierte topologische Raum $F(w)$ ist stets eine geschlossene Fläche.*

Beweis. Die größte Schwierigkeit scheint mir hierbei der Nachweis, daß auch die Bilder der Ecken unseres Vielecks im verklebten Raum $F(w)$ eine zu einer offenen Kreisscheibe homöomorphe offene Umgebung besitzen. Um das zu sehen, muß man sich überlegen, daß lokal um das Bild einer Ecke schlicht „mehrere Winkelsegmente zu einer Kreisscheibe verklebt werden“. Wir überlassen die Details dem Leser. \square



Dieses Bild soll die Definition der Fläche $F(aabb)$ anschaulich machen. Statt die zu jeweils zu verklebenden Randkanten mit denselben Buchstaben zu benennen, habe ich sie jeweils mit demselben Typ von Pfeilen, hier Doppelpfeilen beziehungsweise einfachen Pfeilen, gekennzeichnet. Verklebt wird eigentlich nur das fett eingezeichnete Viereck. Ich finde, man erkennt in der Mitte recht gut, wie das Verkleben eine Fläche liefert, in der alle vier Eckpunkte unseres Quadrats dasselbe Bild haben. Es ist jedoch nicht so leicht zu sehen, daß diese Fläche homöomorph ist zur Klein'schen Flasche. Um sich das zu überlegen, sollte man wohl am besten die Klein'sche Flasche zerschneiden: Einmal rund um den Flaschenhals, ein zweites Mal in Längsrichtung Flasche und Hals.

Satz 6.8.11 (Klassifikation der geschlossenen Flächen). *Jede zusammenhängende triangulierbare geschlossene Fläche ist homöomorph zur Fläche $F(w)$ für genau ein Flächenwort w aus der folgenden Liste:*

1. $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ mit $g \geq 0$;
2. $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$ mit $g \geq 1$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die „Ausschöpfung“, daß also jede zusammenhängende triangulierbare geschlossene Fläche homöomorph ist zu mindestens einer Fläche unserer Liste. Die „Minimalität“ unserer Liste, daß also keine zwei der gelisteten Flächen homöomorph sind, zeigen wir erst als letzten Punkt von Abschnitt 6.10. □

6.8.12. Dieser Satz präzisiert die in der Einleitung besprochene Klassifikation der geschlossenen Flächen 5.1.7. Wenn wir den Satz von Rado glauben, können wir hier sogar auf die Annahme der Triangulierbarkeit verzichten, da nach diesem Satz jede zusammenhängende geschlossene Fläche triangulierbar ist.

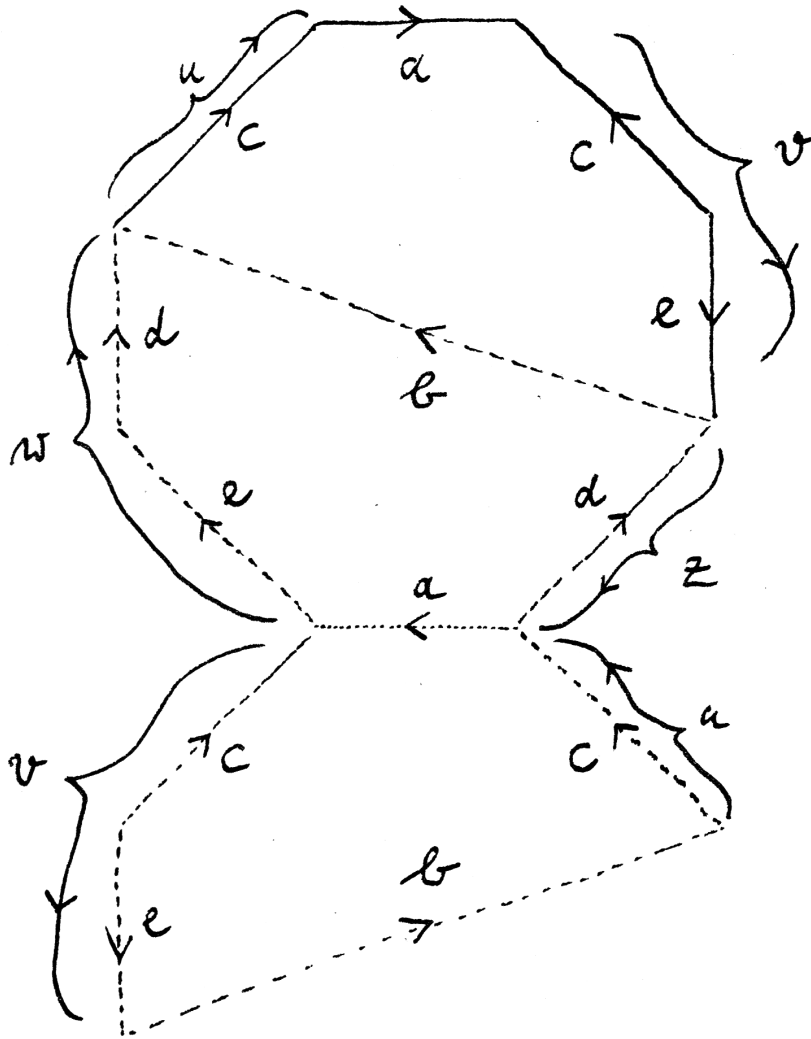
6.8.13. Zur Vorbereitung des Beweises listen wir zunächst einmal einige fundamentale Operationen auf der Menge aller Flächenwörter auf, die offensichtlich den Homöomorphietyp der zugehörigen Fläche nicht ändern. In den folgenden Formeln bedeuten a, b, c, d mit und ohne Hut stets Buchstaben unseres Alphabets A , dahingegen bedeuten u, v, w, z Abschnitte von Flächenwörtern.

1. „Zyklisches Vertauschen“ und „von hinten nach vorne Lesen“, in Formeln $F(vw) \cong F(wv)$ und $F(w) \cong F(w^{-1})$;
2. „Substituieren“ von a^{-1} für a , in Formeln $F(va^\varepsilon wa^\eta z) \cong F(va^{-\varepsilon} wa^{-\eta} z)$;
3. „Aufschneiden des Vielecks längs der Gerade zwischen zwei Ecken und Zusammenkleben längs einer äußeren Kante“ wie im nebenstehenden Bild dargestellt, in Formeln

$$\begin{aligned} F(uavza^{-1}w) &\cong F(uw\hat{a}^{-1}zv\hat{a}) \\ F(uavzaw) &\cong F(uz^{-1}\hat{a}w^{-1}v\hat{a}) \end{aligned}$$

Bei der Notation versuche ich, das Nachvollziehbarkeit zu erleichtern, in dem ich dem neu entstehenden Kantenpaar denselben Buchstaben gebe wie der durch Verkleben verschwundenen Kante, ihn aber mit einem Hut versehen. Bei der Richtung der neu entstehenden Kanten lege ich mich fest.

4. „Kürzen“, in Formeln $F(uava^{-1}) \cong F(uv)$ unter der Annahme, daß die beiden Enden der a -Kanten verschiedene Bilder in der verklebten Fläche



Dieses Bild soll die zweite Regel $F(uavzaw) \cong F(uz^{-1}bw^{-1}vb)$ zum Aufschneiden und Verkleben anschaulich machen. Kleben wir das darin enthaltene achteckige „Stoppschild“ zu einer Fläche zusammen, so entsteht dieselbe Fläche wie beim Zusammenkleben des mit gestricheltem Rand gezeichneten „Schmetterlings“. Hierbei könnten wir etwa konkret an ein Flächenwort in vier Buchstaben a, c, d, e denken und etwa $u = c, v = c^{-1}e, z = d^{-1}$ und $w = ed$ setzen, dieser Fall ist als Beispiel eingezeichnet.

haben. Sind hier u oder v leer, so haben die Enden der a -Kanten automatisch verschiedene Bilder und die Formel scheint mir offensichtlich. Sind u und v nicht leer, so betrachten wir in unserem Vieleck das Viereck mit den beiden a -Kanten als gegenüberliegenden Seiten. Sein Bild in der verklebten Fläche ist ein Zylinder, den wir zu einer Kreislinie identifizieren können, ohne den Homöomorphietyp der verklebten Fläche zu ändern.

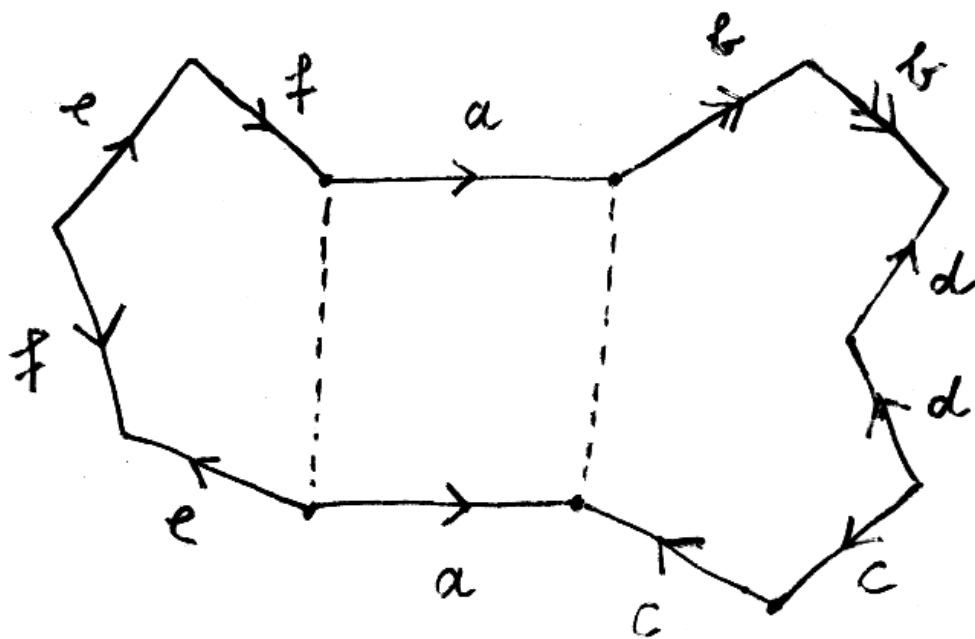
6.8.14. Zu jedem Flächenwort w erklären wir seine **Eckenzahl** als die Zahl der Punkte in der zugehörigen Fläche $F(w)$, die Bilder von Ecken unseres Vielecks sind. Kombinatorisch betrachtet man auf der Menge der Ecken die kleinste Äquivalenzrelation, unter der je zwei Ecken mit einer Ausgangskante zum selben Buchstaben oder einer Eingangskante zum selben Buchstaben äquivalent sind, und kann dann die Eckenzahl verstehen als die Kardinalität der Äquivalenzklassen. Die Eckenzahl des leeren Worts sei Eins.

Lemma 6.8.15 (Eckenreduktion). *Für jedes vorgegebene Flächenwort w gibt es ein Flächenwort v mit Eckenzahl Eins und $F(w) \cong F(v)$.*

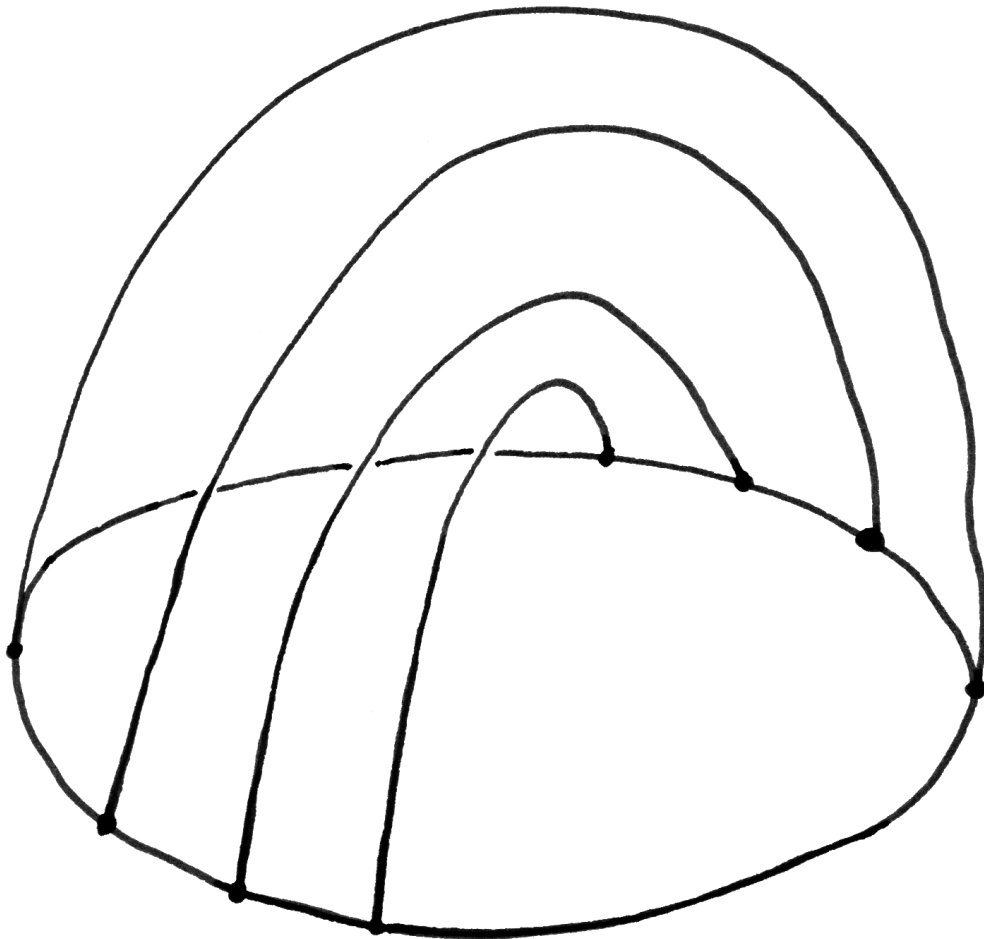
Beweis. Sei w ein Flächenwort mit Eckenzahl ≥ 2 und mehr als einem Buchstaben. Wir wählen einen Punkt P in $F(w)$, der das Bild einer Ecke unseres Vielecks ist, und nennen diejenigen Ecken unseres Vielecks „gut“, die nach P gehen. Die übrigen Ecken nennen wir „schlecht“ und geben ein Verfahren an, das entweder die Zahl der Ecken überhaupt oder die Zahl der schlechten Ecken unseres Eckenworts verringert, ohne die zugehörige Fläche zu ändern. Sei in der Tat a eine Kante von einer guten Ecke zu einer schlechten Ecke. Zwei Fälle sind möglich:

1. Die beiden a -Kanten unseres Vielecks erscheinen mit demselben Exponenten. In diesem Fall können sich nach unserer Annahme die a -Kanten nicht berühren. Wir schneiden dann zwischen den guten Enden der a -Kanten auf und verkleben längs der a -Kanten. So verringert sich die Zahl der schlechten Ecken um Eins.
2. Die beiden a -Kanten unseres Vielecks erscheinen mit verschiedenen Exponenten. In diesem Fall können wir sie kürzen und so die Eckenzahl um Eins verringern. Das zeigt das Lemma. □

Beweis des Klassifikationssatzes 6.8.11, Ausschöpfung. Nach der Eckenreduktion 6.8.15 ist jede triangulierbare Fläche homöomorph zu einer Fläche $F(w)$ für ein Flächenwort w mit Eckenzahl 1. Wir bemerken für das folgende, daß sich die Eckenzahl beim Aufschneiden und Verkleben nicht ändert. Wir können uns also im Weiteren auf Worte der Eckenzahl 1 beschränken und werden von nun an nur noch solche Worte betrachten. Man beachte nun als Spezialfälle des Aufschneidens und Verklebens die beiden folgenden Regeln:



Dieses Bild soll die vierte Regel zum „Kürzen“ anschaulich machen.



Man erhält eine stetige Abbildung des Möbiusbands nach $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mittels der Formel $(t, \tau) \mapsto (\tau e^{\pi i t}, \sqrt{1 - \tau^2} \cos^2 \pi t)$. Anschaulich gesprochen verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte des Einheitskreises durch einen Bogen mit variierender mittlerer Höhe. Das Bild ist eine sich selbst durchdringende räumliche Fläche, bei der man sich die Selbstdurchdringung leicht wegdenken kann. Man nennt sie auch die **Kreuzhaube**. In dieser Anschauung für das Möbiusband bezahlt man in gewisser Weise mit der Selbstdurchdringung für die gute Sichtbarkeit des Randkreises.

Kreuzhaubennormierung: Man findet $F(ubvbw) \cong F(uv^{-1}\hat{b}\hat{b}w)$ durch Aufschneiden zwischen den Enden von b und Verkleben längs b . Die Bezeichnung rührt daher, daß wir wie auf Seite 177 erklärt ein Möbiusband auch als eine sogenannte Kreuzhaube realisieren können.

Henkelnormierung: Man findet $F(uavbwa^{-1}zb^{-1}x) \cong F(u\hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}zwx)$. In der Tat, Aufschneiden zwischen den Enden von a und Verkleben längs b liefert $u\hat{b}^{-1}zwa^{-1}\hat{b}avx$. Nochmaliges Aufschneiden zwischen den Anfangspunkten der Kanten \hat{b} und Verkleben längs a liefert das gewünschte Ergebnis.

Unter Verwendung der ersten Regel normieren wir zunächst Kreuzhauben, bis wir ein Wort erreicht haben, bei dem jeder Buchstabe entweder als normierte Kreuzhaube aa beziehungsweise $a^{-1}a^{-1}$ oder in der Form $\dots a \dots a^{-1} \dots$ vorkommt. Im letzteren Fall finden wir ein b derart, daß unser Wort feiner sogar die Form

$$\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$$

hat, denn sonst müßten alle Buchstaben entweder doppelt oder gar nicht zwischen a und a^{-1} vorkommen, und dann hätten Anfangs- und Endpunkt der a -Kanten verschiedene Bilder in der Fläche, im Widerspruch zu unserer Annahme der Eckenzahl 1. Mit sukzessiven Henkelnormierungen landen wir also bei einem Wort, das eine Verkettung von Kreuzhauben cc und Henkeln $aba^{-1}b^{-1}$ ist. Henkelnormierung rückwärts und dann mehrfaches Anwenden der Kreuzhaubennormierung liefert aber auch die sogenannte **Henkelelimination**, in Formeln und unter mehrfacher Verwendung der Aufschneidesymbole \hat{a} , \hat{b} für unterschiedliche Kanten

$$\begin{aligned} F(u\hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}ccx) &\cong F(uabca^{-1}cb^{-1}x) \\ &\cong F(uaba\hat{c}\hat{c}b^{-1}x) \\ &\cong F(ub^{-1}\hat{a}\hat{a}\hat{c}\hat{c}b^{-1}x) \\ &\cong F(u(\hat{a}\hat{a}\hat{c}\hat{c})^{-1}\hat{b}\hat{b}x) \end{aligned}$$

Folglich liefert jede Verkettung von Kreuzhauben und Henkeln, in der mindestens eine Kreuzhaube auftritt, dieselbe Fläche wie ein reines Produkt von Kreuzhauben. Damit ist gezeigt, daß jede triangulierbare Fläche homöomorph ist zu mindestens einer Fläche, die durch ein Flächenwort aus unserer Liste beschrieben wird. Wir zeigen in 6.10, daß diese Flächen paarweise nichtisomorphe Fundamentalgruppen haben. Daraus folgt, daß sie paarweise nicht homöomorph sind, und das beendet dann den Beweis des Klassifikationssatzes. \square

6.9 Gruppen durch Erzeugende und Relationen

6.9.1. Ist G eine Gruppe und $T \subset G$ eine Teilmenge, so hatten wir in ?? den Schnitt über alle Untergruppen von G , die T umfassen, die „von T erzeugte Un-

tergruppe“ genannt und mit $\langle T \rangle$ bezeichnet.

Definition 6.9.2. Seien G eine Gruppe und $T \subset G$ eine Teilmenge. Der Schnitt über alle Normalteiler von G , die T umfassen, heißt der **von T in G erzeugte Normalteiler** $\langle\langle T \rangle\rangle_G = \langle\langle T \rangle\rangle$. Er kann auch beschrieben werden als die Untergruppe $\langle\langle T \rangle\rangle = \langle gtg^{-1} \mid g \in G, t \in T \rangle$, die von der Elementen $t \in T$ und allen ihren Konjugierten erzeugt wird.

6.9.3 (**Schwierigkeiten der Terminologie**). Hier treffen wir auf die semantische Schwierigkeit, daß „der von T erzeugte Normalteiler“ ja auch bedeuten könnte, daß wir die von T erzeugte Untergruppe nehmen und daß diese zusätzlich ein Normalteiler ist. In Formelsprache sollte jedoch klar werden, was jeweils gemeint ist.

Lemma 6.9.4. Seien $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $T \subset G$ eine Teilmenge mit $\varphi(T) \subset \{e\}$. So gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : G/\langle\langle T \rangle\rangle \rightarrow G'$ mit $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/\langle\langle T \rangle\rangle \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G' \end{array}$$

Beweis. Nach Annahme gilt $T \subset \ker \varphi$. Da $\ker \varphi$ stets ein Normalteiler ist, folgt $\langle\langle T \rangle\rangle \subset \ker \varphi$. Jetzt folgt die Aussage aus der universellen Eigenschaft der Restklassengruppe ?? □

Definition 6.9.5. Sei X eine Menge und $R \subset \text{Grp}^{\setminus} X$ eine Teilmenge der freien Gruppe über X . Der Quotient $\text{Grp}^{\setminus} X/\langle\langle R \rangle\rangle$ der freien Gruppe über X nach dem von R erzeugten Normalteiler heißt die **von der Menge X mit den Relationen R erzeugte Gruppe**. Meist werden die Relationen in der Form $a_i = b_i$ mit Wörtern $a_i, b_i \in \text{Mon}^{\setminus} X$ angegeben. Gemeint ist dann $R = \{[a_i][b_i]^{-1}\}$.

Beispiel 6.9.6. Die von zwei Elementen x und y mit der Relation $xy = yx$ erzeugte Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

6.9.7. Die Darstellung einer Gruppe durch Erzeugende und Relationen ist nicht „effektiv“ : Es gibt nachweislich keinen Algorithmus, der bestimmt, ob so eine Gruppe trivial ist, also nur aus einem Element besteht.

Übungen

Übung 6.9.8. Sei eine Menge X die Vereinigung zweier Teilmengen $X = X_1 \cup X_2$ mit Schnitt $X_0 = X_1 \cap X_2$. Seien $R_i \subset \text{Grp}^{\setminus} X_i$ Relationen, $i = 0, 1, 2$. Gilt

zusätzlich $R_0 \subset \langle\langle R_i \rangle\rangle$ für $i = 1, 2$, so ist das folgende Diagramm ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc} \text{Grp} \wedge X_0 / \langle\langle R_0 \rangle\rangle & \rightarrow & \text{Grp} \wedge X_1 / \langle\langle R_1 \rangle\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grp} \wedge X_2 / \langle\langle R_2 \rangle\rangle & \rightarrow & \text{Grp} \wedge X / \langle\langle R_1 \cup R_2 \rangle\rangle \end{array}$$

Übung 6.9.9. Die symmetrische Gruppe \mathcal{S}_n kann beschrieben werden als die Gruppe mit Erzeugern s_1, \dots, s_{n-1} und den Relationen $s_i^2 = 1$, $s_i s_j = s_j s_i$ für $|i - j| > 1$, $(s_i s_{i+1})^3 = 1$. Die Tetraedergruppe alias die alternierende Gruppe A_4 kann beschrieben werden als die Gruppe erzeugt von zwei Elementen s, t mit Relationen $s^2 = t^3 = (st)^3 = 1$. Die Ikosaedergruppe alias die alternierende Gruppe A_5 kann beschrieben werden als die Gruppe erzeugt von zwei Elementen u, v mit Relationen $u^2 = v^3 = (uv)^5 = 1$.

Übung 6.9.10. Die Abelisierung der freien Gruppe über einer Menge ist kanonisch isomorph zur freien abelschen Gruppe über besagter Menge.

6.10 Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

Satz 6.10.1 (Fundamentalgruppen geschlossener Flächen). *Gegeben ein Flächenwort w im Alphabet A mit Eckenzahl Eins wird die Fundamentalgruppe der zugehörigen Fläche $F(w)$ erzeugt von der Menge A mit dem Flächenwort w als einziger Relation. Bezeichnet genauer $*$ $\in F(w)$ das Bild der Ecken unseres Vielecks, so erhalten wir einen Isomorphismus*

$$(\text{Grp} \wedge A) / \langle\langle w \rangle\rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(F(w), *)$$

dadurch, daß wir jedem Buchstaben das Bild der entsprechenden Kante mit der durch den Exponenten unseres Buchstabens gegebenen Durchlaufrichtung zuordnen.

Beweis. Sei $v : Z \rightarrow F$ die Verklebung unseres Vielecks $Z \subset \mathbb{R}^2$ zur Fläche $F = F(w)$. Das Bild $v(\partial Z)$ vom Rand unseres Vielecks in unserer Fläche F besteht aus $|A|$ Kreislinien, die alle in einem Punkt zusammengeklebt sind. Solch einen Raum nennt man ein **Bouquet von Kreislinien**. Bezeichne nun Z° das Innere unseres Vielecks und sei $z \in Z^\circ$ sein Mittelpunkt. Unter der Verklebung v geht Z° homöomorph auf eine offene Teilmenge unserer Fläche $z : Z^\circ \xrightarrow{\sim} v(Z^\circ) \subseteq F$. Wir wenden den Satz von Seifert und van Kampen 6.4.1 an auf die offene Überdeckung

$$F = (F \setminus z) \cup v(Z^\circ)$$

unserer Fläche. Nehmen wir einen Punkt $e \in Z^\circ$, der auf dem offenen Geraden-segment von z zur „Ausgangsecke q unseres Flächenworts w “ liegt, und setzen

$\bar{e} := v(e)$, so liefert Seifert-van-Kampen 6.4.1 ein kokartesisches Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z^\circ \setminus z, e) & \rightarrow & \pi_1(Z^\circ, e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(F \setminus z, \bar{e}) & \rightarrow & \pi_1(F, \bar{e}) \end{array}$$

Nun verwenden wir den Weg, der radial von e nach q läuft, und noch genauer sein Bild in F , um die Fundamentalgruppen in der unteren Zeile mit den entsprechenden Fundamentalgruppen zum Basispunkt $*$ zu identifizieren. Weiter zeigt das „radial nach außen schieben“ von Punkten aus $Z \setminus z$, daß die Einbettung unseres Bouquets von Kreislinien $p(\partial Z) \hookrightarrow F \setminus z$ eine Homotopieäquivalenz ist und folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen zum Basispunkt $*$ induziert. Die Fundamentalgruppe solch eines Bouquets haben Sie bereits in 6.5.17 mit der freien Gruppe über A identifiziert. Nun muß man sich überzeugen, daß unter den beschriebenen Identifikationen

$$\pi_1(F \setminus z, \bar{e}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(F \setminus z, *) \xleftarrow{\sim} \pi_1(p(\partial Z), *) \xleftarrow{\sim} \text{Grp}^\wedge A$$

das Bild eines der beiden Erzeuger von $\pi_1(Z^\circ \setminus z, e)$ gerade auf das Wort w geht, aufgefaßt als Element der freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge A$. So ergibt sich ein kokartesisches Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grp}^\wedge A & \rightarrow & \pi_1(F, *) \end{array}$$

Die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Grp}^\wedge A$ bildet darin die $1 \in \mathbb{Z}$ gerade auf das Flächenwort w unserer Fläche in $\text{Grp}^\wedge A$ ab und die untere Horizontale unseres Diagramms induziert mithin den gesuchten Isomorphismus $(\text{Grp}^\wedge A) / \langle\langle w \rangle\rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(F, *)$, vergleiche Übung 6.10.3. \square

Beweis des Klassifikationssatzes 6.8.11, Minimalität. Sicher wird jedes kokartesische Diagramm in der Kategorie der Gruppen unter der Abelisierung 5.8.1 ein kokartesisches Diagramm in der Kategorie der abelschen Gruppen und die Abelisierung einer freien Gruppe $\text{Grp}^\wedge A$ ist die freie abelsche Gruppe $\text{Ab}^\wedge A = \mathbb{Z}A$ aller endlichen formalen Linearkombinationen von Elementen von A mit ganzzahligen Koeffizienten. Für den maximalen kommutativen Quotienten π_1^{ab} der Fundamentalgruppe einer der Flächen unserer in 6.8.11 angegebenen Liste erhalten wir damit $\pi_1^{\text{ab}}(F(w)) = \mathbb{Z}A \cong \mathbb{Z}^{2g}$ im Fall von g Henkeln und

$$\pi_1^{\text{ab}}(F(w)) = \mathbb{Z}A / 2\mathbb{Z}(c_1 + \dots + c_g) \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{g-1}$$

im Fall von g Kreuzhauben. Da diese Gruppen paarweise nicht isomorph sind, nach ?? oder auch elementar durch Zählen der Elemente endlicher Ordnung und

Berechnung der Dimensionen der Vektorräume aller Gruppenhomomorphismen nach \mathbb{Q} , sind auch die zugehörigen Flächen paarweise nicht homöomorph. Das beendet den Beweis des Klassifikationssatzes. \square

Übungen

Übung 6.10.2. Gegeben X eine zusammenhängende geschlossene Fläche vom Geschlecht g und $E \subset X$ eine endliche nichtleere Teilmenge ist $\pi_1(X \setminus E, *)$ frei in $2g + |E| - 1$ Erzeugern.

Übung 6.10.3. Gegeben eine Gruppe H und ein Element $w \in H$ ist das Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \rightarrow & H/\langle\langle w \rangle\rangle \end{array}$$

mit $1 \mapsto w$ in der linken Vertikale stets kokartesisch.

7 Überlagerungstheorie

7.1 Überlagerungen

Definition 7.1.1. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{U} \rightarrow U$ heißt eine **triviale Überlagerung**, wenn U nicht leer ist und es einen diskreten Raum D mitsamt einem Homöomorphismus $\tau : D \times U \xrightarrow{\sim} \tilde{U}$ gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D \times U & \xrightarrow{\sim} & \tilde{U} \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

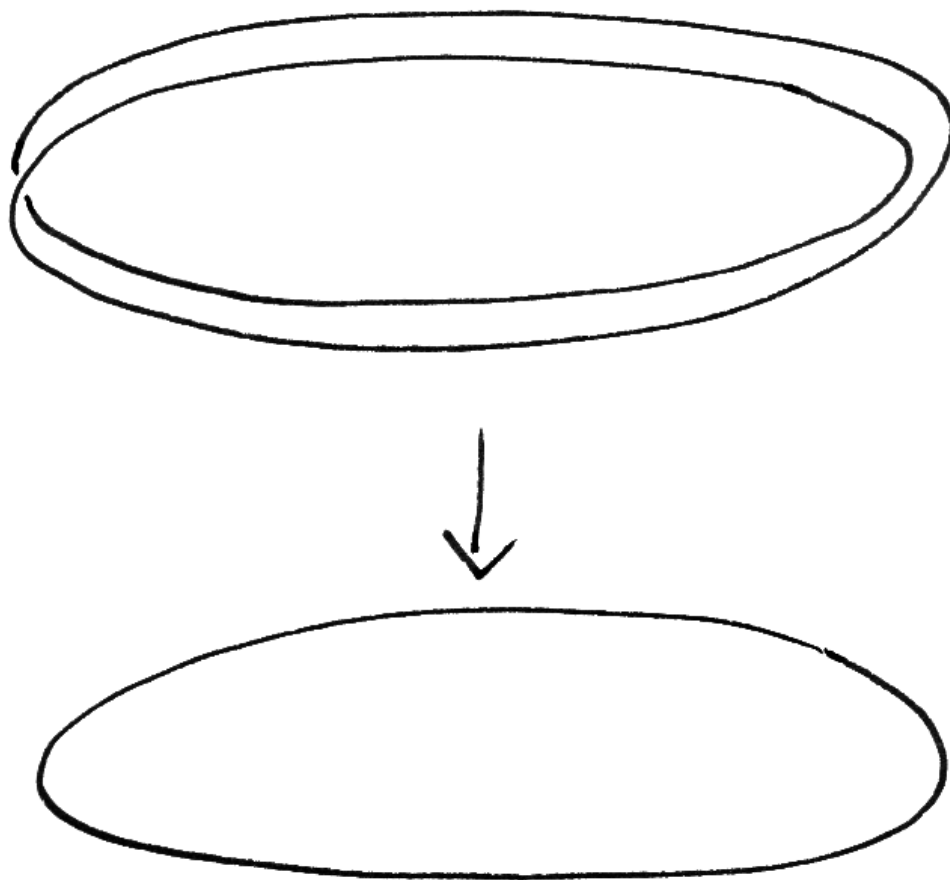
kommutiert. Solch ein Homöomorphismus heißt dann eine **Trivialisierung** unserer trivialen Überlagerung.

Definition 7.1.2. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ heißt eine **Überlagerung**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß die induzierte Abbildung $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$ eine triviale Überlagerung ist. Wir nennen U dann eine **trivial überlagerte Umgebung von x** . Der Definitionsbereich \tilde{X} von p heißt der **Totalraum** unserer Überlagerung, der Wertebereich X ihre **Basis**.

7.1.3. Ich erinnere daran, daß gegeben eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und ein Punkt $y \in Y$ sein Urbild $f^{-1}(y)$ die **Faser von f über y** heißt.

7.1.4 (**Diskussion der Terminologie**). Wir fordern nicht, daß eine Überlagerung surjektiv sein muß. Insbesondere ist für uns $\emptyset \rightarrow X$ stets eine Überlagerung. Wir fordern auch nicht, daß die Fasern einer Überlagerung konstante Kardinalität haben müssen. Eine Überlagerung mit dieser Eigenschaft nennen wir eine **Faserung mit diskreter Faser**. In der Funktionentheorie arbeitet man oft mit einem etwas allgemeineren Überlagerungsbegriff, in dem etwa die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ noch als eine „im Ursprung verzweigte Überlagerung“ durchgehen würde. Die Überlagerungen im Sinne der obigen Definition heißen in der in der Funktionentheorie üblichen Terminologie **unverzweigte Überlagerungen**.

Beispiele 7.1.5. Die Abbildung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi it) = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$ aus dem Beweis von 5.3.1, die die Zahlengerade auf den Einheitskreis aufwickelt, ist eine Überlagerung. Ebenso sind $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ und die Projektion $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ Überlagerungen und für jeden diskreten Raum F ist die Projektion $\text{pr}_2 : F \times X \rightarrow X$ eine Überlagerung. Als weiteres Beispiel betrachte man $\text{Exp} \times \text{Exp} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$. Sind allgemeiner $f : \tilde{X} \rightarrow X$ und $g : \tilde{Y} \rightarrow Y$ Überlagerungen, so auch $f \times g : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$.



Eine zweifache Überlagerung der Kreislinie.

7.1.6 (Lokalkonstanz der Faserkardinalität). Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, so ist die Kardinalität der Fasern $p^{-1}(x)$ konstant auf den Zusammenhangskomponenten von X . Genauer sind für jede Menge E die Mengen $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |E|\}$ beziehungsweise $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| \neq |E|\}$ aller Punkte $x \in X$, deren Fasern $p^{-1}(x)$ dieselbe beziehungsweise nicht dieselbe Kardinalität wie E haben, offen in X , da sie mit jedem Punkt auch jede trivial überlagerte Umgebung des besagten Punktes umfassen. Ist X zusammenhängend, so nennt man die Zahl der Elemente einer und gleichbedeutend jeder Faser die **Blätterzahl** der Überlagerung.

Lemma 7.1.7 (Komponenten von Überlagerungen). Die Einschränkung einer Überlagerung eines lokal zusammenhängenden Raums auf eine Zusammenhangskomponente ihres Totalraums ist auch selbst wieder eine Überlagerung.

Beispiel 7.1.8. Die Menge \mathbb{Q} mit ihrer von \mathbb{R} induzierten Topologie ist nicht lokal zusammenhängend und für die Überlagerung $\text{id} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sind die Einschränkungen auf Zusammenhangskomponenten von \mathbb{Q} alias Punkte keine Überlagerungen mehr. Ein Beispiel mit zusammenhängender Basis ist $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_p \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}$ für p prim und \mathbb{Z}_p die sogenannten „ p -adischen Zahlen“ und die diagonale \mathbb{Z} -Operation.

Vorschau 7.1.9. Es wird sich im folgenden mehr und mehr erweisen, daß die Überlagerungstheorie eigentlich eine Theorie der Überlagerungen lokal zusammenhängender Räume ist. Ich erinnere daran, daß ein lokal zusammenhängender Raum in unserer Terminologie ein Raum ist, bei dem sich jede Umgebung eines jeden Punktes zu einer zusammenhängenden Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt.

Beweis. Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ unsere Überlagerung und $Z \subset \tilde{X}$ eine Zusammenhangskomponente. Gegeben $z \in Z$ finden wir eine trivial überlagerte zusammenhängende Umgebung $U \subset X$ von $p(z)$. Gegeben eine Trivialisierung $\tau : D \times U \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ unserer Überlagerung über U sind die $\tau(\{d\} \times U)$ für $d \in D$ zusammenhängend. Jede dieser Mengen ist damit entweder enthalten in Z oder disjunkt zu Z . Das zeigt, daß auch $Z \rightarrow X$ eine Überlagerung ist. \square

Definition 7.1.10. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **étale**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt derart, daß die Restriktion $f : U \rightarrow Y$ eine offene Einbettung ist.

7.1.11. Das Wort „étale“ kommt aus dem Französischen und bedeutet „ausgebreitet“. Jede étale Abbildung ist offen, jede surjektive étale Abbildung ist nach 3.7.16 also final.

7.1.12. Ich erinnere daran, daß in unserer Terminologie eine Einbettung eine stetige Abbildung ist, die einen Homöomorphismus mit ihrem Bild induziert. Weiter

heißt eine Abbildung offen, wenn sie offene Mengen zu offenen Mengen macht. Für Einbettungen ist letztere Bedingung gleichbedeutend dazu, offenes Bild zu haben.

Beispiele 7.1.13. Jede Überlagerungsabbildung ist étale. Die Projektion unserer Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt $\mathbb{R} \sqcup \{\tilde{0}\}$ aus 3.4.8 auf die Gerade \mathbb{R} ist étale. Jede Einbettung einer offenen Teilmenge ist étale. Jede Verknüpfung étaler Abbildungen ist étale. Eine Abbildung auf einen Punkt ist genau dann étale, wenn sie von einem Raum mit diskreter Topologie ausgeht.

Lemma 7.1.14. *Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen und sind g und gf étale, so ist auch f étale.*

Beweis. Sei $x \in X$ gegeben. Nach Annahme besitzt $f(x)$ eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ derart, daß $g : V \rightarrow Z$ eine offene Einbettung ist. Nach Annahme besitzt x eine offene Umgebung $U \subseteq X$ derart, daß $gf : U \rightarrow Z$ eine offene Einbettung ist. Indem wir andernfalls U ersetzen durch $U \cap f^{-1}(V)$ dürfen wir $f(U) \subset V$ annehmen. Für die von f und g induzierten Abbildungen $U \rightarrow V \rightarrow Z$ sind damit sowohl $gf : U \rightarrow Z$ als auch $g : V \rightarrow Z$ offene Einbettungen. Dann aber ist notwendig $f : U \rightarrow V$ initial mit offenem Bild $f(U) = g^{-1}((gf)(U))$ alias eine offene Einbettung und damit auch $f : U \rightarrow Y$. \square

Definition 7.1.15. Wir nennen einen Raum **überlagerungstrivial**, wenn jede Überlagerung unseres Raums **trivial** ist.

7.1.16. Jeder überlagerungstriviale Raum ist zusammenhängend, da eine disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen stets nichttriviale Überlagerungen besitzt. Der leere Raum ist nicht überlagerungstrivial, da Überlagerungen der leeren Menge in unserer Terminologie keine trivialen Überlagerungen sind.

Beispiel 7.1.17 (Das Einheitsintervall ist überlagerungstrivial). Ist in der Tat $p : \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$ eine Überlagerung, so finden wir mit dem Überdeckungssatz von Lebesgue Punkte $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = 1$ derart, daß $[a_{i-1}, a_i]$ jeweils trivial überlagert ist. Wir finden also Trivialisierungen

$$\tau_i : [a_{i-1}, a_i] \times D_i \xrightarrow{\sim} p^{-1}([a_{i-1}, a_i])$$

Diese induzieren für $2 \leq i \leq r$ Bijektionen $D_i \xrightarrow{\sim} p^{-1}(a_{i-1}) \xrightarrow{\sim} D_{i-1}$, die wir verwenden können, um alle D_i so mit einer festen Menge D zu identifizieren, daß unsere Trivialisierungen zu einer Bijektion

$$\tau : [0, 1] \times D \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$$

verkleben. Diese ist stetig, da sie aus endlich vielen stetigen Abbildungen auf abgeschlossenen Teilmengen zusammengeklebt ist. Sie ist offen und sogar étale nach Lemma 7.1.14 und folglich ein Homöomorphismus alias eine Trivialisierung unserer Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow [0, 1]$.

Vorschau 7.1.18. In 9.3.2 zeigen wir, daß das Produkt zweier überlagerungstrivialer Räume wieder überlagerungstrivial sein muß, falls einer der Faktoren zusätzlich lokal zusammenhängend ist.

7.1.19. Wir nennen einen topologischen Raum **wegetrivial**, wenn er zusammenhängend, schleifenfüllend und lokal wegzusammenhängend ist.

Satz 7.1.20 (Wegetrivial impliziert überlagerungstrivial). *Jeder wegetriviale Raum ist überlagerungstrivial.*

Beispiel 7.1.21. Insbesondere ist jede zusammenhängende schleifenfüllende offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene überlagerungstrivial. Diese Erkenntnis wird in der Funktionentheorie meist implizit verwendet und in den jeweils benötigten Spezialfällen separat bewiesen.

Beispiel 7.1.22. Ersetzen wir im Rand des Quadrats $[-1, 1] \times [0, 2]$ das Stück $(0, \pi^{-1}]$ durch ein Stück der Sinuskurve des Topologen 3.3.23, genauer durch den Graphen von $(0, \pi^{-1}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(1/x)$, so erhalten wir einen schleifenfüllenden zusammenhängenden Raum, der nicht überlagerungstrivial ist. Er ist aber nicht lokal wegzusammenhängend, deshalb liefert er kein Gegenbeispiel zu unserem Satz.

Beweis. Sei X unser Raum. Wäre X nicht überlagerungstrivial, so hätte X eine nichttriviale Überlagerung. Deren Zusammenhangskomponenten wären nach 7.1.7, da unser Raum lokal zusammenhängend ist, auch Überlagerungen und insbesondere offene Teilmengen und wären nach 3.3.15 sogar wegzusammenhängend. Mindestens eine von ihnen müßte eine nichttriviale Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ sein, sonst wäre unsere Überlagerung ja trivial. Es gäbe also $x \in X$ und zwei verschiedene Punkte $\tilde{x}_0 \neq \tilde{x}_1$ der Faser über x und einen Weg $\tilde{\gamma}$ von \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 . Der geschlossene Weg $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ in X kann dann nicht zusammenziehbar alias nullhomotop sein, da man nach Übung 7.1.23 den Lift $\tilde{\gamma}$ von γ zu einem Lift der ganzen Homotopie erweitern könnte und da dieser Lift konstant sein müßte auf drei Kanten des Quadrats $[0, 1]^2$, womit $\tilde{\gamma}$ doch geschlossen wäre. \square

Übungen

Übung 7.1.23. Das Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ ist überlagerungstrivial.

Übung 7.1.24 (Pullback von étalen Abbildungen). Ist $\tilde{X} \rightarrow X$ étale und $Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist auch der pullback $\tilde{X} \times_X Y \rightarrow Y$ étale.

Übung 7.1.25 (Pullback von Überlagerungen). Ist $\tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist auch der pullback $\tilde{X} \times_X Y \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Das wird in 7.4.13 für die Existenz von Lifts gebraucht.

Übung 7.1.26. Sind $\tilde{X} \rightarrow X$ und $\hat{X} \rightarrow X$ Überlagerungen, so auch ihr Faserprodukt $\tilde{X} \times_X \hat{X} \rightarrow X$. Des weiteren hat die Diagonale $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \times_X \hat{X}$ abgeschlossenes Bild alias jede Überlagerung ist separiert im Sinne von 4.4.9. Das brauchen wir beim Beweis von 7.4.10.

Übung 7.1.27. Sind $p : X \rightarrow Y$ und $q : Y \rightarrow Z$ Überlagerungen und besitzt jeder Punkt $z \in Z$ eine überlagerungstriviale Umgebung, so ist auch $q \circ p$ eine Überlagerung.

Ergänzung 7.1.28. Dasselbe kann man für beliebiges Z zeigen, wenn die Fasern von q endlich sind, aber diese Variante ist für uns im folgenden nebensächlich.

Ergänzende Übung 7.1.29. Jede étale Abbildung von einem kompakten Hausdorffraum in einen Hausdorffraum ist eine Überlagerung. Besonders Mutige zeigen: Eine eigentliche separierte étale Abbildung ist dasselbe wie eine Überlagerung mit endlichen Fasern.

Ergänzende Übung 7.1.30. Gegeben $f : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung mit endlichen Fasern und $X = U \sqcup V$ eine Zerlegung von X in zwei offene Teilmengen sind auch die Restriktionen von f auf U und V Überlagerungen.

7.2 Kategorien von Mengen mit Operation

7.2.1. Wir gehen nun davon aus, daß der Leser mit den grundlegenden Begriffsbildungen zu Operationen von Gruppen und allgemeiner von Monoiden vertraut ist, wie sie zum Beispiel in ?? entwickelt werden.

Definition 7.2.2. Sei G ein Monoid. Eine Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ von einer G -Menge X in eine G -Menge Y heißt ein **G -Morphismus** oder auch **G -äquivariant**, wenn gilt $\phi(gx) = g\phi(x) \forall g \in G, x \in X$. Mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden die G -Mengen eine Kategorie, die wir mit G -Ens oder $\text{Ens}_{G\setminus}$ bezeichnen. In derselben Weise bilden auch die G -Rechtsmengen eine Kategorie, die wir mit $\text{Ens}_{\setminus G}$ oder $\text{Ens}_{/G}$ bezeichnen.

Ergänzung 7.2.3. Im Rahmen der Kategorientheorie können wir die Kategorie der G -Mengen auch beschreiben als die Kategorie G -Ens = $\text{Cat}([G], \text{Ens})$ aller Funktoren von der Ein-Objekt-Kategorie $[G]$ aus 10.1.6 in die Kategorie der Mengen.

Übungen

Ergänzende Übung 7.2.4. Ich erinnere daran, daß wir unter einem „homogenen Raum“ für eine vorgegebene Gruppe eine Menge mit einer transitiven Wirkung unserer Gruppe verstehen. Man zeige: Genau dann stimmen für einen gegebenen

homogenen Raum alle Standgruppen überein, wenn er isomorph ist zum Quotienten der Gruppe nach einem Normalteiler. Wir sagen dann auch, der homogene Raum sei **normal**. Hinweis: ??.

Übung 7.2.5. Jede Gruppe operiert auf der Menge aller ihrer Untergruppen durch Konjugation. Die Bahnen dieser Operation nennt man **Konjugationsklassen von Untergruppen**. Man zeige, daß für jede Gruppe G das Bilden der Gesamtheit aller Standgruppen eine Bijektion liefert

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Transitive } G\text{-Mengen,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugationsklassen von} \\ \text{Untergruppen von } G \end{array} \right\}$$

$$X \qquad \mapsto \qquad \{G_x \mid x \in X\}$$

Im übrigen ist das schlicht die von der Äquivalenz von Kategorien 7.2.8 auf Isomorphieklassen von Objekten induzierte Bijektion.

Übung 7.2.6. Man zeige, daß die Linksoperation eines Monoids G auf sich selbst einen Isomorphismus induziert zwischen dem Monoid G und dem Monoid der Endomorphismen der G -Rechtsmenge G , in Formeln also einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} (\text{Ens-}G)(G)$, $g \mapsto (g \cdot)$. Ebenso induziert die Rechtsoperation eines Monoids G auf sich selbst einen Isomorphismus $G^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})(G)$, $g^\circ \mapsto (\cdot g)$.

Übung 7.2.7. Der **Normalisator** einer Untergruppe H in einer Gruppe G ist definiert als die Untergruppe $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ von G . Man zeige, daß die Zuordnung $g \mapsto (\cdot g^{-1})$, die also jedem $g \in G$ die Multiplikation von rechts mit g^{-1} zuordnet, einen Isomorphismus

$$N_G(H)/H \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})^\times(G/H)$$

induziert zwischen der Quotientengruppe $N_G(H)/H$ und der Automorphismengruppe der G -Menge G/H . In derselben Weise erhält man durch die Abbildung $g \mapsto (\cdot g)$, immer noch für $G \supset H$ eine Gruppe mit einer Untergruppe einen Isomorphismus

$$(\{g \in G \mid Hg \subset gH\}/H)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})(G/H)$$

von Monoiden. Betrachtet man in $G = \text{SL}(2; \mathbb{Q})$ die Untergruppe H aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale und einem ganzzahligen Eintrag in der oberen rechten Ecke, und nimmt als g eine geeignete Diagonalmatrix, so erhält man ein Beispiel mit $Hg \subsetneq gH$.

Übung 7.2.8 (Die Untergruppenkategorie). Sei G eine Gruppe. Wir machen die Menge UGr_G aller Untergruppen von G zu einer Kategorie durch die Vorschrift

$$\text{UGr}_G(H, K) := \{gK \in G/K \mid HgK = gK\}$$

mit der Verknüpfung $\text{UGr}_G(H, K) \times \text{UGr}_G(K, M) \rightarrow \text{UGr}_G(H, M)$ gegeben durch $(gK, fM) \mapsto gKfM = gfM$. Man zeige, daß wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{UGr}_G \xrightarrow{\cong} \{\text{Transitive } G\text{-Mengen}\}$$

erhalten, indem wir jeder Untergruppe $H \subset G$ den homogenen Raum G/H zuordnen und jedem Morphismus $gK \in \text{UGr}_G(H, K)$ die G -äquivalente Abbildung $G/H \rightarrow G/K$, $aH \mapsto aHgK = agK$. Diese Übung ist wichtig für gewisse Formulierungen der Überlagerungstheorie.

