

# GROTHENDIECK'S SECHS FUNKTOREN

Wolfgang Soergel

25. April 2024

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Trennrückzug</b>	<b>4</b>
1.1	Garben als Schmelzkategorie . . . . .	4
1.2	Trennfaserungen . . . . .	8
1.3	Multilineare Algebra für Modulgarben . . . . .	12
1.4	Trennfaserungen bei eindeutigen Leertrennungen . . . . .	16
1.5	Formelsammlung für Trennfaserungen . . . . .	18
1.6	Trennschmelzfakofaserungen . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Derivierter Trennrückzug</b>	<b>30</b>
2.1	Motivation . . . . .	30
2.2	Lokalisierung von Kofaserungen . . . . .	30
2.3	Quisrechtsentfaltung von Garbenkomplexen . . . . .	33
2.4	Derivierte Garbenopfaserung . . . . .	39
2.5	Lokalisierung durch Anpassung . . . . .	43
2.6	Lokalisierung von Schmelzkategorien . . . . .	51
2.7	Homotopie für bequeme Schmelzkategorien . . . . .	52
2.8	Derivieren abelscher Schmelzkategorien . . . . .	55
2.9	Derivierte Garbenoptrennfaserung . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Verschwindungssätze mit Anwendungen</b>	<b>65</b>
3.1	Garbenazyklische Morphismen . . . . .	65
3.2	Künnethformeln der Garbenkohomologie . . . . .	67
3.3	Gysinsequenz für Sphärenbündel . . . . .	74
3.4	Charakteristische Klassen und Produkte . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Trennrückzug und Schreivorschub</b>	<b>85</b>
4.1	Lokal eigentlicher Basiswechsel . . . . .	85
4.2	Kompakte Schnitte und Kolimites . . . . .	89
4.3	Underivierte Projektionsformel . . . . .	92
4.4	Trennrückzug von Schreimorphismen . . . . .	95
4.5	Rückzug-Schreivorschub-Formalismus . . . . .	100
4.6	Trennrückzug-Schreivorschub-Formalismus . . . . .	106
4.7	Formelsammlung für verflochtenen Trennaustausch . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Derivierter Trennrückzug und Schreivorschub</b>	<b>115</b>
5.1	Motivation . . . . .	115
5.2	Derivierter Schreivorschub . . . . .	115
5.3	Ausgezeichnete Dreiecke zu offenen Teilmengen . . . . .	123
5.4	Lokalisierung präverflochtener Winkelfaserungen . . . . .	128

5.5	Rückzug-Schreibvorschub derivierter Modulgarben . . . . .	137
5.6	Trennrückzug-Schreibvorschub derivierter Modulgarben . . . . .	145
5.7	Schreirückzug für derivierte Modulgarben . . . . .	150
<b>6</b>	<b>Anwendungen und Vergleichssätze</b>	<b>162</b>
6.1	Anwendung auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	162
6.2	Mannigfaltiger Eigrückzug . . . . .	166
6.3	Homologien und ihre Funktorialitäten . . . . .	169
6.4	Schnittpaarung und Poincarédualität . . . . .	178
6.5	Schnittpaarung und Poincarédualität, ERWEITERT . . . . .	193
6.6	Wohin damit? . . . . .	194
6.7	Vergleich mit der singulären Theorie . . . . .	199
<b>7</b>	<b>Äquivariante derivierte Kategorie</b>	<b>212</b>
7.1	Ergänzungen zu äquivarianten Garben . . . . .	212
7.2	Äquivariante Objekte (VERLEGEN!) . . . . .	212
7.3	Äquivariante derivierte Kategorie . . . . .	223
7.4	Äquivariante Varianten der Adjungierten . . . . .	231
7.5	Äquivalenzen mit Gruppenwechsel . . . . .	234
7.6	Vernachlässigen zusammenziehbarer Anteile . . . . .	235
7.7	Danksagung . . . . .	237
<b>8</b>	<b>Schrotthalde</b>	<b>238</b>
<b>9</b>	<b>Wohin? Hier unnötig.</b>	<b>239</b>
9.1	Relativ angereicherte Schmelz- und Trennkategorien . . . . .	239
9.2	Homotopie für unbequeme Schmelzkategorien* . . . . .	243
9.3	Versuch . . . . .	245
9.4	Abstract in English . . . . .	249
9.5	Trennrückzug-Schreibvorschub für Modulgarben, ALT . . . . .	253
9.6	Das muß hinter die Diskussion des Formalismus! . . . . .	258
9.7	Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen, ALT . . . . .	260
9.8	Weiterer underivierter Schrott . . . . .	264
9.9	Schrott zu derivierten Schmelzkategorien . . . . .	264
9.10	Reste Schnittpaarung . . . . .	273
<b>10</b>	<b>Danksagung</b>	<b>279</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>280</b>
	<b>Indexvorwort</b>	<b>282</b>



# 1 Trennrückzug

## 1.1 Garben als Schmelzkategorie

1.1.1. Ich erinnere an Schmelzkategorien [TSK] 1.1.4, universelle Verschmelzungen [TSK] 1.3.1, stabil universelle Verschmelzungen [TSK] 1.3.2 und Multihom [TSK] 1.4.3.

1.1.2 (**Kartesische Schmelzkategorie der Mengenprägarben**). Gegeben ein topologischer Raum  $X$  erinnern wir die Kategorie  $\text{pEns}/X$  der Mengenprägarben auf  $X$ . Diese Kategorie hat endliche Produkte und die zugehörige banale Trennkategorie  $\lambda\text{pEns}/X$  kann damit nach [TSK] 1.5.10 als Trennschmelzkategorie aufgefaßt werden, die wir auch abkürzend  $\text{pEns}/X = \lambda\text{pEns}/X$  notieren. Die Schmelzkategorie ist dabei die kartesische Schmelzkategorie der Mengenprägarben. Explizit können wir für  $r \geq 0$  eine Verschmelzung

$$\phi \in \lambda\text{pEns}/X(\mathcal{F}_1 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

beschreiben als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \Subset X$  eine Abbildung  $\phi_U : \mathcal{F}_1(U) \times \dots \times \mathcal{F}_r(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  so zuordnet, daß für jede weitere offene Teilmenge  $V \Subset U$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(U) \times \dots \times \mathcal{F}_r(U) & \rightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_1(V) \times \dots \times \mathcal{F}_r(V) & \rightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi_U$  und  $\phi_V$  in den Horizontalen kommutiert. Die Multiverknüpfungen zwischen diesen Verschmelzungen sind die offensichtlichen. Die Vorschrift  $\phi \mapsto \phi_X(*)$  liefert eine Bijektion

$$\beta_{\mathcal{G}} : \lambda\text{pEns}/X(\curlywedge, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \Gamma\mathcal{G}$$

zwischen der Menge der Leerverschmelzungen nach  $\mathcal{G}$  und der Menge der globalen Schnitte von  $\mathcal{G}$ . In ihrer Gesamtheit bilden diese Bijektionen eine Isotransformation  $\beta : \text{L} \xrightarrow{\sim} \Gamma$  zwischen dem Leerverschmelzungsfunktor unserer Schmelzkategorie und dem Funktor der globalen Schnitte. Ein Multihom

$$(\mathcal{F}_1 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r) \cong_{\lambda\text{pEns}/X} \mathcal{G}$$

in der Schmelzkategorie  $\lambda\text{pEns}/X$  erhält man, indem man  $U \Subset X$  die Menge  $\lambda\text{pEns}/U(\mathcal{F}_1|_U \times \dots \times \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$  aller entsprechenden Verschmelzungen der auf  $U$  eingeschränkten Prägarben zuordnet. All diese Behauptungen sind leicht einzusehen.

**1.1.3 (Kartesische Schmelzkategorie der Mengengarben).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  besitzt auch die Kategorie  $\text{Ens}/X$  der Mengengarben auf  $X$  Produkte und der Einbettungsfunktor  $\text{Ens}/X \xrightarrow{\sim} \text{pEns}/X$  der Garben in die Prägarben ist verträglich mit Produkten. Er induziert folglich eine volltreue Einbettung von Trennschmelzkategorien

$$\wedge \text{Ens}/X \xrightarrow{\sim} \wedge \text{pEns}/X$$

Insbesondere schränkt unser  $\beta$  aus 1.1.2 ein zu einer Isotransformation  $\beta : \text{L} \xrightarrow{\sim} \Gamma$  vom Leerverschmelzungsfunktor von  $\wedge \text{Ens}/X$  zum Funktor der globalen Schnitte. Wir kürzen im folgenden oft  $\wedge \text{Ens}/X$  zu  $\text{Ens}/X$  ab. Auch  $\wedge \text{Ens}/X$  besitzt Multihom und der Einbettungsfunktor der Mengengarben in die Mengenprägarben ist verträglich mit Multihom, wie Sie bereits in [TG] 2.2.47 prüfen sollten. Darüber hinaus ist offensichtlich jedes Multihom von Prägarben in eine Garbe bereits selbst eine Garbe. Im Fall einer Garbe  $\mathcal{G}$  liefert speziell das Vorschalten des universellen Morphismus zur Garbifizierung  $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1^+$  eine Bijektion

$$\wedge \text{pEns}/X(\mathcal{F}_1^+ \curlywedge \mathcal{F}_2 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \wedge \text{pEns}/X(\mathcal{F}_1 \curlywedge \mathcal{F}_2 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

**1.1.4 (Schmelzkategorie der abelschen Prägarben).** Im allgemeinen Rahmen unserer terminologischen Versuche [TSK] 3.5.5 können wir die Schmelzkategorie der abelschen Prägarben auf einem Raum  $X$  einführen als die Schmelzkategorie

$$\text{pAb}/X := \text{kok}(\wedge \text{pEns}/X)$$

der kommutativen und kokommutativen Hopfobjekte der Trennschmelzkategorie  $\wedge \text{pEns}/X$ . Nach [TSK] 3.5.6 trägt  $\text{pAb}/X$  als kok-Konstruktion eine ausgezeichnete additive Struktur und wird angeliefert mit einem auf Leerverschmelzungen volltreuen Schmelzfunktor  $\text{pAb}/X \rightarrow \wedge \text{pEns}/X$ . Weil das so schnell ging und wir die kok-Konstruktion auch nicht so ausführlich besprochen hatten, schreibe ich es nun noch explizit aus.

**1.1.5 (Schmelzkategorie der abelschen Prägarben, Variante).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  machen wir die Kategorie  $\text{pAb}/X$  der abelschen Prägarben auf  $X$  zu einer Schmelzkategorie, indem wir für  $r \geq 0$  eine Verschmelzung

$$\phi \in \text{pAb}/X(\mathcal{F}_1 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

erklären als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \Subset X$  eine multiadditive Abbildung  $\phi_U : \mathcal{F}_1(U) \times \dots \times \mathcal{F}_r(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  so zuordnet, daß für  $V \Subset U$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(U) \times \dots \times \mathcal{F}_r(U) & \rightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_1(V) \times \dots \times \mathcal{F}_r(V) & \rightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi$  in den Horizontalen kommutiert. Insbesondere schränkt unser  $\beta$  aus 1.1.2 ein zu einer Isotransformation  $\beta : L \xrightarrow{\cong} \Gamma$  vom Leerverschmelzungsfunktor von  $\text{pAb}/X$  zum Funktor der globalen Schnitte. Die Multiverknüpfungen sind die offensichtlichen und das Vergessen der Addition liefert einen treuen und auf Leerverschmelzungen volltreuen Schmelzfunktor  $\text{pAb}/X \rightarrow \wedge \text{pEns}/X$  in die kartesische Schmelzkategorie der Mengenprägarben. Die Schmelzkategorie  $\text{pAb}/X$  der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum  $X$  können wir mit einer additiven Struktur versehen, indem wir die Summe von zwei Verschmelzungen  $\phi + \psi$  erklären durch  $(\phi + \psi)_U := \phi_U + \psi_U$ .

**Proposition 1.1.6.** *Die Schmelzkategorie  $\text{pAb}/X$  der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum  $X$  hat universelle Verschmelzungen und Multihom.*

*Beweis.* Eine offensichtliche universelle Verschmelzung von abelschen Prägarben  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$  erhalten wir in die Tensorproduktprägarbe  $U \mapsto \mathcal{F}_1(U) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_r(U)$ . Wir notieren sie

$$\mathcal{F}_1 \otimes^{\text{p}} \dots \otimes^{\text{p}} \mathcal{F}_r$$

Eine universelle Leerverschmelzung entspricht, da salopp gesprochen das leere Tensorprodukt abelscher Gruppen in unseren Konventionen eben  $\mathbb{Z}$  mit dem ausgezeichneten Element  $1 \in \mathbb{Z}$  ist, unter  $\beta : L \xrightarrow{\cong} \Gamma$  dem globalen Schnitt  $1 = 1_X$  der konstanten Prägarbe auf  $X$  mit Schnitten  $\mathbb{Z}$ . Ein Multihom

$$(\mathcal{F}_1 \vee \dots \vee \mathcal{F}_r) \Rightarrow \mathcal{G}$$

erhalten wir als diejenige abelsche Prägarbe, die jedem  $U \in X$  die abelsche Gruppe  $\text{pAb}/U(\mathcal{F}_1|_U \vee \dots \vee \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$  aller entsprechenden Verschmelzungen der auf  $U$  eingeschränkten Prägarben zuordnet.  $\square$

1.1.7. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  erklären wir die **Schmelzkategorie der abelschen Garben** als die volle Unterschmelzkategorie  $\text{Ab}/X \subset \text{pAb}/X$  mit nur abelschen Garben als Objekten und versehen sie mit der induzierten additiven Struktur. Insbesondere schränkt unser  $\beta$  aus 1.1.5 ein zu einer Isotransformation  $\beta : L \xrightarrow{\cong} \Gamma$  vom Leerverschmelzungsfunktor von  $\text{Ab}/X$  zum Funktor der globalen Schnitte. In  $\text{Ab}/X$  gibt es Multihom und der Einbettungsfunktor  $\text{Ab}/X \hookrightarrow \text{pAb}/X$  ist verträglich mit Multihom. In  $\text{Ab}/X$  gibt es auch universelle Verschmelzungen, aber der Einbettungsfunktor  $\text{Ab}/X \hookrightarrow \text{pAb}/X$  ist nicht mit ihnen verträglich. Genauer ist das Prägarbentensorprodukt von abelschen Garben im allgemeinen keine Garbe und man erhält universelle Verschmelzungen von abelschen Garben durch Garbifizierung des Prägarbentensorprodukts. Diese Garbifizierung heißt die **Tensorproduktgarbe**. Wir notieren sie

$$\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_r := (\mathcal{F}_1 \otimes^{\text{p}} \dots \otimes^{\text{p}} \mathcal{F}_r)^+$$

Speziell entspricht der konstante Schnitt  $1 = 1_X$  der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$  unter  $\beta$  einer universellen Leerverschmelzung in  $\text{Ab}/_X$ . Gegeben eine abelsche Garbe  $\mathcal{G}$  und abelsche Prägarben  $\mathcal{F}_i$  liefert das Vorschalten von  $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1^+$ , wie leicht aus der entsprechenden Aussage 1.1.3 für Mengenprägarben folgt, eine Bijektion

$$\text{pAb}/_X(\mathcal{F}_1^+ \curlywedge \mathcal{F}_2 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{pAb}/_X(\mathcal{F}_1 \curlywedge \mathcal{F}_2 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

1.1.8. Im Fall  $r = 1$  heißt unser Multihom die **Hom-Garbe**. Man findet dafür in der Literatur statt  $\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}$  meist die Notationen  $\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  oder  $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ .

1.1.9 (**Halme von Tensorproduktgarben**). Gegeben abelsche Garben  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  auf einem topologischen Raum  $X$  liefert die Verträglichkeit des Tensorprodukts abelscher Gruppen mit Kolimites für jeden Punkt  $x \in X$  einen Isomorphismus

$$\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{G}_x \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_x$$

zwischen dem Tensorprodukt der Halme und den Halmen des Tensorprodukts. Dasselbe gilt für das Prägarbentensorprodukt von abelschen Prägarben.

## Übungen

*Übung 1.1.10 (Notwendigkeit der Garbifizierung beim Tensorprodukt).* Wir betrachten auf dem Kreisring  $S^1$  die nichtkonstante aber lokal konstante Garbe  $\mathcal{F}$  von abelschen Gruppen vom Rang Eins. Ihr Tensorprodukt  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$  mit sich selbst ist isomorph zur konstanten Garbe mit Faser  $\mathbb{Z}$  und hat von Null verschiedene globale Schnitte, obwohl die Faktoren  $\mathcal{F}$  selbst keine von Null verschiedenen globalen Schnitte haben.

*Übung 1.1.11.* Sind  $\mathcal{F}, \mathcal{I} \in \text{Ab}/_X$  abelsche Garben auf einem topologischen Raum und ist  $\mathcal{I}$  injektiv, so ist die Homgarbe  $\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{I}$  welk.

*Übung 1.1.12.* Eine abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  heißt **flach**, wenn das Tensorieren mit unserer Garbe ein exakter Funktor ist. Man zeige, daß eine abelsche Garbe genau dann flach ist, wenn sie flache Halme hat. Man zeige, daß jede abelsche Garbe ein Quotient einer flachen Garbe ist. Hinweis: Man verwende Summen von Garben der Gestalt  $\mathbb{Z}_{U \subset X}$  für  $U \Subset X$ . Man zeige, daß jede Untergarbe einer flachen abelschen Garbe wieder flach ist.

*Übung 1.1.13.* Die Wolkenkratzergarbe mit Halm  $\mathbb{Z}$  am Ursprung der reellen Zahlengerade ist nicht starr in der Schmelzkategorie  $\text{Ab}/_{\mathbb{R}}$  der abelschen Garben auf der reellen Zahlengeraden.

*Übung 1.1.14.* Eine abelsche Garbe  $\mathcal{L}$  auf einem Raum  $X$  heißt **lokal frei vom Rang Eins**, wenn unser Raum eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  besitzt derart, daß für alle  $U \in \mathcal{U}$  die abelsche Garbe  $\mathcal{L}|_U$  isomorph ist zu  $\mathbb{Z}_U$ . Man zeige, daß es für jede abelsche Garbe  $\mathcal{L}$  auf einem Raum  $X$ , die lokal frei ist vom Rang Eins, genau einen Isomorphismus  $q = q_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$  gibt mit  $q(s \otimes s) = 1$  für jeden Erzeuger  $s$  von  $\mathcal{L}|_U$  für  $U \Subset X$ . Wir nennen ihn die **Quadrattrivialisierung**.



## 1.2 Trennfaserungen

**Definition 1.2.1.** Ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt eine **Trennfaserung**, wenn der auf den Familienkategorien induzierte Funktor  $\mathcal{M}^\wedge \rightarrow \mathcal{N}^\wedge$  eine Faserung ist und bei diesem Funktor das Vertupeln aus kartesischen Morphismen kartesische Morphismen macht.

**Definition 1.2.2.** Gegeben ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt eine Trennung in der Ausgangstrennkategorie  **$p$ -kartesisch**, **stark  $p$ -kartesisch**,  **$p$ -kokartesisch** beziehungsweise **stark  $p$ -kokartesisch**, wenn der zugehörige Morphismus in der Familienkategorie für den induzierten Funktor  $\mathcal{M}^\wedge \rightarrow \mathcal{N}^\wedge$  die entsprechende Eigenschaft hat. Die zu einem Trennfunktor gehörigen Rückzugsfunktoren auf der Familienkategorie bezeichnen wir auch als **Trennrückzug**.

1.2.3. Analoge Sprechweisen vereinbaren wir für Schmelzfunktoren und erhalten so insbesondere die Begriffe einer **Schmelzkofaserung** und des zugehörigen **Schmelzvorschubs**.

*Beispiel 1.2.4 (Trennfaserungen zur terminalen Trennkategorie).* Es gibt nach [TSK] 1.6.17 eine terminale Trennkategorie, bestehend aus einem einzigen Objekt mit einelementigen Mengen von Trennungen. Unsere universellen Trennungen aus [TSK] 1.3.16 sind genau die Trennungen, die in Bezug auf den einzigen Trennfunktor in die terminale Trennkategorie stark kartesische Morphismen der Familienkategorie liefern. Unsere stabil universellen Trennungen aus [TSK] 1.3.16 sind genau die Trennungen, die auch beim Vertupeln mit endlich vielen Identitätstrennungen in Bezug auf den einzigen Trennfunktor in die terminale Trennkategorie stark kartesische Morphismen der Familienkategorie liefern. Eine Trennkategorie hat stabil universelle Trennungen [TSK] 1.3.16 genau dann, wenn der einzige von ihr ausgehende Trennfunktor in die terminale Trennkategorie im Sinne der vorhergehenden Definition eine **Trennfaserung** ist. Opponiertes gilt für Schmelzkofaserungen über der terminalen Schmelzkategorie.

1.2.5 (**Stark kartesische Lifts stabil universeller Trennungen**). Bei einer Verknüpfung  $qp$  von Funktoren ist nach [TG] 6.2.20 ein Morphismus über einem stark  $q$ -kartesischen Morphismus stark  $p$ -kartesisch genau dann, wenn er stark  $qp$ -kartesisch ist. Insbesondere ist die Verknüpfung von Faserungen wieder eine Faserung und damit auch die Verknüpfung von Trennfaserungen wieder eine Trennfaserung. Nach 1.2.4 ist weiter bei einem Trennfunktor ein Lift einer universellen Trennung genau dann universell, wenn er stark kartesisch ist. Ebenso ist bei einem Trennfunktor ein Lift einer stabil universellen Trennung genau dann stabil universell, wenn er stark kartesisch ist. Opponiertes gilt für Schmelzkofaserungen.

*Beispiel 1.2.6.* Wir erinnern die Mengengarbenfaserung  $\text{Ens}/\text{Top} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.7. Sie induziert wie jeder Funktor einen Trennfunktor  $\wedge \text{Ens}/\text{Top} \rightarrow \wedge \text{Top}$

zwischen den zugehörigen banalen Trennkategorien. Im Fall der Mengengarbenfaserung ist dieser Funktor sogar eine Trennfaserung, die **Mengengarbentrennfaserung**. Genauer geht die kartesische Trennung über  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  nach  $(Y_1, \mathcal{G}_1) \wedge \dots \wedge (Y_r, \mathcal{G}_r)$  in dieser Trennfaserung vom Produkt der auf  $X$  zurückgezogenen Mengengarben  $f_i^* \mathcal{G}_i$  aus.

*Beispiel 1.2.7.* Wir erweitern die Mengengarbenopfaserung  $\text{Ens}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.12 zu einem Trennfunktor in die banale Trennkategorie  $\wedge \text{Top}$ , indem wir einen **Multiplomorphismus**  $(X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y_1, \mathcal{G}_1) \wedge \dots \wedge (Y_r, \mathcal{G}_r)$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  erklären als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder Familie von offenen Teilmengen  $V_i \subseteq Y_i$  und jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  mit  $f_i(U) \subset V_i \forall i$  eine Abbildung

$$\mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V_n) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

so zuordnet, daß für alle  $V'_i \subseteq V_i \subseteq Y_i$  und  $U' \subseteq U$  mit  $f_i(U') \subset V'_i \forall i$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V_n) & \rightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_1(V'_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V'_n) & \rightarrow & \mathcal{F}(U') \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi$  in den Horizontalen kommutiert. Auch dieser Trennfunktor ist eine Trennfaserung. Wir nennen ihn die **Mengengarbenoptrennfaserung**. Die Faser  $\text{Ens}_{//X}$  mit den Trennungen über den Identitätstupeln  $(\text{id}, \dots, \text{id})$  als Trennungen ist opponiert zur kartesischen Schmelzkategorie  $\text{Ens}/_X$  der Mengengarben aus 1.1.3. Wir erhalten insbesondere für jede Garbe  $\mathcal{G}$  eine Bijektion

$$\beta = \beta_{\mathcal{G}} : \text{Ens}_{//\text{Top}}(\mathcal{G}, \wedge) \xrightarrow{\sim} \Gamma \mathcal{G}$$

zwischen der Menge der von  $\mathcal{G}$  ausgehenden Leertrennungen und der Menge  $\Gamma \mathcal{G}$  der globalen Schnitte von  $\mathcal{G}$  und diese Bijektionen bilden in ihrer Gesamtheit eine Isotransformation  $\beta : \text{L} \xrightarrow{\sim} \Gamma$  von Trennfunktoren nach  $\text{kEns}^{\text{opp}}$ .

*Vorschau 1.2.8.* Man konstruiert unschwer eine eindeutige Entsprechung zwischen kartesischen Trennungen der Mengengarbentrennfaserung und kartesischen Trennungen der Mengengarbenoptrennfaserung. Wir diskutieren in 1.6.7, inwiefern diese beiden Trennfaserungen durch „Oppinvertieren“ auseinander hervorgehen. Im folgenden wird es hauptsächlich um die Mengengarbenoptrennfaserung und insbesondere ihr Analogon für abelsche Garben gehen, das wir nun einführen.

*Beispiel 1.2.9.* Wir erweitern die Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  der abelschen Garben aus [TG] 6.2.17 zu einem Trennfunktor in die banale Trennkategorie  $\wedge \text{Top}$ , indem wir einen **Multiplomorphismus**  $(X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y_1, \mathcal{G}_1) \wedge \dots \wedge$

$(Y_r, \mathcal{G}_r)$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  erklären als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder Familie von offenen Teilmengen  $V_i \subseteq Y_i$  und jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  mit  $f_i(U) \subset V_i \forall i$  eine multiadditive Abbildung

$$\mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V_n) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

so zuordnet, daß für alle  $V'_i \subseteq V_i \subseteq Y_i$  und  $U' \subseteq U$  mit  $f_i(U') \subset V'_i \forall i$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V_n) & \rightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_1(V'_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V'_n) & \rightarrow & \mathcal{F}(U') \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi$  in den Horizontalen kommutiert. Der offensichtliche „vergeßliche“ Trennfunktor  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Ens}_{//\text{Top}}$  ist volltreu auf Leertrennungen und mit 1.2.7 erhalten wir Bijektionen

$$\beta = \beta_{\mathcal{G}} : \text{Ab}_{//\text{Top}}(\mathcal{G}, \wedge) \xrightarrow{\sim} \Gamma \mathcal{G}$$

Die Faser  $\text{Ab}_{//X}$  mit den Trennungen über den Identitätstupeln  $(\text{id}, \dots, \text{id})$  als Trennungen ist dabei opponiert zur Schmelzkategorie  $\text{Ab}_{/X}$  der abelschen Garben aus 1.1.7.

**Satz 1.2.10 (Optrennfaserung der abelschen Garben).** *Der Trennfunktor des Vergessens der Garbe  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  ist eine Trennfaserung. Ein kartesischer Lift der Leertrennung  $X \rightarrow \wedge$  für  $X \in \text{Top}$  ist die Leertrennung  $\mathbb{Z}_X \rightarrow \wedge$ , die unter unserer Bijektion  $\beta$  aus 1.2.9 auf den globalen Schnitt  $1_X \in \Gamma \mathbb{Z}_X$  geht.*

*Beweis.* Für stetige Abbildungen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  und  $\mathcal{G}_i \in \text{Ab}_{//Y_i}$  ist per definitionem die Trennung über  $(f_1, \dots, f_n)$  aus derjenigen Garbe  $\mathcal{F}$  kartesisch, die durch Garbifizierung aus der Prägarbe

$$U \mapsto \text{colf}_{f_i(U) \subset V_i \subseteq X_i} \mathcal{G}_1(V_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}_n(V_n)$$

für  $U \subseteq X$  entsteht. Da das Tensorprodukt mit Kolimites vertauscht und der offensichtliche Morphismus von der Garbifizierung eines Prägarbentensorprodukts von Prägarben zum Garbentensorprodukt der Garbifizierungen unserer Prägarben stets ein Isomorphismus ist, erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_n^* \mathcal{G}_n$$

Jetzt gilt es noch zu zeigen, daß die Verknüpfung kartesischer Trennungen kartesisch ist, daß also für  $g_{ij} : Y_i \rightarrow Z_{ij}$  und  $\mathcal{H}_{ij} \in \text{Ab}_{//Z_{ij}}$  für  $1 \leq j \leq n_i$  die von der kartesischen Eigenschaft herrührenden Morphismen Isomorphismen

$$\bigotimes_{i,j} (f_i g_{ij})^* \mathcal{H}_{ij} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^n f_i^* \left( \bigotimes_{j=1}^{n_i} g_{ij}^* \mathcal{H}_{ij} \right)$$

sind. Das prüft man leicht auf den Halmen. Genauer folgt es aus der Erkenntnis, daß der Halm eines Tensorprodukts nach 1.1.9 das Tensorprodukt der Halme ist und der Halm der zurückgeholten Garbe an einem Punkt der Halm der ursprünglichen Garbe an seinem Bildpunkt.  $\square$

## Übungen

**Übung 1.2.11 (Modulschmelzkofaserung).** Bezeichne  $\text{Ab}/\text{Kring}$  die Schmelzkategorie, deren Objekte Paare  $(A, M)$  aus einem Kring  $A$  und einem  $A$ -Modul  $M$  sind. Verschmelzungen  $(A_1, M_1) \curlywedge \dots \curlywedge (A_r, M_r) \rightarrow (B, N)$  erklären wir als Tupel  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi)$  bestehend aus Ringhomomorphismen  $\varphi_i : A_i \rightarrow B$  und einer multiadditiven Abbildung  $\psi : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow N$  derart, daß gilt

$$\psi(m_1, \dots, a_i m_i, \dots, m_r) = \varphi_i(a_i) \psi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r)$$

für alle  $i, a_i \in A_i$  und  $m_j \in M_j$ . Man zeige, daß der Schmelzfunktor des Vergessens des Moduls in die banale Schmelzkategorie der Kringe  $\text{Ab}/\text{Kring} \rightarrow \curlywedge \text{Kring}$  eine Schmelzkofaserung ist. Man beschreibe kokartesische Verschmelzungen.

**Übung 1.2.12 (Modulschmelzkofaserung, nichtkommutative Variante).** Bezeichne  $\text{kkRing}$  die Schmelzkategorie mit beliebigen Ringen als Objekten und als Verschmelzungen  $R_1 \curlywedge \dots \curlywedge R_n \rightarrow R$  allen Tupeln von Ringhomomorphismen  $\varphi_i : R_i \rightarrow R$  mit  $\varphi_i(a) \varphi_j(b) = \varphi_j(b) \varphi_i(a)$  für alle  $i \neq j$  und  $a \in R_i, b \in R_j$ . Man zeige, daß das Tensorprodukt von Ringen über  $\mathbb{Z}$  in dieser Schmelzkategorie universelle Verschmelzungen liefert. Bezeichne  $\text{Ab}/\text{kkRing}$  die Schmelzkategorie, deren Objekte Paare  $(A, M)$  aus einem Ring  $A$  und einem  $A$ -Modul  $M$  sind. Verschmelzungen  $(A_1, M_1) \curlywedge \dots \curlywedge (A_r, M_r) \rightarrow (B, N)$  erklären wir als Tupel  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi)$  bestehend aus Ringhomomorphismen  $\varphi_i : A_i \rightarrow B$ , die zusammen eine Verschmelzung in  $\text{kkRing}$  bilden, und einer multiadditiven Abbildung  $\psi : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow N$  derart, daß gilt

$$\psi(m_1, \dots, a_i m_i, \dots, m_r) = \varphi_i(a_i) \psi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r)$$

für alle  $i, a_i \in A_i$  und  $m_j \in M_j$ . Man zeige, daß der Schmelzfunktor des Vergessens des Moduls  $\text{Ab}/\text{kkRing} \rightarrow \text{kkRing}$  eine Schmelzkofaserung ist. Man beschreibe kokartesische Verschmelzungen.

**Übung 1.2.13 (Trennfaserung der Opdarstellungen von Monoiden).** Wir betrachten die Kategorie  $\text{Mon}$  der Monoide und konstruieren eine Trennfaserung

$$\text{Ab}/\text{Mon} \rightarrow \curlywedge \text{Mon}$$

über der banalen Trennkategorie der Monoide mit opponierten Kategorien von Darstellungen als Fasern. Gegeben  $X \rightarrow Y_1 \curlywedge \dots \curlywedge Y_r$  eine Trennung in  $\curlywedge \text{Mon}$

alias ein Tupel von Monoidhomomorphismen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  sowie Darstellungen  $D, E_1, \dots, E_r$  unserer Monoide erklären wir dazu eine Trennung

$$\varphi : D \rightarrow E_1 \wedge \dots \wedge E_r$$

über einer vorgegebenen Trennung von Monoiden als eine multiadditive Abbildung  $\varphi^\circ : E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow D$  in die Gegenrichtung mit

$$x\varphi^\circ(e_1, \dots, e_r) = \varphi^\circ(f_1(x)e_1, \dots, f_r(x)e_r)$$

für alle  $x \in X$  und  $e_i \in E_i$ . Der Trennrückzug ist in diesem Fall das Tensorprodukt der zurückgezogenen Darstellungen.

### 1.3 Multilineare Algebra für Modulgarben

1.3.1. Oft ist Kohomologie mit  $\mathbb{R}$ -Koeffizienten oder  $\mathbb{Q}$ -Koeffizienten einfacher als Kohomologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . In der algebraischen Geometrie sind auch allgemeiner Garben von Moduln über Garben von Krings fundamental. Differentialmoduln sind noch allgemeiner Garben von Moduln über Garben von nichtkommutativen Ringen. Da es wenig zusätzlichen Aufwand bedeutet, entwickle ich die Theorie gleich in dieser Allgemeinheit.

**Definition 1.3.2.** Ein **geringter Raum** ist ein Paar

$$(X, \mathcal{A})$$

bestehend aus einem topologischen Raum  $X$  mit einer Garbe von Ringen  $\mathcal{A}$ , seiner **Strukturgarbe**. Die Schnitte der Strukturgarbe über  $U \subseteq X$  nennen wir oft **reguläre Funktionen**, obwohl sie keineswegs Funktionen auf  $U$  zu sein brauchen. Ein **Morphismus** von einem geringten Raum  $(X, \mathcal{A})$  in einen weiteren geringten Raum  $(Y, \mathcal{B})$  ist ein Paar  $\varphi = (\varphi, \varphi^\#)$  bestehend aus einer stetigen Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  und darüber einem Komorphismus von Ringgarben im Sinne von [TG] 4.3.1 alias einer Vorschrift, die für beliebige  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  mit  $\varphi(U) \subset V$  einen Ringhomomorphismus  $\varphi_{UV}^\# : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{A}(U)$  so auszeichnet, daß diese Ringhomomorphismen verträglich sind mit den Restriktionen auf kleinere offene Teilmengen. Es ist klar, wie man Morphismen von geringten Räumen zu verknüpfen hat und daß wir auf diese Weise eine Kategorie erhalten, die **Kategorie der geringten Räume**

Ger

Besteht die Strukturgarbe aus kommutativen Ringen, so sprechen wir von einem **gekringten Raum**. Die Kategorie der gekringten Räume notieren wir

Gek

**Definition 1.3.3.** Gegeben ein geringter Raum  $(X, \mathcal{A})$  verstehen wir unter einer **Garbe von  $\mathcal{A}$ -Moduln** oder einem  **$\mathcal{A}$ -Modul** oder einer **Modulgarbe** eine abelsche Garbe  $\mathcal{M}$  auf  $X$  mitsamt der Vorgabe für alle  $U \subseteq X$  von einer  $\mathcal{A}(U)$ -Modulstruktur auf  $\mathcal{M}(U)$  derart, daß für alle  $V \subseteq U \subseteq X$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(U) \times \mathcal{M}(U) & \rightarrow & \mathcal{M}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(V) \times \mathcal{M}(V) & \rightarrow & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

mit den Restriktionsabbildungen in den Vertikalen kommutiert. Homomorphismen von  $\mathcal{A}$ -Moduln sind die offensichtlichen. Die Kategorie aller  $\mathcal{A}$ -Moduln notieren wir  $\mathcal{A}\text{-Mod}$  oder  $\text{Mod}_{\mathcal{A}}$  oder in unserem Kontext  $\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}$  oder noch einfacher  $\text{Ab}_{/X}$  mit der Interpretation  $X = (X, \mathcal{A})$ .

*Ergänzung 1.3.4.* In der in [TSK] 3.1.2 eingeführten Terminologie ist eine Ringgarbe auf einem topologischen Raum  $X$  ein Monoidobjekt der Schmelzkategorie [TSF] 1.1.5 der abelschen Garben auf  $X$  und eine Kringgarbe ein Abmonoidobjekt. In dieser Terminologie ist eine Modulgarbe im Sinne der anschließenden Definition ein Objekt mit Operation im Sinne von [TSK] 3.1.16.

**1.3.5 (Modulgarben auf gekringtem Raum als Schmelzkategorie).** Gegeben  $(X, \mathcal{A})$  ein gekringter Raum machen wir in Verallgemeinerung von 1.1.7 die Kategorie  $\mathcal{A}\text{-Mod}$  aller Modulgarben auf  $X$  zu einer Schmelzkategorie, indem wir für  $r \geq 0$  eine Verschmelzung

$$\phi : \mathcal{G}_1 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{G}_r \rightarrow \mathcal{F}$$

erklären als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  eine in jedem Eintrag  $\mathcal{A}(U)$ -lineare Abbildung  $\mathcal{G}_1(U) \times \dots \times \mathcal{G}_r(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  so zuordnet, daß für alle  $U' \subseteq U$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(U) \times \dots \times \mathcal{G}_r(U) & \rightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_1(U') \times \dots \times \mathcal{G}_r(U') & \rightarrow & \mathcal{F}(U') \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi$  in den Horizontalen kommutiert. Insbesondere liefert das Auswerten auf dem einzigen Element des leeren Produkts eine Isotransformation  $\beta : \text{L} \xrightarrow{\cong} \Gamma$  von Leerverschmelzungsfunktor unserer Schmelzkategorie zum Funktor der globalen Schnitte. Die Multiverknüpfungen sind die Offensichtlichen.

*Ergänzung 1.3.6.* In der in [TSK] 3.1.19 eingeführten Terminologie ist das genau die Schmelzkategorie der  $\mathcal{A}$ -Moduln in der Schmelzkategorie  $\text{Ab}_{/X}$  der abelschen Garben auf dem topologischen Raum  $X$  für das Monoidobjekt  $\mathcal{A}$  von  $\text{Ab}_{/X}$ .

**1.3.7 (Tensorprodukt und internes Hom von Modulgarben).** Die Schmelzkategorie  $\text{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}$  der  $\mathcal{A}$ -Modulgarben auf einem gekringten Raum  $(X, \mathcal{A})$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen und internes Hom im Sinne von [TSK] 1.3.2 und [TSK] 1.4.3. Um das zu sehen, reicht es nach [TSK] 1.4.9, die Existenz von universellen Verschmelzungen und Multihom zu zeigen. Eine universelle Verschmelzung der Familie  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r$  erhalten wir, indem wir die Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{F}_1(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \dots \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{F}_r(U)$$

garbifizieren. Eine universelle Leerverschmelzung ist der globale Schnitt 1 der Kringgarbe  $\mathcal{A}$ . Ein Multihom  $\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}$  von unserer Familie zu einer weiteren Modulgarbe  $\mathcal{G}$  erhalten wir als die Garbe

$$(\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}) : U \mapsto \text{Ab}_{/(U,\mathcal{A}|_U)}(\mathcal{F}_1|_U \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$$

zusammen mit Bijektionen  $\text{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}(\mathcal{K} \curlywedge \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/(X,\mathcal{A})}(\mathcal{K}, (\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}))$ , die hoffentlich auch für den Leser offensichtlich sind.

**1.3.8.** Die Modulgarben auf einem geringten Raum  $(X, \mathcal{A})$  bilden eine abelsche Kategorie und der Funktor  $\mathcal{A}\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}_{/X}$  des Vergessens der  $\mathcal{A}$ -Modulstruktur ist exakt. Weiter gibt es in unserer Kategorie beliebige Produkte und Koprodukte, ja beliebige Limites und Kolimites, und auch diese kommutieren mit dem Vergessen der  $\mathcal{A}$ -Modulstruktur.

**1.3.9 (Modulgarbenopfaserung).** Wir erklären einen Funktor

$$\text{Ab}_{//\text{Ger}} \rightarrow \text{Ger}$$

in die Kategorie der geringten Räume. Objekte links sind Paare  $\mathcal{F} = (X, \mathcal{F})$  bestehend auf einem geringten Raum  $X = (X, \mathcal{A})$  und einer  $\mathcal{A}$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$ . Ein Morphismus  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  über einem Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis mit  $Y = (Y, \mathcal{B})$  ist ein Opkomorphismus  $\psi$  von abelschen Garben derart, daß für alle  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  mit  $f(U) \subset V$  für  $\psi : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  und alle  $b \in \mathcal{B}(V)$  und  $g \in \mathcal{G}(V)$  gilt  $\psi(bg) = f^\sharp(b)\psi(g)$ . Die Fasern unseres Funktors sind opponierte Kategorien von Modulgarben, in Formeln

$$\text{Ab}_{/(X,\mathcal{A})} = (\mathcal{A}\text{-Mod})^{\text{opp}}$$

Unser Funktor ist sogar eine Faserung. Einen kartesischen Morphismus über einem Morphismus  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  der Basis mit Ziel  $\mathcal{G} \in \text{Ab}_{/(Y,\mathcal{B})}$  können wir erhalten, indem wir die  $\mathcal{A}$ -Modulgarbe

$$f^*\mathcal{G} = f^{*\text{Ger}}\mathcal{G} := \mathcal{A} \otimes_{f^*\text{Ab}\mathcal{B}} f^{*\text{Ab}}\mathcal{G}$$

betrachten, mit der Notation  $f^{*\text{Ab}}$  für den Rückzug in  $\text{Ab}_{//\text{Top}}$ , und den offensichtlichen Transportmorphismus nehmen. Hier ist  $f^{*\text{Ab}}\mathcal{B}$  eine Garbe von nicht

notwendig kommutativen Ringen und das Tensorprodukt einer Rechtsmodulgarbe mit einer Linksmodulgarbe über der Ringgarbe  $f^{*\text{Ab}}\mathcal{B}$  wird analog gebildet wie im Fall einer Kringgarbe. Wir notieren in diesem Kontext unsere Rückzüge  $f^\dagger = (f^*)^{\text{opp}}$ .

**1.3.10 (Vorschub von Modulgarben).** Die Modulgarbenopffaserung aus 1.3.9 besitzt Vorschübe. Gegeben ein Morphismus  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  und ein  $\mathcal{A}$ -Modul  $\mathcal{F}$  erhalten wir  $f_*\mathcal{F}$ , indem wir den Vorschub als abelsche Garbe  $f_*\mathcal{F} = f_{*\text{Ab}}\mathcal{F}$  nehmen und für  $V \subseteq Y$  ein  $b \in \mathcal{B}(V)$  auf  $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$  operieren lassen durch Multiplikation mit  $f^\sharp(b) \in \mathcal{A}(f^{-1}(V))$ . Die weiteren Details mögen dem Leser überlassen bleiben. Wir notieren in diesem Kontext unsere Vorschübe  $f_\dagger = f_*^{\text{opp}}$ .

**1.3.11 (Modulgarbenopffaserung).** Wir erklären einen Trennfunktor

$$\text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$$

in die banale Trennkategorie der gekringten Räume. Objekte links sind Paare  $\mathcal{F} = (X, \mathcal{F})$  bestehend auf einem gekringten Raum  $X = (X, \mathcal{A})$  und einer  $\mathcal{A}$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$ . Eine Trennung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  der Basis mit  $Y_i = (Y_i, \mathcal{B}_i)$  ist ein Multiopkomorphismus  $\psi$  von abelschen Garben im Sinne von 1.2.9 derart, daß für alle  $U \subseteq X$  und  $V_i \subseteq Y_i$  mit  $f_i(U) \subset V_i$  für die zugehörige multiadditive Abbildung

$$\psi : \mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_r(V_r) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

und alle  $i$  und alle  $b_i \in \mathcal{B}_i(V_i)$  und beliebige  $g_j \in \mathcal{G}_j(V_j)$  für  $1 \leq j \leq r$  gilt

$$\psi(g_1, \dots, b_i g_i, \dots, g_r) = f_i^\sharp(b_i) \psi(g_1, \dots, g_i, \dots, g_r)$$

Insbesondere bleibt der Leertrennungsfunktor derselbe wie bei  $\text{Ab}_{//\wedge \text{Top}}$  und wir erben die Isotransformation  $\beta : \text{L} \xrightarrow{\cong} \Gamma$  des Leertrennungsfunktors zum Funktor der globalen Schnitte, aufgefaßt als Trennfunktor  $\Gamma : \text{Ab}_{//\wedge \text{Gek}} \rightarrow \text{kEns}^{\text{opp}}$ . Die Fasern unseres Trennfunktors sind opponierte Kategorien von Modulgarben  $\text{Ab}_{//(X, \mathcal{A})} = (\mathcal{A}\text{-Mod})^{\text{opp}}$ . Unser Trennfunktor ist sogar eine Trennfaserung. Eine kartesische Trennung über einer einfachen Trennung erhält man wie im nichtkommutativen Fall, der in 1.3.9 ausgeführt wird. Eine kartesische Trennung über einer allgemeinen Trennung der Basis wie oben geht aus von

$$f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} f_r^* \mathcal{G}_r$$

mit dem offensichtlichen Multiopkomorphismus und  $f_i^* \mathcal{G}_i := \mathcal{A} \otimes_{f_i^* \text{Ab} \mathcal{B}_i} f_i^{*\text{Ab}} \mathcal{G}_i$ . Insbesondere liefert der globale Schnitt  $1 \in \Gamma(\mathcal{A})$  des  $\mathcal{A}$ -Moduls  $\mathcal{A}$  unter unserer Identifikation von globalen Schnitten mit Leertrennungen eine kartesische Leertrennung über der eindeutigen Leertrennung  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow \wedge$  der Basis.



## Übungen

*Übung 1.3.12.* Gegeben ein Winkel  $(Z, \mathcal{C}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}) \leftarrow (X, \mathcal{A})$  von gekringten Räumen erhalten wir einen Pullback, indem wir den topologischen Raum  $Z \times_Y X$  mit der Kringgarbe  $g^{*\text{Ab}}\mathcal{C} \otimes_{v^*\text{Ab}\mathcal{B}} q^{*\text{Ab}}\mathcal{A}$  versehen für  $v : Z \times_Y X \rightarrow Y$ .

*Übung 1.3.13.* Ein Morphismus in  $\text{Ab}_{//\text{Ger}}$  alias ein Opkomorphismus von Modulgarben heiße **eigentlich**, wenn der zugrundeliegende Opkomorphismus von abelschen Garben eigentlich ist im Sinne von [TG] 6.4.1. Das multiplikative System der eigentlichen Opkomorphismen von Modulgarben notieren wir  $\text{Ab}_{//\text{Ger}}^!$ . Man verallgemeinere Übung [TG] 6.4.31 zu Modulgarben auf geringten Räumen. Gegeben sei also über einem kartesischen Diagramm  $f q = p g$  von geringten Räumen ein Diagramm von Modulgarben und Opkomorphismen  $\bar{f} \bar{q} = \bar{p} \bar{g}$ . Man zeige: Sind die Horizontalen  $\bar{p}, \bar{q}$  kartesisch und ist  $\bar{f}$  eigentlich, so ist auch  $\bar{g}$  eigentlich.

*Übung 1.3.14 (Injektive Modulgarben).* Die Kategorie der Modulgarben auf einem geringten Raum ist abelsch und hat genug injektive Objekte. Des weiteren sind alle injektiven Modulgarben welk. Hinweis: Wie bei abelschen Garben, nur bettet man zunächst alle Halme in injektive Moduln über dem Halm der Ringgarbe ein und bildet dann das Produkt der Wolkenkratzer dieser injektiven Moduln.

## 1.4 Trennfaserungen bei eindeutigen Leertrennungen

1.4.1. Ein besonders übersichtlicher Fall, in dem sich viele der folgenden Aussagen gut einsehen lassen, ist die zur Schmelzkofaserung  $\text{Ab}_{/\text{Kring}} \rightarrow \text{Kring}$  der Moduln über Kringen aus 1.2.11 opponierte Trennfaserung. Das ist auch die Einschränkung unserer Moduloptrennfaserung auf den Fall einpunktiger Räume. Weil dies Beispiel oft vorkommen wird, vereinbaren wir die Abkürzung  $\text{Kringo} := \text{Kring}^{\text{opp}}$  und notieren unsere Trennfaserung

$$\text{Ab}_{//\text{Kringo}} \rightarrow \text{Kringo}$$

Diese Trennfaserung ist eine Bifaserung. Genauer sind die Linksadjungierten der Rückzüge längs opponierter Ringhomomorphismen, also die Linksadjungierten der Skalarerweiterungen nach Opponieren, die Restriktionen der Skalare auf den Opponierten der Modulkategorien.

1.4.2. Gegeben ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  verstehen wir unter einem **Trennschnitt** einen Trennfunktor  $s : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  mit  $ps = \text{id}$ . Weiter verstehen wir unter einem **kartesischen Trennschnitt** einen Trennschnitt, der beliebige Trennungen zu kartesischen Trennungen macht. Jeder kartesische Trennschnitt einer Trennfaserung macht nach 1.2.5 stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen.

1.4.3. Wir sagen, eine Trennkategorie **habe eindeutige Leertrennungen**, wenn von jedem Objekt genau eine Leertrennung ausgeht. Zum Beispiel hat jede banale Trennkategorie diese Eigenschaft.

1.4.4. Eine Trennfaserung  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  über einer Trennkategorie mit eindeutigen Leertrennungen besitzt einen bis auf eindeutige Isotransformation eindeutig bestimmten kartesischen Trennschnitt, nämlich den Trennfunktor  $u : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ , der jedem Objekt  $X$  der Basis dasjenige Objekt

$$\underline{X} := l_X^\dagger(\lambda)$$

der Faser zuordnet, von dem der kartesische Lift der eindeutigen Leertrennung  $l_X : X \rightarrow \lambda$  ausgeht, und jeder Trennung in der Basis ihren kartesischen Lift. Wir nennen ihn den **eindeutigen kartesischen Trennschnitt** und notieren ihn

$$u : X \mapsto \underline{X}$$

Wir nennen  $\underline{X} \in \mathcal{M}_X$  das **konstante Objekt auf  $X$**  und notieren  $1_X : \underline{X} \rightarrow \lambda$  die zugehörige kartesische Leertrennung. Gegeben  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  liefert das Nachschalten von  $1_X : \underline{X} \rightarrow \lambda$  per definitionem eine Bijektion  $\mathcal{M}_X(\mathcal{F}, \underline{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{F}, \lambda)$ . Nach 1.4.2 macht der eindeutige kartesische Trennschnitt stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen.

*Beispiel 1.4.5.* Der eindeutige kartesische Trennschnitt der **Garbentrennfaserung**  $\text{Ens}/\text{Top} \rightarrow \text{Top}$  ordnet jedem Raum  $X$  als konstantes Objekt  $\underline{X}$  die finale Mengengarbe auf  $X$  zu, also die Mengengarbe mit der Identität als zugehöriger étaler Abbildung. Die zugehörige Leertrennung  $1_X$  ist die eindeutige von  $\underline{X}$  ausgehende Leertrennung in  $\text{Ens}/\text{Top}$ .

*Beispiel 1.4.6.* Der eindeutige kartesische Trennschnitt der **Garbenotrennfaserung**  $\text{Ab}/\text{Top} \rightarrow \lambda \text{Top}$  ordnet jedem Raum  $X$  als konstantes Objekt  $\underline{X}$  die konstante abelsche Garbe  $\underline{X} = \mathbb{Z}_X$  zu mit derjenigen Leertrennung, die unter unserer Bijektion aus 1.2.9 zwischen Leertrennungen und globalen Schnitten ihrem globalen Schnitt  $1_X$  entspricht.

*Beispiel 1.4.7.* Der eindeutige kartesische Trennschnitt der **Modulotrennfaserung**  $\text{Ab}/\text{Kringo} \rightarrow \lambda \text{Kringo}$  ordnet jedem Kring  $R$  als konstantes Objekt  $\underline{R}$  den  $R$ -Modul  $R$  zu mit derjenigen Leertrennung, die durch das Einselement  $1 \in R$  gegeben wird.

1.4.8 (**Leertrennungen und finale Objekte**). Sei  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine Trennfaserung über einer Trennkategorie mit eindeutigen Leertrennungen. Besitzt zusätzlich die Basis  $\mathcal{N}$  eine universelle Leertrennung  $\text{pt} \rightarrow \lambda$ , so ist deren kartesischer Lift nach dem Vorhergehenden eine universelle Leertrennung  $\underline{\text{pt}} \rightarrow \lambda$  in  $\mathcal{M}$ . Deren Nachschalten liefert folglich eine Bijektion

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}, \underline{\text{pt}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{F}, \lambda)$$

*Beispiel 1.4.9.* Im Fall der Optrennfaserung der abelschen Garben erhalten wir so ausgezeichnete Bijektionen  $\text{Ab}_{//\text{Top}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}_{\text{pt}}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{//\text{Top}}(\mathcal{F}, \wedge)$  und im Fall der Moduloptrennfaserung Bijektionen  $\text{Ab}_{//\text{Kringo}}(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{//\text{Kringo}}(M, \wedge)$ .

**1.4.10 (Leertrennungen und Vorschub).** Sei  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine Trennfaserung über einer Trennkategorie mit eindeutigen Leertrennungen. Besitzt für einen Morphismus der Basis  $f : X \rightarrow Y$  der Rückzug  $f^\dagger : \mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$  einen Linksadjungierten  $f_+$ , so liefert das Nachschalten der Identifikation  $\text{idf} : \underline{X} \xrightarrow{\sim} f^\dagger \underline{Y}$  für beliebiges  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  den dritten Morphismus einer Folge von natürlichen Isomorphismen

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}, \wedge) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X(\mathcal{F}, \underline{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X(\mathcal{F}, f^\dagger \underline{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_Y(f_+ \mathcal{F}, \underline{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(f_+ \mathcal{F}, \wedge)$$

**1.4.11.** Alles in diesem Abschnitt Gesagte gilt opponiert analog für Schmelzkofaserungen.

## 1.5 Formelsammlung für Trennfaserungen

**1.5.1.** Banale Trennkategorien haben stets eindeutige Leertrennungen. Für jede Trennfaserung über einer banalen Trennkategorie sind also die im vorhergehenden Abschnitt diskutierten konstanten Objekte sinnvoll definiert und erfüllen die dort angegebenen Beziehungen. Gegeben eine Trennfaserung über einer banalen Trennkategorie erhalten wir sogar noch stärkere Aussagen, wie im folgenden ausgeführt werden soll.