Ergänzende Übung 7.2.9. Gegeben Gruppen H, G bezeichne H -Ens- G die Kategorie aller Mengen X mit einer Linksoperation von H und einer Rechtsoperation von G derart, daß gilt $(hx)g = h(xg)$ für alle $h \in H, x \in X$ und $g \in G$. Man erkläre, in welcher Weise diejenigen Objekte dieser Kategorie, auf denen die Rechtsoperation von G frei und transitiv ist, klassifiziert werden durch G -Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen $H \rightarrow G$.

Übung 7.2.10. Ist \mathcal{C} eine Kategorie, $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $G = \mathcal{C}(A, A)$ das Monoid seiner Endomorphismen, so erhalten wir stets einen Funktor $\mathcal{C}(A, _): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens-}G$, indem wir setzen $fg = f \circ g$ für $B \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(A, B)$ und $g \in \mathcal{C}(A, A)$.

7.3 Quotientenabbildungen als Überlagerungen

Definition 7.3.1. Unter einer **Operation eines Monoids auf einem Objekt einer Kategorie** versteht man einen Homomorphismus von besagtem Monoid in das Monoid der Endomorphismen von besagtem Objekt.

7.3.2. Eine Operation eines Monoids M auf einem topologischen Raum X ist also ein Monoidhomomorphismus $\varphi: M \rightarrow \text{Top}(X, X)$. Unter der durch das Exponentialgesetz gegebenen Bijektion

$$\text{Ens}(M, \text{Ens}(X, X)) \xrightarrow{\cong} \text{Ens}(M \times X, X)$$

entsprechen die Monoidhomomorphismen $\varphi: M \rightarrow \text{Top}(X, X)$ denjenigen Abbildungen $\tilde{\varphi}: M \times X \rightarrow X$, für die mit der vereinfachenden Notation $gx := \tilde{\varphi}(g, x)$ und der durch Hintereinanderschreiben notierten Verknüpfung in M und $1 \in M$ dem neutralen Element gilt $(hg)x = h(gx) \forall h, g \in M, x \in X$ sowie $1x = x \forall x \in X$ und für die $x \mapsto gx$ für alle $g \in M$ eine stetige Abbildung $X \rightarrow X$ ist. Oft versteht man unter einer **Operation eines Monoids M auf einem topologischen Raum X** auch direkt eine Abbildung

$$M \times X \rightarrow X$$

mit den eben aufgeführten Eigenschaften.

7.3.3. Ich erinnere daran, daß eine Operation einer Gruppe auf einer Menge **frei** heißt, wenn außer dem neutralen Element kein Element unserer Gruppe irgendeinen Punkt unserer Menge festhält.

Definition 7.3.4. Eine Operation einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt **topologisch frei**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, für die die Operation eine Injektion $G \times U \hookrightarrow X$ liefert.

7.3.5 (**Terminologisches**). In der Literatur heißen unsere topologisch freien Operationen meist **freie eigentlich diskontinuierliche Operationen**.

Beispiele 7.3.6. Die Gruppe \mathbb{Z}^n operiert topologisch frei durch Addition auf \mathbb{R}^n . Die Gruppe $\{+1, -1\}$ operiert topologisch frei durch Multiplikation auf S^n und $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Für festes k operiert die Gruppe $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^k = 1\}$ der k -ten Einheitswurzeln topologisch frei auf $\mathbb{C}^n \setminus 0$. Die Operation von \mathbb{Q} auf \mathbb{R} durch Addition ist frei, aber nicht topologisch frei.

Ergänzung 7.3.7. Ist G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine diskrete Untergruppe, so ist die Operation von H auf G durch Linkstranslation topologisch frei. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die Operation durch Rechtstranslation. Sie durften das im Zusammenhang mit topologischen Gruppen als Übung 4.1.25 zeigen.

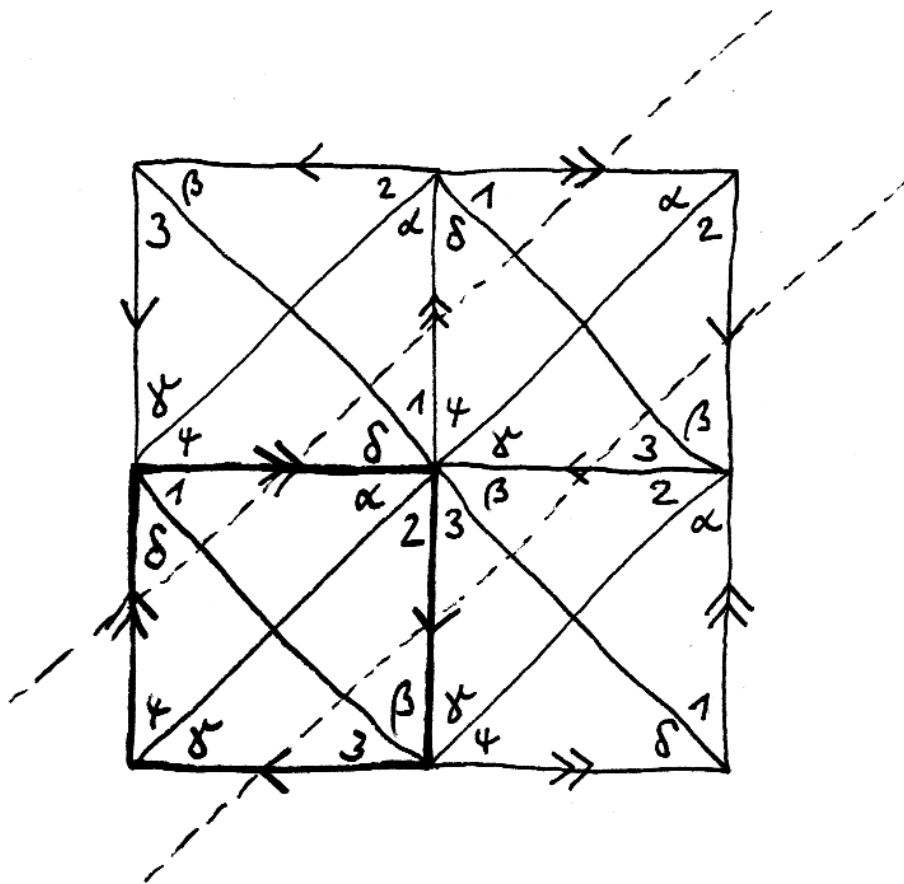
Ergänzung 7.3.8. Seien G eine Hausdorffgruppe und $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe. So bilden nach 4.4.21 die Punkte $\bar{x} \in G/K$ des Quotienten mit trivialer Standgruppe $\Gamma_{\bar{x}} = 1$ eine offene Teilmenge $V \subseteq G/K$, auf der Γ topologisch frei operiert.

7.3.9 (**Bahnenraum**). Ist X ein topologischer Raum mit einer Operation einer Gruppe G , so geben wir dem Bahnenraum X/G die Quotiententopologie bezüglich der Surjektion $X \twoheadrightarrow X/G$. Wie wir in 4.2.4 gesehen haben, ist in diesem Fall sogar für einen beliebigen weiteren Raum Y die Abbildung $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times (X/G)$ final, die offensichtliche Abbildung liefert mithin einen Homöomorphismus $(Y \times X)/G \xrightarrow{\sim} Y \times (X/G)$.

Satz 7.3.10 (Quotientenabbildungen als Überlagerungen). *Ist X ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G , so ist die Surjektion auf den Bahnenraum $p : X \twoheadrightarrow X/G$, $x \mapsto Gx$ eine Überlagerung.*

Beweis. Gegeben $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x mit $G \times U \hookrightarrow X$ sind sowohl $p : U \rightarrow p(U)$ als auch $G \times U \rightarrow p^{-1}(p(U))$ Homöomorphismen, da diese Abbildungen beide bijektiv, offen und stetig sind. Folglich ist $p(U)$ eine trivial überlagerte Umgebung von Gx . \square

Beispiel 7.3.11. Die Klein'sche Flasche kann realisiert werden als der Quotient der Ebene nach einer topologisch frei operierenden Gruppe, wie nebenstehendes Bild illustriert.



Dieses Bild der Fläche $F(aabb)$ von Seite 172 kann gelesen werden als eine Darstellung der Klein'schen Flasche als der Quotient der Ebene nach einer topologisch frei operierenden Gruppe, die von zwei Gleitspiegelungen mit parallelen Achsen und demselben Verschiebungsvektor erzeugt wird. Die Gleitspiegelachsen zweier erzeugender Gleitspiegelungen sind hier gestrichelt eingezeichnet.

Übungen

Übung 7.3.12. Jede freie Operation einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorffraum ist topologisch frei.

Übung 7.3.13 (Quotient einer Überlagerung). Ist $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung eines lokal zusammenhängenden Raums Y und operiert eine Gruppe G topologisch frei auf X und stabilisiert die Fasern von p , so ist auch $X/G \rightarrow Y$ eine Überlagerung.

Übung 7.3.14. Seien G eine Gruppe und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige G -äquivariante Abbildung von topologischen Räumen mit G -Operation. Man zeige: Operiert G topologisch frei auf Y , so auch auf X . Operiert G topologisch frei auf Y , so liefert das Bilden des Bahnenraums eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Top}_Y^G \xrightarrow{\cong} \text{Top}_{Y/G}$$

zwischen der Kategorie der topologischen Räume über Y mit einer äquivarianten G -Operation und der Kategorie der topologischen Räume über Y/G . Hinweis: Man mag einen Quasiinversen konstruieren als das Faserprodukt mit Y über Y/G . Unter diesen zueinander inversen Äquivalenzen bleiben alle Eigenschaften erhalten, die lokal sind in der Basis.

7.4 Lifts und Decktransformationen

Definition 7.4.1. Seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und $f : Y \rightarrow X$ stetige Abbildungen. Eine stetige Abbildung $h : Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ h = f$ heißt ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von f .

7.4.2. In der Kategorientheorie hatten wir so einen Lift einen „Morphismus über X “ genannt. Der Begriff Lift ist insbesondere dann gebräuchlich, wenn $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung ist. Man mag sich einen Lift durch das folgende kommutative Diagramm veranschaulichen, das gleichzeitig auch die Terminologie erklärt:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

7.4.3. Sind $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und $q : \hat{X} \rightarrow X$ Überlagerungen eines topologischen Raums X , so heißt ein Lift von q alias eine stetige Abbildung $h : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ h = q$ eine **Decktransformation** zwischen unseren Überlagerungen. Wir erhalten so die Kategorie

$$\text{Üb}_X$$

der Überlagerungen von X mit Überlagerungen als Objekten und Decktransformationen als Morphismen. Wir bezeichnen die Menge aller Decktransformationen zwischen zwei Überlagerungen \hat{X} und \tilde{X} eines Raums X nach unseren Konventionen mit $\text{Top}_X(\hat{X}, \tilde{X})$. Die Automorphismen einer Überlagerung heißen auch ihre **Deckbewegungen**. Wir schreiben nach unseren Konventionen $\text{Top}_X^\times(\tilde{X})$ für die Gruppe der Deckbewegungen von \tilde{X} über X .

Beispiele 7.4.4. Die Deckbewegungen unserer Überlagerung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ sind genau die Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Ist allgemeiner X zusammenhängend und operiert die Gruppe G topologisch frei auf X , so sind die Abbildungen $x \mapsto gx$ für $g \in G$ genau die Deckbewegungen der Überlagerung $X \rightarrow G \backslash X$. Das folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit von Lifts auf zusammenhängenden Räumen 7.4.10.

7.4.5. Da jede Überlagerungsabbildung étale ist, muß nach 7.1.14 auch jede Decktransformation étale sein. Insbesondere ist also jede Decktransformation offen und jede bijektive Decktransformation ein Isomorphismus von Überlagerungen.

Satz 7.4.6 (Decktransformationen als Überlagerungen). *Jede Decktransformation zwischen Überlagerungen eines lokal zusammenhängenden Raums ist bereits selbst eine Überlagerungsabbildung.*

7.4.7. Insbesondere hat jede Decktransformation zwischen Überlagerungen eines lokal zusammenhängenden Raums offenes und abgeschlossenes Bild, denn nach der Lokalkonstanz der Faserkardinalität 7.1.6 gilt das für jede Überlagerungsabbildung.

Beweis. Seien $q : \hat{X} \rightarrow X$ und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ unsere Überlagerungen und $h : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ unsere Decktransformation. Gegeben $\tilde{x} \in \tilde{X}$ hat sein Bild $x \in X$ eine zusammenhängende Umgebung U , auf der unsere beiden Überlagerungen Trivialisierungen $\kappa : U \times \hat{D} \xrightarrow{\sim} q^{-1}(U)$ und $\tau : U \times \tilde{D} \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ besitzen. Wir dürfen weiter annehmen, daß $\tilde{D} = \tilde{p}^{-1}(x)$ die Faser über x ist und daß gilt $\tau(x, \tilde{d}) = \tilde{d}$ für alle $\tilde{d} \in \tilde{D}$ und entsprechend für die erste Überlagerung. Dann gilt notwendig $h(\kappa(z, \hat{d})) = \tau(z, h(\hat{d}))$ und das zeigt, daß auch h eine Überlagerung ist. \square

Ergänzung 7.4.8. Mir ist nicht klar, ob im Fall einer beliebigen Basis jede Decktransformation bereits selbst eine Überlagerungsabbildung sein muß. Ich erwarte eher ein Gegenbeispiel.

7.4.9. Eine Decktransformation einer Überlagerung auf sich selber muß keine Deckbewegung sein. Man findet leicht Gegenbeispiele mit unzusammenhängendem Totalraum. Es gibt sogar Gegenbeispiele mit zusammenhängendem Totalraum für absolut vernünftige Räume, vergleiche 8.4.4. Eine Überlagerung muß auch

durchaus nicht der Quotient nach einer Gruppenwirkung sein. Wir sehen bald absolut vernünftige Gegenbeispiele.

Satz 7.4.10 (Eindeutigkeit von Lifts). *Seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Y \rightarrow X$ stetig und $g, h : Y \rightarrow \tilde{X}$ zwei Lifts von f . Ist Y zusammenhängend und gibt es $y \in Y$ mit $g(y) = h(y)$, so gilt $g = h$.*

Ergänzung 7.4.11. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir von f nur fordern, daß es étale und separiert sein soll.

Beweis. Nach 7.1.26 ist $\tilde{X} \times_X \tilde{X}$ eine Überlagerung von X und die Diagonale $\Delta : \tilde{X} \hookrightarrow \tilde{X} \times_X \tilde{X}$ hat abgeschlossenes Bild. Da Δ eine Decktransformation ist, muß aber das Bild auch offen sein. Die Abbildung $(g, h) : Y \rightarrow \tilde{X} \times_X \tilde{X}$ ist nun stetig und das Urbild der Diagonale unter dieser Abbildung ist folglich offen und abgeschlossen in Y . Für Y zusammenhängend muß dies Urbild also entweder leer sein oder ganz Y . Da es y enthält, ist es nicht leer und es folgt $g = h$. \square

Elementarer Beweis. Wir zeigen, daß die Mengen $Y_1 := \{z \in Y \mid g(z) = h(z)\}$ und $Y_2 := \{z \in Y \mid g(z) \neq h(z)\}$ beide offen sind. Aus $y \in Y_1$ und Y zusammenhängend folgt dann $Y_2 = \emptyset$. Sei also $z \in Y$ ein Punkt. Man wähle eine trivial überlagerte Umgebung U von $f(z)$ und eine Trivialisierung $\tau : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} D \times U$ von p auf U . Gilt $\tau g(z) \in \{d\} \times U$, so besitzt z eine Umgebung V mit $g(V) \subset p^{-1}(U)$ und sogar $\tau g(V) \subset \{d\} \times U$. Analoges gilt für h . Also sind Y_1 und Y_2 beide offen. \square

7.4.12. Ein **bepunkteter Raum** ist ein Paar (X, x) aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x \in X$, dem **Basispunkt** unseres bepunkteten Raums. Von einer stetigen Abbildung $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ bepunkteter Räume fordern wir stets implizit $f(x) = y$.

Satz 7.4.13 (Existenz von Lifts). *Seien $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ eine stetige Abbildung und $(\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$ eine Überlagerung. Ist Y überlagerungstrivial, so besitzt f genau einen Lift $\hat{f} : (Y, y) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz 7.4.10 über die Eindeutigkeit von Lifts, da ja Y zusammenhängend ist nach 7.1.16. Die wesentliche neue Aussage betrifft die Existenz. Wir betrachten dazu das pull-back-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \hat{X} & \rightarrow & \hat{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \rightarrow & X \end{array}$$

Nach Übung 7.1.25 ist auch die linke Vertikale eine Überlagerung. Wenn Y überlagerungstrivial ist, muß die linke Vertikale eine triviale Überlagerung sein. Wir finden also eine stetige Abbildung $Y \rightarrow Y \times_X \hat{X}$ mit $y \mapsto (y, \hat{x})$. Verknüpfen mit der oberen Horizontale gibt den gesuchten Lift. \square

Beispiel 7.4.14. Ist $U \subset \mathbb{C}$ überlagerungstrivial und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ohne Nullstelle, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine stetige Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $g(z)^n = f(z)$ für alle $z \in U$. Weiter gibt es $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $\exp(g(z)) = f(z)$ für alle $z \in U$. Beide Behauptungen bedeuten ja nur die Existenz eines Lifts in Bezug auf die Überlagerung $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ beziehungsweise die Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Sind wir in der Funktionentheorie und ist U zusätzlich offen, so zeigt der Umkehrsatz für holomorphe Funktionen ??, daß mit f auch g holomorph sein muß.

Proposition 7.4.15 (Freiheit der Operation der Deckbewegungsgruppe). *Gegeben eine Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum operiert ihre Deckbewegungsgruppe stets topologisch frei auf dem Totalraum.*

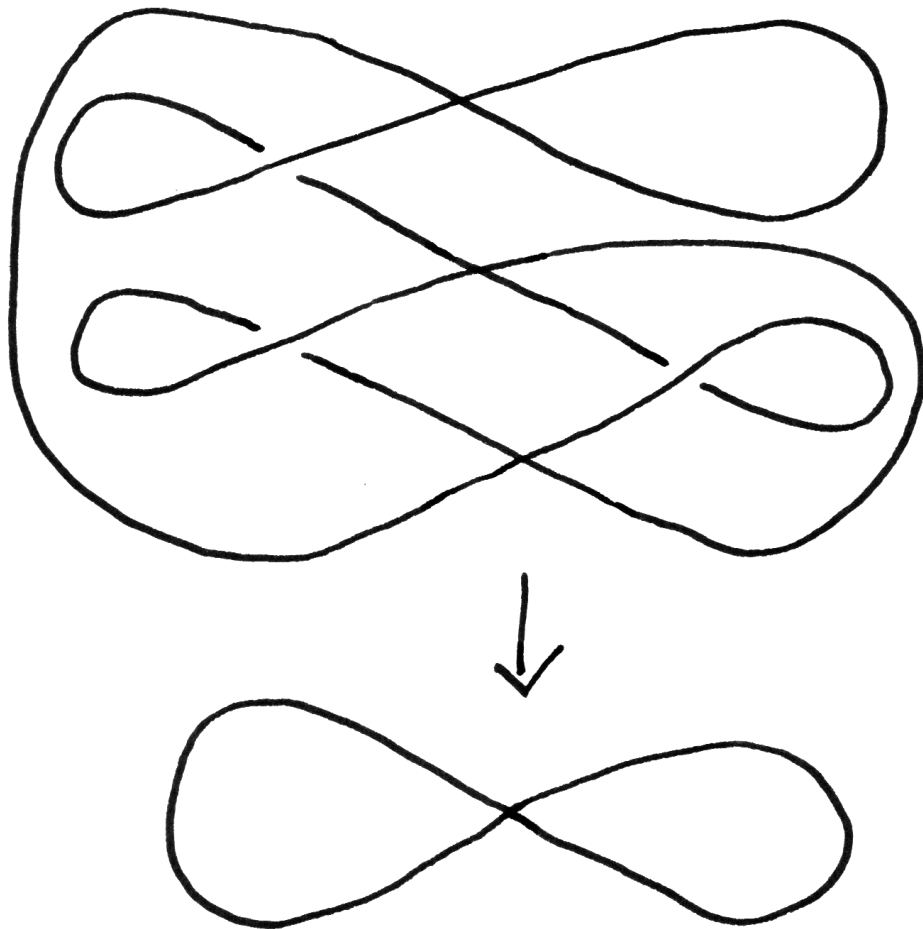
Beweis. Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ unsere Überlagerung und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ein Punkt und $x \in X$ sein Bild. Es hat eine trivial überlagerte offene Umgebung $U \Subset X$ und gegeben eine Trivialisierung $\tau : U \times D \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ gibt es ein $d \in D$ mit $\tau(x, d) = \tilde{x}$. Ich behaupte, daß dann die Operation eine Injektion $G \times \tau(U \times \{d\}) \hookrightarrow \tilde{X}$ induziert. In der Tat folgt aus $g\tau(u, d) = h\tau(v, d)$ durch Anwenden von p sofort $u = v$ und daraus $\tau(u, d) = \tau(v, d)$ und mit dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts schließlich $g = h$ wie gewünscht. \square

Definition 7.4.16. Eine zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ derart, daß für jeden Punkt $x \in X$ die Gruppe der Deckbewegungen transitiv auf der Faser $p^{-1}(x)$ operiert, nennen wir eine **Galois-Überlagerung** oder **galois**.

7.4.17 (**Diskussion der Terminologie**). Statt „galois“ sagt man auch **normal** oder **regulär**. Ich ziehe galois vor, denn normalerweise ist eine Überlagerung keineswegs galois.

Übungen

Übung 7.4.18 (Normale Hülle). Man zeige, daß jede endliche zusammenhängende lokal zusammenhängende surjektive Überlagerung selbst eine endliche Überlagerung besitzt derart, daß die Verknüpfung der beiden Überlagerungsabbildungen eine normale Überlagerung ist. Hinweis: Man bilde über der Basis das Faserprodukt einiger Kopien unserer Überlagerung mit sich selbst und nehme darin eine geeignete Zusammenhangskomponente. Man zeige auch, daß es zu je zwei endlichen zusammenhängenden lokal zusammenhängenden surjektiven Überlagerungen eine weitere endlichen zusammenhängende Überlagerung gibt, die über beide als Überlagerungsabbildung faktorisiert.



Versuch der bildlichen Darstellung einer dreiblättrigen Überlagerung der Acht, die keine nichttrivialen Decktransformationen zuläßt. Diese Überlagerung ist also nicht galois.

7.5 Initiale und universelle Überlagerungen

Definition 7.5.1. Eine bepunktete Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ heißt **initial** oder ausführlich eine **initiale bepunktete Überlagerung**, wenn es für jede weitere bepunktete Überlagerung $(\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$ ihrer Basis genau eine basispunkterhaltende Decktransformation $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$ gibt.

Beispiele 7.5.2 (Initialität bei überlagerungstrivialem Totalraum). Nach unseren Sätzen 7.4.10 und insbesondere 7.4.13 über die Existenz und Eindeutigkeit von Lifts ist jede Überlagerung durch einen überlagerungstrivialen Raum bepunktet initial für jede mögliche Bepunktung. Da nach 7.1.20 jeder wegetriviale Raum bereits überlagerungstrivial sein muß, ist etwa $\exp : (\mathbb{R}, x) \rightarrow (S^1, \exp(x))$ eine initiale bepunktete Überlagerung für alle $x \in \mathbb{R}$.

7.5.3. Eine initiale bepunktete Überlagerung ist stets zusammenhängend. In der Tat, wäre andernfalls $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \sqcup \tilde{X}_2$ eine Zerlegung in zwei nichtleere offene Teilmengen, so könnten wir leicht zwei verschiedene Decktransformationen $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \sqcup \tilde{X}$ angeben, unter denen \tilde{x} dasselbe Bild hat. Das Bild $p(\tilde{X}) \subset X$ ist also zusammenhängend und nach unseren Erkenntnissen zur Kardinalität der Fasern einer Überlagerung 7.1.6 ist es auch offen und abgeschlossen in X .

7.5.4 (**Eindeutigkeit initialer bepunkteter Überlagerungen**). In kategorientheoretischer Terminologie ist eine initiale bepunktete Überlagerung eines bepunkteten Raums ein initiales Objekt in der Kategorie aller seiner bepunkteten Überlagerungen. Insbesondere ist sie eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, weshalb wir guten Gewissens mit einem bestimmten Artikel von der initialen bepunkteten Überlagerung reden dürfen.

Satz 7.5.5 (Eigenschaften initialer bepunkteter Überlagerungen). *Gegeben eine initiale bepunktete Überlagerung $u : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ eines zusammenhängenden lokal zusammenhängenden Raums gilt:*

1. *Jede Decktransformation von \tilde{X} zu sich selbst ist bereits eine Deckbewegung, in Formeln $\text{Top}_X^\times(\tilde{X}) = \text{Top}_X(\tilde{X})$;*
2. *Die Deckbewegungsgruppe $G := \text{Top}_X^\times(\tilde{X})$ operiert topologisch frei auf dem Totalraum \tilde{X} ;*
3. *Unsere Überlagerungsabbildung induziert einen Homöomorphismus*

$$\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$$

4. *Für jeden Punkt $\tilde{z} \in \tilde{X}$ ist auch $u : (\tilde{X}, \tilde{z}) \rightarrow (X, u(\tilde{z}))$ eine initiale bepunktete Überlagerung.*

Beweis. 1. Jede Decktransformation $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ ist surjektiv nach 7.4.6, weil wir unsere Basis lokal zusammenhängend angenommen hatten. Es gibt also $\hat{x} \in \tilde{X}$ mit $\varphi(\hat{x}) = \tilde{x}$. Aufgrund der Initialität gibt es dann auch eine Decktransformation $\psi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $\psi(\tilde{x}) = \hat{x}$. Sowohl $\psi\varphi$ als auch $\varphi\psi$ sind Decktransformationen, die einen Punkt festhalten, also nach der Eindeutigkeit von Lifts die Identität. Also ist jede Decktransformation eine Deckbewegung.

2. Da jede initiale bepunktete Überlagerung \tilde{X} zusammenhängend ist, operiert nach 7.4.15 die Deckbewegungsgruppe topologisch frei auf \tilde{X} .

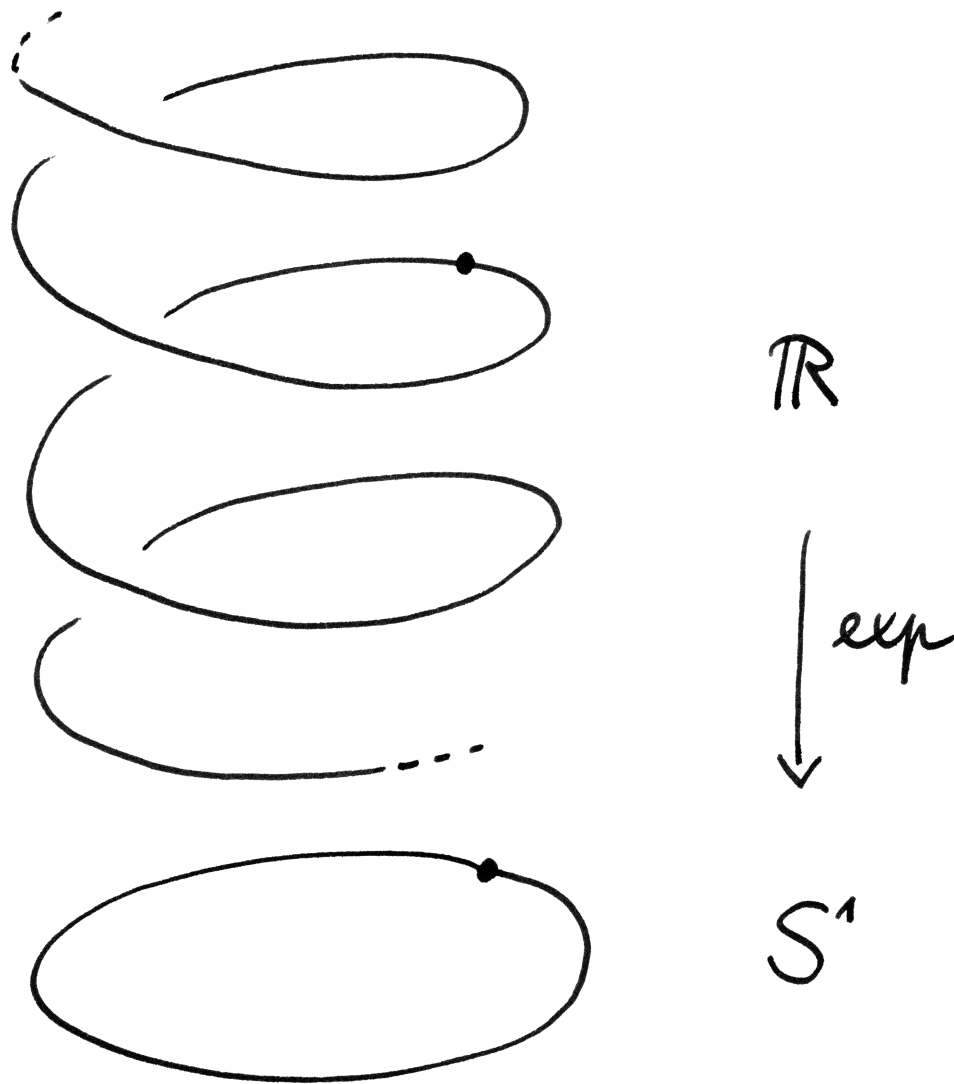
3. Da X lokal zusammenhängend angenommen war, muß $\tilde{X}/G \rightarrow X$ nach Übung 7.3.13 ebenfalls eine Überlagerung sein. Nun besteht aber bei letzterer Überlagerung die Faser über unserem Basispunkt x nur aus einem Punkt, da nach dem ersten Teil alle Decktransformationen bereits Deckbewegungen sind und die Deckbewegungsgruppe mithin und aufgrund der Initialität transitiv auf $p^{-1}(x)$ operiert. Da nach 7.1.6 die Faserkardinalität lokal konstant ist und X zusammenhängend angenommen war, muß diese Überlagerung einblättrig und damit ein Homöomorphismus $\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$ sein.

4. Sei $(\hat{X}, \hat{z}) \rightarrow (X, u(\hat{z}))$ eine bepunktete Überlagerung. Wir müssen zeigen, daß es genau eine bepunktete Decktransformation $(\tilde{X}, \tilde{z}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{z})$ gibt. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit von Lifts. Um die Existenz zu zeigen, dürfen wir \hat{X} durch die Zusammenhangskomponente von \hat{z} ersetzen, die nach 7.1.7 unter unseren Annahmen auch eine Überlagerung von X sein muß, und dürfen damit \hat{X} zusammenhängend annehmen. Nach ?? ist $\hat{X} \rightarrow X$ surjektiv. Aufgrund der Initialität von \tilde{X} gibt es damit eine Decktransformation $d : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ und diese ist nach 7.4.7 surjektiv und wir finden $\tilde{z} \in \tilde{X}$ mit $d(\tilde{z}) = \hat{z}$. Wegen $u(\tilde{z}) = u(\hat{z})$ gibt es aber nach Teil 3 ein $g \in G$ mit $g(\tilde{z}) = \tilde{z}$ und dann ist dg die gesuchte Decktransformation mit $\tilde{z} \mapsto \hat{z}$. \square

Definition 7.5.6. Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eines zusammenhängenden Raums heißt eine **universelle Überlagerung**, wenn \tilde{X} nicht leer ist und wenn für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Überlagerung von bepunkteten Räumen $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, p(\tilde{x}))$ bepunktet initial ist.

7.5.7. Jede initiale bepunktete Überlagerung eines zusammenhängenden und lokal zusammenhängenden Raums ist nach 7.5.5 universell. Die Bezeichnung „universell“ bezieht sich auf die „universelle Eigenschaft“, die wir „bepunktet initial“ genannt hatten und die wir bei universellen Überlagerungen stärker sogar für alle Punkte des Totalraums fordern.

7.5.8 (**Eindeutigkeit universeller Überlagerungen**). Universelle Überlagerungen haben keine vernünftige universelle Eigenschaft und sind nur eindeutig bis



Versuch der graphischen Darstellung einer universellen Überlagerung einer
 bepunkteten Kreislinie. Gemeint ist eine nach oben und unten unendliche
 Spirale, die vertikal auf die Kreislinie projiziert wird.

auf nicht-eindeutigen Isomorphismus, was man leicht aus der Eindeutigkeit im bepunkteten Fall folgert. Wir erlauben uns dennoch auch in dieser Situation den bestimmten Artikel.

Beispiel 7.5.9. Die Überlagerung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ist nach 7.5.2 universell.

7.5.10 (Deckbewegungen universeller Überlagerungen). Gegeben eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$ ist jede Decktransformation $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ bereits eine Deckbewegung, die Deckbewegungsgruppe G operiert topologisch frei auf \tilde{X} und die Überlagerungsabbildung induziert einen Homöomorphismus $\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$. Das alles folgt genau wie im bepunkteten Fall 7.5.5, nur daß wir die Bedingung „lokal zusammenhängend“ aufgrund der stärkeren Annahmen nicht mehr benötigen.

Lemma 7.5.11. *Ein Raum ist überlagerungstrivial genau dann, wenn die Identität auf unserem Raum eine universelle Überlagerung ist.*

Beweis. Daß die Identität auf jedem überlagerungstrivialen Raum eine universelle Überlagerung ist, folgt sofort aus der Existenz und Eindeutigkeit von Lifts 7.4.13. Ist umgekehrt die Identität auf einem Raum Y eine universelle Überlagerung, so ist nach unseren Definitionen Y nicht leer. Wählen wir also $y \in Y$. Ist dann $p : \hat{Y} \rightarrow Y$ eine Überlagerung, so finden wir für jedes $\hat{y} \in p^{-1}(y)$ genau einen Lift $s_{\hat{y}} : (Y, y) \rightarrow (\hat{Y}, \hat{y})$ von p und in ihrer Gesamtheit liefern diese Lifts eine stetige Abbildung

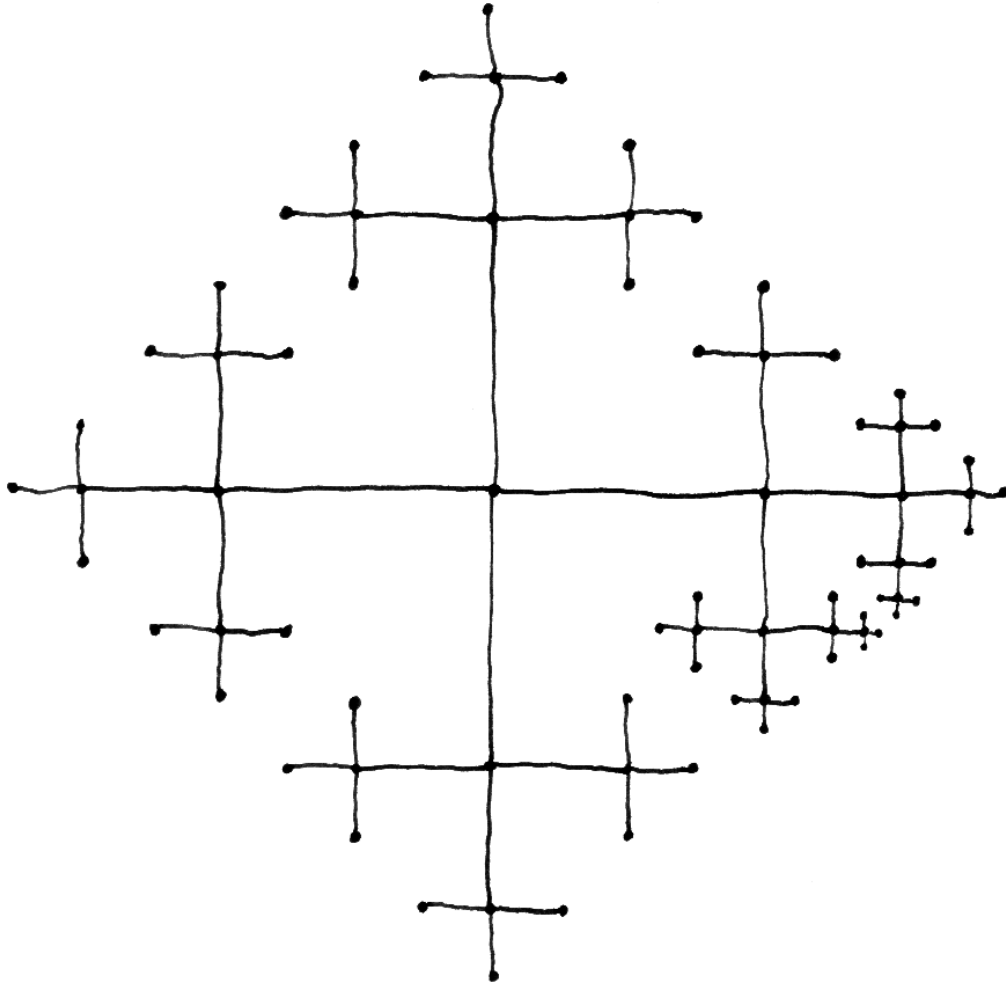
$$\tau : Y \times p^{-1}(y) \rightarrow \hat{Y}$$

gegeben durch $(z, \hat{y}) \mapsto s_{\hat{y}}(z)$. Als Decktransformation ist τ nach 7.4.5 auch offen, ja sogar étale. Wenden wir die Annahme des Lemmas auf die anderen Punkte von Y an, so erkennen wir unschwer, daß unsere Abbildung zusätzlich injektiv und surjektiv ist und damit die Überlagerung $\hat{Y} \rightarrow Y$ trivialisiert. \square

Beispiel 7.5.12 (Universelle Überlagerung der Figur 8). Will man nicht nur Bilder malen, muß man zunächst spezifizieren, was die Figur 8 sein soll. Wir definieren sie hier noch etwas unbeholfen als die geometrische Realisierung des Simplicialkomplexes $\mathcal{K}(8)$ mit fünf Ecken $\mathcal{K}(8)_0 := \{a, b, c, d, e\}$ und sechs Kanten $\mathcal{K}(8)_1 := \{\{c, a\}, \{c, b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$. Die universelle Überlagerung können wir dann ähnlich als geometrische Realisierung eines unendlichen Simplicialkomplexes konstruieren.

Wir definieren sie als die geometrische Realisierung der semisimplizialen Menge $\mathcal{K}(8)$ mit einem Nullsimplex $\mathcal{K}(8)_0$ und zwei Einssimplizes $\mathcal{K}(8)_1 := \{a, b\}$ nach ??.

Satz 7.5.13 (Überlagerungen mit überlagerungstrivialelem Totalraum). *Eine Überlagerung eines zusammenhängenden lokal überlagerungstrivialen Raums ist genau dann universell, wenn sie einen überlagerungstrivialen Totalraum hat.*



Graphische Darstellung eines Teils einer universellen Überlagerung der Figur 8.

Jede vertikale Kante dieses Bildes geht unter der Überlagerungsabbildung homöomorph auf die obere Schlaufe der 8, jede horizontale Kante auf die untere Schlaufe der 8, und zwar soll das Durlaufen von unten nach oben

beziehungsweise von rechts nach links dabei jeweils dem Durchlaufen im Uhrzeigersinn entsprechen. Es gilt also salopp gesagt, „sich alle Kanten dieses Bildes gleich lang zu denken“. Die Kreuzungspunkte sind nach ?? in Bijektion zu den Elementen der freien Gruppe in zwei Erzeugern x und y , indem man etwa von der Mitte ausgehend jedes x interpretiert als „gehe nach rechts zum nächsten Kreuzungspunkt“, jedes x^{-1} als „gehe nach links“, jedes y als „gehe nach oben“ und y^{-1} als „gehe nach unten“.

Ergänzung 7.5.14. Ich erinnere daran, daß nach unseren allgemeinen Konventionen „lokal überlagerungstrivial“ bedeutet, daß jede Umgebung jedes Punktes verkleinert werden kann zu einer überlagerungstrivialen Umgebung desselben Punktes. Ich weiß nicht, ob jede universelle Überlagerung eines beliebigen Raums einen überlagerungstrivialen Totalraum haben muß.

Beweis. Das Liften bei überlagerungstrivialem Definitionsbereich 7.4.13 zeigt, daß eine Überlagerung eines zusammenhängenden Raums durch einen überlagerungstrivialen Raum stets universell ist. Für den Beweis der anderen Implikation sei X unser Raum und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung. Ist $q : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ eine Überlagerung dieser universellen Überlagerung, so ist nach Übung 7.1.27 auch die Verknüpfung $pq : \hat{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Gegeben $\hat{x} \in \hat{X}$ mit Bild $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gibt es mithin genau eine Decktransformation $d : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$ über X . Wegen $qd(\tilde{x}) = \tilde{x}$ gilt nach der Eindeutigkeit von Lifts $qd = \text{id}_{\tilde{X}}$ und q ist sogar eine Decktransformation über \tilde{X} . Wir sehen so, daß die Identität auf \tilde{X} eine universelle Überlagerung von \tilde{X} ist. Damit aber ist \tilde{X} überlagerungstrivial nach 7.5.11. \square

Beispiel 7.5.15. Die Klein'sche Flasche hat nach 7.3.11 als universelle Überlagerung die Ebene, denn diese ist überlagerungstrivial nach dem Schleifenkriterium 7.1.20. Dasselbe gilt im Übrigen für alle unsere kompakten zusammenhängenden Flächen mit Ausnahme der Kugelschale S^2 und des zweidimensionalen reellprojektiven Raums $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

7.6 Existenz universeller Überlagerungen

Satz 7.6.1 (Universelle Überlagerung lokal überlagerungstrivialer Räume). *Jeder zusammenhängende lokal überlagerungstriviale Raum besitzt eine überlagerungstriviale universelle Überlagerung.*

Beweis. Jede initiale bepunktete Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ eines zusammenhängenden und lokal zusammenhängenden Raums ist nach Satz 7.5.5 bereits eine universelle Überlagerung und jede universelle Überlagerung eines zusammenhängenden lokal überlagerungstrivialen Raums ist nach 7.5.13 überlagerungstrivial. Es reicht demnach zu zeigen, daß unser Raum X für einen Punkt $x \in X$ eine initiale bepunktete Überlagerung besitzt. Wir beginnen damit, eine obere Abschätzung für die Kardinalität $|\tilde{X}|$ einer zusammenhängenden bepunkteten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ herzuleiten. Wir wählen dazu für jeden Punkt $y \in X$ eine überlagerungstriviale Umgebung $U(y)$. Zu jedem Punkt $\tilde{y} \in \tilde{X}$ und jeder Folge $p(\tilde{y}) = x_0, z_0, x_1, z_1, \dots, x_r$ in X mit $z_i \in U(x_i) \cap U(x_{i+1})$ erhalten wir eine wohlbestimmte Folge $\tilde{x}_0, \tilde{z}_0, \tilde{x}_1, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{x}_r$ in \tilde{X} mit $\tilde{x}_0 = \tilde{y}$, die unter p auf unsere ursprüngliche Folge abgebildet wird und so, daß \tilde{z}_i in derselben

Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U(x_i))$ liegt wie \tilde{x}_i und in derselben Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U(x_{i+1}))$ wie \tilde{x}_{i+1} falls $i \neq r$. Es ist klar, daß alle \tilde{x}_r , die wir auf diese Weise für irgendein $r \geq 0$ erhalten, eine offene zusammenhängende Teilmenge $Z(\tilde{y}) \subseteq \tilde{X}$ bilden, die \tilde{y} enthält. Es ist auch klar, daß diese $Z(\tilde{y})$ eine Partition von \tilde{X} bilden. Ist also \tilde{X} zusammenhängend, so folgt $\tilde{X} = Z(\tilde{x})$ und das liefert uns die gewünschte obere Schranke für die Kardinalität einer zusammenhängenden bepunkteten Überlagerung von (X, x) . Sei nun Ω eine Menge echt größerer Kardinalität. Wir betrachten die Gesamtheit I aller Quadrupel (Z, z, τ, q) mit $Z \subset \Omega$ einer Teilmenge, $z \in Z$ einem Punkt, $\tau \subset \text{Pot}(Z)$ einer Topologie auf Z und $q : Z \rightarrow X$ einer in Bezug auf die Topologie τ stetigen Abbildung, unter der (Z, z) eine bepunktete Überlagerung von (X, x) wird. Das durch $i \in I$ gegebene Quadrupel notieren wir (Z_i, z_i, τ_i, q_i) . Wir betrachten weiter die Menge

$$T \subset \prod_{i \in I} Z_i$$

aller Tupel $t = (t_i)$ derart, daß für jede Decktransformation von bepunkteten Überlagerungen $d : (Z_i, z_i) \rightarrow (Z_j, z_j)$ gilt $d(t_i) = t_j$. Die Menge T besitzt einen ausgezeichneten Punkt $z := (z_i)$ und eine offensichtliche ausgezeichnete Abbildung von bepunkteten Mengen $\text{pr} : (T, z) \rightarrow (X, x)$ mit $q_i \circ \text{pr}_i = \text{pr} \quad \forall i \in I$. Unsere Menge T versehen wir nun mit einer Topologie, indem wir ein Fundamentalsystem von Umgebungen für jeden Punkt $t \in T$ angeben derart, daß die davon erzeugten Filter die in ?? gegebenen Axiome erfüllen. Gegeben $U \subset V \subset X$ eine zusammenhängende Umgebung U von $\text{pr}(t)$, die in einer überlagerungstrivialen Teilmenge V von X liegt, besitzt ja jede Überlagerung $q_i : Z_i \rightarrow X$ genau einen stetigen Schnitt $s_i : V \rightarrow Z_i$, dessen Bild t_i enthält, und a fortiori genau einen stetigen Schnitt $s_i : U \rightarrow Z_i$, dessen Bild t_i enthält. Diese Schnitte liefern in ihrer Gesamtheit eine Abbildung $s : U \rightarrow T$ mit $s(\text{pr}(t)) = t$ und die so erhaltenen Teilmengen $s(U) \subset T$ nehmen wir als unsere Fundamentalsysteme von Umgebungen von $t \in T$. Es ist klar, daß wir so eine Topologie auf T erhalten und daß $\text{pr} : (T, z) \rightarrow (X, x)$ eine bepunktete Überlagerung ist. Die Zusammenhangskomponente $\tilde{X} \subset T$ von z ist dann nach 7.1.7 auch eine bepunktete Überlagerung von (X, x) und ist initial nach Konstruktion. \square

7.6.2. Wir nennen einen topologischen Raum nach 7.1.19 **wegetrivial**, wenn er zusammenhängend, schleifenfüllend und lokal wegzusammenhängend ist.

Satz 7.6.3 (Universelle Überlagerung lokal wegetrivialer Räume). *Jeder zusammenhängende lokal wegetriviale Raum besitzt eine wegetriviale universelle Überlagerung.*

Beweis. Wir wählen $x \in X$ fest und betrachten die Menge \tilde{X} aller Homotopieklassem von Wegen mit Anfangspunkt x unter Homotopie mit festen Randpunkten,

in Formeln,

$$\tilde{X} := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma \text{ ist stetig, } \gamma(0) = x\} / \simeq$$

Äquivalent und vielleicht suggestiver aber komplizierter könnten wir \tilde{X} auch erklären als die Menge aller Paare (g, y) bestehend aus einem Punkt $y \in X$ und einer Homotopieklasse von Wegen $g \in \mathcal{W}(x, y)$. Die Homotopieklasse eines Weges γ heiße wieder $[\gamma]$. Insbesondere haben wir also eine Abbildung $u : \tilde{X} \rightarrow X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, die jeder Homotopieklasse von Wegen ihren gemeinsamen Endpunkt zuordnet. Sie ist surjektiv, da X wegzusammenhängend ist. Wir erklären nun auf \tilde{X} eine Topologie. Für jeden stetigen Weg γ mit Anfangspunkt x und jede offene Umgebung V seines Endpunktes $\gamma(1)$ setzen wir dazu

$$U(\gamma, V) := \{[\beta * \gamma] \mid \beta : [0, 1] \rightarrow V \text{ stetig mit } \beta(0) = \gamma(1)\}$$

und betrachten auf \tilde{X} die von allen $U(\gamma, V)$ erzeugte Topologie. Offensichtlich ist $u : \tilde{X} \rightarrow X$ stetig, das Urbild von V ist ja gerade die Vereinigung der $U(\gamma, V)$ über alle Wege γ mit Endpunkt in V . Wir müssen zeigen, daß u eine Überlagerung ist. Für $z \in X$ wählen wir dazu eine offene wegzusammenhängende Umgebung V von z , die ganz in einer schleifenfüllenden Umgebung enthalten ist. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\Phi : u^{-1}(z) \times V \rightarrow \tilde{X}, \quad ([\gamma], v) \mapsto [\beta * \gamma]$$

Hier meint $\beta : [0, 1] \rightarrow V$ irgendeinen Weg von z nach v , der ganz in V verläuft. Aufgrund unserer Voraussetzungen an V ist Φ wohldefiniert und eine Injektion mit Bild $u^{-1}(V)$. Wir zeigen, daß Φ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

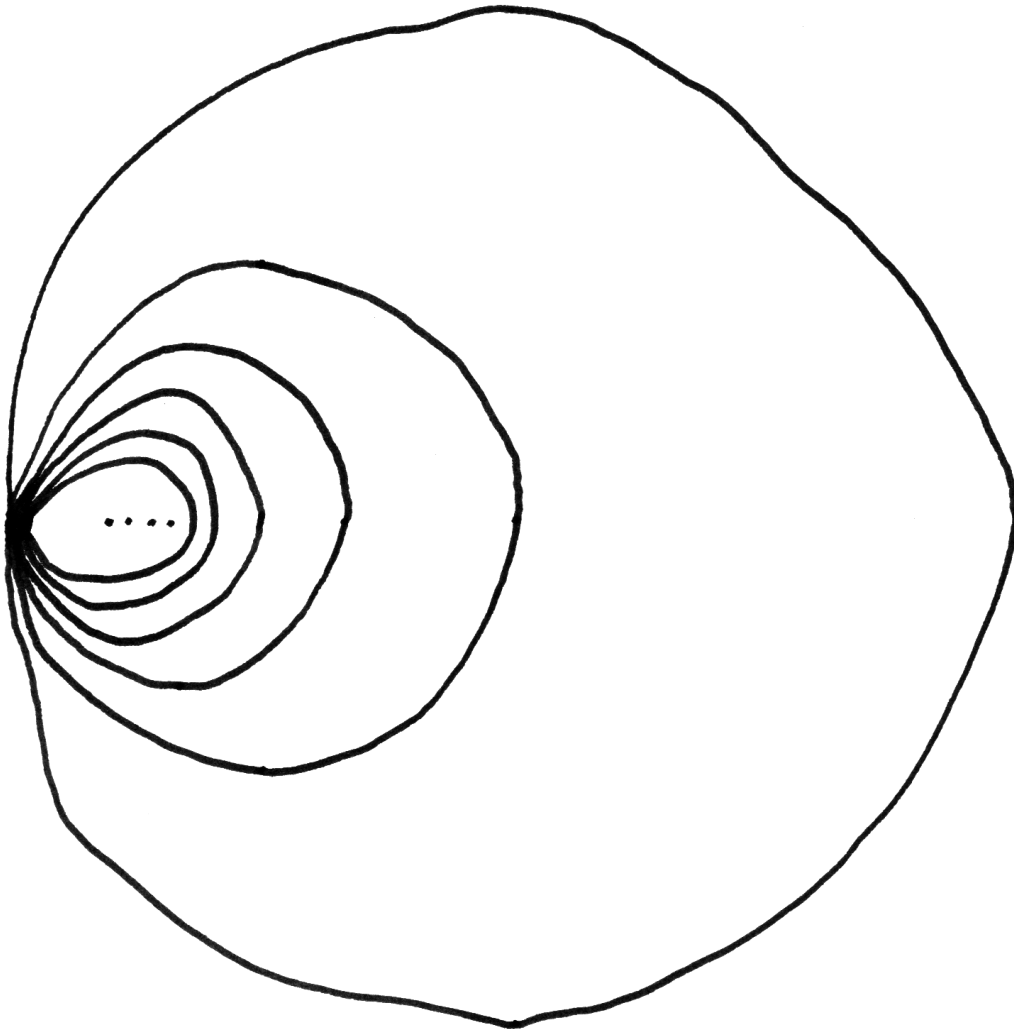
1. Φ ist stetig. In der Tat, liegt $\Phi([\gamma], v)$ in $U(\alpha, W)$, so auch $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1)$ für jede offene wegzusammenhängende Umgebung V_1 von v in $V \cap W$;
2. Φ ist offen. In der Tat, für wegzusammenhngendes offenes $V_1 \subset V$ gilt $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1) = U(\beta * \gamma, V_1)$ für jeden Weg $\beta : [0, 1] \rightarrow V$ mit $\beta(0) = z$, $\beta(1) \in V_1$.

Also ist $u : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und wir müssen nur noch zeigen, daß \tilde{X} wegzusammenhängend und schleifenfüllend ist. Bezeichne $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Klasse des konstanten Weges x . Jeder Weg $\omega : ([0, 1], 0) \rightarrow (X, x)$ mit Anfangspunkt x hat als Lift zum Anfangspunkt \tilde{x} den Weg $\tilde{\omega} : ([0, 1], 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$ gegeben durch $\tilde{\omega}(s) = [\omega_s]$ mit $\omega_s(t) = \omega(st)$. Die Wege $\omega_s : [0, 1] \rightarrow X$ sind also Anfangsstücke von ω , die so langsam durchlaufen werden, daß gilt $\omega_s(1) = \omega(s)$. Offensichtlich hat $\tilde{\omega}$ den Endpunkt $[\omega]$. Mit X ist also auch \tilde{X} wegzusammenhängend. Jeder geschlossene Weg $\tilde{\alpha} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x})$ von unserem Punkt \tilde{x} zu sich selber

schließlich ist umgekehrt der Lift seines Bildes $\alpha \in \Omega(X, x)$ zum Anfangspunkt \tilde{x} und hat nach dem vorhergehenden folglich den Endpunkt $[\alpha]$. Aus $[\alpha] = \tilde{x}$ folgt aber, daß es eine Homotopie $h : \alpha \simeq \varepsilon_x$ zum konstanten Weg gibt. Diese können wir liften nach 7.4.13, da $[0, 1]^2$ überlagerungstrivial ist, und erhalten so $\tilde{h} : \tilde{\alpha} \simeq \tilde{\varepsilon}_x = \varepsilon_{\tilde{x}}$. Also ist jeder geschlossene Weg in \tilde{X} zusammenziehbar und \tilde{X} ist eine wegetriviale Überlagerung. Dann ist sie aber nach 7.1.20 auch überlagerungstrivial sowie lokal überlagerungstrivial und nach 7.5.13 eine universelle Überlagerung. \square

Übungen

Übung 7.6.4. Für $n \geq 1$ betrachte man den Kreis $K_n \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $1/n$, der rechts von der y -Achse liegt und diese im Ursprung berührt. Man zeige, daß der Raum $X = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ keine einfach wegzusammenhängende Überlagerung besitzt. Dieser sogenannte **Kreisraum** dient oft als Gegenbeispiel.



Versuch der graphischen Darstellung des Kreisraums. Man muß sich dabei allerdings noch unendlich viele immer kleinere Kreise hinzudenken.

8 Überlagerungen und Gruppenwirkungen

8.1 Eigenschaften von Funktoren

8.1.1. Ich erinnere einige Begriffe zu Funktoren aus 10.2.19.

- Definition 8.1.2.**
1. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **treu**, wenn er auf den Morphismen Injektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$;
 2. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **volltreu**, wenn er auf den Morphismen Bijektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FA, FA')$ induziert. Ich notiere volltreue Funktoren \hookrightarrow ;
 3. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn er volltreu ist und zusätzlich eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert, wenn es also in Formeln für alle $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $FA \cong B$. Ich notiere Äquivalenzen von Kategorien $\xrightarrow{\sim}$. Die doppelte Schlange soll andeuten, daß dieser Begriff schwächer ist als der Begriff eines Isomorphismus von Kategorien, wie er im Anschluß eingeführt wird;
 4. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt ein **Isomorphismus von Kategorien**, wenn er bijektiv ist auf Objekten und auf Morphismen, wenn er also ein Isomorphismus ist in der Kategorie der Kategorien aus 8.7.1. Ich notiere Isomorphismen von Kategorien $\xrightarrow{\cong}$.

Beispiel 8.1.3. Sei k ein Körper. Wir betrachten die Kategorie Modf_k aller endlichdimensionalen alias endlich erzeugten k -Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Das Kürzel steht für „finitely generated k -Module“, eine andere Bezeichnung für dasselbe Objekt. Weiter betrachten wir, und zwar sogar für einen beliebigen Ring k , die **Matrixkategorie** $\text{Mat} = \text{Mat}_k$ mit Objekten $\text{Ob}(\text{Mat}) := \mathbb{N}$ und Matrizen mit Einträgen in k des entsprechenden Formats als Morphismen, in Formeln $\text{Mat}(m, n) := \text{Mat}(n \times m; k)$. Die Verknüpfung von Morphismen in Mat schließlich sei die Matrixmultiplikation. Im Fall eines Körpers k ist dann der offensichtliche Funktor $n \mapsto k^n$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Mat}_k \xrightarrow{\sim} \text{Modf}_k$$

zwischen unserer Matrixkategorie Mat_k und der Kategorie der endlich erzeugten k -Vektorräume, aber ist natürlich kein Isomorphismus von Kategorien. Diese Aussage faßt eine Vielzahl von Aussagen der linearen Algebra zusammen und illustriert meines Erachtens recht gut die Kraft und Eleganz der Sprache der Kategorientheorie. Wenn unser Ring k selbst durch einen größeren Ausdruck gegeben ist, schreiben wir für unsere Matrixkategorie statt Mat_k auch manchmal $\text{Mat}(k)$.

Übungen

Übung 8.1.4. Jede Äquivalenz von Kategorien induziert eine Bijektion zwischen den zugehörigen Isomorphieklassen von Objekten. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen k -Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, alias durch Elemente von \mathbb{N} , alias durch Isomorphieklassen der Matrixkategorie.

8.2 Transformationen

8.2.1. Ich erinnere nun an das Konzept einer Transformation von Funktoren, wie es in 10.4 ausführlicher besprochen wird.

Definition 8.2.2. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Funktoren. Eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ ist eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathcal{A}$ einen Morphismus $\tau_X \in \mathcal{B}(FX, GX)$ zuordnet derart, daß für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{A} das folgende Diagramm in \mathcal{B} kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\tau_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\tau_Y} & GY \end{array}$$

In Formeln meint dies „Kommutieren“ die Gleichheit $(Gf) \circ \tau_X = \tau_Y \circ (Ff)$ in der Morphismenmenge $\mathcal{B}(FX, GY)$. Ob ein Doppelpfeil eine Transformation von Funktoren oder vielmehr eine Implikation meint, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sind alle τ_X Isomorphismen, so nenne ich τ eine **Isotransformation** und notiere sie $\xrightarrow{\cong}$. Gibt es zwischen zwei Funktoren eine Isotransformation, so heißen sie **isomorph**.

8.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere Transformationen meist „natürliche Transformationen“. Diese Terminologie schien mir jedoch unnötig umständlich und entspricht auch nicht meinem Sprachempfinden: Ich möchte zum Beispiel unter der „natürlichen“ Transformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie aller \mathbb{R} -Vektorräume in den Bidualraumfunktoren gerne die in 8.2.4 gegebene Transformation verstehen, die zwar keineswegs die einzige Transformation zwischen diesen Funktoren ist, aber vielleicht schon die „natürlichste“. In der Literatur heißen unsere Isotransformationen auch und sogar meist **Isomorphismen von Funktoren** oder **Äquivalenzen von Funktoren**.

Beispiel 8.2.4 (Bidualraum und Identitätsfunktoren). Seien k ein Körper und $B : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$ der Funktor, der jedem k -Vektorraum V seinen Bidualraum $BV := V^{\text{TT}}$ zuordnet. So liefern die Evaluationen $\text{ev}_V : V \rightarrow V^{\text{TT}}$,

$v \mapsto (f \mapsto f(v))$ eine Transformation $\text{ev} : \text{Id} \Rightarrow B$ und eine Isotransformation zwischen den Restriktionen dieser Funktoren auf die Kategorie der endlichdimensionalen k -Vektorräume, vergleiche ???. Oft formalisiert man Situationen dieser Art nicht bis ins Letzte aus und spricht etwa von **kanonischen Abbildungen** oder **kanonischen Isomorphismen**, wenn bei formaler Betrachtung Abbildungen oder Isomorphismen $\tau_X : FX \rightarrow GX$ gemeint sind, die in ihrer Gesamtheit eine Transformation beziehungsweise Isotransformation von Funktoren $\tau : F \xrightarrow{\sim} G$ bilden.

Beispiel 8.2.5 (Dualraum und Transponieren). Sei k ein Körper. Wir betrachten den Dualraumfunktork $D : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k^{\text{opp}}$, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet. Sei $T : \text{Mat}_k \rightarrow \text{Mat}_k^{\text{opp}}$ der Funktor auf der Matrizenkategorie Mat_k aus 8.1.3, der die Objekte festhält und Matrizen transponiert. Sei schließlich noch $R : \text{Mat}_k \rightarrow \text{Mod}_k$ unser Realisierungsfunktork $n \mapsto k^n$ aus 8.1.3. So erhalten wir eine Isotransformation

$$\tau : R^{\text{opp}}T \xrightarrow{\sim} DR$$

dadurch, daß wir jeder natürlichen Zahl alias jedem Objekt $n \in \text{Mat}_k$ den offensichtlichen Isomorphismus $\tau_n : k^n \xrightarrow{\sim} (k^n)^\top$ zuordnen. Es kann hilfreich sein, durch Doppelpfeile in Diagrammen von Kategorien und Funktoren klarzumachen, zwischen welchen Funktoren eine Transformation gemeint ist. So wäre etwa in diesem Beispiel unser τ ein möglicher Doppelpfeil im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_k & \xrightarrow{T} & \text{Mat}_k^{\text{opp}} \\ R \downarrow & \tau \swarrow & \downarrow R^{\text{opp}} \\ \text{Mod}_k & \xrightarrow{D} & \text{Mod}_k^{\text{opp}} \end{array}$$

In diesem Fall könnten wir zusätzlich unseren Doppelpfeil noch mit einer Schlange versehen, da er ja einen Isomorphismus von Funktoren darstellt.

Beispiel 8.2.6. Sind $\tau : F \Rightarrow G$ und $\sigma : G \Rightarrow H$ Transformationen, so ist auch $\sigma \circ \tau : F \Rightarrow H$ gegeben durch $(\sigma \circ \tau)_X := \sigma_{FX} \circ \tau_X$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie von F eine Transformation. Des weiteren gibt es für jeden Funktor F die **identische Transformation** $\text{id} = \text{id}_F$ von besagtem Funktor zu sich selber, gegeben durch $(\text{id}_F)_X := \text{id}_{FX}$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie unseres Funktors. Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien, so bilden die Funktoren $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ selbst eine Kategorie, mit Funktoren als Objekten und Transformationen als Morphismen. Ich verwende für diese **Funktorkategorie** die beiden Notation $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, so daß etwa für Funktoren $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ die Menge der Transformationen

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(F, G) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F, G)$$

notiert werden kann. Werden die Kategorien selber durch größere Ausdrücke gegeben, so sind für die Menge der Transformationen auch abkürzende Notationen

wie etwa $\text{Trans}(F, G)$ sinnvoll und üblich. Unsere Isotransformationen sind genau die Isomorphismen der Funktorkategorie.

Beispiel 8.2.7. Seien $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Funktoren und $\tau : F \Rightarrow G$ eine Transformation. Gegeben ein weiterer Funktor $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ erhalten wir eine Transformation $H\tau : HF \Rightarrow HG$ durch $(H\tau)_X := H(\tau_X)$. Gegeben ein weiterer Funktor $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ erhalten wir eine Transformation $\tau K : FK \Rightarrow GK$ durch $(\tau K)_W := \tau_{KW}$. Offensichtlich liefern diese Konstruktionen ihrerseits Funktoren $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ und $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ zwischen den entsprechenden Funktorkategorien, die wir als **Nachschaten von H** beziehungsweise **Vorschalten von K** bezeichnen.

8.2.8 (Schwierigkeiten der Notation). Die Notationen τK und $H\tau$ führen leicht zu Verwirrung, sobald nicht aus der Art der Symbole klar ist, welche Symbole Funktoren und welche Transformationen darstellen. Ich kenne keine generelle Lösung für diese Schwierigkeiten der Notation. Hier versuche ich, eine gewisse Übersichtlichkeit dadurch zu erreichen, daß ich systematisch lateinische Großbuchstaben für Funktoren und kleine griechische Buchstaben für Transformationen verwende.

Übungen

Übung 8.2.9 (Homotopie und fundamentales Gruppoid). Gegeben stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ liefert jede Homotopie $H : f \simeq g$ eine Isotransformation $H_{\#} : f_{\#} \xrightarrow{\cong} g_{\#}$ zwischen den auf den Wegekategorien induzierten Funktoren $f_{\#}, g_{\#} : \mathcal{W}_X \rightarrow \mathcal{W}_Y$ mittels der Isomorphismen $(H_{\#})_x = [H(x, t)] \in \mathcal{W}_Y(f(x), g(x))$.

Übung 8.2.10. Sind zwei Funktoren isomorph und ist der eine eine Äquivalenz von Kategorien, so auch der andere.

Übung 8.2.11. Sei G ein Monoid. Die G -Mengen mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden dann eine Kategorie G -Ens. Bilden wir zu unserem Monoid G die Ein-Objekt-Kategorie $[G]$, so liefert der hoffentlich offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$G\text{-Ens} \xrightarrow{\cong} \text{Cat}([G], \text{Ens})$$

Übung 8.2.12. Man zeige: Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es eine Äquivalenz von Kategorien in die Gegenrichtung $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ gibt nebst einer Isotransformation $\tau : \text{Id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\cong} GF$. Die Äquivalenz G oder genauer das Paar (G, τ) heißt dann ein **quasiinverser Funktor zu F** . Man zeige weiter: Zu jedem Paar (G, τ) wie eben gibt es genau eine Isotransformation $\eta : FG \xrightarrow{\cong} \text{Id}_{\mathcal{A}}$ mit $(\eta F) \circ (F\tau) = \text{id}_F$.

Übung 8.2.13. Man zeige: Genau dann ist ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ gibt derart, daß FG isomorph ist zum Identitätsfunktor auf \mathcal{B} und GF isomorph zum Identitätsfunktor auf \mathcal{A} .

Übung 8.2.14. Man zeige: Gegeben eine Äquivalenz von Kategorien $F : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ und ein Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ nebst einer Isotransformation $\tau : FG \xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathcal{A}}$ ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien und (G, τ) quasiinvers zu F .

Übung 8.2.15 (Äquivalenzen von Funktorkategorien). Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und ist $K : \mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Vorschalten von K eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich $H : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von H eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

Ergänzende Übung 8.2.16 (Exponentialgesetz für Kategorien). Man zeige, daß man für je drei Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ einen Isomorphismus von Kategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \text{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

erhält durch die Vorschrift $F \mapsto \tilde{F}$ mit $\tilde{F}(A, B) = (F(A))(B)$ auf Objekten und eine vom Leser zu spezifizierende Vorschrift auf Morphismen.

8.3 Adjungierte Funktoren

8.3.1. Das Konzept adjungierter Funktoren gehört zu den Grundbegriffen der Kategorientheorie. Die Terminologie kommt vermutlich vom Fall der Restriktions- und Induktionsfunktoren aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen her, die ein Paar von adjungierten Funktionen bilden und deren Effekte auf Charakteren adjungierte lineare Abbildungen im Sinne der linearen Algebra sind.

Definition 8.3.2. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren. Eine **Adjunktion** α von L mit R oder in Kurzschreibweise $\alpha : L \dashv R$ ist eine Isotransformation

$$\alpha : \mathcal{B}(L, _) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(_, R)$$

von Funktoren $\mathcal{A}^{\text{opp}} \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Ens}$, also explizit eine Familie von Bijektionen $\alpha_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$ für $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ mit gewissen Natürlichkeitseigenschaften, genauer mit $\alpha(\varphi \circ Lf) = \alpha(\varphi) \circ f$ sowie $\alpha(g \circ \varphi) = Rg \circ \alpha(\varphi)$ für $f : A' \rightarrow A$ und $\varphi : LA \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow B'$.

Beispiel 8.3.3 (Freie Gruppen als adjungierter Funktor). Der Vergißfunktor von den Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie Gruppe über besagter Menge zuordnet, wie sie in 6.5.6 eingeführt wird. Mit der Notation $v : \text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ für den vergeßlichen Funktor haben wir für jede Gruppe G und jede Menge X eine natürliche Bijektion

$$\text{Grp}(\text{Grp}^{\wedge} X, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, vG)$$

Der Vergißfunktor von den abelschen Gruppen in die Mengen hat ähnlich als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie abelsche Gruppe über besagter Menge zuordnet, für die wir die Notationen $\text{Ab}^{\wedge} X = \mathbb{Z}X$ verwenden.

Beispiel 8.3.4 (Das Exponentialgesetz als Adjunktion). Gegeben eine Menge Z ist der Funktor $(Z \times) : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$ linksadjungiert zum Funktor $\text{Ens}(Z,) : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$ mittels der kanonischen Bijektionen

$$\text{Ens}(Z \times X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, \text{Ens}(Z, Y))$$

aus dem Exponentialgesetz ???. Weiter ist der Funktor $\text{Ens}(, Z) : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$ linksadjungiert zum Funktor $\text{Ens}(, Z)^{\text{opp}} : \text{Ens}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ens}$ mittels der in derselben Weise konstruierten kanonischen Bijektionen

$$\text{Ens}^{\text{opp}}(\text{Ens}(X, Z), Y) = \text{Ens}(Y, \text{Ens}(X, Z)) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, \text{Ens}(Y, Z))$$

Beispiele 8.3.5 (Adjunktionen mit Hom und \otimes). Gegeben ein Körper k und ein k -Vektorraum E ist der Funktor $E \otimes_k : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$ linksadjungiert zu $\text{Hom}_k(E,) : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$ und der Funktor $\text{Hom}_k(, E) : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k^{\text{opp}}$ hat als Rechtsadjungierten den Funktor $\text{Hom}_k(, E)^{\text{opp}} : \text{Mod}_k^{\text{opp}} \rightarrow \text{Mod}_k$. Ausgezeichnete derartige Adjunktionen werden in ?? und ?? angegeben. Sie sind als Spezialfälle der Adjunktionen ?? und ?? in Schmelzkategorien.

8.3.6 (Einheit und Koeinheit einer Adjunktion). Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren. Gegeben eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ von Funktoren erhalten wir Transformationen $\hat{\alpha} : \text{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$ und $\check{\alpha} : LR \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{B}}$ durch $\hat{\alpha}_A := \alpha(\text{id}_{LA})$ und $\check{\alpha}_B := \alpha^{-1}(\text{id}_{RB})$. Sie heißen die **Einheit** und **Koeinheit** der Adjunktion. Oft versteht sich die zugrundeliegende Adjunktion α von selbst und wir brauchen dafür gar keine Notation vorzusehen. Dann notieren wir die Einheit und Koeinheit meist $\varepsilon_A : A \rightarrow RLA$ und $\eta_B : LRB \rightarrow B$.

Beispiel 8.3.7 (Einheit und Koeinheit im Fall freier Gruppen). Unsere Adjunktion $\text{Grp}(\text{Grp}^{\wedge} X, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, vG)$ hat als Einheit die kanonischen Abbildungen $\varepsilon_X : X \rightarrow v \text{Grp}^{\wedge} X$ und als Koeinheit die kanonischen Gruppenhomomorphismen $\eta_G : \text{Grp}^{\wedge}(vG) \rightarrow G$ aus dem Beweis von 6.6.2.

Beispiel 8.3.8. Der Funktor $\text{Spek} : \text{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Top}$ aus ?? ist rechtsadjungiert zum Funktor $\mathcal{C} : \text{Top} \rightarrow \text{Ralg}_{\mathbb{C}}^{\text{opp}}$. Diese Aussage ist der Kern der Argumentation in ??.

Lemma 8.3.9 (Äquivalenz durch Adjunktion). Seien $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren und $\alpha : L \dashv R$ eine Adjunktion.

1. Genau dann besteht die Einheit der Adjunktion $\hat{\alpha}$ aus Isomorphismen $\hat{\alpha}_X : X \xrightarrow{\sim} RLX$, wenn der Funktor L volltreu ist;
2. Genau dann besteht die Koeinheit der Adjunktion $\check{\alpha}$ aus Isomorphismen $\check{\alpha}_Y : LRY \xrightarrow{\sim} Y$, wenn der Funktor R volltreu ist;
3. Genau dann bestehen $\hat{\alpha}$ und $\check{\alpha}$ beide aus Isomorphismen, wenn L und R Äquivalenzen von Kategorien sind. Man nennt L und R dann zueinander **quasiinverse Funktoren** und versteht dabei die Adjunktion als einen Teil des Datums. In diesem Fall liefern $\hat{\alpha}^{-1}$ und $\check{\alpha}^{-1}$ auch eine Adjunktion (R, L) .

Beweis. Aus unseren Erkenntnissen zu Einheiten und Koeinheiten von Adjunktionen 8.8.1 folgt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(X, Y) & \xrightarrow{L} & \mathcal{B}(LX, LY) \\ \hat{\alpha}_Y \circ \downarrow & & \downarrow \alpha_{X, LY} \\ \mathcal{A}(X, RLY) & \equiv & \mathcal{A}(X, RLY) \end{array}$$

Das zeigt die erste Aussage. Die zweite Aussage zeigt man genauso. Für die dritte Aussage bemerkt man, daß unter der Annahme $\check{\alpha}_B : LRB \xrightarrow{\sim} B$ jedes $B \in \mathcal{B}$ isomorph ist zu einem Objekt der Gestalt LX . \square

Beispiel 8.3.10 (Der Dualraumfunktors als sein eigener Adjungierter). Der Rechtsadjungierte des Dualraumfunktors $D : k\text{-Mod} \rightarrow k\text{-Mod}^{\text{opp}}$ ist der Funktor $D^{\text{opp}} : k\text{-Mod}^{\text{opp}} \rightarrow k\text{-Mod}$, der durch dieselbe Abbildungsvorschrift gegeben wird, vermittelt der Adjunktion, die gegeben wird durch die kanonischen Identifikationen

$$\text{Hom}_k(V, DW) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}_k^{(2)}(V, W; k) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(DW, V)$$

Vorschau 8.3.11. Mehr zu adjungierten Funktoren diskutieren wir in 8.8.

Übungen

Übung 8.3.12. Besitzt ein Funktor einen Rechtsadjungierten, so vertauscht er mit Koprodukten und macht kokartesische Diagramme zu kokartesischen Diagrammen. Besitzt ein Funktor einen Linksadjungierten, so vertauscht er mit Produkten und macht er kartesische Diagramme zu kartesischen Diagrammen. Stärker zeigen Sie etwa in ??, daß Linksadjungierte mit „Kolimites“ vertauschen und Rechtsadjungierte mit „Limites“.

Ergänzende Übung 8.3.13 (Adjunktionen auf Funktorkategorien). Seien Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gegeben. Man zeige, daß jedes Paar (L, R) von adjungierten Funktoren $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ auch ein Paar $(L \circ, R \circ)$ von adjungierten Funktoren zwischen den Funktorkategorien $(L \circ) : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ und $(R \circ) : \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ liefert.

Übung 8.3.14 (Opponierete Adjunktionen). Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren. Jede Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ kann auch als Adjunktion $\alpha^{\text{opp}} : R^{\text{opp}} \dashv L^{\text{opp}}$ der zugehörigen Funktoren $L^{\text{opp}} : \mathcal{A}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{opp}}$ und $R^{\text{opp}} : \mathcal{B}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{opp}}$ zwischen den jeweiligen opponierten Kategorien aufgefaßt werden. Ich nenne α^{opp} die **opponierte Adjunktion**.

8.4 Überlagerungen und Gruppenwirkungen

8.4.1. Gegeben \mathcal{C} eine Kategorie, $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $G := \mathcal{C}(A)$ das Monoid seiner Endomorphismen erhalten wir stets einen Funktor in die Kategorie der G -Rechtsmengen

$$\mathcal{C}(A, _) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens-}G$$

Wir setzen dazu $fg := f \circ g$ für alle $B \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$ und $g \in \mathcal{C}(A)$. Man beachte für das Folgende, daß das Monoid der Endomorphismen einer universellen Überlagerung nach 7.5.5 stets eine Gruppe ist.

Satz 8.4.2 (Überlagerungen und Gruppenwirkungen). *Gegeben eine universelle Überlagerung $u : \tilde{X} \rightarrow X$ mit Deckbewegungsgruppe $G := \text{Top}_X^{\times}(\tilde{X})$ liefert der Funktor $T := \text{Top}_X(\tilde{X}, _)$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der G -Rechtsmengen*

$$T : \text{Üb}_X \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_G$$

Beispiel 8.4.3. Man überlege sich die Bedeutung des Satzes zunächst im Fall der universellen Überlagerung $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ der Kreislinie. In diesem Fall erhalten wir für die Deckbewegungsgruppe einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ durch $g \mapsto g(0)$.

Beweis. Wir konstruieren zunächst einen Funktor in die Rückrichtung. Gegeben eine G -Rechtsmenge M konstruieren wir eine stetige Abbildung

$$M \times_{/G} \tilde{X} \rightarrow X$$

Wir betrachten dazu auf $M \times \tilde{X}$ die Operation von G gegeben durch $g(m, \tilde{x}) = (mg^{-1}, g\tilde{x})$. Die Bahn von (m, \tilde{x}) notieren wir $[m, \tilde{x}]$. Da G topologisch frei operiert auf \tilde{X} nach 7.4.15, operiert es erst recht topologisch frei auf $M \times \tilde{X}$. Nach 7.3.13 ist also der Bahnenraum $M \times_{/G} \tilde{X}$ eine Überlagerung von X . Den in dieser Weise konstruierten Funktor in die Rückrichtung bezeichnen wir mit A , in Formeln

$$A := (\times_{/G} \tilde{X}) : \text{Ens}_{/G} \rightarrow \text{Üb}_X$$

Als nächstes erklären wir eine Adjunktion $A \dashv T$. Gegeben eine G -Rechtsmenge M und eine Überlagerung $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow X$ gilt es, eine natürliche Bijektion

$$\text{Ens}_{/G}(M, \text{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \text{Top}_X(M \times_{/G} \tilde{X}, \hat{X})$$

zwischen der Menge der G -äquivalenten Abbildungen links und der Menge der stetigen Abbildungen über X rechts anzugeben. Man erhält sie durch Einschränken der offensichtlichen Bijektion

$$\text{Ens}(M, \text{Top}(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(M \times \tilde{X}, \hat{X})$$

auf die Fixpunkte einer geeigneten G -Operation auf beiden Seiten. Jetzt müssen wir nach 8.3.9 nur noch zeigen, daß die durch unsere Adjunktion definierten Transformationen $\text{Id} \Rightarrow TA$ und $AT \Rightarrow \text{Id}$ Isotransformationen sind. Die Erste spezialisiert auf einer G -Menge M zur Abbildung $M \rightarrow \text{Top}_X(\tilde{X}, M \times_{/G} \tilde{X})$ gegeben durch $m \mapsto (z \mapsto [m, z])$ und ist eine Bijektion aufgrund der universellen Eigenschaft der universellen Überlagerung. Die Zweite spezialisiert auf einer Überlagerung \hat{X} zur Abbildung $\text{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X}) \times_{/G} \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ gegeben durch $[d, z] \mapsto d(z)$ und ist ebenfalls bijektiv aufgrund der universellen Eigenschaft der universellen Überlagerung. Als bijektive Decktransformation muß sie dann sogar ein Homöomorphismus sein. \square

8.4.4 (Zusammenhängende Überlagerungen und Untergruppen). Gegeben eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$ ist \tilde{X} nach 7.5.7 stets zusammenhängend. Für die Gruppe G der Decktransformationen und eine G -Rechtsmenge M ist also $M \times_{/G} \tilde{X}$ genau dann zusammenhängend, wenn M eine transitive G -Menge ist. In Worten induziert also unser Funktor $T := \text{Top}_X(\tilde{X}, \)$ aus 8.4.2 auch eine Äquivalenz

$$\{\hat{X} \in \text{Üb}_X \mid \hat{X} \text{ zusammenhängend}\} \xrightarrow{\sim} \{M \in \text{Ens}_{/G} \mid M \text{ transitiv}\}$$

zwischen der Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen von X und der Kategorie der transitiven G -Rechtsmengen. Nach 7.2.5 werden also die zusammenhängenden Überlagerungen von X klassifiziert durch Konjugationsklassen von Untergruppen von G und man prüft leicht, daß dabei die Klasse der Untergruppe $H \subset G$ auf die Isomorphieklasse der Überlagerung $\tilde{X}/H \rightarrow X$ geht. Genauer erhalten wir mit 7.2.8 eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen von X und der opponierten Untergruppenkategorie zu G aus 7.2.8.

Ergänzung 8.4.5 (Bezug zur Galoistheorie). Die hier vorgestellte Theorie ist strukturell eng verwandt mit der Galoistheorie. Ist \tilde{K}/K eine endliche Galois-erweiterung, so kann man den Hauptsatz der Galoistheorie ?? nämlich dahingehend interpretieren, daß der Funktor $\text{Kring}^K(_, \tilde{K})$ der K -linearen Körperhomomorphismen nach \tilde{K} eine Äquivalenz von Kategorien

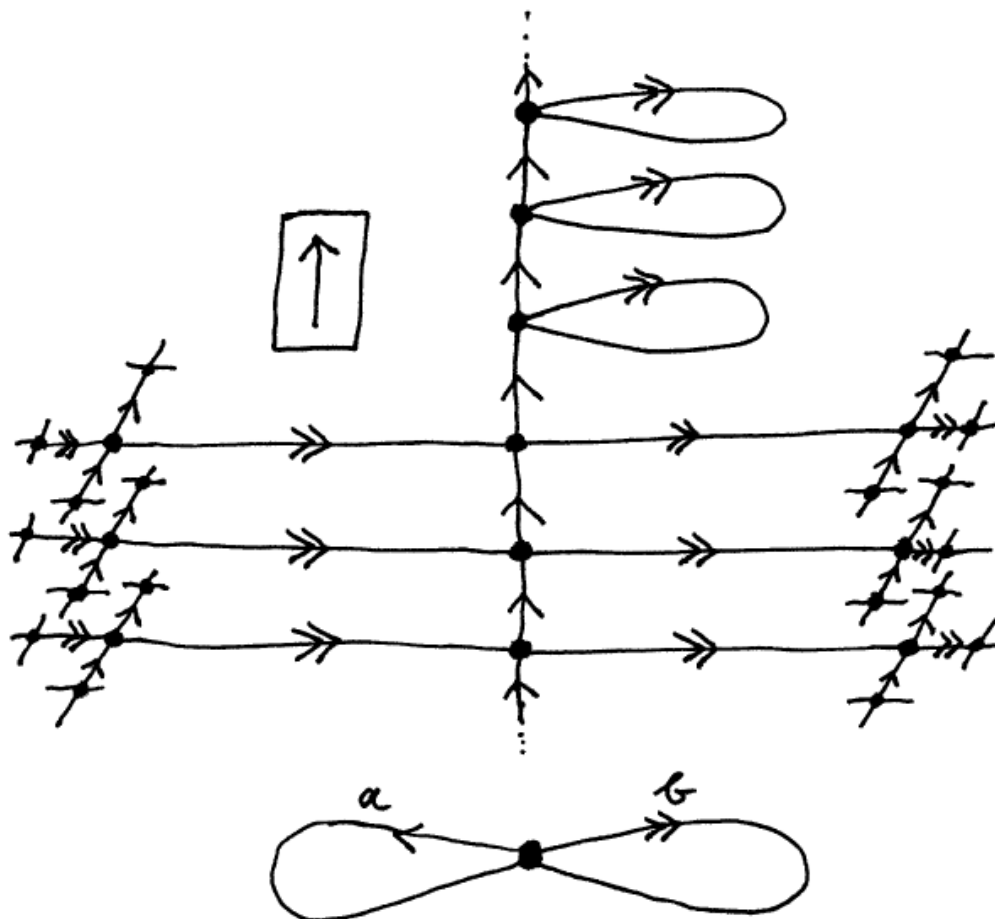
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Körpererweiterungen von } K, \\ \text{die sich in } \tilde{K} \text{ einbetten lassen} \end{array} \right\}^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \{ \text{transitive Gal}(\tilde{K}/K)\text{-Mengen} \}$$

liefert, für $\text{Gal}(\tilde{K}/K) = (\text{Kring}^K)^{\times}(\tilde{K})$ die Galoisgruppe. Die Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen kann im Licht von 8.4.2 also aufgefaßt werden als ein geometrisches Analogon zur opponierten Kategorie unserer Kategorie von Körpererweiterungen. Noch besser würde die Analogie, wenn wir auch nur alle zusammenhängenden Überlagerungen betrachten würden, die eine Decktransformation von einer fest gewählten Galois-Überlagerung empfangen können.

Ergänzung 8.4.6 (Die Kategorie der G -Mengen bestimmt die Gruppe G). Gegeben eine Gruppe G kennt die Kategorie der G -Mengen bereits die Gruppe G bis auf Isomorphismus. Wir betrachten genauer eine Menge \mathcal{C} von G -Mengen, die die Gruppe G selbst enthält und mindestens je eine einelementige und eine zweielementige Menge mit der trivialen G -Operation, und betrachten die Kategorie \mathcal{C} all dieser G -Mengen. Darin gibt es nach unseren Annahmen ein finales Objekt pt und ein Koprodukt $\text{pt} \sqcup \text{pt}$ dieses finalen Objekts mit sich selbst. Sicher ist unsere Kategorie \mathcal{C} eine \mathfrak{M} -Kategorie für ein geeignetes Mengensystem \mathfrak{M} . Man überzeugt sich leicht, daß ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ genau dann ein homogener Raum ist, wenn für den dadurch dargestellten Funktor $F := \mathcal{C}(X, _) : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{M}\text{Ens}$ die kanonische Abbildung eine Bijektion

$$F(\text{pt}) \sqcup F(\text{pt}) \xrightarrow{\sim} F(\text{pt} \sqcup \text{pt})$$

liefert. Weiter ist die G -Operation auf einem homogenen Raum X genau dann frei, gilt $\mathcal{C}(X, G) \neq \emptyset$ alias wenn es von X zu jedem Objekt von \mathcal{C} einen Morphismus gibt. Die G -Torsoren können somit als Objekte der Kategorie \mathcal{C} unter alleiniger Verwendung der Struktur dieser Kategorie charakterisiert werden. Die Gruppe G erhält man dann bis auf Isomorphismus als die Opponiente der Automorphismengruppe eines jeden solchen G -Torsors.



Graphische Darstellung einer Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum, bei der nicht jede Decktransformation eine Deckbewegung ist. Überlagert wird die Figur einer Acht. Die fragliche Decktransformation schiebt „um eins nach oben“ und „faltet die beiden obersten der sich ins unendliche verzweigenden Äste über den Rest“. Die Fundamentalgruppe der Überlagerung für den zentralen Punkt als Basispunkt ist die von den Lifts aller $a^{-n}ba^n$ für $n > 0$ erzeugte Untergruppe $H \subset G$ der Fundamentalgruppe der Basis und unsere Decktransformation entspricht der durch $(\cdot a)$ induzierten Abbildung $G/H \rightarrow G/H$.

8.5 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

Definition 8.5.1. Seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $\gamma \in \Omega(X, x, y)$ ein Weg. Der **Transport durch Wegelifts**

$$\langle \gamma \rangle : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$$

längs des Weges γ von der Faser bei x in die Faser bei y wird erklärt als diejenige Abbildung, die jedem Punkt $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ den Endpunkt des Lifts $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ unseres Weges γ mit Anfangspunkt $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$ zuordnet, in Formeln $\langle \gamma \rangle(\tilde{x}) := \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)$. Hier verwenden wir, daß nach 7.1.17 das Intervall $[0, 1]$ überlagerungstrivial ist und daß damit nach 7.4.13 unser Weg genau einen Lift hat mit Anfangspunkt \tilde{x} .

Lemma 8.5.2 (Eigenschaften des Wegeliftungstransports). Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung.

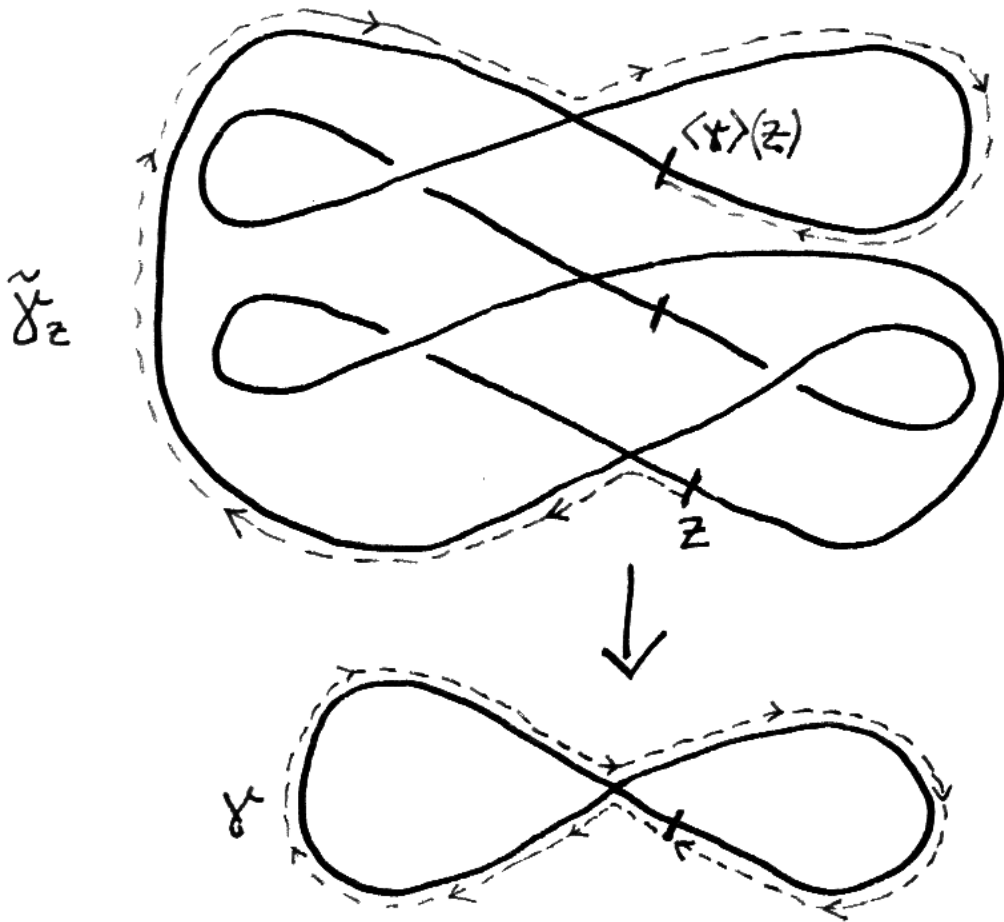
Homotopieinvarianz: *Homotope Wege in der Basis liefern denselben Transport durch Wegelifts auf den Fasern, in Formeln $\gamma \simeq \beta \Rightarrow \langle \gamma \rangle = \langle \beta \rangle$. Insbesondere ist auch für jede Homotopieklasse γ von Wegen die Abbildung $\langle \gamma \rangle$ wohldefiniert;*

Funktorialität: *Der Transport durch Wegelifts längs des konstanten Weges ε_x bei $x \in X$ ist die identische Abbildung $\langle \varepsilon_x \rangle = \text{id}$ auf der Faser $p^{-1}(x)$. Sind β und γ verknüpfbare Wege in X , so gilt $\langle \beta \rangle \circ \langle \gamma \rangle = \langle \beta * \gamma \rangle$;*

Natürlichkeit: *Ist $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ eine weitere Überlagerung und sind $f : X \rightarrow Y$ und $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ stetige Abbildungen mit $q \circ \tilde{f} = f \circ p$ und ist γ ein Weg in X , so gilt $\tilde{f} \circ \langle \gamma \rangle = \langle \tilde{f}\gamma \rangle \circ \tilde{f}$.*

Ergänzung 8.5.3. Man mag den zweiten Punkt dahingehend zusammenfassen, daß jede Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ einen Funktor $[\tilde{X}] : \mathcal{W}_X \rightarrow \text{Ens}$ des fundamentalen Gruppoids von X in die Kategorie der Mengen liefert mittels der Vorschrift $x \mapsto p^{-1}(x)$ auf Objekten und $\gamma \mapsto \langle \gamma \rangle$ auf Morphismen. Der letzte Punkt besagt in dieser Sprache, daß die von f auf den Fasern induzierte Abbildung eine Transformation unseres Funktors $[\tilde{Y}] : \mathcal{W}_Y \rightarrow \text{Ens}$ zur Verknüpfung des Funktors $f_{\#} : \mathcal{W}_Y \rightarrow \mathcal{W}_X$ mit dem Funktor $[\tilde{X}] : \mathcal{W}_X \rightarrow \text{Ens}$ ist, in Formeln also eine Transformation $[\tilde{Y}] \Rightarrow [\tilde{X}] \circ f_{\#}$.

Beweis. Wir zeigen nur die Homotopieinvarianz, die anderen Eigenschaften sind klar nach den Definitionen. Sei $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen unseren Wegen. Auf der vorderen beziehungsweise hinteren Kante unseres Quadrats haben wir also $h(0, t) = \gamma(t)$ beziehungsweise $h(1, t) = \beta(t)$, und auf der oberen und der unteren Kante ist H konstant. Da



Eine dreiblättrige Überlagerung der Acht, ein Punkt unten und die drei Punkte der Faser darüber, ein geschlossener Weg unten und die zugehörige Operation auf der Faser am Beispiel des „untersten“ Punktes der Faser, der in diesem Fall auf den „obersten“ Punkt der Faser geschoben wird.

unser Quadrat nach 7.1.23 überlagerungstrivial ist, gibt es für alle $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ einen Lift $\tilde{h} : [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ von h mit $\tilde{h}(0, 0) = \tilde{x}$. Nach dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts ist dieser Lift konstant \tilde{x} auf der unteren Kante, folglich ist er auf der vorderen beziehungsweise hinteren Kante der Lift mit Anfangspunkt \tilde{x} von γ beziehungsweise β . Da aber unser Lift auch konstant sein muß auf der oberen Kante, folgt $\langle \gamma \rangle(\tilde{x}) = \langle \beta \rangle(\tilde{x})$. \square

8.5.4. Gegeben eine Menge F bezeichnen wir die Gruppe aller Permutationen von F mit $\text{Ens}^\times(F)$. Das ist auch die Menge der invertierbaren Elemente des Monoids $\text{Ens}(F)$ aller Abbildungen von F in sich selber.

Satz 8.5.5. 1. Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $x \in X$ ein Punkt, so liefert der Wegeliftungstransport eine Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ auf der Faser $p^{-1}(x)$, die **Wegeliftungsoperation**;

2. Ist $q : \hat{X} \rightarrow X$ eine weitere Überlagerung und $d : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ eine Decktransformation, so ist deren Einschränkung $d : p^{-1}(x) \rightarrow q^{-1}(x)$ auf die Fasern eine $\pi_1(X, x)$ -äquivalente Abbildung.

Beweis. Das folgt alles sofort aus den im vorhergehenden Lemma 8.5.2 gezeigten Eigenschaften des Wegeliftungstransports. \square

8.5.6. Für jeden bepunkteten topologischen Raum (X, x) erhalten wir damit einen Funktor von der Kategorie seiner Überlagerungen in die Kategorie der Mengen mit Operation der Fundamentalgruppe, indem wir jeder Überlagerung von X ihre Faser bei x zuordnen. Dieser sogenannte **Faserfunktork** $F = F_x$ wird in Formeln gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{array}{ccc} F : \text{Üb}_X & \rightarrow & \pi_1(X, x)\text{-Ens} \\ p & \mapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

Satz 8.5.7 (Fundamentalgruppe einer Überlagerung).

1. Jede Überlagerung bepunkteter Räume $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ induziert eine Injektion $p_\# : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \hookrightarrow \pi_1(X, x)$ auf den Fundamentalgruppen und das Bild dieser Injektion ist die Standgruppe von \tilde{x} unter der Wegeliftungsoperation, in Formeln

$$\text{im } p_\# = \{ \gamma \in \pi_1(X, x) \mid \langle \gamma \rangle(\tilde{x}) = \tilde{x} \}$$

2. Ist zusätzlich unsere Überlagerung \tilde{X} wegzusammenhängend, so operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ transitiv auf der Faser über dem Basispunkt $p^{-1}(x)$.

Beweis. Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ beliebig und $x, y \in X$ ihre Bilder. So liefert nach unseren Definitionen und wegen der Eindeutigkeit von Lifts 7.4.10 das Nachschalten von p eine Bijektion

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{\sim} \{\gamma \in \Omega(X, x, y) \mid \langle \gamma \rangle(\tilde{x}) = \tilde{y}\}$$

Diese Bijektion induziert dann eine Bijektion auf Homotopieklassen. Setzen wir $\tilde{y} = \tilde{x}$, so ergibt sich der erste Teil. Läßt sich jeder Punkt \tilde{y} aus der Faser $p^{-1}(x)$ in \tilde{X} durch einen Weg α mit \tilde{x} verbinden, so liegt die Homotopieklasse von $\gamma = p \circ \alpha$ in $\pi_1(X, x)$ und wir haben $\tilde{y} = \langle \gamma \rangle(\tilde{x})$. \square

Proposition 8.5.8. *Gegeben X ein Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G erhalten wir für jeden Punkt $x \in X$ durch die Vorschrift $c_x(\gamma)^{-1}x = \langle \gamma \rangle x$ einen Gruppenhomomorphismus, den **Faserwirkungsvergleich***

$$c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \rightarrow G$$

Beweis. Bezeichne $p : X \rightarrow X/G$ die Quotientenabbildung. Nach 7.3.10 ist sie eine Überlagerung. Per definitionem operiert G frei und transitiv auf der Faser $p^{-1}(\bar{x})$ über $\bar{x} := p(x)$ und nach 8.5.5 kommutiert diese Operation mit der Operation von $\pi_1(X/G, \bar{x})$ durch Wegelifts. Das anschließende algebraische Lemma 8.5.9 beendet den Beweis. \square

Lemma 8.5.9 (Homomorphismen durch Torsoren). *Sei F eine Menge mit einer Linksoperation einer Gruppe H und einer freien transitiven Rechtsoperation einer Gruppe G , die in dem Sinne kommutieren, daß gilt $(hf)g = h(fg) \forall h \in H, f \in F, g \in G$. So liefert jedes Element $f \in F$ einen Gruppenhomomorphismus*

$$c_f : H \rightarrow G$$

durch die Vorschrift $hf = fc_f(h)$. Ist die Operation von H frei, so ist c_f injektiv. Ist die Operation von H transitiv, so ist c_f surjektiv.

Ergänzung 8.5.10. Analoges gilt für Monoide, wenn wir zusätzlich f so wählen, daß die Operation von G eine Bijektion $G \xrightarrow{\sim} X, g \mapsto fg$ liefert.