**1.5.2.** Gegeben ein Trennfunktor  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie erklären wir seine **Faser** über einem Objekt  $X$  als die Trennkategorie  $\mathcal{G}_X$  aller Objekte über  $X$  mit nur solchen Trennungen, die über Tupeln aus Identitäten auf  $X$  liegen.

*Beispiele 1.5.3.* Im Fall der Garbenoptrennfaserung ist die Faser  $\text{Ab}_{//X}$  über einem topologischen Raum  $X$  die opponierte Trennkategorie zur Schmelzkategorie der abelschen Garben auf  $X$ . Im Fall der Moduloptrennfaserung ist die Faser  $\text{Ab}_{//R}$  über einem Kring  $R$  die opponierte Trennkategorie zur Schmelzkategorie der  $R$ -Moduln.

**1.5.4 (Faserweises Tensorprodukt).** Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  über einer banalen Trennkategorie hat jede Faser  $\mathcal{G}_X$  stabil universelle Trennungen, nämlich die kartesischen Lifts derjenigen Trennungen in der Basis, die Tupel von Kopien der Identität auf  $X$  sind. Wir notieren

$$\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_r \rightarrow \mathcal{F}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_r$$

den kartesischen Lift von  $(\text{id}, \dots, \text{id}) : X \rightarrow X \wedge \dots \wedge X$ , der in  $\mathcal{F}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_r$  landet. Die opponierte Schmelzkategorie notieren wir in diesem Kontext

$$\mathcal{G}_{/X} := \mathcal{G}_X^{\text{opp}}$$

Statt  $\otimes$  schreiben wir manchmal ausführlicher  $\otimes_X$ . Das Einsobjekt einer derartigen Schmelzkategorie ist das konstante Objekt  $\underline{X} \in \mathcal{G}_{/X}$ , das wir in 1.4.4 durch Rückzug  $\underline{X} := l_X^\dagger(\lambda)$  unter der von  $X$  ausgehenden Leertrennung erklärt hatten. Den vom einfachen Rückzug  $f^\dagger : \mathcal{G}_Y \rightarrow \mathcal{G}_X$  unter  $f : X \rightarrow Y$  auf den opponierten Kategorien induzierten Funktor notieren wir

$$f^* := (f^\dagger)^{\text{opp}} : \mathcal{G}_Y \rightarrow \mathcal{G}_X$$

Offensichtlich hat  $f^\dagger$  genau dann einen Linksadjungierten  $f_\dagger$ , wenn der Rückzug  $f^*$  auf den opponierten Fasern einen Rechtsadjungierten  $f_*$  hat. Wir nennen ihn den **Vorschub unter  $f$**  und sprechen von einer **Trennfaserung mit Vorschub**, wenn für jede Einstrennung der Basis so ein Rechtsadjungierter  $f_*$  existiert.

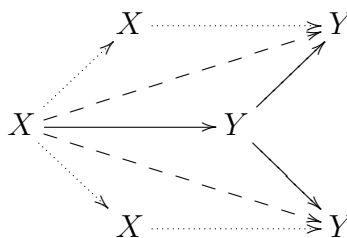
1.5.5 (**Diskussion der Notation**). Die Notationen  $\mathcal{G}_{/X}$  und  $(f^*, f_*)$  führe ich ein, damit wir uns in den üblichen Anwendungsfällen in der üblichen Notation wiederfinden. Typisch ist für uns die Situation einer **Trennfaserung mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie**, bei der wir sowohl für alle Morphismen der Basis die Existenz von Adjungierten der Rückzüge fordern, die wir notieren als  $f_\dagger$  auf den Fasern beziehungsweise  $f_*$  auf den opponierten Fasern, als auch internes Hom in allen opponierten Fasern, das wir dann  $\Rightarrow$  oder ausführlicher  $\Rightarrow_X$  notieren. In konkreten Beispielen notieren wir die Ausgangskategorie unserer Trennfaserung meist in der Form  $\mathcal{G} = \text{Was}_{//\text{banal}}$  und die Faser über einem Objekt  $X \in \text{banal}$  dann  $\mathcal{G}_X = \text{Was}_{//X}$  und die opponierte Faser  $\mathcal{G}_{/X} = \text{Was}_{/X}$ .

1.5.6. Zunächst einmal liefert jede Trennfaserung mit Adjungierten eine gewöhnliche Faserung zwischen den jeweiligen einfachen Kategorien. Damit gelten alle in [TG] 6.3.11 folgende besprochenen Aussagen zum Basiswechsel.

1.5.7 (**Tensorprodukt und Rückzug**). Gegeben ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in einer Kategorie  $\mathcal{T}$  gilt in der zugehörigen banalen Trennkategorie die Identität

$$(\text{id}_Y, \text{id}_Y) \circ f = (f, f) = (f \wedge f) \circ (\text{id}_X, \text{id}_X)$$

von Zweitrennungen  $X \rightarrow Y \wedge Y$ . Graphisch mag man sie darstellen wie im folgenden Diagramm mit der durchgezogenen linken Seite und der gestrichelten Mitte und der gepunkteten linken Seite



Ist nun  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  eine Trennfaserung und schreiben wir für  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  den kartesischen Lift von  $(f, f)$  nach  $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$  auf die beiden entsprechenden Weisen als Verknüpfung kartesischer Lifts, so finden wir in  $\mathcal{G}_X$  einen Isomorphismus  $f^\dagger(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f^\dagger \mathcal{F}) \otimes (f^\dagger \mathcal{G})$  und in unseren neuen Notationen in  $\mathcal{G}_{/X}$  einen Isomorphismus

$$\text{idf} : (f^* \mathcal{F}) \otimes (f^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

Die Notation  $\text{idf}$  ist dadurch motiviert, daß diese Isomorphismen aus Identifikationen [TG] 6.3.1 einer Faserung oder genauer Trennfaserung zusammengesetzt sind. Etwas feiner liefert unser Formalismus, daß der Rückzug  $f^* : \mathcal{G}_{/Y} \rightarrow \mathcal{G}_{/X}$  verträglich ist mit universellen Verschmelzungen und wir erhalten so im Fall universeller Leerverschmelzungen insbesondere unsere Isomorphismen  $\underline{X} \xrightarrow{\sim} f^* \underline{Y}$  zurück. Ich erinnere daran, daß wir bereits aus 1.5.4 wissen, daß unter unseren Annahmen die opponierten Fasern  $\mathcal{G}_{/X}$  sogar stabil universelle Verschmelzungen haben.

*Beispiel 1.5.8.* Im Spezialfall unserer Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  aus 1.2.9 spezialisiert die Konstruktion 1.5.7 zu einem natürlichen Isomorphismus zwischen einem zurückgeholten Tensorprodukt und dem Tensorprodukt der zurückgeholten Garben. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Kringo}} \rightarrow \wedge \text{Kringo}$  ist  $f^*$  die Skalarerweiterung und unsere Konstruktion spezialisiert für  $f \in \text{Kringo}(A, B)$  alias einen Kringhomomorphismus  $f^\circ : B \rightarrow A$  zum kanonischen Modulisomorphismus

$$(A \otimes_B F) \otimes_A (A \otimes_B G) \xrightarrow{\sim} A \otimes_B (F \otimes_B G)$$

**1.5.9 (Internes Hom und Vorschub).** Gegeben seien eine Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis. Für jedes feste Objekt  $\mathcal{E} \in \mathcal{G}_Y$  betrachten wir die Funktoren  $\mathcal{G}_Y \rightarrow \mathcal{G}_X$  gegeben durch  $\mathcal{G} \mapsto f^\dagger \mathcal{G} \mapsto f^\dagger \mathcal{E} \otimes_X f^\dagger \mathcal{G}$  sowie  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{G} \mapsto f^\dagger(\mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{G})$ . Unsere Vorgaben beinhalten eine ausgezeichnete Isotransformation zwischen diesen Funktoren. Diese Isotransformation hinwiederum induziert eine Isotransformation zwischen ihren Linksadjungierten, wenn diese existieren, und in jedem Fall zwischen ihren partiellen Linksadjungierten. Haben insbesondere die Opponierten  $\mathcal{G}_{/X}$  der Fasern internes Hom  $\Rrightarrow$  und hat  $f^\dagger$  einen Linksadjungierten  $f_\dagger$  alias  $f^*$  einen Rechtsadjungierten  $f_*$ , so erhalten wir für  $\mathcal{E} \in \mathcal{G}_{/Y}$  und  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_{/X}$  Isomorphismen

$$\text{idf} : f_*(f^* \mathcal{E} \Rrightarrow \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E} \Rrightarrow f_* \mathcal{F})$$

Auch sie notieren wir  $\text{idf}$ , weil sie aus den Identifikationen einer Trennfaserung entstehen. Gegeben  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{/X}$  erhalten wir daraus, indem wir die Koeinheit der Adjunktion  $f^* f_* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  vorschalten, einen ausgezeichneten Morphismus

$$\text{adf} : f_*(\mathcal{G} \Rrightarrow \mathcal{F}) \rightarrow (f_* \mathcal{G} \Rrightarrow f_* \mathcal{F})$$

Ich notiere hier und auch sonst mit  $\text{adf}$  im Kontext einer Faserung oder Kofaserung alle Morphismen, die in der einen oder anderen Weise aus Identifikationen und Adjunktionen entstehen.

*Beispiel 1.5.10.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung spezialisiert diese Konstruktion für  $f \in \text{Kringo}(A, B)$  alias einen Kringhomomorphismus  $f^\circ : B \rightarrow A$  zum kanonischen Modulisomorphismus

$$\text{res}_A^B \text{Hom}_A(A \otimes_B E, F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_B(E, \text{res}_A^B F)$$

**1.5.11 (Internes Hom und Rückzug).** Gegeben seien eine Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis. Übung [TSK] 1.6.20 liefert für je zwei Objekte  $\mathcal{E}, \mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$ , für die die fraglichen internen Hom-Objekte existieren, einen ausgezeichneten Morphismus

$$f^*(\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{G}) \rightarrow (f^* \mathcal{E} \Rightarrow f^* \mathcal{G})$$

*Beispiel 1.5.12.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung spezialisiert diese Konstruktion für  $f \in \text{Kringo}(A, B)$  alias einen Kringhomomorphismus  $f^\circ : B \rightarrow A$  zu einem kanonischen Modulhomomorphismus

$$A \otimes_B \text{Hom}_B(E, G) \rightarrow \text{Hom}_A(A \otimes_B E, A \otimes_B G)$$

**1.5.13 (Dualisieren und Rückzug).** Gegeben seien eine Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus der Basis  $f : X \rightarrow Y$ . Gegeben  $\mathcal{E} \in \mathcal{G}_Y$  derart, daß  $\mathcal{E}$  und  $f^* \mathcal{E}$  dualisierbar sind, liefern unsere ausgezeichneten Morphismen 1.5.11 vom Rückzug eines internen Hom in das interne Hom der Rückzüge zusammen mit dem ausgezeichneten Isomorphismus 1.5.7 zwischen der Eins von  $\mathcal{G}_X$  und dem Rückzug der Eins von  $\mathcal{G}_Y$  einen ausgezeichneten Morphismus

$$f^*(\mathcal{E}^\vee) \rightarrow (f^* \mathcal{E})^\vee$$

*Beispiel 1.5.14.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung spezialisiert diese Konstruktion für  $f \in \text{Kringo}(A, B)$  alias einen Kringhomomorphismus  $f^\circ : B \rightarrow A$  zu einem kanonischen Modulhomomorphismus

$$A \otimes_B \text{Hom}_B(E, B) \rightarrow \text{Hom}_A(A \otimes_B E, A)$$

**1.5.15 (Internes Hom und Rückzug im starren Fall).** Gegeben seien eine Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis. Da der Rückzug  $f^*$  nach 1.5.7 mit universellen Verschmelzungen vertauscht, macht  $f^*$  nach [TSK] 3.4.6 starre Objekte von  $\mathcal{G}_Y$  zu starren Objekten von  $\mathcal{G}_X$  und der Morphismus aus 1.5.11 spezialisiert für starres  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{G} = \mathbb{I}_Y = \underline{Y}$  zu einem Isomorphismus  $f^*(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{\sim} (f^* \mathcal{E})^\vee$ . Im Fall eines starren

Objekts  $\mathcal{E}$  ist unser Morphismus in 1.5.11 sogar für beliebiges  $\mathcal{G}$  ein Isomorphismus

$$f^*(\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f^* \mathcal{E} \Rightarrow f^* \mathcal{G})$$

In der Tat können wir nämlich besagten Morphismus schreiben als die Verknüpfung von Isomorphismen

$$f^*(\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{E}^\vee) \otimes f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f^* \mathcal{E})^\vee \otimes f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f^* \mathcal{E} \Rightarrow f^* \mathcal{G})$$

Hier sollte ausgeschrieben werden, daß diese Verknüpfung wirklich besagten Morphismus liefert. Das mag einmal ein Student ausführen.

*Beispiel 1.5.16.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung sind etwa freie endlich erzeugte Moduln starr und für  $E$  frei und endlich erzeugt liefert unsere Konstruktion oben in der Tat einen Isomorphismus

$$A \otimes_B \text{Hom}_B(E, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(A \otimes_B E, A \otimes_B G)$$

**1.5.17 (Tensorprodukt und Vorschub).** Seien  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A} \mathcal{T}$  eine Trennfaserung zu einer banalen Trennkategorie und  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus in der Basis. Besitzt das Zurückholen  $f^* : \mathcal{G}_Y \rightarrow \mathcal{G}_X$  auf den opponierten Fasern einen Rechtsadjungierten  $f_*$ , so erhalten wir für  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X$  und  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  durch Adjunktion einen Morphismus

$$f_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G})$$

aus der Komposition  $f^*(f_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^* f_* \mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G}$  des Inversen zur Verträglichkeit 1.1.9 von Rückzug und Tensorprodukt mit der Koeinheit der Adjunktion tensoriert mit der Identität. Für  $\mathcal{G} := f_* \mathcal{E}$  erhalten wir speziell einen Morphismus

$$f_* \mathcal{F} \otimes f_* \mathcal{E} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$$

durch Adjunktion aus  $f^*(f_* \mathcal{F} \otimes f_* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^* f_* \mathcal{F} \otimes f^* f_* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}$ . Nach Übung [TSK] 1.6.22 wird hier  $f_*$  sogar ein Schmelzfunktor in natürlicher Weise.

*Vorschau 1.5.18.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung wäre Ersteres der natürliche Homomorphismus

$$(\text{res}_A^B F) \otimes_B G \rightarrow \text{res}_A^B(F \otimes_A (A \otimes_B G))$$

und ist sogar immer ein Isomorphismus. Das wird sich mit 4.7.13 als Spezialfall der Projektionsformel erweisen, angewandt auf die Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten 4.6.5 der Modulgarben auf diskreten gekringelten Räumen, in der speziell alle Morphismen zwischen einpunktigen Räumen e-Morphismen sind.

*Beispiel 1.5.19.* Im Fall der Garbenoptrennfaserung mit  $f : X \rightarrow Y$  der konstanten Abbildung eines unendlichen diskreten Raums auf den einpunktigen Raum ist unsere Garbe  $\mathcal{F}$  eine durch  $x \in X$  indizierte Familie von abelschen Gruppen  $F_x$  und  $\mathcal{G}$  eine weitere abelsche Gruppe  $G$  und unser Morphismus der natürliche Morphismus

$$\left( \prod_{x \in X} F_x \right) \otimes_{\mathbb{Z}} G \rightarrow \left( \prod_{x \in X} F_x \otimes_{\mathbb{Z}} G \right)$$

und im allgemeinen kein Isomorphismus, etwa für  $G = \mathbb{Q}$ . Für  $G$  frei und endlich erzeugt ist er aber doch wieder ein Isomorphismus. Daß das allgemein für starres  $\mathcal{G}$  gilt, diskutieren wir als nächstes.

**1.5.20 (Tensorprodukt und Vorschub im starren Fall).** Gegeben seien eine über einer banalen Trennkategorie trenngefaserter Trennkategorie  $\mathcal{G}$  und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis. Hat der Rückzug  $f^*$  auf den opponierten Fasern einen Rechtsadjungierten  $f_*$ , so sind die Morphismen aus 1.5.17 für starres  $\mathcal{G}$  Isomorphismen

$$f_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G})$$

Das erkennen wir, indem wir unsere Isomorphismen aus 1.5.9 zu  $\mathcal{E} := \mathcal{G}^\vee$  spezialisieren. Ein Student mag die Details ausschreiben.

*Beispiel 1.5.21.* Im Fall einer abelschen Garbe  $\mathcal{G}$  auf einem topologischen Raum, die lokal frei ist von endlichem Rang, spezialisieren die in 1.5.20 besprochenen Isomorphismen zu Isomorphismen von abelschen Garben

$$f_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G})$$

**1.5.22 (Externes Tensorieren alias Boxprodukt).** Gegeben eine über einer banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  trenngefaserter Trennkategorie  $\mathcal{G}$  und in der Basis  $\mathcal{T}$  zwei Objekte  $X, Y$  mit Produkt  $X \times Y$  betrachten wir die Projektionszweitrennung

$$(\text{pr}_X, \text{pr}_Y) : X \times Y \rightarrow X \wedge Y$$

Gegeben  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X$  und  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  erklären wir dann  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \in \mathcal{G}_{X \times Y}$  als den Rückzug

$$\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := (\text{pr}_X, \text{pr}_Y)^\dagger(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G})$$

und nennen dies Objekt ein **Boxprodukt**. Die entsprechende Zweitrennung  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$  von  $\mathcal{G}$  ist als stark kartesischer Lift einer stabil universellen Trennung nach 1.2.5 auch stabil universell und für  $f : P \rightarrow X$  sowie  $g : Q \rightarrow Y$  derart, daß auch ein Produkt  $P \times Q$  existiert, liefert die universelle Eigenschaft einen Isomorphismus

$$\text{idf} : f^\dagger \mathcal{F} \boxtimes g^\dagger \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f \times g)^\dagger(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$$



Wir notieren ihn  $\text{idf}$ , weil er aus den Identifikationen [TG] 6.3.1 einer Faserung zusammengesetzt ist. Noch genauer könnten wir  $\text{idf} = \text{idf}(f \times g, (\text{pr}_X, \text{pr}_Y))^{-1} \circ \text{idf}((\text{pr}_P, \text{pr}_Q), f \wedge g)$  schreiben, aber übertriebene Genauigkeit macht die Darstellung auch wieder unübersichtlich. Schreiben wir die Projektion  $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$  als Projektionszweitrennung gefolgt von  $l_X \wedge \text{id}_Y$  für  $l_X : X \rightarrow \wedge$  die Leertrennung, in Formeln  $\text{pr}_Y = (l_X \wedge \text{id}_Y) \circ (\text{pr}_X, \text{pr}_Y)$ , so erhalten wir für jedes  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  einen Isomorphismus

$$\underline{X} \boxtimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_Y^\dagger \mathcal{G}$$

Schreiben wir die Leertrennung  $X \times Y \rightarrow \wedge$  als Projektionstrennung gefolgt vom Zweitupel  $l_X \wedge l_Y$  aus Leertrennungen  $X \times Y \rightarrow X \wedge Y \rightarrow (\wedge) \wedge (\wedge) = \wedge$ , so ist die zugehörige Identifikation ein Isomorphismus

$$\underline{X} \times \underline{Y} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \boxtimes \underline{Y}$$

In unserer opponierten Notation erhalten wir dieselben Isomorphismen in der Gegenrichtung mit  $*$  statt  $\dagger$  für dieselben Objekte als Objekte der opponierten Fasern, also  $(f \times g)^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^* \mathcal{F} \boxtimes g^* \mathcal{G}$  und  $\text{pr}_Y^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \boxtimes \mathcal{G}$  und  $\underline{X} \boxtimes \underline{Y} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \times \underline{Y}$  für  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := (\text{pr}_X, \text{pr}_Y)^*(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G})$ . Wenn wir eine Notation für diese Isomorphismen benötigen, notieren wir sie  $\text{idf}$ , weil sie aus Identifikationen [TG] 6.3.1 einer Faserung zusammengesetzt sind.

1.5.23. Jede Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen ist stets schmelzkogefasert über der finalen Schmelzkategorie und diese ist hinwiederum eine banale Schmelzkategorie. Opponiert gilt Analoges, so daß wir formal immer  $\boxtimes$  statt  $\otimes$  schreiben dürften. Die Unterscheidung ist als formal nicht zwingend. Dennoch kann die Boxprodukt-Notation bei sinnvollem Einsatz in meinen Augen die Lesbarkeit wesentlich verbessern.

*Beispiel* 1.5.24. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung ist  $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$  das Koprodukt in Kring alias das Produkt in Kringo und gegeben Moduln  $M$  über  $A$  und  $N$  über  $B$  ist  $M \boxtimes N$  der offensichtliche Modul  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$  über  $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ .

*Ergänzung* 1.5.25 (**Bezug zum Boxprodukt von Funktionen**). In den Notationen der vorhergehenden Diskussion zu Boxprodukten entspricht es unserer allgemeinen Konvention [TSK] 1.3.8, auch die auf den Leertrennungen induzierten Abbildungen

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}, \wedge) \times \mathcal{G}(\mathcal{G}, \wedge) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, \wedge)$$

als  $(f, g) \mapsto f \boxtimes g$  zu notieren. Im Spezialfall der Garben von  $k$ -Vektorräumen auf diskreten Mengen und der konstanten Garben  $\mathcal{F} = \underline{X}$  sowie  $\mathcal{G} = \underline{Y}$  spezialisiert diese Konstruktion unter verschiedenen weiteren hoffentlich offensichtlichen Identifikationen zu der Abbildung  $\text{Ens}(X, k) \times \text{Ens}(Y, k) \rightarrow \text{Ens}(X \times Y, k)$ , die wir schon bisher immer  $(f, g) \mapsto f \boxtimes g$  notiert hatten.

**Beispiel 1.5.26 (Bezug zum Produkt von  $\sigma$ -Algebren).** Das Vergessen der  $\sigma$ -Algebra ist eine Trennfaserung  $\text{Meß} \rightarrow \text{Ens}$  von der banalen Trennkategorie der Meßräume in die banale Trennkategorie der Mengen. Es ist in diesem Sinne passend, wenn auch nicht zwingend, das Produkt von Meßräumen zu notieren in der Form

$$(X, \mathcal{M}) \times (Y, \mathcal{N}) = (X \times Y, \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})$$

**Beispiel 1.5.27 (Bezug zum Produkt von Maßen).** Wir können auch Schmelzkategorie  $\text{Maß}_{\mathbb{R}}$  der reellen Maßräume betrachten. Objekte sind Tripel  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  aus einer Menge, einer zugehörigen  $\sigma$ -Algebra und einem reellen Maß  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Verschmelzungen sind meßbare Abbildungen  $f : X_1 \times \dots \times X_r \rightarrow Y$  mit  $f_*(\mu_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mu_r) = \nu$  für  $\nu$  das Maß auf  $Y$ . Dann ist quasi per definitionem  $(X_1 \times X_2, \mu_1 \boxtimes \mu_2)$  das Zielobjekt der universellen Verschmelzung von  $(X_1, \mu_1)$  mit  $(X_2, \mu_2)$ . In diesem Sinne ist auch unsere Notation für das Produktmaß passend, aber nicht zwingend.

## Übungen

**Übung 1.5.28 (Externes Tensorieren und gewöhnliches Tensorieren).** Gegeben eine über einer banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  trenngefaserte Trennkategorie  $\mathcal{G}$  und in  $\mathcal{T}$  zu zwei Objekten  $X, Y$  ein Produkt  $X \times Y$  sowie  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}/_X$  und  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}/_Y$  konstruiere man einen Isomorphismus  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (\text{pr}_X^* \mathcal{F}) \otimes_{X \times Y} (\text{pr}_Y^* \mathcal{G})$  sowie im Fall  $X = Y$  einen Isomorphismus  $\mathcal{F} \otimes_X \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \Delta^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$  für die diagonale Einbettung  $\Delta : X \rightarrow X \times X$ .

**Übung 1.5.29 (Vorschub auf finales Objekt als Trennfunktor).** Sei  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  eine Trennfaserung mit Vorschüben über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$ . So erhalten wir einen Trennfunktor

$$c_{\dagger} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_{/\text{pt}}$$

durch die Vorschrift, daß jedes Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X$  auf  $c_{\dagger} \mathcal{F}$  abgebildet wird für  $c = \text{fin} : X \rightarrow \text{pt}$  und jede Trennung  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  auf die durch die stark kokartesische Eigenschaft [TG] 6.3.13 von  $\mathcal{F} \rightarrow c_{\dagger} \mathcal{F}$  in Bezug auf den Funktor auf den Familienkategorien  $\mathcal{G}^{\wedge} \rightarrow (\wedge \mathcal{T})^{\wedge}$  bestimmte Trennung  $c_{\dagger} \mathcal{F} \rightarrow c_{1\dagger} \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge c_{r\dagger} \mathcal{G}_r$  über der Trennung  $(\text{id}, \dots, \text{id}) : \text{pt} \rightarrow \text{pt} \wedge \dots \wedge \text{pt}$  mit der Notation  $c_i : Y_i \rightarrow \text{pt}$  für den jeweils einzigen Morphismus. Auf den opponierten Schmelzkategorien erhalten wir so einen Schmelzfunktor

$$c_* : \mathcal{G}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{G}_{/\text{pt}}$$

Nach 1.4.10 ist er volltreu auf Leerverschmelzungen in dem Sinne, daß er Bijektionen  $\mathcal{G}^{\text{opp}}(\gamma, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{/\text{pt}}(\gamma, c_* \mathcal{F})$  induziert für alle  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$ . Der Schmelzfunktor der Leerverschmelzungen von  $\mathcal{G}^{\text{opp}}$  in die kartesische Schmelzkategorie der

Mengen [TSK] 1.6.14 faktorisiert mithin als  $c_*$  gefolgt vom Schmelzfunktor der Leerverschmelzungen von  $\mathcal{G}/_{\text{pt}}$  in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen. Im Fall der Garbenoptrennfaserung 1.2.9 mag man  $\mathcal{G}/_{\text{pt}}$  mit der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen identifizieren und  $c_*$  mit dem Funktor der globalen Schnitte. So folgt im Rahmen unseres Formalismus, daß jede Verschmelzung von abelschen Garben über topologischen Räumen eine multilineare Abbildung zwischen den jeweiligen Räumen von globalen Schnitten induziert.

*Übung 1.5.30.* Sei  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  eine Trennfaserung mit Vorschüben über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$ . Schalten wir unserem Schmelzfunktor  $\text{fin}_* : \mathcal{G}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{G}/_{\text{pt}}$  aus 1.5.29 den Opponierten  $(\wedge \mathcal{T})^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{G}^{\text{opp}}$  des kartesischen Trennschnitts nach 1.4.4 vor, so erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\Upsilon \mathcal{T}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{G}/_{\text{pt}}$$

Im Fall der Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  erhalten wir so den Schmelzfunktor  $\Upsilon \text{Top}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ab}$ , der jedem Raum  $X$  die Gruppe  $\Gamma(X)$  der lokal konstanten  $\mathbb{Z}$ -wertigen Funktionen auf  $X$  zuordnet und jedem Tupel von von  $X$  ausgehenden stetigen Abbildungen die multiadditive Abbildung „nimm das Produkt der zurückgezogenen Funktionen“.

*Übung 1.5.31.* Ich erinnere an die Trennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Mon}} \rightarrow \wedge \text{Mon}$  der Darstellungen von Monoiden aus 1.2.13. Man zeige, daß wir in den Fasern über Gruppen sogar Multihom haben.

*Übung 1.5.32 (Boxprodukt von Moduln, Variante).* Sei  $k$  ein fester Krings. Im Fall der in 1.2.11 betrachteten Schmelzkofaserung  $\text{Ab}_{\text{Kring}^k} \rightarrow \Upsilon \text{Kring}^k$  oder vielmehr der zugehörigen Trennfaserung auf den opponierten Kategorien ist  $\underline{R}$  der  $k$ -Kring  $R$  selbst als  $R$ -Modul und gegeben  $M \in \text{Ab}_R$  sowie  $N \in \text{Ab}_S$  kann  $M \boxtimes N$  beschrieben werden als  $M \otimes_k N$  mit der durch  $(r \otimes s)(m \otimes n) = rm \otimes sn$  gegebenen Struktur als Modul über  $R \otimes_k S$ .

## 1.6 Trennschmelzfakofaserungen

**Definition 1.6.1.** Eine **Trennschmelzfakofaserung** über einer Trennkategorie  $\mathcal{T}$  ist ein Datum aus einer Trennfaserung  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  und einer Schmelzkofaserung  $\bar{p} : \bar{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{T}^{\text{opp}}$ , die nach Zurückholen auf die diskretisierte Basis  $\mathcal{T}^\delta$  übereinstimmen  $\mathcal{M}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \bar{\mathcal{M}}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \forall X \in \mathcal{T}$ , sowie ausgezeichneten Bijektionen

$$i : \mathcal{M}_f^\times(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{M}}_{f^\circ}^\times(\mathcal{G}_1 \Upsilon \dots \Upsilon \mathcal{G}_r, \mathcal{F})$$

zwischen den Mengen der jeweiligen kartesischen Trennungen beziehungsweise kokartesischen Verschmelzungen, die verträglich sind mit Multiverknüpfung und die im Fall  $f = \text{id}_X$  zum Invertieren von Isomorphismen der Faser spezialisieren.

*Beispiele 1.6.2.* Im Fall einer gewöhnlichen Kategorie in der Basis spezialisiert das zu einer Fakofaserung im Sinne von [TG] 8.4.4. Im Fall der terminalen Trennkategorie in der Basis spezialisiert es zum Begriff einer Trennschmelzkategorie im Sinne von [TSK] 1.5.2.

**1.6.3 (Ergänzung zu Trennschmelzfakofaserung).** Wie in den Spezialfällen der eben beschriebenen Beispiele besitzt auch im allgemeinen jede Trennfaserung und jede Schmelzkofaserung eine bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Ergänzung zu einer Trennschmelzfakofaserung. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  notieren wir den Schmelzkofaserungsanteil dieser Ergänzung

$$\mathcal{M}^{\text{sk}} \rightarrow \mathcal{T}^{\text{opp}}$$

Für eine Trennung  $\psi : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  in  $\mathcal{T}$  werden dann Verschmelzungen in der Schmelzkofaserung  $\mathcal{M}^{\text{sk}}$  über der opponierten Verschmelzung  $\psi^\circ : Y_1 \vee \dots \vee Y_r \rightarrow X$  in  $\mathcal{T}^{\text{opp}}$  gegeben durch die Vorschrift

$$\mathcal{M}_{\psi^\circ}^{\text{sk}}(\mathcal{G}_1 \vee \dots \vee \mathcal{G}_r, \mathcal{F}) := \mathcal{M}_X(\psi^\dagger(\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r), \mathcal{F})$$

mit  $\psi^\dagger$  dem Rückzug in unserer Trennfaserung. Die Definition der Multiverknüpfungen geht analog zu [TG] 8.4.10. Gegeben eine Schmelzkofaserung  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}$  notieren wir umgekehrt den Trennfaserungsanteil der Ergänzung zu einer Trennschmelzfakofaserung als

$$\mathcal{N}^{\text{tf}} \rightarrow \mathcal{T}^{\text{opp}}$$

Wir nennen wie in den bereits betrachteten Spezialfällen [TG] 8.4.10 und [TSK] 1.5.5 diese Konstruktionen das **Invertieren** einer Trennfaserung beziehungsweise Schmelzkofaserung zu einer Schmelzkofaserung beziehungsweise Trennfaserung über der opponierten Basis.

**1.6.4.** Gegeben eine Trennschmelzfakofaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  ist in offensichtlicher Weise auch  $\mathcal{M}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{T}^{\text{opp}}$  eine Trennschmelzfakofaserung. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  betrachten wir ihre Erweiterung zu einer Trennschmelzfakofaserung und erhalten eine weitere Trennfaserung

$$\mathcal{M}^{\text{otf}} := (\mathcal{M}^{\text{opp}})^{\text{tf}} \rightarrow \mathcal{T}$$

durch das Opponieren gefolgt vom Invertieren. Wir nennen diese Trennfaserung die **oppinvertierte Trennfaserung**. Sie verallgemeinert sowohl die Oppinverse einer Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen als auch die Oppinverse eines Faserfunktors. Explizit werden ihre Trennungen über einer Trennung der Basis  $\psi : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  in  $\mathcal{T}$  gegeben durch

$$\mathcal{M}_\psi^{\text{otf}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) := \mathcal{M}_X(\psi^\dagger(\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r), \mathcal{F})$$

Gegeben eine Schmelzkofaserung  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{S}$  konstruieren wir analog die **oppinvertierte Schmelzkofaserung**

$$\mathcal{N}^{\text{osk}} := (\mathcal{N}^{\text{opp}})^{\text{sk}} \rightarrow \mathcal{S}$$

Quasi per definitionem haben wir ausgezeichnete Isomorphismen  $(\mathcal{M}^{\text{sk}})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\text{otf}}$  und  $(\mathcal{N}^{\text{tf}})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}^{\text{osk}}$ , die die Objekte festhalten.

*Beispiel 1.6.5.* Eine Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen ist nach 1.2.4 schmelzkogefasert über der terminalen Schmelzkategorie. Unsere invertierte Trennfaserung spezialisiert in diesem Fall zur invertierten Trennkategorie aus [TSK] 1.5.5.

*Beispiel 1.6.6.* Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  erinnern wir aus [TG] 6.2.24 unsere Familienfaserung  $\mathcal{C}_{/\text{Ens}} \rightarrow \text{Ens}$ . Ist  $\mathcal{C}$  eine Trennkategorie, so können wir  $\mathcal{C}_{/\text{Ens}}$  zu einer Trennkategorie  $\mathcal{C}_{/\wedge \text{Ens}}$  machen und unseren Funktor zu einem Trennfunktor in die banale Trennkategorie  $\wedge \text{Ens}$  der Mengen, indem wir eine Trennung  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow G_1 \wedge \dots \wedge G_r$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  von Mengen als eine Familie  $(\phi_x)_{x \in X}$  von Trennungen  $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow G_{1, f_1(x)} \wedge \dots \wedge G_{r, f_r(x)}$  erklären. Wir erhalten so einen Trennfunktor, den **Familientrennfunktor**

$$\mathcal{C}_{/\wedge \text{Ens}} \rightarrow \wedge \text{Ens}$$

Manchmal vereinfachen wir hier auch die Notation zu  $\mathcal{C}_{/\text{Ens}} \rightarrow \wedge \text{Ens}$  oder zu  $\mathcal{C}_{/\text{Ens}} \rightarrow \text{Ens}$ . Besitzt  $\mathcal{C}$  stabil universelle Trennungen, so ist das sogar eine Trennfaserung, die **Familientrennfaserung**. Kartesisch sind dabei genau alle Familien  $(\phi_x)$  aus universellen Trennungen. In diesem Fall haben wir einen natürlichen Isomorphismus

$$(\mathcal{C}_{/\wedge \text{Ens}})^{\text{otf}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{otf}})_{/\wedge \text{Ens}}$$

von Trennfaserungen über  $\wedge \text{Ens}$  zwischen der oppinvertierten Familientrennfaserung und der Familientrennfaserung der oppinvertierten Trennkategorie.

*Beispiel 1.6.7.* Die Mengengarbentrennfaserung 1.2.6 und die Mengengarbenoptrennfaserung 1.2.7 sind zueinander oppinvers, in Formeln und unter etwas sorgloser Verwendung des Gleichheitszeichens haben wir also

$$\text{Ens}_{//\text{Top}} = (\text{Ens}_{/\text{Top}})^{\text{otf}}$$

Ich finde die Mengengarbentrennfaserung anschaulicher, aber die Mengengarbenoptrennfaserung ist algebraisch einfacher und läßt sich leichter verallgemeinern. Im Fall der Optrennfaserung der abelschen Garben kann ich für die oppinvertierte Trennfaserung keine Anschauung mehr anbieten, die mir weiterhelfen würde.

**Beispiel 1.6.8 (Verschiedene Trennungen im diskreten Fall).** Wir spezialisieren das Vorhergehende auf den Fall diskreter Räume. Eine Mengengarbe  $\mathcal{A}$  auf einem diskreten Raum  $X$  ist eine durch  $X$  indizierte Mengenfamilie  $(\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ . Gegeben Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : X \rightarrow Z$  sowie Mengengarben  $\mathcal{B}$  auf  $Y$  und  $\mathcal{C}$  auf  $Z$  ist eine Garbenoptrennung  $\phi \in \text{Ens}_{\parallel(f,g)}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$  über der Zweitrennung  $(f, g) : X \rightarrow Y \wedge Z$  ein Datum  $(\phi_x)_{x \in X}$  bestehend aus Abbildungen  $\phi_x : \mathcal{B}_{f(x)} \times \mathcal{C}_{g(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$  für alle  $x \in X$ . Dahingegen ist eine Garbentrennung  $\psi \in \text{Ens}_{/(f,g)}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$  ein Datum  $(\psi_x)_{x \in X}$  bestehend aus Abbildungen  $\psi_x : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{B}_{f(x)} \times \mathcal{C}_{g(x)}$  für alle  $x \in X$ . Das kann auch als ein Spezialfall unserer Erkenntnisse in 1.6.6 verstanden werden.

**1.6.9 (Faserweises Dualisieren als Trennfunktor).** Gegeben sei eine Trennfaserung zu einer banalen Trennkategorie  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  derart, daß alle Objekte der opponierten Fasern dualisierbar sind. Wir behaupten, daß dann das faserweise Dualisieren einen Trennfunktor

$$\mathcal{M}^{\text{otf}} \rightarrow \mathcal{M}^{\text{t}}$$

induziert wie folgt. Ein Trennung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  der Basis in  $\mathcal{M}^{\text{otf}}$  ist wie in 1.6.4 ausgeführt ein Element von

$$\mathcal{M}_{\psi}^{\text{otf}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) := \mathcal{M}_X(\psi^{\dagger}(\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r), \mathcal{F})$$

In unserem speziellen Fall haben wir also Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\psi}^{\text{otf}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) & & \mathcal{M}_{\psi}^{\text{tf}}(\mathcal{F}^{\vee}, \mathcal{G}_1^{\vee} \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r^{\vee}) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{M}_X(f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{G}_r, \mathcal{F}) & & \mathcal{M}_{/X}(f_1^*(\mathcal{G}_1^{\vee}) \otimes \dots \otimes f_r^*(\mathcal{G}_r^{\vee}), \mathcal{F}^{\vee}) \\ \parallel & & \uparrow \\ \mathcal{M}_{/X}(\mathcal{F}, f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{G}_r) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{/X}((f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{G}_r)^{\vee}, \mathcal{F}^{\vee}) \end{array}$$

mit dem Dualisieren in der unteren Horizontale und Vorschalten der natürlichen Morphismen [TSK] 1.4.21 vom Tensorprodukt der Dualen zum Dualen des Tensorprodukts und der natürlichen Morphismen 1.5.13 vom Rückzug des Dualen zum Dualen des Rückzugs in der rechten Vertikale. Man kann nun zeigen, daß diese Vorschrift auf Trennungen in der Tat einen Trennfunktor induziert wie behauptet. Im Spezialfall, daß  $\mathcal{T}$  die finale Trennkategorie ist, haben wir das bereits in [TSK] 1.6.25 in Gestalt eines Dualisierungsfunktors  $\mathcal{M}^{\text{t}} \rightarrow \mathcal{M}^{\text{ot}}$  für eine Trennschmelzkategorie mit Multihom  $\mathcal{M}$  kennengelernt. In der dort gegebene Fassung geschieht das Dualisieren in  $\mathcal{M}^{\text{s}}$  und in der hier gegebene Fassung in den Fasern der Schmelzkofaserung  $\mathcal{M}^{\text{osk}}$ .

## 2 Derivierter Trennrückzug

### 2.1 Motivation

2.1.1. Gegeben Morphismen  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  und  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$  von abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$  mag man sie in der derivierten Kategorie  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  zusammentensoren wollen zu einem Morphismus in der derivierten Kategorie

$$(\mathcal{F} \otimes^L \mathcal{E}) \rightarrow (\mathcal{G} \otimes^L \mathcal{H})$$

ihrer derivierten Tensorprodukte. Das scheint mir nicht vollständig trivial, wenn wie das derivierte Tensorprodukt wie üblich mit flachen Linksaufösungen beschrieben wird und die Morphismen in der derivierten Kategorie mit Rechtsaufösungen durch injektive Rechtsaufösungen.

2.1.2. Etwas allgemeiner könnten wir bereits mit Morphismen in der derivierten Kategorie beginnen, etwa mit Klassen der Garbenkohomologie  $a \in H^p X$  und  $b \in H^q X$  interpretiert als Morphismen  $a : \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X[p]$  und  $b : \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X[q]$ , und verstehen wollen, inwiefern  $a \otimes b : \mathbb{Z}_X \otimes^L \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X[p] \otimes^L \mathbb{Z}_X[q]$  unter den „offensichtlichen Identifikationen“ der Verknüpfung  $b[p] \circ a : \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X[p+q]$  entspricht.

### 2.2 Lokalisierung von Kofaserungen

2.2.1. Ich erinnere daran, daß sich nach [TD] 1.4.10 bei der Lokalisierung einer Kategorie nach einem Rechtsoresystem  $S$  die Morphismen der Lokalisierung als Äquivalenzklassen von Rechtsbrüchen  $s^{-1} \circ f$  mit  $s \in S$  beschreiben lassen, bei denen also der Zähler rechts steht.

**Definition 2.2.2.** Sei  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor. Unter einem **faserweisen Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$**  verstehen wir ein multiplikatives System  $S$  in  $\mathcal{C}$ , das über den Identitäten der Basis liegt und die Eigenschaft hat, daß für alle  $X \in \mathcal{B}$  die Menge  $S_X$  der  $S$ -Morphismen über  $\text{id}_X$  ein Rechtsoresystem der Faser  $\mathcal{C}_X$  ist.

2.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). Man beachte, daß in diesem Zusammenhang der Zusatz „faserweise“ die Bedingung „Rechtsoresystem“ sowohl verschärft als auch abschwächt. Will ich betonen, daß der Begriff „Rechtsoresystem“ nicht faserweise gemeint ist, so spreche ich von einem **globalen Rechtsoresystem**.

2.2.4. Analog erklären wir die Begriffe eines **faserweisen Linksoresystems**, eines **faserweisen Oresystems** und eines **faserweisen gesättigten Oresystems**.

2.2.5 (**Lokalisierung einer Faser als Faser der Lokalisierung**). Sei ein Funktor  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  gegeben und sei  $S$  ein globales Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$  über den

Identitäten von  $\mathcal{B}$ . Gegeben  $X \in \mathcal{B}$  ist die Menge  $S_X$  der  $S$ -Morphismen über  $\text{id}_X$  dann offensichtlich ein Rechtssoresystem in der Faser  $\mathcal{C}_X$  und für den auf der Lokalisierung induzierten Funktor  $p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen von Kategorien

$$S_X^{-1}\mathcal{C}_X \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C})_X$$

zwischen der Lokalisierung der Faser und der Faser der Lokalisierung. Das folgt direkt aus der Interpretation der Morphismen der Lokalisierung als Äquivalenzklassen von Brüchen. Es gilt genauso für Linksoresysteme.

**2.2.6 (Rückzug von Funktoren).** Gegeben Funktoren  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$  zu derselben Zielkategorie bezeichne

$$\mathcal{C} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{U}$$

das **Faserprodukt in der Kategorie Cat der Kategorien**. Explizit können wir das Faserprodukt  $\mathcal{C} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{U}$  als Unterkategorie der Produktkategorie konstruieren wie folgt: Als Objekte nehmen wir alle Paare  $(C, D) \in \mathcal{C} \times \mathcal{U}$  mit  $F(C) = G(D)$  und als Morphismen  $(C, D) \rightarrow (C', D')$  alle Paare  $(u, v)$  von Morphismen mit  $F(u) = G(v)$ . Je nach Kontext verwenden wir für dies Faserprodukt auch die Notation  $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$  und nennen  $\mathcal{C}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$  den **zurückgezogenen Funktor**. Im Fall der durch ein Objekt  $X \in \mathcal{B}$  gegebenen Einbettung  $\text{cat} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$  der terminalen Kategorie spezialisiert  $\mathcal{C}_{\text{cat}}$  zu unserer Faser  $\mathcal{C}_X$ .

**2.2.7 (Rückzug erhält Faserungen und Kofaserungen).** Seien Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$  gegeben. Ist ein Morphismus  $u$  in  $\mathcal{C}$  kartesisch beziehungsweise kokartesisch für  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ , so ist auch jeder Morphismus der Gestalt  $(u, v)$  im Faserprodukt kartesisch beziehungsweise kokartesisch für  $\mathcal{C}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ . Ist  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung beziehungsweise Kofaserung und  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$  ein beliebiger Funktor, so ist auch  $\mathcal{C}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$  eine Faserung beziehungsweise Kofaserung.

**2.2.8 (Lokalisierung und Rückzug auf neue Basiskategorie).** Sei ein Funktor  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  gegeben und sei  $S$  ein globales Rechtssoresystem in  $\mathcal{C}$  über den Identitäten von  $\mathcal{B}$ . Gegeben ein Funktor  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$  sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen

$$S_{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{C}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$$

zwischen der Lokalisierung des Rückzugs und dem Rückzug der Lokalisierung mit der Notation  $S_{\mathcal{U}}$  für das Urbild von  $S$  unter  $\mathcal{C}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{C}$ . Das folgt direkt aus der Interpretation der Morphismen der Lokalisierung als Äquivalenzklassen von Brüchen und gilt ganz genauso auch für globale Linksoresysteme.

**Satz 2.2.9 (Lokalisieren einer Kofaserung nach globalem Rechtssoresystem).** Seien  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Kofaserfunktors und  $S$  ein globales Rechtssoresystem in  $\mathcal{C}$



über den Identitäten der Basis. So ist auch der auf der Lokalisierung induzierte Funktor ein Kofaserfunktor

$$p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$$

und jeder kokartesische Morphismus in  $\mathcal{C}$  bleibt kokartesisch in  $S^{-1}\mathcal{C}$ .

*Beweis.* Um das zu zeigen beachten wir für jeden Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis sowie Objekte  $\mathcal{F}$  über  $X$  und  $\mathcal{G}$  über  $Y$  die natürlichen Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} (S^{-1}\mathcal{C})_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & & (S^{-1}\mathcal{C})_Y(f_+ \mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ \downarrow \wr & & \uparrow \wr \\ \text{colf}_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'} \mathcal{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}') & \xrightarrow{\sim} & \text{colf}_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'} \mathcal{C}_Y(f_+ \mathcal{F}, \mathcal{G}') \end{array}$$

Der Satz folgt. □

**Lemma 2.2.10 (Faserweise Rechtsoresysteme als globale Rechtsoresysteme).**

Seien  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Kofaserung und  $S$  ein faserweises Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$ . Können wir für jeden Morphismus der Basis einen Vorschub wählen, der  $S$  stabilisiert, so ist  $S$  sogar ein globales Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$ .

2.2.11. In der Situation von Lemma 2.2.10 können wir insbesondere unsere Proposition 2.2.9 anwenden und erhalten durch Lokalisieren eine Kofaserung  $p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit der Eigenschaft, daß kokartesische Morphismen in  $\mathcal{C}$  kokartesisch bleiben in  $S^{-1}\mathcal{C}$ .

*Beweis.* Jeder Linksbruch läßt sich zu einem Rechtsbruch umschreiben, das zeigt das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & f_+ \mathcal{F} & \dashrightarrow & \mathcal{G}' \\ \uparrow S & & \uparrow S & & \uparrow S \\ \mathcal{F}' & \longrightarrow & f_+ \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{G} \end{array}$$

zeigt. Je zwei Morphismen, die durch Vorschalten eines  $S$ -Morphismus egalisiert werden, können auch durch Nachschalten eines  $S$ -Morphismus egalisiert werden, das zeigt das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & f_+ \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G} \\ \uparrow S & & \uparrow S & & \downarrow S \\ \mathcal{F}' & \longrightarrow & f_+ \mathcal{F}' & & \mathcal{G}' \end{array}$$

Das Lemma ist bewiesen. □

**2.2.12 (Opponierete Aussagen zur Lokalisierung von Faserungen).** Ist  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung und  $S$  ein globales Linksoresystem in  $\mathcal{C}$ , so erhalten wir dual zu 2.2.9 durch Lokalisieren wieder eine Faserung  $p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit der Eigenschaft, daß kartesische Morphismen in  $\mathcal{C}$  kartesisch bleiben in  $S^{-1}\mathcal{C}$ . Ist  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung und  $S$  ein faserweises Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  und können wir für jeden Morphismus der Basis einen Rückholfunktor wählen, der unser faserweises Linksoresystem  $S$  stabilisiert, so ist  $S$  opponiert zu 2.2.10 ein globales Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  und wir erhalten durch Lokalisieren wieder eine Faserung  $p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit der Eigenschaft, daß kartesische Morphismen in  $\mathcal{C}$  kartesisch bleiben in  $S^{-1}\mathcal{C}$ .

*Vorschau 2.2.13.* Die Lokalisierung von Kofaserungen nach faserweisen Linksoresystemen beziehungsweise von Faserungen nach faserweisen Rechtsoresystemen ist delikater. In 2.5.11, 2.5.12 und 2.5.13 diskutieren wir Annahmen, unter denen in diesen Fällen die Lokalisierung wieder eine Kofaserung ist und die Linksderivierten der Vorschübe die Vorschübe der lokalisierten Kofaserung sind.

## 2.3 Quisrechtsentfaltung von Garbenkomplexen

2.3.1. Gegeben ein Universum  $\mathfrak{U}$  im Sinne von [LA2] 7.11.3 mit  $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$  und  $X \in \mathfrak{U}$  ein topologischer Raum bezeichne  $\mathfrak{U}\text{Ab}_{/X}$  die Kategorie der abelschen Garben  $\mathcal{F}$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F}(V) \in \mathfrak{U} \forall V \Subset X$ . Das ist eine abelsche Kategorie, die Kolimiten und Limiten über alle  $\mathfrak{U}_\epsilon$ - $\mathfrak{U}_\epsilon^\rightarrow$ -Köcher besitzt, also alle Köcher, deren Punktmenge und Morphismenmenge Elemente von  $\mathfrak{U}$  sind.

**Satz 2.3.2 (Existenz von Quisrechtsentfaltungen).** *Sei  $\mathfrak{U}$  ein Universum mit  $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$  und sei  $X \in \mathfrak{U}$  ein topologischer Raum. So besitzt jeder Komplex  $A \in \text{Hot}(\mathfrak{U}\text{Ab}_{/X})$  eine Quisrechtsentfaltung in  $\text{Hot}(\mathfrak{U}\text{Ab}_{/X})$  durch einen Komplex aus injektiven Garben.*

2.3.3. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird im Anschluß an 2.3.14 gegeben.

2.3.4. Der Satz zeigt, daß gegeben ein Universum  $\mathfrak{U}$  mit  $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$  und  $X \in \mathfrak{U}$  ein topologischer Raum  $\text{Der}(\mathfrak{U}\text{Ab}_{/X})$  eine  $\mathfrak{U}_\epsilon$ - $\mathfrak{U}_\epsilon^\rightarrow$ -Kategorie ist. Er zeigt auch, daß der Übergang zu einem größeren Universum einen volltreuen Funktor zwischen den jeweiligen derivierten Kategorien von abelschen Garben liefert.

2.3.5. Eine Quisrechtsentfaltung muß keineswegs in einem Komplex aus injektiven Garben landen. In der Homotopiekategorie kann ja ein Komplex aus injektiven Garben durchaus isomorph sein zu Komplexen, die nicht aus injektiven Garben bestehen.

*Ergänzung 2.3.6.* Ist zusätzlich  $\mathcal{A} \in \mathcal{U}\text{Ab}/_X$  eine Garbe von Ringen, so gilt dasselbe für die Kategorie  $\mathcal{U}\text{Ab}/_{(X,\mathcal{A})}$  der Garben von  $\mathcal{A}$ -Moduln aus  $\mathcal{U}\text{Ab}/_X$ , genauer ihre Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\mathcal{U}\text{Ab}/_{(X,\mathcal{A})})$ . Der Beweis bleibt mutatis mutandis derselbe.

**Definition 2.3.7.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Unter einer **angeordneten Filtrierung** eines Objekts  $A \in \mathcal{C}$  verstehen wir einen Ordnungshomomorphismus  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$  einer angeordneten Menge  $\Omega$  in die teilgeordnete Menge der Unterobjekte von  $A$ .

2.3.8. Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $A \in \mathcal{C}$  ein Objekt und  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$  eine angeordnete Filtrierung von  $A$ . Existieren die filtrierenden Kolimites in  $\mathcal{C}$  für angeordnete Systeme von Unterobjekten von  $A$  und sind diese wieder Unterobjekte von  $A$ , so setzen wir allgemein für  $\Gamma \subset \Omega$  eine Teilmenge

$$A_\Gamma := \text{colf}_{\eta \in \Gamma} A_\eta \quad \text{und speziell} \quad A_{<\omega} := \text{colf}_{\eta < \omega} A_\eta.$$

2.3.9. Gegeben eine Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem topologischen Raum  $X$  erklären wir ihre **Kardinalität**  $\text{card}(\mathcal{F}) := \text{card}(\bar{\mathcal{F}})$  als die Kardinalität ihres étalen Raums. Gegeben ein Komplex von Garben  $\mathcal{F}$  setzen wir  $\text{card}(\mathcal{F}) := \max(\text{card}(\mathcal{F}^i))$ .