Beweis. Wir überlassen die formale Rechnung dem Leser und versuchen stattdessen eher informell, die Aussage transparent zu machen. Da G frei und transitiv operiert, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\rightarrow F \\ g &\mapsto fg \end{aligned}$$

eine G -äquivalente Bijektion. Die G -äquivalenten Abbildungen $\phi : G \rightarrow G$, also die Abbildungen ϕ mit $\phi(xg) = \phi(x)g \forall x, g \in G$, sind nun genau die Linksmultiplikationen mit Elementen $c \in G$ und entsprechen unter unserer Bijektion

$G \xrightarrow{\sim} F$ den Abbildungen $fg \mapsto fcg$. Insbesondere gilt das für die Abbildungen $\phi = (h \cdot)$. Das ist der strukturelle Grund für unser Lemma, das sich so als unmittelbare Konsequenz der Übung 7.2.6 erweist. \square

8.5.11 (Fundamentalgruppe von Bahnräumen). Operiert eine Gruppe G topologisch frei auf einem wegzusammenhängenden schleifenfüllenden Raum X , so ist der Faserwirkungsvergleich 8.5.8 für alle $x \in X$ ein Isomorphismus

$$c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \xrightarrow{\sim} G$$

In der Tat operiert nach 8.5.7 die Fundamentalgruppe $\pi_1(X/G, \bar{x})$ frei und transitiv auf der Faser über \bar{x} und dasselbe gilt per definitionem für G und die Behauptung folgt damit aus unserem algebraischen Lemma 8.5.9. Eine Variante für allgemeine Räume X wird in Übung 8.5.20 besprochen.

Beispiele 8.5.12. Aus 8.5.11 folgt insbesondere $\pi_1(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) = \pi_1(S^n / \{\pm 1\}) = \{\pm 1\}$ für $n \geq 2$ und $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

8.5.13 (Fundamentalgruppe als Deckbewegungsgruppe). Hat ein Raum X eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und ist diese wegzusammenhängend und schleifenfüllend, so ist der Faserwirkungsvergleich 8.5.8 für alle $x \in X$ und $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ ein Isomorphismus

$$c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} G$$

In der Tat operiert nach 7.5.10 die Deckbewegungsgruppe G jeder universellen Überlagerung topologisch frei und die Überlagerungsabbildung induziert einen Homöomorphismus $\tilde{X}/G \xrightarrow{\sim} X$, so daß wir 8.5.11 anwenden können. Ich erinnere daran, daß nach 7.6.3 jeder zusammenhängende lokal wegetriviale Raum eine wegetriviale universelle Überlagerung besitzt.

Satz 8.5.14 (über den Faserfunktork). *Gegeben ein zusammenhängender lokal wegetriviale bepunkteter Raum (X, x) liefert der Faserfunktork $F = F_x : p \mapsto p^{-1}(x)$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der $\pi_1(X, x)$ -Mengen*

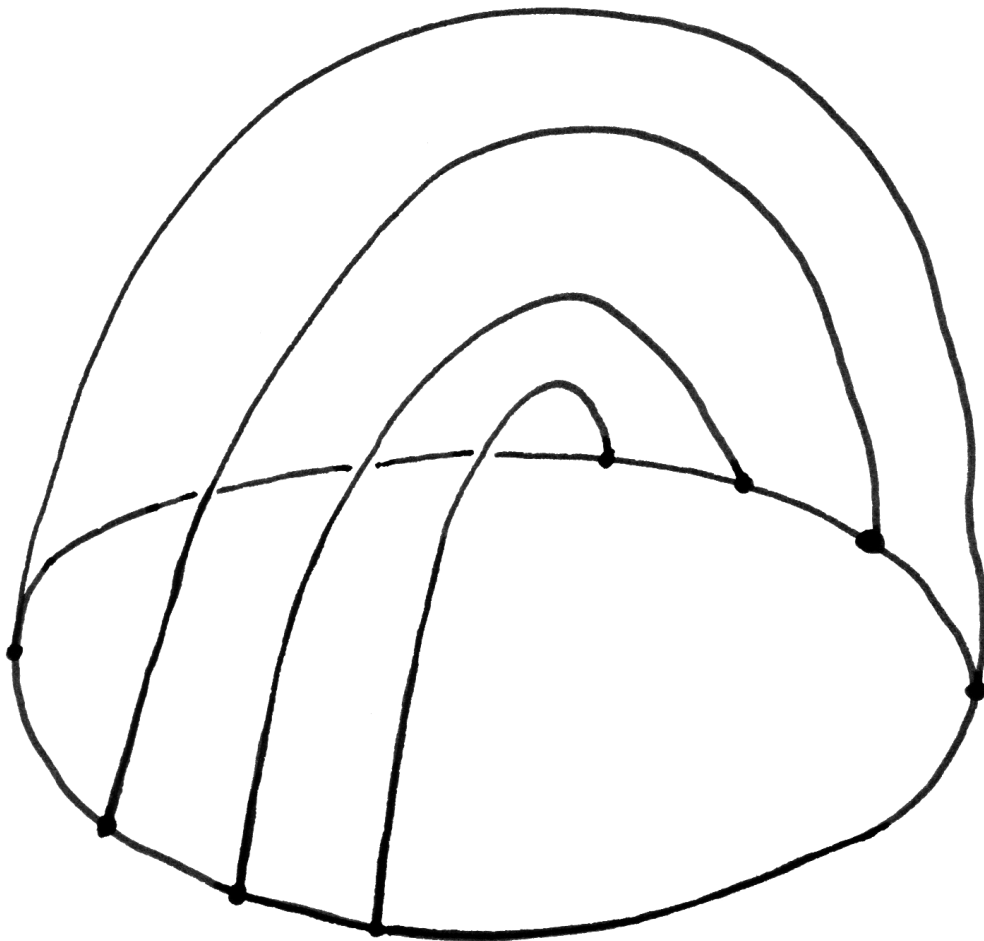
$$F : \text{Üb}_X \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x)\text{-Ens}$$

Beweis. Ich erinnere aus 8.4.2 die Äquivalenz von Kategorien

$$T : \text{Üb}_X \xrightarrow{\cong} \text{Ens-}G$$

für $T = \text{Top}_X(\tilde{X}, \cdot)$ und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung und G ihre Deckbewegungsgruppe. Ich erinnere weiter aus 8.5.13 den Faserwirkungsvergleich $c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} G$ für $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Er liefert eine Äquivalenz

$$C = C_{\tilde{x}} : \text{Ens-}G \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x)\text{-Ens}$$



Anschaulich gesprochen kann es passieren, daß man bei einem Rundweg auf $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ „mit dem Kopf nach unten wieder am Ausgangspunkt ankommt“. Diese Rundwege sind genau die nichtzusammenziehbaren Rundwege auf $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Um wieder in sein Auto einsteigen zu können, muß man sie noch ein zweites Mal gehen. Um das zu sehen, mag man sich $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ vorstellen als Kugelschale, in die ein Kreisrundes Loch geschnitten wurde, um dort ein Möbiusband alias eine Kreuzhabe einzukleben, wie ich sie hier gezeichnet habe.

vermittels der Vorschrift, daß wir erst die G -Rechtsoperation durch Inversenbildung in eine Linksoperation verwandeln und diese G -Linksoperation dann mithilfe von $c_{\tilde{x}}$ in eine Linksoperation von $\pi_1(X, x)$. Wir erhalten nun eine Isotransformation $\tau = \tau_{\tilde{x}} : CT \xrightarrow{\sim} F$ wie im Doppelpfeil des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \text{Üb}_X & \xrightarrow{T} & \text{Ens-}G \\ \parallel & \swarrow \tau & \downarrow C \\ \text{Üb}_X & \xrightarrow{F} & \pi_1(X, x)\text{-Ens} \end{array}$$

angedeutet durch die Isomorphismen $\tau_{\hat{X}} : CT\hat{X} \xrightarrow{\sim} F\hat{X}$, $d \mapsto d(\tilde{x})$ von Mengen mit $\pi_1(X, x)$ -Operation, wie der Leser leicht prüfen kann. Da C und T Äquivalenzen von Kategorien sind, muß auch F eine Äquivalenz von Kategorien sein. \square

Beispiel 8.5.15. Das nebenstehende Bild zeigt eine Überlagerung der Figur 8. Die Fundamentalgruppe dieser Überlagerung ist offensichtlich eine nicht endlich erzeugte Untergruppe der Fundamentalgruppe der Figur 8, die ihrerseits durchaus endlich erzeugt ist.

Satz* 8.5.16 (Liftbarkeitskriterium). *Seien $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ eine Überlagerung, (Y, y) ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender bepunkteter Raum und $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ stetig. Genau dann existiert ein Lift \tilde{f} von f , wenn in $\pi_1(X, x)$ die Inklusion $\text{im } f_{\#} \subset \text{im } p_{\#}$ gilt.*

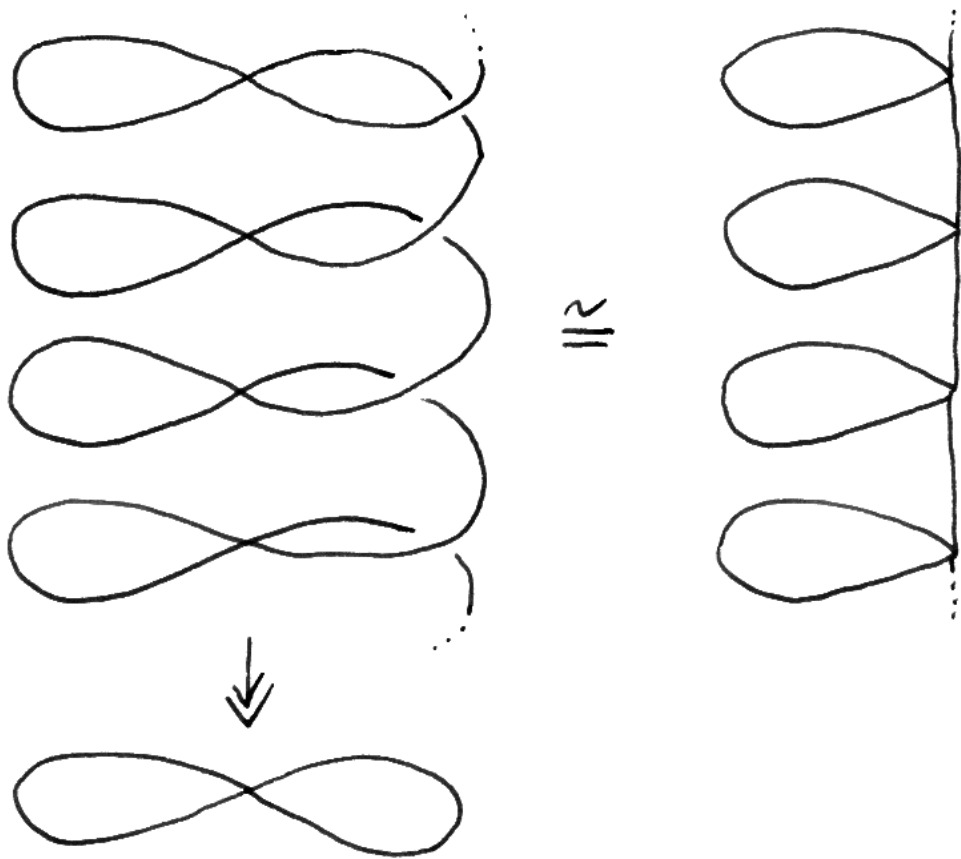
Beweis. Wir veranschaulichen uns die Situation mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

Existiert ein Lift \tilde{f} , so folgt $p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#} = f_{\#}$ und damit $\text{im } f_{\#} \subset \text{im } p_{\#}$. Um die andere Richtung zu zeigen, bilden wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{Y}, \tilde{y}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

und behaupten, daß unter unseren Annahmen $q_{\#} : \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ surjektiv ist. Sonst gäbe es nämlich nach unserer Beschreibung 8.5.7 der Fundamentalgruppe einer Überlagerung als Standgruppe einen geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(Y, y)$



Eine Überlagerung der Figur 8 mit nicht endlich erzeugter Fundamentalgruppe.

mit $\langle \gamma \rangle(\tilde{y}) \neq \tilde{y}$. Es folgte $\langle f \circ \gamma \rangle(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$, da ja die obere Horizontale in unserem Quadrat eine Bijektion $q^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x)$ induziert, nochmal nach 8.5.7 also $[f \circ \gamma] \notin \text{im } p_{\sharp}$ im Widerspruch zur Annahme. Da wir Y lokal wegzusammenhängend angenommen hatten, folgt andererseits mit 7.1.7, daß die Zusammenhangskomponenten von \tilde{Y} selbst schon Überlagerungen von Y und darüberhinaus wegzusammenhängend sind. Nach 8.5.7 bildet dann die Zusammenhangskomponente von \tilde{y} in \tilde{Y} eine einblättrige Überlagerung von Y , und die schenkt uns dann schließlich den gesuchten Lift. \square

Übungen

Übung 8.5.17 (Klassifikation bepunkteter Überlagerungen, Variante). Gegeben ein zusammenhängender lokal wegetrivialer bepunkteter Raum (X, x) erhalten eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen zusammenhängender bepunkteter Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ und der Menge der Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ mittels der Zuordnung

$$p \mapsto \text{im} \left(p_{\sharp} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x) \right)$$

Übung 8.5.18 (Klassifikation von Überlagerungen, Variante). Gegeben ein zusammenhängender lokal wegetrivialer bepunkteter Raum (X, x) induziert die Umkehrabbildung unserer Bijektion aus 8.5.17 eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ und der Menge der Isomorphieklassen zusammenhängender Überlagerungen von X .

Übung 8.5.19. Man erkläre die Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern im Fall der auf Seite 197 dargestellten Überlagerung der Acht.

Übung 8.5.20 (Fundamentalgruppe eines Bahnenraums, Variante). Operiert eine Gruppe G topologisch frei auf einem Raum X , so erhalten wir eine linksexakte Sequenz

$$\pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1(X/G, \bar{x}) \rightarrow G$$

mit dem Faserwirkungsvergleich 8.5.8 als zweiter Abbildung. Ist $y \in X$ ein weiterer Punkt derselben Faser und ist $\beta \in \pi_1(X/G, \bar{x})$ ein Weg mit $\langle \beta \rangle(x) = y$, so gilt $c_x = c_y \circ \text{int}(\beta)$ alias $c_x(\gamma) = c_y(\beta\gamma\beta^{-1})$. Ist X wegzusammenhängend, so ist der Faserwirkungsvergleich sogar surjektiv und unsere Sequenz eine kurze exakte Sequenz

$$\pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1(X/G, \bar{x}) \twoheadrightarrow G$$

Übung 8.5.21 (Funktorialität des Faserwirkungsvergleichs). Seien X ein Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G und Y ein weiterer Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe H . Sei weiter (f, φ) ein Paar

bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ mit $f(gx) = \varphi(g)f(x)$ für alle $x \in X$ und $g \in G$. So kommutiert für jedes $x \in X$ mit Bild $y := f(x)$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X/G, \bar{x}) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y/H, \bar{y}) \\ c_x \downarrow & & \downarrow c_y \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

für die durch Faserwirkungsvergleich erklärten Gruppenhomomorphismen in den Vertikalen.

Übung 8.5.22. Gegeben eine zusammenhängende Überlagerung $(\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$ eines zusammenhängender lokal wegetrivialen Raums X ist die Gruppe der Deckbewegungen $\text{Top}_X^\times(\hat{X})$ isomorph zu $N/\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ mit $N \subset \pi_1(X, x)$ dem Normalisator von $\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ in $\pi_1(X, x)$. Hinweis: 7.2.7.

Weiterführende Übung 8.5.23. Seien F und X topologische Räume. Ein **Faserbündel mit Faser F auf X** ist ein topologischer Raum $p : E \rightarrow X$ über X derart, daß jeder Punkt von X eine Umgebung U besitzt, für die $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$ als topologischer Raum über U isomorph ist zu $\text{pr}_U : U \times F \rightarrow U$. Unser Raum X heißt dann die **Basis** des Faserbündels. Ein derartiger Isomorphismus heißt eine **Bündelkarte auf U** . Ein System von Bündelkarten auf offenen Teilmengen der Basis, die eine Überdeckung unserer Basis bilden, heißt ein **Bündelatlas** unseres Faserbündels. Ein Faserbündel mit diskreter endlicher Faser F der Kardinalität n ist dasselbe wie eine n -blättrige Überlagerung. Seien nun $f : E \rightarrow X$ ein Faserbündel und $e \in E$ ein Punkt mit Bild $x := f(e) \in X$. Ist die Faser $F = f^{-1}(x)$ wegzusammenhängend, so folgt aus $\pi_1(E, e) = 1$ bereits $\pi_1(X, x) = 1$. Später werden Sie diese Aussage als Spezialfall der sogenannten „langen exakten Homotopiesequenz“ verstehen lernen.

Übung 8.5.24. Je zwei nicht nullhomotope Abbildungen $S^1 \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ haben mindestens einen Bildpunkt gemeinsam. Hinweis: Man ziehe sich darauf zurück zu zeigen, daß je zwei schiefsymmetrische Abbildungen $S^1 \rightarrow S^2$ einen gemeinsamen Bildpunkt haben.

8.6 Erzeuger und Relationen für $\text{PSL}(2; \mathbb{Z})^*$

8.6.1. Wir erinnern aus 4.3.16 die Operation von $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ auf der offenen oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ durch

$$g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto gz := \frac{az + b}{cz + d}$$

Lemma 8.6.2 (Fundamentaltbereiche in der oberen Halbebene).

1. Unter der Operation von $SL(2; \mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} trifft jede Bahn die Menge $D := \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1/2 \text{ und } |z| \geq 1\}$;
2. Genau dann gehören zwei verschiedene Punkte von D zur selben Bahn, wenn sie „auf dem Rand von D liegen“ und durch Spiegelung an der imaginären Achse auseinander hervorgehen;
3. Die Gruppe $SL(2; \mathbb{Z})$ wird erzeugt von $s := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $t := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
4. Die einzigen Elemente von D mit nichttrivialer Standgruppe in $PSL(2; \mathbb{Z})$ sind die beiden „unteren Spitzen“ $\exp(2\pi i/6)$ und $\exp(4\pi i/6)$ sowie i ;
5. Die Menge \mathbb{H}_{sing} der Punkte mit nichttrivialer Standgruppe von \mathbb{H} ist diskret und abgeschlossen;
6. Der Quotient $\mathbb{H}_{\text{reg}}/PSL(2; \mathbb{Z})$ des Komplements $\mathbb{H}_{\text{reg}} := \mathbb{H} \setminus \mathbb{H}_{\text{sing}}$ ist homöomorph zum Komplement von zwei Punkten in der Ebene.

Beweis. 1. Jeder Punkt der oberen Halbebene, der in der Einheitskreisscheibe liegt, wird durch die Transformation $S : z \mapsto -(1/z)$ auf einen Punkt mit echt größerem Imaginärteil abgebildet, und jeder Punkt außerhalb des Streifens $\{z \in \mathbb{C} \mid -1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1/2\}$ kann durch Addieren einer ganzen Zahl in diesen Streifen verschoben werden. Bezeichnet T die Translation $T : z \mapsto (z+1)$, so kann demnach jeder Punkt sogar durch Anwenden eines Elements der von S und T erzeugten Untergruppe auf ein Element von D abgebildet werden: Andernfalls erhielten wir nämlich in einer Bahn besagter Untergruppe eine Folge von Elementen des besagten Streifens mit Betrag kleiner als Eins und streng monoton wachsendem Imaginärteil und das widerspricht der Formel $\operatorname{Im}(gz) = \operatorname{Im}(z)/|cz+d|^2$, da $|cz+d|^2$ bei festem z nur endlich viele Werte < 1 annehmen kann.

2. Für $z \in D$ folgt aus $gz \in D$ sofort $|c| \leq 1$. Dann muß man die verschiedenen Fälle durchgehen.

3. Für $z \in \mathbb{H}$ gilt $sz = S(z)$ und $tz = T(z)$. Da $PSL(2; \mathbb{Z})$ treu auf \mathbb{H} operiert, folgt aus dem vorhergehenden bereits $PSL(2; \mathbb{Z}) = \langle \bar{s}, \bar{t} \rangle$. Aus $s^2 = -I$ folgt dann die Behauptung.

4.– 6. können dem Leser überlassen werden. □

8.6.3. Auf $X := \mathbb{H}_{\text{reg}}$ operiert $G := PSL(2; \mathbb{Z})$ nach 7.3.8 topologisch frei und der Quotientenraum X/G ist nach 8.6.1 homöomorph zum Komplement von zwei Punkten in der Ebene. Wenden wir auf diese Situation die kurze exakte Sequenz

$\pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1(X/G, \bar{x}) \twoheadrightarrow G$ aus Übung 8.5.20 an mit irgendeinem Punkt $x = z \in D^\circ$, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$\pi_1(\mathbb{H}_{\text{reg}}, z) \hookrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$$

Hier vereinbaren wir, daß der Erzeuger 1 des ersten \mathbb{Z} in der Mitte einmal das Bild von i in $\mathbb{H}/\text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ umläuft und der Erzeuger 1 des zweiten \mathbb{Z} einmal das Bild von $\exp(4\pi i/6)$ und zwar „im positiven Drehsinn“ für die „offensichtliche“ Orientierung. In $\text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ gehen unsere Erzeuger also auf \bar{s} und $\bar{s}\bar{t}$. Das Bild von $\pi_1(\mathbb{H}_{\text{reg}}, z)$ ist nun der vom Quadrat des ersten Erzeugers und der dritten Potenz des zweiten Erzeugers erzeugte Normalteiler und so erhalten wir den behaupteten Gruppenisomorphismus

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$$

8.7 Das Yoneda-Lemma*

8.7.1. Manchmal ist es wichtig, die verwendeten Universen zu spezifizieren. Wir deuten durch ein vorgestelltes \mathfrak{U}_ϵ beziehungsweise \mathfrak{U}_C um an, daß die Menge der Objekte ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems \mathfrak{U} ist. Wir deuten ähnlich durch ein vorgestelltes $\vec{\mathfrak{U}}_\epsilon$ beziehungsweise $\vec{\mathfrak{U}}_C$ an, daß die Menge der Morphismen zwischen zwei beliebig vorgegebenen Objekten ein Element beziehungsweise eine Teilmenge eines vorgegebenen Mengensystems \mathfrak{U} ist. Gegeben Mengensysteme $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ ist etwa eine $\vec{\mathfrak{V}}_\epsilon$ -**Kategorie** eine Kategorie \mathcal{C} mit $\mathcal{C}(X, Y) \in \vec{\mathfrak{V}}$ für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ und von einer \mathfrak{U}_C - $\vec{\mathfrak{V}}_\epsilon$ -**Kategorie** fordern wir zusätzlich $\text{Ob}(\mathcal{C}) \subset \mathfrak{U}$.

8.7.2. Ich wiederhole 10.10.1 folgende. Einen Funktor von einer Kategorie \mathcal{C} in eine Kategorie von Mengen nennen wir kurz einen **Mengenfunktor auf \mathcal{C}** . Jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ liefert einen derartigen Mengenfunktor $\check{X} : Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$. Gegeben ein Mengensystem \mathfrak{U} und eine Kategorie \mathcal{C} bildet die Menge aller Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ mit den Transformationen als Morphismen wieder eine Kategorie $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})$.

Proposition 8.7.3 (Yoneda-Lemma). *Seien \mathfrak{U} ein Mengensystem, \mathcal{C} eine $\vec{\mathfrak{U}}_\epsilon$ -Kategorie, $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ ein Mengenfunktor auf \mathcal{C} . So liefert die Abbildungsvorschrift $\tau \mapsto \tau_X(\text{id}_X)$ eine Bijektion*

$$\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})(\check{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

zwischen der Menge aller Transformationen $\check{X} \Rightarrow F$ und der Menge $F(X)$.

8.7.4. Sei \mathcal{U} ein Mengensystem. Die zur Kategorie dieser Mengenfunktoren auf einer $\vec{\mathcal{U}}_\epsilon$ -Kategorie \mathcal{C} opponierte Kategorie

$$\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^\vee := \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{U}\text{Ens})^{\text{opp}}$$

kann man als eine Art „Vervollständigung“ von \mathcal{C} interpretieren. In der Tat liest sich unser Yoneda-Lemma in dieser geschickt abgekürzten Notation als eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(F, \check{X}) \xrightarrow{\sim} F(X)$. Spezialisieren wir zu $F = \check{Y}$, so erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Y, X)$, von der man leicht zeigt, daß sie die Inverse zur offensichtlichen Abbildung $\mathcal{C}(Y, X) \rightarrow \mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X})$ ist. So folgt, daß die Vorschrift $X \mapsto \check{X}$ einen volltreuen Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee$ induziert.

Ergänzung 8.7.5. Die hier verwendeten Notationen \mathcal{C}^\vee und das später eingeführte \mathcal{C}^\wedge sind genau umgekehrt wie in [KS90]. Dafür stimmt die Notation \mathcal{C}^\wedge dann mit der in [Gro72] verwendeten Notation überein.

8.7.6 (Das Yoneda-Lema im Fall einer Ein-Objekt-Kategorie). Im Spezialfall einer Ein-Objekt-Kategorie $\mathcal{C} = [G]$ mit einzigem Objekt X ist diese Aussage besonders leicht einzusehen: Sie besagt dann im Lichte von 8.2.11, daß die äquivarianten Abbildungen von einem Monoid G in eine beliebige G -Menge F festgelegt und festlegbar sind durch das Bild des neutralen Elements. Im weiteren lassen wir das Mengensystem \mathcal{U} wieder in den Hintergrund treten und ignorieren es meist in unserer Notation.

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die andere Richtung. Für beliebiges $a \in F(X)$ betrachten wir dazu die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \tau_Y : \mathcal{C}(X, Y) & \rightarrow & F(Y) \\ f & \mapsto & (Ff)(a) \end{array}$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie eine Transformation $\tau : \check{X} \Rightarrow F$ bilden, die wir mit $\hat{\tau}(a)$ bezeichnen. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß die Abbildung $a \mapsto \hat{\tau}(a)$ invers ist zu unserer Abbildung $\tau \mapsto \hat{a}(\tau) := \tau_X(\text{id}_X)$ aus der Proposition. Dafür müssen wir also prüfen, daß gilt $a = \hat{a}(\hat{\tau}(a))$ für alle $a \in F(X)$ und $\tau = \hat{\tau}(\hat{a}(\tau))$ für alle Transformationen $\tau : \check{X} \Rightarrow F$. Das überlassen wir dem Leser. □

Definition 8.7.7. Diejenigen Mengenfunktoren auf \mathcal{C} , die isomorph sind zu Mengenfunktoren im Bild von $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\vee$, heißen **darstellbare Funktoren**. Ist ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ isomorph zu $\check{X} = \mathcal{C}(X, _)$ für ein $X \in \mathcal{C}$, so sagen wir, der **Funktor F werde dargestellt durch das Objekt X** . Ist noch genauer $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ ein Mengenfunktor und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $a \in F(X)$ ein Element, das unter der Bijektion aus dem Yoneda-Lemma einer Isotransformation $\mathcal{C}(X, _) \xrightarrow{\sim} F$ entspricht, so sagen wir, der **Funktor F werde strikt dargestellt durch das Paar (X, a)** . Ausgeschrieben bedeutet das, daß die Vorschrift

$f \mapsto (Ff)(a)$ für alle $Y \in \mathcal{C}$ eine Bijektion $\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{\sim} F(Y)$ liefert. Oft lassen wir das „strikt“ aber auch weg.

Beispiel 8.7.8. Der Vergißfunktork $\text{Mod}_k \rightarrow \text{Ens}$ von den k -Vektorräumen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar $(k, 1)$ oder auch durch jeden anderen eindimensionalen Vektorraum zusammen mit einem beliebigen von Null verschiedenen Element.

Beispiel 8.7.9. Der Vergißfunktork $\text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ von den Gruppen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar $(\mathbb{Z}, 1)$ oder auch durch jedes andere Paar (Z, e) bestehend aus einer unendlich zyklischen Gruppe und einem Erzeuger.

8.7.10. In derselben Weise kann man für jede \mathcal{U} -Kategorie \mathcal{C} auch die Kategorie

$$\mathcal{C}^\wedge = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{U}\text{Ens})$$

aller kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$ betrachten und erhält mit $X \mapsto \hat{X} := \mathcal{C}(_, X)$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$. Wieder heißen die Funktoren im Bild dieser Einbettung **darstellbare Funktoren**. Die Objekte von \mathcal{C}^\wedge werden Ihnen sehr viel später vielleicht einmal unter der Bezeichnung als „mengenwertige Prägarben auf \mathcal{C} “ wieder begegnen. Diesmal liefert das Auswerten auf id_X eine Bijektion $\mathcal{C}^\wedge(\hat{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

Ergänzung 8.7.11. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} kann man leicht Isomorphismen von Kategorien $(\mathcal{C}^\vee)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{opp}})^\wedge$ und $(\mathcal{C}^\wedge)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{opp}})^\vee$ angeben. In diesem Sinne sind unsere beiden Konzepte zueinander opponiert.

8.8 Mehr zu adjungierten Funktoren*

Satz 8.8.1 (Adjunktion durch Einheit und Koeinheit). *Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren und $\alpha : L \dashv R$ eine Adjunktion.*

1. *Die Einheit und Koeinheit unserer Adjunktion 8.3.6 erfüllen die **Dreiecksidentitäten** $\check{\alpha}L \circ L\hat{\alpha} = \text{id}_L$ sowie $R\check{\alpha} \circ \hat{\alpha}R = \text{id}_R$ von Transformationen $L \Rightarrow LRL \Rightarrow L$ beziehungsweise $R \Rightarrow RLR \Rightarrow R$;*
2. *Gegeben Transformationen $\varepsilon : \text{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$ und $\eta : LR \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{B}}$, die die Dreiecksidentitäten $\eta L \circ L\varepsilon = \text{id}_L$ und $R\eta \circ \varepsilon R = \text{id}_R$ erfüllen, gibt es genau eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ mit Einheit $\hat{\alpha} = \varepsilon$ und Koeinheit $\check{\alpha} = \eta$.*

Beweis. Wir beginnen mit einem Lemma und führen danach den Beweis. □

Lemma 8.8.2. *Gegeben \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren erhalten wir eine Bijektion*

$$\text{Cat}(\mathcal{A}^{\text{opp}} \times \mathcal{B}, \text{Ens})(\mathcal{B}(L _, _), \mathcal{A}(_, R)) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{A})(\text{Id}_{\mathcal{A}}, RL)$$

durch die Vorschrift $\alpha \mapsto \varepsilon^\alpha$ mit $\varepsilon_A^\alpha := \alpha(\text{id}_{LA}) : A \rightarrow RLA$ mit Umkehrabbildung $\varepsilon \mapsto \alpha^\varepsilon$ gegeben durch $\alpha_{A,B}^\varepsilon(h) := (Rh) \circ \varepsilon_A : A \rightarrow RB$ für $h : LA \rightarrow B$.

Beweis des Lemmas. Da ist eine ganze Menge zu prüfen. Als erstes zeigen wir, daß für fest vorgegebenes α unser ε^α in der Tat eine Transformation ist, daß also für jeden Morphismus $f : X \rightarrow A$ in \mathcal{A} gilt $\varepsilon_A^\alpha \circ f = RL(f) \circ \varepsilon_X^\alpha$. Der Trick ist zu zeigen, daß beide Seiten gleich sind zu $\alpha_{X,LA}(Lf)$, und das kann dem Leser überlassen bleiben. Damit haben wir zumindest gezeigt, daß die Abbildung sinnvoll definiert ist, von der wir behaupten, daß sie eine Bijektion sein soll. Als nächstes zeigen wir, daß für fest vorgegebenes ε unser α^ε in der Tat eine Transformation ist, daß also für jeden Morphismus $f : X \rightarrow A$ in \mathcal{A} und beliebige Morphismen $g : B \rightarrow Y$ sowie $h : LA \rightarrow B$ in \mathcal{B} gilt

$$Rg \circ \alpha_{A,B}^\varepsilon(h) \circ f = \alpha_{X,Y}^\varepsilon(g \circ h \circ Lf)$$

Ausgeschrieben gilt es zu zeigen $Rg \circ Rh \circ \varepsilon_A \circ f = R(g \circ h \circ Lf) \circ \varepsilon_X$ und das folgt sofort aus $\varepsilon_A \circ f = RL(f) \circ \varepsilon_X$. Damit ist auch die behauptete Umkehrabbildung sinnvoll definiert und es bleibt nur zu zeigen $\varepsilon = \varepsilon^{\alpha^\varepsilon}$ und $\alpha = \alpha^{\varepsilon^\alpha}$, was wir dem Leser zur Übung überlassen. \square

Beweis des Satzes. Um die erste Dreiecksidentität zu zeigen, also $\check{\alpha}_{LX} \circ L(\hat{\alpha}_X) = \text{id}_{LX}$ für alle $X \in \mathcal{A}$, setzen wir in die Definitionen ein und müssen zeigen $\alpha^{-1}(\text{id}_{RLX}) \circ L(\alpha(\text{id}_{LX})) = \text{id}_{LX}$. Wenden wir darauf α an und verwenden die Natürlichkeit nach 8.3.2, so ist gleichbedeutend $\text{id}_{RLX} \circ \alpha(\text{id}_{LX}) = \alpha(\text{id}_{LX})$ und das ist klar. Die andere Dreiecksidentität zeigt man ebenso. Um den dritten Teil zu zeigen, müssen wir nur prüfen, daß unter der Annahme der Dreiecksidentitäten die aus dem Lemma entstehenden Transformationen $\alpha = \alpha^\varepsilon$ und die durch Übergang zu den opponierten Kategorien entstehende Transformation $\beta = \beta^\eta$ in die Gegenrichtung zueinander invers sind. Diese Rechnung sei wieder dem Leser überlassen. \square

8.8.3 (Eindeutigkeit der Adjungierten). Gegeben Kategorien \mathcal{A}, \mathcal{B} erhalten wir mit der kategoriellen Fassung des Exponentialgesetzes 10.4.13 für die obere Horizontale und den Yoneda-Einbettungen $Y = Y_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens})$ für die Vertikalen ein Diagramm von Kategorien

$$\begin{array}{ccccc} \text{Cat}(\mathcal{A}, \text{Cat}(\mathcal{B}, \text{Ens})) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cat}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \text{Ens}) & \xleftarrow{\sim} & \text{Cat}(\mathcal{B}, \text{Cat}(\mathcal{A}, \text{Ens})) \\ \uparrow & \text{can}_1 & & \text{can}_2 & \uparrow \\ \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}^{\text{opp}}) & & & & \text{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^{\text{opp}}) \end{array}$$

mit volltreuen Einbettungen als Vertikalen. Eine Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ zwischen einem Funktor $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{opp}}$ und dem Funktor $R : \mathcal{B}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}$, ist eine Isotransformation $\alpha : \text{can}_1(YL) \xrightarrow{\sim} \text{can}_2(YR^{\text{opp}})$. Das Diagramm zeigt, daß gegeben L

ein Paar (α, R) bestehend aus einem Funktor in die Gegenrichtung und einer Adjunktion $\alpha : L \dashv R$ eindeutig bestimmt ist bis auf eindeutigen Isomorphismus. Man benutzt deshalb meist den bestimmten Artikel und nennt R den **rechtsadjungierten Funktor** zu L , wobei eigentlich nicht nur der Funktor R gemeint ist, sondern das Paar (α, R) . Ebenso wird auch das Paar (α, L) durch R im wesentlichen eindeutig festgelegt und man nennt L den **linksadjungierten Funktor** zu R . Spricht man von einem **adjungierten Paar** $L \dashv R$, so ist der Leser gefordert, die vom Autor gemeinte Adjunktion α von L und R aus dem Kontext zu erschließen.

8.8.4. Ist \mathcal{U} ein Mengensystem und sind \mathcal{A}, \mathcal{B} beide \mathcal{U} -Kategorien, so können wir zu jedem Funktor $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ den **maximalen partiellen rechtsadjungierten Funktor** R bilden, der eben nur auf der vollen Unterkategorie $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ derjenigen Objekte $B \in \mathcal{B}$ erklärt ist, für die der Mengenfunktor $\mathcal{A}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$, $X \mapsto \mathcal{B}(LX, B)$ darstellbar ist im Sinne von 8.7.10. Wieder ist das Paar (α, R) bestehend aus dem Funktor $R : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ und der Isotransformation

$$\alpha \in \text{Cat}(\mathcal{A}^{\text{opp}} \times \mathcal{B}_0, \text{Ens})(\mathcal{B}(L, _), \mathcal{A}(_, R))$$

eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir sagen dann auch, der „rechtsadjungierte Funktor sei bei B definiert“. Wollen wir speziell betonen, daß ein rechtsadjungierter Funktor überall definiert ist, so sprechen wir von einem **globalen Rechtsadjungierten**. Jede Restriktion eines maximalen partiellen Rechtsadjungierten nennen wir einen **partiellen Rechtsadjungierten**. Analoge Begriffsbildungen vereinbaren wir für Linksadjungierte.

8.8.5. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien. Unter einem **partiell definierten Funktor** verstehe ich einen Funktor von einer vollen Unterkategorie von \mathcal{A} nach \mathcal{B} . Ich notiere partiell definierte Funktoren auch $F : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$. Zum Beispiel ist der maximale partielle Rechtsadjungierte eines beliebigen Funktors $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein partiell definierter Funktor $\mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{A}$.

Vorschau 8.8.6. Betrachten wir wie in 8.7.10 die Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \text{Ens})$. Ein Funktor im Bild heißt ein „darstellbarer Funktor“. Auch wenn ein Funktor $F \in \mathcal{C}^\wedge$ nicht darstellbar ist, kann immerhin der Rechtsadjungierte der Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ bei F definiert sein. Das entsprechende Objekt $R(F) \in \mathcal{C}$ mag man dann als eine „bestmögliche Approximation an ein darstellendes Objekt“ verstehen. Ein Beispiel für solche Konstruktionen sind die sogenannten **groben Modulräume**.

Definition 8.8.7. Ist allgemein \mathcal{C} eine Kategorie mit einem ausgezeichneten Funktor $v : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ in die Kategorie der Mengen, als da heißt eine Kategorie über Ens , so nennen wir den Wert des möglicherweise partiellen Linksadjungierten auf einer Menge X das **freie Objekt von \mathcal{C} über X** und notieren dies freie Objekt im allgemeinen

$$\mathcal{C} \wedge X$$

und notieren $\varepsilon : X \rightarrow v(\mathcal{C}^\wedge X)$ die durch Einheit der Adjunktion gegebene Abbildung.

Beispiel 8.8.8 (Freie Gruppen und freie abelsche Gruppen). Der Vergißfunktoren von den Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie Gruppe über besagter Menge zuordnet, wie sie in 6.5.6 eingeführt wird. Der Vergißfunktoren von den abelschen Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie abelsche Gruppe über besagter Menge zuordnet. Für diese Gruppe verwenden wir die Notation $\text{Ab}^\wedge X = \mathbb{Z}X$.

Beispiel 8.8.9 (Es gibt keine freien Körper). Der Vergißfunktoren von den Körpern in die Mengen hat keinen Linksadjungierten. Es gibt also salopp gesprochen keine sinnvolle Definition eines „freien Körpers über einer vorgegebenen Menge“.

Beispiel 8.8.10. Der Vergißfunktoren von den k -Vektorräumen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge X den freien k -Vektorraum über der Menge X zuordnet, also den Vektorraum aller Abbildungen $X \rightarrow k$, die nur an endlich vielen Stellen $x \in X$ verschieden sind von Null. Wir verwenden für diesen Vektorraum die abkürzende Notation

$$k\text{-Mod}^\wedge X = k\langle X \rangle$$

Ist allgemeiner k ein Ring, so verwenden wir dieselbe Notation auch für den freien k -Modul über X .

Beispiel 8.8.11. Gegeben ein kommutativer Ring k ist der freie k -Kring über einer Menge von Veränderlichen schlicht der Polynomring in diesen Veränderlichen, in Formeln gilt also zum Beispiel

$$(\text{Kring}^k)^\wedge \{T_1, \dots, T_n\} = k[T_1, \dots, T_n]$$

mit derjenigen Abbildung $\varepsilon : \{T_1, \dots, T_n\} \rightarrow k[T_1, \dots, T_n]$ als universeller Mengen- k -Kringalgebren-Abbildung, die eben T_i auf T_i abbildet.

Übungen

Ergänzende Übung 8.8.12 (Partielle Dreiecksidentitäten). Sei $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor. Man zeige: Gegeben ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ derart, daß der partielle Rechtsadjungierte R bei LA definiert ist, ist die Verknüpfung $LA \rightarrow LRLA \rightarrow LA$ der von der Einheit $A \rightarrow RLA$ und der Identität $RLA \rightarrow RLA$ herrührenden Morphismen die Identität auf LA . Gegeben ein Objekt $B \in \mathcal{B}$ derart, daß der partielle Rechtsadjungierte R bei B und LRB definiert ist, ist weiter die entsprechende Verknüpfung $RB \rightarrow RLRB \rightarrow RB$ die Identität auf RB .

Übung 8.8.13. Seien $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Paar (L, R) adjungierter Funktoren. So gilt für den Isomorphismus $\mathcal{B}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RB)$ stets $f \mapsto Rf \circ \varepsilon_A$ und für seine Umkehrabbildung gilt $g \mapsto \eta_B \circ Lg$. Des weiteren können wir $\mathcal{B}(LA, LA_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, RLA_1)$ beschreiben durch die Vorschrift $f \mapsto Rf \circ \varepsilon_A$ und $\mathcal{A}(RB_1, RB) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(LRB_1, B)$ durch die Vorschrift $g \mapsto \eta_B \circ Lg$. Für letzere Aussagen mögen die Dreiecksidentitäten helfen.

Übung 8.8.14. Sei $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor und R sein Rechtsadjungierter. So ist die Restriktion von R auf die volle Unterkategorie $L(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ der Rechtsadjungierte von $L : \mathcal{A} \rightarrow L(\mathcal{A})$. Analoges gilt für Linksadjungierte.

Übung 8.8.15 (Äquivalenz durch Adjunktion). Gegeben ein Funktor $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ betrachte man seinen partiellen Rechtsadjungierten R und die vollen Unterkategorien

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \{A \in \mathcal{A} \mid RLA \text{ ist definiert und die Einheit ist ein Iso } A \xrightarrow{\sim} RLA\} \\ \mathcal{B}_0 &:= \{B \in \mathcal{B} \mid RB \text{ ist definiert und die Koeinheit ist ein Iso } LRB \xrightarrow{\sim} B\} \end{aligned}$$

Man zeige, daß L eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{A}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_0$ mit Quasiinversem R induziert. Hinweis: 8.8.12.

Ergänzende Übung 8.8.16 (Volltreueheit von Adjungierten). Besitzt ein Funktor F einen volltreuen Linksadjungierten L , so ist für jedes Objekt Y , auf dem der partielle Rechtsadjungierte von F definiert ist, der Adjunktionsmorphismus ein Isomorphismus $FRY \xrightarrow{\sim} Y$ und der partielle Rechtsadjungierte von F ist ebenfalls volltreu. Hinweis: Für $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ beachte man die kanonischen Isomorphismen

$$\mathcal{B}(X, FRY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(LX, RY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FLX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(X, Y)$$

In ?? werden wir diese Aussage als Konsequenz einer größeren Theorie verstehen können: Jeder Funktor mit einem volltreuen Linksadjungierten oder volltreuen Rechtsadjungierten ist ein „Lokalisierungsfunktor“ und die beiden partiellen Adjungierten eines Lokalisierungsfunktors sind stets volltreu.

Übung 8.8.17 (Adjungierte zur Restriktion von Gruppenwirkungen). Ist $\varphi : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus, so besitzt der offensichtliche Funktor $\text{res}_G^H : G\text{-Ens} \rightarrow H\text{-Ens}$ einen Linksadjungierten, den wir prod_H^G notieren und der einer H -Menge X die G -Menge

$$G \times_{/H} X$$

aller H -Bahnen in $G \times X$ unter der Operation $h(g, x) = (gh^{-1}, hx)$ zuordnet. Ebenso besitzt er einen Rechtsadjungierten $\text{ind}_H^G : X \mapsto \text{Ens}_{H \setminus}(G, X)$.

8.8.18 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißt $G \times_{/H} X$ meist die „von X induzierte G -Menge“. Wir werden jedoch von der **von X koinduzierten G -Menge** reden, um mit anderen Begriffsbildungen kompatibel zu bleiben. Ist etwas allgemeiner H eine Gruppe und X eine H -Menge und Y eine H -Rechtsmenge, so erklärt man analog ihr **balanciertes Produkt**

$$Y \times_{/H} X$$

als die Menge aller H -Bahnen in $Y \times X$ unter der Operation $h(y, x) = (yh^{-1}, hx)$. Die Bahn von (y, x) notieren wir $[y, x]$. Oft werden balancierte Produkte statt $Y \times_{/H} X$ einfacher $Y \times_H X$ notiert. Das kann leider auch ein Faserprodukt bedeuten und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, welche Bedeutung jeweils gemeint ist.

Übung 8.8.19. Ist G eine Gruppe mit Untergruppen H, K und ist $S = H \cap K$ ihr Schnitt, so induziert die Multiplikation eine Bijektion $H \times_{/S} K \xrightarrow{\sim} HK$.

Ergänzende Übung 8.8.20. Ist G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe und $y \in G$ ein Element und $S = H \cap yHy^{-1}$, so erhalten wir einen Isomorphismus $H \times_S H \xrightarrow{\sim} HyH$ von $(H \times H)$ -Mengen mit der Rechtsoperation von $s \in S$ auf H durch Rechtsmultiplikation und der Linksoperation von $s \in S$ auf H durch Linksmultiplikation mit $y^{-1}sy$ mittels der Abbildung $[h, k] \mapsto hyk$. Hinweis: Man wende 8.8.19 an mit $K = yHy^{-1}$.

Ergänzende Übung 8.8.21. Sei $\varphi : H \rightarrow G$ ein Homomorphismus topologischer Gruppen. Bezeichnet Top^G die Kategorie der topologischen Räume mit einer stetigen G -Operation, so besitzt der offensichtliche Funktor $\text{Top}^G \rightarrow \text{Top}^H$ einen Linksadjungierten, den wir prod_H^G notieren und der einem H -Raum X den G -Raum $G \times_{/H} X$ mit seiner Quotiententopologie zuordnet. Die Stetigkeit der Operation von G folgt hier zum Beispiel mit 7.3.9.

Übung 8.8.22 (Adjungierter einer Verknüpfung). Der Adjungierte einer Verknüpfung ist die Verknüpfung der Adjungierten, als da heißt: Gegeben Funktoren $R_* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $S_* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ mit Linksadjungierten R^* und S^* erhalten wir eine Adjunktion $(R^* \circ S^*) \dashv (S_* \circ R_*)$ in kanonischer Weise.

Übung 8.8.23 (Transformationen zwischen Adjungierten). Jede Transformation von einem Funktor zu einem weiteren Funktor induziert ein natürlicher Weise eine Transformation in der Gegenrichtung zwischen ihren Links- beziehungsweise ihren Rechtsadjungierten, soweit diese existieren.

Übung 8.8.24 (Transformationen zwischen Adjungierten, Variante). Gegeben adjungierte Paare (L, R) und (L', R') von Funktoren zwischen Kategorien \mathcal{A}, \mathcal{B} beziehungsweise $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ und Funktoren $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ sowie $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ konstruiere man eine natürliche Bijektion

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')(L'F, GL) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{A}')(FR, R'G)$$

Übung 8.8.25 (Kompatibilitäten). Sei F ein Funktor mit Linksadjungiertem E und Rechtsadjungiertem G , so daß wir adjungierte Paare (E, F) und (F, G) haben. Die Einheit der Adjunktion $\varepsilon : \text{Id} \Rightarrow FE$ induziert durch Übergang zu den Rechtsadjungierten mit 8.8.22 und 8.8.23 eine Transformation $FG \Rightarrow \text{Id}$. Man zeige, daß sie mit der Koeinheit der Adjunktion (F, G) zusammenfällt.

Ergänzung 8.8.26 (Adjunktionen einiger Funktoren von G -Mengen). Gegeben $H \subset G$ eine Untergruppe und X eine H -Menge bezeichne $[g, x] \in G \times_{/H} X$ die Bahn von (g, x) . Ist X die Restriktion einer G -Menge, so definiert die Abbildung $[g, x] \mapsto (gH, gx)$ eine G -äquivalente Bijektion

$$G \times_{/H} X \xrightarrow{\sim} (G/H) \times X$$

Hier ist auf der rechten Seite das Produkt des G -Mengen (G/H) und X in der Kategorie der G -Mengen gemeint, also mit der „diagonalen“ G -Operation. Allgemeiner ist für jede G -Menge E der Funktor $(E \times) : G\text{-Ens} \rightarrow G\text{-Ens}$ linksadjungiert zum Funktor $\text{Ens}(E, _) : G\text{-Ens} \rightarrow G\text{-Ens}$ mittels der kanonischen Bijektionen aus ??, wenn wir die G -Operation auf einem Raum von Abbildungen $\text{Ens}(E, M)$ erklären durch die Konjugation, so daß in Formeln gf erklärt sei durch $(gf)(x) = g(f(g^{-1}x))$. Gegeben $M \in H\text{-Ens}$ und $E \in G\text{-Ens}$ haben wir kanonische Isomorphismen von G -Mengen

$$\begin{aligned} \text{prod}_H^G(E \times M) &\xrightarrow{\sim} E \times (\text{prod}_H^G M) \\ \text{ind}_H^G \text{Ens}(E, M) &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}(E, \text{ind}_H^G M) \\ \text{ind}_H^G \text{Ens}(M, E) &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}(\text{prod}_H^G M, E) \end{aligned}$$

Ganz allgemein ist nach 8.8.22 der Adjungierte einer Verknüpfung von Funktoren die Verknüpfung der Adjungierten, wenn sie existieren. Diese Erkenntnis gilt es nun anzuwenden auf die kommutativen Diagramme von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} G\text{-Ens} & \xrightarrow{E \times} & G\text{-Ens} & & G\text{-Ens} & \xrightarrow{\text{Ens}(E, _)} & G\text{-Ens} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H\text{-Ens} & \xrightarrow{E \times} & H\text{-Ens} & & H\text{-Ens} & \xrightarrow{\text{Ens}(E, _)} & H\text{-Ens} \\ & & & & G\text{-Ens} & \xrightarrow{\text{Ens}(_, E)} & G\text{-Ens}^{\text{opp}} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & H\text{-Ens} & \xrightarrow{\text{Ens}(_, E)} & H\text{-Ens}^{\text{opp}} \end{array}$$

mit den Restriktionen als Vertikalen und der Adjunktion $(E \times, \text{Ens}(E, _))$ beziehungsweise der Tatsache, daß der Rechtsadjungierte der Horizontalen $\text{Ens}(_, E)$ im Diagramm ganz rechts wieder $\text{Ens}(_, E)$ ist, nur diesmal aufgefaßt als Funktor in der Gegenrichtung, also präziser der Funktor $\text{Ens}(_, E)^{\text{opp}}$.

9 Weiterführende Resultate

9.1 Die Zopfgruppe

Definition 9.1.1. Sei X_n die Menge aller Teilmengen von \mathbb{C} mit genau n Elementen. Wir geben X_n die Finaltopologie für die die Reihenfolge vergessende Abbildung $\mathbb{C}^n \setminus \Delta \rightarrow X_n$ mit $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ der **großen Diagonale** alias der Menge aller n -Tupel komplexer Zahlen, in denen mindestens eine Zahl doppelt vorkommt. Die Fundamentalgruppe von X_n heißt die **Zopfgruppe in n Strängen**, englisch **braid group**, französisch **groupe de tresses**. Als Basispunkt nehmen wir meist $*$ = $\{1, 2, \dots, n\}$.

9.1.2. Die Elemente der Zopfgruppe kann man durch Bilder darstellen wie etwa das nebenstehende Bild für ein Element $\gamma \in \pi_1(X_3)$. Dies Bild stellt im Raum $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ die Menge $\{(z, t) \mid z \in \gamma(t)\}$ dar, mit t als senkrechter Koordinate und mit der Konvention, daß Punkte mit größerem Imaginärteil weiter hinten liegen mögen. Die Verknüpfung in unserer Zopfgruppe bedeutet in dieser Anschauung das „Aneinanderhängen“ solcher „Zöpfe“.

Notation 9.1.3. Bezeichne $s_\nu \in \pi_1(X_n, *)$ für $1 \leq \nu \leq n - 1$ die Klasse des Weges, unter dem der Punkt ν durch die untere Halbebene nach $\nu + 1$ wandert und gleichzeitig der Punkt $\nu + 1$ durch die obere Halbebene nach ν . Alle anderen Punkte sollen unter s_ν auf ihren Plätzen bleiben. Ein Repräsentant dieser Klasse wäre etwa der Weg

$$s_\nu(t) = \{1, \dots, \nu - 1, (\nu + 1/2 - e^{\pi i t} / 2), (\nu + 1/2 + e^{\pi i t} / 2), \nu + 2, \dots, n\}$$

Satz 9.1.4 (Erzeuger und Relationen der Zopfgruppe). Die Zopfgruppe in n Strängen wird dargestellt durch die Erzeuger s_1, \dots, s_{n-1} mit den sogenannten **Zopfrelationen**

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i && \text{falls } |i - j| > 1; \\ s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j && \text{falls } |i - j| = 1. \end{aligned}$$

9.1.5. In der Anschauung überzeugt man sich leicht, daß die s_i die Zopfgruppe erzeugen und die Zopfrelationen erfüllen. Hier verstellt das formale Argument eher den Blick. Das eigentliche Problem besteht darin, zu zeigen, daß nicht noch weitere Relationen benötigt werden.

Beweis des Satzes. Wir beginnen mit dem Fall $n = 3$ und berechnen zunächst die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$ einer Überlagerung von X_3 . Wir interpretieren Elemente von $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$ als die Angabe von drei paarweise verschiedenen Punkten in der Ebene \mathbb{C} , wobei wir jedoch im Unterschied zu X_3 noch wissen, welcher Punkt hier der Erste beziehungsweise der Zweite beziehungsweise der Dritte ist.

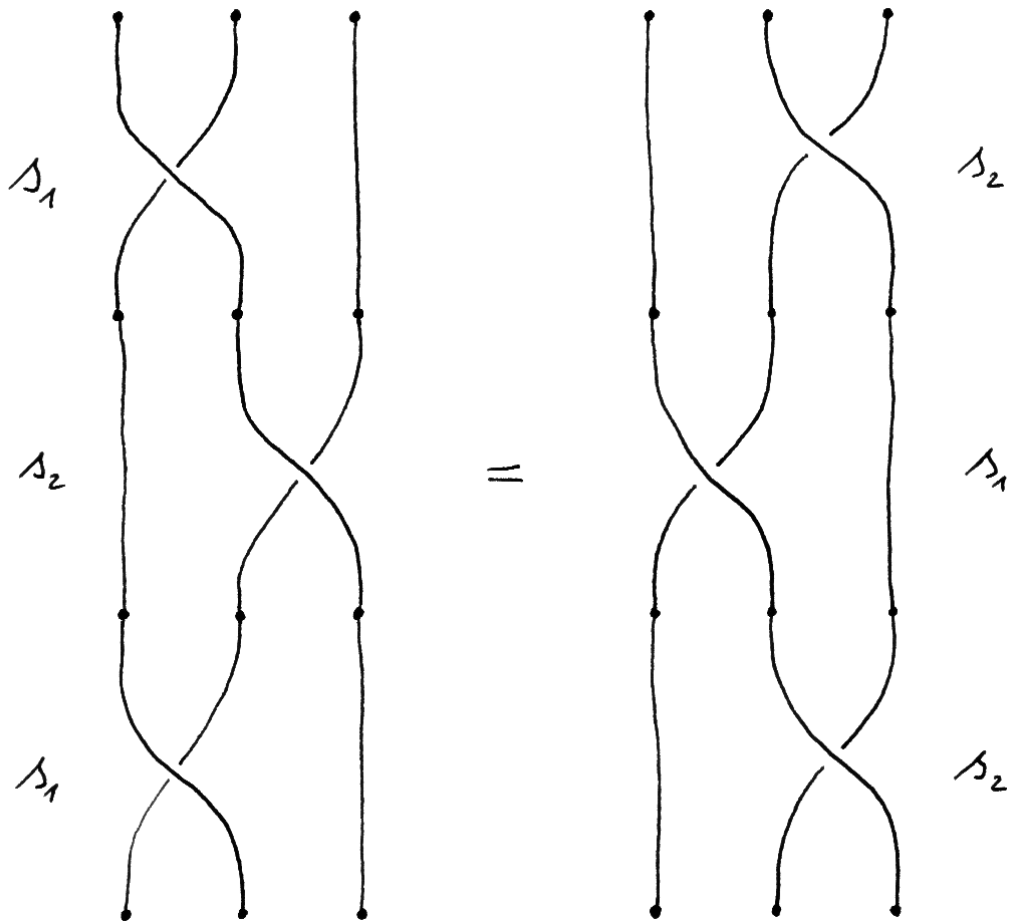


Illustration der Zopfrelation $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$. In der Tat geht bei beiden Bildern der Faden von links oben nach rechts unten „auf der obersten Ebene“, der Faden von rechts oben nach links unten „auf der untersten Ebene“, und der Faden von der Mitte zur Mitte auf einer „mittleren Ebene“.

Wir ändern die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$ nicht, wenn wir den zweiten Punkt festhalten, formal ist genauer die Einbettung

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid x \neq y\} &\hookrightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \Delta \\ (x, y) &\mapsto (x, 0, y) \end{aligned}$$

eine Homotopieäquivalenz. Wir geben der linken Seite den Namen M und betrachten die Überdeckung $M = M_+ \cup M_-$ durch die offenen Teilmengen

$$\begin{aligned} M_+ &:= M \setminus \{(x, \lambda x) \mid 0 < \lambda < 1\} \\ M_- &:= M \setminus \{(\lambda y, y) \mid 0 < \lambda < 1\} \end{aligned}$$

mit Schnitt $M_+ \cap M_- = \{(x, y) \in M \mid \mathbb{R}_{>0}x \neq \mathbb{R}_{>0}y\}$. Stellen wir uns den festen Punkt als die Sonne vor und x beziehungsweise y als die Erde beziehungsweise den Mond, die sich jedoch in einer Ebene völlig unabhängig voneinander bewegen dürfen, so ist M_+ die Menge aller Konstellationen „ohne Sonnenfinsternis“ und M_- die Menge aller Konstellationen „ohne Mondfinsternis“. Jetzt haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\rightarrow M_+, & (z, w) &\mapsto (z, 2w) \\ S^1 \times S^1 &\rightarrow M_-, & (z, w) &\mapsto (2z, w) \\ S^1 &\rightarrow M_+ \cap M_-, & z &\mapsto (-z, z) \end{aligned}$$

Wenn wir Basispunkte $1 \in S^1$, $(1, 1) \in S^1 \times S^1$ und $(-1, 1) \in M$ wählen, erhalten wir mit etwas komplizierteren Ausdrücken auch basispunkterhaltende Homotopieäquivalenzen, indem „wir Erde und Mond um geeignete Punkte p auf der reellen Achse kreisen lassen“, in Formeln

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\rightarrow M_+, & (z, w) &\mapsto (-p - z(1-p), -p + w(1+p)) \\ S^1 \times S^1 &\rightarrow M_-, & (z, w) &\mapsto (p - z(1+p), p + w(1-p)) \end{aligned}$$

für beliebig fest gewähltes p mit $0 < p < 1/2$. Unsere dritte Homotopieäquivalenz $S^1 \rightarrow M_+ \cap M_-$ von oben erhält schon die Basispunkte. Wie man anschaulich schnell einsieht und unschwer formalisiert, kommutieren mit unserer Wahl von Basispunkten nun die beiden nur durch ein Vorzeichen unterschiedenen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(M_+ \cap M_-) \\ \text{diag} \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) & \xleftarrow{\sim} \pi_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\sim} & \pi_1(M_\pm) \end{array}$$

und wir erhalten isomorphe pushout-Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M_+ \cap M_-) & \longrightarrow & \pi_1(M_+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(M_-) & \longrightarrow & \pi_1(M) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{diag}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \text{diag} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) \end{array}$$

Man sieht so, daß $\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$ erzeugt wird von den Klassen g, u_+, u_- der drei Wege

$$\begin{aligned} \tilde{g} : t &\mapsto (-e^{2\pi it} & , 0, & e^{2\pi it}) \\ \tilde{u}_+ : t &\mapsto (-1 & , 0, & p + (1-p)e^{2\pi it}) \\ \tilde{u}_- : t &\mapsto (-p - (1-p)e^{2\pi it} & , 0, & 1) \end{aligned}$$

für beliebiges festes p mit $0 < p < 1/2$, wo wir nur die beiden Kommutationsrelationen $gu_+ = u_+g$ und $gu_- = u_-g$ fordern müssen. Wir behaupten, daß die Bilder unserer drei Wege in der Zopfgruppe $\pi_1(X_3)$ gegeben werden durch

$$\begin{aligned} u_+ &\mapsto s_1^2 \\ u_- &\mapsto s_2^2 \\ g &\mapsto (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_1)^3 \end{aligned}$$

Das scheint mir anschaulich evident. Formal kann man zum Beispiel in $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$ den Weg $\tilde{g}_{1/2}$ von $(-1, 0, 1)$ nach $(1, 0, -1)$ betrachten mit $\tilde{g}_{1/2}(t) = \tilde{g}(2t)$ sowie die Wege \tilde{s}_1 und \tilde{s}_2 gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 : t &\mapsto (-1/2 - e^{\pi it} / 2 & , & -1/2 + e^{\pi it} / 2 & , & 1) \\ \tilde{s}_2 : t &\mapsto (-1 & , & 1/2 - e^{\pi it} / 2 & , & 1/2 + e^{\pi it} / 2) \end{aligned}$$

und linear interpolieren zwischen den Wegen $\tilde{g}_{1/2}$ und $(\tau \circ \tilde{s}_1) * (\sigma \circ \tilde{s}_2) * \tilde{s}_1$ für Permutationen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_3$ der drei Koordinaten derart, daß die Wege verküpfbar sind. Dasselbe gilt symmetrisch, wenn wir die Indizes 1 und 2 vertauschen. Drücken wir diese linearen Homotopien dann herunter auf X_3 und verküpfen, so ergibt sich die Dritte und komplizierteste der obigen Behauptungen, d.h. $g \mapsto (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_1)^3$. Jetzt betrachten wir formal die Gruppe B_3 , die erzeugt wird von zwei Elementen s und t mit den Relationen $sts = tst$, und nenne sie für die Dauer dieses Beweises die **abstrakte Zopfgruppe**. Es tut mir leid, den Buchstaben t erst als Parameter eines Weges und nun gleich darauf in dieser völlig anderen Bedeutung zu verwenden. Beide Notationen sind jedoch derart gebräuchlich, daß diese Kollision mir ein kleineres Übel scheint, als es eine gänzlich unübliche Wahl der Bezeichnungen wäre. Mit unseren Erkenntnissen zur Fundamentalgruppe von Bahnräumen 8.5.20 und den Formeln $t^2(st)^3 = (st)^3 t^2$ und

$s^2(st)^3 = (st)^3s^2$ in der abstrakten Zopfgruppe B_3 erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) & \rightarrow & B_3 & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) & \hookrightarrow & \pi_1(X_3) & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \end{array}$$

mit $s \mapsto s_1$ und $t \mapsto s_2$ in der mittleren Vertikale und hoffentlich sonst offensichtlichen Morphismen. Als erstes folgt, daß die Horizontale oben links eine Injektion ist. Weiter ist klar, daß die Verknüpfung in der oberen Horizontale trivial ist. Als nächstes überlegt man sich explizit, daß in der oberen Horizontale das Bild des linken Pfeils genau der Kern von $B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3$ ist. Um zu erkennen, ob die Klasse eines Gruppenworts in $\ker(B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3)$ liegt, müssen wir nur alle Potenzen s^m für $m \in \mathbb{Z}$ reduzieren zu s beziehungsweise e falls $m \in 2\mathbb{Z}$ beziehungsweise $m \notin 2\mathbb{Z}$ und analog für t , bis wir bei einem Wort ankommen, bei dem keine negativen Potenzen auftreten und bei dem die Buchstaben s und t alternieren. Unser ursprüngliches Wort war im Kern genau dann, wenn dieses alternierende Wort eine durch 6 teilbare Länge hat. Nun zeigen wir erst einmal, daß unser Bild normal ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß die Konjugierten von Erzeugern des Bildes unter Erzeugern der abstrakten Zopfgruppe wieder im Bild liegen. Das hinwiederum zeigen die Identitäten

$$ts^2t^{-1} = (st)^3s^{-2}t^{-2} \quad \text{und} \quad t(st)^3t^{-1} = (ts)^3 = (st)^3$$

und ihre Varianten mit s und t vertauscht. Also ist das Bild normal. Jetzt beachten wir, daß für einen Normalteiler N einer Gruppe G und $a, b \in G, x \in N$ gilt

$$axb \in N \Leftrightarrow axa^{-1}ab \in N \Leftrightarrow ab \in N$$

Unsere Beschreibung des Kerns zeigt dann, da eben das Bild normal ist, die schwierige Inklusion \supset und damit die Gleichheit

$$\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) = \ker(B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3)$$

So folgt durch Diagrammjagd in der Tat $B_3 \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_3)$ und der Fall $n = 3$ ist erledigt. Jetzt unterbrechen wir den Beweis durch einige allgemeine Überlegungen zu Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten, die im Fall von allgemeinem n benötigt werden. \square

Definition 9.1.6. Seien $n \leq d$ natürliche Zahlen. Eine Teilmenge N einer d -Mannigfaltigkeit M heißt eine **n -dimensionale Untermannigfaltigkeit** genau dann, wenn es für jeden Punkt $y \in N$ eine offene Umgebung $U \Subset M$ gibt und einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ mit $U \cap N \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \times 0$. Ein derartige offene Menge U nennen wir eine **plättbare Ball-Umgebung** von $y \in N$. Die Differenz $d - n$ heißt die **Kodimension** der Untermannigfaltigkeit N in M .

Satz 9.1.7 (Fundamentalgruppe von Mannigfaltigkeitskomplement). Seien $M \supseteq N \supseteq A$ eine Mannigfaltigkeit mit einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit einer Kodimension ≥ 3 und einer abgeschlossenen Teilmenge derselben. So induziert für beliebiges $p \in M \setminus A$ die Einbettung einen Isomorphismus

$$\pi_1(M \setminus A, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(M, p)$$

Im Fall einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit $N \subsetneq M$ der Kodimension 2 ist diese Abbildung zumindest noch eine Surjektion $\pi_1(M \setminus A, p) \twoheadrightarrow \pi_1(M, p)$.

Ergänzung 9.1.8. Stützt man sich beim Beweis statt auf 5.2.28 auf die etwas allgemeinere aber mühsamer zu beweisende Aussage 5.7.12, so zeigt der hier gegebene Beweis die Behauptung des Satzes sogar für $A \subset N$ eine beliebige Teilmenge unserer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir unsere Mannigfaltigkeit M zusammenhängend annehmen. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Seien $A \subsetneq N$ eine abgeschlossene Teilmenge, $U \subset M$ eine plättbare Ball-Umgebung eines Punktes von N und $p \in U \setminus A$. Nach Seifert-van-Kampen 6.4.1 haben wir ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \setminus A, p) & \rightarrow & \pi_1(U, p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(M \setminus A, p) & \rightarrow & \pi_1((M \setminus A) \cup U, p) \end{array}$$

Da nach 5.2.28 die obere Horizontale ein Isomorphismus beziehungsweise im Fall der Kodimension 2 eine Surjektion ist, muß dasselbe nach 6.3.4 beziehungsweise 6.6.6 auch für die untere Horizontale gelten. Da unsere Räume wegzusammenhängend sind, gilt das dann auch für einen beliebigen Basispunkt p aus $M \setminus A$. Man beachte für das folgende auch, daß gilt $(M \setminus A) \cup U = M \setminus B$ für $B \subset N$ die Teilmenge $B = N \setminus U$. Jetzt zeigen wir die Surjektivität von $\pi_1(M \setminus A, p) \rightarrow \pi_1(M, p)$ im allgemeinen. Ist in der Tat $\gamma \in \Omega(M, p)$ ein Weg, so wird $\gamma[0, 1] \cap N$ überdeckt von endlich vielen plättbaren Ball-Umgebungen U_1, \dots, U_r . Nach unserer Vorüberlegung haben wir dann für $p \in M \setminus A$ eine Surjektion

$$\pi_1(M \setminus A, p) \twoheadrightarrow \pi_1((M \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_r, p)$$

Unser $[\gamma] \in \pi_1(M, p)$ liegt aber sicher im Bild der rechten Seite unter der von der Inklusion induzierten Abbildung der Fundamentalgruppen. Also liegt $[\gamma]$ auch im Bild von $\pi_1(M \setminus A, p)$. Ähnlich zeigen wir die Injektivität im Fall einer Kodimension ≥ 3 . Dann ist ja unsere Surjektion sogar ein Isomorphismus. Ist nun $\gamma \in \Omega(M \setminus A, p)$ nullhomotop in M , sagen wir vermittelt $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$, so läßt sich eine Homotopie mit dem konstanten Weg sicher in einem geeigneten $(M \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_r$ realisieren, mit plättbaren Ball-Umgebungen U_i von

Punkten von N , und dann ist γ nach unserem Isomorphismus sogar nullhomotop in $M \setminus A$. \square

Beweis des Satzes über Zopfgruppen 9.1.4. Wir halten nun n fest, schreiben kurz $X_n = X$, und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} k : X &\rightarrow \mathbb{N} \\ E &\mapsto n - |\operatorname{Re}(E)| \end{aligned}$$

für $|\operatorname{Re}(E)|$ die Kardinalität der Projektion von E auf die reelle Achse. In X betrachten wir die Teilmengen $Z_\nu = k^{-1}(\nu)$ sowie $Z_{\leq \nu} = k^{-1}(\{0, 1, \dots, \nu\})$. Zum Beispiel besteht Z_0 aus allen n -elementigen Teilmengen von \mathbb{C} derart, daß die Realteile ihrer Elemente paarweise verschieden sind, und Z_1 besteht aus allen n -elementigen Teilmengen, in denen es genau zwei Punkte gibt mit demselben Realteil. Offensichtlich ist Z_0 zusammenziehbar, alle $Z_{\leq \nu}$ sind offen, und Z_ν ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension ν in $Z_{\leq \nu}$. Proposition 9.1.7 liefert uns damit für einen beliebigen Basispunkt in Z_0 eine Surjektion und viele Isomorphismen

$$\pi_1(Z_{\leq 1}) \twoheadrightarrow \pi_1(Z_{\leq 2}) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} \pi_1(Z_{\leq n-1}) = \pi_1(X)$$

Wir untersuchen nun zunächst $\pi_1(Z_{\leq 1})$. Sicher zerfällt Z_1 in Zusammenhangskomponenten

$$Z_1 = Z_1^1 \sqcup Z_1^2 \sqcup \dots \sqcup Z_1^{n-1}$$

mit Z_1^i dem System aller n -elementigen Teilmengen $E \in Z_1$ derart, daß bei einer Aufzählung x_1, \dots, x_n von E mit wachsenden Realteilen gilt $\operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}(x_{i+1})$. Bezeichnen wir ganz allgemein mit $X_n^{[a,b]}$ den Raum aller n -elementigen Teilmengen von $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}$, so haben wir offensichtlich Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} X_2 &\leftarrow X_2^{[i,i+1]} \hookrightarrow Z_0 \cup Z_1^i \\ \{x, y\} &\mapsto \{1, \dots, i-1, x, y, i+2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Folglich ist $\pi_1(Z_0 \cup Z_1^i)$ frei erzeugt von s_i . Mit Induktion und dem Satz von Seifert-van-Kampen folgt, daß für jede Teilmenge $T \subset \{1, \dots, n-1\}$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(Z_0 \cup \bigcup_{i \in T} Z_1^i)$ frei erzeugt ist von den s_i mit $i \in T$. Insbesondere erzeugen die s_i schon mal unsere Zopfgruppe, und wir müssen uns nur noch um die Relationen kümmern. Sicher zerfällt auch Z_2 in Zusammenhangskomponenten

$$Z_2 = \bigsqcup_{1 \leq i < j < n} Z_2^{i,j}$$

mit $Z_2^{i,j}$ dem System aller n -elementigen Teilmengen $E \in Z_2$ derart, daß bei einer Aufzählung x_1, \dots, x_n von E mit wachsenden Realteilen gilt $\operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}(x_{i+1})$

und $\operatorname{Re}(x_j) = \operatorname{Re}(x_{j+1})$. Wir setzen $Z_{\leq 2}^{i,j} = Z_0 \cup Z_1^i \cup Z_1^j \cup Z_2^{i,j}$ und bemerken, daß diese Menge offen ist in X_n . Im Fall $i < j - 1$ haben wir eine Homotopieäquivalenz

$$\begin{aligned} X_2^{[i,i+1]} \times X_2^{[j,j+1]} &\hookrightarrow Z_{\leq 2}^{i,j} \\ (\{x, y\}, \{z, w\}) &\mapsto \{1, 2, \dots, i-1, x, y, \dots, j-1, z, w, \dots, n\} \end{aligned}$$

Sie zeigt, daß $\pi_1(Z_{\leq 2}^{i,j})$ erzeugt wird von s_i und s_j mit der einzigen Relation $s_i s_j = s_j s_i$. Im Fall $i = j - 1$ haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} X_3 &\hookleftarrow X_3^{[i,i+2]} \hookrightarrow Z_{\leq 2}^{i,i+1} \\ \{x, y, z\} &\mapsto \{1, \dots, i-1, x, y, z, i+3, \dots, n\} \end{aligned}$$

Mit dem bereits behandelten Fall $n = 3$ zeigen sie, daß $\pi_1(Z_{\leq 2}^{i,i+1})$ erzeugt wird von s_i und s_{i+1} mit der einzigen Relation $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$. Sei nun eine beliebige Teilmenge $R \subset \{(i, j) \mid 1 \leq i < j < n\}$ gegeben. Wir behaupten, daß $\pi_1(Z_{\leq 1} \cup \bigcup_{(i,j) \in R} Z_2^{i,j})$ erzeugt ist von s_1, \dots, s_{n-1} mit den Zopfrelationen für alle $(i, j) \in R$. In der Tat folgt das nun mit Seifert-van-Kampen 6.4.1 und vollständiger Induktion über $|R|$. Der Satz ergibt sich, wenn wir R maximal möglich wählen. \square

Ergänzung 9.1.9. Ähnlich überlegt man sich, wie die Fundamentalgruppe des Raums aller n -elementigen Teilmengen von \mathbb{C}^\times durch Erzeuger und Relationen dargestellt werden kann. Hier ist der Trick, zunächst die stetige Abbildung nach \mathbb{C}^\times zu betrachten, die durch Aufmultiplizieren unserer Punkte gegeben wird, und den Kern der von ihr auf der Fundamentalgruppe induzierten Abbildung. Die Fundamentalgruppe selber stellt man dann als semidirektes Produkt dieses Kerns mit \mathbb{Z} dar.

9.2 Überlagerungen topologischer Gruppen*

9.2.1 (Produkt universeller Überlagerungen). Jedes endliche Produkt lokal zusammenhängender überlagerungstrivialer Räume ist nach 9.3.2 auch selbst überlagerungstrivial. Gegeben $\tilde{X} \rightarrow X$ und $\tilde{Y} \rightarrow Y$ universelle Überlagerungen zusammenhängender lokal überlagerungstrivialer Räume X, Y ist mithin auch $\tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$ eine universelle Überlagerung. Besonders leicht sieht man das im Fall lokal wegetrivialer Räume, denn jedes endliche Produkt wegetrivialer Räume ist offensichtlich wieder wegetrivial.

Proposition 9.2.2. *Sei $p : \tilde{G} \rightarrow G$ die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden lokal überlagerungstrivialen Gruppe G . So gilt:*

1. Es gibt für jeden Punkt $\tilde{e} \in \tilde{G}$ über dem neutralen Element $e \in G$ genau einen Lift der Verknüpfung mit \tilde{e} als neutralem Element und diese Verknüpfung macht \tilde{G} zu einer topologischen Gruppe;
2. Für jede Gruppenstruktur auf \tilde{G} nach Teil 1 ist der Kern der Überlagerungsabbildung $K := \ker p$ ein diskreter kommutativer Normalteiler von \tilde{G} und wir erhalten einen Isomorphismus

$$K \xrightarrow{\sim} \text{Top}_G^\times \tilde{G}$$

zwischen K und der Deckbewegungsgruppe durch die Vorschrift $k \mapsto (k \cdot)$;

3. Für jede Gruppenstruktur auf \tilde{G} nach Teil 1 induziert die Überlagerungsabbildung einen Isomorphismus von topologischen Gruppen $\tilde{G}/K \xrightarrow{\sim} G$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort daraus, daß nach 9.2.1 auch die Abbildungen $\tilde{G}^{\times n} \rightarrow G^{\times n}$ universelle Überlagerungen sind. Für die zweite Aussage bemerken wir, daß für $k \in K$ sowohl $(k \cdot)$ als auch $(\cdot k)$ die eindeutig bestimmte Deckbewegung mit $\tilde{e} \mapsto k$ sein müssen, und damit folgt auch sie sofort. Die dritte Aussage folgt aus der Erkenntnis 7.5.10, daß bei jeder universellen Überlagerung die Basis der Quotient des Totalraums nach der Gruppe der Deckbewegungen ist. \square

Korollar 9.2.3 (Gruppenstruktur auf zusammenhängenden Überlagerungen). Gegeben eine zusammenhängende lokal überlagerungstriviale topologische Gruppe G besitzt jede zusammenhängende bepunktete Überlagerung $q : (\hat{G}, \hat{e}) \rightarrow (G, e)$ genau eine stetige Verknüpfung mit \hat{e} als neutralem Element, für die q ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beweis. Die Eindeutigkeit der Verknüpfung folgt aus unserem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts. Die Existenz folgt daraus, daß (G, e) ja nach 7.6.1 eine universelle Überlagerung $p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \rightarrow (G, e)$ besitzt, von der es dann eine Decktransformation $q : (\tilde{G}, \tilde{e}) \rightarrow (\hat{G}, \hat{e})$ geben muß. Nun hat \tilde{G} nach 9.2.2 genau eine Gruppenstruktur mit neutralem Element \tilde{e} , für die p ein Gruppenhomomorphismus ist, deren Kern K ist ein kommutativer Normalteiler und die Linksmultiplikationen mit Elementen von K sind genau die Deckbewegungen. Nach 8.4.4 gibt es also eine Untergruppe $H \subset K$ derart, daß q einen Homöomorphismus $\tilde{G}/H \xrightarrow{\sim} \hat{G}$ induziert. Das Korollar folgt. \square

Korollar 9.2.4 (Überlagerungen topologischer Gruppen, Klassifikation). Gegeben eine zusammenhängende lokal überlagerungstriviale topologische Gruppe (G, e) und $p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \rightarrow (G, e)$ ihre universelle Überlagerung und $K := \ker p$

deren Kern erhalten wir durch die Vorschrift $H \mapsto \tilde{G}/H$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Untergruppen von } K \text{ mit} \\ \text{Inklusionen als Morphismen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \text{Zusammenhängende topologische} \\ \text{Gruppenüberlagerungen von } G \end{array} \right\}^{\text{opp}}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden. \square

Korollar 9.2.5 (Überlagerungen lokal wegetrivialer Gruppen). Gegeben eine zusammenhängende lokal wegetriviale topologische Gruppe (G, e) erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zusammenhängende topologische} \\ \text{Gruppenüberlagerungen von } G \end{array} \right\}^{\text{opp}} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \text{Untergruppen von } \pi_1(G, e) \text{ mit} \\ \text{Inklusionen als Morphismen} \end{array} \right\}$$

durch die Vorschrift $(p : (\hat{G}, \hat{e}) \mapsto (G, e)) \mapsto \text{im}(p_{\#} : \pi_1(\hat{G}, \hat{e}) \mapsto \pi_1(G, e))$.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden zusammen mit der Identifikation von Fundamentalgruppe und Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerung im Fall zusammenhängender lokal wegetrivialer Räume. \square

Übungen

Ergänzende Übung 9.2.6. Jede topologische Gruppe, die homöomorph ist zur Kreislinie S^1 , ist bereits als topologische Gruppe isomorph zur multiplikativen Gruppe S^1 aller komplexen Zahlen vom Betrag Eins. Hinweis: 4.1.24.

9.3 Überlagerungen und Homotopie*

Satz 9.3.1 (Überlagerungen von Produkten). Seien X, Z topologisch Räume mit Z überlagerungstrivial und lokal zusammenhängend. So ist das Bilden des Produkts mit Z eine Äquivalenz von Kategorien

$$(\times Z) : \text{Üb}_X \xrightarrow{\approx} \text{Üb}_{X \times Z}$$

zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der Überlagerungen von $X \times Z$.

Beweis. Sei $p : \tilde{X}_Z \rightarrow X \times Z$ eine Überlagerung des Produkts. Für jedes $z \in Z$ setzen wir $\tilde{X}_z = p^{-1}(X \times \{z\})$ und erhalten so eine Überlagerung von $\tilde{X}_z \rightarrow X$. Ist Z überlagerungstrivial, so erklären wir für beliebige $z, w \in Z$ Abbildungen $f_{wz} : \tilde{X}_z \rightarrow \tilde{X}_w$ durch die Bedingung, daß \tilde{x} und $f_{wz}(\tilde{x})$ im Bild desselben Lifts von $Z \rightarrow X \times Z, z \mapsto (p(\tilde{x}), z)$ liegen sollen. Natürlich gilt $f_{vw} \circ f_{wz} = f_{vz}$

und $f_{zz} = \text{id}$ für alle $z, w, v \in Z$. Der Satz folgt nun, sobald wir zeigen, daß die Abbildung

$$f : \tilde{X}_z \times Z \rightarrow \tilde{X}_Z, \quad (\tilde{x}, w) \mapsto f_{wz}(\tilde{x})$$

ein Isomorphismus von Überlagerungen ist. Sie ist sicher bijektiv. Zeigen wir auch noch die Stetigkeit von f , so ist f eine bijektive Decktransformation, also ein Isomorphismus von Überlagerungen. Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}_Z$ finden wir eine trivial überlagerte Umgebung von $(x, w) := p(\tilde{x})$ der Form $U \times W$ mit W zusammenhängend. Die eingeschränkte Überlagerung notieren wir $p : \tilde{U}_W \rightarrow U \times W$ und setzen $\tilde{U}_w := p^{-1}(U \times \{w\})$ analog wie zuvor. Dann induziert offensichtlich die Abbildung $(\tilde{x}, v) \mapsto f_{vw}(\tilde{x})$ einen Homöomorphismus

$$\tilde{U}_w \times W \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_W$$

Für festes $z \in Z$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}_z$ betrachten wir nun in Z die Teilmengen Z_s, Z_u aller $w \in Y$ derart, daß $f_{wz} : \tilde{X}_z \rightarrow \tilde{X}_w$ bei \tilde{x} stetig beziehungsweise unstetig ist. Nach dem Vorhergehenden sind sowohl Z_s als auch Z_u offen. Also gilt $Z = Z_s$ und alle f_{wz} sind stetig. Daraus folgt aber unter nochmaliger Verwendung unserer Homöomorphismen von eben, daß f selbst stetig ist. \square

Korollar 9.3.2. *Sind X und Z überlagerungstrivial und ist Z zusätzlich lokal zusammenhängend, so ist auch $X \times Z$ überlagerungstrivial.*

Beweis. Nach dem Satz ist jede Überlagerung von $X \times Z$ das Produkt einer Überlagerung von X mit Z . \square

Korollar 9.3.3 (Liften von Homotopien). *Seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, Y ein topologischer Raum und $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ stetig. So läßt sich jeder Lift \tilde{H}_0 von $H_0 := H|_{Y \times \{0\}}$ auf genau eine Weise zu einem Lift \tilde{H} von H fortsetzen.*

9.3.4. Zum besseren Verständnis des Satzes stelle ich die Räume und Abbildungen, die darin vorkommen, nochmal in einem Diagramm dar.

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{H}_0} & \tilde{X} \\ & \searrow \tilde{H} & \downarrow \\ & & X \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Beweis mit 9.3.1. Die Eindeutigkeit von \tilde{H} ist klar nach dem Satz über Eindeutigkeit von Lifts: Man wende ihn an auf die zusammenhängenden Teilräume $\{y\} \times [0, 1]$. Wir zeigen die Existenz von \tilde{H} . Der pull-back der Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ mit H ist eine Überlagerung $Z \rightarrow Y \times [0, 1]$. Wenden wir auf diese Überlagerung

Satz 9.3.1 an, so finden wir eine Überlagerung $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ und einen Isomorphismus $\tilde{Y} \times [0, 1] \simeq Z$ von Überlagerungen von $Y \times [0, 1]$. Folglich gibt es eine Abbildung $f : \tilde{Y} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} \times [0, 1] & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ q \times \text{id} \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

kartesisch ist. Dann definiert \tilde{H}_0 ein Rechtsinverses $l : Y \rightarrow \tilde{Y}$ der Überlagerung q und wir erhalten \tilde{H} als $\tilde{H} = f \circ (l \times \text{id})$. \square

Beweis ohne 9.3.1. Die Eindeutigkeit von \tilde{H} ist klar nach dem Satz über Eindeutigkeit von Lifts: Man wende ihn an auf die zusammenhängenden Teilräume $\{y\} \times [0, 1]$. Wir zeigen die Existenz von \tilde{H} in mehreren Schritten.

1. Der Satz gilt, falls X trivial überlagert ist, also ohne der Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{X} = X \times F$ und $p = \text{pr}_1$. In der Tat ist in diesem Fall $\tilde{H}(y, t) = (H(y, t), \text{pr}_2 \circ \tilde{H}_0(y))$ ein Lift von H mit den gewünschten Eigenschaften.

2. Im allgemeinen reicht es zu zeigen, daß jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung W besitzt derart, daß $\tilde{H}_0|_{W \times \{0\}}$ sich zu einem Lift \tilde{H} von $H|_{W \times [0, 1]}$ fortsetzen läßt. Aufgrund der Eindeutigkeit müssen diese Lifts nämlich auf den Schnitten $(W \cap V) \times [0, 1]$ zusammenfallen, und wir definieren dann durch Verkleben den gesuchten Lift $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$.

3. Sei nun $y \in Y$ fest. Für jedes $t \in [0, 1]$ besitzt $H(y, t)$ eine trivial überlagerte Umgebung, mithin gibt es offene Umgebungen W_t von y und I_t von t derart, daß $H(W_t \times I_t)$ in einer trivial überlagerten offenen Menge liegt. Hier ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit I_t ein Intervall. Die I_t für endlich viele t bedecken $[0, 1]$. Sei $W = W_y$ der Schnitt der zugehörigen W_t . So ist W eine offene Umgebung von y , und es gibt $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ derart, daß $H(W \times [t_{i-1}, t_i])$ für alle i ganz in einer trivial überlagerten offenen Menge in X liegt. Setzen wir induktiv voraus, daß ein partieller Lift $\tilde{H} : W \times [0, t_i] \rightarrow \tilde{X}$ schon konstruiert ist, so liefert uns Schritt 1 ein $\tilde{H} : W \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$, das auf $W \times \{t_i\}$ mit dem vorigen partiellen Lift \tilde{H} übereinstimmt und H liftet, also verkleben diese beiden \tilde{H} zu einem Lift $\tilde{H} : W \times [0, t_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$ und wir sind fertig per Induktion. \square

Satz 9.3.5. *Gegeben Z Überlagerungstrivial lokal zusammenhängend und X ein beliebiger topologischer Raum ist das Bilden des Produkts mit Z eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\times Z) : \text{étTop}_X \xrightarrow{\sim} \{p \in \text{étTop}_{X \times Z} \mid (p^{-1}(x \times Z) \rightarrow Z) \in \text{Üb}_Z \ \forall x \in X\}$$

9.3.6. Daß sich unter dieser Äquivalenz die Überlagerungen auf beiden Seiten entsprechen, war die Aussage von 9.3.1. Der Beweis verallgemeinert den Beweis dort.

Beweis. Sei $p : \tilde{X}_Z \rightarrow X \times Z$ eine étale Abbildung, deren Restriktion auf $x \times Z$ für alle $x \in X$ eine Überlagerung ist. Für $z \in Z$ setzen wir $\tilde{X}_z := p^{-1}(X \times \{z\})$ und erhalten so für jedes $z \in Z$ eine étale Abbildung nach X . Ist Z überlagerungstrivial, so können wir für beliebige $z, w \in Z$ Abbildungen $f_{wz} : \tilde{X}_z \rightarrow \tilde{X}_w$ erklären durch die Bedingung, daß \tilde{x} und $f_{wz}(\tilde{x})$ im Bild desselben Lifts von $Z \rightarrow X \times Z, z \mapsto (p(\tilde{x}), z)$ liegen sollen. Natürlich gilt $f_{vw} \circ f_{wz} = f_{vz}$ und $f_{zz} = \text{id}$ für alle $z, w, v \in Z$. Es reicht nun zu zeigen, daß für jedes $z \in Z$ die offensichtliche Abbildung

$$f : \tilde{X}_z \times Z \rightarrow \tilde{X}_Z, \quad (\tilde{x}, w) \mapsto f_{wz}(\tilde{x})$$

ein Homöomorphismus ist. Diese Abbildung ist sicher bijektiv. Können wir zeigen, daß sie stetig ist, so muß sie aufgrund der Eigenschaften étaler Abbildungen 7.1.14 offen und damit ein Homöomorphismus sein. Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}_Z$ finden wir eine Umgebung Q_w , die homöomorph auf eine Umgebung von $p(\tilde{x}) := (x, w)$ der Form $U \times W$ abgebildet wird mit W zusammenhängend. Wir setzen $Q_w := Q \cap (p^{-1}(U \times w))$. Dann induziert offensichtlich die Abbildung $(\tilde{x}, v) \mapsto f_{vw}(\tilde{x})$ einen Homöomorphismus

$$Q_w \times W \xrightarrow{\sim} Q_w$$

Für festes $z \in Z$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}_z$ betrachten wir nun in Z die Teilmengen Z_s, Z_u aller $w \in Z$ derart, daß f_{wz} bei \tilde{x} stetig beziehungsweise unstetig ist. Nach dem Vorhergehenden sind sowohl Z_s als auch Z_u offen. Also gilt $Z = Z_s$ und alle f_{wz} sind stetig. Daraus folgt aber unter nochmaliger Verwendung unserer Homöomorphismen von eben, daß f selbst stetig ist. \square

Übungen

Übung 9.3.7. Sind zwei Räume homotopieäquivalent, so ist der eine überlagerungstrivial genau dann, wenn der andere überlagerungstrivial ist. Ist allgemeiner $X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so liefert der pull-back eine Äquivalenz von Kategorien $\text{Üb}_Y \xrightarrow{\sim} \text{Üb}_X$.

10 Kategorien und Funktoren*

Viele Konstruktionen der linearen und insbesondere der multilinearen Algebra, wie etwa Dualräume, Tensorpotenzen oder äußere Potenzen, zeigen erst in der Sprache der Kategorientheorie ihre wahre Natur. Es geht bei diesen Konstruktionen nämlich keineswegs darum, irgendwelche neuen Vektorräume zu konstruieren: Wir wissen ja bereits aus ??, daß wir hier zumindest im Fall endlicher Dimension nichts wesentlich Neues finden können. Vielmehr geht es darum, zusammen mit diesen neuen Vektorräumen auch neue lineare Abbildungen zu konstruieren, wie etwa bei Dualräumen die transponierten Abbildungen. Erst zusammen mit diesen zusätzlichen Konstruktionen erhält man nützliche und anwendbare Begriffsbildungen.

Die Sprache der Kategorien und Funktoren liefert für derartige Konstruktionen einen begrifflichen Rahmen. Sie ist ähnlich ausdrucksstark, grundlegend und elegant wie die Sprache der Mengenlehre, auf der sie aufbaut, und gehört meines Erachtens in den Rucksack jeder Mathematikerin und jedes Mathematikers. Ich bin sogar der Ansicht, daß die „naive Mengenlehre“ aus den Grundvorlesungen am besten durch eine axiomatische Beschreibung der „Kategorie aller Mengen“ wie etwa in [LR03] formalisiert wird. So formal will ich bei der hier gegebenen Darstellung jedoch nicht werden und arbeite deshalb weiter auf der Grundlage der naiven Mengenlehre. Eine ausführlichere Behandlung der Kategorientheorie findet man zum Beispiel in [Mac98].

10.1 Kategorien

Definition 10.1.1. Eine **Kategorie** \mathcal{C} ist ein Datum bestehend aus

- a. einer Menge $\text{Ob } \mathcal{C}$ von **Objekten**;
- b. einer Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ von **Morphismen** für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$;
- c. einer Abbildung $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$, $(f, g) \mapsto g \circ f$ für je drei Objekte $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, genannt die **Verknüpfung** von Morphismen,

derart, daß folgende Axiome erfüllt sind:

1. Die Verknüpfung ist **assoziativ**, es gilt also $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für Morphismen f, g und h , wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind;
2. Für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$, die **Identität auf** X , so daß gilt $\text{id}_X \circ f = f$ und $g \circ \text{id}_X = g$ für Morphismen f und g wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind. Die üblichen Argumente zeigen, daß es für jedes X höchstens einen derartigen Morphismus

geben kann, womit auch die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt wäre.

10.1.2. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ Objekte. Statt $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ sagen wir auch, f sei ein **Morphismus von X nach Y** und schreiben kurz

$$f : X \rightarrow Y$$

Statt id_X schreiben wir oft nur id . Statt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ schreiben wir oft kürzer $X \in \mathcal{C}$.

10.1.3. Wir fordern nicht, daß die Morphismenmengen $\mathcal{C}(X, Y)$ einer Kategorie \mathcal{C} paarweise disjunkt sein sollen. Wir erklären dahingegen die Menge aller Morphismen von \mathcal{C} als die disjunkte Vereinigung

$$\text{Mor}(\mathcal{C}) := \bigsqcup_{X, Y \in \mathcal{C}} \mathcal{C}(X, Y)$$

Beispiel 10.1.4 (Kategorie der Mengen). Als erstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie $\mathcal{C} := \text{Ens}$ aller Mengen eingeführt. Das ist jedoch nicht möglich, da die „Gesamtheit aller Mengen“, wie in ?? ausgeführt wird, nicht als Menge angesehen werden darf. Um diese Untiefen der Logik zu umschiffen, betrachten wir feiner ein Mengensystem \mathfrak{U} alias eine Menge \mathfrak{U} von Mengen und erklären die Kategorie $\mathfrak{U}\text{Ens}$ aller Mengen $X \in \mathfrak{U}$. Ihre Objekte sind beliebige Mengen $X \in \mathfrak{U}$, in Formeln

$$\text{Ob}(\mathfrak{U}\text{Ens}) := \mathfrak{U}$$

Für je zwei Objekte alias je zwei Mengen $X, Y \in \mathfrak{U}$ erklären wir die Morphismenmenge als die Menge aller Abbildungen von X nach Y , in Formeln

$$\mathfrak{U}\text{Ens}(X, Y) := \text{Ens}(X, Y)$$

Die Verknüpfung ordnet jedem Paar (f, g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu. Daß diese Daten unsere Axiome erfüllen, scheint mir offensichtlich. Unser $\text{id}_X \in \mathfrak{U}\text{Ens}(X, X)$ ist die identische Abbildung $\text{id}_X(x) = x \forall x \in X$.

Vorschau 10.1.5 (Mengen, Klassen, Universen). In vielen Quellen umschifft man die in 10.1.4 angesprochenen Untiefen der Logik, indem man nicht fordert, daß die Objekte einer Kategorie eine Menge bilden, sondern stattdessen, daß sie eine „Klasse“ bilden sollen. Das hat den Vorteil, daß man die Kategorie aller Mengen bilden kann. Es hat den Nachteil, daß man den Begriff einer Klasse einführen muß und erklären muß, wie man damit umgeht. Statt mit „Klassen“ werden wir zu gegebener Zeit mit „Universen“ arbeiten, die in 10.11.3 eingeführt werden. Für unsere Bedürfnisse läuft das auf dasselbe hinaus und erspart uns die Vertreibung aus dem Paradies der Mengenlehre. Ich werde aber oft kategorientheoretische Sprache auch in einem weiteren Sinn als „Metasprache“ verwenden und dabei derartige Feinheiten kurzerhand ignorieren.

Kategorie	Morphismen	Kürzel
{Mengen}	alle Abbildungen	Ens
{teilgeordnete Mengen}	monoton wachsende	Ord
	Abbildungen	
{Monoide}	Morphismen von Monoiden	Mon
{Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Grp
{abelsche Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Ab
{topologische Räume}	stetige Abbildungen	Top
{bepunktete Mengen}	Abbildungen,	Ens*
	die den Basispunkt erhalten	
{bepunktete Räume}	stetige Abbildungen,	Top*
	die den Basispunkt erhalten	
{ K -Vektorräume}	K -lineare Abbildungen	K -Mod, Mod_K
{Affine Räume über K }	affine Abbildungen	K -Aff, Aff_K
{nicht unitäre Ringe}	Rng-Homomorphismen	Rng
{Ringe}	Ringhomomorphismen	Ring
{kommutative Ringe}	Ringhomomorphismen	Kring
{ K -Algebren}	K -Algebren-Homomorphismen	K -Alg, Alg_K
{ K -Ringalgebren}	K -Ringalgebren-Homomorphismen	K -Ralg, Ralg_K
{ K -Kringalgebren}	K -Kringalgebren-Homomorphismen	K -Kralg, Kralg_K

Hier einige Beispiele von Kategorien. Als Verknüpfung von Morphismen ist für die Kategorien dieser Liste stets die Komposition von Abbildungen gemeint. Um logische Abstürze zu vermeiden, müssen wir uns genauer stets ein Mengensystem \mathfrak{U} dazudenken, aus dem die zugrundeliegende Menge der jeweiligen Struktur kommen muß und das wir in der Notation meist unterschlagen. Wenn wir es doch notieren wollen, schreiben wir

$$\mathfrak{U}\text{Mod}_K$$

und dergleichen. Wir denken uns das Mengensystem \mathfrak{U} meist als ziemlich riesig und fordern zumindest implizit für gewöhnlich, daß es unter dem Bilden von Teilmengen stabil sein möge und die reellen Zahlen enthält. Etwas genauer werden wir zu gegebener Zeit oft fordern, daß es ein „Universum“ sein soll.

Beispiel 10.1.6. Zu jedem Monoid M können wir die Kategorie $[M]$ mit einem einzigen Objekt $*$ bilden, deren Morphismen die Elemente von besagtem Monoid sind mit der Verknüpfung in unserem Monoid als Verknüpfung von Morphismen. Wir nennen sie die **Ein-Objekt-Kategorie** unseres Monoids. Umgekehrt ist für jedes Objekt X einer Kategorie \mathcal{C} die Menge $\mathcal{C}(X, X)$ mit der von der Kategorienstruktur herkommenden Verknüpfung ein Monoid. In diesem Sinne ist also eine Kategorie mit einem einzigen Objekt nichts anderes als ein Monoid. Das Monoid der Morphismen von einem Objekt X zu sich selber in einer Kategorie \mathcal{C} nennen wir das Monoid der **Endomorphismen** von X und kürzen es in Zukunft oft ab mit

$$\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, X)$$

Beispiel 10.1.7. Sei K ein Körper oder allgemeiner ein Ring. Wir erklären die **Matrixkategorie** $\text{Mat} = \text{Mat}_K = \text{Mat}(K)$ über K durch die Vorschriften

$$\text{Ob}(\text{Mat}_K) := \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \text{Mat}_K(m, n) := \text{Mat}(n \times m; K)$$

mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung von Morphismen. Die Axiome sind erfüllt aufgrund unserer Rechenregeln ?? für die Matrixmultiplikation.

Beispiel 10.1.8 (Teilgeordnete Menge als Kategorie). Jede teilgeordnete Menge (A, \leq) kann als Kategorie aufgefaßt werden wie folgt: Objekte sind die Elemente von A ; Morphismen gibt es jeweils einen von einem Element zu jedem kleineren und zu sich selber; und die Verknüpfung von Morphismen ist die einzig Mögliche.