**Proposition 2.3.10 (Enge Filtrierungen exakter Garbenkomplexe).** *Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $\alpha := \max(\text{card}(X), \text{card}(\mathbb{N}))$ .*

1. *Für jeden surjektiven Morphismus  $f : A \rightarrow B$  in  $\text{Ab}/_X$  gibt es  $A_0 \subset A$  mit  $\text{card}(A_0) \leq \alpha \text{card}(B)$  und  $f : A_0 \rightarrow B$ ;*
2. *Jeder von Null verschiedene exakte Komplex  $T \neq 0$  in  $\text{Ket}(\text{Ab}/_X)$  besitzt einen von Null verschiedenen exakten Unterkomplex  $0 \neq S \subset T$  mit  $\text{card}(S) \leq \alpha$ ;*
3. *Jeder exakte Komplex  $T$  in  $\text{Ket}(\text{Ab}/_X)$  besitzt eine wohlgeordnete Filtrierung durch Unterkomplexe  $T_\omega$ , bei der alle Subquotienten  $T_\omega/T_{<\omega}$  exakt sind von einer Kardinalität  $\text{card}(T_\omega/T_{<\omega}) \leq \alpha$  und es  $\omega$  gibt mit  $T_\omega = T$ .*

*Beweis.* 1. Wir wählen für jedes Element eines jeden Halms  $b_x \in B_x$  eine offene Umgebung  $U \Subset X$  von  $x$  und  $t \in A(U)$  mit  $t_x \mapsto b_x$ . Das liefert einen Morphismus  $\bigoplus_{(U,t)} \mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow A$  mit der Eigenschaft, daß sein Bild  $A_0$  surjektiv auf  $B$  geht. Unsere direkte Summe ist eine Untergarbe der direkten Summe  $\bigoplus_{(U,t)} \mathbb{Z}_X$  von konstanten Garben, deshalb kann man ihre Kardinalität abschätzen durch  $\alpha \text{card}(B)$ .

2. Sicher finden wir einen Index  $j$  mit  $\ker(T^j \rightarrow T^{j+1}) \neq 0$  und eine von Null

verschiedene Untergarbe  $S^j$  dieses Kerns mit  $\text{card}(S^j) \leq \alpha$ . Dann bilden wir den Pullback

$$\begin{array}{ccc} S^j & \longrightarrow & T^j \\ \uparrow & & \uparrow \\ M^{j-1} & \longrightarrow & T^{j-1} \end{array}$$

Er ist auch auf den Halmen ein Pullback, also gilt  $M^{j-1} \twoheadrightarrow S^j$ . Nach Teil 1 finden wir eine Untergarbe  $M_0^{j-1} \subset M^{j-1}$  mit  $\text{card}(M_0^{j-1}) \leq \alpha$  und  $M_0^{j-1} \twoheadrightarrow S^j$ . Dann nehmen wir  $S^{j-1} := M^{j-1}$  und machen induktiv weiter.

3. Wir finden nach dem Zorn'schen Lemma eine maximale wohlgeordnete Familie von Unterkomplexen  $(T_\omega)_{\omega \in \Omega}$  mit allen fraglichen Eigenschaften mit Ausnahme der letzten. Sie sind alle exakt, denn sonst gäbe es einen kleinsten Index  $\omega$ , für den  $T_\omega$  nicht exakt wäre, und dann wäre  $T_{<\omega}$  exakt und  $T_\omega/T_{<\omega}$  exakt und damit  $T_\omega$  doch exakt nach der langen exakten Homologiesequenz. Also ist auch ihr Kolimes  $T_\Omega$  exakt. Ist dieser Komplex bereits ganz  $T$ , so sind wir fertig. In jedem Fall ist  $T/T_\Omega$  exakt, und ist es nicht Null, so finden wir darin einen von Null verschiedenen exakten Unterkomplex einer Kardinalität  $\leq \alpha$ . Durch sein Urbild in  $T$  könnten wir dann unsere wohlgeordnete Familie vergrößern im Widerspruch zur Maximalität.  $\square$

**Korollar 2.3.11 (Testen auf Quisrechtsentfaltetheit mit kleinen Komplexen).** *Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $\alpha := \max(\text{card}(X), \text{card}(\mathbb{N}))$ . Ist  $J$  ein Komplex aus injektiven Garben und gilt  $\text{Hot}_{\text{Ab}/X}(T, J) = 0$  für jeden exakten Komplex  $T$  mit  $\text{card}(T) \leq \alpha$ , so folgt  $\text{Hot}_{\text{Ab}/X}(T, J) = 0$  für jeden exakten Komplex.*

*Beweis.* Sei  $T$  ein beliebiger exakter Komplex. Nach 2.3.10 besitzt  $T$  eine wohlgeordnete Filtrierung durch Unterkomplexe  $T_\omega$  mit  $\text{card}(T_\omega/T_{<\omega}) \leq \alpha \forall \omega$  und  $T_\omega = T$  für mindestens ein  $\omega$ . Die Komplexe  $\text{Ab}_{/X}(T_\omega, J)$  von abelschen Gruppen bilden dann ein transfinit surjektives System von Komplexen, dessen Kernkomplexe

$$\ker \left( \text{Ab}_{/X}(T_\omega, J) \rightarrow \lim_{\eta < \omega} \text{Ab}_{/X}(T_\eta, J) \right) = \text{Ab}_{/X}(T_\omega/T_{<\omega}, J)$$

nach unseren Annahmen an jeder Stelle exakt sind. Mit [TS] 7.1.50 folgt, daß auch  $\text{Ab}_{/X}(T, J)$  exakt ist.  $\square$

**Lemma 2.3.12 (Nullhomotopmachen von Morphismen).** *Sei  $\mathfrak{U}$  ein Universum mit  $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ . Seien  $X \in \mathfrak{U}$  ein topologischer Raum,  $E \in \mathfrak{U}$  eine Menge und  $A, T_e \in \text{Ket}(\mathfrak{U}\text{Ab}_{/X})$  für  $e \in E$  Komplexe von abelschen Garben auf  $X$  mit  $T_e$  exakt. Sei  $(f_e : T_e \rightarrow A)_{e \in E}$  eine Familie von Morphismen nach  $A$ . So gibt es einen*

injektiven Quasiisomorphismus  $g : A \hookrightarrow B$  in einen Komplex  $B \in \text{Ket}(\mathfrak{U}\text{Ab}/X)$  derart, daß alle  $g \circ f_e$  nullhomotop sind.

*Beweis.* Wir wählen auf  $E$  eine Wohlordnung und nennen diese wohlgeordnete Menge  $\Omega$ . Dann konstruieren wir mit transfiniten Induktion ein direktes System  $(B_\omega)_{\omega \in \Omega}$  von Komplexen mit injektiven Quasiisomorphismen  $g_\omega : A \hookrightarrow B_\omega$  und  $g_\omega \circ f_\omega$  nullhomotop durch

$$T_\omega \rightarrow A \hookrightarrow \text{colf}_{\eta < \omega} B_\eta \rightarrow B_\omega$$

mit  $B_\omega$  dem Abbildungskegel der Komposition der beiden vorderen Morphismen. Ist  $\omega \in \Omega$  das kleinste Element, so ist der „leere Kolimes“ als  $A$  selber zu verstehen, also als das „initiale Objekt in der Kategorie der Komplexe mit einem ausgezeichneten Morphismus von  $A$  dorthin“. Schließlich löst dann  $g : A \hookrightarrow B := \text{colf}_{\omega \in \Omega} B_\omega$  unser Problem.  $\square$

**Lemma 2.3.13.** *Sei  $\mathfrak{U}$  ein Universum mit  $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ . Seien  $X \in \mathfrak{U}$  ein topologischer Raum und  $A \in \text{Ket}(\mathfrak{U}\text{Ab}/X)$  ein Komplex von abelschen Garben auf  $X$ . So existieren ein Komplex  $B \in \text{Ket}(\mathfrak{U}\text{Ab}/X)$  und ein injektiver Quasiisomorphismus  $h : A \hookrightarrow B$  mit der Eigenschaft, daß  $h(A^i)$  in einer injektiven Untergarbe von  $B^i$  liegt für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Wir wählen für alle  $i$  eine Einbettung  $f^i : A^i \hookrightarrow J^i$  in eine injektive Garbe aus  $\mathfrak{U}\text{Ab}/X$ . Wir bilden den Komplex  $K^i = J^i \oplus J^{i+1}$  mit dem Differential  $d(x, y) = (y, 0)$ . Die Einbettung  $(f^i, f^{i+1}d)^\top : A^i \hookrightarrow K^i$  ist dann eine Kettenabbildung. Wir bilden nun erst den Kokernkomplex  $(C^i)$  dieser Kettenabbildung und dann den Komplex  $[-1] \text{Keg}(K \rightarrow C)$ . Die natürliche Kettenabbildung von  $A$  in diesen letzten Komplex hat schließlich die gesuchten Eigenschaften.  $\square$

**Proposition 2.3.14.** *Sei  $\mathfrak{U}$  ein Universum mit  $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ . Seien  $X \in \mathfrak{U}$  ein topologischer Raum,  $E \in \mathfrak{U}$  eine Menge und  $T_e \in \text{Ket}(\mathfrak{U}\text{Ab}/X)$  exakte Komplexe von abelschen Garben auf  $X$ . So gibt es für jeden Komplex  $A \in \text{Ket}(\mathfrak{U}\text{Ab}/X)$  einen Quasiisomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} I$  zu einem Komplex  $I \in \text{Ket}(\mathfrak{U}\text{Ab}/X)$  aus injektiven Garben mit*

$$\text{Hot}_{\text{Ab}/X}(T_e, I) = 0 \quad \forall e \in E$$

*Beweis.* Sei  $\alpha$  eine Kardinalität einer Menge aus  $\mathfrak{U}$  mit  $\alpha \geq \text{card}(T_e)$  für alle  $e \in E$  und  $\alpha \geq \max(\text{card}(X), \text{card}(\mathbb{N}))$ . Sei  $\Gamma$  die kleinste wohlgeordnete Menge unseres Universums mit  $\text{card}(\Gamma) > \alpha$ . Wir konstruieren ein direktes System  $(J_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  von Komplexen abelscher Garben und beginnen mit  $J_0 := A$ . Dann wählen wir mit 2.3.12 injektive Quasiisomorphismen

$$\text{colf}_{\eta < \gamma} J_\eta \hookrightarrow J_\gamma$$

induktiv so, daß alle Morphismen von irgendwelchen  $T_e$  in den Kolimes nullhomotop werden unter dem Nachschalten des Morphismus nach  $J_\gamma$ . Nach 2.3.13 dürfen wir zusätzlich annehmen, daß die Bilder unserer Injektionen in jedem Grad jeweils in injektiven Untergarben enthalten sind. Ich behaupte, daß dann der Kolimes

$$\operatorname{colim}_{\gamma \in \Gamma} J_\gamma$$

die gesuchte Eigenschaft hat. In der Tat muß jeder Morphismus von einem  $T_e$  dorthin aus Kardinalitätsgründen bereits in einem der  $J_\gamma$  landen, vergleiche etwa [AL] 5.4.8, und damit nullhomotop werden. Weiter muß unser Kolimes aus injektiven Garben bestehen, da er das Injektivitätskriterium über Ideale [TG] 3.5.9 erfüllt.  $\square$

*Beweis für die Existenz von Quisrechtsentfaltungen 2.3.2.* Sei  $(T_e)_{e \in E}$  ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen exakter Komplexe in  $\operatorname{Ket}(\mathcal{A}b_{/X})$  einer Kardinalität  $\leq \max(\operatorname{card}(X), \operatorname{card}(\mathbb{N}))$ . Konstruieren wir zu dieser Familie einen Quasiisomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} I$  zu einem Komplex aus injektiven Garben mit  $\operatorname{Hot}_{\mathcal{A}b_{/X}}(T_e, I) = 0 \forall e \in E$  wie in 2.3.14 ausgeführt, so folgt mit unserem Korollar 2.3.11, daß  $I$  in  $\operatorname{Hot}(\mathcal{A}b_{/X})$  bereits quisrechtsentfaltet sein muß.  $\square$

**2.3.15 (Produkte und Koprodukte derivierter Modulgarben).** Gegeben sei ein geringter Raum  $X = (X, \mathcal{A})$ . Existieren für eine Menge  $I$  alle  $I$ -Koprodukte in der Kategorie der Modulgarben  $\mathcal{A}b_{/X}$ , so existieren auch alle  $I$ -Koprodukte in den Kategorien  $\operatorname{Ket}(\mathcal{A}b_{/X})$ ,  $\operatorname{Hot}(\mathcal{A}b_{/X})$ ,  $\operatorname{Der}(\mathcal{A}b_{/X})$  und stimmen überein mit den offensichtlichen „gliedweisen Koprodukten“. Das folgt mit dem zweiten Teil unserer Proposition [TD] 3.9.2 aus der Existenz 2.3.6 von Quisrechtsentfaltungen für beliebige Homotopiekomplexe unserer abelschen Kategorie. Existieren weiter für eine Menge  $I$  alle  $I$ -Produkte in der Kategorie der Modulgarben  $\mathcal{A}b_{/X}$ , so existieren auch alle  $I$ -Produkte in den Kategorien  $\operatorname{Ket}(\mathcal{A}b_{/X})$ ,  $\operatorname{Hot}(\mathcal{A}b_{/X})$ ,  $\operatorname{Der}(\mathcal{A}b_{/X})$  und können als gliedweise Produkte von Quisrechtsentfaltungen berechnet werden. Das folgt aus dem ersten Teil unserer Proposition [TD] 3.9.2.

## Übungen

*Übung 2.3.16 (Derivierte Kategorie der Garben auf einem Koprodukt).* Ist ein Raum  $X$  eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  und ist  $\mathcal{F} \in \operatorname{Der}(\mathcal{A}b_{/X})$  ein Komplex von Garben auf  $X$ , so induzieren die Einheiten beziehungsweise Koeinheiten der jeweiligen Adjunktionen Isomorphismen

$$\bigoplus_{i \in I} \operatorname{in}_{i!} \operatorname{in}_i^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \operatorname{in}_{i*} \operatorname{in}_i^* \mathcal{F}$$

Zusätzlich erinnern wir daran, daß hier nach [TG] 4.9.11 die natürlichen Transformationen Isotransformationen  $\text{in}_{i!} \xrightarrow{\sim} \text{in}_{i*}$  sind. Hinweis: Für abelsche Garben war der erste Isomorphismus [TG] 4.9.21. Für die Homotopiekategorien folgt es unmittelbar. Für die derivierten Kategorien folgt es dann aus der Exaktheit der beteiligten Funktoren. Für den zweiten Isomorphismus verwende man die Beschreibung von Produkten in  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  aus 2.3.15.

**Übung 2.3.17 (Hyperkohomologie auf einem Koproduct).** Sei ein Raum  $X$  eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  und  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  ein Komplex von Garben auf  $X$ . Daß derivierte direkte Bilder als Rechtsadjungierte mit Produkten vertauschen liefert einen Isomorphismus  $\text{fin}_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \text{fin}_* \text{in}_i^* \mathcal{F}$  in  $\text{Der}(\text{Ab})$ . Da auch die Funktoren  $\mathcal{H}^q = \text{Der}_{\text{Ab}}(\mathbb{Z}[-q], \_)$  mit Produkten vertauschen erhalten wir, daß die Rückzüge Isomorphismen

$$\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathbb{H}^q(X_i; \mathcal{F})$$

liefern. Das verallgemeinert unsere Erkenntnisse aus [TG] 4.3.30 auf die Hyperkohomologie.

**Übung 2.3.18 (Produkte als Vorschub).** Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten von  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  und sind  $\text{em}_i : X \rightarrow X \times I$  die Einbettungen und ist ein Objekt  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/X \times I)$  gegeben zusammen mit Isomorphismen  $\text{em}_i^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$ , so liefern diese Isomorphismen zusammen nach 2.3.17 einen Isomorphismus  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \text{em}_{i*} \mathcal{G}_i$  und das Anwenden des Vorschubs unter der Projektion auf  $X$  liefert einen Isomorphismus

$$\text{pr}_{X*} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i$$

Hinweis: Der derivierte Vorschub vertauscht als Rechtsadjungierter stets mit Produkten.

**Übung 2.3.19 (Koproducte als Schreivorschub).** Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten von  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  und  $\text{em}_i : X \rightarrow X \times I$  die Einbettungen. Gegeben ein Objekt  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/X \times I)$  zusammen mit Isomorphismen  $\text{em}_i^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$  liefern diese Isomorphismen zusammen nach 2.3.17 einen Isomorphismus  $\bigoplus_{i \in I} \text{em}_{i!} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$  und der Schreivorschub unter der Projektion auf  $X$  ist exakt und das Anwenden des zugehörigen derivierten Funktors liefert einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{X!} \mathcal{G}$$

Hinweis: Étaler separierter Basiswechsel [TG] 6.4.32.

**Übung 2.3.20 (Verschwindungskriterium für derivierte Garben).** Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/_X)$  ein Komplex von abelschen Garben. Besitzt jeder Punkt  $x \in X$  ein konfinales System von offenen Umgebungen  $U \Subset X$  mit  $\text{fin}_* j^* \mathcal{F} = 0$  für  $j : U \hookrightarrow X$  die Einbettung, so gilt bereits  $\mathcal{F} = 0$ . Hinweis: Da nach [TG] 4.9.14 das Ausdehnen durch Null unter einer offenen Einbettung ein exakter Funktor ist, macht der Rückzug unter einer offenen Einbettung quisrechtsentfaltete Komplexe zu quisrechtsentfalteten Komplexen. Man mag die Aussage alternativ auch aus 2.3.22 folgern.

**Ergänzung 2.3.21.** Man kann also lokal prüfen, ob ein vorgegebener Garbenkomplex in der derivierten Kategorie das Nullobjekt ist. Daß das halmweise geprüft werden kann, ist ja eh klar. Ein Komplex abelscher Garben ist eben exakt genau dann, wenn er auf allen Halmen exakte Komplexe induziert. Man kann jedoch nicht auf den Halmen prüfen, ob zwei Morphismen in der derivierten Kategorie der Garben übereinstimmen. Das geht nur bei echten Garben.

**Übung 2.3.22 (Beschreibung der höheren Vorschübe).** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und ein Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/_X)$  auf  $X$  ist die  $q$ -te Kohomologiegarbe seines derivierten Vorschubs  $\mathcal{H}^q(f_* \mathcal{F})$  natürlich isomorph zu der zur Prägarbe  $V \mapsto \mathbb{H}^q(f^{-1}(V); \mathcal{F})$  assoziierten Garbe. Das verallgemeinert sowohl den in [TG] 6.6.2 besprochenen Fall einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  als auch das Verschwindungskriterium 2.3.20, das sich aus dem Spezialfall  $f = \text{id}$  ergibt. Für den Beweis kopiere man den Beweis von [TG] 6.6.2 und nutze die in 2.3.20 gegebenen Hinweise. Im Fall unbeschränkter Komplexe benötigt man auch hier die Quisrechtsentfaltungen aus 2.3.

**Übung 2.3.23 (Verschwindungskriterium für derivierte Garben, Variante).** Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/_{X \times Y})$  ein Komplex von abelschen Garben. Besitzt jeder Punkt  $x \in X$  ein konfinales System von offenen Umgebungen  $U \Subset X$  mit  $\text{pr}_{Y*}(j \times \text{id})^* \mathcal{F} = 0$  für  $j : U \hookrightarrow X$  die Einbettung, so gilt bereits  $\mathcal{F} = 0$ . Hinweis: Folgt aus dem vorhergehenden.

## 2.4 Derivierte Garbenopfaserung

2.4.1. Wir erinnern aus [TG] 6.2.17 die Bifaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$ , die wir die Garbenopfaserung genannt hatten und deren Fasern  $\text{Ab}_{//X}$  opponiert sind zu den üblichen Kategorien  $\text{Ab}/_X$  von abelschen Garben auf  $X$ . Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  sind Rückzug und Vorschub adjungierte Funktoren zwischen den additiven Kategorien  $\text{Ab}_{//X}, \text{Ab}_{//Y}$  und somit nach [TG] 2.5.13 additive Funktoren. Gegeben  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{//X}$  und  $\mathcal{G} \in \text{Ab}_{//Y}$  liefert mithin die Adjunktion einen Gruppenisomorphismus  $\text{Ab}_{//Y}(f_+ \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{//X}(\mathcal{F}, f^\dagger \mathcal{G})$  und wir können eine Addition auf

$$\text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$



dadurch erklären, daß sie mit diesen Gruppenstrukturen verträglich ist. Es ist leicht zu sehen, daß für eine weitere stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow Z$  und  $\mathcal{H} \in \text{Ab}_{//Z}$  die Verknüpfung  $\text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \text{Ab}_{//g}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \rightarrow \text{Ab}_{//gf}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$  biadditiv ist. In später eingeführter Terminologie haben wir so für unseren Funktor eine „relative additive Struktur“ erhalten.

2.4.2. Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und Komplexe abelscher Garben  $\mathcal{F} \in \text{Ket}(\text{Ab}_{//X})$  und  $\mathcal{G} \in \text{Ket}(\text{Ab}_{//Y})$  erhalten wir analog zum Homkomplex einen Komplex abelscher Gruppen  $\text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Ket}(\text{Ab})$  und Isomorphismen von Komplexen

$$\text{Ab}_{//Y}(f_{\dagger}\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{//X}(\mathcal{F}, f^{\dagger}\mathcal{G})$$

Nehmen wir  $\mathcal{Z}^0$  beziehungsweise  $\mathcal{H}^0$  des Komplexes  $\text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  als Morphismen von Garbenkomplexen über  $f$ , so erhalten wir weitere Bifaserungen, die wir

$$\text{Ket}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \quad \text{und} \quad \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$$

notieren, mit komponentenweisem  $f^{\dagger}$  als Rückzug und komponentenweisem  $f_{\dagger}$  als Vorschub. In später eingeführter Terminologie haben wir zu unserem Funktor  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  mit „relativer additiver Struktur“ den „relativ in  $\text{dgAb}$  angereicherten Funktor“ der Komplexe gebildet und diesen „umstrukturiert“ mittels der Schmelzfunktoren  $\mathcal{Z}^0$  beziehungsweise  $\mathcal{H}^0$  von  $\text{dgAb}$  nach  $\text{Ab}$ .

2.4.3. In Bezug auf den Faserfunktor  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$  bilden die Quasiisomorphismen über den Identitäten der Basis ein faserweises Oresystem, das unter allen Rückzugfunktoren stabil ist. Nach 2.2.10 ist es damit sogar ein globales Linksoresystem in  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}})$ . Wenn wir danach lokalisieren, erhalten wir nach 2.2.9 opponiert einen Faserfunktor  $\text{Der}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$ . Wir nennen unseren Funktor

$$\text{Der}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$$

die **derivierte Garbenopfaserung**.

2.4.4 (**Fasern und Rückzüge der derivierten Garbenopfaserung**). Nach 2.2.8 opponiert sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen

$$e_X : \text{Der}(\text{Ab}_{//X}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab}_{//\text{Top}})_X$$

von der Lokalisierung der Faser zur Faser der Lokalisierung, die mit dem zugehörigen Strukturtransport eine triangulierte Kategorie wird. Nach 2.2.9 hat jeder kartesische Morphismus der Faserung  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$  kartesisches Bild in der derivierten Garbenopfaserung. Andererseits ist der Derivierte des opponierten Rückzugs  $f^{(\dagger)}$  unter einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  nach [TD] 3.4.1 ein Paar  $(f^{\dagger}, \tau)$  aus einem triangulierten Funktor  $f^{\dagger} = \text{R}f^{(\dagger)} : \text{Der}(\text{Ab}_{//Y}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{//X})$

und einer Transformation, ja wegen der Exaktheit des Rückzugs Isotransformation  $\tau : Q \circ (\text{Hot } f^{(\dagger)}) \xrightarrow{\cong} Rf^{(\dagger)} \circ Q$ . Zusammen mit dem Transportmorphismus  $(\text{Hot } f^{(\dagger)})(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}$  für Komplexe  $\mathcal{G} \in \text{Hot}(\text{Ab}_{//Y})$  liefert  $\tau$  also kartesische Morphismen

$$e_X (Rf^{(\dagger)}(Q\mathcal{G})) \rightarrow (Q\mathcal{G})$$

der derivierten Garbenopfaserung. Wir sehen so, daß die Rückzüge der derivierten Garbenopfaserung triangulierte Funktoren sind. Genauer entsprechen sie den von unseren derivierten Rückzügen  $f^* = Lf^{(*)} : \text{Der}(\text{Ab}_{/Y}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  aus [TD] 3.4.18 auf den opponierten Kategorien induzierten Funktoren  $f^{*\text{opp}}$ .

*Vorschau 2.4.5.* Für nicht notwendig exakte Funktoren wird das in 2.5.12 und 2.5.13 diskutiert.

**2.4.6 (Derivierte Garbenopfaserung als Bifaserung).** Nach [TD] 3.4.18 hat  $f^*$  den Rechtsadjungierten  $f_* = Rf_{(*)}$  und nach [TG] 6.3.13 ist damit unsere Faserung auch eine Kofaserung mit Vorschubfunktoren  $f_*^{\text{opp}}$ . Formal besteht unsere Struktur aus einem Bifaserfunktoren  $\text{Der}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$  und einer Struktur von triangulierter Kategorie auf jeder Faser und einer  $\mathbb{Z}$ -Struktur auf jedem Rückzugsfunktoren derart, daß alle Rückzüge triangulierte Funktoren werden und alle Identifikationen unserer Faserung mit den  $\mathbb{Z}$ -Strukturen verträglich sind. Damit haben wir die ersten zwei der sechs Funktoren des Sechs-Funktoren-Formalismus konstruiert in Gestalt adjungierter Paare triangulierter Funktoren  $(f^*, f_*)$  und haben deren Beziehungen untereinander beschrieben. Die Verallgemeinerung zu Modulgarben diskutieren wir in ??.

2.4.7. Ist speziell  $f = \text{fin}_X : X \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung und  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{//X})$  ein Komplex abelscher Garben auf  $X$ , so haben wir

$$\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) = \mathcal{H}^q \text{fin}_{X*} \mathcal{F}$$

Diese Gruppe ist unsere  $q$ -te Hyperkohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$  aus [TD] 3.4.17. Ist  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe und kein Komplex, so notieren wir diese Gruppe wie bisher  $H^q(X; \mathcal{F})$  und nennen sie die Kohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$ .

**Satz 2.4.8 (Halbbeschränkter derivierter eigentlicher Basiswechsel).** *Gegeben ein kartesisches Quadrat  $f q = p g$  topologischer Räume mit  $f, g$  eigentlich und separiert ist der Basiswechsel der derivierten Garbenopfaserung für  $\mathcal{F} \in \text{Der}^+(\text{Ab}_{/X})$  ein Isomorphismus*

$$p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\cong} g_* q^* \mathcal{F}$$

*Beweis.* Im Fall von Mengengarben und a fortiori von abelschen Garben kennen wir diese Aussage bereits aus [TG] 6.3.24. Sie folgt unmittelbar für Komplexe

von abelschen Garben und desgleichen für Homotopiekomplexe. Ein Morphismus in der derivierten Kategorie der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum ist nun ein Isomorphismus genau dann, wenn er unter dem Rückzug auf jeden Punkt einen Isomorphismus liefert. Aufgrund der Transitivität von Basiswechseln [TG] 6.3.16 dürfen wir uns beim Beweis mithin auf den Fall beschränken, daß  $p$  von einem einpunktigen Raum ausgeht. Nun wissen wir, daß jeder Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Hot}^+(\text{Ab}/X)$  aus welchen abelschen Garben quisrechtsentfaltet ist für  $f_{(*)}$ . Nach Annahme ist, wenn  $p$  von einem einpunktigen Raum ausgeht, unser  $q : W \rightarrow X$  die Einbettung eines relativ hausdorffschen Kompaktums. Nach [TG] 4.8.11 ist damit  $q^{(*)}\mathcal{F}$  ein gegen die Differentiale beschränkter Komplex von kompaktweichen und nach [TG] 4.8.12 für den Funktor der globalen Schnitte  $g_{(*)}$  rechtsazyklischen abelschen Garben und ist damit nach [TD] 3.4.13 quisrechtsentfaltet für  $g_{(*)}$ . Der Satz folgt.  $\square$

**Satz 2.4.9 (Unbeschränkter derivierter eigentlicher Basiswechsel).** *Sei ein kartesisches Quadrat  $f q = p g$  topologischer Räume mit  $f, g$  eigentlich und separiert gegeben. Hat  $g_{(*)}$  beschränkte homologische Dimension, so ist der Basiswechsel der derivierten Garbenopfaserung für beliebiges  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  ein Isomorphismus*

$$p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} g_* q^* \mathcal{F}$$

*Beweis.* Nach 2.3.2 besitzt jeder Komplex abelscher Garben eine Quisrechtsentfaltung durch einen Komplex injektiver Garben. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\mathcal{F}$  bereits selbst solch ein Komplex ist. Aus dem halbbeschränkten Fall 2.4.8 folgt, daß dann  $q^{(*)}\mathcal{F}$  ein Komplex aus  $g_{(*)}$ -rechtsazyklischen Garben ist. Damit ist  $q^{(*)}\mathcal{F}$  quisrechtsentfaltet für  $g_{(*)}$  nach unseren Erkenntnissen [TD] 3.6.4 über das Derivieren homologisch endlicher Funktoren. Der Satz folgt.  $\square$

## Übungen

*Übung 2.4.10.* Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $\phi \in \text{Der}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  ein Morphismus derivierter abelscher Garben darüber alias ein Element des Morphismenraums  $\text{Der}/X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$ . Sind  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  abelsche Garben, so ist das schlicht ein Komorphismus  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  über  $f$ . Die Einheit der Adjunktion  $\mathcal{G} \rightarrow f_* f^* \mathcal{G}$  induziert nun einen Morphismus

$$\text{fin}_{Y^*} \mathcal{G} \rightarrow \text{fin}_{Y^*} f_* f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \text{fin}_{X^*} f^* \mathcal{G} \rightarrow \text{fin}_{X^*} \mathcal{F}$$

und so einen Morphismus  $H^q(Y; \mathcal{G}) \rightarrow H^q(X; \mathcal{F})$ . Man zeige, daß er unser Rückzug auf der Garbenkohomologie aus [TG] 4.3.7 ist.

## 2.5 Lokalisierung durch Anpassung

2.5.1. Unter einem starken Vorschub verstehen wir im folgenden wie in [TG] 6.3.3 einen Vorschub mit stark kokartesischem Transportmorphismus.

**Definition 2.5.2.** Unter einer **vollen Unterkofaserung** eines Funktors  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  verstehen wir eine volle Unterkategorie  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  derart, daß die Objekte von  $\mathcal{D}$  für jeden Morphismus der Basis  $\mathcal{B}$  einen in Bezug auf  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  starken Vorschub besitzen, der selbst wieder zu  $\mathcal{D}$  gehört.

**Definition 2.5.3.** Seien  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor und  $S$  ein faserweises Linksoresystem in  $\mathcal{C}$ . Eine volle Unterkofaserung  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  heiße eine **Linksanpassung für  $S$** , wenn (1) die Menge  $T$  aller  $S$ -Morphismen aus  $\mathcal{D}$  ein faserweises Oresystem in  $\mathcal{D}$  bildet, wenn (2) Vorschubfunktoren  $f_{\dagger}$  für Objekte von  $\mathcal{D}$  so gewählt werden können, daß sie unsere Menge  $T$  stabilisieren, und wenn es (3) für jedes  $C \in \mathcal{C}$  einen  $S$ -Morphismus  $D \rightarrow C$  gibt mit  $D \in \mathcal{D}$ .

2.5.4. Opponiert zu 2.5.2 erklären wir für  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  einen Funktor und  $S$  ein faserweises Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$  eine **Rechtsanpassung** als eine volle Unterfaserung unseres Funktors mit entsprechenden Eigenschaften.

*Beispiel 2.5.5.* Ganz  $\mathcal{C}$  ist eine Linksanpassung für eine Kofaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit faserweisem Linksoresystem  $S$  genau dann, wenn  $S$  ein faserweises Oresystem ist und die Bedingung 2.2.10 erfüllt, die sicherstellt, daß  $S$  sogar zusätzlich ein globales Rechtsoresystem ist.

*Beispiel 2.5.6 (Homotopiekomplexe der Modulbifaserung).* Wir erinnern aus [TG] 6.2.16 die Modulbifaserung  $\text{Mod}_{\text{Ring}} \rightarrow \text{Ring}$ . Die Faser über einem Ring ist seine Modulkategorie, kokartesisch über einem Ringhomomorphismus  $A \rightarrow B$  ist  $M \rightarrow B \otimes_A M$ . Wie bei der Konstruktion der derivierten Garbenopfaserung bilden wir die zugehörige Kofaserung der Homotopiekomplexe, erst einmal aus Bequemlichkeit ihr halbseitig beschränkte Version

$$\text{Hot}^-(\text{Mod}_{\text{Ring}}) \rightarrow \text{Ring}$$

Das faserweise Oresystem der Quasiisomorphismen ist kein globales Rechtsoresystem, wie der Leser sich selbst überlegen mag, und erfüllt zumindest nicht unsere hinreichende Bedingung 2.2.10, da der Vorschub  $M \mapsto B \otimes_A M$  im allgemeinen Quasiisomorphismen nicht erhält. Eine Linksanpassung wäre etwa die volle Unterkategorie aller entsprechend beschränkten Komplexe aus freien Moduln. Allgemeiner bilden die quisflachen Komplexe aus [TD] 3.8.11 eine Linksanpassung für  $\text{Hot}(\text{Mod}_{\text{Ring}}) \rightarrow \text{Ring}$ , da es nach [TD] 3.8.8 zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus aus einem quisflachen Komplex, ja sogar aus einem quisentfalteten Komplex gibt, da quisflache Komplexe unter Skalarerweiterung quisflach bleiben und da Quasiisomorphismen quisflacher Komplexe unter Skalarerweiterung Quasiisomorphismen bleiben nach [TD] 3.8.17.

*Beispiel 2.5.7.* Dies Beispiel bereitet das Derivieren abelscher Schmelzkategorien 2.8.1 vor. Wir betrachten als Basis  $\mathcal{B}$  die Kategorie aller Mengen der Gestalt  $\{1, \dots, n\}$  mit  $n \geq 0$  und monoton wachsenden Abbildungen als Morphismen. Wir halten einen topologischen Raum  $X$  fest und nehmen als Objekte von  $\mathcal{C}$  über  $\{1, \dots, n\}$  Tupel  $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  von Komplexen abelscher Garben auf  $X$  und als Morphismen über einer monoton wachsenden Abbildung entsprechende Tupel von Verschmelzungen von Komplexen abelscher Garben, wie sie in ?? genauer diskutiert werden. Für den Vorschub unter der konstanten Abbildung  $c : \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$  etwa haben wir dann natürliche Isomorphismen

$$c_{\dagger}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$$

Zu dieser Kofaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  betrachten wir das faserweise Linksoresystem  $S$  aller Tupel von Quasiisomorphismen in den Fasern. Es ist sogar ein faserweises Oresystem, ist jedoch nicht stabil unter Vorschub und wir können deshalb 2.2.10 und 2.2.9 nicht anwenden, um die Lokalisierung zu beschreiben. Wir finden jedoch eine Linksanpassung in Gestalt aller Tupel von Komplexen flacher Garben. Die Bedingung (2) an eine Linksanpassung läuft dabei auf die Erkenntnis [TD] 3.8.13 hinaus, daß das Tensorieren mit einem Komplex flacher Garben Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen macht.

**2.5.8 (Eigenschaften von Linksanpassungen).** Gegeben  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor und  $S$  ein faserweises Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  eine Linksanpassung für  $S$  ist die Menge  $T$  der  $S$ -Morphismen in  $\mathcal{D}$  nach 2.2.10 ein globales Rechtsoresystem in  $\mathcal{D}$ , denn  $T$  ist nach Annahme ein faserweises Rechtsoresystem in  $\mathcal{D}$ . Weiter bemerken wir, daß nach 2.2.11 der induzierte Funktor  $T^{-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Kofaserfunktorkomplex ist und daß kokartesische Morphismen aus  $\mathcal{D}$  kokartesisch bleiben in der Lokalisierung  $T^{-1}\mathcal{D}$ . Schließlich induziert nach 2.2.5 die Einbettung für alle  $X \in \mathcal{B}$  einen Isomorphismus  $T_X^{-1}\mathcal{D}_X \xrightarrow{\sim} (T^{-1}\mathcal{D})_X$  und nach [TD] 1.4.21 sind die auf den Lokalisierungen der Fasern induzierten Funktoren Äquivalenzen

$$T_X^{-1}\mathcal{D}_X \xrightarrow{\sim} S_X^{-1}\mathcal{C}_X$$

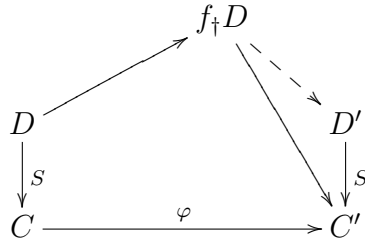
**Satz 2.5.9 (Lokalisierung durch Linksanpassung).** Gegeben  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor und  $S$  ein faserweises Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  eine Linksanpassung für  $S$  und  $T$  die Menge aller  $S$ -Morphismen aus  $\mathcal{D}$  ist der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz

$$T^{-1}\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} S^{-1}\mathcal{C}$$

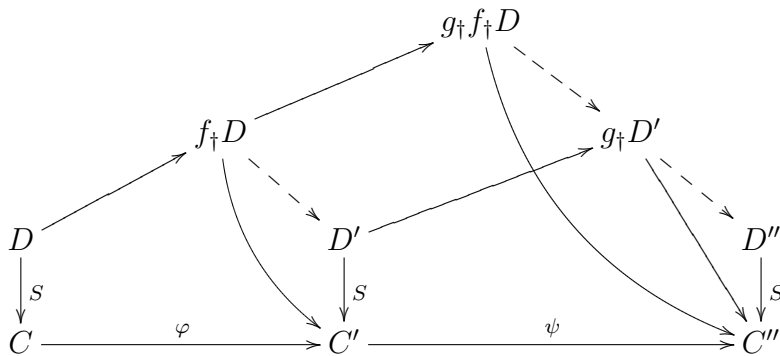
*Ergänzung 2.5.10.* Ich wüßte gerne, ob dieser Satz aus allgemeinen Aussagen über Modellkategorien gefolgert werden kann.

*Beweis.* Wir konstruieren einen quasiinversen Funktor. In einem ersten Schritt wählen wir für jedes  $X \in \mathcal{B}$  und jedes  $C \in \mathcal{C}_X$  ein Objekt  $D = D(C) \in \mathcal{D}_X$

zusammen mit einem  $S$ -Morphismus  $D \rightarrow C$ . Gegeben  $f : X \rightarrow X'$  und darüber ein Morphismus  $\varphi : C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$  erklären wir weiter einen Morphismus  $\tilde{\varphi} : D \rightarrow D'$  über  $f$  in  $T^{-1}\mathcal{D}$  durch das Diagramm

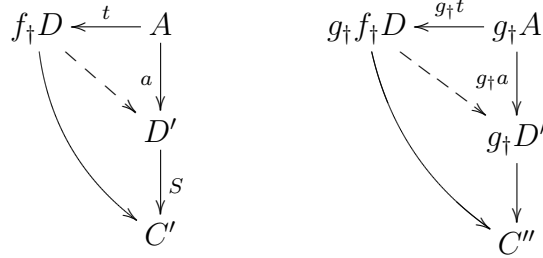


Die durchgezogenen Pfeile bedeuten Morphismen in  $\mathcal{C}$ , der gestrichelte Pfeil dahingegen einen Morphismus in  $T_{X'}^{-1}\mathcal{D}_{X'}$ , der durch das Kommutieren des rechten Dreiecks in  $S_{X'}^{-1}\mathcal{C}_{X'}$  festgelegt wird. Jetzt prüfen wir, daß die Vorschrift  $C \mapsto D(C), \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  ein Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow T^{-1}\mathcal{D}$  ist. Dazu betrachten wir einen weiteren Morphismus  $g : X' \rightarrow X''$  und darüber  $\psi : C' \rightarrow C''$  und bilden das Diagramm



Dessen obere Raute entstehe durch Anwenden des Funktors  $g_+ : T_{X'}^{-1}\mathcal{D}_{X'} \rightarrow T_{X''}^{-1}\mathcal{D}_{X''}$  auf  $f_+ D \dashrightarrow D'$  und verwendet unsere Erkenntnis vom Beginn des Beweises, daß  $T^{-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Kofaserung ist mit den Lokalisierungen der ursprünglichen Fasern als neuen Fasern, wobei der Funktor in die Lokalisierung kokartesische Morphismen zu kokartesischen Morphismen macht. Man muß nun zeigen, daß der lange gekrümmte Pfeil, wenn er durch die universelle Eigenschaft von Vorschüben erklärt wird, auch das Dreieck rechts von ihm mit  $g_+ D'$  als dritter Ecke in  $S_{X''}^{-1}\mathcal{C}_{X''}$  zum Kommutieren bringt. Dazu erinnern wir, daß wir nach [TD] 1.4.10 unseren Morphismus  $f_+ D \dashrightarrow D'$  aus  $S_{X'}^{-1}\mathcal{C}_{X'}$  durch einen Linksbruch

$[t, A, a]$  repräsentieren können, und zwar so, daß im linken Teil des Diagramms



erstens das Teildiagramm mit den durchgezogenen Linien sogar in  $\mathcal{C}_{X'}$  kommutiert und daß zweitens sogar gilt  $A \in \mathcal{D}_{X'}$ , und a fortiori  $t \in T$ . Daraus folgt aber, daß auch das rechte Diagramm in seinen durchgezogenen Pfeilen in  $\mathcal{C}_{X''}$  kommutiert, wenn wir die Morphismen nach  $C''$  mittels der universellen Eigenschaft des starken Vorschubs  $g_+$  erklären. Das wiederum zeigt, daß das Dreieck im rechten Diagramm mit dem langen gekrümmten Pfeil in  $S_{X''}^{-1}\mathcal{C}_{X''}$  kommutiert. Das zeigt wiederum, daß unsere Vorschrift in der Tat ein Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow T^{-1}\mathcal{D}$  ist. Offensichtlich induziert er einen Funktor  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow T^{-1}\mathcal{D}$  und man sieht ohne weitere Schwierigkeiten, daß dieser Funktor der gesuchte Quasiinverse ist. Besonders bequem geht das unter Verwendung unserer Erkenntnis [TD] 1.2.20, daß jeder Lokalisierungsfunktor volllicht ist.  $\square$

**Korollar 2.5.11 (Lokalisierung bei Existenz einer Linksanpassung).** *Seien  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor und  $S$  ein faserweises Linksoresystem in  $\mathcal{C}$ . Gibt es eine Linksanpassung für  $S$ , so gilt:*

1. *Der von  $p$  induzierte Funktor  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ist eine Kofaserung;*
2. *Die Einbettungen liefern Isomorphismen  $S_{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{C}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$  für jeden Funktor  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$  in die Basis;*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  eine Linksanpassung und  $T$  die Menge der  $S$ -Morphismen in  $\mathcal{D}$ . Wir wissen aus 2.5.9, daß der von der Einbettung induzierte Funktor eine Äquivalenz

$$T^{-1}\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} S^{-1}\mathcal{C}$$

ist, und wir wissen aus 2.5.8, daß  $T^{-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Kofaserung ist. Folglich muß auch  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Kofaserung sein. Um die zweite Aussage zu zeigen, betrachten wir das kommutative Funktordiagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{D}_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\sim} & (T^{-1}\mathcal{D})_{\mathcal{U}} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ S_{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{C}_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & (S^{-1}\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \end{array}$$

Der obere Isomorphismus kommt von 2.2.8 her, die rechte Äquivalenz von der Äquivalenz  $T^{-1}\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} S^{-1}\mathcal{C}$  und die linke Äquivalenz von derselben Äquivalenz im Fall der Linksanpassung  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ .  $\square$

**Korollar 2.5.12 (Lokalisierung einer Kofaserung durch Linksanpassung).** *Seien  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Kofaserung und  $S$  ein faserweises Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  eine Linksanpassung für  $S$ . So gilt:*

1. *Für jeden Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis ist jedes Objekt von  $\mathcal{D}_X$  als Objekt von  $\mathcal{C}_X$  linksentfaltet in Bezug auf  $S_X$  für den Vorschubfunktorkomplex  $f_{\dagger} : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_Y$  gefolgt von der Lokalisierung  $Qf_{\dagger} : \mathcal{C}_X \rightarrow S_Y^{-1}\mathcal{C}_Y$ ;*
2. *Genau dann ist  $E \in \mathcal{C}_X$  ein  $Qf_{\dagger}$ - $S_X$ -linksentfaltetes Objekt, wenn der Transportmorphismus  $E \rightarrow f_{\dagger}E$  in der Lokalisierung  $S^{-1}\mathcal{C}$  kokartesisch bleibt.*

**2.5.13 (Vorschübe als derivierte Funktoren).** Betrachten wir in der Situation des Korollars einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis und eine  $Qf_{\dagger}$ -Entfaltung  $E \rightarrow C$  von  $C \in \mathcal{C}_X$ , kürzen den Linksderivierten mit  ${}^L f_{\dagger} := L(Qf_{\dagger})$  ab, bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & f_{\dagger}E & \xleftarrow{\sim} & {}^L f_{\dagger}E \\ \downarrow S & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ C & \longrightarrow & f_{\dagger}C & \longleftarrow & {}^L f_{\dagger}C \end{array}$$

und lassen darin  $f_{\dagger}C$  weg, so ist die Komposition in  $S^{-1}\mathcal{C}$  der restlichen Morphismen nach unserem Satz ein kokartesischer Morphismus

$$C \rightarrow {}^L f_{\dagger}C$$

in Bezug auf die Kofaserung  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ . In der Tat ist sie eine Komposition von Isomorphismen über Identitäten mit dem nach Teil 2 unseres Korollars kokartesischen Morphismus dazwischen.

*Beispiel 2.5.14.* In der Situation von Beispiel 2.5.7 liefert uns dieses Korollar eine Kofaserung über derselben Basis mit Tupeln  $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  von Objekten der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf unserem festen Raum als Fasern und natürlichen Isomorphismen  $c_{\dagger}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$  im Fall von Komplexen flacher Garben.

*Beweis.* Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition einer Linksanpassung. Um die zweite Aussage zu zeigen, wählen wir einen  $S$ -Morphismus  $D \rightarrow E$  mit



$D \in \mathcal{D}_X$  und betrachten mit einer  $T$  und insbesondere  $\mathcal{D}$  stabilisierenden Wahl von  $f_{\dagger}$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & f_{\dagger}D \\ \downarrow s & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & f_{\dagger}E \end{array}$$

Da nach 2.5.8 der Transportmorphismus  $D \rightarrow f_{\dagger}D$  kokartesisch ist für  $T^{-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ , ist die untere Horizontale kokartesisch für  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  genau dann, wenn die rechte Vertikale einen Isomorphismus in  $(S^{-1}\mathcal{C})_Y$  und nach 2.5.11 gleichbedeutend einen Isomorphismus in  $S_Y^{-1}\mathcal{C}_Y$  induziert. Da wir  $D$  bereits als  $S_X$ - $Qf_{\dagger}$ -linksentfaltet erkannt haben für  $Qf_{\dagger} : \mathcal{C}_X \rightarrow S_Y^{-1}\mathcal{C}_Y$ , ist das gleichbedeutend dazu, daß auch  $E$  linksentfaltet ist für  $S_X$  und  $Qf_{\dagger}$ . So folgt die zweite Aussage.  $\square$

**Beispiel 2.5.15 (Derivierte Modulbifaserung als Kofaserung).** Wir erinnern aus 2.5.6 die Kofaserung  $\text{Hot}(\text{Mod}_{\text{Ring}}) \rightarrow \text{Ring}$  mit dem faserweisen Oresystem der Quasiisomorphismen und der Linksanpassung durch quisflache Komplexe. Da eine Linksanpassung existiert, ist nach 2.5.11 auch der induzierte Funktor auf der Lokalisierung nach Quasiisomorphismen eine Kofaserung. Wir notieren sie

$$\text{Der}(\text{Mod}_{\text{Ring}}) \rightarrow \text{Ring}$$

Weiter ist nach 2.5.11 für jeden Ring  $A$  der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus von Kategorien  $\text{Der}(\text{Mod}_A) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Mod}_{\text{Ring}})_A$  und nach 2.5.12 liefert für jeden Ringhomomorphismus  $\varphi : A \rightarrow B$  und quisflachen Komplex  $M$  von  $A$ -Moduln der Morphismus  $M \rightarrow B \otimes_A M$  über  $\varphi$  einen kokartesischen Morphismus in der derivierten Modulbifaserung. Salopp gesprochen sind also die Vorschübe die Linksderivierten der Erweiterungen der Skalare.

**Beispiel 2.5.16 (Derivierte Modulbifaserung als Faserung).** Wir erinnern aus 2.5.6 die Bifaserung  $\text{Hot}(\text{Mod}_{\text{Ring}}) \rightarrow \text{Ring}$  mit dem faserweisen Oresystem der Quasiisomorphismen. Es ist zwar kein globales Rechtsoresystem, aber durchaus ein globales Linksoresystem, denn seine Rückzugsfunktoren sind durchaus exakt. Damit ist bereits aus 2.2.9 opponiert klar, daß die Lokalisierung eine Faserung  $\text{Der}(\text{Mod}_{\text{Ring}}) \rightarrow \text{Ring}$  ist.

**Beispiel 2.5.17 (Derivierte Modulgarbenopfaserung).** Wir erinnern aus 1.3.9 die Modulgarbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Ger}} \rightarrow \text{Ger}$  über der Kategorie der geringsten Räume. Spezialisieren wir zu einpunktigen Räumen, so erhalten wir den von der Modulbifaserung auf den opponierten Kategorien induzierten Funktor. Durch Übergang zu Homotopiekategorien erhalten wir die Faserung  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Ger}}) \rightarrow$

Ger und darin bilden die Quasiisomorphismen ein faserweises Oresystem. Eine Rechtsanpassung bilden die sogenannten quisflachen Komplexe von Modulgarben, wie im folgenden diskutiert werden soll. Mit 2.5.11 folgt, daß wir durch Lokalisieren eine Faserung

$$\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{//\mathrm{Ger}}) \rightarrow \mathrm{Ger}$$

erhalten, daß die offensichtlichen Funtoren von der Lokalisierung der Faser zur Faser der Lokalisierung Isomorphismen  $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{//(X,\mathcal{A})}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{//\mathrm{Ger}})_{(X,\mathcal{A})}$  sind und daß salopp gesprochen die Rückzüge unserer Faserung mit den Opponierten der Derivierten der Rückzüge von Modulgarben übereinstimmen. Da jeder Komplex von Modulgarben nach 2.3.6 eine Quisrechtsentfaltung hat, existieren auch die Vorschübe in unserer Faserung und stimmen salopp gesprochen überein mit den Opponierten der Derivierten der Vorschübe von Modulgarben.

**Definition 2.5.18.** Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein geringter Raum. Ein  $\mathcal{A}$ -Modul  $\mathcal{F}$  heißt **flach**, wenn der Funktor  $\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}$  von der Kategorie der  $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln in die Kategorie der abelschen Garben exakt ist. Gleichbedeutend ist, daß alle Halme  $\mathcal{F}_x$  flach sind als  $\mathcal{A}_x$ -Moduln.

**Definition 2.5.19.** Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein geringter Raum. Ein Komplex von  $\mathcal{A}$ -Moduln  $\mathcal{F}$  heißt **quisflach**, wenn der Funktor  $\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}$  jeden Quasiisomorphismus von Komplexen von  $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln zu einem Quasiisomorphismus macht. Gleichbedeutend ist, daß alle Halmkomplexe  $\mathcal{F}_x$  quisflach sind als Komplexe von  $\mathcal{A}_x$ -Moduln.

**Proposition 2.5.20 (Quisflache Linksauflösung bei Modulgarben).** *Geben ein geringter Raum  $(X, \mathcal{A})$  hat jeder Komplex von  $\mathcal{A}$ -Moduln eine quisflache Linksauflösung durch einen Komplex flacher  $\mathcal{A}$ -Moduln.*

*Beweis.* Jeder  $\mathcal{A}$ -Modul  $\mathcal{F}$  ist Quotient einer direkten Summe von Garben der Gestalt  $\mathcal{A}_{U \subset X}$  für  $U \subseteq X$  in der Notation aus [TG] 4.9.10 und diese  $\mathcal{A}$ -Moduln sind flach. Jeder Komplex  $(\mathcal{F}^p)$  von  $\mathcal{A}$ -Moduln besitzt damit nach [TG] 9.3.5 eine Cartan-Eilenberg-Untenauflösung  $(\mathcal{P}^{p,q})_{q \leq 0}$  durch flache  $\mathcal{A}$ -Moduln. Wie beim Beweis von [TD] 3.8.8 zeigt man, daß der Epimorphismus auf den horizontalen Kokernkomplex auch in diesem Fall ein Quasiisomorphismus  $\mathrm{tot}^{\oplus}(\mathcal{P}^{p,q}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}^p)$  ist. Dafür brauchen die  $\mathcal{A}$ -Moduln  $\mathcal{P}^{p,q}$  noch nicht einmal spezielle Eigenschaften zu haben, wichtig ist allein die Vertauschbarkeit von Koprodukten mit dem Bilden der Halme. Nun zeigen wir, daß im Fall eines Doppelkomplexes  $(P^{p,q})_{q \leq 0}$  von flachen  $\mathcal{A}$ -Moduln mit maximal spaltenden Zeilen und einem exakten Komplex  $\mathcal{E}$  von  $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln auch der Garbenkomplex

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{tot}^{\oplus}(\mathcal{P}^{p,q})$$

exakt ist. In der Tat ist er das Summentotal des Tripelkomplexes  $\mathcal{E}^r \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}^{p,q}$  und dieser Tripelkomplex hat exakte  $r$ -Komplexe, da  $\mathcal{E}$  exakt ist und die  $\mathcal{P}^{p,q}$  flach. Zusätzlich sind die  $r$ -Kernkomplexe der  $p$ -Differentialie exakt, da  $\mathcal{P}^{p,q}$  maximal spaltende Zeilen hat. Nach [TD] 3.7.3 ist also  $\text{tot}_{p,r}^{\oplus}(\mathcal{E}^r \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}^{p,q})$  exakt. Dann ist aber wieder nach [TD] 3.7.3 auch  $\text{tot}^{\oplus}(\text{tot}_{p,r}^{\oplus}(\mathcal{E}^r \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}^{p,q}))$  halmweise exakt als Produktsumentotal eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen, mit dem das Summentotal wegen unserer Einschränkung  $q \leq 0$  übereinstimmt.  $\square$

2.5.21. Jeder in Richtung der Differentialie beschränkte Komplex von flachen Modulgarben über einem geringten Raum ist quisflach. Hat unsere Ringgarbe endliche Torsionsdimension, so ist jeder Komplex von flachen Modulgarben bereits quisflach. Der Beweis dieser Tatsachen sei dem Leser zur Übung überlassen.