Beispiel 10.1.9 (Kategorie der Vektorräume). Als nächstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie $\mathcal{C} = \text{Mod}_K$ aller Vektorräume über einem Körper K eingeführt. Die Notation Mod_K für Vektorräume über K steht dabei für ihre alternative Bezeichnung als **K -Moduln**. Wieder gerät man dabei in Untiefen der Logik. Um diese zu umschiffen betrachten wir wieder ein Mengensystem \mathfrak{U} und erklären dazu eine Kategorie

$$\mathfrak{U}\text{Mod}_K$$

Als Objekte dieser Kategorie nehmen wir alle K -Vektorräume, deren Grundmenge zu unserem Mengensystem \mathfrak{U} gehört. Für je zwei Vektorräume $V, W \in \mathfrak{U}\text{Mod}_K$ erklären wir die Morphismenmenge als die Menge aller linearen Abbildungen, in Formeln

$$\mathfrak{U}\text{Mod}_K(V, W) := \text{Hom}_K(V, W)$$

Die Verknüpfung ordnet wieder jedem Paar (f, g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu. Die Axiome sind offensichtlich erfüllt.

10.1.10 (**Verwendung des Symbols Hom**). Das Symbol „Hom“ für Mengen von Morphismen versuche ich nach Möglichkeit zu vermeiden: Ich will es reservieren

für die sogenannten „internen Hom-Räume“. Darunter versteht man Vorschriften, die in sehr speziellen Situationen zwei Objekten einer Kategorie ein Drittes zuordnen, im Fall der Vektorräume etwa die Morphismenmenge mit ihrer natürlichen Vektorraumstruktur. Wenn die Morphismenmenge als Menge gemeint ist, sollte ich $\text{Mod}_K(V, W)$ schreiben, aber das halte ich im Fall der Vektorräume nicht durch. Das Kürzel „Mod“ mit etwelchen oberen und unteren Indizes wird stets für Kategorien von abelschen Gruppen mit Zusatzstrukturen stehen, meist Operationen von Ringen oder Gruppen. Gehen diese Zusatzstrukturen aus dem Kontext hervor, so lasse ich die entsprechenden Indizes auch manchmal weg. Für abelsche Gruppen ohne Zusatzstrukturen benutze ich stets das Kürzel „Ab“.

Definition 10.1.11. 1. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie heißt ein **Isomorphismus** oder **Iso** und als Adjektiv **iso**, wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$. Wir notieren Isomorphismen oft $f : X \xrightarrow{\sim} Y$;

2. Zwei Objekte X und Y einer Kategorie heißen **isomorph**, wenn es einen Iso $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt. Man schreibt dann auch kurz $X \cong Y$.

Beispiele 10.1.12. Isomorphismen in der Kategorie der Mengen nennt man Bijektionen, Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume Homöomorphismen, Isomorphismen in der Kategorie der Vektorräume Vektorraumisomorphismen.

10.1.13. Eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind, heißt ein **Gruppoid**. Eine Kategorie, in denen es außer den Identitäten keine Morphismen gibt, heißt **diskret**. Natürlich ist jede diskrete Kategorie ein Gruppoid.

10.1.14 (**Diskussion des Begriffs eines Isomorphismus**). Bisher hatten wir verschiedentlich Isomorphismen abweichend erklärt als bijektive Homomorphismen, zum Beispiel bei Gruppen, Körpern, Vektorräumen und affinen Räumen. In allen diesen Fällen sollte es jedoch klar sein, daß die Umkehrabbildung im Sinne der Mengenlehre auch selbst wieder ein Homomorphismus ist, so daß wir in der Tat auch Isomorphismen im Sinne der Kategorientheorie vor uns haben. Ein typisches Beispiel für eine Kategorie von „Mengen mit Zusatzstrukturen“, in der bijektive Homomorphismen keine Isomorphismen zu sein brauchen, ist die Kategorie der teilgeordneten Mengen.

10.1.15. Viele mathematische Fragestellungen lassen sich in der Sprache der Kategorientheorie dahingehend formulieren, daß man einen Überblick über alle Objekte einer Kategorie gewinnen will, wobei man zwischen isomorphen Objekten nicht unterscheidet. Formal will man also für eine gegebene Kategorie \mathcal{C} die Menge aller Äquivalenzklassen von Objekten

$$\mathcal{C}/\cong$$

unter der Äquivalenzrelation der Isomorphie beschreiben. Man spricht dann auch von **Isomorphieklassen** von Objekten und nennt Fragestellungen dieser Art **Klassifikationsprobleme**. Zum Beispiel werden die endlich erzeugten Vektorräume über einem fest vorgegebenen Körper klassifiziert durch ihre Dimension, die endlich erzeugten abelschen Gruppen durch die Sätze ?? und ??, die endlichen Mengen durch ihre Kardinalität ??, und beliebige Mengen, vorsichtshalber aus einem fest vorgegebenen Mengensystem, ebenfalls durch ihre Kardinalität ??.

10.1.16. Unter einer **Unterkategorie** einer Kategorie versteht man ein Paar bestehend aus einer Teilmenge der Objektmenge nebst Teilmengen der Morphismenmengen für je zwei Objekte unserer Teilmenge der Objektmenge derart, daß die offensichtlichen Bedingungen erfüllt sind. Eine Unterkategorie heißt **voll**, wenn die fraglichen Teilmengen der Morphismenmengen jeweils aus allen Morphismen in der ursprünglichen Kategorie bestehen.

10.1.17. Zu jeder Kategorie \mathcal{C} erklären wir eine Unterkategorie, die **Isomorphismenkategorie** \mathcal{C}^\times von \mathcal{C} , durch die Vorschrift, daß sie dieselben Objekte haben soll, aber nur die Isomorphismen von \mathcal{C} als Morphismen. Die Menge aller Isomorphismen von einem Objekt X einer Kategorie \mathcal{C} in ein Objekt Y derselben Kategorie notieren wir folgerichtig $\mathcal{C}^\times(X, Y)$. Die Isomorphismen von einem Objekt X einer Kategorie \mathcal{C} auf sich selber heißen die **Automorphismen** von X . Sie bilden stets eine Gruppe, die **Automorphismengruppe** $\mathcal{C}^\times(X)$ von X . Für die Automorphismengruppe $\text{Mod}_k^\times(V)$ eines k -Vektorraums V hatten wir die Notation $\text{GL}(V)$ vereinbart, für die Automorphismengruppe $\text{Ens}^\times(X)$ einer Menge X die Bezeichnung als „Gruppe der Permutationen von X “.

Definition 10.1.18. Ein Objekt F einer Kategorie \mathcal{C} heißt **final**, wenn es für alle $X \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus von X nach F gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(X, F)| = 1 \quad \forall X \in \mathcal{C}$$

Definition 10.1.19. Ein Objekt K einer Kategorie \mathcal{C} heißt **initial** oder gleichbedeutend **kofinal**, wenn es für alle $Y \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus von K nach Y gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(K, Y)| = 1 \quad \forall Y \in \mathcal{C}$$

Beispiele 10.1.20 (**Finale und initiale Objekte in Kategorien von Mengen**). Ist \mathcal{U} ein Mengensystem, das nicht nur aus der leeren Menge besteht, so sind die finalen Objekte von $\mathcal{U}\text{Ens}$ genau die einpunktigen Mengen aus \mathcal{U} . Ist \mathcal{U} ein Mengensystem, das nicht nur aus einelementigen Mengen besteht, so ist die leere Menge ist das einzige kofinale Objekt von $\mathcal{U}\text{Ens}$, wenn sie denn zu unserem Mengensystem \mathcal{U} dazugehört.

10.1.21 (**Weitere Notationen**). Zwischen je zwei finalen beziehungsweise kofinalen Objekten gibt es offensichtlich genau einen Isomorphismus. Wir erlauben uns deshalb, etwas lax von *dem* finalen beziehungsweise *dem* kofinalen Objekt zu reden, und bezeichnen „das“ finale Objekt mit $\text{pt} = \text{pt}(\mathcal{C})$ für „Punkt“ oder $\text{fin}(\mathcal{C})$ und Morphismen dahin mit fin für „final“. Meist verwenden wir als Bezeichnung des finalen Objekts die kleingeschriebene Bezeichnung der Kategorie, etwa top für den einelementigen topologischen Raum oder ens für die einelementige Menge. Morphismen vom finalen Objekt zu einem beliebigen Objekt notieren wir gerne em wie „embedding“ mit einem Index, der angibt, welcher Morphismus genau gemeint ist. Gegeben eine Menge X und ein Element $x \in X$ meint etwa $\text{em}_x : \text{ens} \rightarrow X$ die Einbettung der einelementigen Menge mit Bild x . Wir bezeichnen mit $\text{ini} = \text{ini}(\mathcal{C})$ das initiale Objekt einer Kategorie \mathcal{C} , wenn es denn ein solches gibt.

Übungen

Übung 10.1.22. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er ein **Rechtsinverses** und ein **Linksinverses** besitzt, wenn es also Morphismen $g, h \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $h \circ f = \text{id}_X$, und unter diesen Voraussetzungen gilt bereits $g = h$. Wir nennen diesen Morphismus dann den **inversen Morphismus zu f** und notieren ihn f^{-1} . Derartige Rechtsinverse bezeichnet man auch oft als **Schnitt** oder **Spaltung**. Allgemeiner nennt man jeden Morphismus **rechtsspaltend**, der ein Linksinverses besitzt, und jeden Morphismus **linksspaltend**, der ein Rechtsinverses besitzt

Übung 10.1.23. Kann ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie sowohl durch Vorschalten eines Morphismus $g \in \mathcal{C}(W, X)$ als auch durch Nachschalten eines Morphismus $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$ zu einem Isomorphismus gemacht werden, so muß er bereits selbst ein Isomorphismus gewesen sein.

Übung 10.1.24. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus. Man zeige, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Vorschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Z)$ induziert. Man zeige dual, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Nachschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Z, Y)$ induziert. Allgemeiner Aussagen in dieser Richtung macht das sogenannte Yoneda-Lemma 10.10.2.

Übung 10.1.25. Man finde finale und kofinale Objekte in den Kategorien der Gruppen, Ringe, topologischen Räume und Vektorräume aus einem vorgegebenen Mengensystem \mathcal{U} .

10.2 Funktoren

Definition 10.2.1. Ein **Funktor** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ von einer Kategorie \mathcal{A} in eine Kategorie \mathcal{B} ist ein Datum bestehend aus

- einer Abbildung $F = F_{\text{Ob}} : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}, X \mapsto FX$;
- einer Abbildung $F = F_{X,Y} : \mathcal{A}(X,Y) \rightarrow \mathcal{B}(FX,FY), f \mapsto Ff$ für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$,

derart, daß gilt:

- $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$ für beliebige verknüpfbare Morphismen f und g aus der Kategorie \mathcal{A} ;
- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$ für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$.

Ich nenne in diesem Zusammenhang \mathcal{A} die **Ausgangskategorie** und \mathcal{B} die **Zielkategorie** des Funktors F .

Beispiel 10.2.2. Gegeben ein Körper K erhalten wir einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_K & \rightarrow & \text{Mod}_K \\ n & \mapsto & K^n \\ A \downarrow & \mapsto & (A \circ) \downarrow \\ m & \mapsto & K^m \end{array}$$

von der Matrixkategorie 10.1.7 über K in die Kategorie der K -Vektorräume, indem wir wie angedeutet jedem Objekt n der Matrixkategorie den Vektorraum K^n zuordnen und jeder Matrix die durch diese Matrix gegebene lineare Abbildung. Wir nennen ihn den **Realisierungsfunktor**.

Beispiel 10.2.3 (Der Richtungsraum als Funktor). Wir erklären die Kategorie $\text{Aff} = \text{Aff}_K$ der affinen Räume über einem gegebenen Körper K . Als Objekte nehmen wir unsere affinen Räume, als Morphismen affine Abbildungen. Das Bilden des Richtungsraums $\text{Richt} : E \mapsto \vec{E}$ ist dann zusammen mit der Zuordnung, die jeder affinen Abbildung $\varphi : E \rightarrow F$ ihren linearen Anteil $\vec{\varphi} : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ zuordnet, ein Funktor

$$\text{Richt} : \text{Aff}_K \rightarrow \text{Mod}_K$$

Beispiel 10.2.4 (Die Längengerade als Funktor). Wir erklären die Kategorie Euk der euklidischen Vektorräume. Objekte sind wie in ?? reelle Vektorräume mit einer $\mathbb{R}_{>0}$ -Bahn von Skalarprodukten, Morphismen die euklidischen Abbildungen nach ?. Unsere Konstruktion ?? der Längengerade eines euklidischen Raums und der zwischen Längengeraden induzierten Abbildungen ist dann ein Funktor

$$\mathbb{L} : \text{Euk} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}$$

10.2.5. Man gibt bei einem Funktor F meist nur die Abbildung $X \mapsto FX$ auf den Objekten an in der Hoffnung, daß vom Leser erraten werden kann, welche Abbildung $f \mapsto Ff$ auf den Morphismen gemeint ist.

10.2.6. Für jede Kategorie \mathcal{C} haben wir den **Identitätsfunktor** $\text{Id} = \text{Id}_{\mathcal{C}}$ von besagter Kategorie zu sich selber. Sind $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren, so ist auch $G \circ F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor.

Lemma 10.2.7 (Funktoren erhalten Isomorphie). *Ein Funktor bildet stets Isomorphismen auf Isomorphismen ab. Insbesondere haben isomorphe Objekte unter einem Funktor stets isomorphe Bilder.*

Beweis. Sei F unser Funktor. Mithilfe unserer Bedingung $F(\text{id}) = \text{id}$ schließen wir:

$$\begin{aligned} f \text{ ist Isomorphismus} &\Rightarrow \text{Es gibt } g \text{ mit } f \circ g = \text{id} \text{ und } g \circ f = \text{id} \\ &\Rightarrow (Ff) \circ (Fg) = \text{id} \text{ und } (Fg) \circ (Ff) = \text{id} \\ &\Rightarrow Ff \text{ ist Isomorphismus.} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 10.2.8. Für jede Kategorie \mathcal{C} bildet man die **opponierte Kategorie** \mathcal{C}^{opp} . Man setzt dazu

$$\text{Ob } \mathcal{C}^{\text{opp}} := \text{Ob } \mathcal{C} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}^{\text{opp}}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$$

und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in \mathcal{C}^{opp} als die vertauschte Verknüpfung. Wir notieren einen Morphismus f als f° , wenn er in der opponierten Kategorie aufgefaßt werden soll, und haben also in Formeln $g^\circ \circ f^\circ := (f \circ g)^\circ$.

Beispiel 10.2.9 (Bilden des Dualraums als Funktor). Sei K ein Körper. Das Bilden des Dualraums mit dem Bilden der transponierten Abbildung auf dem Niveau der Homomorphismen ist auf den ersten Blick ein Funktor

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_K & \rightarrow & \text{Mod}_K^{\text{opp}} \\ V & \mapsto & V^\top \\ f \downarrow & \mapsto & \uparrow f^\top \\ W & \mapsto & W^\top \end{array}$$

von der Kategorie der K -Vektorräume in ihre eigene opponierte Kategorie, vergleiche ???. Wenn wir es allerdings genau nehmen und ein Mengensystem \mathfrak{U} festhalten, so werden wir auf diese Weise im allgemeinen nur einen Funktor

$$\mathfrak{U}\text{Mod}_K \rightarrow \mathfrak{U}\text{Mod}_K^{\text{opp}}$$

für ein eventuell größeres Mengensystem \mathfrak{U} erhalten. Als konkretes Beispiel beachte man, daß über einem endlichen Körper der Dualraum eines abzählbaren Vektorraums im allgemeinen nicht mehr abzählbar ist. Ist jedoch unser Mengensystem \mathfrak{U} ein „Universum“ im Sinne von 10.11.3 und gehört die Grundmenge unseres Körpers K zu \mathfrak{U} , so ist $\mathfrak{U}\text{Mod}_K$ sogar stabil unter dem Dualraumfunktor.

Definition 10.2.10. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{opp}}$ heißt auch ein **kontravarianter Funktor von \mathcal{A} nach \mathcal{B}** .

10.2.11. Ausgeschrieben besteht ein kontravarianter Funktor von \mathcal{A} nach \mathcal{B} demnach aus einer Abbildung $F : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}$ sowie für je zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{A}$ einer Abbildung $F : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(FY, FX)$ derart, daß gilt $F(\text{id}) = \text{id}$ und $F(f \circ g) = Fg \circ Ff$ für alle verknüpfbaren Morphismen f, g .

Beispiel 10.2.12. Gegeben Kategorien \mathcal{A}, \mathcal{B} bildet man ihr **Produkt**, eine weitere Kategorie $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, wie folgt: Man setzt $\text{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) := \text{Ob } \mathcal{A} \times \text{Ob } \mathcal{B}$, erklärt Morphismen in der Produktkategorie als Paare von Morphismen in den Ausgangskategorien, und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in der Produktkategorie in der offensichtlichen Weise.

Beispiel 10.2.13. Das Bilden des Homomorphismenraums ist ein Funktor

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_K^{\text{opp}} \times \text{Mod}_K & \rightarrow & \text{Mod}_K \\ (V, W) & \mapsto & \text{Hom}_K(V, W) \ni h \\ (f^\circ, g) \downarrow & \mapsto & \downarrow \quad \downarrow \\ (V', W') & \mapsto & \text{Hom}_K(V', W') \ni g \circ h \circ f \end{array}$$

Hier sollte der ganz rechte vertikale Pfeil eigentlich ein \mapsto sein, was ich aber mit meinem Schreibprogramm nicht hingekriegt habe. Die Notation $\text{Hom}_K(V, K)$ betont, daß wir besagte Menge von Morphismen mit ihrer Vektorraumstruktur betrachten wollen.

Ergänzendes Beispiel 10.2.14. Das Bilden des Tensorprodukts ist ein Funktor

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_K \times \text{Mod}_K & \rightarrow & \text{Mod}_K \\ (V, W) & \mapsto & V \otimes W \\ (f, g) \downarrow & \mapsto & f \otimes g \downarrow \\ (V', W') & \mapsto & V' \otimes W' \end{array}$$

Ergänzendes Beispiel 10.2.15. Das Bilden der r -ten Tensorpotenz nach ?? ist ein Funktor $\text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K, V \mapsto V^{\otimes r}, f \mapsto f^{\otimes r}$. Das Bilden der r -ten äußeren Potenz nach ?? ist ein Funktor $\text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K, V \mapsto \bigwedge^r V$ mit $f \mapsto \bigwedge^r f$ nach ??.

Beispiel 10.2.16. Das „Vergessen der Gruppenstruktur“ ist ein Funktor $v : \text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Mengen. Es gibt noch viele weitere derartige **Vergiß-Funktoren**.

Beispiel 10.2.17. Jeder Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ liefert in offensichtlicher Weise einen Funktor $F^{\text{opp}} : \mathcal{A}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{opp}}$ zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien. Oft notiert man ihn auch einfach F .

Beispiel 10.2.18. Gegeben ein Körper K bezeichne Modf_K mit f für „finitely generated“ die Kategorie der endlich erzeugten K -Vektorräume und Modf_K^\times die zugehörige Isomorphismenkategorie. Gegeben ein angeordneter Körper K ist das Bilden der Orientierungsmenge nach ?? ein Funktor

$$\text{or} : \text{Modf}_K^\times \rightarrow \text{Ens}^\times$$

Definition 10.2.19. 1. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **treu**, wenn er Injektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ auf den Morphismen induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$.

2. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **voll**, wenn er auf den Morphismenmengen Surjektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \twoheadrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$.

3. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **volltreu**, wenn er voll und treu ist, wenn er also er Bijektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FA, FA')$ auf den Morphismenmengen induziert. Ich notiere volltreue Funktoren gerne \hookrightarrow .

4. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **essentiell surjektiv**, wenn er eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert, wenn es also in Formeln für alle $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $FA \cong B$.

5. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn er volltreu und essentiell surjektiv ist. Ich notiere Äquivalenzen von Kategorien $\xrightarrow{\sim}$. Die doppelte Schlange soll andeuten, daß dieser Begriff schwächer ist als der Begriff eines Isomorphismus von Kategorien, wie er im Anschluß eingeführt wird.

6. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt ein **Isomorphismus von Kategorien**, wenn er bijektiv ist auf Objekten und auf Morphismen, wenn er also ein Isomorphismus ist in der Kategorie der Kategorien aus ???. Ich notiere Isomorphismen von Kategorien $\xrightarrow{\cong}$.

Beispiel 10.2.20. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien $[\mathcal{C}(X)] \xrightarrow{\cong} \{X\}$ zwischen der Ein-Objekt-Kategorie des Monoids der Endomorphismen von X und der vollen Unterkategorie von \mathcal{C} mit dem einzigen Objekt X , indem wir die Identität auf den Morphismenmengen und die einzig mögliche Abbildung auf den Objektmengen nehmen.

Beispiel 10.2.21. Sei K ein Körper. Wir betrachten die Kategorie Modf_K aller endlichdimensionalen K -Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Dann ist unser Realisierungsfunktor $n \mapsto K^n$ aus 10.2.2 eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Mat}_K \xrightarrow{\cong} \text{Modf}_K$$

zwischen unserer Matrixkategorie Mat_K und der Kategorie der endlich erzeugten K -Vektorräume, aber unser Funktor ist natürlich kein Isomorphismus von Kategorien. Diese Aussage faßt eine Vielzahl von Aussagen der linearen Algebra zusammen und illustriert meines Erachtens recht gut die Kraft und Eleganz der Sprache der Kategorientheorie.

Ergänzendes Beispiel 10.2.22 (Die Matrixkategorie eines Mengensystems). Gegeben ein Körper K und ein Mengensystem \mathfrak{U} bilden wir die **abstrakte Matrixkategorie** $\mathfrak{U}\text{Mat}_K$ wie folgt: Objekte sind alle Mengen aus \mathfrak{U} , in Formeln $\text{Ob}(\mathfrak{U}\text{Mat}_K) := \mathfrak{U}$. Die Morphismenmengen erklären wir durch die Vorschrift

$$\mathfrak{U}\text{Mat}_K(X, Y) := \left\{ T : X \times Y \rightarrow K \mid \begin{array}{l} \text{Für jedes } x \in X \text{ gilt} \\ T(x, y) = 0 \text{ für fast alle } y \in Y \end{array} \right\}$$

Zumindest im Fall, daß \mathfrak{U} keine überabzählbaren Mengen enthält, mag man sich als Elemente dieser Morphismenmengen Matrizen mit möglicherweise unendlich vielen Zeilen und Spalten aber höchstens endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen in jeder Spalte denken. Die Verknüpfungen werden in der hoffentlich offensichtlichen Weise durch Summation über gleiche Indizes erklärt. Wir erhalten dann einen Funktor $\mathfrak{U}\text{Mat}_K \rightarrow \text{Mod}_K$, der auf Objekten durch die Konstruktion freier Vektorräume $X \mapsto K\langle X \rangle$ über den entsprechenden Mengen gegeben wird und auf Morphismen leicht vom Leser erraten werden kann. Ist \mathfrak{U} ein „Universum“ im Sinne von 10.11.3, das den Körper K enthält, so erweist sich dieser Funktor sogar als eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathfrak{U}\text{Mat}_K \xrightarrow{\cong} \mathfrak{U}\text{Mod}_K$$

10.2.23. Gegeben ein Mengensystem \mathfrak{U} verstehen wir unter einer \mathfrak{U} -**Kategorie** eine Kategorie \mathcal{C} , bei der für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die Morphismenmenge zu unserem Mengensystem \mathfrak{U} gehört, in Formeln $\mathcal{C}(X, Y) \in \mathfrak{U}$.

10.2.24. Die Menge aller Funktoren von einer Kategorie \mathcal{A} in eine Kategorie \mathcal{B} notieren wir

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

Sie ist eine Teilmenge $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \text{Ens}(\text{Ob } \mathcal{A}, \text{Ob } \mathcal{B}) \times \text{Ens}(\text{Mor } \mathcal{A}, \text{Mor } \mathcal{B})$. In 10.4.12 werden wir eine Kategorie erklären, deren Objekte gerade die Funktoren $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ alias die Elemente von $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sind, aber alles zu seiner Zeit.

Beispiel 10.2.25. Gegeben ein Mengensystem \mathfrak{U} und eine \mathfrak{U} -Kategorie \mathcal{C} und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist die Zuordnung $Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$ ein Funktor $\mathcal{C}(X, _) : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ und die Zuordnung $Y \mapsto \mathcal{C}(Y, X)$ ein Funktor $\mathcal{C}(_, X) : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}^{\text{opp}}$.

Beispiel 10.2.26 (Funktoren zwischen Einobjektkategorien). Gegeben Monoi-de G, H und die zugehörigen Einobjektkategorien $[G], [H]$ nach 10.1.6 erhalten

wir in der offensichtlichen Weise eine Bijektion zwischen der Menge aller Monoidhomomorphismen $G \rightarrow H$ und der Menge aller Funktoren $[G] \rightarrow [H]$, in Formeln also eine Bijektion

$$\text{Mon}(G, H) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}([G], [H])$$

Übungen

Übung 10.2.27. Hat ein Funktor sogar die Eigenschaft, daß alle Morphismen, die er auf Isomorphismen abbildet, bereits zuvor Isomorphismen gewesen sein müssen, so nennt man ihn **konservativ**. Man gebe Beispiele für konservative und nichtkonservative Funktoren.

Übung 10.2.28. Jede Äquivalenz von Kategorien induziert eine Bijektion zwischen den zugehörigen Isomorphieklassen von Objekten. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen k -Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, alias durch Elemente von \mathbb{N} , alias durch Isomorphieklassen der Matrixkategorie.

Übung 10.2.29 (Zwei aus Drei für Äquivalenzen von Kategorien). Seien $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. Sind zwei der drei Funktoren F, G, GF Äquivalenzen von Kategorien, so auch der Dritte.

Übung 10.2.30. Bilden wir zu einer Kategorie eine volle Unterkategorie, indem wir aus jeder Isomorphieklasse von Objekten ein Objekt willkürlich auswählen, so ist der Einbettungsfunktor eine Äquivalenz von Kategorien.

Übung 10.2.31. Sind in einer Kategorie \mathcal{C} je zwei Objekte isomorph, so ist für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$[\mathcal{C}(X)] \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$$

zwischen der Ein-Objekt-Kategorie des Endomorphismenmonoids $\mathcal{C}(X)$ von X und unserer Kategorie.

Übung 10.2.32. Gegeben Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ liefert jedes Paar (F, G) von Funktoren $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ einen wohlbestimmten Funktor in die Produktkategorie $(F, G) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

10.3 Objekte mit Zusatzstrukturen*

10.3.1. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erklären wir eine **(\mathcal{S}, v) -Struktur auf X** als eine Äquivalenzklasse von Paaren (S, φ) bestehend aus einem Objekt $S \in \mathcal{S}$ und einem Isomorphismus $\varphi : v(S) \xrightarrow{\sim} X$ mit der Maßgabe, daß (S, φ) äquivalent ist zu (T, ψ) , wenn es einen Isomorphismus $i : S \xrightarrow{\sim} T$ gibt mit $\varphi = \psi \circ v(i)$.

Beispiel 10.3.2. Sei \mathfrak{U} ein Mengensystem. Wir erhalten für jede Menge $X \in \mathfrak{U}$ eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Verknüpfungen auf X , die X zu einer Gruppe machen, und der Menge aller $(\mathfrak{U}\text{Grp}, v)$ -Strukturen auf X für $v : \mathfrak{U}\text{Grp} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ der Vergißfunktors.

Beispiel 10.3.3. Sei \mathfrak{U} ein Mengensystem. Wir erhalten für jede Menge $X \in \mathfrak{U}$ eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Verknüpfungen auf X , die X zu einer abelschen Gruppe machen, und der Menge aller $(\mathfrak{U}\text{Ab}, v)$ -Strukturen auf X für $v : \mathfrak{U}\text{Ab} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ der Vergißfunktors.

Beispiel 10.3.4. Sei \mathfrak{U} ein Mengensystem. Wir erhalten für jede Menge $X \in \mathfrak{U}$ eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Topologien auf X und der Menge aller $(\mathfrak{U}\text{Top}, v)$ -Strukturen auf X für $v : \mathfrak{U}\text{Top} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ der Vergißfunktors.

Beispiel 10.3.5. Seien k ein Körper und \mathfrak{U} ein Mengensystem. Wir erhalten für jede abelsche Gruppe $X \in \mathfrak{U}\text{Ab}$ eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Abbildungen $k \times X \rightarrow X$, die als Multiplikation mit Skalaren die Gruppe X zu einem k -Vektorraum machen, und der Menge aller $(\mathfrak{U}\text{Mod}_k, v)$ -Strukturen auf X für $v : \mathfrak{U}\text{Mod}_k \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ab}$ der Vergißfunktors.

10.3.6. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ und ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ von Objekten mit (\mathcal{S}, v) -Struktur sagen wir, unser Morphismus sei **verträglich mit der (\mathcal{S}, v) -Struktur**, wenn für beliebige Wahlen von Repräsentanten (S, φ) und (T, ψ) der jeweiligen (\mathcal{S}, v) -Strukturen auf X und Y unser f das Bild unter v eines Morphismus $F : S \rightarrow T$ ist, genauer $f = \psi \circ v(F) \circ \varphi^{-1}$. Offensichtlich ist die Identität auf einem Objekt mit jeder (\mathcal{S}, v) -Struktur auf besagtem Objekt verträglich und die Verknüpfung von verträglichen Morphismen ist wieder verträglich. Die so erklärte Kategorie der **Objekte von \mathcal{C} mit (\mathcal{S}, v) -Struktur** notieren wir

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$$

Wir erhalten eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$ durch die Vorschrift $S \mapsto (S, \text{id}_{v(S)})$.

Beispiel 10.3.7. Gegeben ein Mengensystem \mathfrak{U} ist unsere Äquivalenz aus 10.3.6 sogar ein Isomorphismus

$$\mathfrak{U}\text{Grp} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}\text{Ens}_{(\mathfrak{U}\text{Grp}, v)}$$

zwischen der Kategorie aller Mengen $G \in \mathfrak{U}$ mit einer Verknüpfung, die sie zu einer Gruppe macht, und der Kategorie aller Mengen $G \in \mathfrak{U}$ versehen mit einer Äquivalenzklasse von Paaren (S, φ) bestehend aus einem Objekt $S \in \mathfrak{U}\text{Grp}$ zusammen mit einer Bijektion von Mengen $\varphi : S \xrightarrow{\sim} G$ unter der in 10.3.1 gegebenen Äquivalenzrelation. Dasselbe gilt für das Vergessen der Topologie $v : \mathfrak{U}\text{Top} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ oder das Vergessen der Operation der Skalare $v : \mathfrak{U}\text{Mod}_k \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ab}$

in der Kategorie der Moduln über einem Ring k und überhaupt in allen konkreten Anwendungen, die mir in den Sinn kommen.

10.3.8. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ nennen wir einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ **initial**, wenn für alle $W \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ gilt

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(W, X) = \{e \in \mathcal{C}(W, X) \mid fe \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(W, Y)\}$$

Initiale Morphismen heißen oft **Einbettungen**. Es ist klar, daß jede Verknüpfung initialer Morphismen initial ist und daß eine Verknüpfung von zwei Morphismen in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ nur dann initial sein kann, wenn der erste initial ist. Einen Morphismus in \mathcal{S} nennen wir **v -initial**, wenn er unter v einen (\mathcal{S}, v) -initialen Morphismus induziert.

Beispiel 10.3.9. Sei \mathcal{U} ein Mengensystem. Im Fall der \mathcal{U} -Mengen mit $(\mathcal{U}\text{Grp}, v)$ -Struktur sind genau die injektiven mit der Struktur verträglichen Abbildungen initial. Ist in der Tat $f : X \hookrightarrow Y$ ein Gruppenhomomorphismus und W eine Gruppe, so ist eine Abbildung $e : W \rightarrow X$ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $fe : W \rightarrow Y$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

10.3.10. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ und ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} und eine (\mathcal{S}, v) -Struktur auf Y gibt es höchstens eine (\mathcal{S}, v) -Struktur auf X derart, daß f initial wird. In der Tat, repräsentieren (S, φ) und (T, ψ) zwei derartige Strukturen, so muß die Identität auf X verträglich sein sowohl als Morphismus $(X, S, \varphi) \rightarrow (X, T, \psi)$ als auch als Morphismus in die Gegenrichtung und daraus folgt leicht, daß diese beiden Daten dieselbe Struktur repräsentieren. Wir nennen sie die **induzierte Struktur** oder die **initiale Struktur** auf X .

Beispiel 10.3.11. Sei \mathcal{U} ein Mengensystem. Im Fall der \mathcal{U} -Mengen mit $(\mathcal{U}\text{Top}, v)$ -Struktur alias topologischen Räume aus \mathcal{U} heißt unsere induzierte Struktur die Initialtopologie und im Fall der Einbettung einer Teilmenge auch die induzierte Topologie oder Spurtopologie oder Teilraumtopologie. In dieser Situation gibt es stets eine initiale Struktur.

Beispiele 10.3.12. Sei \mathcal{U} ein Mengensystem. Im Fall des Vergessens der Verknüpfung $v : \mathcal{U}\text{Grp} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$ existiert eine induzierte Struktur genau für diejenigen Abbildungen, die injektiv sind und deren Bild eine Untergruppe ist. Die induzierte Struktur ist dann die induzierte Gruppenstruktur. Eine Teilmenge $X \subset Y$ einer Menge Y mit (\mathcal{S}, v) -Struktur nennt man ganz allgemein ein **(\mathcal{S}, v) -Unterobjekt**, wenn sie eine induzierte Struktur besitzt. Beispiele sind Untergruppen, Untervektorräume, affine Teilräume, Unterringe und so weiter.

10.3.13. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ ist auch $v^{\text{opp}} : \mathcal{S}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{opp}}$ ein treuer Funktor und wir erhalten in der offensichtlichen Weise einen Isomorphismus von Kategorien

$$(\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{(\mathcal{S}^{\text{opp}},v^{\text{opp}})}^{\text{opp}}$$

Morphismen $f : X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$ mit f° initial in Bezug auf die jeweiligen $(\mathcal{S}^{\text{opp}}, v^{\text{opp}})$ -Strukturen nennen wir **final**. Ausgeschrieben bedeutet das, daß für jedes weitere Objekt $Z \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$ gilt

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}(Y, Z) = \{g \in \mathcal{C}(Y, Z) \mid gf \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}(X, Z)\}$$

Finale Morphismen heißen oft **Quotienten**. Es ist klar, daß jede Verknüpfung finaler Morphismen final ist und daß eine Verknüpfung von zwei Morphismen in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$ nur dann final sein kann, wenn der zweite final ist. Einen Morphismus in \mathcal{S} nennen wir **v -final**, wenn er unter v einen (\mathcal{S}, v) -finalen Morphismus induziert.

10.3.14. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ und ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} und eine (\mathcal{S}, v) -Struktur auf X gibt es höchstens eine (\mathcal{S}, v) -Struktur auf Y derart, daß f final wird. Wir nennen sie die **koinduzierte Struktur** oder die **finale Struktur** auf Y .

Beispiel 10.3.15. Sei \mathcal{U} ein Mengensystem. Im Fall der \mathcal{U} -Mengen mit $(\mathcal{U}\text{Top}, v)$ -Struktur alias topologischen Räume heißt unsere koinduzierte Struktur die Finaltopologie und insbesondere im Fall von surjektiven Abbildungen auch die Quotiententopologie.

Beispiele 10.3.16. Sei \mathcal{U} ein Mengensystem. Im Fall des Vergessens der Verknüpfung $v : \mathcal{U}\text{Grp} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$ existiert eine koinduzierte Struktur genau für diejenigen Abbildungen von einer Gruppe in eine Menge, die faktorisieren in einen surjektiven Gruppenhomomorphismus gefolgt von einer Bijektion, und die koinduzierte Struktur ist die von einer und jeder derartigen Bijektion induzierte Gruppenstruktur.

Vorschau 10.3.17. In 3.6.16 und 3.7.8 führen wir allgemeiner „gesamthaft initiale“ und „gesamthaft finale“ Familien ein.

Übungen

Übung 10.3.18. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$, der zusätzlich konservativ ist, kann die Identität auf einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ nicht für zwei unterschiedliche (\mathcal{S}, v) -Strukturen (S, φ) und (T, ψ) auf X ein Morphismus $(X, S, \varphi) \rightarrow (X, T, \psi)$ sein.

10.4 Transformationen

10.4.1. Bis hierher hat sich unsere Theorie noch in leidlich vertrauten Bahnen bewegt: Wir haben eben eine neue Art von Strukturen erklärt, die Kategorien, und dazwischen strukturerhaltende Abbildungen alias Morphismen betrachtet, die Funktoren. Insoweit paßt alles noch in den strukturellen Rahmen, an den man in

der linearen Algebra durch das Studium von Vektorräumen und linearen Abbildungen oder Gruppen und Gruppenhomomorphismen gewöhnt worden ist. Das Neue bei der Kategorientheorie ist nun, daß es auch „Morphismen zwischen Morphismen“ gibt. Sie heißen „Transformationen von Funktoren“ und sind das Thema dieses Abschnitts.

Definition 10.4.2. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Funktoren. Eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ ist eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathcal{A}$ einen Morphismus $\tau_X \in \mathcal{B}(FX, GX)$ zuordnet derart, daß für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{A} das Rechteck

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\tau_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\tau_Y} & GY \end{array}$$

in \mathcal{B} kommutiert. In Formeln meint das die Gleichheit $(Gf) \circ \tau_X = \tau_Y \circ (Ff)$ in der Morphismenmenge $\mathcal{B}(FX, GY)$. Ob ein Doppelpfeil eine Transformation von Funktoren oder vielmehr eine Implikation meint, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sind alle τ_X Isomorphismen, so nenne ich τ eine **Isotransformation** und notiere sie $\xrightarrow{\cong}$, aber diese Terminologie ist nicht gebräuchlich. In der Literatur spricht man eher von einem **Isomorphismus von Funktoren** oder auch von einer **Äquivalenz von Funktoren**. Gibt es zwischen zwei Funktoren eine Isotransformation, so heißen sie **isomorph**.

10.4.3 (**Diskussion der Doppelpfeil-Notation**). Ich finde die Notation von Transformationen durch Doppelpfeile didaktisch hilfreich in derselben Weise wie die Notation \vec{v} für Vektoren am Anfang der linearen Algebra. Andererseits werden wir sie nicht konsequent durchhalten können und das ist auch nicht sinnvoll, denn wie in 10.4.12 erklärt können auch die Transformationen als Morphismen einer Kategorie aufgefaßt werden, der „Funktorkategorie“.

10.4.4 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere Transformationen meist „natürliche Transformationen“. Diese Terminologie schien mir jedoch unnötig umständlich und entspricht auch nicht meinem Sprachempfinden: Ich möchte zum Beispiel unter der „natürlichen“ Transformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie aller \mathbb{R} -Vektorräume in den Bidualraumfunktoren gerne die in 10.4.9 gegebene Transformation verstehen, die zwar keineswegs die einzige Transformation zwischen diesen Funktoren ist, aber vielleicht schon die „natürlichste“.

Beispiel 10.4.5 (Die Länge als Transformation). Ich betrachte den Vergißfunktoren und den Längengeradenfunktoren 10.2.4 von der Kategorie der euklidischen Vektorräume in die Kategorie der reellen Vektorräume. Schalten wir noch einen weiteren Vergißfunktoren nach, so werden sie zu Funktoren $\text{Euk} \rightarrow \text{Ens}$. Unsere in ??

erklärten Längenabbildungen $\| \cdot \|_V : V \rightarrow \mathbb{L}(V)$ bilden dann in ihrer Gesamtheit eine Transformation $\text{verg} \Rightarrow \mathbb{L}$ zwischen Funktoren $\text{Euk} \rightarrow \text{Ens}$. Ob ich nämlich erst einen Vektor mittels eines Homomorphismus von euklidischen Vektorräumen in einen weiteren euklidischen Vektorraum abbilde und dann seine Länge in Bezug auf den Bildraum nehme, oder erst seine Länge nehme und diese mittels des auf den Längengeraden induzierten Homomorphismus zu einer Länge in Bezug auf den Bildraum mache, es kommt beidesmal dasselbe heraus.

Beispiel 10.4.6 (Winkelmaße als Transformationen). Wir betrachten den Funktor $W : \text{KongEb} \rightarrow \text{Grp}$, der jeder Kongruenzebene (E, K) ihre Winkelgruppe $W(E) := \vec{K}^+$ zuordnet, also die Gruppe ihrer orientierungserhaltenden Richtungskongruenzen. Unsere Winkelmaße aus ?? können wir auffassen als Transformationen

$$\text{or}_{\mathbb{R}} \circ \text{Richt} \Rightarrow W$$

von Funktoren $\text{KongEb} \rightarrow \text{Grp}$ alias „natürliche“ Gruppenhomomorphismen $\text{or}_{\mathbb{R}}(\vec{E}) \rightarrow W(E)$ von der Orientierungsgerade in die Winkelgruppe.

10.4.7. Winkelmaße sind etwas grundsätzlich anderes als Einheiten. Ein Winkelmaß in einer Kongruenzebene anzugeben bedeutet, ein Winkelmaß in allen Kongruenzebenen anzugeben. Eine Längeneinheit in einer Kongruenzebene anzugeben bedeutet dahingegen keineswegs, eine Längeneinheit in allen Kongruenzebenen anzugeben.

Beispiel 10.4.8 (Das kanonische Skalarprodukt als Transformation). Unsere kanonischen Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \otimes V \rightarrow \mathbb{L}(V)^{\otimes 2}$ für euklidische Vektorräume aus ?? bilden in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$\text{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

zwischen Funktoren $\text{Euk} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}$ von der Kategorie der euklidischen Vektorräume in die Kategorie der \mathbb{R} -Vektorräume.

Beispiel 10.4.9 (Evaluation als Transformation). Gegeben ein Körper K bezeichne $B : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$ den **Bidualraumfunkt**or, der jedem K -Vektorraum V seinen Bidualraum $BV := V^{\top\top}$ zuordnet. So bilden die Evaluationsabbildungen $\text{ev}_V : V \rightarrow V^{\top\top}, v \mapsto (f \mapsto f(v))$ in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$\text{ev} : \text{Id} \Rightarrow B$$

und eine Isotransformation zwischen den Restriktionen dieser Funktoren auf die Kategorie der endlichdimensionalen K -Vektorräume, vergleiche ?. Oft formalisiert man Situationen dieser Art nicht bis ins Letzte aus und spricht von **kanonischen Abbildungen** beziehungsweise **kanonischen Isomorphismen**, wenn bei formalerer Betrachtung Abbildungen $\tau_X : FX \rightarrow GX$ oder Isomorphismen $\tau_X : FX \xrightarrow{\sim} GX$ gemeint sind, die in ihrer Gesamtheit eine Transformation beziehungsweise Isotransformation von Funktoren $\tau : F \xrightarrow{\sim} G$ bilden.

Beispiel 10.4.10 (Dualraum und Transponieren). Seien K ein Körper und $D : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K^{\text{opp}}$ der **Dualraumfunkt**or, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet. Sei weiter Mat_K die Matrixkategorie aus 10.1.7 und $T : \text{Mat}_K \rightarrow \text{Mat}_K^{\text{opp}}$ der Funktor, der die Objekte festhält und Matrizen transponiert. Sei schließlich $R : \text{Mat}_K \rightarrow \text{Mod}_K$ unser Realisierungsfunkt

$$\tau : R^{\text{opp}}T \xrightarrow{\sim} DR$$

der die Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n alias jedem Objekt $n \in \text{Mat}_K$ den offensichtlichen Isomorphismus $\tau_n : K^n \xrightarrow{\sim} (K^n)^\top$ zuordnet. Es kann hilfreich sein, durch Doppelpfeile in Diagrammen von Kategorien und Funktoren klarzumachen, zwischen welchen Funktoren eine Transformation gemeint ist. So wäre etwa in diesem Beispiel unser τ ein möglicher Doppelpfeil im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_K & \xrightarrow{T} & \text{Mat}_K^{\text{opp}} \\ R \downarrow & \tau \swarrow \sim & \downarrow R^{\text{opp}} \\ \text{Mod}_K & \xrightarrow{D} & \text{Mod}_K^{\text{opp}} \end{array}$$

Beispiel 10.4.11 (Tensor und Hom). Die natürlichen Abbildungen

$$\text{can} : V^\top \otimes_K W \rightarrow \text{Hom}_K(V, W)$$

aus ?? für K -Vektorräume V, W liefern eine Transformation zwischen den durch diese Vorschriften gegebenen Funktoren

$$\text{Mod}_K^{\text{opp}} \times \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$$

10.4.12 (Kategorien von Funktoren). Sind $\tau : F \Rightarrow G$ und $\sigma : G \Rightarrow H$ Transformationen, so ist auch $\sigma \circ \tau : F \Rightarrow H$ gegeben durch $(\sigma \circ \tau)_X := \sigma_X \circ \tau_X$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie von F eine Transformation. Des weiteren gibt es für jeden Funktor F die **identische Transformation** $\text{id} = \text{id}_F$ von besagtem Funktor zu sich selber, gegeben durch $(\text{id}_F)_X := \text{id}_{FX}$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie unseres Funktors. Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien, so bilden die Funktoren $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sogar selbst eine Kategorie, mit Funktoren als Objekten und Transformationen als Morphismen und der eben erklärten Verknüpfung von Transformationen als Verknüpfung von Morphismen. Ich verwende für diese **Funktorkategorie** verschiedene Notationen. Erst einmal dieselbe Notation $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wie für die Menge der Objekte, dann die Notation $\underline{\text{Cat}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wenn es darum geht, die Zusatzstruktur als Kategorie zu betonen, weiter die Notation $(\mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B})$, weil es sich

um einen Spezialfall von „internem Hom“ erweisen wird, und als besonders kurze Form die exponentielle Notation $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, so daß etwa für Funktoren $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ die Menge der Transformationen

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(F, G) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F, G)$$

notiert werden kann. Wenn die Kategorien selber durch größere Ausdrücke gegeben werden, sind für die Menge der Transformationen auch abkürzende Notationen wie etwa $\text{Trans}(F, G)$ sinnvoll und üblich. Unsere Isotransformationen sind genau die Isomorphismen der Funktorkategorie.

Ergänzung 10.4.13 (Exponentialgesetz für Kategorien). Man zeige, daß man für je drei Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ eine Bijektion

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \underline{\text{Cat}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

erhält durch die Vorschrift $F \mapsto \tilde{F}$ mit $\tilde{F}(A, B) = (F(A))(B)$ auf Objekten und eine vom Leser zu spezifizierende Vorschrift auf Morphismen. Man baut diese auch leicht zu einem Isomorphismus von Kategorien aus, und das folgt alternativ auch aus allgemeinen Aussagen zu „internem Hom“, wie sie etwa in ?? diskutiert werden.

Beispiel 10.4.14. Seien $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Funktoren und $\tau : F \Rightarrow G$ eine Transformation. Gegeben ein weiterer Funktor $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Transformation $H\tau : HF \Rightarrow HG$. Gegeben ein weiterer Funktor $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise ebenso eine Transformation $\tau K : FK \Rightarrow GK$. Offensichtlich liefern diese Konstruktionen ihrerseits Funktoren $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ und $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ zwischen den entsprechenden Funktorkategorien, die wir als das **Nachsalten von H** beziehungsweise **Vorschalten von K** bezeichnen.

10.4.15 (**Schwierigkeiten der Notation**). Die Notationen τK und $H\tau$ führen leicht zu Verwirrung, sobald nicht aus der Art der Symbole heraus klar ist, welche Symbole Funktoren und welche Transformationen darstellen. Ich kenne keine generelle Lösung für diese Schwierigkeiten der Notation. In diesem Abschnitt habe ich versucht, eine gewisse Übersichtlichkeit dadurch zu erreichen, daß ich systematisch lateinische Großbuchstaben für Funktoren und kleine griechische Buchstaben für Transformationen verwende.

Übungen

Übung 10.4.16. Gegeben ein Körper K zeige man, daß der Funktor $\text{Mod}_K^{\times} \rightarrow \text{Mod}_K^{\times}$ von der Isomorphiekategorie der endlichdimensionalen K -Vektorräume zu sich selber, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet und jedem Isomorphismus die Inverse der transponierten Abbildung $\varphi \mapsto (\varphi^{\top})^{-1}$, nicht isomorph

ist zum Identitätsfunktorkomplexion. Hinweis: Man passe im Fall des Körpers mit zwei Elementen besonders gut auf.

Übung 10.4.17. Seien K ein Körper und $\text{Id} : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$ der Identitätsfunktorkomplexion. Man bestimme alle Transformationen von diesem Funktorkomplexion zu sich selber. Ebenso bestimme man alle Transformationen von diesem Funktorkomplexion zum Bidualraumfunktorkomplexion.

Übung 10.4.18. Sind zwei Funktorkomplexionen isomorph und ist der eine eine Äquivalenz von Kategorien, so auch der andere.

Übung 10.4.19. Man diskutiere, inwiefern die in ?? für jeden Vektorraum V konstruierten kanonischen Isomorphismen $(\bigwedge^r V)^\top \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^r(V)$ eine Isotransformation bilden. Idem für die in ?? für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V konstruierten kanonischen Isomorphismen $\bigwedge^r(V^\top) \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^r(V)$.

Übung 10.4.20. Gegeben ein Monoid G heißt eine Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ von G -Mengen **äquivariant**, wenn gilt $\phi(gx) = g\phi(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in X$. Die G -Mengen mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden dann eine Kategorie, für die ich die beiden Notationen $G\text{-Ens} = \text{Ens}_{G\setminus}$ verwende. Bilden wir zu unserem Monoid G die Ein-Objekt-Kategorie $[G]$, so liefert der hoffentlich offensichtliche Funktorkomplexion einen Isomorphismus von Kategorien

$$G\text{-Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}([G], \text{Ens})$$

Ergänzende Übung 10.4.21 (Komplexifizierung einer Reellifizierung). Wir erhalten eine Isotransformation zwischen Funktorkomplexionen $\text{Mod}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{C}}$ mittels der Abbildungen $i_V : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \xrightarrow{\sim} V \oplus \bar{V}$ gegeben durch $\alpha \otimes v \mapsto (\alpha v, \alpha \bar{v})$ in den Notationen ?. Die inverse Isotransformation wird beschrieben durch die Abbildungsvorschrift

$$(v, \bar{w}) \mapsto (1/2) \otimes (v + w) - (i/2) \otimes (iv - iw)$$

Im übrigen bildet unser Isomorphismus oben den Eigenraum $\text{Eig}(1 \otimes i | \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V; i)$ isomorph auf V ab und den Eigenraum $\text{Eig}(1 \otimes i | \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V; -i)$ isomorph auf \bar{V} . Der schieflineare Automorphismus $\alpha \otimes v \mapsto \bar{\alpha} \otimes v$ von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ schließlich entspricht unter unserem Isomorphismus dem schieflinearen Automorphismus $(v, \bar{w}) \mapsto (w, \bar{v})$ von $V \oplus \bar{V}$.

Ergänzende Übung 10.4.22. Wir erhalten eine Isotransformation zwischen Funktorkomplexionen $\text{Mod}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{C}}^{\text{opp}}$ mittels der Abbildungen $\bar{V}^\top \xrightarrow{\sim} \bar{V}^\top$ gegeben durch $\bar{\varphi} \mapsto \bar{c} \circ \varphi$ in den Notationen ??, mit $\bar{c} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der komplexen Konjugation. Diese Identifikation scheint mir so kanonisch, daß ich auch oft $\bar{\varphi}$ statt $\bar{c} \circ \varphi$ schreiben werde.

Ergänzung 10.4.23 (Dualraum und Restriktion der Skalare). Gegeben ein komplexer Vektorraum V erklären wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(V^{\top}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^{\top}$$

zwischen der Reellifizierung seines Dualraums und dem Dualraum seiner Reellifizierung durch die Vorschrift $\lambda \mapsto 2\operatorname{Re}\lambda$. Es kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(V^{\top}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^{\top} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^{\top} \\ \downarrow i_{V^{\top}} \wr & & \wr \uparrow i_V^{\top} \\ V^{\top} \oplus \overline{V^{\top}} & \xrightarrow{\sim} & V^{\top} \oplus \overline{V^{\top}} \end{array}$$

Hier kommen die Vertikalen von 10.4.21 her, unten ist die von 10.4.22 gelieferte Abbildung $(\lambda, \bar{\mu}) \mapsto (\lambda, \bar{c} \circ \mu)$ gemeint mit $\bar{c} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der komplexen Konjugation, und in der oberen Horizontale die Abbildung, die aus obiger Identifikation $\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(V^{\top}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^{\top}$ unter der Komplexifikation entsteht, gefolgt von der Identifikation $(W^{\top})_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} (W_{\mathbb{C}})^{\top}$ aus ???. Der Faktor 2 zu Beginn scheint mir nicht nur angemessen, da er obiges Diagramm zum Kommutieren bringt, sondern auch, da man allgemeiner für jede „endliche separable Körpererweiterung“ vernünftigerweise einen natürlichen Isomorphismus $\operatorname{res}_K^k(V^{\top}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_K^k V)^{\top}$ erklärt durch die Vorschrift $\lambda \mapsto S_K^k \circ \lambda$ mit $S_K^k : K \rightarrow k$ der Spur aus ???.

Ergänzende Übung 10.4.24. Gegeben ein Körper K erhalten wir eine Isotransformation von Funktoren $\operatorname{Mod}_K \times \operatorname{Mod}_K \rightarrow \operatorname{Mod}_K$ mittels der durch das Dachprodukt gegebenen Abbildungen

$$\bigoplus_{i+j=k} \bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W \xrightarrow{\sim} \bigwedge^k (V \oplus W)$$

Zusammen mit Übung 10.4.21 erhalten wir insbesondere Isotransformationen von Funktoren $\operatorname{Mod}_{\mathbb{C}} \rightarrow \operatorname{Mod}_{\mathbb{C}}$ alias für komplexe Vektorräume V kanonische Isomorphismen $\bigoplus_{i+j=k} \bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j \overline{V} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^k (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)$.

Ergänzende Übung 10.4.25. Gegeben Funktoren $F, F' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $G, G' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ sowie Transformationen $\alpha : F \Rightarrow F'$ und $\beta : G \Rightarrow G'$ gilt die Gleichheit $\beta F' \circ G \alpha = G' \alpha \circ \beta F$ von Transformationen $GF \Rightarrow G'F'$. Wir notieren diese Transformation auch $\alpha * \beta : GF \Rightarrow G'F'$ und nennen sie die **Juxtaposition** unserer beiden Transformationen. Unsere Identität ist auch gleichbedeutend zu der Aussage, daß das Nachschalten einen Funktor $\operatorname{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \operatorname{Cat}(\mathcal{B}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$ liefert, oder auch in ausführlicherer Notation das Vorschalten einen Funktor

$$\operatorname{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \operatorname{Cat}(\operatorname{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}), \operatorname{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C}))$$

Übung 10.4.26. Man zeige: Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es eine Äquivalenz von Kategorien in die Gegenrichtung $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ gibt nebst einer Isotransformation $\tau : \text{Id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} GF$. Die Äquivalenz G oder genauer das Paar (G, τ) heißt dann ein **quasiinverser Funktor zu F** . Man zeige weiter: Zu jedem Paar (G, τ) wie eben gibt es genau eine Isotransformation $\eta : FG \xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathcal{B}}$ mit $(\eta F) \circ (F\tau) = \text{id}_F$.

Übung 10.4.27. Man zeige: Genau dann ist ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ gibt derart, daß FG isomorph ist zum Identitätsfunktor auf \mathcal{B} und GF isomorph zum Identitätsfunktor auf \mathcal{A} .

Übung 10.4.28. Man zeige: Gegeben eine Äquivalenz von Kategorien $F : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ und ein Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ nebst einer Isotransformation $\tau : FG \xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathcal{A}}$ ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien und (G, τ) quasiinvers zu F .

Übung 10.4.29 (Äquivalenzen von Funktorkategorien). Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien und ist $K : \mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Vorschalten von K eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich $H : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von H eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

10.5 Natürliche Konstruktionen in der Geometrie

10.5.1 (**Kanonische Skalarprodukte als Transformationen**). Wir interessieren uns nun für die Kategorie Euk der euklidischen Vektorräume und für Funktoren

$$\text{Euk} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}$$

Beispiele sind das Vergessen der euklidischen Struktur verg oder das Bilden der Längengerade \mathbb{L} oder Tensorpotenzen dieser Funktoren wie etwa $\text{verg}^{\otimes r}$ oder $\mathbb{L}^{\otimes r}$. Unsere kanonischen Skalarprodukte sind Transformationen

$$\text{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

von Funktoren alias Morphismen in der Funktorkategorie $\text{Cat}(\text{Euk}, \text{Mod}_{\mathbb{R}})$.

10.5.2 (**Kanonische Skalarprodukte brauchen Einheiten**). Wir betrachten den konstanten Funktor $C_{\mathbb{R}} : \text{Euk} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}$, der jedem euklidischen Vektorraum den

reellen Vektorraum \mathbb{R} zuordnet und jeder euklidischen linearen Abbildung die Identität. Wir zeigen, daß es außer der Nulltransformation keine Transformation

$$\text{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow C_{\mathbb{R}}$$

gibt. In der Tat ist die Multiplikation mit jeder reellen Zahl $\lambda \neq 0$ für jeden euklidischen Vektorraum V eine euklidische Abbildung $(\lambda \cdot) : V \rightarrow V$ und jede bilineare Abbildung $\eta : V \times V \rightarrow C_{\mathbb{R}}$ mit $\eta(v, w) = \eta(\lambda v, \lambda w) \forall \lambda \in \mathbb{R}^\times$ ist offensichtlich Null. Salopp gesprochen gibt es also „kein kanonisches Skalarprodukt auf euklidischen Räumen mit Werten in den reellen Zahlen“.

10.5.3 (Kanonische Spatprodukte als Transformation). Nun halten wir $n \in \mathbb{N}_{>0}$ fest und interessieren uns für die Kategorie Euk_n der n -dimensionalen euklidischen Vektorräume und die Funktorkategorie $\text{Cat}(\text{Euk}_n, \text{Mod}_{\mathbb{R}})$. Zu dieser Funktorkategorie gehören etwa die Funktoren $\text{verg}^{\otimes n} : V \mapsto V^{\otimes n}$ und $\text{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n} : V \mapsto \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$ und eine Transformation $\tau : \text{verg}^{\otimes n} \Rightarrow \text{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}$ wird gegeben durch die Gesamtheit der in ?? konstruierten linearen Abbildungen $\tau_V : V^{\otimes n} \rightarrow \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$ und im Fall $n = 3$ speziell durch unsere kanonischen Spatprodukte

$$\langle , , \rangle : V^{\otimes 3} \rightarrow \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes 3}$$

Man überzeugt sich unschwer, daß wir auf diese Weise sogar für jedes n eine Isotransformation $\tau : \bigwedge^n \text{verg} \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}$ erhalten.

10.5.4 (Kanonische Kreuzprodukte als Transformation). Das Kreuzprodukt ist eine Transformation $\times : \text{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \text{verg} \otimes \text{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}$ alias ein Morphismus in der Funktorkategorie $\text{Cat}(\text{Euk}_3, \text{Mod}_{\mathbb{R}})$, der gegeben wird durch die in ?? konstruierten Morphismen

$$\times : V \otimes V \rightarrow V \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)$$

10.5.5 (Klassifikationsfragen und Gruppenhomomorphismen). Um die Funktorkategorie $\text{Cat}(\text{Euk}_n, \text{Mod}_{\mathbb{R}})$ für vorgegebenes n besser zu verstehen, mag man von der Erkenntnis ausgehen, daß in der Kategorie Euk_n der n -dimensionalen euklidischen Vektorräume je zwei Objekte isomorph sind und nach 10.2.31 folglich der Einbettungsfunktor eine Äquivalenz

$$[\text{Euk}(\mathbb{R}^n)] \xrightarrow{\sim} \text{Euk}_n$$

ist. Die Automorphismengruppe des \mathbb{R}^n mit seiner Standardstruktur als euklidischer Raum ist nun die Gruppe $\text{GO}(n) := \mathbb{R}^\times \text{O}(n) = \text{Euk}(\mathbb{R}^n)$ aller seiner **linearen Ähnlichkeiten**. Wir können so unsere Äquivalenz von oben umschreiben zu einer Äquivalenz $[\text{GO}(n)] \xrightarrow{\sim} \text{Euk}_n$. Bezeichnet andererseits $\text{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}$ die

Kategorie der d -dimensionalen reellen Vektorräume, so erhalten wir ebenso eine Äquivalenz $[\text{Mat}_{\mathbb{R}}(d)] \xrightarrow{\cong} \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}$. Weil nach 10.4.29 Äquivalenzen von Kategorien Äquivalenzen von Funktorkategorien induzieren, erhalten wir so Äquivalenzen von Kategorien

$$\text{Cat}(\text{Euk}_n, \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}) \xrightarrow{\cong} \text{Cat}([\text{GO}(n)], \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}) \xleftarrow{\cong} \text{Cat}([\text{GO}(n)], [\text{Mat}_{\mathbb{R}}(d)])$$

und damit nach 10.2.28 Bijektionen zwischen den jeweiligen Mengen von Isomorphieklassen. Objekte von $\text{Cat}([\text{GO}(n)], [\text{Mat}_{\mathbb{R}}(d)])$ sind nun Monoidhomomorphismen $\text{GO}(n) \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(d)$ alias Gruppenhomomorphismen $\text{GO}(n) \rightarrow \text{GL}(d; \mathbb{R})$, und zwei solche Gruppenhomomorphismen ϕ, ψ sind isomorphe Objekte genau dann, wenn es $A \in \text{GL}(d; \mathbb{R})$ gibt mit $(\text{int } A) \circ \phi = \psi$. So erkennen wir zum Beispiel, daß Funktoren, die jedem n -dimensionalen euklidischen Vektorraum einen eindimensionalen Vektorraum zuordnen, klassifiziert werden durch die Menge aller Gruppenhomomorphismen $\text{GO}(n) \rightarrow \mathbb{R}^{\times}$. Die folgende Tabelle gibt einige Beispiele für solche Funktoren in die Kategorie der eindimensionalen reellen Vektorräume und die zugehörigen Gruppenhomomorphismen.

Funktoren	$\text{Euk}_n \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{1\text{-dim}}$	Morphismen	$\text{GO}(n) \rightarrow \mathbb{R}^{\times}$
konstanter Funktor	$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$	konstanter	1
Maximalpotenz	\bigwedge^n	Determinante	det
Orientierungsgerade	$\text{or}_{\mathbb{R}}$		det / det
Längengerade	\mathbb{L}		$\sqrt[n]{ \det }$

Übungen

Ergänzende Übung 10.5.6. Gibt es für zweidimensionale euklidische Vektorräume V nichttriviale natürliche Gruppenhomomorphismen $\text{or}_{\mathbb{R}}(V) \rightarrow \text{O}(V)$ von der Orientierungsgerade in die orthogonale Gruppe?

10.6 Köcher*

10.6.1. Der Begriff einer Transformation ist in noch größerer Allgemeinheit natürlich und sinnvoll, wie hier kurz skizziert werden soll.

Definition 10.6.2. Ein **Köcher** ist ein Datum $\mathcal{Q} = (P, E, a, e)$ bestehend aus zwei Mengen P, E und zwei Abbildungen $a, e : P \rightarrow E$. Wir nennen die Elemente von E die **Ecken** oder auch **Punkte** des Köchers und die Elemente von P seine **Pfeile**. Für einen Pfeil $\vec{p} \in P$ nennen wir $a(\vec{p})$ seinen **Anfangspunkt** und $e(\vec{p})$ seinen

Endpunkt. Ein **Morphismus** F von unserem Köcher in einen weiteren Köcher (P', E', a', e') ist ein Paar bestehend aus einer Abbildung $F : P \rightarrow P'$ und einer Abbildung $F' : E \rightarrow E'$ derart, daß gilt $Fa = a'F$ und $Fe = e'F$. Wir erhalten so die Kategorie der Köcher

Car

Ähnlich wie bei Kategorien schreiben wir auch gerne abkürzend \mathcal{Q} für die Eckenmenge eines Köchers $\mathcal{Q} = (P, E, a, e)$ und $\mathcal{Q}(x, y)$ für die Menge der Pfeile mit Anfangspunkt x und Endpunkt y .

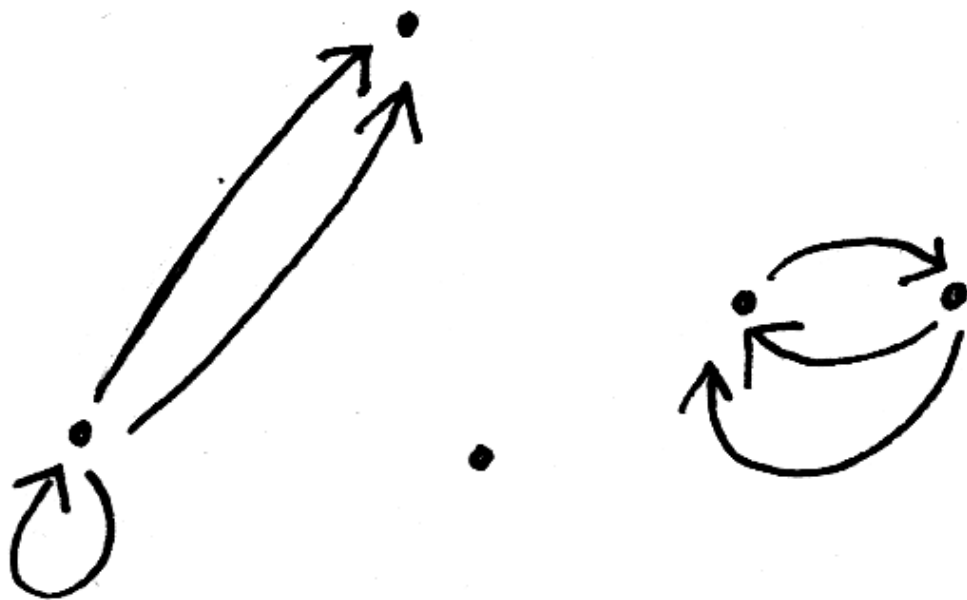
10.6.3. Auf Englisch sagt man **quiver**, auf Französisch **carquois**. Auf Englisch heißen die Ecken **vertices** und die Pfeile **arrows** oder **edges**.

10.6.4. Jede Kategorie liefert einen Köcher, mit den Objekten als Ecken und den Morphismen als Pfeilen. Zu jeder Menge Ω bilden wir den **Ein-Punkt-Köcher** $[\Omega]$, mit nur einem Punkt $*$ und für jedes $\omega \in \Omega$ einem Pfeil von diesem Punkt zu sich selbst. Ein Köcher heißt **endlich**, wenn er nur endlich viele Punkte und Pfeile hat. Manche Autoren nennen einen Köcher auch ein **Diagrammschema**. Ein Köchermorphismus von einem Köcher in eine Kategorie heißt eine **Darstellung unseres Köchers** in besagter Kategorie oder auch eine **Realisierung unseres Diagrammschemas** in besagter Kategorie oder, wenn wir auf das zugrundeliegende Diagrammschema nicht Bezug nehmen wollen, ein **Diagramm** in besagter Kategorie.

Ergänzung 10.6.5. Bezeichne \rightrightarrows die Kategorie mit zwei Objekten Pf, Ec und vier Morphismen, von denen Zwei die Identitäten sind und Zwei von Pf nach Ec gehen und „Anfang“ und „Ziel“ heißen mögen. Dann kann die Kategorie der Köcher verstanden werden als die Funktorkategorie $\text{Cat}(\rightrightarrows, \text{Ens})$.

Ergänzung 10.6.6. Eine **Verknüpfung auf einem Köcher** \mathcal{Q} ist eine Sammlung von Abbildungen $\mathcal{Q}(x, y) \times \mathcal{Q}(y, z) \rightarrow \mathcal{Q}(x, z)$ für alle $x, y, z \in \mathcal{Q}$. Einen Köcher mit Verknüpfung nennen wir auch einen **Magmaoid**. Ein **Morphismus von Magmaoiden** ist ein Köchermorphismus, der mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Eine Kategorie ist in dieser Terminologie Magmaoid, das noch zusätzliche Eigenschaften hat, die man „Assoziativität“ und „Existenz von Identitätspfeilen“ nennen mag und die wir zur Bedingung **unitärassoziativ** zusammenfassen.

Definition 10.6.7. Seien \mathcal{Q} ein Köcher, \mathcal{B} eine Kategorie und $F, G : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{B}$ Köchermorphismen. Eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ ist eine Vorschrift, die jeder Ecke $x \in \mathcal{Q}$ einen Morphismus $\tau_x \in \mathcal{B}(F(x), G(x))$ zuordnet derart, daß



Veranschaulichung eines endlichen Köchers mit 5 Ecken und 6 Pfeilen.

für jeden Pfeil $\vec{p} : x \rightarrow y$ in unserem Köcher \mathcal{Q} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\tau_x} & G(x) \\ F(\vec{p}) \downarrow & & \downarrow G(\vec{p}) \\ F(y) & \xrightarrow{\tau_y} & G(y) \end{array}$$

in unserer Kategorie \mathcal{B} kommutiert. Sind alle τ_x Isomorphismen, so heißt τ eine **Isotransformation**. Die Menge aller Transformationen bezeichnen wir mit $\text{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{B})(F, G)$ oder $\text{Trans}_{\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{B}}(F, G)$ oder abkürzend mit $\text{Trans}_{\mathcal{Q}}(F, G)$ oder auch nur mit $\text{Trans}(F, G)$.

10.6.8. Wie in 10.4.12 die Funktoren bilden für jeden Köcher \mathcal{Q} und jede Kategorie \mathcal{C} die Köchermorphismen $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{C}$ die Objekte einer Kategorie $\text{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$ mit Transformationen als Morphismen.

Beispiel 10.6.9. Seien K ein Körper und \downarrow der Köcher mit zwei Punkten und einem Pfeil vom einen zum anderen. Die Isomorphieklassen in der Kategorie von Köchermorphismen $\text{Car}(\downarrow, \text{Modf}_K)$ werden durch die Theorie der Smith-Normalform ?? bestimmt: Die Dimensionen der beiden beteiligten Vektorräume sowie der Rang der linearen Abbildung legen eine Darstellung dieses Köchers in endlichdimensionalen Vektorräumen bereits bis auf Isomorphie eindeutig fest.

Beispiel 10.6.10. Seien K ein Körper und \circlearrowleft der Köcher mit einem Punkt und einem Pfeil von diesem Punkt zu sich selber. Die Isomorphieklassen in der Kategorie $\text{Car}(\circlearrowleft, \text{Modf}_K)$ werden zumindest im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K bestimmt durch die Theorie der Jordan'schen Normalform ??.

Übungen

Übung 10.6.11. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Köcher und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Kategorien. Ist $K : \mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ ein Isomorphismus von Köchern, so liefert das Vorschalten von K einen Isomorphismus von Kategorien

$$\text{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Car}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich $H : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von H eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

Übung 10.6.12. Seien \mathcal{C} und \mathcal{Q} Köcher und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Q}$ ein Köchermorphismus, der für je zwei Ecken $x, y \in \mathcal{C}$ eine Surjektion $\mathcal{C}(x, y) \twoheadrightarrow \mathcal{Q}(x, y)$ induziert. Gegeben eine Verknüpfung auf \mathcal{C} gibt es höchstens eine Verknüpfung auf \mathcal{Q} derart, daß F ein Morphismus von **Magmaoiden** wird. Wenn es solch eine Verknüpfung gibt, heißt unser Köchermorphismus **angepaßt an die Verknüpfung** und die fragliche Verknüpfung auf \mathcal{Q} die **auf \mathcal{Q} koinduzierte Verknüpfung**. Ist unser Magmaoid \mathcal{C} eine Kategorie, so auch der Köcher \mathcal{Q} mit der koinduzierten Verknüpfung.

10.7 Produkte und Koprodukte in Kategorien

Definition 10.7.1. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und X, Y Objekte von \mathcal{C} . Ein **Produkt** von X und Y ist ein Datum (P, p, q) bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p : P \rightarrow X$ und $q : P \rightarrow Y$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $Z \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $a : Z \rightarrow X, b : Z \rightarrow Y$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $c : Z \rightarrow P$ mit $p \circ c = a$ und $q \circ c = b$. Wir notieren diesen Morphismus dann $c = (a, b)$ oder, ganz pedantisch und wenn wir ihn von den Morphismen aus einem Koprodukt absetzen wollen, als Spalte $c = (a, b)^\top$.

Beispiele 10.7.2. In der Kategorie der Mengen ist das sogenannte kartesische Produkt $P = X \times Y$ mit p, q den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt von X und Y . Analoges gilt in der Kategorie der Vektorräume, der Gruppen, der Ringe, der Monoide, der abelschen Gruppen, und vielen weiteren Strukturen der Bauart „Menge mit ausgezeichneten Verknüpfungen und speziellen Elementen“.

10.7.3 (**Eindeutigkeit von Produkten**). Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer (P, p, q) und $(\tilde{P}, \tilde{p}, \tilde{q})$ zwei mögliche Produkte der Objekte X und Y , so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $c : \tilde{P} \rightarrow P$ mit $p \circ c = \tilde{p}$ und $q \circ c = \tilde{q}$ und ebenso genau ein $d : P \rightarrow \tilde{P}$ mit $\tilde{p} \circ d = p$ und $\tilde{q} \circ d = q$. Weiter gibt es auch genau ein $f : P \rightarrow P$ mit $p \circ f = p$ und $q \circ f = q$, und da sowohl $f = \text{id}$ als auch $f = c \circ d$ diese Bedingung erfüllen, folgt $c \circ d = \text{id}$. Ebenso erhalten wir $d \circ c = \text{id}$, mithin sind c und d zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$(X \times Y, \text{pr}_X, \text{pr}_Y)$$

oder auch noch ausführlicher $X \times^{\mathcal{C}} Y$. Morphismen in das Produkt schreiben wir auch (a, b) . Sind schließlich Morphismen $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$ gegeben und existieren die Produkte $X \times Y$ und $X' \times Y'$, so benutzen wir die Abkürzung $(f \circ \text{pr}_X, g \circ \text{pr}_Y) = f \times g$ und nennen diesen Morphismus den **Produktmorphismus**

$$f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$$

Definition 10.7.4. Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor. Sind in \mathcal{A} Morphismen $p : P \rightarrow X$ und $q : P \rightarrow Y$ gegeben, so erhalten wir Morphismen $Fp : FP \rightarrow FX$ und $Fq : FP \rightarrow FY$ in \mathcal{B} . Wenn das Produkt $FX \times FY$ existiert, erhalten wir so auch einen Morphismus $(Fp, Fq) : FP \rightarrow FX \times FY$. Wenn schließlich auch das Produkt $X \times Y$ existiert, so erhalten wir, indem wir es als unser P nehmen, in unserer ausführlichen Notation einen natürlichen Morphismus

$$F(X \times^{\mathcal{A}} Y) \rightarrow FX \times^{\mathcal{B}} FY$$

10.7.5. Der Morphismus von eben muß im allgemeinen kein Isomorphismus sein. Im Fall des Vergißfunktors von Vektorräumen über einem vorgegebenen Körper zu Mengen ist er jedoch stets ein Isomorphismus von Mengen alias eine bijektive Abbildung.

10.7.6. Produkte können auch für allgemeine Familien von Objekten ein- und derselben Kategorie erklärt werden, wie im folgenden ausgeführt werden soll. Wir besprechen dies Konzept zunächst im Fall der Kategorie der Mengen.

10.7.7 (**Produkte von Mengen, Variante**). Allgemeiner als in ?? diskutiert kann man auch für eine beliebige Familie von Mengen $(X_i)_{i \in I}$ eine neue Menge bilden als die Menge aller Tupel $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in X_i$ für alle $i \in I$. Diese **Produktmenge** notiert man

$$\prod_{i \in I} X_i$$

und die Projektionsabbildungen werden mit $\text{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ oder ähnlich bezeichnet. Wieder können wir für beliebige Abbildungen $f_i : Z \rightarrow X_i$ eine Abbildung $f = (f_i)_{i \in I} : Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ definieren durch die Vorschrift $f(z) = (f_i(z))_{i \in I}$ und jede Abbildung von einer Menge Z in ein Produkt ist von dieser Form mit $f_i = \text{pr}_i \circ f$. In Formeln ausgedrückt liefert das Nachschalten der Projektionen also für jede Menge Z eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Ens}(Z, \prod_{i \in I} X_i) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i \in I} \text{Ens}(Z, X_i) \\ f & \mapsto & (\text{pr}_i \circ f) \end{array}$$

Definition 10.7.8. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten von \mathcal{C} . Ein **Produkt** der X_i ist ein Datum $(P, (p_i)_{i \in I})$ bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p_i : P \rightarrow X_i$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $Y \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $q_i : Y \rightarrow X_i$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $q : Y \rightarrow P$ mit $p_i \circ q = q_i \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann $q = (q_i)_{i \in I}$ oder ganz pedantisch auch schon mal $q = (q_i)_{i \in I}^\top$.

Beispiele 10.7.9. In der Kategorie der Mengen ist $P = \prod_{i \in I} X_i$ mit p_i den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt der X_i . Produkte in der Kategorie der Vektorräume diskutieren wir in 10.8.4.

Beispiel 10.7.10 (Nichtexistenz übergroßer Produkte in $\mathcal{U}\text{Ens}$). Wählen wir ein Mengensystem \mathcal{U} und betrachten präziser die Kategorie $\mathcal{U}\text{Ens}$ der Mengen aus \mathcal{U} , so wird es im allgemeinen beliebige durch eine Menge I indizierte Produkte in $\mathcal{U}\text{Ens}$ nicht geben. Enthält zum Beispiel \mathcal{U} eine Menge Z mit mindestens zwei Elementen, so überlegt man sich leicht, daß etwa ein Produkt $\prod_{i \in \mathcal{U}} Z$ in $\mathcal{U}\text{Ens}$ nicht existieren kann.

Beispiel 10.7.11 (Nichtexistenz übergroßer Produkte im allgemeinen). Ist allgemein \mathcal{C} eine Kategorie und $I := \bigsqcup_{X,Y \in \mathcal{C}} \mathcal{C}(X, Y)$ die Menge der Morphismen von \mathcal{C} und gibt es Objekte Z, W mit mindestens zwei Morphismen $|\mathcal{C}(Z, W)| \geq 2$, so kann das Produkt $P := \prod_{i \in I} W$ in \mathcal{C} nicht existieren, da wir $|\mathcal{C}(Z, P)| \geq |\mathcal{P}(I)|$ hätten und die Kardinalität der Menge aller Morphismen in ganz \mathcal{C} nach Annahme $|I|$ ist und da stets gilt $|I| < |\mathcal{P}(I)|$.

10.7.12 (Eindeutigkeit von Produkten, Variante). Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer $(P, (p_i))$ und $(\tilde{P}, (\tilde{p}_i))$ zwei mögliche Produkte der Objekte X_i , so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $\tilde{p} : \tilde{P} \rightarrow P$ mit $p_i \circ \tilde{p} = \tilde{p}_i$ und ebenso genau ein $p : P \rightarrow \tilde{P}$ mit $\tilde{p}_i \circ p = p_i$. Weiter gibt es auch genau ein $f : P \rightarrow P$ mit $p_i \circ f = p_i$, und da sowohl $f = \text{id}$ als auch $f = \tilde{p} \circ p$ diese Bedingung erfüllen, folgt $\tilde{p} \circ p = \text{id}$. Ebenso erhalten wir $p \circ \tilde{p} = \text{id}$, mithin sind p und \tilde{p} zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$\left(\prod_{i \in I} X_i, (\text{pr}_i)_{i \in I} \right)$$

oder $\prod^{\mathcal{C}}$, wenn wir auch noch die Kategorie \mathcal{C} spezifizieren wollen, oder im Fall endlicher angeordneter Familien $X_1 \times \dots \times X_n$ und benutzen für die Projektionen manchmal auch die Notation pr_{X_i} . Morphismen in das Produkt schreiben wir im Fall endlicher angeordneter Familien auch (q_1, \dots, q_n) oder ganz pedantisch als Spalte $(q_1, \dots, q_n)^{\top}$.

10.7.13 (Umindizierung). Die Frage der Abhängigkeit eines Produkts von der Wahl der Indexmenge ist subtiler als es auf den ersten Blick scheinen mag. Natürlich liefert jede Umindizierung vermittelt einer Bijektion zwischen der Indexmenge und einer weiteren Menge einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen den jeweiligen Produkten. Jedoch liefert die Umindizierung vermittelt einer Permutation der Indexmenge im allgemeinen nicht die Identität auf dem jeweiligen Produkt.

10.7.14 (Produkte über leere Familien). Das Produkt über eine leere Familie von Mengen erklärt man als „die“ einpunktige Menge. Damit wird das Bilden von Produkten von Mengen „assoziativ“ in der Weise, daß wir bei einer Familie $(I_j)_{j \in J}$ von Indexmengen mit disjunkter Vereinigung $I = \bigsqcup_j I_j$ stets eine kanonische Bijektion

$$\prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I_j} X_i \right)$$

haben. Das Produkt über eine leere Familie in einer beliebigen Kategorie \mathcal{C} verstehen wir analog als „das“ finale Objekt, da dann die offensichtliche Abbildung

auch in diesem Fall Bijektionen $\mathcal{C}(Y, \prod_{i \in I} X_i) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(Y, X_i)$ liefert. Wenn wir sagen, eine Kategorie **habe endliche Produkte**, so meinen wir stets implizit, daß auch die Existenz eines finalen Objekts mit gefordert sein soll.

10.7.15. Produkte in der opponierten Kategorie heißen „Koproducte“. Im folgenden schreiben wir das aus.

Definition 10.7.16. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus \mathcal{C} . Ein **Koproduct** der X_i ist ein Datum $(K, (\text{in}_i)_{i \in I})$ bestehend aus einem Objekt $K \in \mathcal{C}$ und Morphismen $\text{in}_i : X_i \rightarrow K$ derart, daß gilt: Ist $Z \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f_i : X_i \rightarrow Z$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $f : K \rightarrow Z$ mit $f \circ \text{in}_i = f_i \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann auch $(f_i)_{i \in I}$ und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann damit ein Morphismus aus einem Koproduct und wann ein Morphismus in ein Produkt gemeint ist. Wenn es drauf ankommt, mag ein Morphismus in ein Produkt eben als Spalte mit einem hochgestellten \top notiert werden und ein Morphismus aus einem Koproduct als Zeile. Wir notieren Koproducte $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ oder ausführlicher $\bigsqcup_{i \in I}^{\mathcal{C}} X_i$ und bei endlich vielen Faktoren auch $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$. Ein leeres Koproduct ist dasselbe wie ein initiales Objekt.

Beispiel 10.7.17 (Disjunkte Vereinigungen von Mengen). Das Koproduct in der Kategorie der Mengen über eine beliebige Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Mengen heißt ihre **disjunkte Vereinigung**

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$$

Das Anhängen der Indizes auf der rechten Seite ist hier nur eine Vorsichtsmaßnahme für den Fall, daß unsere Mengen nicht disjunkt gewesen sein sollten. Jede derartige disjunkte Vereinigung ist versehen mit Inklusionsabbildungen $\text{in}_j : X_j \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$. Weiter können wir für beliebige Abbildungen $f_i : X_i \rightarrow Z$ in eine Menge Z die Abbildung $f : \bigsqcup_{i \in I} X_i \rightarrow Z$ bilden durch die Vorschrift $f(x) = f_i(x)$ für $x \in X_i$, und jede Abbildung der disjunkten Vereinigung in eine Menge Z ist von dieser Form mit $f_i = f \circ \text{in}_i$. In Formeln ausgedrückt liefert das Vorschalten der Injektionen also für jede Menge Z eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Ens}(\bigsqcup_{i \in I} X_i, Z) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i \in I} \text{Ens}(X_i, Z) \\ f & \mapsto & (f \circ \text{in}_i) \end{array}$$

Die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen X_1, \dots, X_n notieren wir auch $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$.

10.7.18 (**Notationen für disjunkte Vereinigungen**). Gegeben eine Menge X und darin eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Teilmengen schreiben wir statt $\bigcup_{i \in I} X_i$ auch

$\bigsqcup_{i \in I} X_i$, wenn wir zusätzlich andeuten wollen, daß unsere Teilmengen paarweise disjunkt sind. In der Tat ist die Eigenschaft, paarweise disjunkt zu sein, ja gleichbedeutend dazu, daß die offensichtliche Abbildung $\bigsqcup_{i \in I} X_i \rightarrow X$ eine Bijektion $\bigsqcup_{i \in I} X_i \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i \in I} X_i$ liefert. In derselben Weise verwenden wir bei endlich vielen Teilmengen X_1, \dots, X_n einer gegebenen Menge die Notation $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$. In der Literatur werden statt \sqcup alternativ auch die Symbole \uplus und \uplus verwendet.

Vorschau 10.7.19. Das Koproduct in der Kategorie der Vektorräume über einem vorgegebenen Körper heißt auch die „direkte Summe“ und wird in 10.8.4 besprochen.

10.7.20. Wie in 10.7.4 im Fall von zwei Faktoren besprochen erhalten wir für einen Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Objekten von \mathcal{A} , wenn Produkte der X_i und der $F X_i$ existieren, einen natürlichen Morphismus

$$F \left(\prod X_i \right) \rightarrow \prod F X_i$$

Ist er „stets“ ein Isomorphismus, so sagen wir metasprachlich, der Funktor F sei **verträglich mit beliebigen Produkten**. Gilt das nur für Produkte endlicher Familien, so sagen wir, unser Funktor sei **verträglich mit endlichen Produkten**. Bereits die Verträglichkeit mit endlichen Produkten schließt die Eigenschaft mit ein, daß finale Objekte auf finale Objekte abgebildet werden. Dual erklären wir die Verträglichkeit mit beliebigen beziehungsweise endlichen Koproducten.

Beispiel 10.7.21. Sei K ein Körper. Der vergeßliche Funktor $v : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Ens}$ ist verträglich mit beliebigen Produkten, aber nicht mit beliebigen, nicht einmal mit endlichen, ja noch nicht einmal mit dem leeren Koproduct. Mehr dazu diskutieren wir im folgenden Abschnitt 10.8.

Vorschau 10.7.22. Für die algebraisch Gebildeten unter Ihnen sei bemerkt, daß in der Kategorie Kring der kommutativen Ringe das Tensorprodukt über \mathbb{Z} im Sinne von ?? ein Koproduct ist, sofern die Multiplikation auf $A \otimes B$ durch $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ erklärt wird und die kanonischen Morphismen durch $a \mapsto a \otimes 1$ und $b \mapsto 1 \otimes b$.

Übungen

Übung 10.7.23. Man präzisiere und zeige die „Assoziativität“ von Produkten, die die Formel $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$ andeutet.

Übung 10.7.24. Man zeige, daß in der Kategorie der kommutativen Monoide das Produkt $M \times N$ zusammen mit $\text{in}_1 : M \rightarrow M \times N, m \mapsto (m, 0)$ und $\text{in}_2 : N \rightarrow M \times N, n \mapsto (0, n)$ ein Koproduct ist.

10.8 Produkte und Summen von Vektorräumen*

Definition 10.8.1. Gegeben eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ von Vektorräumen über einem Körper K bilden wir zwei neue K -Vektorräume, ihr **Produkt** $\prod V_i$ und ihre **direkte Summe** oder kurz **Summe** $\bigoplus V_i$ durch die Regeln

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} V_i &:= \{(v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i\} \\ \bigoplus_{i \in I} V_i &:= \{(v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i \text{ und nur endlich viele } v_i \text{ sind nicht null}\}\end{aligned}$$

Die Vektorraumstruktur ist dabei komponentenweise zu verstehen. Dieselben Konstruktionen sind auch im Fall von Gruppen sinnvoll, wenn wir „null“ als das jeweilige neutrale Element verstehen, und wir werden beide Konstruktionen auch in diesem Kontext verwenden.

10.8.2. Für eine endliche Familie von Gruppen oder Vektorräumen V_1, \dots, V_s stimmen die direkte Summe und das Produkt überein. Wir benutzen dann alternativ die beiden Notationen

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_s = V_1 \times \dots \times V_s$$

Wir zeigen im folgenden, daß die direkte Summe ein Koproduct in der Kategorie der Vektorräume ist. Die allgemeine Notation \sqcup für Koproducte benutzen wir für Vektorräume aber nur ungern und verwenden sie in konkreten Situationen vorzugsweise für das Koproduct von Mengen alias deren disjunkte Vereinigung.

Beispiel 10.8.3 (Summe und Produkt konstanter Familien). Im Fall der konstanten Familie $(K)_{x \in X}$ erhalten wir einen Isomorphismus des freien Vektorraums über X im Sinne von ?? mit unserer direkten Summe

$$K\langle X \rangle \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in X} K$$

vermittels der Abbildungsvorschrift $\sum_{x \in X} a_x x \mapsto (a_x)_{x \in X}$. Auch im Fall einer allgemeineren konstanten Familie $(V)_{x \in X}$ erhalten wir einen Vektorraumisomorphismus

$$\text{Ens}(X, V) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} V$$

vermittels der Abbildungsvorschrift $f \mapsto (f(x))_{x \in X}$.

10.8.4 (**Universelle Eigenschaften von Summe und Produkt**). Das Produkt beziehungsweise die Summe haben im Fall von Vektorräumen oder allgemeiner von abelschen Gruppen die folgenden Eigenschaften: Die offensichtlichen Einbettungen und Projektionen sind Homomorphismen

$$\text{in}_i : V_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i \quad \text{beziehungsweise} \quad \text{pr}_i : \prod_{i \in I} V_i \twoheadrightarrow V_i$$

und ist V ein weiterer K -Vektorraum, so induzieren die durch Vorschalten der in_i beziehungsweise Nachschalten der pr_i gegebenen Abbildungen Bijektionen, ja sogar Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_K \left(\bigoplus_{i \in I} V_i, V \right) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \text{Hom}_K(V_i, V) \\ f &\mapsto (f \circ \text{in}_i)_{i \in I} \\ \\ \text{Hom}_K \left(V, \prod_{i \in I} V_i \right) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \text{Hom}_K(V, V_i) \\ f &\mapsto (\text{pr}_i \circ f)_{i \in I} \end{aligned}$$

Im Fall nichtabelscher Gruppen ist nur die Zweite dieser Abbildungen eine Bijektion. Ich gebe zu, daß das Symbol in_i nun in zweierlei Bedeutung verwendet wird: Einmal bei Mengen für die Einbettung in eine disjunkte Vereinigung und ein andermal bei Vektorräumen für die Einbettung in eine direkte Summe. Was jeweils gemeint ist, muß aus dem Kontext erschlossen werden. Betrachten wir im Fall des ersten Isomorphismus speziell den Fall $V = K$, so erhalten wir einen Isomorphismus zwischen dem Dualraum einer direkten Summe und dem Produkt der Dualräume der Summanden.

10.8.5. Gegeben eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ von Untervektorräumen eines Vektorraums V bezeichnet man den von ihrer Vereinigung erzeugten Untervektorraum auch als ihre **Summe** und notiert ihn $\sum_{i \in I} V_i$. Diese Summe kann auch interpretiert werden als das Bild des natürlichen Homomorphismus $\bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow V$ von der direkten Summe nach V . Ist dieser Homomorphismus injektiv, so sagen wir, die **Summe der Untervektorräume V_i sei direkt**.

10.8.6. Untervektorräume V_1, V_2 eines Vektorraums V sind komplementär als Untervektorräume genau dann, wenn die durch die Einbettungen gegebene lineare Abbildung aus ihrem Koproduct in der Kategorie der Vektorräume alias ihrer direkten Summe ein Isomorphismus $V_1 \sqcup V_2 = V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\sim} V$ ist. Da Koproducte eh nur wohlbestimmt sind bis auf eindeutigen Isomorphismus, schreiben wir im Fall komplementärer Untervektorräume auch abkürzend $V_1 \oplus V_2 = V$.

Übungen

Ergänzende Übung 10.8.7 (Basis einer direkten Summe). Ist $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektorräumen und $B_i \subset V_i$ jeweils eine Basis, so ist die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} \text{in}_i(B_i)$ der Bilder ihrer Basen eine Basis der direkten Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i$. Diese Basis ist auch in offensichtlicher Bijektion zur disjunkten Vereinigung von Basen $\bigsqcup_{i \in I} B_i$.

Ergänzende Übung 10.8.8. Man zeige, daß für jeden Endomorphismus f eines Vektorraums V über einem Körper K die Einbettungen der Haupträume eine In-

jektion

$$\bigoplus_{\lambda \in K} \text{Hau}(f; \lambda) \hookrightarrow V$$

liefern. Der Hauptraum $\text{Hau}(f; \lambda)$ ist hier im Fall, daß λ kein Eigenwert von f ist, als der Nullraum zu verstehen.

Ergänzende Übung 10.8.9. Ich erinnere daran, daß ein Endomorphismus eines Vektorraums nach ?? diagonalisierbar heißt, wenn unser Vektorraum von den Eigenvektoren des besagten Endomorphismus erzeugt wird. Man zeige, daß ein Endomorphismus f eines Vektorraums V über einem Körper K genau dann diagonalisierbar ist, wenn V in die Summe seiner Eigenräume zerfällt, in Formeln

$$\bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f; \lambda) \xrightarrow{\sim} V$$

wobei der Eigenraum $\text{Eig}(f; \lambda)$ in dem Fall, daß λ kein Eigenwert ist, als der Nullraum zu verstehen ist.

Ergänzende Übung 10.8.10. Seien V ein Vektorraum und $T \subset \text{End } V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum seines Endomorphismenraums, der aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Endomorphismen besteht. So besitzt V unter T eine **simultane Eigenraumzerlegung**

$$V = \bigoplus_{\lambda \in T^*} V_\lambda$$

in die **simultanen Eigenräume** $V_\lambda := \{v \in V \mid xv = \lambda(x)v \ \forall x \in T\}$. Hinweis: Sei x_0, \dots, x_n eine Basis von T . Da x_0 diagonalisierbar ist, zerfällt V in Eigenräume unter x_0 . Da die x_i für $i \geq 1$ mit x_0 kommutieren, stabilisieren sie dessen Eigenräume. Nach ?? sind die x_i auch auf diesen Eigenräumen diagonalisierbar. Eine Induktion beendet den Beweis.

Ergänzende Übung 10.8.11. Gegeben ein Vektorraum V und eine Familie von Vektorräumen $(W_i)_{i \in I}$ liefert die kanonische Abbildung stets einen Isomorphismus

$$V \otimes \left(\bigoplus W_i \right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus (V \otimes W_i)$$

Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor. Für jeden K -Vektorraum V ist in anderen Worten der Funktor $V \otimes : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$ verträglich mit beliebigen Koprodukten.

Ergänzende Übung 10.8.12. Gegeben ein Vektorraum V und eine Familie von Vektorräumen $(W_i)_{i \in I}$ liefert die kanonische Abbildung stets eine Injektion

$$V \otimes \left(\prod W_i \right) \hookrightarrow \prod (V \otimes W_i)$$

Sie ist jedoch im allgemeinen kein Isomorphismus. Genauer ist sie nur dann ein Isomorphismus, wenn entweder V endlichdimensional ist oder wenn nur für endlich viele i der zugehörige Vektorraum W_i von Null verschieden ist. Diese Übung sagt insbesondere, daß für jeden K -Vektorraum V der Funktor $V \otimes : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$ mit endlichen Produkten verträglich ist, und daß für jeden endlichdimensionalen K -Vektorraum V der Funktor $V \otimes : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$ mit beliebigen Produkten verträglich ist. Hinweis: Man folgere aus ?? die Injektivität der Komposition $V \otimes W \rightarrow V^{\top\top} \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V^\top, W)$ und biete beide Seiten verträglich ein in $\prod \text{Hom}(V^\top, W_i) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V^\top, \prod W_i)$.

10.9 Algebren*

10.9.1. Sei K ein Körper. Ganz allgemein bezeichnet man einen K -Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \rightarrow A$ als eine K -**Algebra** und versteht unter einem **Algebrenhomomorphismus** in eine weitere K -Algebra eine K -lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Gegeben zwei K -Algebren A, B bezeichnen wir mit $\text{Alg}_K(A, B)$ die Menge der Algebrenhomomorphismen von A nach B .

10.9.2. Ist die Verknüpfung einer Algebra assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Üblich ist in diesem Zusammenhang die Konvention, daß man eine Algebra stets als assoziativ versteht, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht. Gibt es für diese Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation ein Ring ist. Ich schlage deshalb vor, derartige Algebren **Ringalgebren** und im Fall, daß sie auch noch kommutativ sind, **Kringalgebren** zu nennen. Unter einem **Homomorphismus von Ringalgebren** verstehen wir einen Algebrenhomomorphismus, der auch ein Ringhomomorphismus ist. Wir können diese Abbildungen sowohl charakterisieren als Algebrenhomomorphismen, die das Einselement auf das Einselement werfen, als auch als Ringhomomorphismen, die über dem Grundkörper linear sind. Wir vereinbaren für die Menge der Ringalgebrenhomomorphismen von einer K -Ringalgebra A in eine K -Ringalgebra B die Notation $\text{Ralg}_K(A, B)$. Sind beide beteiligten Algebren sogar Kringalgebren, so schreiben wir für diese Menge auch $\text{Kralg}_K(A, B)$.

Beispiel 10.9.3. Sei K ein Körper. Der Polynomring $K[X]$ ist eine K -Ringalgebra, ja eine K -Kringalgebra. Dasselbe gilt für Polynomringe in mehreren Variablen. Gegeben ein K -Vektorraum V ist der Endomorphismenring $\text{End } V$ eine K -Ringalgebra. Dasselbe gilt für die Matrizenringe $\text{Mat}(n; K)$. Eine weder assoziative noch unitäre Algebra wäre etwa $\text{Mat}(n; K)$ mit der bilinearen Verk-

nüpfung $(A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA$. Der Vektorraum $\text{Mat}(n; K)$ mit dieser Verknüpfung gehört zu einem speziellen Typ von Algebren, den sogenannten „Lie-Algebren“. Mit dieser Struktur heißt er auf englisch die „general linear Lie-algebra“ und wird $\mathfrak{gl}(n; K)$ notiert. Die Lie-Algebren spielen eine zentrale Rolle beim Studium von abgeschlossenen Untergruppen der $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ und ganz allgemein beim Studium von „kontinuierlicher Symmetrie“.

10.9.4 (**Diskussion der Terminologie**). Für den Begriff einer Algebra sind in der Literatur leider auch viele andere Konventionen gebräuchlich, bei denen mehr oder weniger der oben explizit aufgeführten zusätzlichen Eigenschaften bereits für eine Algebra implizit mit gefordert werden.

10.9.5. Eine **Unteralgebra** einer Algebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum. Eine **Unterringalgebra** einer Ringalgebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum, der das Eins-Element enthält. Beide Begriffsbildungen ordnen sich der allgemeinen Begriffsbildung 10.3.12 eines Unterobjekts unter.

10.9.6. Sei V ein Vektorraum. Die direkte Summe

$$\bigwedge V = \bigoplus_{r \geq 0} \bigwedge^r V$$

der äußeren Potenzen von V wird mit dem „bilinear erweiterten“ Dachprodukt aufgrund der Assoziativität des Dachprodukts eine Ringalgebra mit Eins-Element $1 \in K = \bigwedge^0 V$. Sie heißt die **äußere Algebra** oder auch **Graßmann-Algebra** des Vektorraums V . Die übliche Identifikation $V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^1 V$ notieren wir kurzerhand $v \mapsto v$ und behandeln sie auch sprachlich als Gleichheit. Gegeben $v \in V$ gilt in $\bigwedge^2 V$ wegen $v \otimes v \in J_2$ natürlich $v \wedge v = 0$. Mit ?? folgt daraus in der Graßmann-Algebra die Identität

$$v \wedge w = -w \wedge v \quad \forall v, w \in V$$

Gegeben eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ liefern die auf den äußeren Potenzen induzierten Abbildungen $\bigwedge^r f : \bigwedge^r V \rightarrow \bigwedge^r W$ in ihrer Gesamtheit einen Ringhomomorphismus

$$\bigwedge f : \bigwedge V \rightarrow \bigwedge W$$

Natürlich gilt auch $\bigwedge(f \circ g) = (\bigwedge f) \circ (\bigwedge g)$ und $\bigwedge(\text{id}) = \text{id}$.