2.5.22 (**Derivierter Vorschub und Vergessen der Skalare**). Jeder Morphismus  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von geringten Räumen paßt in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{A}) & \rightarrow & (Y, \mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, \mathbb{Z}_X) & \rightarrow & (Y, \mathbb{Z}_Y) \end{array}$$

Die durch die Identifikationen unserer derivierten Modulgarbenopfaserung gegebenen Isomorphismen zwischen den Vorschüben von oben links nach unten rechts auf beiden möglichen Wegen präzisieren die Erkenntnis, daß salopp gesprochen der derivierte Vorschub von Modulgarben „derselbe“ ist wie der derivierte Vorschub der zugrundeliegenden abelschen Garben.

2.5.23. Das folgende hat nur deshalb an dieser Stelle seinen Platz gefunden, weil wir gerade die benötigten quisflachen Auflösungen bereitgestellt haben.

**Proposition 2.5.24 (Deriviertes Tensorieren von Modulgarben).** *Gegeben ein geringter Raum  $(X, \mathcal{A})$  ist der Linksfaktorierte*

$$\otimes_{\mathcal{A}}^L : \text{Der}(\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A}^{\text{opp}})}) \times \text{Der}(\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$$

*im Sinne von [TD] 3.8.18 auf jedem Paar von Garbenkomplexen definiert und alle Paare mit mindestens einem quisflachen Eintrag sind  $\otimes_{\mathcal{A}}$ -quislinksentfaltet.*

*Beweis.* Wie der Beweis von 2.8.4 oder von [TD] 3.8.17, wo es im Fall eines einpunktigen Raums in größerer Ausführlichkeit diskutiert wird.  $\square$

2.5.25. Die zweite Aussage der Proposition zeigt auch, daß für jeden Komplex  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln der Funktor  $Q \circ (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}) : \text{Hot}(\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  einen globalen Linksfaktorierten besitzt und daß der offensichtliche Morphismus stets ein Isomorphismus

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}^L \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (L(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}))(\mathcal{G})$$

ist. Aus der Existenz von Quisrechtsentfaltungen für Modulgarben folgern wir dann, daß  $(L(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}))$  den Rechtsadjungierten  $\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \ )$  hat, den Rechtsderivierten des Bildens der Homomorphismengarbe in  $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}/X)$  mit ihrer von der  $\mathcal{A}$ -Rechtsoperation auf  $\mathcal{F}$  herrührenden Struktur als  $\mathcal{A}$ -Modulgarbe. Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor.

**2.5.26 (Eine flache Modulgarbe mit nicht flachem Schnittmodul).** Gegeben eine flache Modulgarbe auf einem Kompaktum muß der Modul ihrer globalen Schnitte keineswegs flach sein. So gibt es etwa auf  $S^1$  bis auf Isomorphismus genau eine lokal, aber nicht global triviale Garbe von  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -Moduln und deren globale Schnitte sind als Modul isomorph zum Ideal  $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

## 2.6 Lokalisierung von Schmelzkategorien

**2.6.1 (Schmelzlokalisierung).** Seien  $\mathcal{M}$  eine Schmelzkategorie und  $S$  eine Menge von Einsverschmelzungen in  $\mathcal{M}$ . In 2.6.3 konstruieren wir ein Paar  $(\mathcal{M}_{\parallel S}, \mathrm{can})$  bestehend aus einer Schmelzkategorie  $\mathcal{M}_{\parallel S}$  mitsamt einem Schmelzfunktor  $\mathrm{can} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\parallel S}$  derart, daß gilt:

1. Alle Einsverschmelzungen aus  $S$  werden unter  $\mathrm{can}$  invertierbar in  $\mathcal{M}_{\parallel S}$ ;
2. Ist  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Schmelzfunktor, unter dem alle Einsverschmelzungen aus  $S$  invertierbar werden, so gibt es genau einen Schmelzfunktor  $\tilde{F} : \mathcal{M}_{\parallel S} \rightarrow \mathcal{N}$  mit  $F = \tilde{F} \circ \mathrm{can}$ .

Wir nennen  $(\mathcal{M}_{\parallel S}, \mathrm{can})$  die **Schmelzlokalisierung von  $\mathcal{M}$  an  $S$** . Natürlich ist ein derartiges Paar in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

**2.6.2.** Gegeben eine Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  mit einer Menge  $S$  von Einsverschmelzungen weiß ich nicht, ob der offensichtliche Funktor  $(E\mathcal{M})_S \rightarrow E(\mathcal{M}_{\parallel S})$  von der Lokalisierung der zugehörigen einfachen Kategorie in die einfache Kategorie der Schmelzlokalisierung im allgemeinen ein Isomorphismus von Kategorien sein muß. Das ist meine Motivation für die Notation der Schmelzlokalisierung mit einem vorgestellten  $\parallel$ .

**2.6.3 (Lokalisierung von Schmelzkategorien, Existenz).** Um die Lokalisierung einer Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  an einer Menge  $S$  von Einsverschmelzungen zu konstruieren, betrachten wir in der zugehörigen Familienkategorie  $\mathcal{M}^\gamma$  die Menge  $S^\parallel$  aller Morphismen, die Tupel von Einsverschmelzungen aus  $S$  sind und die insbesondere unter dem Indexfunktoren auf eine Bijektion geworfen werden, und bilden im Sinne von [TD] 1.2 die Lokalisierung  $\mathcal{M}_{S^\parallel}^\gamma$  der Familienkategorie mit dem vom Indexfunktoren induzierten Funktoren nach  $\mathrm{Ens}^\gamma$ . Es ist klar, daß das Vertupeln für je

zwei Objektkleinfamilien  $A, B$  und jede Abbildung  $\varphi : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$  ihrer Indexmengen eine Bijektion

$$\prod_{j \in \bar{B}} \mathcal{M}_{S^j}^\vee(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_{S^j}^\vee)_\varphi(A, B)$$

induziert. Wir können also die Morphismen zu Einobjektfamilien als die Verschmelzungen unserer lokalisierten Schmelzkategorie nehmen und mittels obiger Bijektionen unsere Multiverknüpfungen erklären und erhalten so wieder eine Schmelzkategorie. Der Schmelzfunktor  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{in}S}$  mit der geforderten universellen Eigenschaft ist der offensichtliche.

**2.6.4 (Leerverschmelzungsfunktor der Lokalisierung).** Sei  $\mathcal{M}$  eine Schmelzkategorie und sei  $S$  eine Menge von Einsverschmelzungen. Macht der Leerverschmelzungsfunktor  $L$  alle Morphismen  $s \in S$  zu Bijektionen, so induziert er einen Schmelzfunktor  $\mathcal{M}_{\text{in}S} \rightarrow \mathbf{kEns}$  und wir erhalten einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen diesem Schmelzfunktor und dem Leerverschmelzungsfunktor der Lokalisierung  $\mathcal{M}_{\text{in}S}$ .

**2.6.5.** In derselben Weise und formal durch Übergang zur opponierten Kategorie erklären wir auch die Lokalisierung einer Trennkategorie an einer Menge  $S$  von Einstrennungen.

**2.6.6 (Additive Strukturen auf Schmelzlokalisierungen).** In [TD] 1.4.23 hatten wir diskutiert, wie sich eine additive Struktur auf einer Kategorie auf die Lokalisierung nach einem halbseitigen Oresystem vererbt. Im Fall von Schmelz- oder Trennkategorien kenne ich keine vergleichbare Aussage.

**2.6.7 (Eindeutigkeit additiver Strukturen).** Sei eine Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen gegeben. Besitzt die zugrundeliegende einfache Kategorie endliche Koprodukte, so besitzt in Verallgemeinerung von [TG] 2.5.11 unsere Schmelzkategorie höchstens eine additive Struktur, denn die Summe von Verschmelzungen in  $\mathcal{M}(A, Y)$  muß der Summe einfacher Morphismen in  $\mathcal{M}(\otimes A, Y)$  vom Ziel einer universellen Verschmelzung entsprechen. Analoges gilt für Trennkategorien.

## 2.7 Homotopie für bequeme Schmelzkategorien

**Definition 2.7.1.** Eine **bequeme Schmelzkategorie** ist eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom, deren zugrundeliegende einfache Kategorie abzählbare Produkte und abzählbare Koprodukte hat und die mit einer additiven Struktur versehen werden kann.

**2.7.2.** Die additive Struktur einer bequemen Schmelzkategorie ist nach 2.6.7 eindeutig bestimmt. Wir werden im folgenden sehen, daß sich viele Konstruktionen

im Zusammenhang mit Komplexen für bequeme Schmelzkategorien besonders bequem durchführen lassen. Diese Situation deckt die meisten Anwendungen ab, die in diesem Text angestrebt werden. Was auch in größerer Allgemeinheit noch zu machen wäre, wird in 9.2.1 angedeutet.

**2.7.3 (Supergraduieren bequemer Schmelzkategorien).** Gegeben eine bequeme Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  hat auch ihre Supergraduierung  $\text{sg}\mathcal{M}$  stabil universelle Verschmelzungen und Multihom, ja ist selbst wieder eine bequeme Schmelzkategorie. Zum Beispiel ist für  $X, Y \in \text{sg}\mathcal{M}$  die offensichtliche vom Grad Null homogene Verschmelzung  $X \curlywedge Y \rightarrow T$  mit

$$T^n := \bigoplus_{i+j=n} X^i \otimes_{\mathcal{M}} Y^j$$

eine stabil universelle 2-Verschmelzung in  $\text{sg}\mathcal{M}$ . Weiter ist  $\curlywedge \rightarrow T$  mit  $T^0 = \mathbb{I}_{\mathcal{M}}$  und  $T^n = 0$  das leere Koproduct für  $n \neq 0$  eine stabil universelle Leerverschmelzung in  $\text{sg}\mathcal{M}$ . Ähnlich erhalten wir in  $\text{sg}\mathcal{M}$  internes Hom das das Objekt mit homogenen Komponenten

$$(X \rightrightarrows Y)^n := \prod_i (X^i \rightrightarrows_{\mathcal{M}} Y^{i+n})$$

und mit den offensichtlichen Zusatzdaten.

**2.7.4 (Komplexe in bequemen Schmelzkategorien).** Gegeben eine bequeme Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  erklären wir genau wie im Fall abelscher Gruppen [TSK] 2.3.1 das Hopfbiabmonoid der Differentiale  $D = D_{\mathcal{M}} \in \text{sg}\mathcal{M}$  und erklären die Schmelzkategorie der Komplexe in  $\mathcal{M}$  als die äquivariante Schmelzkategorie

$$\text{dg}\mathcal{M} = \text{Ket}_{\mathcal{M}} := \text{sg}\mathcal{M}_{D\setminus}$$

der Objekte von  $\text{sg}\mathcal{M}$  mit einer Operation von  $D$ . Wir können die Objekte von  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  identifizieren mit Komplexen im üblichen Sinne alias einer Familie  $(X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  von Objekten  $X^i \in \mathcal{M}$  mit Morphismen  $d : X^i \rightarrow X^{i+1}$  derart, daß gilt  $d^2 = 0 : X^i \rightarrow X^{i+2}$  für alle  $i$ . Auch die Schmelzkategorie  $\text{dg}\mathcal{M}$  der Komplexe hat stabil universelle Verschmelzungen und Multihom nach [TSK] 3.3.19 und [TSK] 3.3.20, ja ist selbst wieder eine bequeme Schmelzkategorie. Genauer erhalten wir stabil universelle Verschmelzungen und Multihom in  $\text{dg}\mathcal{M}$ , indem wir die entsprechenden Konstruktionen in der Supergraduierung  $\text{sg}\mathcal{M}$  mit der offensichtlichen Operation des Hopfbiabmonoids  $D$  der Differentiale versehen. Für die Menge der Leerverschmelzungen in einen Komplex  $X = (X^i, d)$  finden wir

$$\text{dg}\mathcal{M}(\curlywedge, X) = \ker(\mathcal{M}(\curlywedge, X^0) \rightarrow \mathcal{M}(\curlywedge, X^1))$$

Eine universelle Leerverschmelzung in  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  erhalten wir, indem wir von einer universellen Leerverschmelzung in  $\mathcal{M}$  ausgehen und sie in den homologischen Grad Null platzieren und durch Nullobjekte in den anderen homologischen Graden zu einem Komplex ergänzen.

**2.7.5 (Homotopiekomplexe in bequemen Schmelzkategorien).** Gegeben eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur  $\mathcal{M}$  faktorisiert ihr Leerverschmelzungsfunktor stets eindeutig als  $L = v \circ A$  mit einem wohldefinierten Schmelzfunktor  $A : \mathcal{M} \rightarrow \text{Ab}$ . Dieser Schmelzfunktor induziert auf den Supergraduierungen einen Schmelzfunktor  $\text{sg}A : \text{sg}\mathcal{M} \rightarrow \text{sgAb}$ . Ist  $\mathcal{M}$  eine bequeme Schmelzkategorie, so induziert weiter die universelle Leerverschmelzung  $\Upsilon \rightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{M}}$  eine Leerverschmelzung  $\Upsilon \rightarrow A\mathbb{I}_{\mathcal{M}}$  alias einen Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow A\mathbb{I}_{\mathcal{M}}$ . Man überzeugt sich, daß man so einen Monoidhomomorphismus  $D \rightarrow \text{sg}AD_{\mathcal{M}}$  in  $\text{sgAb}$  erhält und daß mit den Komultiplikationen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{sg}AD_{\mathcal{M}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D \otimes D & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{sg}AD_{\mathcal{M}} \otimes \text{sg}AD_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\quad\quad\quad} \text{sg}A(D_{\mathcal{M}} \otimes D_{\mathcal{M}}) \end{array}$$

entsteht. Mithin induziert unser Funktor seinerseits einen Schmelzfunktor

$$\text{dg}A : \text{dg}\mathcal{M} \rightarrow \text{dgAb}$$

Die Umstrukturierung der automatischen Selbstanreicherung der Komplexkategorie  $\text{dg}\mathcal{M}$  mit dem Schmelzfunktor  $\mathcal{H}^0 \circ \text{dg}A : \text{dg}\mathcal{M} \rightarrow \text{Ab}$  notieren wir

$$\text{Hot}(\mathcal{M}) = \text{Hot}_{\mathcal{M}}$$

und nennen sie die **Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe in  $\mathcal{M}$** . Die stabil universellen Verschmelzungen in  $\text{dg}\mathcal{M}$  liefern nach [TSK] 2.5.5 stabil universelle Verschmelzungen in seiner Selbstanreicherung und dann nach [TSK] 2.5.6 stabil universelle Verschmelzungen in  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$ . Ebenso wird unser Multihom in  $\text{dg}\mathcal{M}$  mit [TSK] 2.5.9 ein Multihom in seiner Selbstanreicherung und liefert nach [TSK] 2.5.10 ein Multihom in  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$ . Auch die Homotopiekomplexe einer bequemen Schmelzkategorie bilden wieder eine bequeme Schmelzkategorie. Für die Menge der Leerverschmelzungen in einen Komplex  $X = (X^i, d)$  finden wir

$$\text{Hot}_{\mathcal{M}}(\Upsilon, X) = \mathcal{H}^0(\mathcal{M}(\Upsilon, X))$$

**2.7.6 (Vererben von Zusatzstrukturen).** Ist  $k$  ein Kring und ist unsere bequeme Schmelzkategorie mit einer  $k$ -Struktur versehen, so vererbt sich diese zu einer  $k$ -Struktur auf  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  und  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$  in offensichtlicher Weise.

**2.7.7 (Von Komplexen zu Homotopiekomplexen).** Gegeben  $\mathcal{M}$  eine bequeme Schmelzkategorie liefert unsere Beschreibung der Leerverschmelzungen von  $\text{dg}\mathcal{M}$  aus 2.7.4 einen Isomorphismus des Leerverschmelzungsfunktors mit der Verknüpfung  $\mathcal{Z}^0 \circ \text{dg}A : \text{dg}\mathcal{M} \rightarrow \text{Ab}$ . Wir erhalten mithin einen objektfesten Isomorphismus zwischen  $\text{dg}\mathcal{M}$  und der Umstrukturierung seiner Selbstanreicherung mit dem Schmelzfunktor  $\mathcal{Z}^0 \circ \text{dg}A$ . Diese Beschreibung hinwiederum liefert unmittelbar einen objektfesten mit universellen Verschmelzungen und Multihom verträglichen Schmelzfunktor

$$\text{Ket}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Hot}(\mathcal{M})$$

Dieser Schmelzfunktor ist surjektiv auf allen Verschmelzungsmengen.

**2.7.8 (Interne Triangulierung von Homotopiekategorien).** Gegeben eine bequeme Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  ist die übliche triangulierte Struktur auf ihrer Homotopiekategorie  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$  intern im Sinne von [TD] 2.3.4. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

## 2.8 Derivieren abelscher Schmelzkategorien

**Definition 2.8.1.** Eine **abelsche Schmelzkategorie** ist eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur, deren zugrundeliegende einfache Kategorie abelsch ist und für die gilt:

1. Jeder Kern ist ein **Schmelzkern**, genauer: Gegeben ein einfacher Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  und eine Objektkleinfamilie  $B$  induziert das Nachschalten von  $(\ker f) \rightarrow X$  eine Bijektion

$$\mathcal{M}(B, (\ker f)) \xrightarrow{\sim} \{g \in \mathcal{M}(B, X) \mid f \circ g = 0\}$$

Diese Eigenschaft impliziert, daß der Leerverschmelzungsfunktor linksexakt ist. Sie ist automatisch erfüllt, wenn es zu jeder Objektkleinfamilie eine universelle Verschmelzung gibt.

2. Jeder Kokern ist ein **stabiler Kokern**, genauer: Gegeben ein einfacher Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  und eine Objektkleinfamilie  $B$  und ein Objekt  $Z$  induziert das Vorschalten von  $Y \rightarrow (\text{cok } f)$  eine Bijektion

$$\mathcal{M}(B \curlywedge (\text{cok } f), Z) \xrightarrow{\sim} \{h \in \mathcal{M}(B \curlywedge Y, Z) \mid h \circ (\text{id}_B \curlywedge f) = 0\}$$

Das ist automatisch erfüllt, wenn es alle Multihom gibt.

Insbesondere ist jede bequeme Schmelzkategorie, deren zugrundeliegende einfache Kategorie abelsch ist, automatisch eine abelsche Schmelzkategorie.



2.8.2 (**Homologie für bequeme abelsche Schmelzkategorien**). In 2.7.4 und 2.7.5 hatten wir zu jeder bequemen Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  die Schmelzkategorien mit additiver Struktur  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  und  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$  der Komplexe und der Homotopiekomplexe von Objekten aus  $\mathcal{M}$  konstruiert. In 2.7.8 hatten wir gesehen, daß unter diesen Voraussetzungen die übliche triangulierte Struktur auf  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$  intern ist. Ist  $\mathcal{M}$  sogar eine abelsche bequeme Schmelzkategorie, so liefern die Nullzykel und die nullte Homologie in offensichtlicher Weise Ab-Schmelzfunktor

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^0 &: \text{Ket}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M} \\ \mathcal{H}^0 &: \text{Ket}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M} \\ \mathcal{H}^0 &: \text{Hot}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M} \end{aligned}$$

Stärker ist auch  $\mathcal{Z} : \text{Ket}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{sg}\mathcal{M}$  ein Ab-Schmelzfunktor und induziert einen Ab-Schmelzfunktor  $\mathcal{H} : \text{Ket}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{sg}\mathcal{M}$  und schließlich einen Ab-Schmelzfunktor

$$\mathcal{H} : \text{Hot}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{sg}\mathcal{M}$$

Wir nennen ihn den **Schmelzfunktor der totalen Homologie**.

**Definition 2.8.3.** Ein Komplex  $F$  in einer bequemen abelschen Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  heiße **quisflach**, wenn für jeden Quasiisomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} Y$  in  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  auch  $F \otimes X \rightarrow F \otimes Y$  ein Quasiisomorphismus ist. Eine **quisflache Linksauffosung** eines Komplexes  $Z$  ist ein Quasiisomorphismus  $F \xrightarrow{\sim} Z$  mit  $F$  quisflach.

**Lemma 2.8.4.** Sei  $\mathcal{M}$  eine bequeme abelsche Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$ , bei der jeder Komplex in  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  eine quisflache Linksauffosung besitzt. So ist jedes Tupel von Komplexen, in dem alle Einträge mit höchstens einer Ausnahme quisflach sind, quislinksentfaltet für den Funktor des Zusammentensorierens.

*Beweis.* Wir beschränken uns auf den Fall von zwei Komplexen. Sei also  $(X, P)$  ein Paar von Komplexen mit  $P$  quisflach. Gegeben  $(X', Y) \xrightarrow{\sim} (X, P)$  ein Paar von Quasiisomorphismen beliebiger Komplexe dorthin finden wir nach Annahme ein Paar  $(Q', P')$  von quisflachen Komplexen und ein Paar von Quasiisomorphismen  $(Q', P') \xrightarrow{\sim} (X', Y)$ . Es gilt zu zeigen, daß die Komposition  $(Q', P') \rightarrow (X, P)$  einen Quasiisomorphismus  $Q' \otimes P' \xrightarrow{\sim} X \otimes P$  induziert. Diese Komposition faktorisiert aber als  $Q' \otimes P' \rightarrow Q' \otimes P \rightarrow X \otimes P$  und hier sind beide Morphismen Quasiisomorphismen, da wir  $Q'$  und  $P$  quisflach angenommen hatten.  $\square$

**Definition 2.8.5.** Eine bequeme abelsche Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  heiße **entfaltbar**, wenn jeder Komplex in  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  eine Quisrechtsentfaltung und eine quisflache Linksauffosung besitzt.

*Beispiele 2.8.6.* Die abelschen Gruppen, die Moduln über einem Kring, ja die abelschen Garben auf einem topologischen Raum und sogar die Modulgarben auf einem gekringten topologischen Raum bilden nach 2.5.20 und 2.3.6 entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorien.

**Satz 2.8.7 (Derivieren entfaltbarer abelscher Schmelzkategorien).** *Sei  $\mathcal{M}$  eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie. So gilt für die Schmelzlokalisierung  $\text{Der}_{\mathcal{M}} := (\text{Hot}_{\mathcal{M}})_{\text{qis}}$  ihrer Homotopiekategorie an Quasiisomorphismen:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\text{E Hot}_{\mathcal{M}})_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} \text{E}((\text{Hot}_{\mathcal{M}})_{\text{qis}}) = \text{E}(\text{Der}_{\mathcal{M}})$$

2. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen und jede universelle Verschmelzung in  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$ , die von einer Kleinfamilie von mit höchstens einer Ausnahme quisflachen Komplexen ausgeht, bleibt darin universell;*
3. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$  besitzt internes Hom und ist  $Y$  ein quisrechtsentfalteter Komplex, so ist der vom Lokalisierungsfunktor  $Q$  nach [TSK] 1.6.20 induzierte Morphismus in  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$  ein Isomorphismus*

$$Q(X \rightrightarrows_{\text{Hot}} Y) \xrightarrow{\sim} (QX \rightrightarrows_{\text{Der}} QY)$$

4. *Die vom Isomorphismus des ersten Teils auf  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$  induzierte Struktur einer triangulierten Kategorie ist intern.*

*Beweis.* Der Indexfunktor

$$p : \text{Hot}_{\mathcal{M}}^Y \rightarrow \text{Ensf}$$

ist ein Kofaserfunktor, da die fraglichen Homotopiekomplexe nach 2.7.8 stabil universelle Verschmelzungen haben. Die Tupel quisflacher Komplexe bilden eine Linksanpassung in Bezug auf das faserweise Oresystem der Tupel von Quasiisomorphismen für unseren Kofaserfunktor. Damit folgen die ersten beiden Behauptungen aus 2.8.4 und den Korollaren 2.5.11 und 2.5.12 zur Lokalisierung durch Linksanpassung. Gegeben ein Komplex  $A \in \text{Hot}_{\mathcal{M}}$  besitzt schließlich der Funktor  $(A \otimes) : \text{Hot}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{M}}$  den Rechtsadjungierten  $A \rightrightarrows$ . Diese Adjunktion induziert dann nach [TD] 3.2.30 für jedes feste  $A$  eine partielle Adjunktion des Linksderivierten von  $A \otimes$  mit dem Rechtsderivierten von  $A \rightrightarrows$ , wo immer diese Derivierten definiert sind. Unsere Derivierten sind jedoch global definiert, da es nach Annahme zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex gibt und auch jeder Komplex eine Quisrechtsentfaltung besitzt. Die daraus folgende Beschreibung von Tensorprodukt und internem Hom in  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$  zeigt schließlich, daß die triangulierte Struktur auf unserer Schmelzkategorie intern ist.  $\square$

**2.8.8 (Erweiterung additiver Strukturen auf Schmelzkategorien).** Sei  $\mathcal{M}$  eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom. Ist die zugrundeliegende einfache Kategorie additiv, so besitzt unsere Schmelzkategorie genau eine additive Struktur. In der Tat hat nach [TG] 2.5.11 schon mal die zugrundeliegende einfache Kategorie nur genau eine additive Struktur und die Bijektionen  $\mathcal{M}(X_1 \gamma \dots \gamma X_r, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X_1 \otimes \dots \otimes X_r, Y)$  induzieren dann die Struktur einer abelschen Gruppe auf jeder Verschmelzungsmenge. Die Adjunktionen  $(X \otimes, X \rightrightarrows)$  zeigen weiter mit [TG] 2.5.12, daß für  $X \in \mathcal{M}$  sowohl  $X \otimes$  als auch  $X \rightrightarrows$  additive Funktoren  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  sind. So folgt dann, daß Multiverknüpfungen von Verschmelzungen multiadditiv sein müssen für die zuvor konstruierten Strukturen als abelsche Gruppe. Insbesondere besitzt jede Schmelzkategorie mit interner triangulierter Struktur genau eine additive Struktur.

**2.8.9 (Leerverschmelzungen in derivierten Schmelzkategorien).** Gegeben eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  wird insbesondere jede universelle Leerverschmelzung  $\gamma \rightarrow \mathbb{I}$  in  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$  unter dem Lokalisierungsfunktor eine universelle Leerverschmelzung  $\gamma \rightarrow Q\mathbb{I}$  in  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$ . Gegeben ein Komplex  $Y \in \text{Ket}_{\mathcal{M}}$  liefert unser Satz nun für jede Quisrechtsentfaltung  $Y \xrightarrow{\sim} J$  Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\text{Der}_{\mathcal{M}}(\gamma, Y) \xleftarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{M}}(\mathbb{I}, Y) \xleftarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{M}}(\mathbb{I}, J) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{M}}(\gamma, J) = \mathcal{H}^0(\mathcal{M}(\gamma, J))$$

mit der letzten Gleichheit aus 2.7.5. Wir erhalten so eine Isotransformation zwischen dem additiv angereicherten Leerverschmelzungsfunktor der derivierten Kategorie  $L_{\text{Der}} : \text{Der}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Ab}$  und der Komposition

$$L_{\text{Der}} = \mathcal{H}^0 \circ R(L_{\mathcal{M}}) : \text{Der}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Der}_{\text{Ab}} \rightarrow \text{Ab}$$

des Rechtsderivierten [TD] 3.4.1 des additiv angereicherten Leerverschmelzungsfunktors von  $\mathcal{M}$  mit der nullten Homologie.

**2.8.10 (Vererben von Zusatzstrukturen).** Ist  $k$  ein Kring und ist unsere entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie mit einer  $k$ -Struktur versehen, so vererbt sich diese zu einer  $k$ -Struktur auf  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$  in offensichtlicher Weise. Zum Beispiel erklären wir  $\lambda \text{id}_X$  für  $X \in \text{Der}_{\mathcal{M}}$  als das Bild des aus allen  $\lambda \text{id}_{X_i}$  bestehenden Endomorphismus unseres Komplexes  $X$  in  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$ .

**2.8.11 (Notationsfragen).** Sei  $\mathcal{M}$  eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie. Der durch die Struktur einer Schmelzkategorie auf  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$  gegebene Tensorfunktors wird oft  $\otimes^L := \otimes_{\text{Der}}$  notiert und fällt in den üblichen Anwendungen mit dem üblichen derivierten Tensorprodukt zusammen. Das interne Hom unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$  wird in der Literatur meist  $R\mathcal{H}\text{om}(A, D) := (A \rightrightarrows_{\text{Der}} D)$  oder ähnlich notiert. Wir lassen den unteren Index  $\text{Der}$  meist weg in der Hoffnung, daß er sich aus dem Kontext ergibt, und schreiben  $\otimes$  und  $\rightrightarrows$ .

2.8.12 (**Totale Homologie auf derivierten Kategorien**). Sei  $\mathcal{M}$  eine entfaltbare bequeme Schmelzkategorie. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von Schmelzkategorien 2.6.1 induziert der Ab-Schmelzfunktor  $\mathcal{H} : \text{Hot}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{sg}\mathcal{M}$  der totalen Homologie einen Schmelzfunktor

$$\mathcal{H} : \text{Der}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{sg}\mathcal{M}$$

Aus der Beschreibung der Verschmelzungen in der derivierten Kategorie mithilfe quisflacher Komplexe folgt, daß der Schmelzfunktor der totalen Homologie ein Ab-Schmelzfunktor ist.

*Beispiel 2.8.13 (Schmelzkategorie der derivierten abelschen Gruppen)*. Die Schmelzkategorie der abelschen Gruppen ist offensichtlich eine bequeme abelsche Schmelzkategorie. Sie ist entfaltbar. In der Tat ist sie von endlicher homologischer Dimension, also besitzt jeder Komplex nach [TG] 9.3.9 einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex injektiver abelscher Gruppen und dieser ist nach [TD] 2.6.25 quisrechtsentfaltet. Ebenso bilden die Komplexe gibt es nach [TD] 3.8.8 zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus von einem Komplex freier abelscher Gruppen und nach [TD] 3.8.14 ist jeder Komplex freier abelscher Gruppen quisflach. Mit 2.8.7 erhalten wir so eine Erweiterung der üblichen derivierten Kategorie der Kategorie der abelschen Gruppen zur Schmelzkategorie

$$\text{Der}_{\text{Ab}} = \text{Der}(\text{Ab})$$

der derivierten abelschen Gruppen mit stabil universellen Verschmelzungen, internem Hom und interner triangulierter Struktur. Stärker als in der Allgemeinheit von Satz 2.8.7 ist in diesem Fall nach [TD] 3.8.20 auch für  $X$  ein quislinkssentfalteter Komplex und  $Y$  beliebig der vom Lokalisierungsfunktor  $Q$  nach [TSK] 1.6.20 induzierte Morphismus in  $\text{Der}_{\text{Ab}}$  ein Isomorphismus

$$Q(X \rightrightarrows_{\text{Hot}} Y) \xrightarrow{\sim} (QX \rightrightarrows_{\text{Der}} QY)$$

2.8.14 (**Dualität in derivierten abelschen Gruppen**). Die universelle Leerverschmelzung der Schmelzkategorie  $\text{Der}_{\text{Ab}}$  ist die Leerverschmelzung  $\Upsilon \rightarrow \mathbb{Z}[0]$ , die aus dem Element  $1 \in \mathbb{Z}$  entsteht. Gegeben  $C \in \text{Ket}_{\text{Ab}}$  wird das derivierte Duale alias das Duale in der derivierten Kategorie  $C^{\vee} \in \text{Der}_{\text{Ab}}$  mithin repräsentiert durch den bereits in [TG] 5.1.13 verwendeten Komplex

$$\mathbb{D}C := (C \rightrightarrows_{\text{Ket}} (\mathbb{Q}[0] \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

In der Tat liefert die Einbettung  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  einen Quasiisomorphismus  $\mathbb{Z}[0] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}[0] \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  und der zweite Komplex besteht aus injektiven abelschen Gruppen, ist also quisrechtsentfaltet in  $\text{Hot}_{\text{Ab}}$ .

**Beispiel 2.8.15 (Schmelzkategorie derivierter Kringmoduln).** Die Schmelzkategorie der Moduln über einem Kring  $k$  ist offensichtlich eine bequeme abelsche Schmelzkategorie. Sie ist entfaltbar. In der Tat besitzt jeder Komplex von Moduln nach [TD] 3.8.6 eine Quisrechtsentfaltung und nach [TD] 3.8.14 und [TD] 3.8.8 gibt es zu jedem Komplex einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex. Mit 2.8.7 erhalten wir so eine Erweiterung der üblichen derivierten Kategorie der Kategorie der  $k$ -Moduln zur Schmelzkategorie

$$\text{Der}(\text{Ab}_k)$$

der derivierten  $k$ -Moduln mit stabil universellen Verschmelzungen, internem Hom und interner triangulierter Struktur. Stärker als in der Allgemeinheit von Satz 2.8.7 ist in diesem Fall nach [TD] 3.8.20 auch für  $C$  ein quislinkssentfalteter Komplex und  $D$  beliebig der vom Lokalisierungsfunktor  $Q$  nach [TSK] 1.6.20 induzierte Morphismus in  $\text{Der}(\text{Ab}_k)$  ein Isomorphismus

$$Q(C \rightrightarrows_{\text{Hot}} D) \xrightarrow{\sim} (QC \rightrightarrows_{\text{Der}} QD)$$

Nach 2.8.10 vererbt sich die offensichtliche  $k$ -Struktur auf  $\text{Ab}_k$  zu einer  $k$ -Struktur auf  $\text{Der}(\text{Ab}_k)$ .

**Beispiel 2.8.16 (Schmelzkategorie derivierter Modulgarben).** Gegeben ein gekringter Raum  $X = (X, \mathcal{A})$  bilden die  $\mathcal{A}$ -Moduln aus 1.3.5 nach 1.3.8 eine bequeme abelsche Schmelzkategorie. Sie ist entfaltbar im Sinne von 2.8.5. In der Tat besitzt jeder Komplex von  $\mathcal{A}$ -Moduln eine Quisrechtsentfaltung nach 2.3.6 und ein quisflache Linksauflösung nach 2.5.20. Mit 2.8.7 erhalten wir so eine Erweiterung der üblichen derivierten Kategorie der Kategorie der  $\mathcal{A}$ -Moduln zur Schmelzkategorie

$$\text{Der}(\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})})$$

der derivierten  $\mathcal{A}$ -Moduln mit stabil universellen Verschmelzungen, internem Hom und interner triangulierter Struktur. Unsere Isotransformation  $L \xrightarrow{\sim} \Gamma$  vom Leerverschmelzungsfunktor von  $\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}$  zum Funktor der globalen Schnitte liefert mit 2.8.9 Isomorphismen

$$\text{Der}(\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})})(\Upsilon, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$$

zwischen der abelschen Gruppe der Leerverschmelzungen in einen Garbenkomplex und seiner Hyperkohomologie im Grad Null.

**2.8.17 (Cup-Produkt).** Gegeben eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  ist  $[1]\mathbb{I}$  eine Signumseinheit von  $\text{Der}_{\mathcal{M}}$ . Wir erhalten also nach [TSK] 3.4.18 einen Schmelzfunktor  $\text{Der}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{sgAb}$  durch die Vorschrift

$$\mathcal{F} \mapsto \text{Der}_{\mathcal{M}}(\Upsilon, [q]\mathcal{F})_{q \in \mathbb{Z}}$$

Er macht jedes Monoid zu einem Monoid und macht insbesondere das Abmonoid  $\mathbb{I} \in \text{Der}_{\mathcal{M}}$  nach [TSK] 3.1.12 zu einem Abmonoid von  $\text{sgAb}$  alias einem superkommutativen  $\mathbb{Z}$ -graduierten Ring. Im Spezialfall  $\mathcal{M} = \text{Ab}_{/X}$  der abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$  erhalten wir so unter der Identifikation 2.8.16 von Leerverschmelzungen mit Hyperkohomologie den garbentheoretischen Kohomologiering

$$\bigoplus_q H^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

So sehen wir insbesondere, daß dieser graduierte Ring superkommutativ ist. Im Spezialfall  $\mathcal{M} = \text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}$  der abelschen Garben auf einem gekringten Raum  $(X, \mathcal{A})$  erhalten wir allgemeiner einen superkommutativen graduierten Ring

$$\bigoplus_q H^q(X; \mathcal{A})$$

**2.8.18 (Erweiterungen und internes Hom).** Sei  $\mathcal{M}$  eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie. Gegeben  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{M}$  haben wir nach [TD] 2.6.10 und [TSK] 1.4.2 Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\text{Ext}_{\mathcal{M}}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F}, [q]\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{M}}(\gamma, \mathcal{F} \rightrightarrows [q]\mathcal{G})$$

Im Fall  $\mathcal{M} = \text{Ab}_{/X}$  für einen gekringten Raum  $X$  können wir das nach 2.8.16 weiter identifizieren mit der Hyperkohomologie der derivierten Homomorphismengarbe  $\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G})$ .

**2.8.19 (Totale Homologie als Schmelzfunktor).** Nach 2.8.6 können wir auch für Modulgarben auf einem gekringten Raum  $X = (X, \mathcal{A})$  den Schmelzfunktor der totalen Homologie  $\mathcal{H} : \text{Hot}(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{sg}(\text{Ab}_{/X})$  bilden. Er faktorisiert offensichtlich über die Lokalisierung nach Quasiisomorphismen und induziert so einen Schmelzfunktor

$$\mathcal{H} : \text{Der}(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{sg}(\text{Ab}_{/X})$$

Insbesondere induziert für beliebige Komplexe von Modulgarben  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  die stabil universelle Verschmelzung  $\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \otimes^{\text{L}} \mathcal{G}$  in  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  eine Verschmelzung

$$\mathcal{H}\mathcal{F} \curlywedge \mathcal{H}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{F} \otimes^{\text{L}} \mathcal{G})$$

und insbesondere Morphismen  $\mathcal{H}^p \mathcal{F} \otimes \mathcal{H}^q \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(\mathcal{F} \otimes^{\text{L}} \mathcal{G})$  von Modulgarben.

## Übungen

*Übung 2.8.20.* Alle Objekte in  $\text{Der}(\text{Ab})$  mit endlich erzeugter totaler Kohomologie sind starr. Hinweis: [TD] 2.3.11. Ist allgemeiner  $k$  ein noetherscher Kring von endlicher homologischer Dimension, so sind alle Objekte von  $\text{Der}(\text{Ab}_k)$  mit endlich erzeugter totaler Kohomologie starr.

*Übung 2.8.21.* Gegeben ein Kring  $k$  ist in  $\text{Der}(k[T_1, \dots, T_r]\text{-Mod})$  das Duale  $k^\vee$  des Moduls  $k = k[T_1, \dots, T_r]/\langle T_1, \dots, T_r \rangle$  isomorph zu  $k[-r]$ . Hinweis: Koszul-Komplex [TG] 3.2.31.

*Übung 2.8.22.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und abelsche Gruppen  $K, L$  konstruiere man ein cup-Produkt  $H^p(X; K) \times H^q(X; L) \rightarrow H^{p+q}(X; K \otimes L)$ .

## 2.9 Derivierte Garbenoptrennfaserung

2.9.1. Wir erinnern aus 1.3.11 die Trennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$  der opponierten Modulgarben über der banalen Trennkategorie der gekringten Räume, die „Modulgarbenoptrennfaserung“ oder kurz **Garbenoptrennfaserung**. Wir erinnern weiter unsere allgemeinen Erkenntnisse über Trennfunktor zu banalen Trennkategorien 1.5.2 und insbesondere, wie in diesem Fall auf den Fasern die Struktur einer Trennkategorie induziert wird, die im Fall einer Trennfaserung nach 1.5.4 ihrerseits stabil universelle Trennungen besitzt. Indem wir erst zu Komplexen und dann zu Homotopiekomplexen übergehen, erhalten wir in offensichtlicher Weise Trennfaserungen  $\text{Ket}(\text{Ab}_{//\text{Gek}}) \rightarrow \wedge \text{Gek}$  und  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}}) \rightarrow \wedge \text{Gek}$ . Die Lokalisierung der Trennkategorie  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}})$  im Sinne von 2.6.3 nach allen denjenigen Einstrennungen über Identitäten, die Quasiisomorphismen sind, notiere ich  $\text{Der}_{//\text{Gek}} := \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}})_{\text{qis}}$ . Wir erhalten so einen Trennfunktor, den **Trennfunktor der derivierten Modulgarben**

$$\text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$$

Die in 1.5.2 für beliebige Trennfunktor zu banalen Trennkategorien erklärte Konstruktion macht für jeden gekringten Raum  $X = (X, \mathcal{A})$  die Faser  $\text{Der}_{//X}$  zu einer Trennkategorie. Die dazu opponierte Schmelzkategorie notieren wir

$$\text{Der}_{/X} := (\text{Der}_{//X})^{\text{opp}}$$

2.9.2. Sei  $X = (X, \mathcal{A})$  ein gekringter Raum. Die Einbettung von Familienkategorien  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//X})^\vee \xrightarrow{\sim} \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}})^\vee$  induziert einen Funktor zwischen ihren Lokalisierungen nach Tupeln von Quasiisomorphismen über Identitäten und so einen Schmelzfunktor

$$e_X : \text{Der}(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Der}_{/X}$$

**Satz 2.9.3 (Rückzug und Tensorprodukt).** 1. *Der Trennfunktor der derivierten Modulgarben  $\text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$  ist eine Trennfaserung mit Adjungierten im Sinne von 1.5.5, die **derivierte Garbenoptrennfaserung**:*

2. *Für jeden gekringten Raum  $X = (X, \mathcal{A})$  ist der Schmelzfunktor  $e_X$  aus 2.9.2 ein Isomorphismus von Schmelzkategorien*

$$e_X : \text{Der}(\text{Ab}_{/X}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{/X}$$

3. Gegeben ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  gekringter Räume existiert eine Isotransformation zwischen den beiden Kompositionen des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}/X) & \xleftarrow{f^*} & \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}/Y) \\
 e_Y \downarrow \wr & \searrow \sim & e_X \downarrow \wr \\
 \mathrm{Der}/X & \xleftarrow{f^{\dagger \mathrm{opp}}} & \mathrm{Der}/Y
 \end{array}$$

mit dem Linksderivierten des Rückzugs beziehungsweise dem Opponierten des Rückzugs in der derivierten Garbenopffaserung in den Horizontalen.

2.9.4. Vermittels der Isomorphismen aus Teil 2 übertragen wir die Struktur einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen, internem Hom und interner triangulierter Struktur auf  $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}/X)$  aus 2.8.16 auf die opponierten Fasern der derivierten Garbenopffaserung. Nach Teil 3 sind die einfachen Rückzüge unserer derivierten Garbenopffaserung für diese Strukturen triangulierte Funktoren.

*Beweis.* Wir wenden die Korollare 2.5.11 und 2.5.12 zur Lokalisierung von Kofaserfunktoren durch Linksanpassung oder genauer die daraus durch Übergang zu den opponierten Kategorien entstehenden Aussagen zur Lokalisierung von Faserfunktoren durch Rechtsanpassung an auf den auf den Familienkategorien induzierten Funktor

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{\parallel \mathrm{Gek}})^\wedge \rightarrow \mathrm{Gek}^\wedge$$

Er ist ein Faserfunktoren. Genauer ist für Morphismen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  gekringter Räume und  $\mathcal{G}_i \in \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{\parallel Y_i})$  die tautologische Trennung

$$f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_n^* \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_n$$

über  $(f_1, \dots, f_n)$  kartesisch. Wie beim Beweis des Spezialfalls 9.9.19, nur jetzt in opponierter Weise notiert, bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach [TD] 2.5.3 ein *faserweises Rechtsoresystem*, ja sogar ein *faserweises Oresystem*. Für dieses faserweise Rechtsoresystem der Quasiisomorphismen ist die Unterkategorie  $(\mathrm{Hfl}_{\parallel \mathrm{Gek}})^\wedge \subset \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{\parallel \mathrm{Gek}})^\wedge$  aller Tupel von quisflachen Komplexen von Modulgarben eine *Rechtsanpassung*, denn Tensorprodukt wie Rückzug machen aus quisflachen Komplexen quisflache Komplexe, Tensorprodukt wie Rückzug von Quasiisomorphismen zwischen quisflachen Komplexen von Modulgarben sind wieder Quasiisomorphismen, und nach 2.5.20 finden wir für jeden Komplex von Modulgarben eine quisflache Linksauflösung, die in der opponierten Kategorie den benötigten Morphismus liefert. Nach 2.5.11.1 ist unser Trennfunktor  $\mathrm{Der}_{\parallel \mathrm{Gek}} \rightarrow \wedge \mathrm{Gek}$  also eine Trennfaserung und nach 2.5.11.2 ist  $e_X$  ein Isomorphismus von Schmelzkategorien. Da quisflache Komplexe auch



quislinksentfaltet sind für  $f^{(*)}$  folgt die dritte Aussage. Daß unsere Trennfaserung  $\text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$  eine Trennfaserung mit Adjungierten ist, folgt aus den bereits bewiesenen Teilaussagen 2 und 3. In der Tat haben die Schmelzkategorien der derivierten Modulgarben internes Hom nach 2.8.16 und der Linksderivierte  $Lf^{(*)}$  hat nach [TD] 3.4.16 als Rechtsadjungierten den Rechtsderivierten  $Rf_{(*)}$  des Vorschubs 1.3.10, der seinerseits global definiert ist, da jeder Komplex von Modulgarben nach 2.3.6 eine Quisrechtsentfaltung besitzt.  $\square$

**2.9.5 (Garbenkohomologie als Trennfunktor).** Unser Schmelzfunktor 1.5.29 des Vorschubs auf das finale Objekt spezialisiert in dieser Situation zu einem Schmelzfunktor

$$\text{fin}_* : \text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \text{Der}_{/\text{pt}}$$

für  $\text{pt}$  den einpunktigen mit  $\mathbb{Z}$  gekringten Raum. Zusammen mit den offensichtlichen Isomorphismen  $\text{Der}_{/\text{pt}} \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab}_{/\text{pt}}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab})$  von Schmelzkategorien erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\text{fin}_* : \text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$$

Halten wir noch den Schmelzfunktor  $\mathcal{H} : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$  der Homologie aus 2.8.19 dahinter, so erhalten wir den **Schmelzfunktor**  $(X, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{H}^*(X; \mathcal{F})$  **der totalen Hyperkohomologie**. Halten wir zusätzlich den Opponierten des eindeutigen kartesischen Trennschnitts davor, so erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\gamma \text{Gek}^{\text{opp}} \rightarrow \text{sgAb}$$

Er ordnet jedem gekringten Raum  $(X, \mathcal{A})$  die supergraduierte abelsche Gruppe  $\mathbb{H}^*(X; \mathcal{A})_{\text{garb}}$  zu und jedem Tupel von von  $(X, \mathcal{A})$  ausgehenden Morphismen von gekringten Räumen die multiadditive Abbildung „cup-Produkt des Rückzugs der Kohomologieklassen“.

*Ergänzung 2.9.6.* Der Schmelzfunktor aus 2.9.5 ist eine garbenkohomologische Variante des entsprechenden Schmelzfunktors  $\gamma \text{Top}^{\text{opp}} \rightarrow \text{sgAb}$  der singulären Kohomologie, den wir in [TSK] 4.2.3 als Trennfunktor  $\wedge \text{Top} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$  besprochen hatten. Es sollte einmal diskutiert werden, inwiefern unser Vergleichs-isomorphismus zur singulären Kohomologie eine Transformation von Trennfunktoren ist. Das würde ich gerne einem Studenten überlassen. Er sollte es gleich für „topologische Räume mit einem vorgegebenen Kring von Koeffizienten“ machen, als Teil der derivierten Modulgarbenoptrennfaserung.

## 3 Verschwindungssätze mit Anwendungen

### 3.1 Garbenazyklische Morphismen

**Proposition 3.1.1.** *Gegeben ein topologischer Raum  $Y$  und ein Komplex von abelschen Garben  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  ist für die Projektion  $\pi : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_* \pi^* \mathcal{F}$$

*Beweis.* Nach [TG] 4.3.23 ist für jede Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}_{/Y}$  die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_{(*)} \pi^{(*)} \mathcal{F}$ , denn  $\pi$  ist eine finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern. Also ist auch für alle Komplexe  $\mathcal{F} \in \text{Hot}(\text{Ab}_{/Y})$  die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_{(*)} \pi^{(*)} \mathcal{F}$ . Nun hat nach eigentlichem Basiswechsel [TG] 6.6.8 und unseren Erkenntnissen [TG] 4.2.3 zur Garbenkohomologie von Teilmengen der Zahlengeraden der Vorschub  $\pi_{(*)} : \text{Ab}_{/Y \times [0,1]} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$  eine homologische Dimension kleinergleich Eins und insbesondere endliche homologische Dimension. Unsere Erkenntnisse [TD] 3.6.4 zum Derivieren homologisch endlicher Funktoren zeigen dann, daß jeder Komplex  $\mathcal{A}$  von  $\pi_{(*)}$ -rechtszyklischen abelschen Garben bereits  $\pi_{(*)}$ -quisrechtsentfaltet ist, daß also der natürliche Morphismus in der derivierten Kategorie ein Isomorphismus  $Q\pi_{(*)} \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_* \mathcal{A}$  ist. Nach [TG] 6.6.9 und [TG] 4.2.3 wissen wir weiter, daß das Zurückholen  $\pi^{(*)} : \text{Ab}_{/Y} \rightarrow \text{Ab}_{/Y \times [0,1]}$  jede Garbe zu einer  $\pi_{(*)}$ -rechtszyklischen Garbe macht und wieder nach [TD] 3.6.4 damit jeden Komplex von abelschen Garben zu einem  $\pi_{(*)}$ -quisrechtsentfalteten Komplex. Das schließlich zeigt die Behauptung.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß die Einheit der Adjunktion für alle  $y \in Y$  einen Isomorphismus  $\text{em}_y^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{em}_y^* \pi_* \pi^* \mathcal{F}$  induziert. Mit eigentlichem Basiswechsel 2.4.9 und der Verträglichkeit [TG] 6.3.18 von Adjunktion und Basiswechsel reicht es also, die Proposition in dem Fall zu zeigen, daß  $Y$  der einpunktige Raum ist. Nach [TG] 4.2.3 verschwindet auf reellen Intervallen die Garbenkohomologie jeder abelschen Garbe im Grad  $> 1$  und die Garbenkohomologie jeder konstanten abelschen Garbe im Grad  $\geq 1$ . Die Behauptung folgt so mit unseren Erkenntnissen [TD] 3.6.4 zum Derivieren homologisch endlicher Funktoren.  $\square$

**Definition 3.1.2.** Eine stetige Abbildung topologischer Räume  $f : X \rightarrow Y$  heiße **garbenazyklisch**, wenn für jeden Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_* f^* \mathcal{F}$$

liefert. Sie heiße **basisfest garbenazyklisch** oder kurz **bagazyklisch**, wenn sie unter jedem Basiswechsel eine garbenazyklische Abbildung liefert, wenn also in

Formeln für jede stetige Abbildung  $S \rightarrow Y$  die induzierte Abbildung  $X \times_Y S \rightarrow S$  garbenazyklisch ist. Ein topologischer Raum  $X$  heiße **garbenazyklisch** beziehungsweise **basisfest garbenazyklisch** oder kurz **bagazyklisch**, wenn die konstante Abbildung  $X \rightarrow \text{top}$  die entsprechende Eigenschaft hat.

3.1.3. Jede garbenazyklische Abbildung ist offensichtlich schwach garbenazyklisch im Sinne unserer Definition [TG] 6.6.10, der Rückzug induziert also Isomorphismen auf der Kohomologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe.

**Satz 3.1.4.** *Jeder zusammenziehbare Raum ist bagazyklisch.*

*Beweis.* Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  erhalten wir einen Funktor

$$H(\ ; G) : \text{Top} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})^{\text{opp}}$$

durch die Vorschrift  $X \mapsto \text{fin}_{X^*} \text{fin}_X^* G$  auf Objekten und die Vorschrift, daß jedem Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  die Komposition

$$f^\# : \text{fin}_{Y^*} \text{fin}_Y^* G \rightarrow \text{fin}_{Y^*} f_* f^* \text{fin}_Y^* G \xrightarrow{\sim} \text{fin}_{X^*} \text{fin}_X^* G$$

zugeordnet wird. Ich notiere ihn  $X \mapsto H(X; G)$ . Das Nachschalten von  $\mathcal{H}^q$  macht daraus den üblichen Funktor  $X \mapsto H^q(X; G)$  der Garbenkohomologie mit Koeffizienten in  $G$ . Diese Konstruktion funktioniert genauso, wenn wir für  $G$  ein beliebiges Objekt von  $\text{Der}(\text{Ab})$  zulassen. Sie funktioniert noch allgemeiner für eine beliebige Bifaserung  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  über einer Kategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$ , für jedes Objekt  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}_{\text{pt}}$  erhalten wir dann einen Funktor  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{pt}}$  durch die Vorschrift  $X \mapsto \text{fin}_{X^\dagger} \text{fin}_X^\dagger \mathcal{G}$  auf Objekten und die Vorschrift, daß jedem Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis die Komposition

$$f^\# = \text{idt} \circ \varepsilon : \text{fin}_{X^\dagger} \text{fin}_X^\dagger \mathcal{G} \rightarrow \text{fin}_{Y^\dagger} f_\dagger f^\dagger \text{fin}_Y^\dagger \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \text{fin}_{Y^\dagger} \text{fin}_Y^\dagger \mathcal{G}$$

zugeordnet wird. Gegeben ein topologischer Raum  $S$  und  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/_S)$  erhalten wir so insbesondere einen Funktor auf der Kategorie der topologischen Räume über  $S$ , den wir

$$H_S(\ ; \mathcal{G}) : \text{Top}_S \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/_S)^{\text{opp}}$$

notieren. Unsere Erkenntnisse 3.1.1 zeigen, daß für einen Raum  $X \in \text{Top}_S$  über  $S$  und die Projektion  $\pi : X \times [0, 1] \rightarrow X$  der „relative Rückzug“ stets ein Isomorphismus

$$\pi^\# : H_S(X; \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H_S(X \times [0, 1]; \mathcal{G})$$

ist. Für  $i_t : X \hookrightarrow X \times [0, 1]$  die durch das Dahinterschreiben von  $t \in [0, 1]$  gegebene Abbildung folgt daraus wegen  $i_t^\# \circ \pi^\# = \text{id}$ , daß sie gar nicht von  $t$  abhängt. Sind speziell  $f, g : X \rightarrow Y$  homotop, so folgt

$$(f \times \text{id})^\# = (g \times \text{id})^\# : H_S(Y \times S; \mathcal{G}) \rightarrow H_S(X \times S; \mathcal{G})$$

Jede Homotopieäquivalenz  $f : Y \rightarrow Z$  induziert folglich einen Isomorphismus  $(f \times \text{id})^\# : H_S(Z \times S; \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H_S(Y \times S; \mathcal{G})$ . Ist insbesondere  $Z$  ein zusammenziehbarer Raum, so ist der relative Rückzug zur Projektion  $c : Z \times S \rightarrow S$  ein Isomorphismus  $c^\# : H_S(S; \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H_S(Z \times S; \mathcal{G})$  alias die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_*c^*\mathcal{G}$ .  $\square$

**3.1.5 (Permanenzeigenschaften garbenzyklischer Abbildungen).** Jede Verküpfung garbenzyklischer Abbildungen ist garbenzyklisch. Ist  $g \circ f$  garbenzyklisch und  $f$  garbenzyklisch, so ist auch  $g$  garbenzyklisch. Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und besitzt  $Y$  eine Überdeckung durch offene Teilmengen  $U \subseteq Y$  derart, daß  $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$  jeweils garbenzyklisch ist, so ist schon  $f : X \rightarrow Y$  selbst garbenzyklisch. Insbesondere ist jedes Faserbündel mit bagazyklischer Faser bagazyklisch.

**Definition 3.1.6.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Wir sagen, ein Komplex von abelschen Garben  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  **kommt her von**  $Y$ , wenn es  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/Y)$  gibt mit  $\mathcal{F} \cong f^*\mathcal{G}$ .

**Lemma 3.1.7.** Seien  $f : X \rightarrow Y$  garbenzyklisch und  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$ . So sind gleichbedeutend:

1. Das Objekt  $\mathcal{F}$  kommt her von  $Y$ ;
2. Die Koeinheit der Adjunktion liefert einen Isomorphismus  $f^*f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ ;
3. Es gibt eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(Y)$  von  $Y$  derart, daß für alle  $U \in \mathcal{U}$  die Einschränkung  $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}$  von  $U$  herkommt.

*Beweis.* Die Definition garbenzyklischer Abbildungen und formale Eigenschaften adjungierter Funktoren nach [TF] 4.8.1 liefern  $1 \Leftrightarrow 2$ . Formulieren wir 3 um mittels dieser Erkenntnis, so erhalten wir auch  $2 \Leftrightarrow 3$ .  $\square$

## 3.2 Künnethformeln der Garbenkohomologie

3.2.1. In der Garbenkohomologie gilt eine besonders einfache und allgemeine Künnethformel für die kompakte Kohomologie. Wir lernen sie in 5.6.13 kennen. Im folgenden diskutieren wir Künnethformeln für die gewöhnliche Kohomologie. Wir benötigen sie für die Arbeit mit Kohomologierungen.

**Satz 3.2.2 (Derivierter gefasertes Basiswechsel).** Sind in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen  $f q = p g$  die Horizontalen  $p, q$  Faserbündel mit offenlokal zusammenziehbarer Faser, so ist der Basiswechsel auf den derivierten Kategorien von abelschen Garben eine Isotransformation

$$p^*f_* \xrightarrow{\sim} g_*q^*$$

3.2.3. Wir zeigen den Satz sogar etwas allgemeiner für Faserbündel mit offenlokal bagazyklischer Faser. In [TG] 8.2.2 hatten wir eine Variante diskutiert, die ohne derivierte Kategorien auskommt und stattdessen eine Aussage über die Folge der höheren derivierten Funktoren macht.

*Beispiel 3.2.4.* Die geometrische Realisierung  $\Delta(\mathcal{K})$  eines Simplicialkomplexes  $(E, \mathcal{K})$  ist stets offenlokal zusammenziehbar: Jede Umgebung eines jeden Punktes kann in anderen Worten einer offenen zusammenziehbaren Umgebung desselben Punktes verkleinert werden. Insbesondere ist jede komplexe algebraische Varietät mit ihrer analytischen Topologie offenlokal zusammenziehbar, denn nach [Hir75] ist jede algebraische Teilmenge eines  $\mathbb{C}^n$  homöomorph zur geometrischen Realisierung eines Simplicialkomplexes.

*Beweis.* Gegeben  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  reicht es nach unserem Verschwindungskriterium 2.3.20 zu zeigen, daß jeder Punkt aus dem Definitionsbereich von  $p$  ein Fundamentalsystem von offenen Umgebungen hat derart, daß der von der Einbettung  $j$  der fraglichen Umgebung herrührende Morphismus ein Isomorphismus

$$\text{fin}_* j^* p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{fin}_* j^* g_* q^* \mathcal{F}$$

ist, für  $\text{fin}$  die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum. Mit dieser Erkenntnis können wir uns darauf zurückziehen, im Fall kartesischen Diagramms der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y \times Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

mit zusammenziehbarem oder allgemeiner bagazyklischem  $Z$  zu zeigen, daß Basiswechsel Isomorphismen

$$p_* p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_* g_* q^* \mathcal{F}$$

induziert. Das ist aber klar, da ja gilt  $p_* g_* = f_* q_*$  und da nach Annahme die Einheiten der Adjunktion Isomorphismen  $\text{id} \xrightarrow{\sim} p_* p^*$  und  $\text{id} \xrightarrow{\sim} q_* q^*$  sind.  $\square$

3.2.5. Für beliebige topologische Räume  $X, Y$  liefert der Rückzug auf der Kohomologie einen Ringhomomorphismus

$$H^*(X) \bar{\otimes} H^*(Y) \rightarrow H^*(X \times Y)$$

mit  $(u, v) \mapsto u \times v := \text{pr}_X^*(u) \cup \text{pr}_Y^*(v)$ . Hier meint  $\bar{\otimes}$  das für Monoidobjekte der Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen zu verstehende Tensorprodukt [TSK] 3.1.31, also das übliche Tensorprodukt von graduierten abelschen Gruppen mit einer Vorzeichenregel für der Multiplikation von zwei Tensoren. Dieser Ringhomomorphismus heißt das **Kreuzprodukt der Garbenkohomologie**.

**Satz 3.2.6 (Künnethformel der Garbenkohomologie).** *Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $k$  ein Kring. Ist  $X$  offenlokal zusammenziehbar oder allgemeiner offenlokal bagazyklisch und sind alle  $H^q(Y)$  projektive  $k$ -Moduln, so konstruieren wir im folgenden Beweis einen ausgezeichneten Isomorphismus*

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y; k)) \xrightarrow{\sim} H^n(X \times Y; k)$$

*Sind zusätzlich alle  $H^q(Y)$  endlich erzeugt, so induziert das Kreuzprodukt der Kohomologie Isomorphismen*

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; k) \otimes_k H^q(Y; k) \xrightarrow{\sim} H^n(X \times Y; k)$$

3.2.7. Fordern wir keine speziellen Eigenschaften von  $X$ , fordern aber weiter die Projektivität aller  $H^q(Y; k)$ , so liefern die Konstruktionen unseres Beweises ausgezeichnete Morphismen  $\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y; k)) \rightarrow H^n(X \times Y; k)$ , die aber im allgemeinen keine Isomorphismen mehr zu sein brauchen. Fordern wir andererseits  $X$  offenlokal bagazyklisch und fordern keine speziellen Eigenschaften von  $Y$ , fordern aber, daß unser Koeffizientenring  $k$  erblich sein soll, so liefern die Konstruktionen unseres Beweises zusammen mit [TD] 2.6.27 zwar die Existenz von Isomorphismen  $\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y; k)) \xrightarrow{\sim} H^n(X \times Y; k)$ , aber nicht deren Eindeutigkeit.

3.2.8. In 5.6.14 werden wir eine Künnethformel für die kompakte Kohomologie kennenlernen.

*Beispiel 3.2.9.* Im Fall  $n = 0$  liefert unser Satz unter Zusatzannahmen, die sich in diesem Fall als überflüssig erweisen, die vom Exponentialgesetz induzierten Morphismen

$$\text{Top}(X, \text{Top}(Y, k)) \rightarrow \text{Top}(X \times Y, k)$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese sogar für lokal zusammenhängendes  $X$  Isomorphismen sind.

*Beweis.* Derivierter gefasertes Basiswechsel 3.2.2 im kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\text{pr}_Y} & Y \\ \text{pr}_X \downarrow & & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{a} & \text{top} \end{array}$$

liefert einen Isomorphismus  $a^*b_*\underline{Y} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{X*}\text{pr}_Y^*\underline{Y}$  und so einen Isomorphismus  $a_*a^*b_*\underline{Y} \xrightarrow{\sim} \text{fin}_*X \times Y$ . Sind alle  $H^q(Y; k)$  projektive  $k$ -Moduln, so gibt es nach

[TD] 2.6.21 genau einen Morphismus  $s : \mathcal{H}b_*\underline{Y} \rightarrow b_*\underline{Y}$  in der derivierten Kategorie derart, daß  $\mathcal{H}s : \mathcal{H}\mathcal{H}b_*\underline{Y} \rightarrow \mathcal{H}b_*\underline{Y}$  der offensichtliche Isomorphismus ist, und dieser Morphismus ist offensichtlich selber ein Isomorphismus

$$s : \mathcal{H}b_*\underline{Y} \rightarrow b_*\underline{Y}$$

Nach [TD] 3.9.5 ist  $a^*b_*\underline{Y}$  das Produkt der  $[-q]a^*H^q(Y; k)$ . Als Rechtsadjungierter macht  $a_*$  Produkte zu Produkten. Da Produkte in derivierten Modulkategorien nach [TD] 3.9.6 gliedweise berechnet werden können und mit dem Bilden der Homologie vertauschen, folgen die Isomorphismen des Satzes. Eine Kohomologieklassse  $\beta \in H^r(Y; k)$  entspricht einem Morphismus  $\beta : \underline{Y} \rightarrow [r]\underline{Y}$ . Indem wir seinen Effekt unter unseren Konstruktionen verfolgen, erhalten wir auch ohne irgendwelche Annahmen an  $X$  die rechte Hälfte eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} H^p(X; k) \otimes_k H^q(Y; k) & \rightarrow & H^p(X; H^q(Y; k)) & \rightarrow & H^{p+q}(X \times Y; k) \\ \downarrow \text{id} \otimes (\cup \beta) & & \downarrow \cup \beta & & \downarrow \cup \text{pr}_Y^* \beta \\ H^p(X; k) \otimes_k H^{q+r}(Y; k) & \rightarrow & H^p(X; H^{q+r}(Y; k)) & \rightarrow & H^{p+q+r}(X \times Y; k) \end{array}$$

Das linke Quadrat entsteht aus dem ausgezeichneten Morphismus

$$a_*\underline{X} \otimes \mathcal{F} \rightarrow a_*(\underline{X} \otimes a^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} a_*a^*\mathcal{F}$$

nach 1.5.17, indem wir zu  $\mathcal{F}$  zu  $[0]H^q(Y; k)$  spezialisieren und  $\mathcal{H}^p$  anwenden und den Morphismus 2.8.19 vom Tensorprodukt der Homologien zur Homologie des Tensorprodukts vorschalten. Indem wir die Bilder von  $\alpha \otimes 1$  verfolgen, erkennen wir, daß die Kompositionen in den Horizontalen das Kreuzprodukt der Kohomologie sein müssen. Ist  $H^q(Y; k)$  endlich erzeugt projektiv, so ist es starr und flach und die eben konstruierten Morphismen erweisen sich als Isomorphismen nach der starren Projektionsformel 1.5.20 oder 3.2.10 und der  $\otimes$ -Entfaltetheit flacher Objekte und der zweite Teil des Satzes folgt.  $\square$

**3.2.10 (Starre Projektionsformel, Variante).** Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $k$  ein Krings erhalten wir aus den Adjunktionen für  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/(X,k)})$  und  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/(Y,k)})$  einen kanonischen Morphismus  $(f_*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$ . Halten wir  $\mathcal{F}$  fest, so bilden die Objekte  $\mathcal{G}$ , für die unsere Morphismen Isomorphismen

$$(f_*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$$

sind, eine volle triangulierte Unterkategorie von  $\text{Der}(\text{Ab}_{/(Y,k)})$ , die zumindest die konstante Garbe  $\underline{Y}$  enthält. In 1.5.20 haben wir diskutiert, warum für beliebiges  $\mathcal{F}$  unsere starre Projektionsformel insbesondere für alle „starr“ Objekte  $\mathcal{G}$  gilt.

3.2.11 (**Relative Künnethformel mit Koeffizienten**). Wir betrachten ein Diagramm von topologischen Räumen der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{\text{pr}_Y} & Y \\ \text{pr}_X \downarrow & \searrow c & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{a} & Z \end{array}$$

und nehmen an,  $a$  sei ein Faserbündel mit offenlokal zusammenziehbarer oder allgemeiner offenlokal bagazyklischer Faser und  $k$  ein Kring. Für  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  starr und  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/Y)$  mit  $b_*\mathcal{G}$  starr zeigen wir, daß der natürliche Morphismus ein Isomorphismus

$$c_*(\mathcal{F} \boxtimes_Z \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*\mathcal{F} \otimes b_*\mathcal{G}$$

ist. Dazu beachten wir die Isomorphismen

$$a_* \text{pr}_{X*}(\text{pr}_X^* \mathcal{F} \otimes \text{pr}_Y^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \otimes (\text{pr}_{X*} \text{pr}_Y^* \mathcal{G})) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \otimes a^* b_* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_* \mathcal{F} \otimes b_* \mathcal{G}$$

aus der starren Projektionsformel 3.2.10 außen mit dem gefaserten derivierten Basiswechsel 3.2.2 in der Mitte und beachten  $a \text{pr}_X = c$  und unsere Definition  $\mathcal{F} \boxtimes_Z \mathcal{G} := \text{pr}_X^* \mathcal{F} \otimes \text{pr}_Y^* \mathcal{G}$  für das Boxprodukt. Wenn wir gar keine Starrheitsannahmen machen, erhalten wir nur noch mit 1.5.9 und gefasertem Basiswechsel kanonische Isomorphismen

$$c_*(\text{pr}_X^* \mathcal{F} \rightrightarrows \text{pr}_Y^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \rightrightarrows \text{pr}_{X*} \text{pr}_Y^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \rightrightarrows a^* b_* \mathcal{G})$$

**Satz\* 3.2.12 (Leray-Hirsch).** Gegeben  $X \rightarrow Y$  ein Faserbündel über einem offenlokal zusammenziehbaren Raum und  $c_1, \dots, c_n \in H^*(X)$  homogene Klassen, deren Rückzüge für alle  $y \in Y$  eine Basis der Kohomologie  $H^*(X_y)$  der Faser bilden, bilden  $c_1, \dots, c_n$  auch eine Basis von  $H^*(X)$  als  $H^*(Y)$ -Modul.

*Beweis.* Bezeichne  $p : X \rightarrow Y$  die Projektion. Eine Klasse  $c \in H^q(X)$  können wir nach [TD] 2.6.14 auffassen als einen Morphismus  $c : p^* \mathbb{Z}_Y \rightarrow \mathbb{Z}_X[q]$  in der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf  $X$ . Die Zeilenmatrix  $(c_1, \dots, c_n)$  liefert so einen Homomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_Y[-q(i)] \rightarrow p_* \mathbb{Z}_X$$

Unser Satz folgt, wenn wir nachweisen, daß er ein Quasiisomorphismus ist. Dazu dürfen wir aber unser Faserbündel als trivial annehmen und dann folgt die Behauptung aus deriviertem gefasertem Basiswechsel 3.2.2.  $\square$

**Satz\* 3.2.13 (Leray-Hirsch, Variante).** Gegeben  $X \rightarrow Y$  ein Faserbündel über einem offenlokal zusammenziehbaren Raum und homogene Kohomologieklassen



$c_i \in H^{q(i)}(X)$  für  $i = 1, \dots, n$ , deren Rückzüge für alle  $y \in Y$  eine Basis der abgeschnittenen Kohomologie  $H^{\leq s}(X_y)$  der Faser bilden, induziert die durch Multiplikation mit  $c_1, \dots, c_n$  gegebene Abbildung in allen Graden  $\leq s$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^n H^*(Y)[-q(i)] \rightarrow H^*(X)$$

*Beweis.* Bezeichne  $p : X \rightarrow Y$  die Projektion. Eine Klasse  $c \in H^q(X)$  können wir nach [TD] 2.6.14 auffassen als einen Morphismus  $c : p^*\mathbb{Z}_Y \rightarrow \mathbb{Z}_X[q]$  in der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf  $X$ . Die Zeilenmatrix  $(c_1, \dots, c_n)$  liefert so einen Homomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_Y[-q(i)] \rightarrow \tau^{\leq s} p_* \mathbb{Z}_X$$

Unser Satz folgt, wenn wir nachweisen, daß er ein Quasiisomorphismus ist. Dazu dürfen wir aber unser Faserbündel als trivial annehmen und dann folgt die Behauptung aus deriviertem gefaserten Basiswechsel 3.2.2.  $\square$

3.2.14. Wir nennen einen Morphismus  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von gekringten Räumen **flach**, wenn für alle  $x \in X$  der Halm  $\mathcal{A}_x$  ein flacher  $\mathcal{B}_{f(x)}$ -Modul ist. Wir nennen ihn **starr**, wenn  $\mathcal{A}$  starr ist in der Schmelzkategorie  $\text{Der}_{(X, f^*\mathcal{B})}$ .

**Satz 3.2.15 (Derivierter gefasertes Basiswechsel in gekringten Räumen).** *Sind in einem kartesischen Diagramm von gekringten Räumen  $f q = p g$  die Horizontalen  $p, q$  starr und Faserbündel mit offenlokal zusammenziehbarer Faser und sind die Vertikalen flach, so ist der Basiswechsel auf den derivierten Kategorien von Modulgarben eine Isotransformation*

$$p^* f_* \xrightarrow{\sim} g_* q^*$$

3.2.16. Wir zeigen den Satz sogar etwas allgemeiner für Faserbündel mit offenlokal **bagazyklischer** Faser. Der Beweis soll funktionieren wie in 9.5.7, aber mit der starren Projektionsformel 1.5.20 im Quadrat unten links. Beispiele für starre Morphismen wären etwa endliche Körpererweiterungen. Ist das halmweise detektierbar? Ist es stabil unter Rückzug?

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, daß jeder Morphismus  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von gekringten Räumen faktorisiert als  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ . Jedes kartesische Quadrat von gekringten Räumen läßt sich mithin erhalten als Verklebung der

vier kartesischen Quadrate

$$\begin{array}{ccccc}
 (W, g^* \mathcal{C} \otimes_{v^* \mathcal{B}} q^* \mathcal{A}) & \longrightarrow & (W, q^* \mathcal{A}) & \xrightarrow{q} & (X, \mathcal{A}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (W, g^* \mathcal{C}) & \longrightarrow & (W, v^* \mathcal{B}) & \xrightarrow{q} & (X, f^* \mathcal{B}) \\
 \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 (Z, \mathcal{C}) & \longrightarrow & (Z, p^* \mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & (Y, \mathcal{B})
 \end{array}$$

Hier schreiben wir  $v = pg = fq$  und die Sternchen meinen Rückzüge von Kringgarben. Es reicht also, für jedes dieser vier kartesischen Quadrate zu prüfen, daß der Basiswechsel für Modulgarben ein Isomorphismus ist. Im Quadrat oben links geht es nur um Beziehungen zwischen Restriktion und Erweiterung von Skalaren, da folgt die Behauptung aus der Voraussetzung der Flachheit der  $\mathcal{A}_x$  über  $\mathcal{B}_{f(x)}$ , die dazu führt, daß jeder quisflache Komplex von  $\mathcal{A}$ -Modulgarben zu einem quisflachen Komplex von  $\mathcal{B}$ -Modulgarben restringiert. Im Quadrat oben rechts werden nur Kringoperationen zurückgezogen und die Behauptung ist klar. Im Quadrat unten rechts steht unser gewöhnlicher gefasertes Basiswechsel für abelsche □

## Übungen

*Übung 3.2.17.* Gegeben topologische Räume  $X, Y$  erinnern wir die unkanonischen Homomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y)) \rightarrow H^n(X \times Y)$$

aus dem Beweis von 3.2.6. Will man eine kanonischere Aussage erhalten, mag man zum Komplex von abelschen Gruppen  $B := b_* \mathbb{Z}_Y$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & [-q] \mathcal{H}^q B & & [-(q+1)] \mathcal{H}^{q+1} B \\
 & \swarrow 0 & \nwarrow & \swarrow 0 & \nwarrow \\
 \dots & \tau^{\leq q-1} B & & \tau^{\leq q} B & & \tau^{\leq q+1} B \dots \\
 & \searrow [1] & \swarrow & \searrow [1] & \swarrow
 \end{array}$$

betrachten. Die Morphismen vom Grad Eins der ausgezeichneten Dreiecke verschwinden wie angedeutet, da gilt  $\text{Der}_{\text{Ab}}(A, B) = 0$  für  $A \in \text{Der}^{\geq 2}(\text{Ab})$  und  $B \in \text{Der}^{\leq 0}(\text{Ab})$  oder expliziter nach [TD] 2.6.27. Alle Morphismen der unteren Horizontalen sind also spaltende Einbettungen in der additiven Kategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$ . Wenden wir auf dieses Diagramm  $\mathcal{H}^n a_* a^*$  an, so erhalten wir eine gradweise unkanonisch spaltende Filtrierung von  $H^n(X \times Y)$  und einen kanonischen

Homomorphismus

$$\text{gr } H^n(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y))$$

Es ist eine gute Übung zu zeigen, daß unsere Filtrierung den Kohomologiering des Produkts zu einem filtrierten Ring macht und daß unser kanonischer Homomorphismus ein Ringhomomorphismus wird, wenn wir die Multiplikation rechts erklären, indem wir das Produkt

$$H^p(X; K) \times H^q(X; L) \rightarrow H^{p+q}(X; K \otimes L)$$

aus 2.8.22 mit  $K = H^k(Y)$  und  $L = H^l(Y)$  anwenden und den Effekt des Cup-Produkts  $H^k(Y) \otimes H^l(Y) \rightarrow H^{k+l}(Y)$  nachschalten.

### 3.3 Gysinsequenz für Sphärenbündel

3.3.1. Gegeben  $n \geq 1$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  der offene Einheitsball liefern die Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie [TG] 4.8.15 und die Beschreibung [TG] 4.8.17 der kompakten Kohomologie von  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $U$  als lokale Kohomologie in Bezug auf einen beliebigen Punkt eine Folge von Isomorphismen

$$H_1^n(S^n) \xrightarrow{\sim} H_1^{n+1}(U) \xrightarrow{\sim} H_1^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$$

Das Urbild unseres ausgezeichneten Erzeugers aus [TG] 4.9.19 ganz rechts nehmen wir als unseren ausgezeichneten Erzeuger von  $H_1^n(S^n)$ . Die natürlichen Isomorphismen  $H_{\{x\}}^n(S^n) \xrightarrow{\sim} H_1^n(S^n)$  liefern dann eine Orientierung auf  $S^n$ , die wir unsere **ausgezeichnete Orientierung** nennen.

3.3.2. Unter einem **Sphärenbündel** auf einem topologischen Raum  $X$  versteht man ein Faserbündel  $\pi : E \rightarrow X$  mit einer Sphäre  $S^n$  als Faser. Unter einer **Orientierung** eines Sphärenbündels einer Faserdimension  $\geq 1$  versteht man die Vorgabe einer Orientierung im Sinne von [TG] 4.10.8 auf jeder Faser derart, daß es einen Bündelatlas gibt, unter dessen Bündelkarten  $U \times S^n \rightarrow E$  diese Orientierung stets unserer ausgezeichneten Orientierung auf  $S^n$  entspricht. Ein Sphärenbündel, das mindestens eine Orientierung besitzt, heißt **orientierbar**.

**Satz 3.3.3 (Gysin-Sequenz).** *Gegeben  $\pi : E \rightarrow X$  ein orientierbares Sphärenbündel einer Faserdimension  $n \geq 1$  gibt es eine Klasse  $c \in H^{n+1}(X)$  und eine lange exakte Sequenz der Gestalt*

$$\dots \rightarrow H^q(X) \rightarrow H^q(E) \rightarrow H^{q-n}(X) \rightarrow H^{q+1}(X) \rightarrow \dots$$

mit dem Zurückholen als erstem Morphismus und dem cup-Produkt  $c \cup$  als drittem Morphismus.

*Vorschau 3.3.4.* Wenn der folgende Beweis noch etwas unbeholfen wirkt, so ist das durchaus in meinem Sinne. Er soll nämlich unter anderem die Sprache der „derivierten Funktoren  $R\pi_* : \text{Der}(\text{Ab}/E) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/X)$ “ motivieren, die wir im kommenden Abschnitt ?? einführen und in der er einfacher zu formulieren sein wird, vergleiche 3.3.5. Im folgenden Beweis werden wir sogar zu jeder Orientierung unseres Sphärenbündels eine Klasse  $c$  wie im Satz konstruieren und sie die „Eulerklasse“ unseres orientierten Sphärenbündels nennen.

*Beweis.* Sei  $\mathbb{Z}_E \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$  eine injektive Auflösung. Wir haben also natürliche Isomorphismen  $R^q\pi_*\mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q\pi_*\mathcal{I}^\triangleleft$ . Da unsere Sphären zusammenhängend sind, liefert die Einheit Adjunktion  $(\pi^*, \pi_*)$  den ersten Isomorphismus einer Sequenz von natürlichen Isomorphismen

$$\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathbb{Z}_E$$

Derivierter eigentlicher Basiswechsel [TG] 6.6.8 im kartesischen Diagramm bestehend aus  $U \times S^n$  mit den Projektionen auf die Faktoren und den einpunktigen Raum zeigt weiter, daß  $R^n\pi_*\mathbb{Z}_E$  lokal isomorph ist zu  $\mathbb{Z}_X$  und daß gilt  $R^q\pi_*\mathbb{Z}_E = 0$  für  $q \neq 0, n$ . Der Kokern des Monomorphismus  $[0]\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \pi_*\mathcal{I}^\triangleleft$  von Garbenkomplexen hat also eine einzige von Null verschiedene Kohomologie und ist nach ?? folglich isomorph in  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  zum Objekt  $[-n](R^n\pi_*\mathbb{Z}_E)$ . Unsere Erkenntnisse ?? zu Abschneidefunktoren liefern so ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\mathbb{Z}_X \rightarrow \pi_*\mathcal{I}^\triangleleft \rightarrow [-n](R^n\pi_*\mathbb{Z}_E) \rightarrow [1]\mathbb{Z}_X$$

in  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$ . Es liefert nach ?? eine lange exakte Sequenz für die Morphismen von  $\mathbb{Z}_X$  und seinen Verschiebungen in die Objekte unseres ausgezeichneten Dreiecks. Um diese Morphismen nach  $\pi_*\mathcal{I}^\triangleleft$  zu berechnen, bemerken wir, daß dieser Komplex aus injektiven Garben besteht. Nach ?? oder noch expliziter nach dem Ende seines Beweises und der Adjunktion  $(\pi^*, \pi_*)$  liefern die offensichtlichen Abbildungen also Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_{\text{Ab}/X}([q]\mathbb{Z}_X, \pi_*\mathcal{I}^\triangleleft) & & \text{Der}_{\text{Ab}/E}([q]\mathbb{Z}_E, \mathbb{Z}_E) \xrightarrow{\sim} \text{H}^q(E) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \text{Hot}_{\text{Ab}/X}([q]\mathbb{Z}_X, \pi_*\mathcal{I}^\triangleleft) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hot}_{\text{Ab}/E}([q]\pi^*\mathbb{Z}_X, \mathcal{I}^\triangleleft) \end{array}$$

So erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \text{H}^q(X) \rightarrow \text{H}^q(E) \rightarrow \text{H}^{q-n}(X; R^n\pi_*\mathbb{Z}_E) \rightarrow \text{H}^{q+1}(X) \rightarrow \dots$$

mit dem Zurückholen auf der Kohomologie als erster Abbildung. Ist unser Bündel orientierbar und wählen wir eine Orientierung, so liefert diese Wahl einen Isomorphismus  $R^n\pi_*\mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$  mit der konstanten Garbe auf  $X$  und wir erhalten

unsere Gysin-Sequenz. Die Konstruktion zeigt, daß die dritte Abbildung darin das cup-Produkt  $c \cup$  mit derjenigen Klasse in  $c \in H^{n+1}(X)$  ist, die durch den entsprechenden Morphismus  $[-n]\mathbb{Z}_X \rightarrow [1]\mathbb{Z}_X$  in der derivierten Kategorie  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  aus dem ersten ausgezeichneten Dreieck bestimmt wird. Sie heißt die **Eulerklasse** unseres orientierten Sphärenbündels.  $\square$

**Beispiel 3.3.5 (Nocheinmal die Gysin-Sequenz).** Gegeben  $\pi : E \rightarrow X$  ein orientiertes Sphärenbündel einer Faserdimension  $n \geq 1$  zeigen wir wie zu Beginn des Beweises in 3.3.3, daß das ausgezeichnete Dreieck über der Einheit der derivierten Adjunktion  $(\pi^*, \pi_*)$  die Gestalt

$$\mathbb{Z}_X \rightarrow \pi_* \pi^* \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X[-n] \xrightarrow{[1]}$$

hat. Drücken wir es deriviert herunter unter der konstanten Abbildung  $c_X : X \rightarrow \text{top}$  und verwenden unsere Isotransformation  $c_{X_*} \pi_* \xrightarrow{\cong} c_{E_*}$  aus ??, so liefert es ein ausgezeichnetes Dreieck

$$c_{X_*} \mathbb{Z}_X \rightarrow c_{E_*} \mathbb{Z}_E \rightarrow c_{X_*} \mathbb{Z}_X[-n] \xrightarrow{[1]}$$

in  $\text{Der}(\text{Ab})$ . Wenn wir dazu die lange exakte Kohomologiesequenz bilden, steht unsere Gysinsequenz auch schon da.

**Satz 3.3.6.** *Der Rückzug unter der Einbettung der komplexen Diagonalmatrizen in die unitäre Gruppe  $T(n) \hookrightarrow U(n)$  induziert einen Isomorphismus*

$$H_{U(n)}^*(\text{top}) \xrightarrow{\cong} H_{T(n)}^*(\text{top})^{S_n}$$

*Beweis.* Den fraglichen Ringhomomorphismus hatten wir bereits in 3.3.14 hergeleitet und diskutiert. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T(n) & \longrightarrow & U(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(n; \mathbb{C}) & \longrightarrow & B(n; \mathbb{C}) \longrightarrow GL(n; \mathbb{C}) \end{array}$$

mit  $T(n; \mathbb{C})$  der Gruppe aller komplexen invertierbaren Diagonalmatrizen und  $B(n; \mathbb{C})$  der Gruppe aller komplexen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen und erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{T(n)}^*(\text{top}) & \longleftarrow & H_{U(n)}^*(\text{top}) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ H_{T(n; \mathbb{C})}^*(\text{top}) & \xleftarrow{\cong} & H_{B(n; \mathbb{C})}^*(\text{top}) \longleftarrow H_{GL(n; \mathbb{C})}^*(\text{top}) \end{array}$$

mit den Isomorphismen nach [TG] 7.2.5 für alle Einbettungen, bei denen der Quotient zusammenziehbar ist, was für  $U(n) \subset GL(n; \mathbb{C})$  etwa aus der Polarzerlegung folgt. Nun setzen wir  $B := B(n; \mathbb{C})$  und  $G := GL(n; \mathbb{C})$ . Nach dem im Anschluß bewiesenen Lemma 3.3.8 reicht es zu zeigen, daß  $H_B^*(\text{top})$  ein freier Modul vom Rang  $n!$  über  $H_G^*(\text{top})$  ist. Für die Milnor-Konstruktion  $E := EG$  ist nun

$$\pi : E/B \twoheadrightarrow E/G$$

ein Faserbündel mit der Fahnenmannigfaltigkeit  $G/B$  als Faser. Aus [LA2] 5.6.1 erinnern wir die Bruhat-Zerlegung

$$G/B = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB/B$$

in die  $B$ -Bahnen. Aus [TM] 2.4.25 folgt, daß jede  $B$ -Bahn offen ist in ihrem Abschluß. Da die Bahnen selbst nach [TM] 2.2.25 homöomorph sind zu  $\mathbb{C}^{l(w)}$  und da die Fahnenmannigfaltigkeit nach [TM] 2.3.10 kompakt ist, folgt mit der Lokalisierungssequenz der kompakten Kohomologie [TG] 4.8.15 unmittelbar

$$H^{2q}(G/B) \cong \bigoplus_{l(w)=q} \mathbb{Z}$$

und  $H^{2q+1}(G/B) = 0$  für alle  $q$ . Insbesondere ist  $H^*(G/B)$  in den geraden Graden konzentriert und seine totale Kohomologie ist frei über  $\mathbb{Z}$  vom Rang  $n!$ . Derivierter eigentlicher Basiswechsel [TG] 6.6.8 zeigt  $R^{2q+1}\pi_*\mathbb{Z}_{E/B} = 0$  für alle  $q$  und daß  $R^{2q}\pi_*\mathbb{Z}_{E/B}$  lokal isomorph ist zu  $\bigoplus_{l(w)=q} \mathbb{Z}_{E/G}$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, hat  $E/G$  nach dem Spezialfall [TF] 4.5.23 der langen exakten Homotopiesequenz triviale Fundamentalgruppe. Da  $E/G$  nach [TG] 7.3.5 auch lokal zusammenziehbar ist, ist  $E/G$  nach [TF] 3.1.19 überlagerungstrivial und jede lokal konstante Garbe darauf ist konstant. Das zeigt, daß  $R^{2q}\pi_*\mathbb{Z}_{E/B}$  sogar global isomorph ist zu  $\bigoplus_{l(w)=q} \mathbb{Z}_{E/G}$ . Da wir nach 3.3.12 bereits wissen, daß die ungerade Kohomologie von  $E/G$  verschwindet, liefert ?? einen unkanonischen Isomorphismus

$$\pi_*\mathbb{Z}_{E/B} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{w \in \mathcal{S}_n} [-2l(w)]\mathbb{Z}_{E/G}$$

in der derivierten Kategorie  $\text{Der}(\text{Ab}_{E/G})$ . So folgt unmittelbar, daß  $H^*(E/B)$  über  $H^*(E/G)$  ein freier Modul vom Rang  $n!$  ist.  $\square$

3.3.7. Ich hätte gerne, daß mir mal ein Student in einer Bachelorarbeit durchsortiert, bis auf welche Torsion das bei anderen Gruppen genauso geht. Es geht dabei in etwa darum, die Arbeit „Invariants des groupes de Weyl et torsion“ von Michel Demazure in die hier verwendete Sprache zu übersetzen.

**Lemma 3.3.8.** *Seien  $C$  ein kommutativer Integritätsbereich und  $W$  eine endliche Gruppe von Automorphismen von  $C$  und  $A \subset C^W$  ein Teilring des Invariantenrings derart, daß  $C$  als  $A$ -Modul von  $\leq |W|$  Elementen erzeugt wird. So gilt  $A = C^W$  und  $C$  ist frei über  $C^W$  vom Rang  $|W|$ .*

*Beweis.* Da wir jeden Bruch so erweitern können, daß sein Nenner  $W$ -invariant ist, ist jedes Erzeugendensystem des  $C^W$ -Moduls  $C$  auch ein Erzeugendensystem des  $\text{Quot}(C^W)$ -Vektorraums  $\text{Quot}(C)$  und wir haben  $\text{Quot}(C^W) \xrightarrow{\sim} (\text{Quot } C)^W$ , vergleiche [AL] 4.1.23. Nach unserem Satz [AL] 4.1.9 über Galoiserweiterungen durch Gruppenoperationen ist andererseits  $\text{Quot}(C)$  ein  $(\text{Quot } C)^W$ -Vektorraum der Dimension  $|W|$ . Hätten wir nun  $A \neq C^W$ , so wäre unser Erzeugendensystem von  $C$  über  $A$  ein linear abhängiges Erzeugendensystem von  $C$  als  $C^W$ -Modul und damit ein linear abhängiges Erzeugendensystem von  $\text{Quot}(C)$  als  $(\text{Quot } C)^W$ -Vektorraum. Das steht jedoch im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß dieser Vektorraum die Dimension  $|W|$  haben muß. So folgt  $A = C^W$ . In derselben Weise folgt, daß unser Erzeugendensystem frei gewesen sein muß und genau  $|W|$  Elemente hatte.  $\square$

**3.3.9 (Kohomologieringe der komplex projektiven Räume).** Die Kohomologiegruppen der komplex projektiven Räume kennen wir bereits aus [TG] 4.8.19. Hier berechnen wir nun ihren Kohomologiering. Wir betrachten dazu die Sphäre  $E = S^{2a+1} \subset \mathbb{C}^{a+1}$  und das  $S^1$ -Bündel  $\pi : S^{2a+1} \rightarrow \mathbb{P}^a\mathbb{C}$ . Es ist offensichtlich orientierbar und beide möglichen Wahlen einer Orientierung liefern uns eine Klasse  $c \in H^2(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$  derart, daß die Multiplikation mit dieser Klasse Isomorphismen

$$H^0(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} H^{2a}(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$$

induziert und ebenso Isomorphismen

$$0 = H^{-1}(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^a\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} H^{2a-1}(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$$

Insgesamt erhalten wir so einen Isomorphismus  $\mathbb{Z}[c]/\langle c^{a+1} \rangle \xrightarrow{\sim} H^*(\mathbb{P}^a\mathbb{C})$  mit  $c$  homogen vom Grad Zwei. Die beiden möglichen Wahlen der Orientierung führen dabei zu zwei Erzeugern, von denen der eine das Negative des anderen ist.

**Beispiel 3.3.10 (Kohomologie klassifizierender Räume: Kreisgruppe).** Sei  $E$  ein zusammenziehbarer oder auch nur schwach garbenazyklischer Raum mit einer topologisch freien Operation der Kreisgruppe  $S^1$ . So ist die Projektion  $E \rightarrow E/S^1$  ein orientierbares Sphärenbündel und jede Wahl einer Orientierung der Kreislinie  $S^1$  liefert eine damit verträgliche Orientierung unseres Sphärenbündels. Für die zugehörige Eulerklasse  $c \in H^2(E/S^1)$  liefert die Multiplikation mit  $c$  Isomorphismen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H^0(E/S^1) \xrightarrow{\sim} H^2(E/S^1) \xrightarrow{\sim} H^4(E/S^1) \xrightarrow{\sim} \dots$$

und ebenso Isomorphismen

$$0 = H^{-1}(E/S^1) \xrightarrow{\sim} H^1(E/S^1) \xrightarrow{\sim} H^3(E/S^1) \xrightarrow{\sim} \dots$$

Insgesamt erhalten wir so einen Isomorphismus  $\mathbb{Z}[c] \xrightarrow{\sim} H_{S^1}^*(\text{top})$  von graduierten Ringen mit  $c$  homogen vom Grad Zwei.

**Beispiel 3.3.11 (Kohomologie klassifizierender Räume: Spingruppe).** Sei  $E$  ein zusammenziehbarer oder auch nur schwach garbenazyklischer Raum mit einer topologisch freien Operation der Spingruppe  $SU(2)$ . Wir wissen aus [LA2] 1.11.25, daß diese Gruppe homöomorph ist zur Sphäre  $S^3$ . Dieselbe Argumentation wie für die Kreisgruppe liefert dann einen Isomorphismus  $\mathbb{Z}[d] \xrightarrow{\sim} H_{SU(2)}^*(\text{top})$  von graduierten Ringen mit  $d$  homogen vom Grad Vier und eindeutig bestimmt als eine Eulerklasse durch die Wahl einer Orientierung der Spingruppe.

**Satz 3.3.12 (Kohomologie klassifizierender Räume: unitäre Gruppen).** Die Kohomologie  $H_{U(n)}^*(\text{top})$  des klassifizierenden Raums der unitären Gruppe  $U(n)$  ist ein Polynomring in Erzeugern  $a_1, a_2, \dots, a_n$  mit  $\text{grad}(a_i) = 2i$ .

3.3.13. Wir stehen hier vor der Schwierigkeit, daß wir die graduierte Kommutativität des garbentheoretischen Kohomologierings erst in [TSF] 9.9.21 zeigen. Für den Kohomologiering des mit Hilfe der Milnor-Konstruktion konstruierten klassifizierenden Raums  $BG$  einer offenlokal zusammenziehbaren Gruppe  $G$  können wir diese graduierte Kommutativität aber bereits aus unseren Vergleichssätzen mit der singulären Kohomologie ?? unter Verwendung von [TG] 7.3.5 ableiten.

*Beweis.* Der Fall  $n = 0$  ist unproblematisch und wir nehmen  $n \geq 1$  an und behandeln den Fall  $n = 1$  der Kreisgruppe gleich nocheinmal mit. Wir bemerken zunächst, daß  $U(n-1)$  topologisch frei auf  $U(n)$  operiert, wenn wir es etwa durch  $A \mapsto \text{diag}(1, A)$  einbetten. Das ist leicht explizit zu sehen und gilt auch sehr viel allgemeiner für abgeschlossene Untergruppen von Liegruppen, wie etwa in [ML] 4.4.3 ausgeführt wird. Bezeichne nun  $E := EU(n)$  die Milnorkonstruktion. Dann ist  $E/U(n-1) \twoheadrightarrow E/U(n)$  eine Faserung mit Faser  $U(n)/U(n-1) \cong S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ . Man sieht leicht, daß sie orientierbar ist. Da die Basis dieser Faserung mit einer Induktion über  $n$  keine ungerade Kohomologie hat, folgern wir aus der Gysinsequenz, daß die Multiplikation mit der zugehörigen Eulerklasse  $a_n \in H^{2n}(E/U(n))$  und das Zurückholen für alle  $q$  kurze exakte Sequenzen

$$H^q(E/U(n)) \hookrightarrow H^{q+2n}(E/U(n)) \twoheadrightarrow H^{q+2n}(E/U(n-1))$$

liefern. Das zeigt die Behauptung. □



*Vorschau 3.3.14.* Auch die Künnethformeln sind in der Garbenkohomologie nicht so einfach zu haben und wir zeigen die hier benötigten Formeln rein garbenkohomologisch erst in [TSF] 3.2.6. Mit unseren Vergleichssätzen zur singulären Kohomologie liefern aber auch nach der Künnethformel [TS] 6.1.17 der singulären Kohomologie die Rückzüge [TG] 7.2.4 unter den Projektionen zusammen mit dem cup-Produkt für je zwei Liegruppen  $G, H$  derart, daß alle Kohomologiegruppen  $H^q(BG)$  der ersten freie endlich erzeugte abelsche Gruppen sind, einen Isomorphismus

$$H_G^*(\text{top}) \bar{\otimes} H_H^*(\text{top}) \xrightarrow{\sim} H_{G \times H}^*(\text{top})$$

Gegeben ein Torus  $T(n) := (S^1)^n$  folgt aus dem Fall  $n = 1$  nach 3.3.10 und unserer Vorbemerkung 3.3.13, daß für jede Wahl eines Erzeugers  $z \in H_{S^1}^2(\text{top})$  dessen Rückzüge unter den Projektionen unseres Produkts auf seine Faktoren Klassen  $z_1, \dots, z_n \in H_{T(n)}^2(\text{top})$  liefern mit

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] \xrightarrow{\sim} H_{T(n)}^*(\text{top})$$

Aus [TG] 7.2.17 folgt, daß das Zurückholen  $H_{U(n)}^*(\text{top}) \rightarrow H_{T(n)}^*(\text{top})$  unter der Einbettung  $T(n) \hookrightarrow U(n)$  als Diagonalmatrizen in den Invarianten unter der symmetrischen Gruppe landet. In 3.3.6 zeigen wir, daß diese Abbildung einen Isomorphismus

$$H_{U(n)}^*(\text{top}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n}$$

mit dem Ring der symmetrischen Polynome liefert.

### 3.4 Charakteristische Klassen und Produkte

3.4.1 (**Äquivariante Kohomologie als Trennfunktor**). Bezeichne  $\text{Topog}$  die Kategorie der topologischen Räume mit Operation einer topologischen Gruppe. Aus dem nicht-äquivarianten Fall 2.9.5 folgt unmittelbar, daß auch die äquivariante Kohomologie  $(G \backslash X) \mapsto H_G^*(X)$  aus [TG] 7.2.4 einen Trennfunktor

$$H^* : \wedge \text{Topog} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$$

liefert, dessen Effekt auf Trennungen durch das „Produkt der Rückzüge“ gegeben wird.

3.4.2 (**Charakteristischer Homomorphismus**). Gegeben  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein topologischer Raum und  $E$  ein  $G$ -Torsor auf  $X$  erinnere ich daran, wie wir in [TG] 7.2.8 den charakteristischen Homomorphismus

$$C_E : H_G^*(\text{top}) \rightarrow H^*(X)$$

erklärt hatten als die Komposition  $H_G^*(\text{top}) \rightarrow H_G^*(E) \xrightarrow{\sim} H^*(X)$  des äquivarianten Zurückholens längs der konstanten Abbildung mit dem Inversen des Quotientenisomorphismus  $H^*(X) \xrightarrow{\sim} H_G^*(E)$ .

3.4.3 (**Charakteristische Klassen und Produkt**). Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und topologische Gruppen  $G, H$  und auf  $X$  ein  $G$ -Torsor  $E$  sowie ein  $H$ -Torsor  $F$  ist  $E \times_X F$  ein  $(G \times H)$ -Torsor in offensichtlicher Weise und wir erhalten in Topog ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 G \setminus \text{top} & \leftarrow & G \setminus E & \rightarrow & 1 \setminus X \\
 \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 (G \times H) \setminus \text{top} & \leftarrow & (G \times H) \setminus (E \times_X F) & \rightarrow & 1 \setminus X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 H \setminus \text{top} & \leftarrow & H \setminus F & \rightarrow & 1 \setminus X
 \end{array}$$

Wenden wir darauf äquivariante Kohomologie an, so folgt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 H_G^*(\text{top}) \bar{\otimes} H_H^*(\text{top}) & \rightarrow & H^*(X) \bar{\otimes} H^*(X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{G \times H}^*(\text{top}) & \rightarrow & H^*(X)
 \end{array}$$

mit den durch Rückzug und Produkt gegebenen Vertikalen und den durch unsere charakteristischen Homomorphismen gegebenen Horizontalen. In Formeln ausgedrückt gilt also  $C_E(a)C_F(b) = C_{E \times F}(a \times b)$  mit der Notation  $a \times b := \text{pr}_1^*(a) \text{pr}_2^*(b)$  für den Effekt der linken Vertikale.

3.4.4 (**Kohomologieringe klassifizierender Räume und Produkte**). Jede Liegruppe  $G$  ist offenlokal zusammenziehbar und dasselbe folgt mit [TG] 7.3.5 für die Milnorkonstruktion  $EG$  und den klassifizierenden Raum  $BG$ . Gegeben Liegruppen  $G, H$  derart, daß alle Kohomologiegruppen  $H^q(BG)$  der ersten freie endlich erzeugte abelsche Gruppen sind, liefert das Kreuzprodukt der Kohomologie nach der Künnethformel 3.2.6 also einen Isomorphismus

$$H_G^*(\text{top}) \bar{\otimes} H_H^*(\text{top}) \xrightarrow{\sim} H_{G \times H}^*(\text{top})$$

3.4.5 (**Chern'sche Klassen**). Gegeben ein Torus  $T(n) := (S^1)^n$  liefern nach 3.4.4 für jede Wahl eines Erzeugers  $z \in H_{S^1}^2(\text{top})$  dessen Rückzüge unter den Projektionen unseres Torus auf seine Faktoren Klassen  $z_1, \dots, z_n \in H_{T(n)}^2(\text{top})$  mit

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] \xrightarrow{\sim} H_{T(n)}^*(\text{top})$$

Nach [TD] ?? liefert weiter der Rückzug unter der Einbettung  $T(n) \hookrightarrow U(n)$  der Diagonalmatrizen in die unitären Matrizen einen Isomorphismus  $H_{U(n)}^*(\text{top}) \xrightarrow{\sim} H_{T(n)}^*(\text{top})^{\mathcal{S}^n}$ . Insgesamt erhalten wir so einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{\mathcal{S}^n} \xrightarrow{\sim} H_{U(n)}^*(\text{top})$$

Ebenso erhalten wir auch für die entsprechenden komplexen Gruppen Isomorphismen  $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] \xrightarrow{\sim} H_{T(n; \mathbb{C})}^*(\text{top})$  und

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n} \xrightarrow{\sim} H_{GL(n; \mathbb{C})}^*(\text{top})$$

Nach [AL] 2.9.6 haben wir nun  $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[s_1, s_2, \dots, s_n]$  für  $s_q$  das  $q$ -te elementarsymmetrische Polynom in den  $z_i$ . Dies Polynom  $s_q$  ist homogen vom Grad  $q$  in den  $z_i$  und bereits sein Bild  $c_q \in H_{GL(n; \mathbb{C})}^*(\text{top})$  unter dem obigen Isomorphismus heißt manchmal die  **$q$ -te Chern'sche Klasse**. Gegeben ein  $GL(n; \mathbb{C})$ -Hauptfaserbündel  $E$  auf einem Raum  $X$  erklärt man dann seine  **$q$ -te Chern'sche Klasse** durch die Vorschrift

$$c_q(E) := C_E(c_q) \in H^{2q}(X)$$

für  $C_E : H_{GL(n; \mathbb{C})}^*(\text{top}) \rightarrow H^*(X)$  den charakteristischen Homomorphismus. Die Chern'schen Klassen eines komplexen Vektorbündels  $V$  werden schließlich erklärt als  $c_q(V) := c_q(E)$  mit  $E = E_V$  dem zugehörigen  $GL(n; \mathbb{C})$ -Torsor alias dem Rahmenbündel von  $V$  aus [?] ??.