Ergänzung 10.9.7. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Eine weitere Ringalgebra, die man jedem K -Vektorraum in natürlicher Weise zuordnen kann, ist die sogenannte **Tensoralgebra** $T_K V$ über V . Sie ist definiert als

$$T(V) = T_K V = \text{Ten}_K V := \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r} = K \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

mit der K -bilinearen Multiplikation „Zusammentensorieren“, die festgelegt wird durch die Vorschrift $(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_t) := (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_t)$. Für die K -lineare Einbettung $\tau : V \hookrightarrow T_K V$ des zweiten Summanden gilt dabei die folgende universelle Eigenschaft: Ist A eine K -Ringalgebra und $\varphi : V \rightarrow A$ eine K -lineare Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus von K -Ringalgebren $\hat{\varphi} : T_K V \rightarrow A$ mit $\varphi = \hat{\varphi} \circ \tau$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & T_K V \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \hat{\varphi} \\ & & A \end{array}$$

In der Tat sieht man leicht, daß die Vorschrift $\hat{\varphi}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) := \varphi(v_1) \dots \varphi(v_r)$ das einzig mögliche $\hat{\varphi}$ liefert. In wieder anderen Worten liefert also das Vorschalten der kanonischen Einbettung für jede K -Ringalgebra A eine Bijektion

$$\text{Ralg}_K(TV, A) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_K(V, A)$$

Ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Basis von V , so bilden nach ?? die „nichtkommutierenden Monome in den x_λ “ alias die Tensoren $x_{\lambda(1)} \otimes \dots \otimes x_{\lambda(r)}$ für beliebige $r \in \mathbb{N}$ und beliebige Abbildungen $\lambda : \{1, 2, \dots, r\} \rightarrow \Lambda$ eine K -Basis der Tensoralgebra TV . Das „leere Monom“ mit $r = 0$ steht dabei für das Einselement. In diesem Sinne kann man die Tensoralgebra also salopp gesprochen auch als einen „Polynomring in nichtkommutierenden Variablen“ auffassen. Mehr dazu wird in ?? erklärt.

Vorschau 10.9.8. Es gibt noch eine dritte Ringalgebra, die man jedem Vektorraum V in natürlicher Weise zuordnen kann. Diese sogenannte „symmetrische Algebra“ SV diskutieren wir in ?. In ? diskutieren wir auch die Beschreibung der Grassmann-Algebra vom höheren Standpunkt als „Quotient der Tensoralgebra TV nach dem von allen $v \otimes v$ mit $v \in V$ erzeugten Ideal“.

Übungen

Ergänzende Übung 10.9.9. Sei K ein Körper. Man zeige, daß in der Kategorie der K -Kringalgebren das Tensorprodukt ein Koproduct ist, sofern die Multiplikation auf $A \otimes B$ durch $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ erklärt wird und die kanonischen Morphismen durch $a \mapsto a \otimes 1$ und $b \mapsto 1 \otimes b$. Man zeige weiter, daß die analoge Aussage in der Kategorie der K -Ringalgebren nicht richtig ist.

Ergänzende Übung 10.9.10. Sei K ein Körper. Man zeige, daß der auf Objekten durch $X \mapsto \text{Ens}(X, K)$ gegebene Funktor

$$\{\text{Endliche Mengen}\} \rightarrow \{K\text{-Kringalgebren}\}^{\text{opp}}$$

verträglich ist mit endlichen Produkten.

10.10 Yonedalemma*

10.10.1. Einen Funktor von einer Kategorie \mathcal{C} in eine Kategorie von Mengen nennen wir kurz einen **Mengenfunktor auf \mathcal{C}** . Gegeben ein Mengensystem \mathfrak{U} und eine \mathfrak{U} -Kategorie bildet die Menge aller Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ mit Transformationen als Morphismen eine Kategorie $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})$. Jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ liefert einen derartigen Mengenfunktor $\check{X} = X^\vee$ gegeben durch $\check{X} : A \mapsto \mathcal{C}(X, A)$.

Proposition 10.10.2 (Yoneda-Lemma). *Seien \mathfrak{U} ein Mengensystem, \mathcal{C} eine \mathfrak{U} -Kategorie, $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$ ein Mengenfunktor auf \mathcal{C} . So liefert die Abbildungsvorschrift $\tau \mapsto \tau_X(\text{id}_X)$ eine Bijektion*

$$\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})(\check{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

zwischen der Menge aller Transformationen $\check{X} \Rightarrow F$ und der Menge $F(X)$.

Vorschau 10.10.3. Sie mögen als Übung 10.10.16 zeigen, inwiefern diese Bijektionen natürlich sind in X und F .

10.10.4. Die zur Kategorie dieser Mengenfunktoren auf \mathcal{C} opponierte Kategorie

$$\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^\vee := \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})^{\text{opp}}$$

kann man als eine „Vervollständigung“ von \mathcal{C} interpretieren. In der Tat liest sich unser Yoneda-Lemma in dieser Notation als eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(F, \check{X}) \xrightarrow{\sim} F(X)$. Spezialisieren wir zu $F = \check{Y}$, so erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Y, X)$, von der man leicht zeigt, daß sie zur offensichtlichen Abbildung $\mathcal{C}(Y, X) \rightarrow \mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X})$ invers ist. So folgt, daß die Vorschrift $X \mapsto \check{X}$ einen volltreuen Funktor $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$ induziert, die **Yoneda-Einbettung**. Im weiteren lassen wir das Mengensystem \mathfrak{U} wieder in den Hintergrund treten und ignorieren es meist in unserer Notation.

10.10.5 (**Diskussion der Notation**). Die hier verwendeten Notationen \mathcal{C}^\vee und das in 10.10.11 eingeführte \mathcal{C}^\wedge sind genau umgekehrt wie in [KS90]. Dafür stimmt die Notation \mathcal{C}^\wedge dann mit der in [Gro72] verwendeten Notation überein, und auch die Autoren von [KS90] verwenden in [KS00] letztere Notation, die mit der unseren übereinstimmt.

10.10.6 (**Das Yonedalemma im Fall einer Einobjektkategorie**). Im Spezialfall einer Einobjektkategorie $\mathcal{C} = [G]$ ist das Yonedalemma besonders leicht einzusehen: Es besagt dann im Lichte von 10.4.20, daß die äquivarianten Abbildungen von einem Monoid G in eine beliebige G -Menge F festgelegt sind und festgelegt werden können durch das Bild des neutralen Elements.

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die andere Richtung. Für beliebiges $a \in F(X)$ betrachten wir dazu die Abbildungen

$$\begin{aligned} \tau_Y : \mathcal{C}(X, Y) &\rightarrow F(Y) \\ f &\mapsto (Ff)(a) \end{aligned}$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie eine Transformation $\tau : \check{X} \Rightarrow F$ bilden, die wir mit $\hat{\tau}(a)$ bezeichnen. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß die Abbildung $a \mapsto \hat{\tau}(a)$ invers ist zu unserer Abbildung $\tau \mapsto \hat{a}(\tau) := \tau_X(\text{id}_X)$ aus der Proposition. Dafür müssen wir also prüfen, daß gilt $a = \hat{a}(\hat{\tau}(a))$ für alle $a \in F(X)$ und $\tau = \hat{\tau}(\hat{a}(\tau))$ für alle Transformationen $\tau : \check{X} \Rightarrow F$. Das überlassen wir dem Leser. \square

Definition 10.10.7. 1. Diejenigen Mengenfunktoren auf \mathcal{C} , die isomorph sind zu Mengenfunktoren im Bild von $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\vee$, heißen **darstellbare Funktoren**.

2. Ist genauer ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ isomorph zu $\check{X} = \mathcal{C}(X, _)$ für ein $X \in \mathcal{C}$, so sagen wir, der **Funktor F werde dargestellt durch das Objekt X** .

3. Ist noch genauer $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ ein Mengenfunktor und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $a \in F(X)$ ein Element, das unter der Bijektion aus dem Yoneda-Lemma einer Isotransformation $\mathcal{C}(X, _) \xrightarrow{\sim} F$ entspricht, so sagen wir, der **Funktor F werde strikt dargestellt durch das Paar (X, a)** . Ausgeschrieben bedeutet das, daß die Vorschrift $f \mapsto (Ff)(a)$ für alle $Y \in \mathcal{C}$ eine Bijektion $\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{\sim} F(Y)$ liefert. Oft lassen wir das „strikt“ aber auch weg.

Beispiel 10.10.8. Der Vergißfunktör $\text{Mod}_K \rightarrow \text{Ens}$ von den K -Vektorräumen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar $(K, 1)$ oder auch durch jeden anderen eindimensionalen Vektorraum zusammen mit einem beliebigen von Null verschiedenen Element.

Beispiel 10.10.9. Der Vergißfunktör $\text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ von den Gruppen in die Mengen wird strikt dargestellt durch das Paar $(\mathbb{Z}, 1)$ oder auch durch jedes andere Paar (Z, e) bestehend aus einer unendlich zyklischen Gruppe und einem Erzeuger derselben.

Beispiel 10.10.10 (Das Tensorprodukt als Darstellung eines Funktors). Seien K ein Körper und V, W zwei K -Vektorräume. Der Funktor der bilinearen Abbildungen $\text{Mod}_K \rightarrow \text{Ens}$, $L \mapsto \text{Hom}_K^{(2)}(V \times W, L)$ wird strikt dargestellt durch das Paar $(V \otimes W, \tau)$ mit $\tau : V \times W \rightarrow V \otimes W$ der kanonischen bilinearen Abbildung aus ???. Diese Aussage ist eine Umformulierung der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts aus ???.

10.10.11. In derselben Weise kann man für jede \mathcal{U} -Kategorie \mathcal{C} auch die Kategorie

$$\mathcal{C}^\wedge = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{U}\text{Ens})$$

aller kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$ betrachten und erhält mit $X \mapsto \mathcal{C}(_, X)$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$, die **Ko-Yoneda-Einbettung**. Wieder heißen die Funktoren im Bild dieser Einbettung **darstellbare Funktoren** oder, wenn wir es ganz genau nehmen wollen, **kodarstellbare Funktoren**. Die Objekte von \mathcal{C}^\wedge werden Sie später vielleicht einmal unter der Bezeichnung als „mengenwertige Prägarben auf \mathcal{C} “ wiedertreffen. Notieren wir wieder zu $X \in \mathcal{C}$ mit $\hat{X} \in \mathcal{C}^\wedge$ den zugehörigen Funktor $\hat{X} : A \mapsto \mathcal{C}(A, X)$, so liefert diesmal das Auswerten auf id_X eine Bijektion $\mathcal{C}^\wedge(\hat{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

10.10.12. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} kann man leicht explizite Isomorphismen von Kategorien $(\mathcal{C}^\vee)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{opp}})^\wedge$ und $(\mathcal{C}^\wedge)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{opp}})^\vee$ angeben. In diesem Sinne sind unsere beiden Konzepte zueinander dual.

Vorschau 10.10.13. Gegeben eine Kategorie \mathcal{C} ist die volltreue Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ verträglich mit Produkten, wann immer diese in \mathcal{C} existieren. Ebenso ist die volltreue Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$ verträglich mit Koprodukten, wann immer diese in \mathcal{C} existieren. Mehr dazu wird in ?? diskutiert.

Vorschau 10.10.14. Ein Zugang zu der von Grothendieck konstruierten Kategorie der **Schemata** ist es, diese Kategorie zu realisieren als volle Unterkategorie der Kategorie Kring^\vee , die wir erhalten, wenn wir die Kategorie der kommutativen Ringe mit der nötigen Sorgfalt bei Fragen der Mengenlehre in der oben erklärten Weise vervollständigen. Der affine Raum der Dimension n wird dann zum Beispiel definiert als der Funktor, der jedem kommutativen Ring R die Menge R^n zuordnet, und der projektive Raum der Dimension n als der Funktor, der jedem kommutativen Ring R die Menge derjenigen direkten Summanden D des R -Moduls R^{n+1} zuordnet, die „vom Rang Eins“ sind in dem Sinne, daß „bei jedem Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ihre Lokalisierung $D_{\mathfrak{p}}$ ein freier $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul vom Rang Eins ist“. Man kann mit Schemata so effizient und geometrisch arbeiten, daß sie mittlerweile zum eigentlichen Arbeitspferd der sogenannten „algebraischen Geometrie“ geworden sind.

Übungen

Übung 10.10.15 (**Yoneda-Einbettungen und Exponentialgesetz**). Das Exponentialgesetz 10.4.13 spezialisiert zu Bijektionen

$$\text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens})) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}} \times \mathcal{C}, \text{Ens}) \xleftarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \text{Ens}))$$

In der Mitte betrachten wir nun den Mengenfunktor $\text{Mor}_{\mathcal{C}} : (X, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$ der Morphismen. Man prüfe, daß er rechts der Koyoneda-Einbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$ aus 10.10.11 entspricht und links dem Opponierten der Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee$.

Übung 10.10.16 (Natürlichkeit im Yoneda-Lemma). Man zeige, daß für jede Kategorie \mathcal{C} die Bijektionen des Yoneda-Lemmas 10.10.2 eine Isotransformation zwischen den beiden Wegen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens})^{\text{opp}} \times \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens}) & \rightarrow & \text{Ens} \\ \uparrow & & \parallel \\ \mathcal{C} \times \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens}) & \rightarrow & \text{Ens} \end{array}$$

liefern, also zwischen den beiden Funktoren $\mathcal{C} \times \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens})$, die durch $(X, F) \mapsto \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens})(\check{X}, F)$ und $(X, F) \mapsto F(X)$ gegeben werden. Insbesondere liefern sie dann auch eine Isotransformation zwischen den Funktoren $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ens}$ gegeben durch $(X, Y) \mapsto \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens})(\check{X}, \check{Y})$ und $(X, Y) \mapsto \check{Y}(X) = \mathcal{C}(Y, X)$ und wir sehen so ein weiteres Mal, daß $X \mapsto \check{X}$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C}^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens})$ ist.

Übung 10.10.17 (Eindeutigkeit darstellender Objekte). Wird ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ strikt dargestellt durch das Paar (X, a) und durch das Paar (Y, b) , so gibt es genau einen Isomorphismus $i : X \xrightarrow{\sim} Y$ mit der Eigenschaft $F(i) : a \mapsto b$.

Übung 10.10.18. Welche Mengenfunktoren werden durch finale und initiale Objekte dargestellt oder kodargestellt?

Übung 10.10.19. Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum, und $U \subset V$ ein Teilraum. Welchen Mengenfunktor stellt der Quotient V/U dar?

Übung 10.10.20. Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum. Welchen Mengenfunktor stellt die Tensoralgebra dar?

Ergänzende Übung 10.10.21. Welchen Mengenfunktor stellt das Produkt im Sinne von 10.10.7 dar?

Ergänzende Übung 10.10.22. Seien K ein endlicher Körper und Mat_K die Matrixkategorie aus 10.1.7 und \mathfrak{U} ein Mengensystem derart, daß Mat_K eine \mathfrak{U} -Kategorie ist. Wir betrachten die Yonedaeinbettung

$$\text{Mat}_K \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\text{Mat}_K^{\text{opp}}, \mathfrak{U}\text{Ens})$$

Gilt $X \in \mathfrak{U} \Rightarrow |X| < \infty$, so induziert sie eine Äquivalenz von Mat_K mit der vollen Unterkategorie aller mit endlichen Produkten verträglichen Funktoren rechts. Gibt es zwar unendliche, aber keine überabzählbaren Mengen $X \in \mathfrak{U}$, so ist die volle Unterkategorie aller mit endlichen Produkten verträglichen Funktoren aus $\text{Cat}(\text{Mat}_K^{\text{opp}}, \mathfrak{U}\text{Ens})$ äquivalent zur Kategorie aller abzählbaren K -Vektorräume. Analoge Aussagen gelten für andere Kardinalitäten und mutatis mutandis auch für unendliche Körper.

10.11 Universen*

10.11.1. Um diese Leitplanken zur Vermeidung logischer Abstürze zu beschreiben, erfinde ich das Wort **Mengel** als zusammenfassende Bezeichnung für Mengen und Elemente von Mengen, die ja in unserer Terminologie selbst wieder Mengen sein dürfen, aber eben nicht sein müssen. Diese Terminologie ist allerdings nicht gebräuchlich.

Ergänzung 10.11.2. Baut man die Mengenlehre im Rahmen der Logik systematisch auf, vergleiche etwa [Ebb94], so verwendet man statt unserem „Mengel“ schlicht das Wort **Menge**. Aufgrund der Vereinbarung, daß zwei Mengen gleich sind genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben, kann es dann nur eine einzige Menge geben, die kein Element hat. Man notiert sie \emptyset .

Definition 10.11.3. Ein **Universum** ist eine Menge \mathfrak{U} mit den folgenden Eigenschaften:

1. $x \in M$ und $M \in \mathfrak{U}$ implizieren zusammen $x \in \mathfrak{U}$;
2. $x \in \mathfrak{U} \Rightarrow \{x\} \in \mathfrak{U}$;
3. $A \in \mathfrak{U} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \mathfrak{U}$;
4. Gegeben $I \in \mathfrak{U}$ und eine Abbildung $f : I \rightarrow \mathfrak{U}$ gilt $(\bigcup_{i \in I} f(i)) \in \mathfrak{U}$.

Ergänzung 10.11.4 (**Diskussion der Terminologie**). Diese Definition steht fast genauso bei Grothendieck [Gro72, Exposé I]. Abweichend will Grothendieck nur die leere Menge nicht als Universum zulassen und fordert statt unserer zweiten Bedingung scheinbar stärker $x, y \in \mathfrak{U} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{U}$. Da jedoch für jedes nicht-leere Universum gilt $\emptyset \in \mathfrak{U}$ und folglich $\{\emptyset\} \in \mathfrak{U}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathfrak{U}$, ergibt sich das wegen $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$ aus dem letzten Axiom, angewandt auf die Abbildung $f : \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rightarrow \mathfrak{U}$ mit $f(\emptyset) = \{x\}$ und $f(\{\emptyset\}) = \{y\}$.

10.11.5 (**Elemente eines Universums versus Teilmengen eines Universums**). Gegeben ein Universum \mathfrak{U} gilt es genau zu unterscheiden zwischen Mengeln $x \in \mathfrak{U}$, die Elemente des Universums sind, die also in unserer Terminologie ?? zu unserem Universum gehören, und Mengeln $M \subset \mathfrak{U}$, die nur Teilmengen des Universums sind. Nach dem ersten Axiom ist jedes Element eines Universums, wenn es denn eine Menge ist, auch eine Teilmenge besagten Universums, aber das Umgekehrte gilt nicht. Die Formel $M := \{x \in \mathfrak{U} \mid x \notin x\}$ definiert dann eine Teilmenge $M \subset \mathfrak{U}$, die kein Element von \mathfrak{U} zu sein braucht, und die Formel $A := \{M \subset \mathfrak{U} \mid M \notin M\}$ definiert eine Menge A , die keine Teilmenge von \mathfrak{U} zu sein braucht, so daß keine dieser beiden Formeln auf den in ?? beschriebenen Widerspruch führt.

10.11.6 (**Stabilitäten eines Universums**). Wenn wir mit Kuratowski $(x, y) := \{x, \{y\}\}$ setzen, erhalten wir sofort $x, y \in \mathfrak{U} \Rightarrow (x, y) \in \mathfrak{U}$. Das Produkt von je zwei Mengen, die Elemente unseres Universums sind, ist auch selbst Element unseres Universums, zum Beispiel indem wir die Vereinigung erst über alle $x \in X$ und dann über alle $y \in Y$ der Mengen $\{(x, y)\}$ bilden. Weiter ist mit je zwei Mengen $X, Y \in \mathfrak{U}$ auch die Menge der Abbildungen $\text{Ens}(X, Y)$ Element von \mathfrak{U} und dasselbe gilt für jedes Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ mit $I \in \mathfrak{U}$ und $X_i \in \mathfrak{U}$ für alle $i \in I$. Ebenso folgt, daß jede Teilmenge eines Elements unseres Universums wieder ein Element unseres Universums ist.

10.11.7. Gegeben $M \in \mathfrak{U}$ ein Element eines Universums haben wir stets $M \subset \mathfrak{U}$. Es kann also keine injektive Abbildung $\mathfrak{U} \hookrightarrow M$ geben, denn dann müßte es eine injektive Abbildung $\mathcal{P}(M) \hookrightarrow M$ geben und die gibt es nicht. Die Kardinalität eines Universums ist also stets echt größer als die Kardinalität eines jeden seiner Elemente.

10.11.8 (**Existenz von Universen**). Die Annahme, daß jede Menge Element eines Universums ist, müssen wir der Mengenlehre als zusätzliches Axiom hinzufügen. Es scheint nicht auf Widersprüche zu führen, hat aber die bemerkenswerte Konsequenz, daß es zu jeder Menge ein kleinstes Universum gibt, zu dem sie als Element gehört, eben den Schnitt aller Universen, zu denen sie als Element gehört. Insbesondere ist natürlich auch jedes Universum Element eines Universums. Gegeben ein Körper k und ein Universum \mathfrak{U} mit $k \in \mathfrak{U}$ können wir dann auf der Kategorie $k\text{-}\mathfrak{U}\text{Mod}$ der k -Vektorräume, deren zugrundeliegende Menge zu \mathfrak{U} gehört, in der Tat den Dualraumfunktoren erklären.

10.11.9. Das kleinste Universum, das die leere Menge als Element enthält, besteht aus endlichen Mengen.

11 Danksagung

Für Korrekturen zu vorläufigen Versionen danke ich vielen Freiburger Hörern und Mitarbeitern, insbesondere Gregor Fritz, Gerald Höhn, Stephan Wehrheim, Isolde Adler, Olaf Schnürer, Matthias Ansorge, David Stotz, Balthasar Burgenmeister. Giovanni Zaccanelli hat mir mit dem Beispiel der nichtbijektiven Decktransformation geholfen, Leonardo Patimo mit dem Beispiel einer Überlagerung eines zusammenhängenden Raums, deren Zusammenhangskomponenten nicht überlagern.

Literatur

- [Ebb94] Heinz-Dieter Ebbinghaus. *Einführung in die Mengenlehre*. Bibliographisches Institut, Mannheim, third edition, 1994.
- [FR84] D. B. Fuks and V. A. Rokhlin. *Beginner's course in topology*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Geometric chapters, Translated from the Russian by A. Jacob, Springer Series in Soviet Mathematics.
- [Gro72] Alexander Grothendieck. *SGA 4*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1972.
- [Jam95] I. M. James, editor. *Handbook of algebraic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on Manifolds*, volume 292 of *Grundlehren*. Springer, 1990.
- [KS00] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and Sheaves*, volume 332 of *Grundlehren*. Springer, 2000.
- [LA1] **Skriptum Lineare Algebra 1**. Wolfgang Soergel.
- [LR03] William F. Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for mathematics*. Cambridge University Press, 2003.
- [Mac98] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *GTM*. Springer, 1998.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das \cup dem Buchstaben u oder das \subset dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

- \sqsupset kokartesisches Diagramm, 146
- \sqsubset kartesisches Diagramm, 143
- \Rightarrow Transformation, 209, 268
- $\mathcal{C}^{\setminus X}$ freies Objekt von \mathcal{C} über X , 234
- \rightarrow Morphismus in Kategorie, 120, 253
- $\xrightarrow{\sim}$ Isotransformation, 209, 268
- $\xrightarrow{\cong}$ Isomorphismus
 - in Kategorie, 256
 - von Kategorien, 208, 262
- $\xrightarrow{\simeq}$ Äquivalenz von Kategorien, 208, 262
- $\xrightarrow{\text{v}}$ volltreuer Funktor, 208, 262
- $\langle\langle \rangle\rangle$ Erzeugnis als Normalteiler, 179
- $| |$ Polyeder eines Simplicialkomplexes, 165
- $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, X)$, 255
- $[M]$ Einobjektkategorie, 255
- $[\Omega]$ Einpunktköcher, 277
- \mathcal{C}^{\wedge} Funktorkategorie, 232, 293
- \bar{M} Abschluß von M , 22
- \check{X} Funktor $\mathcal{C}(X, _)$, 291
- f^{-1} inverser Morphismus, 124, 258
- G° Einskomponente, 83
- M° Inneres von M , 44
- f° in opponierter Struktur
 - opponierter Morphismus, 140, 260
- X^{\vee} Funktor $\mathcal{C}(X, _)$, 291
- \mathcal{C}^{\vee} Funktorkategorie, 231, 291
- $f_{\#}$ Vorschub
 - von Fundamentalgruppe, 109
- \cong homöomorph, 99
- \dashv Adjunktion, 212, 234
- $*$ Juxtaposition, 273
- \circ Verknüpfung
 - von Morphismen, 120, 252
- \oplus direkte Summe
 - \bigoplus Summe von Familie, 285
 - von komplementären Untervektorräumen, 286
- $\mathcal{C}^{\setminus X}$ freies Objekt von \mathcal{C} über X , 234
- Y^X
 - statt $\mathcal{C}(X, Y)$, 75
- \mathcal{B}^A Funktorkategorie, 210, 271
- \prod Produkt
 - in Kategorie, 282
 - von Mengen, 281
 - von Vektorräumen, 285
- \cap Schnitt
 - \bigcap von Mengenfamilie, 6
- \mathfrak{A} abgeschlossen in
 - metrischem Raum, 18
 - topologischem Raum, 42
- \mathfrak{O} offen in
 - metrischem Raum, 19
 - topologischem Raum, 6, 40
- \uplus disjunkte Vereinigung, 284
- \cup disjunkte Vereinigung, 284
- \cup Vereinigung
 - \bigcup von Mengenfamilie, 6
- \sqcup Koproduct, 141
 - \bigsqcup von Familie, 141
 - disjunkte Vereinigung, 283
- \sqcup disjunkte Vereinigung
 - \bigsqcup von Mengenfamilie, 283
 - von Teilmengen, 284
- \mathcal{C}^{\times} Isomorphismen in \mathcal{C} , 257
- \times
 - Produkt von Kategorien, 261
- \times Produkt
 - in Kategorie, 282
- \times_Y Faserprodukt, 143
- $\times_{/H}$ balanciertes Produkt, 237
- \mathcal{C}^{\times} Isomorphismenkategorie, 257
- $+$ Verschieben von Punkt um Richtungsvektor, 26
- G^{ab} Abelisierung, 132

Ab abelsche Gruppen
 Kategorie, 254
 Abbildungsgrad
 bei Kreislinie, 134
 Abolisierung, 132
 abgeschlossen
 Abbildung, 57
 Abbildung topologischer Räume,
 63
 in metrischem Raum, 18
 produktfest, 94
 topologisch, **42**
 universell, 94
 Abschluß
 in metrischem Raum, 19
 topologischer, **22**, 44
 Abzählbarkeitsaxiom
 erstes, 48
 adjungiert
 Funktork, 234
 Adjunktion
 opponierte, 215
 von Funktoren, 212
 Ähnlichkeit
 lineare, 275
 äquivalent
 Normen, 29
 Äquivalenz
 von Funktoren, 209, 268
 von Kategorien, 208, 262
 äquivariant, 272
 Abbildung, 188
 äußere Algebra, 289
 Aff Kategorie der affinen Räume, 259
 affin
 Abbildung, 27
 Raum, 25
 Raum, normierter, 28
 Raum, über Vektorraum, 27
 unabhängig, 161
 Alexander
 gehörnte Sphäre, 100
 Alexandroff-Topologie, 43
 Alg Algebrenhomomorphismen, 288
 Alg Kategorie der Algebren, 254
 Algebra, **288**
 Algebrenhomomorphismus, **288**
 amalgamiertes Produkt, 161
 Aneinanderhängung
 von Wegen, 104
 Anfangspunkt
 von Pfeil in Köcher, 276
 arrow of quiver, 277
 Augmentierung
 von Simplicialkomplex, 168
 Ausgangskategorie, 123, 259
 Automorphismus
 in Kategorie, 257
 $\mathcal{B}(V, W)$ beschränkte Operatoren, 31
 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(V, W)$ beschränkte Operatoren, 32
 $B(x; \varepsilon)$ Ball in metrischem Raum, 10
 Bahnenraum
 topologischer, 84
 balanciertes Produkt, 237
 Ball, 10
 Basis
 von Faserbündel, 228
 von Überlagerung, 183
 Basis einer Topologie, 60
 Basispunkt, 106, 123
 Basiswechsel
 für Untergruppen, 147
 für Zurückholen mit p , 143
 mengentheoretischer, 146
 bepunkteter Raum, 106
 Berührungspunkt, 18, 45
 beschränkt
 Operator, 31
 Betragsabstand, 10
 Blätterzahl, 185
 Borsuk-Ulam, 137

Bouquet von Kreislinien, 180
 braid group, 239
 Brouwer, Fixpunktsatz
 für die Kreisscheibe, 114
 Bündelatlas, 228
 Bündelkarte, 228
 Butterbrot mit Schinken
 Satz vom, 138
 $\mathcal{C}(X, Y)$ Raum stetiger Abbildungen,
 38, 75
 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ stetige reellwertige Funktionen auf X , 32
 Car Kategorie der Köcher, 277
 $\text{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$, 279
 carquois, 277
 Cat, 148
 $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, 210
 $\underline{\text{Cat}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, 270
 $\text{Cl}_X(M)$ Abschluß von M , 19, **22**, 44
 closure, 44
 CW-Komplex, 71
 $\partial M = \partial_X M$
 topologischer Rand von $M \subset X$,
 44
 $\Delta(\mathcal{K})$ topologische Realisierung eines
 Simplizialkomplexes, 165
 darstellbarer Funktor, 231, 232, 292,
 293
 Darstellung
 eines Köchers, 277
 de Morgan'sche Regeln, 14
 Deckbewegung, 194
 Decktransformation, **193**
 derivierte Gruppe, 132
 Diagramm
 in Kategorie, 277
 Diagrammschema, 277
 dicht
 Teilmenge, **45**
 Dimension
 eines affinen Raums, 26
 Dini, Satz von, 37
 direkte Summe
 von Vektorräumen, 285
 disjunkte Vereinigung, 283
 diskret
 Kategorie, 256
 Teilmenge von topologischem Raum,
 52
 Topologie, 14, 41
 Drehsinn
 als Funktor, 133
 zu einer Orientierung, 134
 Dreiecksungleichung
 bei metrischen Räumen, 10
 Ecke
 von Köcher, 276
 Ecken, 163
 Eckenreduktion, 175
 Eckenzahl, 175
 edge of quiver, 277
 Eigenschaft, 75
 eigentlich
 Gruppenwirkung, 95
 stetige Abbildung, 93
 eigentlich diskontinuierlich, 191
 Ein-Objekt-Kategorie, 255
 Ein-Punkt-Kompaktifizierung, 59
 Einbettung, 53, 266
 v -Einbettung, 53
 topologische, 53, 60
 einfach
 wegzusammenhängend, 107
 Einparameteruntergruppe
 von topologischer Gruppe, 82
 Einpunktköcher, 277
 Einpunktkompaktifizierung, 59
 Einpunktverbindung, 141
 Eins-Element

einer Algebra, 288
 Einskomponente
 einer topologischen Gruppe, 83
 Einszusammenhangskomponente
 einer topologischen Gruppe, 83
 em_x
 Morphismus aus finalem Objekt,
 258
 endlich
 Köcher, 277
 Endomorphismen
 in Kategorie, 255
 Endpunkt
 von Pfeil in Köcher, 277
 ens einelementige Menge, 258
 Ens Kategorie der Mengen, 121, 254
 $\text{Ens}(X, Y)$ Abbildungen $X \rightarrow Y$, 121
 Ens^* bepunktete Mengen, 254
 $\text{Ens}^\times(Z)$ Bijektionen $Z \xrightarrow{\sim} Z$, 221
 Ens^b beschränkte Abbildungen, 16
 erzeugt
 Topologie, 59
 essentiell surjektiv
 Funktorkategorie, 262
 étale
 stetige Abbildung, 185
 Euk Kategorie der euklidischen Vektorräume, 259
 $\text{Exp}(t) := \exp(2\pi it)$, 111
 Exponentialgesetz
 topologisches, 78
 topologisches schwaches, 76
 Fahne
 vollständige, 92
 Fahnenmannigfaltigkeit, 92
 Faserbündel, 228
 Faserfunktorkategorie
 bei Überlagerung, 221
 Faserprodukt
 in Kategorie, 143
 Faserwirkungsvergleich, 222
 feiner
 Topologie, 59
 fin Morphismus zum finalen Objekt,
 258
 $\text{fin}(\mathcal{C})$ finales Objekt, 258
 final, 267
 Objekt, 257
 produktfest final, 84
 stetige Abbildung, 65
 Struktur, 267
 Finaltopologie, 44, 65
 Fixpunktsatz von Brouwer
 für die Kreisscheibe, 114
 Flächenwort, 171
 Fläche
 nichtorientierbare, 102
 orientierbare, 102
 folgenabgeschlossen, 47
 folgenkompakt, 35
 frei
 Objekt über Menge, 234
 Operation, 191
 Produkt von Gruppen, 160
 Frolik-Tychonoff, 95
 Fundamentalgruppe, 107
 basispunktfreie, 133
 Fundamentalgruppe der Kreislinie, 110
 Funktorkategorie, 122, 259
 darstellbarer, 231, 232, 292, 293
 kodarstellbarer, 293
 kontravarianter, 261
 linksadjungierter, 234
 partiell definierter, 234
 quasiinverser, 211, 274
 rechtsadjungierter, 234
 Funktorkategorie, 210, 270
 galois
 Überlagerung, 196
 Ganghöhe, 112

gehörnte Sphäre, 100
 gesamthaft final
 stetige Abbildungen, 65
 gesamthaft initial
 stetige Abbildungen, 60, 61
 Geschlecht, 102
 geschlossen
 Weg, 104
 geschlossene Fläche, 100
 geschlossene kombinatorische Fläche,
 166
 geschlossene Mannigfaltigkeit, 100
 gleichmäßig stetig
 bei metrischen Räumen, 25
 $GO(p, q)$, 87
 Graßmann-Algebra, 289
 Grenzwert
 von Folge
 in metrischem Raum, 16
 von Funktion, 47
 grober Modulraum, 234
 gröber
 Topologie, 59
 größergleich
 Topologie, 59
 großen Diagonale, 239
 groupe de tresses, 239
 Grp Kategorie der Gruppen, 254
 $\text{Grp}^{\wedge} X$ freie Gruppe über X , 154
 Gruppe
 Erzeugende und Relationen, 179
 freie, 154
 Gruppenweg
 in normiertem Vektorraum, 32
 in topologischer Gruppe, 82
 Gruppoid, 122, 256
 fundamentales, 122
 Häufungspunkt
 von topologischem Raum, 46
 Halbnorm, 27
 Hausdorff, 46
 Hausdorff, relativ, 96
 Hausdorffgruppe, 81
 Heine-Borel, 24
 Henkelelimination, 178
 Hochhebung, 111, 193
 homöomorph, 43
 für Teilmengen des \mathbb{R}^n , 99
 Homöomorphismus, **43**
 für Teilmengen des \mathbb{R}^n , 99
 homogener Raum
 von topologischer Gruppe, 85
 Homomorphismus
 von Ringalgebren, 288
 homotop, 118
 mit festen Randpunkten, 105, 118
 Homotopie
 Liftung von, 249
 relative, 118
 von Abbildungen, 118
 Homotopieäquivalenz
 topologische, 122
 Homotopiekategorie
 topologische bepunktete, 123
 Homotopieklasse, 119
 Hopf-Faserung, 90
 hTop Homotopiekategorie
 hTop^* topologische bepunktete, 124
 topologische, 119
 Id Identitätsfunktork, 260
 identische Transformation, 210, 270
 Identität auf X , 120, 252
 Identitätsfunktork, 260
 Igel, Satz vom, 114
 in, Morphismus in Koprodukt, 286
 induziert
 Struktur, 266
 induzierte Metrik, 10
 induzierte Topologie, **8, 41**
 $\text{ini}(\mathcal{C})$ initiales Objekt, 258

initial
 Objekt, 257
 stetige Abbildung, 60
 Struktur, 266
 Initialtopologie, 60
 $\text{Inn}_X(M)$ Inneres von M , 44
 innerer Punkt einer Teilmenge
 eines topologischen Raums, 45
 Inneres, in topologischem Raum, 44
 interior, 44
 invers
 Morphismus, 124, 258
 Iso
 in Kategorie, 121, 256
 isomorph
 Funktoen, 209, 268
 in Kategorie, 121, 256
 Isomorphieklasse, 257
 Isomorphismenkategorie, 257
 Isomorphismus
 in Kategorie, 121, 256
 von Funktoen, 209, 268
 von Kategorien, 208, 262
 Isotransformation, 209, 268, 279

 Juxtaposition, 273

 kanonisch
 Abbildung, **210, 269**
 Isomorphismus, **210, 269**
 kartesisch
 Diagramm, 142
 Produkt
 von beliebig vielen Mengen, 281
 Kategorie, 119, 252
 \mathcal{U} -Kategorie, 263
 $\vec{\mathfrak{V}}_\epsilon$ -Kategorie, 230
 \mathcal{U}_C - $\vec{\mathfrak{V}}_\epsilon$ -Kategorie, 230
 diskrete, 256
 Klassifikationsprobleme, 257
 Klein'sche Flasche, 100

 Klumpentopologie, 14, 41
 Ko-Yoneda-Einbettung, 293
 kodarstellbarer Funktor, 293
 Kodimension
 einer Untermannigfaltigkeit, 243
 Köcher, 276
 mit Verknüpfung, 277
 koendliche Topologie, 43
 kofinal
 Objekt, 257
 koinduziert
 G -Menge, 237
 Struktur, 267
 kokartesisch
 Diagramm, 145
 kombinatorische Fläche, 166
 kombinatorische Fläche ohne Rand, 166
 Kommutator
 in Gruppe, 132
 kompakt
 erzeugt, 79
 metrischer Raum, 23
 relativ, 56
 topologischer Raum, 35, 56
 kompakt-offene Topologie, 75
 Kompaktum, 23
 Komponente
 Wegzusammenhangskomponente,
 51
 Komponentengruppe, 87
 Konjugationsklassen
 von Untergruppen, 189
 konservativ
 Funktor, 264
 konstant
 Weg, 104
 kontravariant
 Funktor, 261
 Konvergenz
 gleichmäßige

von Abbildungen in metrischen Raum, 16
 punktweise
 von Abbildungen in metrischen Raum, 16
 von Folge in metrischem Raum, 16
 Koproduct, 141, 283
 Kowinkel, 146
 Kowinkeldiagramm, 146
 Kralg
 Kategorie der Ringalgebren, 254
 Kringalgebrenhomomorphismen, **288**
 Kreisraum, 206
 Kreuzhaube, 67, 177
 Kring Kategorie der Kringe, 254
 Kringalgebra, 288
 Kugel, 10
 Kugelschale, 99

 Laspp, 257
 Lift, 111, 193
 Liftbarkeitskriterium, 225
 Liften
 von Homotopien, 249
 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ Grenzwert von Folge
 in metrischem Raum, 16
 $\lim_{x \rightarrow p}$ Grenzwert von Abbildung, 47
 Limes
 von Funktion, 47
 lineare Anteil, 27
 linksadjungierter Funktor, 234
 Linksinverses
 in Kategorie, 258
 linkspaltend
 Morphismus, 258
 lokal (E), bei topologischem Raum, 75
 lokal endlich
 Mengensystem, 68
 Simplizialkomplex, 168

 lokal kompakt, 75
 Lusternik-Schnirelmann, 139

 Magmaoid, 277
 Mannigfaltigkeit
 topologische, 53
 Mat Matrixkategorie, 208, 255
 Matrixkategorie, 208, 255
 Maximumsnorm, 28
 Menge
 im Sinne der Logik, 295
 Mengel, 295
 Mengenfunktor, 230, 291
 Metrik, 9
 der gleichmäßigen Konvergenz, 16
 zu Norm, 28
 metrische Topologie, 14, 40
 metrischer Raum, 9
 Mod_K Vektorräume über K , 254
 Modf_K Vektorräume, endlich erzeugte, 262
 Modf_k Vektorräume, endlich erzeugte, 208
 Modul
 über Körper, 255
 Modulraum
 grober, 234
 Möbiusband, 66
 Mon Kategorie der Monoide, 254
 $\text{Mon} \setminus X$ freies Monoid über X , 153
 Monoid
 freies, 153
 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ Menge der Morphismen von \mathcal{C} , 253
 Morphismen über X , 142
 Morphismen unter X , 143
 Morphismus
 G -Morphismus, 188
 in Kategorie, 120, 252

 natürlich

Topologie, 40
 natürliche Topologie
 auf reellen Raum, 31
 nichtleere endliche Schnitte, 58
 nichtoffen
 Punkt, 46
 Norm
 auf reellem Vektorraum, 27
 von multilinearer Abbildung, 33
 normal
 homogener Raum, 189
 Überlagerung, 196
 Normalisator
 von Untergruppe, **189**
 Normalteiler erzeugt von, 179
 normiert
 Raum, 28
 Vektorraum, 27
 nullhomotop, 122
 $O(p, 1)^+$, 87
 $O(p, q)$, 87
 Objekt einer Kategorie, 119, 252
 offen
 Abbildung topologischer Räume, 63
 in topologischem Raum, **6, 40**
 Kern, 44
 metrisch, 18
 offene Überdeckung, 35, 43
 Operation
 durch stetige Abbildungen, 84
 stetige, 84
 Operator
 beschränkter, 31
 stetiger, 32
 Operatornorm, 31
 F^{opp} für Funktor F , 261
 opponiert
 Adjunktion, 215
 Kategorie, 140, 260
 Ord Kategorie der geordneten Mengen, 254
 Ordnungstopologie, 43
 orientierbar
 Fläche, 102
 $\Omega(X, x, y)$ Menge von Wegen, 104
 π_0 Wegzusammenhangskomponenten als Menge, 106
 $\pi_1(X, x, y)$ Homotopieklassen von Wegen, 106
 $\pi_1(X)^{\text{ab}}$ basispunktfreie Fundamentalgruppe, 133
 $\pi_1(X, x)$ Fundamentalgruppe, 107
 π_0 Wegzusammenhangskomponenten als Funktor, 123
 $\pi_1(f) = f_{\#}$, 109
 partiell definiert
 Funktor, 234
 Pfeile, 276
 Poincaré-Vermutung, 109
 pr Projektion aus Produkt, 282
 pr, Projektion aus Produkt, 286
 Produkt
 balanciertes, 237
 in Kategorie
 von Familie, 281
 von zwei Objekten, 140, 280
 von Kategorien, 261
 von Mengen, 281
 von Vektorräumen, 285
 produktfest
 final, 84
 Produktmetrik, 12
 Produktmorphismus, 140, 280
 Produktnorm, 28
 Produkttopologie, **61**
 Projektion
 in Kategorie, 140, 280, 281
 projektiver Raum
 topologisch, 88

propre, 94
 $\text{pt} = \text{pt}(\mathcal{C})$ finales Objekt von \mathcal{C} , 258
 pull-back-Diagramm, 142
 Punkt
 von Köcher, 276
 punktierter Raum, 106
 push-out-Diagramm, 145

 quasiinverser Funktor, 211, 214, 274
 quasikomakt, 35, 56
 quiver, 277
 Quotient, 267
 Quotiententopologie, 66

 Ralg
 Kategorie der Ringalgebren, 254
 Ringalgebrenhomomorphismen, **288**
 Rand
 topologischer, 44
 Randkante, 166
 Randpunkt, 45
 Rang
 von freier Gruppe, 158
 Raum
 affiner, 25
 normierter, 28
 reeller, 27
 Realisierung
 eines Diagrammschemas, 277
 eines Simplizialkomplexes, 165
 Realisierungsfunktor, 259
 rechtsadjungiert
 global, 234
 maximal partiell, 234
 rechtsadjungierter Funktor, 234
 Rechtsinverses
 in Kategorie, 258
 rechtsspaltend
 Morphismus, 258
 reell
 Raum, 27
 Vektorraum, 27
 regulär
 Überlagerung, 196
 relativ
 kompakt, 56
 relativ Hausdorff, 96
 Reskalierung
 von Translationen, 26
 Retraktion, 114
 Richtungsraum, 26
 Richtungsvektor, 26
 Ring Kategorie der Ringe, 254
 Ringalgebra, **288**
 Rng Kategorie der nicht unitären Rin-
 ge, 254

 S^n die n -Sphäre, 99
 Schema, 293
 schleifenfüllend, 107
 Schleifenraum, 106
 Schnitt
 stetiger, 66
 von Mengenfamilie, 6
 von Morphismus, 258
 Schönflies
 Satz von, 100
 Schottky-Gruppe, 159
 Seifert-van Kampen, 148
 Seifert-van Kampen für das fundamen-
 tale Gruppoid, 150
 separiert
 stetige Abbildung, 95
 topologischer Raum, 46
 Simplex
 kombinatorischer
 von Simplizialkomplex, 163
 voller, 161
 von Simplizialkomplex, 163
 simplizial
 Abbildung, 166
 Teilordnung, 168

Simplicialkomplex, 163
 maximaler, 163
 Sinuskurve des Topologen, 53
 Skelett, 71
 $SO(p, 1)^+$, 87
 $SO(p, q)$, 87
 Spaltung
 von Morphismus, 258
 Sphäre, 99
 Spurtopologie, **8, 41**
 Standardtransformation
 or \Rightarrow dreh, 133
 stetig
 Abbildung bei Punkt, 45
 bei topologischen Räumen, 41
 für metrische Räume, 12
 für topologische Räume, **7**
 gleichmäßig
 bei metrischen Räumen, 25
 Operation, 84
 Struktur
 (\mathcal{S}, v) -Struktur, 264
 Subbasis, 60
 Summe
 topologische, 66
 von Untervektorräumen, 286
 von Vektorräumen, 285
 Supremumsnorm, 28
 System von Teilmengen, 6, 40

 $T_K V$ Tensoralgebra, 289
 Tate-Twist von \mathbb{Z} , 110
 Teilobjekt
 v -Teilobjekt, 53
 Teilsystem, 6, 40
 Teilüberdeckung, 33
 $Ten_K V$ Tensoralgebra, 289
 Tensoralgebra, 289
 top einelementiger Raum, 258
 Top topologische Räume, 254
 $Top(X, Y)$ stetige Abbildungen, 74

 Top* bepunktete topologische Räume,
 254
 Topologie, **6, 40**
 als homogener Raum, 85
 feiner, 59
 gröber, 59
 größergleich, 59
 induzierte, **8, 41**
 natürliche, 31, 40
 schwache, auf $U(\mathcal{H})$, 83
 starke, auf $U(\mathcal{H})$, 83
 Topologie als homogener Raum
 feinste, 85
 topologisch
 Abbildung, 43
 frei, Operation
 von diskreter Gruppe, 191
 Gruppe, 81
 Magma, 81
 Mannigfaltigkeit, 53
 Monoid, 81
 Schiefkörper, 83
 topologische Realisierung
 eines Simplicialkomplexes, 165
 von simplicialer Abbildung, 166
 topologischer Raum, **6, 40**
 Torus
 Fläche, 100
 total unzusammenhängend, 50
 Totalraum
 von Überlagerung, 183
 trans, 26
 Trans Transformationen, 211, 271, 279
 Transformation
 von Funktoren, 209, 268
 von Köchermorphismen, 277
 Translation
 von affinem Raum, 26
 Transport durch Wegeliften, 219
 treu
 Funktorkomplex, 208, 262

Triangulierung, 168
 trivial
 Überlagerung, 183
 Trivialisierung
 von Überlagerung, 183
 \sqcup Koproduct, 283
 Überdeckung, 33
 einer Teilmenge, 36
 überdeckungskompakt, 35
 Überlagerung, **183**
 triviale, 183
 unverzweigte, 183
 überlagerungstrivial, **186**
 $\mathcal{U}\text{Ens}$ Mengen $X \in \mathcal{U}$, 121, 253
 \mathcal{U} -Kategorie, 263
 Umgebung
 ε -Umgebung, 10
 in metrischem Raum, 10
 in topologischem Raum, 7, 45
 Umgebungsbasis
 in topologischem Raum, 48
 umgekehrt
 Weg, 104
 Umlaufzahl
 eines Weges
 auf der Kreislinie, 110
 in der Zahlenebene, 127
 $\mathcal{U}\text{Mod}_K$, 254
 $\mathcal{U}\text{Mod}_K$ Vektorräume $V \in \mathcal{U}$, 255
 unitärassoziativ
 Magmaoid, 277
 Universum, 295
 Unter algebra, 289
 Unterkategorie, 257
 Unterobjekt
 (\mathcal{S}, v) -Unterobjekt, 266
 v -Unterobjekt, 53
 Unterring algebra, 289
 $\mathcal{U}\text{Top}$ topologische Räume $X \in \mathcal{U}$, 120
 Vektorraum
 reeller, 27
 Vereinigung
 von Mengenfamilie, 6
 Vergiß-Funktor, 261
 Verklebung
 von topologischer Fläche, 169
 Verknüpfung
 auf Köcher, 277
 koinduzierte, 279
 von Morphismen, 120, 252
 von Wegen, 104
 vertex of quiver, 277
 verträglich mit Produkten
 Funktor, 141
 Vieleck, 169
 voll
 Funktor, 262
 Simplex, 168
 Unterkategorie, 257
 Vollkugel, 99
 volltreu, Funktor, 208, 262
 Weg
 konstanter, 104
 umgekehrter, 104
 Wegliftungsoperation, 221
 Wegeraum, 106
 wegetrivial, 187, 204
 wegzusammenhängend
 einfach, 107
 Wegzusammenhang, 48
 Wegzusammenhangskomponente, 51
 Winkel
 spezielles Diagramm, 143
 Winkeldiagramm, 143
 Yoneda-Einbettung, 291
 $\mathbb{Z}(1)$ Tate-Twist von \mathbb{Z} , 110
 Zelle
 von CW-Komplex, 71
 Zerschneidung, 169

Zielkategorie, 123, 259
Zopfgruppe, 239
 abstrakte, 242
Zopfrelation, 239
Zurückholen
 Morphismus, 143
Zus(X) Menge der Zusammenhangs-
 komponenten von X , 86
zusammenhängend
 Gruppoid, 151
 topologischer Raum, 49
Zusammenhangskomponente
 eines topologischen Raums, 51
 von $GL(n; \mathbb{R})$, 92
zusammenziehbar
 topologischer Raum, 122
 Weg, 105