3.4.6. Gegeben ein  $n$ -dimensionales komplexes Vektorbündel  $V$  auf einem Raum  $X$  vereinbaren wir  $c_0(V) := 1$  und erklären die **totale Chern'sche Klasse**  $c_*(V) \in H^*(X)$  von  $V$  durch die Vorschrift

$$c_*(V) := c_0(V) + c_1(V) + c_2(V) + \dots + c_n(V) \in H^*(X)$$

**Lemma 3.4.7.** *Für die totale Chern'schen Klasse der direkten Summe von zwei komplexen Vektorbündeln gilt im Kohomologiering der Basis die **Whitney'sche Summenformel***

$$c_*(V \oplus W) = c_*(V)c_*(W)$$

*Beweis.* Die elementarsymmetrischen Polynome  $s_q \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n}$  können charakterisiert werden durch die Identität

$$(1 + z_1)(1 + z_2) \dots (1 + z_n) = 1 + s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

zusammen mit der Eigenschaft, daß  $s_q$  homogen ist vom Grad  $q$ . Erklären wir unseren Ausdruck als das „totale symmetrische Polynom“  $s_*(z_1, \dots, z_n)$ , so gilt für  $l + m = n$  mithin  $s_*(z_1, \dots, z_n) = s_*(z_1, \dots, z_l)s_*(z_{l+1}, \dots, z_n)$ . Sei nun  $X$  die Basis unserer Bündel. Bezeichnet  $D$  das Rahmenbündel von  $V \oplus W$ , so haben wir per definitionem  $s_*(z_1, \dots, z_n) \mapsto c_*(V \oplus W)$  unter der Komposition

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n} \xrightarrow{\sim} H_{GL(n; \mathbb{C})}^*(\text{top}) \xrightarrow{C_D} H^*(X)$$

Jetzt betrachten wir für  $l + m = n$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 T(l; \mathbb{C}) & \longrightarrow & GL(l; \mathbb{C}) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 T(l; \mathbb{C}) \times T(m; \mathbb{C}) & \longrightarrow & GL(l; \mathbb{C}) \times GL(m; \mathbb{C}) \\
 \downarrow & & \downarrow \phi \\
 T(n; \mathbb{C}) & \longrightarrow & GL(n; \mathbb{C})
 \end{array}$$

mit den jeweiligen Projektionen als Pfeile nach oben und dem „Zusammenblocken“  $\phi : (A, B) \mapsto \text{diag}(A, B)$  als Pfeile nach unten. Zusätzlich betrachten noch einmal dasselbe Diagramm mit  $m$  statt  $l$  in der oberen Horizontale. Gehen wir zu den Kohomologierungen der jeweiligen klassifizierenden Räume über, so ergibt sich ein weiteres kommutatives Diagramm, das mit unseren ausgezeichneten Isomorphismen isomorph wird zum Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_l] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_l]^{S_l} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_l] \otimes \mathbb{Z}[w_1, \dots, w_m] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_l]^{S_l} \otimes \mathbb{Z}[w_1, \dots, w_m]^{S_m} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n}
 \end{array}$$

mit der Umbenennung von  $z_{l+1}, \dots, z_n$  zu  $w_1, \dots, w_m$  bei beiden Pfeilen nach oben. Im analogen Fall mit  $m$  statt  $l$  gilt Analoges. Sind nun  $E, F$  die Rahmenbündel von  $V, W$ , so haben wir offensichtlich  $D \cong \phi_*(E \times F)$  und damit

$$\begin{aligned}
 c_*(V \oplus W) &= C_D(s_*(z_1, \dots, z_n)) && \text{per definitionem} \\
 &= C_{\phi_*(E \times F)}(s_*(z_1, \dots, z_l) s_*(z_{l+1}, \dots, z_n)) && \text{nach vorigem} \\
 &= C_{E \times F}(s_*(z_1, \dots, z_l) \times s_*(w_1, \dots, w_m)) && \text{nach [TG] 7.2.10} \\
 &= C_E(s_*(z_1, \dots, z_l)) C_F(s_*(w_1, \dots, w_m)) && \text{nach 3.4.3} \\
 &= c_*(V) c_*(W) && \text{per definitionem.}
 \end{aligned}$$

□

**Vorschau 3.4.8 (Stiefel-Whitney-Klassen).** Nun arbeiten wir mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und mit reellen Gruppen. Dann liefert explizite Rechnung einen Isomorphismus  $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\sim} H_{T(n; \mathbb{R})}^*(\text{top}; \mathbb{F}_2)$  mit Variablen vom Grad Eins und Rückzug liefert wieder  $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]^{S_n} \xrightarrow{\sim} H_{GL(n; \mathbb{R})}^*(\text{top}; \mathbb{F}_2)$ , da dieselbe Argumentation wie zuvor zeigt, daß sich zwischendrin homologisch nichts wegkürzen kann, sonst bräuhete  $H_{T(n; \mathbb{R})}^*(\text{top}; \mathbb{F}_2)$  als Modul über  $H_{GL(n; \mathbb{R})}^*(\text{top}; \mathbb{F}_2)$  zu

viele Erzeuger. Dann wiederholt man alle Argumente. Das Bild des  $q$ -ten elementarsymmetrischen Polynoms  $s_q$  in  $H_{GL(n;\mathbb{R})}^q(\text{top}; \mathbb{F}_2)$  heißt in diesem Fall die  **$q$ -te Stiefel-Whitney-Klasse**. Ebenso kann man im Fall  $GL(n; \mathbb{H})$  vorgehen, in dem wir die sogenannten **Pontrjagin-Klassen** mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten in allen durch Vier teilbaren Graden erhalten.

## 4 Trennrückzug und Schreivorschub

### 4.1 Lokal eigentlicher Basiswechsel

4.1.1. Ich erinnere an die Schreikofaserung aus [TG] 6.4.9. Wir hatten sie eingeführt als eine Kofaserung

$$\text{Ab}_{\text{Top}^s}^i \rightarrow \text{Top}^s$$

über der Kategorie  $\text{Top}^s$  der topologischen Räume mit nur separierten Abbildungen als Morphismen. Ihre Fasern waren die Opponierten der Kategorien abelscher Garben auf den jeweiligen Räumen und Morphismen in  $\text{Ab}_{\text{Top}^s}^i$  waren unsere eigentlichen Opkomorphismen alias Schreimorphismen aus [TG] 6.4.4. Im folgenden führen wir „lokal eigentliche separierte Abbildungen“ oder kurz „les-Abbildungen“ zwischen topologischen Räumen ein und zeigen dann in 4.4.13, daß der „Trennrückzug“ unter einer beliebigen Trennung topologischer Räume Tupel schreikokartesischer Schreimorphismen von flachen Garben über les-Abbildungen zu einem schreikokartesischen Schreimorphismus von flachen Garben über einer les-Abbildung macht. Der Beweis dieser Aussage bildet den Schlußpunkt unserer Diskussion des underivierten Drei-Funktoren-Kalküls. Die Allgemeinheit geht in Richtung von Grothendieck's Desiderata nach [Gro86, 1.5.2, Note 81<sub>2</sub>]. In [RV04] wird das Konzept einer lokal eigentlichen Abbildung unter einer anderen Bezeichnung eingeführt.

**Definition 4.1.2.** Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  topologischer Räume heiße **lokal eigentlich**, wenn es für jeden Punkt  $x \in X$  und jede Umgebung  $U$  von  $x$  Umgebungen  $A \subset U$  von  $x$  und  $V \subset Y$  von  $f(x)$  gibt derart, daß gilt  $f(A) \subset V$  und daß  $f : A \rightarrow V$  eigentlich ist.

*Vorschau* 4.1.3. Sie dürfen als Übung 4.1.20 zeigen, daß jede Verknüpfung von lokal eigentlichen Abbildungen lokal eigentlich ist.

*Beispiele* 4.1.4. Eine Einbettung  $i : X \hookrightarrow Y$  von topologischen Räumen ist lokal eigentlich genau dann, wenn ihr Bild lokal abgeschlossen ist. Jede étale Abbildung ist lokal eigentlich. Die konstante Abbildung von einem Raum auf einen Punkt ist lokal eigentlich genau dann, wenn der fragliche Raum lokal kompakt ist.

**Lemma 4.1.5.** *Jede eigentliche und separierte Abbildung ist lokal eigentlich.*

4.1.6. Das ist das relative Analogon der Tatsache, daß jeder kompakte Hausdorffraum lokal kompakt ist. Eine beliebige eigentliche Abbildung muß keineswegs lokal eigentlich sein, selbst wenn sie konstant ist.

4.1.7. Wir schicken dem Beweis eine Vorbemerkung voraus. Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Gegeben  $Z \subset X$  mit  $f : Z \rightarrow Y$  eigentlich und  $U \Subset X$  ist  $\{y \in Y \mid (f^{-1}(y) \cap Z) \subset U\}$  offen in  $Y$ , denn für  $K \Subset X$  das Komplement von  $U$  ist das Komplement unserer Menge genau  $f(Z \cap K)$ .

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  unsere eigentliche und separierte Abbildung. Gegeben  $x \in X$  mit einer offenen Umgebung  $U \Subset X$  betrachten wir  $Z := X \setminus U$ . Wir setzen  $y := f(x)$ . Für jeden Punkt  $z \in f^{-1}(y) \cap Z$  gibt es eine offene Umgebung  $W_z \Subset X$  von  $z$  und eine offene Umgebung  $B_z \Subset U$  von  $x$  mit  $W_z \cap B_z = \emptyset$ . Endlich viele solche  $W_z$  überdecken das Kompaktum  $f^{-1}(y) \cap Z$ . Ist  $W$  ihre Vereinigung und  $B$  der Schnitt der zugehörigen  $B_z$ , so gilt  $x \in B \Subset U \Subset X$ ,  $(f^{-1}(y) \cap Z) \subset W \Subset X$  und  $B \cap W = \emptyset$ . Nach 4.1.7 finden wir eine offene Umgebung  $V \Subset Y$  von  $y$  mit  $(f^{-1}(V) \cap Z) \subset W$ . Der Abschluß  $A$  von  $B \cap f^{-1}(V)$  in  $f^{-1}(V)$  trifft also  $f^{-1}(V) \cap Z$  nicht und ist folglich eine in  $U$  enthaltene Umgebung von  $x$  derart, daß  $f : A \rightarrow V$  eigentlich ist.  $\square$

**Lemma 4.1.8.** *Seien  $g : Z \rightarrow X$  und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $f \circ g$  lokal eigentlich und  $f$  separiert, so ist bereits  $g$  lokal eigentlich.*

*Beweis.* Sei  $W \subset Z$  eine Umgebung von  $z \in Z$ . Ist  $f \circ g$  lokal eigentlich, so gibt es Umgebungen  $A \subset W$  von  $z$  und  $V$  von  $f(g(z))$  derart, daß  $f \circ g$  eine eigentliche Abbildung  $A \rightarrow V$  induziert. Diese Abbildung faktorisiert als

$$A \xrightarrow{\check{g}} f^{-1}(V) \xrightarrow{\check{f}} V$$

mit  $\check{g}$  und  $\check{f}$  jeweils den von  $g$  und  $f$  induzierten Abbildungen. Da  $\check{f}$  nach [TM] 2.4.10 separiert ist, zeigt [TM] 2.4.11, daß  $\check{g} : A \rightarrow f^{-1}(V)$  eigentlich ist. Das zeigt, daß  $g$  lokal eigentlich ist.  $\square$

4.1.9. Im folgenden werden lokal eigentliche separierte Abbildungen oft vorkommen. Wir nennen sie abkürzend **les-Abbildungen** oder als Eigenschaft **les**.

**Korollar 4.1.10.** *Jede stetige Abbildung  $g : Z \rightarrow X$  von einem lokal kompakten Hausdorffraum  $Z$  in einen Hausdorffraum  $X$  ist eine les-Abbildung.*

*Beweis.* Da  $Z$  lokal kompakt ist und  $X$  Hausdorff, muß  $g$  lokal eigentlich sein nach 4.1.8. Da  $Z$  Hausdorff ist, ist  $g$  separiert.  $\square$

**Lemma 4.1.11 (Lokale Eigentlichkeit ist stabil unter Basiswechsel).** *Ist in einem kartesischen Diagramm einer der ursprünglichen Pfeile lokal eigentlich, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.*

*Beweis.* Wir schreiben unser kartesisches Diagramm aus als

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

Wir nehmen  $f$  lokal eigentlich an und wollen dasselbe für  $g$  zeigen. Sei also  $t \in T$  gegeben mit einer Umgebung  $S \subset T$ . Wir können, indem wir  $S$  notfalls verkleinern, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es eine Umgebung  $V \subset X$  von  $q(t)$  und eine Umgebung  $W \subset Z$  von  $g(t)$  gibt derart, daß gilt  $g(S) \subset W$  und  $q(S) \subset V$  und daß auch das Diagramm von Teilräumen

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{q} & V \\ g \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

kartesisch ist. Dann finden wir eine Umgebung  $A \subset V$  von  $q(t)$  und eine Umgebung  $U \subset Y$  von  $f(q(t))$  derart, daß  $f : A \rightarrow U$  eigentlich ist. Dasselbe folgt für den durch Basiswechsel entstehenden Morphismus  $g : q^{-1}(A) \rightarrow p^{-1}(U)$ .  $\square$

**Satz 4.1.12 (Vereigentlichung).** Für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gilt:

1. Die Mengen  $U \sqcup V$  mit  $U \Subset X$  und  $V \Subset Y$  und  $f : f^{-1}(V) \setminus U \rightarrow V$  eigentlich bilden eine Topologie auf der disjunkten Vereinigung  $X \sqcup Y$ ;
2. Die Abbildung  $\bar{f} := (f, \text{id}_Y) : X \sqcup Y \rightarrow Y$  ist eigentlich in Bezug auf diese Topologie.

4.1.13. Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  notieren wir  $X \sqcup Y$  mit seiner Topologie aus dem Satz  $X \sqcup_f Y$  oder abkürzend  $X \sqcup Y$  und nennen  $\bar{f} : X \sqcup Y \rightarrow Y$  die **Vereigentlichung von  $f$** . Ist  $Y$  ein Punkt, so spezialisiert unsere Vereigentlichung zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Ist  $f$  eine abgeschlossene Einbettung, so spezialisiert unsere Vereigentlichung zum Koproduct  $X \sqcup Y$  der beteiligten Räume. Offensichtlich ist die Einbettung von  $X$  nach  $X \sqcup Y$  eine offene Einbettung und die Einbettung von  $Y$  nach  $X \sqcup Y$  eine abgeschlossene Einbettung.

*Beweis.* 1. Sei eine Familie  $(U_i \sqcup V_i)_{i \in I}$  solcher Mengen gegeben. So ist  $U := \bigcup U_i$  offen in  $X$  und  $f : f^{-1}(V_i) \setminus U \rightarrow V_i$  ist eigentlich als Verknüpfung der abgeschlossenen Einbettung  $f^{-1}(V_i) \setminus U \rightarrow f^{-1}(V_i) \setminus U_i$  mit der eigentlichen Abbildung  $f : f^{-1}(V_i) \setminus U_i \rightarrow V_i$ . Da Eigentlichkeit lokal ist in der Basis, ist dann für  $V := \bigcup V_i$  auch  $f : f^{-1}(V) \setminus U \rightarrow V$  eigentlich. Seien andererseits  $(U_1 \sqcup V_1)$  und  $(U_2 \sqcup V_2)$  gegeben. Mit  $f^{-1}(V_1) \setminus U_1 \rightarrow V_1$  ist auch  $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2) \setminus U_1 \rightarrow V_1 \cap V_2$  eigentlich als Basiswechsel einer eigentlichen Abbildung. Dasselbe gilt für  $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2) \setminus U_2 \rightarrow V_1 \cap V_2$  und mit [TM] 2.4.18 folgt die Eigentlichkeit von  $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2) \setminus (U_1 \cap U_2) \rightarrow V_1 \cap V_2$ .

2. Offensichtlich ist  $\bar{f} := (f, \text{id}_Y) : X \sqcup_f Y \rightarrow Y$  stetig. Diese Abbildung ist sogar abgeschlossen, denn wir haben

$$\bar{f}(X \sqcup_f Y \setminus U \sqcup V) = Y \setminus V \cup f(X \setminus U) = Y \setminus V \cup f(f^{-1}(V) \setminus U)$$



Gegeben ein weiterer topologischer Raum  $Z$  zeigen wir nun, daß die offensichtliche Bijektion eine stetige Abbildung

$$(X \times Z) \sqcup (Y \times Z) \rightarrow (X \sqcup Y) \times Z$$

ist. In der Tat, gegeben  $U \sqcup V \subseteq X \sqcup Y$  und  $W \subseteq Z$  gilt es zu zeigen  $(f \times \text{id}_Z) : f^{-1}(V \times W) \cup (U \times W) \rightarrow V \times W$  eigentlich. Das aber folgt aus der Eigentlichkeit von  $f : f^{-1}(V) \cup U \rightarrow V$  durch Basiswechsel. Um nun zu zeigen, daß  $\bar{f}$  eigentlich ist, betrachten wir für einen weiteren Raum  $Z$  die Komposition

$$(X \sqcup Y) \times Z \rightarrow (X \times Z) \sqcup (Y \times Z) \rightarrow Y \times Z$$

und müssen nur bemerken, daß die erste dieser Abbildungen abgeschlossen ist als Inverse unserer stetigen Bijektion, die wir gerade hergeleitet hatten, und daß die zweite abgeschlossen ist nach unserer Vorüberlegung vom Beginn des Beweises des zweiten Teils.  $\square$

**Satz 4.1.14.** *Die Vereigentlichung einer les-Abbildung ist stets separiert.*

4.1.15. Das ist ein relatives Analogon der Tatsache, daß die Einpunktkompaktifizierung eines lokal kompakten Hausdorffraums stets Hausdorff ist.

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  unsere les-Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß  $\bar{f} : X \sqcup Y \rightarrow Y$  separiert ist, daß also je zwei verschiedene Punkte aus ein- und derselben Faser disjunkte Umgebungen haben. Der einzig nichttriviale Fall betrifft Punkte  $\text{in}_X(x), \text{in}_Y(y)$  mit  $f(x) = y$ . Nach Annahme gibt es eine offene Umgebung  $V \subseteq Y$  von  $y$  und eine Umgebung  $A \subset X$  von  $x$  mit  $f(A) \subset V$  und  $f : A \rightarrow V$  eigentlich. Dann ist die Verknüpfung  $A \rightarrow f^{-1}(V) \rightarrow V$  eigentlich. Da  $f^{-1}(V) \rightarrow V$  separiert ist, muß auch  $A \rightarrow f^{-1}(V)$  eigentlich sein und wir finden  $A \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ . Bilden wir also  $U := f^{-1}(V) \setminus A$ , so ist  $U \sqcup V$  eine Umgebung von  $\text{in}_Y(y)$  in  $X \sqcup Y$  und disjunkt zur Umgebung  $\text{in}_X(A)$  von  $\text{in}_X(x)$ .  $\square$

**Satz 4.1.16 (Les-Basiswechsel).** *Seien  $pg = fq$  ein kartesisches Quadrat von topologischen Räumen mit les-Vertikalen  $f, g$  und  $\tilde{p}\tilde{g} = \tilde{f}\tilde{q}$  darüber ein kommutatives Diagramm von Opkomorphismen abelscher Garben mit  $\tilde{p}, \tilde{q}$  kartesisch. Ist dann  $\tilde{f}$  schreikokartesisch, so auch  $\tilde{g}$ .*

4.1.17. In anderen Worten besagt unser Satz, daß die vom Basiswechsel [TG] 6.3.11 der Garbenopfaserung für Funktoren zwischen nichttopponierten Kategorien von Garben induzierte Transformation  $p^*f_* \Rightarrow g_*q^*$  unter den genannten Voraussetzungen Isomorphismen  $p^*f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} g_*q^*\mathcal{F}$  auf den jeweiligen Unterobjekten induziert, also eine Isotransformation

$$p^*f_* \xrightarrow{\sim} g_*q^*$$

*Beweis.* Nach 4.1.14 und 4.1.20 ist eine stetige Abbildung genau dann les, wenn sie sich als Verknüpfung einer offenen Einbettung gefolgt von einer separierten eigentlichen Abbildung schreiben läßt. Nach der Kofaserungseigenschaft eigentlicher Vorschübe im Fall separierter Abbildungen [TG] 6.4.9 reicht es also, unsere Aussage für  $f$  separiert eigentlich und für  $f$  eine offene Einbettung zu zeigen. Im ersten Fall ist das eigentlicher Basiswechsel [TG] 6.3.24. Im zweiten Fall der Ausdehnung durch Null ist die Behauptung auch schnell geprüft.  $\square$

4.1.18 (**Schreibvorschub von Modulgarben**). Gegeben ein Morphismus von geringten Räumen  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  nennen wir einen Komorphismus von Modulgarben **eigentlich**, wenn der zugrundeliegende Komorphismus von abelschen Garben eigentlich ist im Sinne von [TG] 6.4.1. Nach [TG] 6.4.2 ist über einem topologisch eigentlichen Morphismus jeder Komorphismus von Modulgarben eigentlich. Nach [TG] 6.4.3 ist die Verknüpfung eigentlicher Komorphismen von Modulgarben stets wieder eigentlich. Wir notieren die Menge aller eigentlichen Opmorphismen alias Schreimorphismen von Modulgarben über einem Morphismus  $f$  von geringten Räumen wie im Fall abelscher Garben  $\text{Ab}_{//f}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ . Die Konstruktion schreikokartesischer Schreimorphismen [TG] 6.4.5 liefert offensichtlich auch einen Schreibvorschub für Modulgarben und in Verallgemeinerung von [TG] 6.4.9 restringiert unser Funktor  $\text{Ab}_{//\text{Ger}}^i \rightarrow \text{Ger}$  zu einer Kofaserung

$$\text{Ab}_{//\text{Ger}^s}^i \rightarrow \text{Ger}^s$$

über der Kategorie  $\text{Ger}^s \subset \text{Ger}$  der geringten Räume mit topologisch separierten Morphismen. Wir nennen sie die **Schreikofaserung der Modulgarben**. Ihre Vorschübe sind unsere Schreibvorschübe  $f_i = (f_i)^{\text{opp}}$  aus [TG] 6.4.5. Im Fall einer offenen Einbettung  $j$  ist  $j_i$  die Ausdehnung durch Null von Modulgarben.

## Übungen

*Übung 4.1.19.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Besitzt  $X$  eine Überdeckung durch offene Teilmengen  $U$  derart, daß die Restriktionen  $f : U \rightarrow Y$  jeweils lokal eigentlich sind, so ist auch  $f$  selbst bereits lokal eigentlich.

*Übung 4.1.20.* Jede Verknüpfung von lokal eigentlichen Abbildungen ist lokal eigentlich. Eine stetige Abbildung ist genau dann les, wenn sie sich als Verknüpfung einer offenen Einbettung gefolgt von einer separierten eigentlichen Abbildung darstellen läßt.

## 4.2 Kompakte Schnitte und Kolimites

**Lemma 4.2.1 (Filtrierende Kolimites und kompakte Schnitte).** *Das Bilden der Schnitte mit kompaktem Träger für abelsche Garben auf einem lokal kompakten*

*Hausdorffraum vertauscht mit filtrierenden Kolimites von abelschen Garben, in Formeln*

$$\text{colf}(\Gamma_! \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(\text{colf} \mathcal{F}_i)$$

*Beispiel 4.2.2.* Gegeben  $K \subset X$  kompakt notieren wir  $\Gamma_K(X; \mathcal{F})$  die Menge der globalen Schnitte  $s \in \Gamma(X; \mathcal{F})$  mit Träger  $\text{supp}(s) \subset K$ . Der Funktor  $\Gamma_K$  vertauscht auch auf lokal kompakten Hausdorffräumen keineswegs mit filtrierenden Kolimites. Als Gegenbeispiel mag man den direkten Limes der  $a_{i*} \mathbb{Z}_{[0,1/i]}$  betrachten für  $a_i : [0, 1/i] \hookrightarrow \mathbb{R}$  die Einbettungen und die offensichtlichen Epimorphismen von abelschen Garben als Systemmorphisimen dieses mit  $i \in \mathbb{N}_{>0}$  indizierten Systems.

*Beispiel 4.2.3.* Ist  $X$  ein unendlicher diskreter Raum, so ist der Raum der globalen Schnitte des Koprodukts aller Wolkenkratzergarben  $\mathbb{Z}_{(x)}$  für  $x \in X$  größer als das Koproduct der Räume der globalen Schnitte der Summanden und ist vielmehr ihr Produkt. Der Funktor der globalen Schnitte vertauscht mithin auch auf lokal kompakten Hausdorffräumen keineswegs mit filtrierenden Kolimites.

*Beweis.* Die Injektivität benötigt keinerlei Annahmen und war auch bereits Übung [TG] 4.8.20. Wir führen das Argument nocheinmal aus. Sicher ist der Kolimes eines Systems von abelschen Garben die Garbifizierung des Kolimes in der Kategorie der abelschen Prägarben. Um im Lemma die Injektivität zu zeigen, beginnen wir mit einem Schnitt  $s \in \Gamma_!(X; \mathcal{F}_i)$  für ein vorgegebenes  $i \in I$ . Geht er rechts nach Null, so gibt es für jeden Punkt  $x \in X$  nach der Transitivität von Kolimites [TS] 7.1.34 eine offene Umgebung  $U(x)$  und einen Index  $i(x)$  mit  $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}_{i(x)}(U(x))$ . Endlich viele  $U(x)$  überdecken  $\text{supp}(s)$ , ein  $i$  wird erreicht von allen beteiligten  $i(x)$ , und dann gilt offensichtlich  $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}_i(X)$ . Das zeigt die Injektivität. Um die Surjektivität zu zeigen, ziehen wir uns zunächst auf den Fall  $X$  kompakt zurück. Sei dazu ein Schnitt  $s \in \Gamma_!(X; \text{colf} \mathcal{F}_i)$  gegeben. Wir finden  $U \subset X$  offen mit kompaktem Abschluß und  $\text{supp}(s) \subset U$ . Finden wir ein  $j$  und ein  $\tilde{s} \in \Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}_j)$  mit  $\tilde{s} \mapsto s|_{\bar{U}}$ , so folgt unmittelbar  $\tilde{s}|_{\partial \bar{U}} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial \bar{U}; \text{colf} \mathcal{F}_i)$  und nach dem bereits bewiesenen  $\tilde{s}|_{\partial \bar{U}} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial \bar{U}; \mathcal{F}_l)$  für geeignetes  $l \geq j$ . Also läßt sich das Bild  $\hat{s} \in \Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}_l)$  von  $\tilde{s}$  durch Null fortsetzen zu einem Schnitt  $\hat{s} \in \Gamma_!(X; \mathcal{F}_l)$  mit  $\hat{s} \mapsto s$ , und das war gerade zu zeigen. Wir dürfen also  $X$  kompakt annehmen. Gegeben ein Schnitt  $s \in \Gamma(X; \text{colf} \mathcal{F}_i)$  gibt es für jeden Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U(x)$  und einen Index  $i(x)$  und einen Schnitt  $\tilde{s}(x) \in \mathcal{F}_{i(x)}(U(x))$  mit  $s(x) \mapsto s|_{U(x)}$ . Wir dürfen unsere  $U(x)$  kompakt annehmen. Weiter gibt es  $E \subset X$  endlich derart, daß die  $U(x)$  mit  $x \in E$  bereits  $X$  überdecken. Wählen wir  $j$  hinreichend groß, so können wir nach der bereits bewiesenen Injektivität annehmen, daß für alle  $x, y \in E$  die Bilder von  $\tilde{s}(x)$  und  $\tilde{s}(y)$  in  $\mathcal{F}_j(U(x) \cap U(y))$  übereinstimmen. Dann aber verkleben sie zu einem globalen Schnitt und der repräsentiert das gesuchte Urbild unseres Schnittes  $s$ .  $\square$

**Lemma 4.2.4.** *Der Schreivorschub von abelschen Garben unter les-Abbildungen und allgemeiner von Modulgarben unter les-Morphismen vertauscht mit filtrierenden Kolimites.*

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  les. Wir behaupten, daß für jedes gerichtete System von abelschen Garben auf  $Y$  die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\text{colf}(f_! \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} f_!(\text{colf } \mathcal{F}_i)$$

liefert. Da das Zurückholen mit Kolimites vertauscht, können wir uns mit Basiswechsel 4.1.16 auf den Fall eines einpunktigen Raums  $Y$  zurückziehen und müssen also nur für jeden lokal kompakten Hausdorffraum zeigen, daß das Bilden der Schnitte mit kompaktem Träger mit filtrierenden Kolimites vertauscht. Das aber wissen wir aus 4.2.1. Der Fall der Modulgarben folgt, da das Vergessen der Modulstrukturen mit Kolimites und Schreivorschub vertauscht.  $\square$

**4.2.5 (Koproduct als Schreivorschub).** Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten von  $\text{Ab}/_X$  und versehen wir die Indexmenge  $I$  mit der diskreten Topologie und sind  $\text{em}_i : X \rightarrow X \times I$  die Einbettungen und ist ein Objekt  $\mathcal{G} \in \text{Ab}/_{X \times I}$  gegeben zusammen mit Isomorphismen  $\text{em}_i^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$ , so liefern diese Isomorphismen zusammen nach [TG] 4.9.21 einen Isomorphismus  $\bigoplus_{i \in I} \text{em}_{i!} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$  und der Schreivorschub unter der Projektion auf  $X$  liefert nach 4.2.4 einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{X!} \mathcal{G}$$

Dasselbe gilt für Modulgarben auf einem geringten Raum  $X = (X, \mathcal{A})$ .

**Lemma 4.2.6 (Filtrierende Kolimites kompaktweicher Garben).** *Auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  ist jeder filtrierende Kolimes kompaktweicher Garben wieder kompaktweich.*

*Beweis.* Sei  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  ein filtrierendes System kompaktweicher Garben auf  $X$ . Kolimites vertauschen nach [TS] 7.1.30 mit dem Rückzug von Garben, da dieser Rückzug einen Rechtsadjungierten hat. Ist  $u : K \hookrightarrow X$  die Einbettung einer kompakten Teilmenge, so ist mithin der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus  $\text{colf } u^{(*)} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} u^{(*)} \text{colf } \mathcal{F}_i$  und 4.2.1 liefert uns einen Isomorphismus

$$\text{colf } \Gamma(K; \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \Gamma(K; \text{colf } \mathcal{F}_i)$$

Jeder Schnitt  $t$  rechts ist also das Bild eines Schnitts  $s \in \Gamma(K; \mathcal{F}_i)$  für ein  $i \in I$ . Da  $\mathcal{F}_i$  kompaktweich ist, muß er von einem globalen Schnitt  $\tilde{s} \in \Gamma(X; \mathcal{F}_i)$  herkommen, und dieser globale Schnitt  $\tilde{s}$  hinwiederum liefert einen globalen Schnitt  $\tilde{t} \in \Gamma(X; \text{colf } \mathcal{F}_i)$ , der unser  $t$  fortsetzt.  $\square$

### 4.3 Underivierte Projektionsformel

**Proposition 4.3.1 (Tensorprodukt und Schnitte mit kompaktem Träger).** Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  und eine flache abelsche Gruppe  $G$  ist die natürliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\Gamma_! \mathcal{F} \otimes G \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes G)$$

Ist zusätzlich  $\mathcal{F}$  kompaktweich, so auch  $\mathcal{F} \otimes G$ .

4.3.2. Analoges gilt mit demselben Beweis für jeden Ring  $k$ , jede Garbe von  $k$ -Rechtsmoduln  $\mathcal{F}$  und jeden flachen  $k$ -Modul  $G$  mit  $\otimes_k$  statt  $\otimes$ .

*Beispiel 4.3.3.* Ich gebe ein Gegenbeispiel im Fall, daß  $G$  nicht flach ist. Ist etwa  $\pi : S^1 \rightarrow \text{pt}$  die Projektion und  $\mathcal{F}$  das nichtkonstante lokale System auf  $S^1$ , das halmweise frei ist über  $\mathbb{Z}$  von Rang Eins, so ist  $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  konstant mit  $\Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , aber wir haben  $\Gamma_! \mathcal{F} = 0$ .

*Beispiel 4.3.4.* Ist in der Situation der Proposition  $K \subset X$  ein Kompaktum und bezeichnet  $\Gamma_K$  Schnitte mit Träger in  $K$ , so muß unser Isomorphismus keineswegs Isomorphismen  $\Gamma_K \mathcal{F} \otimes G \xrightarrow{\sim} \Gamma_K(\mathcal{F} \otimes G)$  induzieren. Ein Gegenbeispiel liefert der flache  $\mathbb{Z}$ -Modul  $G = \mathbb{Q}$  und die abelsche Garbe

$$\mathcal{F} = \prod_{n=1}^{\infty} i_{n*}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{[0,1/n]}$$

für  $i_n : [0, 1/n] \hookrightarrow \mathbb{R}$  die Einbettungen. Die Garbe  $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  hat nur im Ursprung einen von Null verschiedenen Halm, aber die Garbe  $\mathcal{F}$  hat keine von Null verschiedenen Schnitte mit dem Ursprung als Träger.

*Beweis.* Wir beginnen mit der Injektivität. Gegeben ein Element  $s \in \Gamma_! \mathcal{F} \otimes G$  mit  $s \mapsto 0$  besitzt jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U(x)$  mit  $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}(U(x)) \otimes G$ . Schreiben wir  $s = \sum s_\nu \otimes g_\nu$ , so überdecken endlich viele  $U_1, \dots, U_r$  dieser  $U(x)$  die Träger aller  $s_\nu$ . Nehmen wir als  $U_0$  das Komplement der Vereinigung dieser Träger, so liefert das Einschränken eine Injektion

$$\Gamma_! \mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{i=0}^r \mathcal{F}(U_i)$$

Sie bleibt eine Injektion nach dem Tensorieren mit unserem flachen  $G$ , und das zeigt die Injektivität. Um die Surjektivität zu zeigen, ziehen wir uns zunächst auf den Fall von kompaktem  $X$  zurück. Gegeben  $s \in \Gamma(\mathcal{F} \otimes G)$  mit Träger in einem Kompaktum  $K$  finden wir stets  $U \Subset X$  offen mit  $K \subset U$  und  $\bar{U}$  kompakt. Ist der Fall von kompaktem  $X$  bekannt, so finden wir schon mal ein Urbild  $\tilde{s} \in$

$\Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}) \otimes G$  von  $s|_{\bar{U}}$  und wegen der bereits bewiesenen Injektivität gilt  $\tilde{s} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial\bar{U}; \mathcal{F}) \otimes G$ . Da  $G$  flach ist, kommt damit  $\tilde{s}$  von

$$\ker(\Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\partial\bar{U}; \mathcal{F})) \otimes G$$

her und wir finden durch Ausdehnen durch Null auf dem ersten Tensorfaktor das gesuchte Urbild von  $s$  in  $\Gamma_1(X; \mathcal{F}) \otimes G$ . Wir dürfen also in der Tat ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X$  kompakt annehmen. Sei nun also  $X$  kompakt und  $s \in \Gamma(\mathcal{F} \otimes G)$ . So gibt es eine endliche Überdeckung  $X = U_1 \cup \dots \cup U_r$  durch Kompakta und  $\tilde{s}_i \in \mathcal{F}(U_i) \otimes G$  mit  $\tilde{s}_i \mapsto s|_{U_i}$ . Wegen der bereits bewiesenen Injektivität haben  $\tilde{s}_i$  und  $\tilde{s}_j$  dasselbe Bild in  $\mathcal{F}(U_i \cap U_j) \otimes G$ . Die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

bleibt aber exakt unter dem Tensorieren mit  $G$  und erlaubt das Verkleben der  $\tilde{s}_i$  zum gesuchten Urbild  $\tilde{s} \in \mathcal{F}(X) \otimes G$  von  $s$ . Um die letzte Aussage zu zeigen, erinnern wir für  $K \subset X$  kompakt aus [TG] 4.8.14, daß für kompaktweiches  $\mathcal{F}$  die Restriktion sogar eine Surjektion  $\Gamma_1\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma(K; \mathcal{F})$  liefert. Tensorieren mit  $G$  und Anwenden unseres Resultats mit  $K$  statt  $X$  liefert

$$\Gamma_1\mathcal{F} \otimes G \twoheadrightarrow \Gamma(K; \mathcal{F}) \otimes G \xrightarrow{\sim} \Gamma(K; \mathcal{F} \otimes G)$$

Da diese Verknüpfung über  $\Gamma_1(\mathcal{F} \otimes G)$  faktorisiert, muß auch diese Gruppe surjektiv auf  $\Gamma(K; \mathcal{F} \otimes G)$  abgebildet werden.  $\square$

4.3.5. Gegeben eine stetige Abbildung  $\pi : X \rightarrow Y$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{G}$  auf  $Y$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  liefern unsere allgemeinen Konstruktionen 1.5.17 einen natürlichen Garbenhomomorphismus  $\pi_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \pi_*(\mathcal{F} \otimes \pi^*\mathcal{G})$ . Daß dieser Homomorphismus im allgemeinen kein Isomorphismus sein kann, zeigt bereits das Beispiel der konstanten Abbildung von einer unendlichen Menge auf einen Punkt. Unser natürlicher Homomorphismus induziert weiter offensichtlich einen natürlichen Homomorphismus

$$(\pi_1\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{F} \otimes \pi^*\mathcal{G})$$

für die Schreibweise im Sinne von [TG] 6.4.5. Analoges gilt für  $\pi$  einen Morphismus von geringten Räumen und  $\mathcal{F}$  eine Rechtsmodulgarbe und  $\mathcal{G}$  eine Modulgarbe.

**Definition 4.3.6.** Gegeben eine stetige Abbildung nennen wir eine abelsche Garbe auf ihrem Definitionsbereich **faserweise kompaktweich**, wenn ihre Einschränkung auf jede Faser unserer Abbildung kompaktweich ist. Heißt unsere Abbildung  $f$ , so sprechen wir auch präziser von einer  **$f$ -kompaktweichen** Garbe. Gegeben eine Modulgarbe beziehen wir diese Begriffe auf die zugrundeliegende abelsche Garbe.

4.3.7. Der Begriff einer faserweise kompaktweichen Garbe scheint nur im Fall von les-Abbildungen  $f$  nützlich zu sein. In diesem Fall zeigen wir in 5.2.7, daß jede  $f$ -kompaktweiche Garbe  $f_!$ -rechtszyklisch ist. Die im folgenden gezeigten Zusatzaussagen über die Erhaltung der Eigenschaft „faserweise kompaktweich“ unter verschiedenen Rückzügen werden sich bei der Konstruktion des vollen derivierten Formalismus als hilfreich erweisen.

**Lemma 4.3.8.** *Gegeben eine les-Abbildung ist jeder filtrierende Kolimes von faserweise kompaktweichen Garben wieder faserweise kompaktweich.*

*Beweis.* Kolimites vertauschen mit dem Rückzug abelscher Garben, ja von Modulgarben, da dieser Funktor einen Rechtsadjungierten hat. Insbesondere vertauschen Kolimites mit der Einschränkung auf die Fasern unserer Abbildung und diese sind nach Annahme lokal kompakte Hausdorffräume. Daß filtrierende Kolimites kompaktweicher Garben auf lokal kompakten Hausdorffräumen wieder kompaktweich sind, wissen wir aus 4.2.6.  $\square$

**Korollar 4.3.9 (Flache Projektionsformel).** *Gegeben  $\pi : X \rightarrow Y$  eine les-Abbildung,  $\mathcal{G} \in \text{Ab}_{/Y}$  eine flache abelsche Garbe und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  eine weitere abelsche Garbe ist die natürliche Abbildung aus 4.3.5 ein Isomorphismus*

$$(\pi_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \pi_!(\mathcal{F} \otimes \pi^* \mathcal{G})$$

*Ist zusätzlich  $\mathcal{F}$  faserweise kompaktweich, so ist auch  $\mathcal{F} \otimes \pi^* \mathcal{G}$  faserweise kompaktweich.*

*Beweis.* Wir dürfen uns mit les-Basiswechsel 4.1.16 auf den Fall zurückziehen, daß  $Y$  ein Punkt ist. In diesem Fall haben wir die Aussagen bereits als 4.3.1 bewiesen.  $\square$

**Korollar 4.3.10 (Flache Projektionsformel für Modulgarben).** *Gegeben  $\pi : X \rightarrow Y$  eine les-Abbildung,  $\mathcal{G}$  ein flacher Modul über einer Ringgarbe  $\mathcal{B}$  auf  $Y$  und  $\mathcal{F}$  ein  $\pi^* \mathcal{B}$ -Rechtsmodul induziert die natürliche Abbildung aus 4.3.5 einen Isomorphismus*

$$(\pi_! \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \pi_!(\mathcal{F} \otimes_{\pi^* \mathcal{B}} \pi^* \mathcal{G})$$

*Ist zusätzlich  $\mathcal{F}$  faserweise kompaktweich, so ist auch  $\mathcal{F} \otimes_{\pi^* \mathcal{B}} \pi^* \mathcal{G}$  faserweise kompaktweich.*

*Beweis.* Wir dürfen uns mit les-Basiswechsel 4.1.16 auf den Fall zurückziehen, daß  $Y$  ein Punkt ist. In diesem Fall haben wir die Aussagen bereits als 4.3.2 bewiesen.  $\square$

## 4.4 Trennrückzug von Schreimorphismen

4.4.1. Sei  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung und sei in der Basis  $\mathcal{B}$  ein multiplikatives System  $\mathcal{B}^i$  ausgezeichnet. Unter einem **faserrückzugstabilen multiplikativen System  $\mathcal{C}^i$  über  $\mathcal{B}^i$**  verstehen wir ein multiplikatives System  $\mathcal{C}^i$  in  $\mathcal{C}$  mit  $p(\mathcal{C}^i) \subset \mathcal{B}^i$  und mit der Eigenschaft, daß für jede Hochhebung nach  $\mathcal{C}$  eines kartesischen Quadrats in  $\mathcal{B}$  mit vertikalen  $\mathcal{B}^i$ -Pfeilen, im Diagramm links, kommutativen Quadrat

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\quad} & X \\ | & \lrcorner & | \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F} \\ | & & | \\ ? \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G} \end{array}$$

in  $\mathcal{C}$ , im Diagramm rechts, mit den Pfeilen nach rechts kartesisch und dem rechten vertikalen Pfeil nach unten in  $\mathcal{C}^i$  auch der induzierte linke vertikale mit einem ? markierte Pfeil zu  $\mathcal{C}^i$  gehört.

4.4.2. Ich notiere in diesem Kontext Morphismen aus  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{B}$  als gepunktete Pfeile und Morphismen aus  $\mathcal{C}^i$  und  $\mathcal{B}^i$  als gestrichelte Pfeile. Die durchgezogenen Pfeile hebe ich mir für „Eigmorphismen“ auf, die hier noch nicht vorkommen.

**Beispiel 4.4.3 (Rückzug von Schreimorphismen).** In unserer Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.17 bilden die Schreimorphismen über stetigen Abbildungen nach Übung [TG] 6.4.31 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System. In diesem Fall ist  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^i = \text{Top}$ .

**Beispiel 4.4.4 (Rückzug von Schreimorphismen, Variante).** In der Faserung  $\text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \text{Gek}$ , die aus 1.3.9 entsteht durch Einschränkung auf gekringte Räume in der Basis, bilden die Schreimorphismen über beliebigen Morphismen nach Übung 1.3.13 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System. In diesem Fall ist  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^i = \text{Gek}$ .

**Beispiel 4.4.5 (Rückzug schreikokartesischer Schreimorphismen).** In der Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.12 bilden die schreikokartesischen Schreimorphismen nach les-Basiswechsel 4.1.16 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System über dem multiplikativen System des les-Morphismen. In diesem Fall ist  $\mathcal{C} = \text{Top}$  und  $\mathcal{C}^i = \text{Top}^{\text{les}}$ .

4.4.6. Seien  $\mathcal{T}$  eine Kategorie und  $\mathcal{T}^i$  darin ein multiplikatives System. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  über der banalen Trennkategorie zu  $\mathcal{T}$  nennen wir ein multiplikatives System  $\mathcal{G}^i$  über  $\mathcal{T}^i$  **fasertrennrückzugstabil**, wenn das System  $\mathcal{G}^{i\wedge}$  aller Tupel von  $\mathcal{G}^i$ -Morphismen faserrückzugstabil ist über  $\mathcal{T}^{i\wedge}$  in der Faserung  $\mathcal{G}^\wedge \rightarrow \mathcal{T}^\wedge$  der Familienkategorien.

4.4.7. Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{T}$  verstehen wir unter einem **Trennquadrat in  $\mathcal{T}$**  eine endliche Familie von kommutativen Quadraten in  $\mathcal{T}$  mit derselben linken



Vertikale. Wir werden so ein Datum auffassen und notieren als ein kommutatives Diagramm der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  der banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{(q_1, \dots, q_r)} & X_1 \wedge \dots \wedge X_r \\ g \downarrow & & \downarrow f_1 \wedge \dots \wedge f_r \\ Z & \xrightarrow{(p_1, \dots, p_r)} & Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r \end{array}$$

Gleichbedeutend ist es ein Datum bestehend aus Objekten  $X_i, Y_i, W, Z \in \mathcal{T}$  sowie Morphismen  $q_i : W \rightarrow X_i$  und  $p_i : Z \rightarrow Y_i$  und  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  und  $g : W \rightarrow Z$  mit  $f_i q_i = p_i g \ \forall i$ .

4.4.8. Diagrammatisch bedeutet fasertrennrückzugstabil also, daß gegeben ein als linkes Quadrat dargestelltes kartesisches Trennquadrat der banalen Trennkategorie  $\mathcal{T}$  mit Vertikalen aus  $\mathcal{T}^i$  und darüber das als rechtes Quadrat dargestellte Trennquadrat in  $\mathcal{G}$  mit kartesischen Horizontalen und rechten Vertikalen in  $\mathcal{G}^i$

$$\begin{array}{ccc} W \dashrightarrow X_1 \wedge \dots \wedge X_r & & \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{F}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_r \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Z \dashrightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r & & \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r \end{array}$$

auch die mit einem Fragezeichen markierte linke Vertikale zu  $\mathcal{G}^i$  gehört.

**Proposition 4.4.9 (Trennrückzug von Schreimorphismen).** *In der Garbenop-trennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  bilden die Schreimorphismen ein fasertrennrück-zugstabiles multiplikatives System über dem multiplikativen System aller stetigen Abbildungen.*

4.4.10. Das fasertrennrückzugstabile multiplikative System der Schreimorphis-men aus dem Lemma notieren wir  $\text{Ab}_{//\text{Top}}^i$  wie in [TG] 6.4.4.

*Beweis.* Nach der Bereitstellung der Methodik 4.4.12. □

4.4.11. Ein multiplikatives System  $\mathcal{T}^i$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{T}$  heiße **rückzugstabil**, wenn das Faserprodukt für alle Winkel mit einem  $\mathcal{T}^i$ -Morphismus existiert und in jedem kartesischen Quadrat mit einem  $\mathcal{T}^i$ -Morphismus im Aus-gangswinkel der gegenüberliegende Morphismus aus dem Faserprodukt auch wie-der ein  $\mathcal{T}^i$ -Morphismus ist.

4.4.12 (**Erzeuger für kartesische Trennquadrate**). Sei  $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}^i$  eine Kategorie mit einem rückzugstabilen multiplikativen System von Morphismen. In der Fami-lienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge := (\wedge \mathcal{T})^\wedge$  ihrer banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  sei eine Menge  $K$  von kartesischen Trennquadraten mit Vertikalen in  $\mathcal{T}^{i||}$  gegeben. Unsere Men-ge  $K$  sei stabil unter dem Vertupeln sowie unter dem Verkleben längs gleicher

vertikaler oder horizontaler Kanten und enthalte die **elementaren kartesischen Trennquadrate mit Vertikalen aus  $\mathcal{T}^i$** , ein hier neu benötigter Begriff, unter dem wir zusammenfassen:

1. Alle kartesischen Quadrate mit Einstrennungen oder Leertrennungen in den Horizontalen und Vertikalen aus  $\mathcal{T}^i$ ;
2. Alle **Projektionsformel-Quadrate** mit Vertialen aus  $\mathcal{T}^i$  alias Quadrate der Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{(id_X, f)} & X \wedge Y \\
 \downarrow f & & \downarrow f \wedge id_Y \\
 Y & \xrightarrow{(id_Y, id_Y)} & Y \wedge Y
 \end{array}$$

So enthält unsere Menge  $K$  alle kartesischen Trennquadrate der Familienkategorie mit  $\mathcal{T}^i$ -Vertikalen. Um das einzusehen, betrachten wir für beliebige  $\mathcal{T}^i$ -Morphismen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Z \rightarrow Y$  das aus kartesischen Quadraten mit den offensichtlichen Tupeln einfacher Morphismen in den Vertikalen bestehende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_Y Z & \xrightarrow{\quad} & X \wedge (X \times_Y Z) & \xrightarrow{\quad} & X \wedge Z \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{\quad} & X \wedge X & \xrightarrow{\quad} & X \wedge Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & Y \wedge Y & & Y \wedge Y
 \end{array}$$

Es zeigt, daß jedes kartesische Trennquadrat mit einer diagonalen Zweitrennung in der unteren Horizontalen zu unserer Menge  $K$  gehören muß. Jeder Morphismus der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie entsteht jedoch nach [TSK] 1.2.22 durch Vertupeln und Verknüpfen aus Leertrennungen, Einstrennungen und Diagonalzweitrennungen. So folgt dann die Behauptung.

*Beweis für 4.4.9.* Die Kategorie  $\text{Top}$  hat endliche Faserprodukte. Nach 4.4.12 müssen wir also nur für elementare kartesische Trennquadrate in  $\text{Top}$  zeigen, daß der Rückzug eines Tupels von Schreimorphismen wieder ein Schreimorphismus ist. Im Fall eines kartesischen Trennquadrats mit Leertrennungen in den Horizontalen ist das die einigermaßen banale Erkenntnis, daß für jeden topologischen Raum  $X$  der identische Opkomorphismus  $\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X$  über  $\text{id} : X \rightarrow X$  eigentlich ist alias daß die natürliche Einbettung eine Gleichheit  $\text{id}_! \mathbb{Z}_X = \text{id}_* \mathbb{Z}_X$  ist. Im Fall eines gewöhnlichen kartesischen Quadrats ist das unsere Übung [TG] 6.4.31. Im Fall des Projektionsformelquadrats zu einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$

schließlich läuft es auf den Nachweis hinaus, daß für jeden eigentlichen Komorphismus  $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  über  $f$  und jede abelsche Garbe  $\mathcal{C}$  auf  $Y$  der Garbenhomomorphismus  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{C} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$ , der für  $V \subseteq Y$  und  $g \in \mathcal{G}(V)$  und  $c \in \mathcal{C}(V)$  gegeben wird durch  $g \otimes c \mapsto \varphi(g) \otimes \kappa(c)$  für  $\kappa : \mathcal{C}(V) \rightarrow (f^*\mathcal{C})(f^{-1}V)$  aus dem Transportmorphismus, über  $f_!(\mathcal{G} \otimes f^*\mathcal{C})$  faktorisiert. Da nun der Vorschub von den  $\varphi(g) \otimes \kappa(c)$  erzeugt wird, reicht es zu zeigen, daß diese Tensoren zu  $f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$  gehören. Es ist aber klar, daß der Träger in  $f^{-1}(V)$  unseres Tensors  $\varphi(g) \otimes \kappa(c)$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\text{supp}(\varphi(g))$  ist und folglich, wenn  $\varphi$  eigentlich ist, auch eigentlich nach  $V$  abgebildet wird.  $\square$

**Proposition 4.4.13 (Trennrückzug schreikokartesischer Schreimorphismen).** Sei  $k$  ein Körper. Schränken wir die Garbenoptrennfaserung ein auf die volle Unterkategorie  $(\text{Top}, k) \subset \text{Gek}$  der konstant mit  $k$  gekringten Räume alias in der die Trennfaserung

$$k\text{-Mod} // \wedge \text{Top} \rightarrow \wedge \text{Top}$$

der Garben von  $k$ -Vektorräumen bilden die schreikokartesischen Schreimorphismen über les-Abbildungen ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System.

*Beweis.* Wir wissen, daß das multiplikative System der les-Abbildungen rückzugstabil ist. Wie beim Beweis von 4.4.9 ziehen wir uns mit 4.4.12 auf den Fall elementarer kartesischer Trennquadrate in  $\text{Top}$  mit les-Vertikalen zurück. Im Fall horizontaler Leertrennungen folgt die Behauptung daraus, daß für jeden topologischen Raum  $X$  der identische Opkomorphismus  $k_X \rightarrow k_X$  über der Identität  $\text{id} : X \rightarrow X$  schreikokartesisch ist. Im Fall eines gewöhnlichen kartesischen Diagramms folgt die Behauptung aus les-Basiswechsel 4.1.16. Im Fall eines Projektionsformelquadrats zu einer les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  schließlich gilt es zu zeigen, daß der aus 4.4.9 entstehende Garbenhomomorphismus ein Isomorphismus  $f_!\mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$  ist. Das leistet in unserem Fall die flache Projektionsformel für Modulgarben 4.3.10.  $\square$

**Proposition 4.4.14 (Trennrückzug kokartesischer Modulmorphismsen).** In der Garbenoptrennfaserung eingeschränkt auf die volle Unterkategorie der einpunktigen gekringten Räume  $\text{Kringo} \subset \text{Gek}$  alias in der Trennfaserung

$$\text{Ab} // \wedge \text{Kringo} \rightarrow \wedge \text{Kringo}$$

der Moduln über Kringsen bilden die kokartesischen Morphismsen über opponierten Kringshomomorphismen ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System.

4.4.15. In diesem Fall haben wir in der abstrakten Notation aus 4.4.6 geschrieben  $\mathcal{F}^i = \mathcal{F} = \text{Kringo}$  und  $\mathcal{G}^i = \mathcal{G} = \text{Ab} // \text{Kringo}$ .

*Beweis.* Wie beim Beweis von 4.4.9 ziehen wir uns mit 4.4.12 auf den Fall elementarer kartesischer Trennquadrate in Kringo zurück. Im Fall horizontaler Leertrennungen folgt die Behauptung daraus, daß für jeden Kring  $C$  der identische Opkomorphismus  $C \rightarrow C$  über der Identität  $\text{id}^\circ : C \rightarrow C$  kokartesisch ist. Im Fall eines gewöhnlichen kartesischen Diagramms ist es die Aussage, daß gegeben Kringshomomorphismen  $B \rightarrow A$  und  $B \rightarrow C$  und ein  $C$ -Modul  $M$  der natürliche Morphismus

$$A \otimes_B \text{res}_C^B M \xrightarrow{\sim} \text{res}_{A \otimes_B C}^A ((A \otimes_B C) \otimes_C M)$$

ein Isomorphismus ist. Im Fall des Projektionsformelquadrats zu einem Kringshomomorphismus  $B \rightarrow A$  läuft die Behauptung darauf hinaus, für jeden  $B$ -Modul  $M$  und jeden  $A$ -Modul  $N$  zu zeigen, daß die natürliche Abbildung einen Isomorphismus

$$M \otimes_B \text{res}_A^B N \xrightarrow{\sim} \text{res}_A^B ((M \otimes_B A) \otimes_A N)$$

liefert. Auch das ist klar. □

**Proposition 4.4.16 (Trennrückzug schreikokartesischer Modulmorphismsen).**  
*In der Garbenopentrennfaserung eingeschränkt auf die volle Unterkategorie der diskreten gekringten Räume  $\text{Gekd} \subset \text{Gek}$  alias in der Trennfaserung*

$$\text{Ab}_{// \wedge \text{Gekd}} \rightarrow \wedge \text{Gekd}$$

*bilden die schreikokartesischen Morphismsen ein faserentrennrückzugstabiles multiplikatives System.*

4.4.17. In diesem Fall haben wir in der abstrakten Notation aus 4.4.6 geschrieben  $\mathcal{T}^i = \mathcal{T} = \text{Gekd}$  aber abweichend vom einpunktigen Fall  $\mathcal{G}^i \subsetneq \mathcal{G}$ .

*Beweis.* Wie beim Beweis von 4.4.9 ziehen wir uns mit 4.4.12 auf den Fall elementarer kartesischer Trennquadrate in  $\text{Gekd}$  zurück. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß in der Basis unten links ein einpunktiger Raum mit Ring  $C$  steht. Im Fall horizontaler Leertrennungen folgt die Behauptung daraus, daß für jeden Kring  $C$  der identische Opkomorphismus  $C \rightarrow C$  über der Identität  $\text{id}^\circ : C \rightarrow C$  schreikokartesisch ist. Im Fall eines gewöhnlichen kartesischen Diagramms dürfen wir annehmen, daß auch in der Basis unten rechts ein einpunktiger Raum mit Ring  $B$  steht. Den gekringten diskreten Raum oben links in der Basis schreiben wir als die Familie von Kringsen  $(A_i)_{i \in I}$ . Der Morphismus in der linken Vertikale der Basis entspricht einem Tupel von Kringshomomorphismen  $B \rightarrow A_i$ . Eine Modulgarbe oben links ist eine Familie  $(M_i)_{i \in I}$  mit  $M_i \in A_i\text{-Mod}$ . Der Schreibvorschub macht daraus den  $B$ -Modul  $\bigoplus_{\text{res}_{A_i}^B} M_i$ . Das Faserprodukt in der Basis ist  $(C \otimes_B A_i)_{i \in I}$ . Der Trennrückzug längs der oberen Horizontale ist  $((C \otimes_B A_i) \otimes_{A_i} M_i)_{i \in I}$ . Die Behauptung schließlich läuft auf

die Aussage hinaus, daß der offensichtliche Homomorphismus von  $C$ -Moduln

$$C \otimes_B \bigoplus \operatorname{res}_{A_i}^B M_i \rightarrow \bigoplus ((C \otimes_B A_i) \otimes_{A_i} M_i)_{i \in I}$$

ein Isomorphismus ist und das ist klar. Im Fall des Projektionsformelquadrats läuft die Behauptung darauf hinaus, für jeden Kring  $B$  und jede Familie von Kringen  $(A_i)_{i \in I}$  und jede Familie von Kringshomomorphismen  $B \rightarrow A_i$  und jeden  $B$ -Modul  $M$  und jede Familie  $(N_i)_{i \in I}$  mit  $N_i \in A_i$ -Mod zu zeigen, daß der natürliche Homomorphismus von  $B$ -Moduln

$$M \otimes_B \bigoplus \operatorname{res}_{A_i}^B N_i \rightarrow \prod \operatorname{res}_{A_i}^B ((M \otimes_B A_i) \otimes_{A_i} N_i)$$

über einen Isomorphismus

$$M \otimes_B \bigoplus \operatorname{res}_{A_i}^B N_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus \operatorname{res}_{A_i}^B ((M \otimes_B A_i) \otimes_{A_i} N_i)$$

faktoriert. Auch das ist klar. □

*Vorschau 4.4.18.* Die in den vorhergehenden Propositionen diskutierten Fälle, in denen die schreikokartesischen Morphismen jeweils ein trennfaserückzustabiles multiplikatives System bilden, sind bereits nah am vollständigen Sechs-Funktor-Formalismus. In der topologischen Variante 4.4.9 gilt es „nur“ noch, zu den derivierten Kategorien überzugehen. Im Fall von Körperkoeffizienten ist das relativ unproblematisch. Wollen wir dahingegen allgemeinere kommutative Koeffizientenringe zulassen, wird die Sache schwieriger, da der Rückzug das Derivieren von Tensorprodukten und flache Linksaufösungen benötigt, der Schreivorschub dahingegen injektive Rechtsaufösungen.

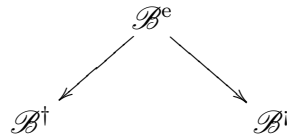
## Übungen

*Übung 4.4.19.* Die Schreimorphismen von Modulgarben über gekringten Räumen aus 1.3.13 bilden ein fasertrennrückzustabiles multiplikatives System über dem System aller Morphismen gekringter Räume. Hinweis: Man mag sich auf den Fall abelscher Garben 4.4.9 stützen sowie den Fall des einfachen Rückzugs aus Übung 1.3.13.

## 4.5 Rückzug-Schreivorschub-Formalismus

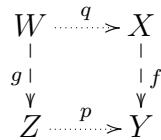
**Definition 4.5.1.** Ein **Kategorienwinkel** ist eine Menge von **Objekten**  $\mathcal{B}$  mit drei Strukturen als Kategorie, deren Morphismenmengen wir  $\mathcal{B}^\dagger(X, Y)$ ,  $\mathcal{B}^i(X, Y)$

und  $\mathcal{B}^e(X, Y)$  notieren, sowie einer Erweiterung der Identität auf den Objekten zu treuen Funktoren



Die Elemente dieser Morphismenmengen nennen wir  $\dagger$ -**Morphismen** oder kurz **Morphismen**,  $\jmath$ -**Morphismen** oder **Schreimorphismen** und **e-Morphismen** oder **Eigmorphismen**.

**Definition 4.5.2.** Ein **Quadrat** in einem Kategorienwinkel ist ein Datum aus Objekten und Morphismen  $(X, Y, Z, W, f, g, p, q)$  mit Objekten und Morphismen wie im Diagramm



angegeben mit Vertikalen  $f, g \in \mathcal{B}^i$  und Horizontalen  $p, q \in \mathcal{B}^\dagger$ . Wir notieren auch im weiteren vielfach  $\dagger$ -Morphismen durch gepunktete Pfeile und  $\jmath$ -Morphismen durch gestrichelte Pfeile. Die Eigmorphismen notieren wir in diesem Kontext als durchgezogene Pfeile. Wir verwenden die durch das Diagramm erzeugte Anschauung im weiteren in unserer Terminologie, indem wir etwa von der „rechten vertikalen Kante eines Quadrats“ und dergleichen reden.

**Definition 4.5.3.** Eine **Regulierung** eines Kategorienwinkels ist die Vorgabe einer Menge von Quadraten, die stabil ist unter dem Verkleben längs gleicher horizontaler oder vertikaler Kanten und die alle kommutativen Quadrate enthält, bei denen beide horizontalen oder beide vertikalen Morphismen Identitäten sind.

*Beispiel 4.5.4.* Gegeben  $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}^i \supset \mathcal{B}^e$  eine Kategorie mit Unterkategorien, die jeweils alle Objekte enthalten, erhalten wir mit  $\mathcal{B}^\dagger := \mathcal{B}$  einen Kategorienwinkel. Darin bilden alle kartesischen und auch alle kommutativen Quadrate von  $\mathcal{B}$ , die Vertikalen aus  $\mathcal{B}^i$  haben, jeweils eine Regulierung, die **kartesische beziehungsweise kommutative Regulierung**.

**Definition 4.5.5.** Ein **Winkelfunktor** von Kategorienwinkeln ist eine Abbildung auf den Objekten  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  zusammen mit Abbildungen auf den Morphismen  $\mathcal{C}^\dagger(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}^\dagger(FX, FY)$  und  $\mathcal{C}^i(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}^i(FX, FY)$ , die jeweils Funktoren sind und die zu demselben Funktor  $\mathcal{C}^e(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}^e(FX, FY)$  einschränken. Wir nennen den ersten Funktor den  $\dagger$ -**Funktor**, den zweiten den  $\jmath$ -**Funktor** und den dritten den **e-Funktor** unseres Winkelfunktors.

4.5.6 (**Kategorie der Quadrate über einem Basisquadrat**). Gegeben ein Winkelfunktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  machen wir die Quadrate von  $\mathcal{C}$  über einem vorgegebenen Quadrat der Basis  $\mathcal{B}$  zu einer Kategorie, indem wir solche Viertupeln von Eigmorphismen über den Identitäten in den Ecken als Morphismen nehmen, die kommutative Quadrate längs jeder Kante liefern.

**Definition 4.5.7.** Eine **Winkelfaserung** ist ein Winkelfunktor  $F$  derart, daß der  $\dagger$ -Funktor von  $F$  eine Faserung ist, der  $\jmath$ -Funktor von  $F$  eine Kofaserung und daß über einem Eigmorphismus der Basis jeder  $\dagger$ -Morphismus und jeder  $\jmath$ -Morphismus wieder ein Eigmorphismus auf den Fasern ist. Den Rückzug längs eines  $\dagger$ -Morphismus  $p$  notieren wir  $p^\dagger$ . Den Vorschub längs eines  $\jmath$ -Morphismus  $f$  notieren wir  $f_\jmath$ .

*Beispiel 4.5.8.* Jede Bifaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  liefert eine Winkelfaserung in offensichtlicher Weise, bei der in der Basis wie in der Faser Morphismen, Schreimorphismen und Eigmorphismen zusammenfallen.

*Beispiel 4.5.9.* Über dem Kategorienwinkel zu  $\text{Top} \supset \text{Top}^s \supset \text{Top}^{\text{es}}$  ist der Kategorienwinkel zu  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \supset \text{Ab}_{//\text{Top}^s}^i \supset \text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{es}}}^i$  mit der Notation  $\text{Top}^{\text{es}}$  für die eigentlichen separierten Abbildungen von topologischen Räumen eine Winkelfaserung. In der Tat ist  $\text{Ab}_{//\text{Top}^s}^i \rightarrow \text{Top}^s$  eine Kofaserung nach [TG] 6.4.9 und über eigentlichen separierten Abbildungen sind alle Opkomorphismen eigentlich. In diesem Fall sind die Fasern opponierte Kategorien abelscher Garben und wir haben  $p^\dagger = (p^{(*)})^{\text{opp}}$  und  $f_\jmath = (f_{(!)})^{\text{opp}}$ .

**Definition 4.5.10.** Gegeben eine Winkelfaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  über einer regulierten Basis  $\mathcal{B}$  nennen wir die Quadrate der Regulierung **erlaubte Basisquadrate** und die Quadrate mit kartesischen Horizontalen in der Faser  $\mathcal{C}$ , die über erlaubten Basisquadraten liegen, **Rückholquadrate**. Unter einer **Präverflechtung** verstehen wir eine Regulierung des Kategorienwinkels  $\mathcal{C}$  durch ausgewählte Rückholquadrate, die **Verflechtungsquadrate**, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

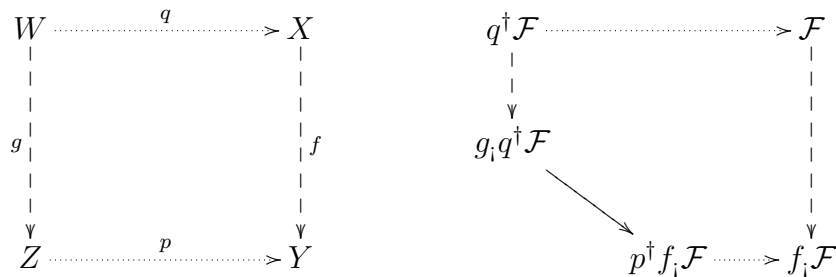
1. Über einem erlaubten Basisquadrat mit Eigmorphismen auf zwei gegenüberliegenden Kanten sind alle in  $\mathcal{C}^\dagger$  beziehungsweise  $\mathcal{C}^\jmath$  kommutativen Rückholquadrate von  $\mathcal{C}$  Verflechtungsquadrate;
2. Über jedem erlaubten Basisquadrat kann jedes partielle Quadrat von  $\mathcal{C}$  mit  $\dagger$ -kartesischen Horizontalen, dem nur die linke Vertikale fehlt, auf genau eine Weise zu einem Verflechtungsquadrat ergänzt werden. Wir sagen dann, die so ergänzte linke Vertikale entstehe durch **Zurückholen** der rechten Vertikale über dem vorgegebenen erlaubten Basisquadrat.

4.5.11. Eine **präverflochtene Winkelfaserung** ist eine Winkelfaserung über einer regulierten Basis mit einer ausgezeichneten Präverflechtung.

4.5.12. Ein Rückholquadrat nennen wir **voll kokartesisch**, wenn seine beiden Vertikalen kokartesisch sind. Eine Präverflechtung einer Winkelfaserung über einer regulierten Basis nennen wir eine **Verflechtung**, wenn jedes Verflechtungsquadrat mit kokartesischer rechter Vertikale voll kokartesisch ist, wenn also in anderen Worten das Zurückholen kokartesische Vertikalen zu kokartesischen Vertikalen macht.

*Beispiel 4.5.13 (Verflechtung zu faserrückzugstabilem System).* Sei  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung und sei  $\mathcal{B}^i \subset \mathcal{B}$  ein multiplikatives System. Wir ergänzen als  $\mathcal{B}^e$  das kleinste multiplikative System, das nur aus den Identitäten besteht, und bilden zu  $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}^i \supset \mathcal{B}^e$  den nach 4.5.4 zugehörigen Kategorienwinkel mit seiner kartesischen Regulierung. Gegeben ein faserrückzugstabiles multiplikatives System  $\mathcal{C}^i$  über  $\mathcal{B}^i$  nach 4.4.1, das sogar eine Kofaserung ist, erhalten wir eine präverflochtene Winkelfaserung über der kartesisch regulierten Basis, indem wir alle kommutativen Rückholquadrate über erlaubten Basisquadraten als unsere Verflechtungsquadrate nehmen. Bilden zusätzlich die kokartesischen Morphismen unserer Kofaserung auch ein faserrückzugstabiles multiplikatives System, so ist diese Präverflechtung sogar eine Verflechtung. Dasselbe gilt, wenn wir für  $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{B}^i$  irgendein multiplikatives System nehmen, über dem alle  $\mathcal{C}$ -Morphismen bereits zu  $\mathcal{C}^i$  gehören.

4.5.14. Gegeben eine präverflochtene Winkelfaserung gibt es für jedes erlaubte Basisquadrat und jedes Objekt  $\mathcal{F}$  in der Faser über der oberen rechten Ecke wie im Diagramm



genau einen Morphismus  $g_i q^\dagger \mathcal{F} \rightarrow p^\dagger f_i \mathcal{F}$  in der Faser über  $Z$  derart, daß das rechte Quadrat mit Transportmorphismen von Rückzug und Schreivorschub als allen anderen Morphismen ein Verflechtungsquadrat wird. Diese Morphismen bilden sogar in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$vf : g_i q^\dagger \Rightarrow p^\dagger f_i$$

Wir nennen sie den **Flechtbasiswechsel** unserer präverflochtenen Winkelfaserung und notieren sie  $vf$  wie „Verflechtung“. Sind  $f, g$  beide Eigmorphismen, so stimmt der Flechtbasiswechsel nach der Charakterisierung von Verflechtungsquadraten



durch Kommutativität mit dem Basiswechsel [TG] 6.3.11 der Faserung  $\mathcal{C}^\dagger \rightarrow \mathcal{B}^\dagger$  überein. Sind  $p, q$  beide Eigmorphismen, so stimmt er aus demselben Grund mit dem Basiswechsel der Kofaserung  $\mathcal{C}^\dagger \rightarrow \mathcal{B}^\dagger$  überein. In einer verflochtenen und nicht nur präverflochtenen Winkelfaserung sind per definitionem alle Flechtbasiswechsel Isomorphismen  $\text{vf} : g_i q^\dagger \xrightarrow{\cong} p^\dagger f_i$ .

**Beispiel 4.5.15 (Abstrakter Basiswechsel als Präverflechtung).** In der Winkelfaserung zu einer Bifaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  bilden die kommutativen Rückholquadrate von  $\mathcal{C}$  eine Präverflechtung über der durch die kommutativen Quadrate regulierten Basis. Der Flechtbasiswechsel fällt hier mit dem abstrakten Basiswechsel zusammen.

**Beispiel 4.5.16 (Verflechtung für diskrete gekringte Räume).** Über dem Kategorienwinkel zu  $\text{Gekd} \supset \text{Gekd} \supset \text{Gekd}^e$  der diskreten gekringten Räume mit topologisch eigentlichen Morphismen alias Abbildungen mit endlichen Fasern als das System  $\text{Gekd}^e$  der Eigmorphismen und mit der kartesischen Regulierung bilden die kommutativen Rückholquadrate in der Winkelfaserung zu  $\text{Ab}_{//\text{Gekd}} \supset \text{Ab}_{//\text{Gekd}}^i \supset \text{Ab}_{//\text{Gekd}^e}^i$  nach 4.4.16 eine Verflechtung. Wir notieren diese verflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Ab}_{//\text{Gekd}} \rightarrow \text{Gekd} \supset \text{Gekd} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Gekd}}^i, \text{Gekd}^e \right)$$

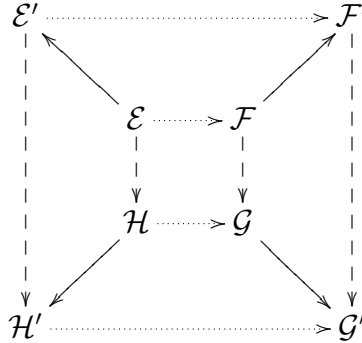
**Beispiel 4.5.17 (Verflechtung für topologische Räume).** Über dem Kategorienwinkel zu  $\text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \supset \text{Top}^{\text{es}}$  mit seiner kartesischen Regulierung bilden die kommutativen Rückholquadrate in der Winkelfaserung durch  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \supset \text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^i \supset \text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{es}}}^i$  nach Übung [TG] 6.4.31 und les-Basiswechsel 4.1.16 eine Verflechtung. Wir notieren diese verflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^i, \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

**4.5.18 (Kommutativität durch Präverflechtung).** Gegeben eine präverflochtene Winkelfaserung sind die Verflechtungsquadrate über einem erlaubten Basisquadrat mit Eigmorphismen auf gegenüberliegenden horizontalen beziehungsweise vertikalen Kanten genau die kommutativen Rückholquadrate. In der Tat sind diese Quadrate nach Annahme Verflechtungsquadrate und die Forderung der eindeutigen Ergänzung zeigt dann, daß es über besagten erlaubten Basisquadraten nicht noch mehr Verflechtungsquadrate geben kann.

**4.5.19 (Funktorialität von Verflechtungsquadraten).** Gegeben eine präverflochtene Winkelfaserung läßt sich jeder Morphismus zwischen den rechten Vertikalen zweier Verflechtungsquadrate über einem vorgegebenen erlaubten Basisquadrat auf genau eine Weise zu einem Morphismus zwischen den beiden Verflechtungs-

quadraten fortsetzen. Um das einzusehen, betrachten wir das Diagramm



Beide Quadrate sind Verflechtungsquadrate nach Annahme. Die durchgezogenen Pfeile stellen Morphismen über Identitäten der Basis dar. Das rechte  $\mathcal{F}\mathcal{G}$ -Trapez ist kommutativ nach Annahme und stellt unseren Morphismus zwischen den rechten Vertikalen dar. Das obere  $\mathcal{E}\mathcal{F}$ -Trapez wird durch genau einen Morphismus  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  kommutativ gemacht, da nach Annahme  $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{F}'$  kartesisch ist. Das untere  $\mathcal{H}\mathcal{G}$ -Trapez wird durch genau einen Morphismus  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  kommutativ gemacht, da nach Annahme  $\mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{G}'$  kartesisch ist. Es bleibt zu zeigen, daß dann auch das rechte  $\mathcal{E}\mathcal{H}$ -Trapez kommutiert. Nach der Charakterisierung von Verflechtungsquadraten durch Kommutativität 4.5.18 sind aber das obere  $\mathcal{E}\mathcal{F}$ -Trapez und das untere  $\mathcal{H}\mathcal{G}$ -Trapez beide Verflechtungsquadrate. Aufgrund der Verklebbarkeit von Verflechtungsquadraten sind dann auch das Teildiagramm mit den vertikalen Kanten  $((\mathcal{E}\mathcal{H}\mathcal{H}'), (\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{G}'))$  sowie das Teildiagramm mit den vertikalen Kanten  $((\mathcal{E}\mathcal{E}'\mathcal{H}'), (\mathcal{F}\mathcal{F}'\mathcal{G}'))$  Verflechtungsquadrate. Aus der Gleichheit der rechten Vertikalen folgt dann mit der Eindeutigkeit der Ergänzung die Gleichheit der zurückgeholten Vertikalen und so die Kommutativität im rechten  $\mathcal{E}\mathcal{H}$ -Trapez.

4.5.20 (**Transformation vom Vorschub zum Schreivorschub**). Gegeben sei eine präverflochtene Winkelfaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  über dem Kategorienwinkel zu einem Tripel  $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}^i \supset \mathcal{B}^e$  wie in 4.5.4 mit seiner kartesischen Regulierung. Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Schreimorphismus der Basis derart, daß das Faserprodukt  $X \times_Y X$  existiert und die Diagonale  $\Delta = \Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$  ein Eigmorphismus ist und die Projektionen  $X \times_Y X \rightarrow X$  ihrerseits wieder Schreimorphismen. Dann erhalten wir mit

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_Y X & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X \\
 \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

als erlaubtem Basisquadrat und mit der Notation  $\text{Id}$  für den Identitätsfunktork eine Transformation  $\text{Id} \Rightarrow f^\dagger f_i$  als die Komposition

$$\text{Id} = \text{Id} \circ \text{Id} \xrightarrow{\cong} \text{id}_i \text{id}^\dagger \xrightarrow{\cong} \text{pr}_{2_i} \Delta_i \Delta^\dagger \text{pr}_1^\dagger \Rightarrow \text{pr}_{2_i} \text{pr}_1^\dagger \Rightarrow f^\dagger f_i$$

mit der Adjunktion  $(\Delta_i, \Delta^\dagger)$  für den Eigomorphismus  $\Delta$  und Flechtbasiswechsel 4.5.14. Besitzt  $f^\dagger$  einen Linksadjungierten  $f_\dagger$ , so erhalten wir auf diese Weise sogar eine Transformation  $f_\dagger \Rightarrow f_i$ . Sie entspricht einer Transformation

$$f_\dagger \Rightarrow f_*$$

von Funktoren der opponierten Fasern, mit denen wir es in den Anwendungen meist zu tun haben.

## Übungen

*Übung 4.5.21.* Ist in 4.5.20 der Morphismus  $f$  bereits selbst ein Eigomorphismus, so ist unsere Komposition die Einheit der Adjunktion  $(f_i, f^\dagger)$  und der induzierte Morphismus ist die Identität  $f_\dagger = f_i$  aus den Definitionen. Ich habe diese Übung noch nicht gemacht.

## 4.6 Trennrückzug-Schreibvorschub-Formalismus

**Definition 4.6.1.** Unter einer **Trennaustauschsituation** verstehen wir eine Vorgabe von Daten

$$(\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^i \leftarrow \mathcal{G}^i, \mathcal{T}^e, i)$$

bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{T}$ , der **Basiskategorie** oder **Basis**; darin zwei ausgezeichneten multiplikativen Systemen  $\mathcal{T}^e \subset \mathcal{T}^i \subset \mathcal{T}$ , die beide alle Isomorphismen enthalten; einer Trennkategorie  $\mathcal{G}$  und einer Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  über der banalen Trennkategorie zu  $\mathcal{T}$ ; einer Kofaserung  $\mathcal{G}^i \rightarrow \mathcal{T}^i$ ; sowie einem Isomorphismus  $i : \mathcal{G}^i | \mathcal{T}^e \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} | \mathcal{T}^e$  von Kategorien über  $\mathcal{T}^e$ .

4.6.2 (**Sprechweisen und Notationen**). 1. Unseren Isomorphismus  $i$  behandeln wir in der Notation meist als eine Gleichheit und reden dann vereinfachend von einer Trennaustauschsituation  $(\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^i \leftarrow \mathcal{G}^i, \mathcal{T}^e)$ . Da alle Identitäten zu  $\mathcal{T}^e$  gehören, bedeutet das insbesondere, daß  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}^i$  dieselben Objekte haben und sogar dieselben Fasern  $\mathcal{G}_X = \mathcal{G}_X^i$  über allen Objekten  $X$  der Basis.

2. Die Morphismen in  $\mathcal{T}^i$  und  $\mathcal{G}^i$  nennen wir **Schreimorphismen**.
3. Die Morphismen in  $\mathcal{T}^e$  nennen wir **Eigomorphismen**.
4. Den Trennrückzug längs einer Trennung  $p$  der Basis notieren wir  $p^\dagger$ .
5. Den Vorschub in Bezug auf die Kofaserung längs eines Schreimorphismus  $f$  notieren wir  $f_i$  und nennen ihn den **Schreibvorschub**. Einen in Bezug auf die Kofaserung  $\mathcal{G}^i \rightarrow \mathcal{T}^i$  kokartesischen Schreimorphismus nennen wir **schreikokartesisch**.

6. Gegeben ein Objekt  $X \in \mathcal{T}$  der Basis vereinbaren wir für die zur Faser opponierte Schmelzkategorie, wie sie in 1.5.4 eingeführt wurde, die Notation  $\mathcal{G}_{/X} := \mathcal{G}_X^{\text{opp}}$ . In typischen Anwendungen sind das Kategorien von Garben auf  $X$ . Die universellen Verschmelzungen in diesen Schmelzkategorien notieren wir  $\otimes = \otimes_X$  wie in 1.5.4. Ihr Einsobjekt notieren wir  $\underline{X}$ .
7. Den Opponierten des Rückzugs in unserer Faserung  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}$  für einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis  $\mathcal{T}$  notieren wir  $f^* := (f^\dagger)^{\text{opp}} : \mathcal{G}_{/Y} \rightarrow \mathcal{G}_{/X}$  und nennen auch ihn einen **Rückzug**.
8. Den Opponierten des Schreivorschubs längs eines Schreimorphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis notieren wir  $f_! := (f_!)^{\text{opp}} : \mathcal{G}_{/X} \rightarrow \mathcal{G}_{/Y}$  und nennen ihn oft einen **Schreivorschub**.
9. Unsere Daten beinhalten für jeden Eigmorphismus  $f \in \mathcal{T}^e$  eine Adjunktion  $(f_!, f^\dagger)$  alias  $(f^*, f_!)$ .

4.6.3 (**Verflechtung von Trennaustauschsituationen**). Gegeben eine Trennaustauschsituation  $(\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^i \leftarrow \mathcal{G}^i, \mathcal{T}^e)$  betrachten wir in der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge := (\wedge \mathcal{T})^\wedge$  der banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  die multiplikativen Systeme  $\mathcal{T}^\wedge \supset \mathcal{T}^{\text{ie}} \subset \mathcal{T}^{\text{ii}}$  der Tupel von Einsmorphisms aus  $\mathcal{T}^i$  beziehungsweise  $\mathcal{T}^e$ . In den Fasern nehmen wir die multiplikativen Systeme  $\mathcal{G}^\wedge \supset \mathcal{G}^{\text{ie}} | \mathcal{T}^{\text{ie}} \subset \mathcal{G}^{\text{ii}}$ . Die Winkelfaserung der zugehörigen Kategorienwinkel notieren wir

$$(\mathcal{G}^\wedge \rightarrow \mathcal{T}^\wedge \supset \mathcal{T}^{\text{ii}} \leftarrow \mathcal{G}^{\text{ii}}, \mathcal{T}^{\text{ie}})$$

und nennen sie die **Familienwinkelfaserung** unserer Trennaustauschsituation. Eine **Präverflechtung** beziehungsweise **Verflechtung** einer Trennaustauschsituation erklären wir als eine Präverflechtung beziehungsweise Verflechtung ihrer Familienwinkelfaserung in Bezug auf eine mit vorgegebene Regulierung der Basis derart, daß das Vertupeln Verflechtungsquadrate zu Verflechtungsquadraten macht. Ein Verflechtungsquadrat mit einer  $r$ -Trennung als zurückholendem Morphismus nennen wir in diesem Kontext ein  **$r$ -Verflechtungsquadrat**. Wenn nichts anderes gesagt wird, gehen wir in der Basis von der kartesischen Regulierung aus.

4.6.4 (**Verflechtung zu faserentrennrückzugstabilem System**). Seien  $\mathcal{T}$  eine Kategorie und  $\mathcal{T}^i$  darin ein rückzugstabiles multiplikatives System. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  über der banalen Trennkategorie zu  $\mathcal{T}$  und ein faserentrennrückzugstabiles multiplikatives System  $\mathcal{G}^i$  über  $\mathcal{T}^i$  nach 4.4.6 derart, daß  $\mathcal{G}^i \rightarrow \mathcal{T}^i$  eine Kofaserung ist, konstruieren wir eine Trennaustauschsituation

$$(\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^i \leftarrow \mathcal{G}^i, \mathcal{T}^e)$$

mit Präverflechtung durch alle kommutativen Rückholquadrate. Als  $\mathcal{T}^e$  können wir dabei jedes multiplikative Teilsystem von  $\mathcal{T}^i$  nehmen, über dem alle  $\mathcal{G}^i$ -Morphismen bereits  $\mathcal{G}$ -Morphismen sind. Unsere Präverflechtung ist genau dann

eine Verflechtung, wenn auch die schreikokartesischen Morphismen aus  $\mathcal{G}^i$  ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System bilden.

*Beispiel 4.6.5 (Trennverflechtung für diskrete gekringte Räume).* Wir betrachten die Trennaustauschsituation

$$(\text{Ab}_{//\wedge \text{Gekd}} \rightarrow \wedge \text{Gekd} \supset \text{Gekd} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Gekd}}^i, \text{Gekd}^e)$$

der Modulgarben auf gekringten diskreten Räumen. Die kommutativen Rückholquadrate bilden nach 4.4.16 und 4.6.4 eine Verflechtung in Bezug auf die kartesische Regulierung in der Basis.

*Beispiel 4.6.6 (Trennverflechtung für Vektorraumgarben).* Sei  $k$  ein Körper. Wir betrachten die Trennaustauschsituation

$$(k\text{-Mod}_{//\wedge \text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow k\text{-Mod}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^i, \text{Top}^{\text{es}})$$

der Garben von  $k$ -Vektorräumen auf topologischen Räumen. Die kommutativen Rückholquadrate bilden nach 4.4.13 und 4.6.4 eine Verflechtung in Bezug auf die kartesische Regulierung in der Basis.

4.6.7. Wir sagen, eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung **habe Adjungierte**, wenn sowohl der Rückzug  $f^\dagger$  längs jedes Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis als auch der Schreivorschub  $f_!$  längs jedes Schreimorphismus jeweils einen Rechtsadjungierten hat und wenn zusätzlich alle opponierten Fasern internes  $\text{Hom} \Rightarrow$  haben. Wir notieren die fraglichen Adjungierten  $f_+$  sowie  $f^i$  und haben die adjungierten Paare  $(f_+, f^\dagger)$  sowie  $(f^i, f_!)$ . Wir notieren die von unseren Adjungierten auf den opponierten Fasern induzierten Funktoren  $f_*$  und  $f^!$ , nennen sie den **Vorschub** und den **Schreirückzug** und haben mithin die adjungierten Paare  $(f^*, f_*)$  und  $(f^!, f^!)$ . Eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten mag man einen „Sechs-Funktor-Formalismus“ nennen. Die sechs Funktoren sind in diesem Kontext

$$f^*, f_*, f_!, f^!, \otimes, \Rightarrow$$

*Beispiel 4.6.8 (Adjungierte für Modulgarben auf diskreten Räumen).* Die Modulgarben auf diskreten gekringten Räumen 4.6.5 sind eine verflochtene Trennaustauschsituation mit Adjungierten. Das interne  $\text{Hom}$  kennen wir bereits, es berechnet sich punktweise als  $(M \Rightarrow N) = (\text{Hom}_{A_x}(M_x, N_x))_{x \in X}$ . Der Vorschub  $f_*$  macht aus  $M = (M_x)_{x \in X}$  das Produkt über die Fasern

$$(f_* M)_y = (\prod_{f(x)=y} \text{res}_{A_x}^{B_y} M_x)_{y \in Y}$$

im Unterschied zum Schreivorschub, bei dem hier das Koproduct über die Fasern zu nehmen ist. Der Schreirückzug  $f^!$  von  $N$  schließlich ist die Familie

$$f^! N = (\text{ind}_{B_{f(x)}}^{A_x} N_{f(x)})_{x \in X}$$

Mit  $\text{ind}_B^A = \text{Hom}_B(A, \_)$  notieren wir dabei den Rechtsadjungierten des Restriktionsfunktors auf Moduln, die **Induktion**. Der Linksadjungierte der Restriktion ist in unserer Notation die übliche Erweiterung der Skalare  $\text{prod}_B^A = A \otimes_B$ , die wir auch die **Produktion** nennen und die wir beim gewöhnlichen Rückzug verwenden müssen.

## 4.7 Formelsammlung für verflochtenen Trennaustausch

4.7.1. Im folgenden will ich einige Transformationen und Isomorphismen diskutieren, die direkt aus den Axiomen einer Trennaustauschsituation 4.6.1 mit Verflechtung 4.6.3 abgeleitet werden können. Die Argumente übertragen sich auf den Fall allgemeinerer Regulierungen, aber dabei wird es schwerfälliger in der Formulierung. Wir notieren unsere Trennaustauschsituation

$$(\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{F} \supset \mathcal{F}^i \leftarrow \mathcal{G}^i, \mathcal{F}^e)$$

4.7.2 (**Vertauschen von externem Produkt und Schreivorschub**). Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Schreimorphismen  $f : W \rightarrow X$  sowie  $g : Z \rightarrow Y$  in der Basis und Objekte  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_W$  sowie  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_Z$  der Fasern liefert Flechtbasiswechsel 4.5.14 im kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W \times Z & \longrightarrow & W \wedge Z \\ f \times g \downarrow & & \downarrow f \wedge g \\ X \times Y & \longrightarrow & X \wedge Y \end{array}$$

der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$ , wenn die Produkte in der linken Vertikale existieren, einen Isomorphismus  $(f \times g)_!(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_! \mathcal{F} \boxtimes g_! \mathcal{G}$  alias

$$\text{vf} : f_! \mathcal{F} \boxtimes g_! \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f \times g)_!(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$$

Hier deutet die Notation an, daß unser Morphismus von einer Verflechtung herkommt. Daß unser Quadrat in  $\mathcal{T}^\wedge$  kartesisch ist, überlegen wir uns eben auch noch. Ein Morphismus in der Familienkategorie in eine Einsfamilie wie etwa  $X \times Y$  muß von einer Einsfamilie ausgehen. Haben wir nun ein Objekt  $T$  und Morphismen  $w : T \rightarrow W$ ,  $z : T \rightarrow Z$  und  $u : T \rightarrow X \times Y$  mit  $fw = \text{pr}_X u$  und  $gz = \text{pr}_Y u$ , so gibt es genau einen Morphismus  $v : T \rightarrow A \times B$  mit  $w = \text{pr}_W v$  und  $z = \text{pr}_Z v$  und  $u = (f \times g)v$ , nämlich den Morphismus  $v = (w, z)$ .

*Beispiel 4.7.3.* Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Schreimorphismen  $f : A \rightarrow X$  sowie  $g : B \rightarrow Y$  und  $h : C \rightarrow Z$  in der Basis und Objekte  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_A$  sowie  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_B$  und  $\mathcal{H} \in \mathcal{G}_C$  der Fasern liefern die Morphismen

von oben zusammen mit einigen Assoziatoren die Kanten des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 & (f \times g)_i(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes h_i \mathcal{H} & \\
 \nearrow \sim & & \searrow \sim \\
 ((f \times g) \times h)_i((\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes \mathcal{H}) & & (f_i \mathcal{F} \boxtimes g_i \mathcal{G}) \boxtimes h_i \mathcal{H} \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 (f \times (g \times h))_i(\mathcal{F} \boxtimes (\mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H})) & & f_i \mathcal{F} \boxtimes (g_i \mathcal{G} \boxtimes h_i \mathcal{H}) \\
 \searrow \sim & & \nearrow \sim \\
 & f_i \mathcal{F} \boxtimes (g \times h)_i(\mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H}) &
 \end{array}$$

Ich will erklären, wie aus dem Formalismus einer Trennaustauschsituation mit Verflechtung folgt, daß es kommutiert. Dazu gehen wir aus von einem kommutativen Diagramm in der Familienkategorie der Basis der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc}
 A \times B \times C & \xrightarrow{\sim_d} & (A \times B) \times C & \longrightarrow & (A \times B) \wedge C & \longrightarrow & A \wedge B \wedge C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X \times Y \times Z & \xrightarrow{\sim_d} & (X \times Y) \times Z & \longrightarrow & (X \times Y) \wedge Z & \longrightarrow & X \wedge Y \wedge Z
 \end{array}$$

Es besteht nach Annahme aus drei kartesischen Basisquadraten der Familienkategorie. Da Verflechtungsquadrate per definitionem verkleben, paßt die obere Horizontale in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 d^\dagger((f \times g) \times h)_i((\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes \mathcal{H}) & \xrightarrow{\sim} & d^\dagger((f \times g)_i(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes h_i \mathcal{H}) & \xrightarrow{\sim} & d^\dagger((f_i \mathcal{F} \boxtimes g_i \mathcal{G}) \boxtimes h_i \mathcal{H}) \\
 \downarrow \wr & & & & \downarrow \wr \\
 (f \times g \times h)_i(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H}) & \xrightarrow{\sim} & & & f_i \mathcal{F} \boxtimes g_i \mathcal{G} \boxtimes h_i \mathcal{H}
 \end{array}$$

Hier bedeutet die untere Horizontale den Basiswechsel des einhüllenden Rechtecks und die oberen Horizontalen die beiden Flechtbasiswechsel der beiden Teilquadrate. Die rechte Vertikale ist eine Identifikation für Trennrückzüge, die linke Vertikale ein Verflechtungsisomorphismus  $d^\dagger((f \times g) \times h)_i \xrightarrow{\sim} (f \times g \times h)_i d^\dagger$  zusammen mit der Identifikation  $d^\dagger((\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \boxtimes \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H}$ . Dies Diagramm gilt es noch um eine entsprechende untere Hälfte zu ergänzen und so folgt dann die Behauptung.

**4.7.4 (Schreibvorschub unter Schreimonomorphismus).** Einen Schreimorphismus der Basis, der außerdem ein Monomorphismus ist, nennen wir einen **Schreimonomorphismus**. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und

ein Schreimonomorphismus  $i : A \rightarrow X$  ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{id}} & A \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow i \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  kartesisch und Flechtbasiswechsel liefert für alle  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X$  einen Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^\dagger i_* \mathcal{F}$  alias

$$i^* i_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

Gegeben Trennaustauschsituation mit Verflechtung und ein Schreimonomorphismus  $i : A \rightarrow X$  ist auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & A \wr A \\ i \downarrow & & \downarrow i \wr i \\ X & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & X \wr X \end{array}$$

der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  kartesisch und für Objekte  $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{G}_A$  liefert Flechtbasiswechsel in diesem kartesischen Diagramm einen ausgezeichneten Isomorphismus  $i_!(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} i_! \mathcal{E} \otimes i_! \mathcal{F}$  alias

$$i_! \mathcal{E} \otimes i_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i_!(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$$

*Beispiel 4.7.5.* Gegeben einpunktige gekringte Mengen ist jeder Morphismus ein Monomorphismus, der zu einem surjektiven Kringshomomorphismus  $B \twoheadrightarrow A$  gehört oder zu einem Kringshomomorphismus  $B \rightarrow A$ , der eine Lokalisierung ist. In beiden Fällen finden wir Isomorphismen  $A \otimes_B (\text{res}_A^B M) \xrightarrow{\sim} M$  und  $(\text{res}_A^B M) \otimes_B (\text{res}_A^B N) \xrightarrow{\sim} \text{res}_A^B (M \otimes_A N)$ .

4.7.6. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung, ein Schreimorphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis und Objekte  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X, \mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  der Fasern liefert Flechtbasiswechsel im kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}, f)} & X \wr Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \wr \text{id} \\ Y & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & Y \wr Y \end{array}$$

der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  einen Isomorphismus  $f_!(\mathcal{F} \otimes f^\dagger \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}$  alias den Isomorphismus der **Projektionsformel**

$$\text{vf} : (f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G})$$



4.7.7. Nun gehen wir aus von einer Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten. Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Schreimorphismus der Basis. Wenden wir den Isomorphismus  $\text{vf} : (f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G})$  der Projektionsformel 4.7.6 auf  $\mathcal{G} := f_* \mathcal{E}$  an und verwenden zusätzlich die Koeinheit der Adjunktion  $f^* f_* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , so erhalten wir in  $\mathcal{G}_Y$  einen ausgezeichneten Morphismus

$$\text{avf} : f_! \mathcal{F} \otimes f_* \mathcal{E} \rightarrow f_!(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$$

Mit  $\text{avf}$  bezeichnen wir hier und im folgenden Morphismen, die aus Adjunktionen, Verflechtungen und Identifikationen entstehen, also aus dem vollen Fundus einer Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten.

4.7.8 (**Restriktion von Hom-Garben und relative Verdierdualität**). Sei bei einer Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten ein Schreimorphismus der Basis  $f : X \rightarrow Y$  gegeben. Die Projektionsformel 4.7.6 liefert uns für  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  und  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X$  einen Isomorphismus  $f_!(f^* \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \otimes f_! \mathcal{F}$ . Für festes  $\mathcal{G}$  ist das eine Isotransformation von Funktoren in  $\mathcal{F}$ , genauer von Funktoren  $\mathcal{G}_X \rightarrow \mathcal{G}_Y$ . Diese Funktoren sind ihrerseits Kompositionen weiterer Funktoren. Alle diese Funktoren haben unter unseren Annahmen Rechtsadjungierte und wir erhalten durch Übergang zu den Rechtsadjungierten in  $\mathcal{G}_X$  Isomorphismen

$$(f^* \mathcal{G} \Rightarrow f^! \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^!(\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{E})$$

Ebenso kann die Projektionsformel für festes  $\mathcal{F}$  als eine Isotransformation von Kompositionen von Funktoren  $\mathcal{G}_Y \rightarrow \mathcal{G}_Y$  in  $\mathcal{G}$  gelesen werden. Aus dann erhalten wir durch Übergang zu den Rechtsadjungierten natürliche Isomorphismen, die Isomorphismen der **relativen Verdierdualität**

$$f_*(\mathcal{F} \Rightarrow f^! \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f_! \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{E}$$

4.7.9. Zum Vergleich wiederhole ich auch noch aus 1.5.9 die natürlichen Isomorphismen

$$(\mathcal{F} \Rightarrow f_* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f_*(f^* \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F})$$

4.7.10. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten, ein Schreimorphismus  $f : X \rightarrow Y$  und Objekte  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  erhalten wir einen natürlichen Morphismus

$$f^! \mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G} \rightarrow f^!(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

aus der Komposition  $f_!(f^! \mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_! f^! \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$  des von der Projektionsformel herrührenden Morphismus mit der Koeinheit der Adjunktion.

4.7.11 (**Verdierdualität**). Wir nehmen nun an, daß wir eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten haben über einer Basis  $\mathcal{T}$  mit einem finalen Objekt  $\text{pt}$ . Ein Objekt  $X \in \mathcal{T}$  derart, daß der einzige Morphismus  $\text{fin}_X : X \rightarrow \text{pt}$  ein Schreimorphismus ist, nennen wir dann ein **Schreibobjekt** von  $\mathcal{T}$ . Gegeben ein Schreibobjekt  $X$  setzen wir

$$\omega_X := \text{fin}_X^! \text{pt}$$

und nennen  $\omega_X$  das **dualisierende Objekt** von  $\mathcal{G}/X$  und erklären die **Verdier-Dualität** durch

$$\mathbb{D}_X \mathcal{F} := (\mathcal{F} \rightrightarrows \omega_X)$$

Für jeden Schreimorphismus  $f : X \rightarrow Y$  von Schreibobjekten erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$f^! \omega_Y \xrightarrow{\sim} f^! \text{fin}_Y^! \text{pt} \xrightarrow{\sim} \text{fin}_X^! \text{pt} \xrightarrow{\sim} \omega_X$$

Die Isomorphismen aus 4.7.8 spezialisieren, wenn wir  $\mathcal{E} = \omega_Y$  einsetzen, zu natürlichen Isomorphismen

$$f_* \mathbb{D}_X \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_Y f_! \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathbb{D}_X f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f^! \mathbb{D}_Y \mathcal{G}.$$

Die Koeinheit der Adjunktion  $f^* f_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  liefert weiter unter Dualisieren den ersten Morphismus von  $\mathbb{D}_X \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{D}_X f^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f^! \mathbb{D}_Y f_* \mathcal{F}$  und dann mit Adjunktion einen natürlichen Morphismus

$$f_! \mathbb{D}_X \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{D}_Y f_* \mathcal{F}$$

Die Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  liefert ähnlich  $\mathbb{D}_Y \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{D}_Y f_! f^! \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_* \mathbb{D}_X f^! \mathcal{G}$  und dann mit Adjunktion einen natürlichen Morphismus

$$f^* \mathbb{D}_Y \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{D}_X f^! \mathcal{G}$$

4.7.12. Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten und ein kartesisches Diagramm  $fp = qg$  der Basis mit  $f, g$  Schreimorphismen liefert der Basiswechsel  $q^* f_! \xrightarrow{\sim} g_! p^*$  durch Übergang zu den Linksadjungierten eine Isotransformation

$$f^! q_* \xrightarrow{\sim} p_* g^!$$

Schreiben wir  $p^*$  davor und  $q^*$  dahinter, so erhalten wir mit der Einheit  $\text{id} \Rightarrow q_* q^*$  der Adjunktion und der Koeinheit  $p^* p_* \Rightarrow \text{id}$  der Adjunktion eine Transformation

$$p^* f^! \Rightarrow g^! q^*$$

## Übungen

*Übung 4.7.13.* Ich habe diese Übung noch nicht gemacht. Man zeige: Die in 4.5.20 beschriebene Transformation  $f_! \Rightarrow f_*$  bildet zusammen mit dem Isomorphismus der Projektionsformel 4.7.6 und 1.5.17 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & f_!(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f_* \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} & \rightarrow & f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G}) \end{array}$$

*Übung 4.7.14.* Gegeben Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten und ein Schreimorphismus  $f : X \rightarrow Y$  zu einem Schreiojekt  $Y$  der Basis sowie ein Objekt  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  in der Faser über  $Y$  ist die Verknüpfung

$$f_! f^! \mathbb{D} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_! \mathbb{D} f^* \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{D} f_* f^* \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{D} \mathcal{G}$$

von natürlichen Morphismen aus 4.7.8 und der dualisierten Einheit der Adjunktion  $(f^*, f_*)$  auf  $\mathcal{G}$  die Koeinheit der Adjunktion  $(f_!, f^!)$  auf  $\mathbb{D} \mathcal{G}$ .

*Übung 4.7.15.* Gegeben eine Trennaustauschsituation mit Verflechtung und Adjungierten und ein Schreimorphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis macht die vom Morphismus  $\text{avf} : f_! \mathcal{F} \otimes f_* \underline{X} \rightarrow f_!(\mathcal{F} \otimes \underline{X})$  aus 4.7.7 induzierte Zweiverschmelzung  $f_! \mathcal{F} \curlywedge f_* \underline{X} \rightarrow f_! \mathcal{F}$  unser Objekt  $f_! \mathcal{F}$  zu einem Modul über dem Monoid  $f_* \underline{X}$  für die nach 1.5.17 von der Monoidstruktur auf  $\underline{X}$  herkommenden Monoidstruktur. Erfüllt  $f$  die Bedingungen aus 4.5.20, so ist der Morphismus  $f_! \mathcal{F} \rightarrow f_* \mathcal{F}$  zusätzlich ein Homomorphismus von  $f_* \underline{X}$ -Moduln. Ich habe diese Übung noch nicht gemacht.

*Beispiel 4.7.16.* Ist  $f : (X, A) \rightarrow (\text{pt}, A)$  der offensichtliche Morphismus von einer endlichen konstant gekringten Menge  $(X, A)$  auf die einpunktige gekringte Menge  $(\text{pt}, A)$ , so fallen  $f_!$  und  $f_*$  zusammen und unser Morphismus spezialisiert zur „Projektion auf die Diagonale“

$$\left( \bigoplus_{x \in X} M_x \right) \otimes_A \left( \bigoplus_{y \in X} N_y \right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x, y \in X} (M_x \otimes_A N_y) \rightarrow \bigoplus_{x \in X} (M_x \otimes_A N_x)$$

4.7.17. Ist speziell  $Y$  lesb und  $f : X \rightarrow Y$  lesb, so gilt dasselbe für  $X$  und wir erhalten Isomorphismen

$$f^! \omega_Y \xrightarrow{\sim} f^! \text{fin}_Y^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \text{fin}_X^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \omega_X$$

und mit  $\mathcal{E} = \omega_Y$  schließlich Isomorphismen

$$f_* \mathbb{D}_X \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_Y f_! \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathbb{D}_X f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f^! \mathbb{D}_Y \mathcal{G}.$$

## 5 Derivierter Trennrückzug und Schreivorschub

### 5.1 Motivation

Im folgenden konstruieren wir Trenaustauschsituationen mit Verflechtung und Adjungierten von Modulgarben auf nicht notwendig diskreten Räumen, indem wir von der präverflochtenen Trenaustauschsituation der Modulgarben auf geringten Räumen

$$(\text{Ab}_{//\wedge \text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Gek}}^i, \text{Gek}^e)$$

ausgehen, die aus Übung 4.4.19 mit 4.6.4 entsteht, sie geeignet einschränken und zu derivierten Kategorien übergehen. In dieser Situation liefert die flache Projektionsformel eine allgemeingültige Projektionsformel, da wir Trennrückzug mit flachen Auflösungen berechnen, und der Schreivorschub besitzt einen Adjungierten, dessen Beschreibung im Fall der konstanten Abbildung einer Mannigfaltigkeit auf den einpunktigen Raum einen Zugang zur Poincarédualität eröffnet.

### 5.2 Derivierter Schreivorschub

5.2.1. Ich erinnere an unsere Notation  $\text{Ab}_{//X} := \text{Ab}_{/X}^{\text{opp}}$ . Wir beginnen mit der Konstruktion eines Funktors

$$\text{Hot} \left( \text{Ab}_{//\text{Top}}^i \right) \rightarrow \text{Top}$$

Als Objekte der Ausgangskategorie nehmen wir alle Komplexe von abelschen Garben auf unseren topologischen Räumen. Als Morphismen der Ausgangskategorie über einer Abbildung  $f$  nehmen wir Homotopieklassen von Kettenabbildungen aus Schreimorphismen über  $f$ .

5.2.2. Beschränken wir uns in der Basis auf die Kategorie  $\text{Top}^s$  aller topologischen Räume mit nur separierten Abbildungen als Morphismen, so erhalten wir einen Kofaserfunktor

$$\text{Hot} \left( \text{Ab}_{//\text{Top}^s}^i \right) \rightarrow \text{Top}^s$$

mit dem komponentenweisen Schreivorschub  $f_i$  eines Komplexes als Vorschub, wie man unschwer aus der analogen Aussage [TG] 6.4.9 für abelsche Garben folgert. Wir nennen diesen Kofaserfunktor die **Schreikofaserung der Homotopiekomplexe**.

5.2.3. Wir erinnern feiner die Kategorie  $\text{Top}^{\text{les}}$  der topologischen Räume mit lokal eigentlichen separierten alias les-Abbildungen als Morphismen.

**Satz 5.2.4 (Halbseitig derivierte Schreikofaserung).** 1. *Durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen über Identitäten erhalten wir aus unserer entsprechend eingeschränkten Schreikofaserung der Homotopiekomplexe eine Kofaserung*

$$\mathrm{Der}_{\parallel \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}^{-i} := \mathrm{Hot}^{-}(\mathrm{Ab}_{\parallel \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}^i)_{\mathrm{qis}} \rightarrow \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$$

2. *Für jeden topologischen Raum  $X$  ist der natürliche Funktor ein Isomorphismus  $e_X : \mathrm{Der}^{-}(\mathrm{Ab}_{\parallel X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\parallel X}^{-i}$  von der Lokalisierung der Faser zur Faser der Lokalisierung;*
3. *Jeder für  $\mathrm{Hot}^{-}(\mathrm{Ab}_{\parallel \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}^i) \rightarrow \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$  kokartesischer Morphismus, der von einem Komplex faserweise kompaktweicher abelscher Garben ausgeht, bleibt kokartesisch in der Lokalisierung;*
4. *Gegeben eine les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  existiert eine Isotransformation zwischen den beiden Kompositionen des Diagramms*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}^{-}(\mathrm{Ab}_{\parallel X}) & \xrightarrow{(Rf_i)^{\mathrm{opp}}} & \mathrm{Der}^{-}(\mathrm{Ab}_{\parallel Y}) \\ e_Y \downarrow \wr & \swarrow \sim & \downarrow e_X \wr \\ \mathrm{Der}_{\parallel X}^{-i} & \xrightarrow{f_{\ddagger}} & \mathrm{Der}_{\parallel Y}^{-i} \end{array}$$

*mit dem Opponierten Derivierten des gewöhnlichen Schreivorschubs und dem Vorschub  $f_{\ddagger}$  in der derivierten Schreikofaserung in den Horizontalen.*

5.2.5. Insbesondere sind die Vorschübe  $f_{\ddagger}$  der derivierten Schreikofaserung triangulierte Funktoren für die durch die Isomorphismen  $e_X$  auf den Fasern gegebenen Strukturen als triangulierte Kategorie. Wir werden bald die Notation ändern und  $f_i$  statt  $f_{\ddagger}$  schreiben, aber bisher bezeichnet  $f_i$  noch den underivierten Schreivorschub.

5.2.6. Die Beschränkung auf halbseitig beschränkte derivierte Kategorien brauchen wir für den Nachweis, daß wir einen Kofaserfunktoren vor uns haben. Man kann zwar  $f_i$  durchaus ohne weitere Annahmen und unbeschränkt mit Quisrechtsentfaltungen derivieren, aber dann ist nicht klar, warum die Verknüpfung der Derivierten der Derivierten der Verknüpfung sein sollte. Ich erwarte insgeheim, daß das gar nicht stimmt. Im Anschluß zeigen wir, wie man mit unbeschränkten derivierten Kategorien arbeiten kann, wenn man sich auf „lesb-Abbildungen“ beschränkt.

*Beweis.* Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus Korollar 2.5.11, sobald wir die Existenz einer Linksanpassung nachweisen. Dazu führen wir in 5.2.9

„schwach kompaktweiche Garben“ ein und zeigen in 5.2.12, daß die entsprechend halbseitig beschränkten Komplexe aus schwach kompaktweichen Garben eine solche Linksanpassung bilden. Die dritte Aussage folgt en passant mit Korollar 2.5.12 aus Lemma 5.2.7, nach dem gegeben eine les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  jede  $f$ -kompaktweiche abelsche Garbe  $f_!$ -rechtszyklisch ist, so daß nach [TD] 3.4.13 jeder gegen die Pfeile beschränkte Komplex von  $f$ -kompaktweichen abelschen Garben bereits  $f_!$ -rechtsentfaltet alias nach Übergang zu den opponierten Kategorien  $f_!$ -quilslinksentfaltet ist. Die vierte Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz.  $\square$

**Lemma 5.2.7.** *Gegeben eine les-Abbildung  $f$  ist jede  $f$ -kompaktweiche abelsche Garbe  $f_!$ -rechtszyklisch.*

*Beweis.* Seien  $f : X \rightarrow Y$  unsere les-Abbildung und  $\mathcal{F}$  unsere faserweise kompaktweiche Garbe und  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$  eine injektive Auflösung. Es gilt zu zeigen, daß  $f_!\mathcal{F} \hookrightarrow f_!\mathcal{I}^\triangleleft$  ein exakter Komplex von Garben auf  $Y$  ist. Dafür müssen wir nur die Exaktheit auf den Halmen an allen Punkten  $y \in Y$  prüfen. Mit les-Basiswechsel 4.1.16 reicht es dazu hinwiederum, für  $i = i_y$  die Inklusion der Faser  $f^{-1}(y)$  die Exaktheit von  $\Gamma_!(i^*\mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma_!(i^*\mathcal{I}^\triangleleft)$  zu prüfen. Das folgt jedoch formal mit [TG] 4.8.12 oder auch explizit mit [TG] 4.8.13, da  $i^*\mathcal{F} \hookrightarrow i^*\mathcal{I}^\triangleleft$  nach 5.2.10 eine exakte Sequenz kompaktweicher Garben auf  $f^{-1}(y)$  ist.  $\square$

**Lemma 5.2.8.** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen. Ist  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  kompaktweich, so ist auch  $f_!\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/Y}$  kompaktweich.*

*Beweis.* Für  $K \subset Y$  kompakt ist  $f^{-1}(K) \subset X$  abgeschlossen. Nach [TG] 4.8.14 induziert also das Einschränken eine Surjektion auf den Schnitten mit kompaktem Träger  $\Gamma_!(X; \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(f^{-1}(K); \mathcal{F})$ . Die linke Seite können wir nach [TG] 6.4.9 identifizieren mit  $\Gamma_!(Y; f_!\mathcal{F})$ . Die rechte Seite können wir ebenfalls mit [TG] 6.4.9 und Basiswechsel 4.1.16 im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(K) & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow g & \lrcorner & \downarrow f \\ K & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

umschreiben zu

$$\Gamma_!(f^{-1}(K); \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!g_!j^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_!i^*f_!\mathcal{F} = \Gamma_!(K; f_!\mathcal{F})$$

Die von unserer Surjektion  $\Gamma_!(X; \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(f^{-1}(K); \mathcal{F})$  unter diesen Identifikationen induzierte Abbildung  $\Gamma_!(Y; f_!\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(K; f_!\mathcal{F})$  ist nun genau die Restriktion von Schnitten. Folglich ist auch diese surjektiv.  $\square$

**Definition 5.2.9.** Eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum, deren Einschränkung auf jeden relativ Hausdorff'schen lokal kompakten Teilraum kompaktweich ist, nennen wir **schwach kompaktweich**.

5.2.10. Jede injektive Garbe ist welk, jede welke Garbe kompaktweich nach [TG] 4.8.11, jede kompaktweiche Garbe schwach kompaktweich und jede schwach kompaktweiche Garbe faserweise kompaktweich in Bezug auf eine beliebige les-Abbildung. Jeder filtrierende Kolimes von schwach kompaktweichen Garben ist wieder schwach kompaktweich, da das nach 4.2.6 auf lokal kompakten Hausdorffräumen gilt und da die Einschränkung von Garben mit Kolimites vertauscht.

**Lemma 5.2.11.** *Der Schreivorschub einer schwach kompaktweichen abelschen Garbe unter einer beliebigen les-Abbildung ist wieder schwach kompaktweich.*

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  unsere Abbildung und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  unsere schwach kompaktweiche abelsche Garbe. Gegeben ein relativ Hausdorff'scher lokal kompakter Teilraum  $L \subset Y$  bilden wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(L) & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow g & \lrcorner & \downarrow f \\ L & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Es gilt zu zeigen, daß  $i^* f_* \mathcal{F}$  kompaktweich ist. Nach les-Basiswechsel 4.1.16 können wir gleichbedeutend zeigen, daß  $g_* j^* \mathcal{F}$  kompaktweich ist. Nach Übung [TM] 2.4.26 ist  $j$  auch die Einbettung eines relativ Hausdorff'schen Teilraums. Nach 4.1.11 ist auch  $g$  eine les-Abbildung und nach 4.1.20 auch die Verknüpfung von  $g$  mit der konstanten Abbildung auf den einpunktigen Raum. Nach 4.1.4 ist dann auch  $f^{-1}(L)$  lokal kompakt. Da wir  $\mathcal{F}$  schwach kompaktweich vorausgesetzt hatten, ist also  $j^* \mathcal{F}$  kompaktweich, und dann muß nach 5.2.8 auch  $g_* j^* \mathcal{F}$  kompaktweich sein.  $\square$

**Lemma 5.2.12.** *Die entsprechend beschränkten Komplexe von schwach kompaktweichen Garben bilden eine Linksanpassung in Bezug auf das faserweise Links-oresystem der Quasiisomorphismen für unsere auf les-Abbildungen in der Basis eingeschränkte Schreikofaserung der Homotopiekomplexe*

$$\text{Hot}^-(\text{Ab}_{\parallel \text{Top}^{\text{les}}}^i) \rightarrow \text{Top}^{\text{les}}$$

*Beweis.* Die Gesamtheit aller Komplexe schwach kompaktweicher Garben ist stabil unter Schreivorschub längs les-Abbildungen nach 5.2.11 und ebenso opponiert stabil unter Schreivorschub längs les-Abbildungen. Die Gesamtheit aller entsprechend beschränkten Komplexe schwach kompaktweicher Garben bildet folglich

eine Unterkofaserung. Weiter sind alle injektiven Garben schwach kompaktweich nach 5.2.10, so daß jeder gegen die Differentiale beschränkte Komplex von abelschen Garben einen Quasiisomorphismus zu einem gegen die Differentiale beschränkten Komplex von schwach kompaktweichen Garben besitzt. Entsprechendes folgt in den opponierten Kategorien. Schließlich ist jede schwach kompaktweiche abelsche Garbe auf einem Raum  $X$  auch  $f$ -kompaktweich für jede les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und damit  $f_!$ -rechtszyklisch nach 5.2.7. Nach [TD] 3.4.13 sind die entsprechend beschränkten Komplexe schwach kompaktweicher abelscher Garben folglich auch  $f_!$ -quisrechtsentfaltet und opponiert  $f_!$ -quislinksentfaltet und bilden damit in der Tat eine Linksanpassung wie behauptet.  $\square$

5.2.13. Wir nennen eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  eine **lesb-Abbildung** oder kurz **lesb**, wenn sie eine les-Abbildung ist und der Schreivorschub  $f_! : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$  endliche homologische Dimension hat. Nach 5.2.4 gilt für entsprechend halbseitig beschränkte Komplexe  $\mathcal{F}$  und verknüpfbare les-Abbildungen stets

$$\text{R}g_!(\text{R}f_!\mathcal{F}) \cong \text{R}(g \circ f)_!\mathcal{F}$$

Mit den Erkenntnissen zum Derivieren homologisch beschränkter Funktoren [TD] 3.6.4 sehen wir so, daß jede Verknüpfung von lesb-Abbildungen wieder lesb ist. Die Kategorie der topologischen Räume mit lesb-Abbildungen als Morphismen notieren wir  $\text{Top}^{\text{lesb}}$ .

**Satz 5.2.14 (Unbeschränkt derivierte Schreikofaserung).** *1. Durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen über Identitäten erhalten wir aus unserer entsprechend eingeschränkten Schreikofaserung der Homotopiekomplexe eine Kofaserung*

$$\text{Der}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^i := \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^i)_{\text{qis}} \rightarrow \text{Top}^{\text{lesb}}$$

2. *Für jeden topologischen Raum  $X$  ist der natürliche Funktor ein Isomorphismus  $\text{Der}(\text{Ab}_{//X}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{//X}^i$  von der Lokalisierung der Faser zur Faser der Lokalisierung;*
3. *Jeder für  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^i) \rightarrow \text{Top}^{\text{lesb}}$  kokartesische Morphismus, der von einem Komplex von faserweise kompaktweichen abelschen Garben ausgeht, bleibt kokartesisch in der Lokalisierung;*
4. *Gegeben eine les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  existiert eine Isotransformation zwischen den beiden Kompositionen des Diagramms*

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}(\text{Ab}_{//X}) & \xrightarrow{(\text{R}f_!)^{\text{opp}}} & \text{Der}(\text{Ab}_{//Y}) \\ e_Y \downarrow \wr & \swarrow \sim & e_X \downarrow \wr \\ \text{Der}_{//X}^i & \xrightarrow{f_{\ddagger}} & \text{Der}_{//Y}^i \end{array}$$



mit dem Opponierten Derivierten des gewöhnlichen Schreivorschubs und dem Vorschub  $f_{\ddagger}$  in der derivierten Schreikofaserung in den Horizontalen.

5.2.15. Insbesondere sind die Vorschübe  $f_{\ddagger}$  der derivierten Schreikofaserung triangulierte Funktoren für die durch die Isomorphismen  $e_X$  auf den Fasern gegebenen Strukturen als triangulierte Kategorie. Wir werden bald die Notation ändern und  $f_{\ddagger}$  statt  $f_{\ddagger}$  schreiben, aber bisher bezeichnet  $f_{\ddagger}$  noch den underivierten Schreivorschub.

*Beweis.* Die erste und die dritte Aussage folgen direkt aus Korollar 2.5.11, sobald wir die Existenz einer **Linksanpassung** nachweisen. Dazu zeigen wir in 5.2.16, daß die Komplexe aus schwach kompaktweichen Garben eine solche Linksanpassung bilden. Die zweite Aussage folgt en passant mit Korollar 2.5.12 aus Lemma 5.2.7, nach dem gegeben eine lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  jede  $f$ -kompaktweiche abelsche Garbe  $f_{\ddagger}$ -rechtszyklisch ist, so daß nach unseren Erkenntnissen [TD] 3.6.4 zum unbeschränkten Derivieren homologisch endlicher Funktoren für lesb-Abbildungen  $f$  jeder Komplex von  $f$ -kompaktweichen abelschen Garben bereits  $f_{\ddagger}$ -quisrechtsentfaltet alias nach Übergang zu den opponierten Kategorien  $f_{\ddagger}$ -quislinksentfaltet ist.  $\square$

**Lemma 5.2.16.** *Die Komplexe von schwach kompaktweichen Garben bilden eine Linksanpassung in Bezug auf das faserweise Linksoresystem der Quasiisomorphismen für unsere auf lesb-Abbildungen in der Basis eingeschränkte Schreikofaserung der Homotopiekomplexe*

$$\text{Hot}(\text{Ab}_{\text{Top}^{\text{lesb}}}^i) \rightarrow \text{Top}^{\text{lesb}}$$

*Beweis.* Nach [TG] 9.3.5 besitzt jeder Garbenkomplex eine Cartan-Eilenberg-Oberauflösung durch schwach kompaktweiche Garben. Wir spiegeln sie an der Hauptdiagonalen, so daß sie ein Doppelkomplex in der rechten Halbebene wird und unser Ausgangskomplex der vertikale Kernkomplex. Wenn wir diesen Kernkomplex ergänzen ergibt sich ein Doppelkomplex mit exakten Zeilen. Nach den Exaktheitskriterien [TD] 3.7.3 für Totalkomplexe ist dann auch sein Summentotal exakt, denn die Exaktheit von Garbenkomplexen kann man auf den Halmen prüfen und die Halme der Summen sind die Summen der Halme und im Fall abelscher Gruppen ist das Summentotal eines Doppelkomplexes in der rechten Halbebene mit exakten Zeilen auch seinerseits exakt. Das bedeutet, daß unser Ausgangskomplex quasiisomorph in das Summentotal unserer gespiegelten Cartan-Eilenberg-Auflösung abgebildet wird. Nach 5.2.10 ist jede direkte Summe schwach kompaktweicher Garben schwach kompaktweich. Folglich gibt es von jedem Komplex abelscher Garben einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex schwach kompaktweicher abelscher Garben. Nach unseren Erkenntnissen [TD]

3.6.4 zum unbeschränkten Derivieren homologisch endlicher Funktoren ist weiter jeder Komplex schwach kompaktweicher abelscher Garben  $f_!$ -quisrechtsentfaltet für jede lesb-Abbildung  $f$ . Daß schließlich Komplexe schwach kompaktweicher abelscher Garben unter Schreivorschub auf Komplexe schwach kompaktweicher abelscher Garben abgebildet werden, wissen wir bereits aus 5.2.11 und das sogar für beliebige les-Abbildungen. Durch Übergang zu den opponierten Kategorien ergibt sich das Lemma.  $\square$

5.2.17. Einen topologischen Raum nennen wir **lesb**, wenn die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum lesb ist. Nach [TG] 4.10.14 ist ein lokal kompakter Hausdorffraum lesb, wenn er eine Überdeckung durch offene Teilmengen besitzt, für die die homologische Dimension von  $\Gamma_!$  eine gemeinsame endliche Schranke besitzt. Nach der Lokalisierungssequenz ist ein lokal kompakter Hausdorffraum lesb, wenn er eine Zerlegung in eine offene Teilmenge und ihr abgeschlossenes Komplement besitzt derart, daß beide Stücke dieser Zerlegung lesb sind. Jede lokal abgeschlossene Teilmenge eines lesb-Raums ist lesb.

5.2.18 (**Notation für derivierten Schreivorschub**). Wir notieren von nun an den underivierten Schreivorschub neu  $f_{(!)} : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$  beziehungsweise auf den opponierten Kategorien  $f_{(i)} : \text{Ab}_{//X} \rightarrow \text{Ab}_{//Y}$  und reservieren  $f_!$  beziehungsweise  $f_i$  als Notation für die zugehörigen derivierten Funktoren alias Vorschübe der derivierten Schreikofaserung. Gegeben eine lesb- oder les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bezeichnen also

$$f_i : \text{Der}(\text{Ab}_{//X}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{//Y}) \quad \text{und} \quad f_! : \text{Der}^-(\text{Ab}_{//X}) \rightarrow \text{Der}^-(\text{Ab}_{//Y})$$

den Vorschub in Bezug auf die Kofaserungen

$$\text{Der}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^i \rightarrow \text{Top}^{\text{lesb}} \quad \text{und} \quad \text{Der}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^{-i} \rightarrow \text{Top}^{\text{les}}$$

und wir setzen jeweils  $f_! := (f_i)^{\text{opp}}$ . Da nach unseren Sätzen die Einschränkung unserer ersten Kofaserung auf die Basis der zweiten eine volle Unterkofaserung ist, müssen wir dabei keine Mehrdeutigkeiten fürchten. Als Vorschübe einer Kofaserung werden unsere  $f_i$  unter anderem mit ausgezeichneten Isotransformationen  $(gf)_i \xrightarrow{\cong} g_i f_i$  alias  $g_! f_! \xrightarrow{\cong} (gf)_!$  für entsprechend verknüpfbare Morphismen  $f, g$  geliefert, den Identifikationen unserer Kofaserung. Für die globalen Schnitte mit kompaktem Träger behalten wir in diesem Kontext jedoch die Notationen  $\Gamma_!$  und  $R\Gamma_!$  bei und verzichten darauf, diese Funktoren in  $\Gamma_{(!)}$  und  $\Gamma_!$  umzubenennen.

5.2.19 (**Derivierter Schreivorschub für Modulgarben**). Einen Morphismus geringter Räume nennen wir einen **les-Morphismus**, wenn die zugrundeliegende stetige Abbildung eine les-Abbildung ist. Die Kategorie der geringten Räume mit les-Morphismen als Morphismen notieren wir

$$\text{Ger}^{\text{les}}$$

Einen Opkomorphismus von Modulgarben nennen wir **eigentlich**, wenn der zugrundeliegende Opkomorphismus von abelschen Garben eigentlich ist. So erhalten wir eine Kofaserung

$$\text{Ab}_{\text{Ger}^{\text{les}}}^i \rightarrow \text{Ger}^{\text{les}}$$

und durch Übergang zu Homotopiekategorien eine Kofaserung

$$\text{Hot}^- (\text{Ab}_{\text{Ger}^{\text{les}}}^i) \rightarrow \text{Ger}^{\text{les}}$$

Die Komplexe aus schwach kompaktweichen Modulgarben bilden eine Linksanpassung in Bezug auf Quasiisomorphismen, denn die abelsche Kategorie der Modulgarben besitzt nach 1.3.14 genug Injektive und diese sind nach 1.3.14 auch weik und damit nach 5.2.10 schwach kompaktweich. Beim Lokalisieren unserer Kofaserung nach Quasiisomorphismen erhalten wir also wieder eine Kofaserung. Wir notieren sie

$$\text{Der}_{\text{Ger}^{\text{les}}}^{-i} := \text{Hot}^- (\text{Ab}_{\text{Ger}^{\text{les}}}^i)_{\text{qis}} \rightarrow \text{Ger}^{\text{les}}$$

Die Aussagen von Satz 5.2.4 gelten genauso in diesem Fall, wir müssen darin nur Top durch Ger ersetzen.

5.2.20 (**Derivierter Schreivorschub und Vergessen der Skalare**). Jeder Morphismus  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von geringten Räumen paßt in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{A}) & \rightarrow & (Y, \mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, \mathbb{Z}_X) & \rightarrow & (Y, \mathbb{Z}_Y) \end{array}$$

Ist die Abbildung  $X \rightarrow Y$  der zugrundeliegenden topologischen Räume eine les-Abbildung, so präzisieren die durch die Identifikationen unserer derivierten Modulgarbenschreikofaserung gegebenen Isomorphismen zwischen den Schreivorschüben von oben links nach unten rechts auf beiden möglichen Wegen die Erkenntnis, daß salopp gesprochen der derivierte Schreivorschub von Modulgarben „derselbe“ ist wie der derivierte Schreivorschub der zugrundeliegenden abelschen Garben.

5.2.21. Ein Morphismus geringter Räume heiße ein **lesb-Morphismus**, wenn er ein les-Morphismus ist und wenn zusätzlich der Schreivorschub von Modulgarben homologisch endlich ist. Nach dem vorhergehenden bilden die lesb-Morphismen ein multiplikatives System. Ein Morphismus geringter Räume heiße eine **lesb-Abbildung**, wenn er ein les-Morphismus ist und wenn zusätzlich der Schreivorschub von abelschen Garben darunter homologisch endlich ist. Nach dem vorhergehenden bilden die lesb-Abbildungen ein noch kleineres multiplikatives System. Unsere verschiedenen multiplikativen Systeme notieren wir

$$\text{Ger}^{\text{lesba}} \subset \text{Ger}^{\text{lesb}} \subset \text{Ger}^{\text{les}} \subset \text{Ger}$$

und erhalten so eine offensichtliche Verallgemeinerung von 5.2.14 für den Funktor

$$\mathrm{Der}_{\parallel \mathrm{Ger}^{\mathrm{lesb}}}^i := \mathrm{Hot} \left( \mathrm{Ab}_{\parallel \mathrm{Ger}^{\mathrm{lesb}}}^i \right)_{\mathrm{qis}} \rightarrow \mathrm{Ger}^{\mathrm{lesb}}$$

## Übungen

*Übung 5.2.22.* Gegeben ein les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$  ist unsere Garbe  $f_{(!)}$ -rechtszyklisch genau dann, wenn ihre Restriktion auf jede Faser  $\Gamma_!$ -rechtszyklisch ist.

*Übung 5.2.23.* Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine eigentliche Abbildung lokal kompakter Hausdorffräume und  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  ein Komorphismus abelscher Garben darüber alias ein Morphismus  $f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  und  $a : X \rightarrow \mathrm{top}$  sowie  $b : Y \rightarrow \mathrm{top}$  die konstanten Abbildungen. Die Einheit der Adjunktion  $\mathcal{G} \rightarrow f_*f^*\mathcal{G}$  induziert dann einen Morphismus

$$b_!\mathcal{G} \rightarrow b_!f_*f^*\mathcal{G} = b_!f_!f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} a_!f^*\mathcal{G} \rightarrow a_!\mathcal{F}$$

und unter  $\mathcal{H}^q$  einen Morphismus  $H_1^q(Y; \mathcal{G}) \rightarrow H_1^q(X; \mathcal{F})$ . Man zeige, daß er genau unser eigentlicher Rückzug auf der kompakten Garbenkohomologie aus [TG] 4.9.3 ist.

*Übung 5.2.24.* Gegeben  $j : X \hookrightarrow Y$  eine offene Einbettung induziert unsere Adjunktion  $(j_{(!)}, j^{(*)})$  exakter Funktoren nach [TD] 3.4.16 eine Adjunktion  $(j_!, j^*)$  der zugehörigen derivierten Funktoren. Sind hier  $X, Y$  lokal kompakte Hausdorffräume und bezeichnet  $c : Y \rightarrow \mathrm{top}$  die konstante Abbildung, so liefert für  $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}_{/Y}$  die Einheit der Adjunktion  $j_!j^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  unter  $\mathcal{H}^q c_!$  Morphismen  $H_1^q(X; \mathcal{G}) \rightarrow H_1^q(Y; \mathcal{G})$ . Man zeige, daß sie genau unsere Ausdehnung durch Null auf der kompakten Garbenkohomologie aus [TG] 4.9.7 sind.

*Übung 5.2.25.* Gegeben ein  $U \Subset X$  ein offene Teilmenge eines lokal kompakten Hausdorffraums und  $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$  kompaktweich ist auch  $\mathcal{F}_{U \subset X} \in \mathrm{Ab}_{/X}$  kompaktweich. Hinweis: Man überzeuge sich explizit, daß  $\mathcal{F}|_U$  kompaktweich ist, und verwende 5.2.8.

## 5.3 Ausgezeichnete Dreiecke zu offenen Teilmengen

5.3.1. Ich verwende im folgenden wie eben vereinbart runde Klammern um Indizes  $*$  und  $!$  als Notation für die underivierten Versionen unserer üblichen Funktoren. Gegeben eine offene Einbettung  $j : U \hookrightarrow X$  erinnern wir aus [TG] 4.9.9, [TG] 4.3.13 die adjungierten Funktoren  $(j_{(!)}, j^{(*)}, j_{(*)})$  zu  $j^{(*)} : \mathrm{Ab}_{/X} \rightarrow \mathrm{Ab}_{/U}$ . Hier sind die Ausdehnung  $j_{(!)}$  durch Null und der Rückzug  $j^{(*)}$  exakt und der Vorschub  $j_{(*)}$  ist zumindest linksexakt. Gegeben eine abgeschlossene Einbettung

$i : Z \hookrightarrow X$  erinnern wir aus [TG] 4.3.13, [TG] 6.4.14 weiter die adjungierten Funktoren  $(i^{(*)}, i_{(*)}, i^{(l)})$  zu  $i_{(*)} : \text{Ab}_Z \rightarrow \text{Ab}_X$ . Hier sind der Vorschub  $i_{(*)}$  und der Rückzug  $i^{(*)}$  exakt und der Funktor  $i^{(l)}$  ist zumindest linksexakt.

5.3.2. Gegeben eine abgeschlossene Einbettung  $i : Z \hookrightarrow X$  liefert das adjungierte Paar  $(i_{(*)}, i^{(l)})$  von Funktoren auf abelschen Garben nach [TD] 3.4.16 ein adjungiertes Paar von triangulierten Funktoren  $(Li_{(*)}, Ri^{(l)})$ . Genauer ist  $i_{(*)}$  exakt und nach [TD] 3.4.9 ist folglich sein Linksderivierter auf allen Komplexen definiert und stimmt mit dem Rechtsderivierten überein, für den wir bereits die Notation  $i_*$  vereinbart hatten. Andererseits besitzt jeder Garbenkomplex eine Quisrechtsentfaltung nach 2.3.2 und folglich ist auch der Rechtsderivierte eines additiven Funktors auf jedem Komplex definiert. Wir vereinbaren die Notation  $i^! := Ri^{(l)}$  und erhalten nach [TD] 3.2.28 Tripel adjungierter triangulierter Funktoren

$$(j_!, j^! = j^*, j_*) \quad \text{und} \quad (i^*, i_* = i_!, i^!)$$

zwischen den entsprechenden derivierten Kategorien  $\text{Der}(\text{Ab}_U)$ ,  $\text{Der}(\text{Ab}_X)$  und  $\text{Der}(\text{Ab}_Z)$ .

**Proposition 5.3.3 (Gysin-Sequenzen).** *Seien  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_X)$  ein Komplex abelscher Garben auf einem Raum  $X$  und  $i : Z \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge sowie  $j : U \hookrightarrow X$  die Einbettung ihres offenen Komplements. So lassen sich die Einheit und Koeinheit der jeweiligen Adjunktionen auf genau eine Weise durch Morphismen vom Grad Eins ergänzen zu ausgezeichneten Dreiecken*

$$\begin{array}{ccccccc} j_!j^!\mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & i_*i^*\mathcal{F} & \rightarrow & [1] \\ i_!i^!\mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & j_*j^*\mathcal{F} & \rightarrow & [1] \end{array}$$

*Beweis.* Offensichtlich liefern für jede abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_X$  die Koeinheit und Einheit der entsprechenden Adjunktionen eine kurze exakte Sequenz

$$j_{(l)}j^{(l)}\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow i_{(*)}i^{(*)}\mathcal{F}$$

Betrachten wir diese kurzen exakten Sequenzen für Komplexe von Garben und beachten, daß unsere Funktoren soweit alle exakt sind, so erhalten wir mit [TD] 2.6.4 für alle  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_X)$  ein ausgezeichnetes Dreieck

$$j_!j^!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*i^*\mathcal{F} \xrightarrow{[1]}$$

in  $\text{Der}(\text{Ab}_X)$ . Der dritte Pfeil  $i_*i^*\mathcal{F} \rightarrow j_!j^!\mathcal{F}[1]$  wird hier nach [TD] 2.2.14 bereits durch die beiden anderen festgelegt, da Basiswechsel  $i^*j_! = 0$  zeigt und mit einer Adjunktion  $\text{Der}_X(j_!j^!\mathcal{F}[1], i_*i^*\mathcal{F}) = 0$  folgt. Damit ist das erste Dreieck

hergeleitet. Offensichtlich liefern für jede abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  die Koeinheit und Einheit der entsprechenden Adjunktionen auch eine linksexakte Sequenz

$$i_{(1)}i^{(1)}\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_{(*)}j^{(*)}\mathcal{F}$$

Man erkennt leicht, daß sie für welches und insbesondere für injektives  $\mathcal{F}$  sogar exakt ist und folgert dann genau wie zuvor die Existenz und Eindeutigkeit des zweiten Dreiecks aus der Existenz von Quisrechtsentfaltungen durch Komplexe aus injektiven Garben nach 2.3.2.  $\square$

**5.3.4 (Nocheinmal lokale Kohomologie des  $\mathbb{R}^n$ ).** Seien  $A, B$  verschiedene einpunktige Teilmengen der  $n$ -Sphäre für  $n \geq 1$  und  $U, V$  ihre Komplemente und  $G$  eine abelsche Gruppe. Bezeichne  $a, b, u, v$  die jeweiligen Einbettungen und bezeichne  $c : S^n \rightarrow \text{top}$  die Projektion der Sphäre auf den einpunktigen Raum. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} c_*a_!a^!c^*G & \rightarrow & c_*c^*G & \rightarrow & c_*u_*u^*c^*G \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ c_*v_!v^!c^*G & \rightarrow & c_*c^*G & \rightarrow & c_*b_*b^*c^*G \end{array}$$

durch die Faktorisierungen  $a = v \circ \alpha$  und  $b = u \circ \beta$ . Das rechte Quadrat induziert ein Quadrat aus Isomorphismen unter  $\mathcal{H}^0$ , da  $S^n, U$  und  $B$  alle zusammenhängend sind. Seine rechte Vertikale hat  $\mathcal{H}^q = 0$  für  $q \neq 0$ , da  $U$  und  $B$  zusammenziehbar sind. Auch ohne zu wissen, ob wir einen Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken vor uns haben, folgt aus diesen beiden Aussagen und den langen exakten Kohomologiesequenzen, daß das linke Quadrat ein Quadrat aus Isomorphismen unter allen  $\mathcal{H}^q$  mit  $q \neq 0$  induziert. Aus unseren Erkenntnissen zur Kohomologie der Sphären in [TG] 4.5.12 folgern wir genauer, daß in der linken Vertikale gilt  $\mathcal{H}^q = 0$  für  $q \neq 1$ , und finden einen bis auf Vorzeichen wohlbestimmten Isomorphismus  $\mathcal{H}^1 \cong G$ . Da die Sphäre kompakt ist, gilt  $c_* = c_!$ . Für  $d : V \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung finden wir damit, daß die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$d_!a_!a^!d^*G \xrightarrow{\sim} d_!d^*G$$

in der derivierten Kategorie induziert. In klassischer Notation sind das unsere Isomorphismen  $H_A^q(V; G) \xrightarrow{\sim} H_!^q(V; G)$  aus [TG] 4.8.17. Daß wir aber unter den entsprechenden Identifikationen wirklich dieselben Abbildungen erhalten, soll weder benutzt noch bewiesen werden.

**5.3.5 (Einschränkungen von Ausdehnungen).** Jede Einschränkung einer Ausdehnung liefert auch auf den derivierten Kategorien das ursprüngliche Objekt. Genauer ist nach [TG] 4.3.20 für eine beliebige Einbettung  $b$  von topologischen Räumen die Koeinheit der Adjunktion eine Isotransformation  $b^{(*)}b_{(*)} \xrightarrow{\sim} \text{id}$ . Da  $b^{(*)}$  exakt ist, erhalten wir durch Anwenden auf quisrechtsentfaltete Komplexe

abelscher Garben unmittelbar, daß auch auf den derivierten Kategorien abelscher Garben die Koeinheit der Adjunktion eine Isotransformation

$$b^*b_* \xrightarrow{\sim} \text{id}$$

sein muß. Insbesondere ist  $b_*$  volltreu für jede Einbettung  $b$ . Als nächstes zeigen wir, daß für jede lokal abgeschlossene Einbettung  $b$  auch auf den derivierten Kategorien abelscher Garben die Einheit der Adjunktion eine Isotransformation

$$\text{id} \xrightarrow{\sim} b^!b_!$$

sein muß. Das folgt im allgemeinen, sobald wir es für offene und abgeschlossene Einbettungen zeigen. Im Fall einer offenen Einbettung sind beide Funktoren exakt und die Behauptung folgt unmittelbar aus der Aussage für gewöhnliche abelsche Garben in [TG] 6.4.23. Im Fall einer abgeschlossenen Einbettung  $i : Z \hookrightarrow X$  wenden wir die zweite Gysinsequenz aus 5.3.3 auf  $i_!\mathcal{G}$  an und folgern aus  $j^*i_! = 0$ , daß die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus  $i_!i^!i_!\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} i_!\mathcal{G}$  liefert. Nach den Dreiecksidentitäten [TF] 4.8.1 liefert dann auch die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus  $i_!\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} i_!i^!i_!\mathcal{G}$  und wegen  $i_! = i_*$  und  $i_*$  volltreu nach dem bereits bewiesenen Fall muß dann auch die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} i^!i_!\mathcal{G}$  gewesen sein. Aus der entsprechenden Isotransformation im underivierten Fall [TG] 6.4.23 folgt weiter unmittelbar, daß für jede lokal abgeschlossene Einbettung  $b$  die offensichtliche Transformation  $b_! \Rightarrow b_*$  eine Isotransformation  $b^*b_! \xrightarrow{\sim} b^*b_*$  induziert. Mit dem vorhergehenden erhalten wir so insgesamt eine Isotransformation

$$b^*b_! \xrightarrow{\sim} \text{Id}$$

und durch Übergang zu den Adjungierten schließlich auch eine Isotransformation

$$b^!b_* \xrightarrow{\sim} \text{Id}$$

*Vorschau 5.3.6.* Sei  $b$  die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge. Im weiteren erhalten wir auch durch Basiswechsel eine Isotransformation  $b^*b_! \xrightarrow{\sim} \text{Id}$  und werden prüfen wollen, daß sie dieselbe ist. Des weiteren kann man zeigen, daß die offensichtliche Transformation  $b_! \Rightarrow b_*$  auch eine Isotransformation  $b^!b_! \xrightarrow{\sim} b^!b_*$  induziert, und mag prüfen, daß sie dieselbe Isotransformation  $b^!b_* \xrightarrow{\sim} \text{Id}$  induziert wie oben. Das soll mir einmal ein Student ausarbeiten.

**5.3.7 (Trägerzerlegung).** Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $U \Subset X$  eine offene Teilmenge mit Einbettungsabbildung  $j : U \hookrightarrow X$  und  $i : Z \hookrightarrow X$  die Einbettung des Komplements. Gegeben ein Garbenkomplex  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  mit

$$j^*\mathcal{F} = 0$$

oder gleichbedeutend  $j^! \mathcal{F} = 0$  liefern die Koeinheit beziehungsweise Einheit der Adjunktion nach den Gysinsequenzen Isomorphismen  $i_! i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i_* i^* \mathcal{F}$ . Da  $i_! = i_*$  volltreu ist, induziert das einen Isomorphismus  $i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^* \mathcal{F}$ . Ist nun  $Z = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$  eine Zerlegung von  $Z$  in paarweise disjunkte offene Teilmengen  $Z_\lambda \Subset Z$ , so erhalten wir mit 2.3.16 Isomorphismen

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{in}_{\lambda!} \text{in}_{\lambda}^! i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{in}_{\lambda*} \text{in}_{\lambda}^* i^* \mathcal{F}$$

Da  $i_! = i_*$  mit Koprodukten und Produkten vertauscht, erhalten wir schließlich mit der Notation  $a_\lambda : Z_\lambda \hookrightarrow X$  für die Einbettungen, daß die Koeinheiten beziehungsweise Einheiten der Adjunktionen für alle  $\mathcal{F}$  mit  $j^* \mathcal{F} = 0$  Isomorphismen

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda!} a_\lambda^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda*} a_\lambda^* \mathcal{F}$$

induzieren. Die Faktoren sind auf beiden Seiten dieselben, der natürliche Morphismus vom Koprodukt zum Produkt ist in diesen Fällen eben ein Isomorphismus. Wir nennen jede derartige Zerlegung eine **Trägerzerlegung von  $\mathcal{F}$** . Nach 2.3.17 liefert sie Isomorphismen

$$\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{H}^q(Z_\lambda; \mathcal{F})$$

und für  $X$  lesb oder  $X$  nur les aber der Zusatzannahme  $\mathcal{F} \in \text{Der}^+(\text{Ab}/X)$  Isomorphismen

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{H}_1^q(Z_\lambda; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_1^q(X; \mathcal{F})$$

## Übungen

*Übung 5.3.8.* Seien  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  eine abelsche Garbe auf einem Raum  $X$  und  $i : Z \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und  $j : U \hookrightarrow X$  die Einbettung ihres offenen Komplements. Bezeichne  $c$  die jeweiligen konstanten Abbildungen auf den einpunktigen Raum. Wir identifizieren abelsche Garben auf dem einpunktigen Raum mit abelschen Gruppen. Die offensichtliche Isotransformation  $c_{(*)} i^{(!)} \xrightarrow{\sim} \Gamma_Z$  induziert mittels [TG] 6.4.26 und [TG] 4.4.12 durch welche Auflösung einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^q c_* i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_Z^q(X; \mathcal{F})$$

Man zeige, wie darunter zusammen mit einigen weiteren Identifikationen die lange exakte Kohomologiesequenz des ausgezeichneten Dreiecks  $c_* i_! i^! \mathcal{F} \rightarrow c_* \mathcal{F} \rightarrow c_* j_* j^* \mathcal{F} \rightarrow [1]$  der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie [TG] 4.4.9 entspricht.



## 5.4 Lokalisierung präverflochtener Winkelfaserungen

5.4.1 (**Motivation**). Dieser eher technische Abschnitt stellt die Hilfsmittel bereit, die uns erlauben, gleichzeitig mit den Rechtsderivierten der Schreibvorschübe und den Linksderivierten der Trennrückzüge zu arbeiten. Im Fall von Garben von Vektorräumen sind beliebige Garbenkomplexe flach und können den derivierten Trennrückzug berechnen und die Schwierigkeit läßt sich unschwer umgehen, indem man mit faserweise kompaktweichen Garben arbeitet. Im Fall diskreter Räume sind beliebige Garbenkomplexe kompaktweich und können den derivierten Schreibvorschub berechnen und die Schwierigkeit läßt sich unschwer umgehen, indem man mit hinreichend flachen Garben arbeitet und bemerkt, daß Koprodukte flacher Moduln wieder flach sind. Im allgemeinen ist der Schreibvorschub einer flachen kompaktweichen Garbe keineswegs flach und ich kenne keinen so einfachen Ausweg. Der allgemeine Fall beinhaltet aber insbesondere den Fall abelscher Garben, den wir brauchen, wenn wir ganzzahlige Schnittmultiplizitäten erhalten wollen. Im hier dargestellten Zugang stützen wir uns auf den Begriff einer „Rechts-Links-Anpassung“, um die hier angesprochenen Schwierigkeiten zu überwinden.

5.4.2. Seien  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Winkelfaserung und  $S$  ein faserweises Oresystem in  $\mathcal{C}$ . Besitzt die Faserung  $\mathcal{C}^\dagger \rightarrow \mathcal{B}^\dagger$  eine  $S$ -Rechtsanpassung und die Kofaserung  $\mathcal{C}^i \rightarrow \mathcal{B}^i$  eine  $S$ -Linksanpassung, so führt Lokalisieren zu einer weiteren Winkelfaserung  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mithilfe der durch 2.5.11 gegebenen Isomorphismen  $(S^{-1}\mathcal{C}^i)_{\mathcal{B}^e} \xleftarrow{\sim} S^{-1}\mathcal{C}^e \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C}^\dagger)_{\mathcal{B}^e}$  zwischen Lokalisierung der Einschränkung und Einschränkung der Lokalisierung. Bezeichne  $Q$  im folgenden alle Lokalisierungsfunktoren. Ist unser  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  zusätzlich mit einer Regulierung der Basis und einer Präverflechtung versehen, so nennen wir ein Verflechtungsquadrat

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & X \\ | & & | \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F} \\ | & & | \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G} \end{array}$$

in  $\mathcal{C}$  **lokalisierbar für**  $S$ , wenn  $Q\mathcal{F} \rightarrow Q\mathcal{G}$  schreikokartesisch ist über  $f$  und  $\mathcal{F}$  rechtsentfaltet für  $Qq^\dagger$  und  $\mathcal{G}$  rechtsentfaltet für  $Qp^\dagger$ . Die Darstellung zeigt rechts das fragliche Verflechtungsquadrat und links sein Bild in der Basis, ein erlaubtes Basisquadrat. Die zu Bildern lokalisierbarer Verflechtungsquadrate isomorphen Rückholquadrate von  $S^{-1}\mathcal{C}$  nennen wir die **naiven Verflechtungsquadrate** der lokalisierten Winkelfaserung.

5.4.3. Gegeben eine Winkelfaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  und ein faserweises Oresystem  $S$  in  $\mathcal{C}$  verstehen wir unter einer **Rechts-Links-Anpassung** ein Paar  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$  aus einer  $S$ -Rechtsanpassung  $\mathcal{R}$  der Faserung  $\mathcal{C}^\dagger \rightarrow \mathcal{B}^\dagger$  und einer  $S$ -Linksanpassung  $\mathcal{L}$  der Kofaserung  $\mathcal{C}^i \rightarrow \mathcal{B}^i$  derart, daß gilt:

1. Zu jedem Objekt in  $\mathcal{R}$  gibt es einen  $S$ -Morphismus von einem Objekt in  $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ ;
2. Zu jedem Morphismus  $q : W \rightarrow X$  der Basis und jedem Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_X$  gibt es  $S$ -Morphismen  $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{\dagger i}$  mit  $\mathcal{F}_i \in \mathcal{L}_X$  und  $q^\dagger \mathcal{F} \leftarrow q^\dagger \mathcal{F}_i$  in  $S$  und  $\mathcal{F}_{\dagger i} \in \mathcal{R}_X \cap \mathcal{L}_X$ .

**Vorschau 5.4.4 (Rechtslinksanpassung für abelsche Garben).** Im Kontext von derivierten Kategorien abelscher Garben können wir als  $\mathcal{R}$  alle Garbenkomplexe nehmen und als  $\mathcal{L}$  alle Komplexe von schwach kompaktweichen Garben. Mögliche Morphismen  $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_i$  kann man dann mithilfe der Godement-Auflösung erhalten, genauer mit den dadurch in den opponierten Kategorien erhaltenen Morphismen.

**Vorschau 5.4.5 (Rechtslinksanpassung für Modulgarben).** Im Kontext von derivierten Kategorien von Modulgarben können wir als  $\mathcal{R}$  alle quisflachen Garbenkomplexe nehmen und als  $\mathcal{L}$  alle Komplexe von schwach kompaktweichen Garben. Mögliche  $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{\dagger i}$  kann man mithilfe der Godement-Auflösung erhalten, genauer mit den dadurch in den opponierten Kategorien erhaltenen Morphismen, wie in 5.5.7 ausgeführt wird.

**Satz 5.4.6 (Lokalisieren einer präverflochtenen Winkelfaserung).** *Gibt es für eine präverflochtene Winkelfaserung mit faserweisem gesättigten Oresystem eine Rechtslinksanpassung und sind alle naiven Verflechtungsquadrate der Lokalisierung voll kokartesisch, so existiert genau eine Verflechtung der lokalisierten Winkelfaserung, die alle naiven Verflechtungsquadrate enthält.*

5.4.7. Der Beweis zeigt darüberhinaus, daß die Aussage des Satzes bereits folgt, wenn wir nur von einer Teilmenge der erlaubten Basisquadrate, aus deren Quadraten wir alle erlaubten Basisquadrate unserer Regulierung durch Verkleben erhalten können, voraussetzen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate der Lokalisierung über Basisquadraten dieser Teilmenge voll kokartesisch sind.

*Beweis.* Der Beweis füllt den Rest dieses Abschnitts, aber ich fasse hier schon zusammen, wie sich die verschiedenen Teile des Beweises zusammenfügen. Nach 5.4.9 reicht es zu zeigen, daß die naiven Verflechtungsquadrate eine kokartesische Teilverflechtung im Sinne von 5.4.8 bilden. Die von einer kokartesischen Teilverflechtung geforderte Fortsetzbarkeit partieller Quadrate zeigen wir in 5.4.10. Die von einer kokartesischen Teilverflechtung, ja einer Regulierung geforderten Verklebbarkeiten zeigen wir in 5.4.14 und 5.4.16. Daß die bei einer kokartesischen Teilverflechtung geforderten kommutativen Quadrate tatsächlich naive Verflechtungsquadrate sind, bemerken wir in 5.4.13. Die von einer kokartesischen Teilverflechtung geforderte Funktorialitätseigenschaft schließlich zeigen wir in 5.4.12. □

5.4.8. Gegeben eine Winkelfaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  über einer regulierten Basis verstehen wir unter einer **kokartesischen Teilverflechtung** eine Regulierung  $K$  von  $\mathcal{C}$  durch voll kokartesische Rückholquadrate mit den folgenden Eigenschaften:

1. Über jedem erlaubten Basisquadrat kann jedes partielle Quadrat von  $\mathcal{C}$  mit  $\dagger$ -kartesischen Horizontalen und  $\downarrow$ -kokartesischer rechter Vertikale, dem nur die linke Vertikale fehlt, in  $K$  ergänzt werden;
2. Über jedem erlaubten Basisquadrat kann jeder Morphismus in der Faser über der oberen rechten Ecke zu einem Morphismus von Quadraten aus  $K$  fortgesetzt werden;
3.  $K$  enthält alle kommutativen Quadrate mit kartesischen Horizontalen und kokartesischen Vertikalen über erlaubten Basisquadraten mit Eigmorphismen in zwei parallelen Kanten.

**Lemma 5.4.9 (Verflechtung zu kokartesischer Teilverflechtung).** *Gegeben eine Winkelfaserung über einer regulierten Basis gibt es zu jeder kokartesischen Teilverflechtung genau eine Verflechtung, die sie umfaßt.*

*Beweis.* Bezeichne  $K$  unsere kokartesische Teilverflechtung. Zu jeder Erweiterung von  $K$  zu einer Verflechtung müssen alle Rückholquadrate gehören, die wir erhalten, indem wir an ein Rückholquadrat unserer Teilverflechtung ein kommutatives Quadrat mit kartesischen Horizontalen und Vertikalen über Identitäten in der Basis unten ankleben. In der Menge  $V$  von Quadraten, die wir auf diese Weise erhalten, läßt sich aber bereits jedes partielle Quadrat mit kartesischen Horizontalen über einem vorgegebenen erlaubten Basisquadrat vervollständigen. Also gibt es höchstens eine Erweiterung von  $K$  zu einer Verflechtung, nämlich die hier beschriebene Menge  $V$  von Quadraten. Um zu zeigen, daß  $V$  auch tatsächlich eine Verflechtung ist, müssen wir unsere Bedingungen prüfen. Daß  $V$  die Bedingungen der „eindeutigen Ergänzung“ und der „eigentlichen Kommutativität“ erfüllt, scheint mir offensichtlich. Daß  $V$  stabil ist unter dem Verkleben längs vertikaler Kanten scheint mir ebenso offensichtlich. Daß  $V$  auch stabil ist unter dem Verkleben längs horizontaler Kanten folgt schließlich aus der Funktorialitätsannahme in unseren Forderungen an eine kokartesische Teilverflechtung.  $\square$

5.4.10 (**Existenz ausreichend vieler naiver Verflechtungsquadrate**). Gegeben sei eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen Oresystem  $S$ . Gibt es dazu eine Rechtslinksanpassung, so besitzt über jedem erlaubten Basisquadrat jedes partielle Quadrat mit kartesischen Horizontalen der lokalisierten Winkelfaserung mit kokartesischer rechter Vertikale eine Erweiterung zu einem naiven Verflechtungsquadrat. Das folgt, indem wir zu einer vorgegebenen oberen rechten

Ecke ein Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_X \cap \mathcal{L}_X$  wählen, dessen Bild  $Q\mathcal{F}$  isomorph ist zu unserer Ausgangsecke, und dazu ein lokalisierbares Verflechtungsquadrat der Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{q} & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g \downarrow & & \downarrow f \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z & \xrightarrow{p} & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \downarrow & & \downarrow f_i \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow \wr Q \\
 \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}
 \end{array}$$

bilden mit  $f_i \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  einem beliebigen  $S$ -Morphismus in ein Objekt  $\mathcal{G} \in \mathcal{R}_Y$ .

**Lemma 5.4.11.** *Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen Oresystem  $S$ . Gibt es dazu eine Rechtslinksanpassung  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ , so ist jedes naive Verflechtungsquadrat der Lokalisierung isomorph zum Bild eines lokalisierbaren Verflechtungsquadrats mit oberer rechter Ecke  $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$ .*

*Beweis.* Wir argumentieren im Diagramm

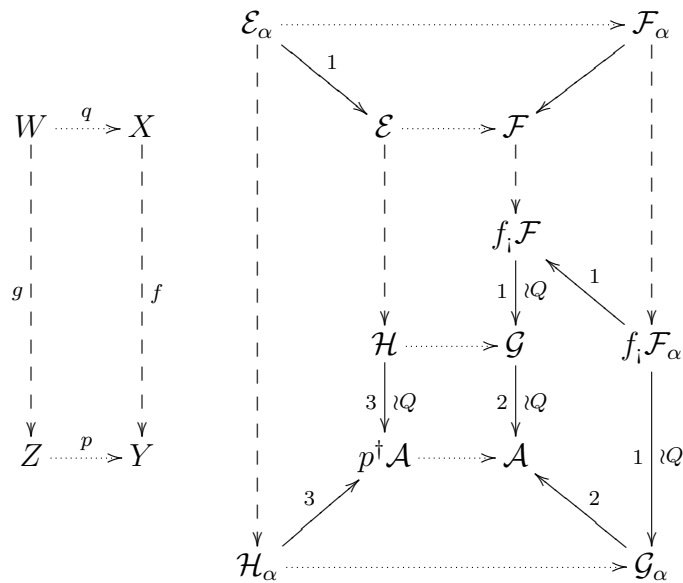
$$\begin{array}{ccc}
 & & q^\dagger \mathcal{F}_i \xrightarrow{\quad} \mathcal{F}_i \\
 & & \swarrow \quad \searrow \\
 & & \mathcal{E} \xrightarrow{\quad} \mathcal{F} \\
 & & \downarrow \quad \downarrow \\
 & & \mathcal{H} \xrightarrow{\quad} \mathcal{G} \\
 & & \swarrow \quad \searrow \\
 & & \mathcal{H} \xrightarrow{\quad} \mathcal{G}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{q} & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g \downarrow & & \downarrow f \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z & \xrightarrow{p} & Y
 \end{array}$$

Hier ist die Mitte ein lokalisierbares Verflechtungsquadrat und  $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}$  ein  $S$ -Morphismus von einem Objekt von  $\mathcal{L}_X$ , der unter  $q^\dagger$  ein  $S$ -Morphismus bleibt. Daß es so einen Morphismus gibt, war Teil unserer Annahmen. Damit ist auch der durch die Kommutativität des oberen Trapezes erklärte Morphismus  $q^\dagger \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{E}$  ein  $S$ -Morphismus. Die durch unsere Präverflechtung gegebene linke Vertikale stimmt nun überein mit der durch die Kommutativität des linken Trapezes gegebenen linken Vertikale. Die schrägen Pfeile liefern dann einen Morphismus von lokalisierbaren Verflechtungsquadraten und in der Lokalisierung den gewünschten Isomorphismus von naiven Verflechtungsquadraten.  $\square$

**Lemma 5.4.12 (Funktorialität naiver Verflechtungsquadrate).** *Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen gesättigten Oresystem  $S$ . Gibt es eine Rechtslinksanpassung  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ , so läßt sich jeder Morphismus in*

der lokalisierten Faserkategorie zwischen den oberen rechten Ecken naiver Verflechtungsquadrate auf genau eine Weise zu einem Morphismus der ganzen Verflechtungsquadrate fortsetzen.

*Beweis.* Es ist klar, daß sich unser Morphismus auf höchstens eine Weise fortsetzen läßt. Nach 5.4.11 dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere naiven Verflechtungsquadrate die Bilder lokalisierbarer Verflechtungsquadrate mit oberer rechter Ecke in  $\mathcal{L}$  sind. Wir argumentieren im Diagramm



Gegeben sind als innerstes und äußertes Rechteck jeweils ein lokalisierbares Verflechtungsquadrat mit oberer rechter Ecke  $\mathcal{F}, \mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{L}_X$  sowie, damit fangen wir erst einmal an, ein Morphismus  $\mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}$  in  $\mathcal{C}_X$ . Nun bauen wir in mehreren Schritten den Rest des Diagramms auf. Im ersten Schritt faktorisieren wir die rechten Vertikalen unserer lokalisierbaren Verflechtungsquadrate in den Transportmorphismus zum Schreivorschub und einen weiteren Morphismus. Da wir die oberen rechten Ecken in  $\mathcal{L}_X$  angenommen hatten, werden diese weiteren Morphismen unter  $Q$  Isomorphismen, was wir durch  $\wr Q$  andeuten. Da wir  $S$  faserweise gesättigt angenommen hatten, gehören diese Morphismen nach [TD] 1.4.19 bereits zu  $S$ . Außerdem finden wir einen eindeutigen Morphismus  $\mathcal{E}_\alpha \rightarrow \mathcal{E}$  in  $\mathcal{C}_W$ , der das obere Trapez zum Kommutieren bringt. Im zweiten Schritt finden wir  $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_Y$  zusammen mit einem  $S$ -Morphismus  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  und einem  $\mathcal{C}_Y$ -Morphismus  $\mathcal{G}_\alpha \rightarrow \mathcal{A}$  derart, daß das Parallelogramm unten rechts kommutiert, und können ohne Beschränkung der Allgemeinheit sogar  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_Y$  annehmen. Im dritten Schritt ergänzen wir zwei Pfeile links unten wie angedeutet so, daß das untere Rechteck und Trapez kommutieren. Der vertikale  $S$ -Morphismus kommt von unserer Annahme  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_Y$  her. Da das große innere Rechteck als Verklebung auch ein Ver-

flechtungsquadrat ist, muß das linke Trapez kommutieren. Damit aber haben wir den gesuchten Morphismus von naiven Verflechtungsquadraten gefunden. Beginnen wir hier mit einem  $S$ -Morphismus  $\mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}$ , so werden alle durch durchgezogene Linien dargestellten Pfeile im obigen Diagramm  $S$ -Morphismen und wir erhalten einen Isomorphismus von naiven Verflechtungsquadraten in der Lokalisierung. Betrachten wir schließlich zu einem  $Qq^\dagger$ -entfalteten Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_X$  wie in 5.4.3 zwei  $S$ -Morphismen  $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{\dagger i}$ , so können wir aus den bis hier bereits gezeigten Funktorialitätseigenschaften folgern, daß jedes naive Verflechtungsquadrat isomorph ist zum Bild in der Lokalisierung eines lokalisierbaren Verflechtungsquadrats mit Ausgangsecke  $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_X \cap \mathcal{L}_X$ . Ein beliebiger Morphismus  $\mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}$  in  $S_X^{-1}\mathcal{C}_X$  von derartigen Objekten läßt sich aber als Bruch  $\mathcal{F}_\alpha \leftarrow \mathcal{F}_\beta \rightarrow \mathcal{F}$  schreiben mit  $\mathcal{F}_\beta \in \mathcal{R}_X$  und dann auch als Bruch  $\mathcal{F}_\alpha \leftarrow \mathcal{F}_{\beta_i} \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $\mathcal{F}_{\beta_i} \in \mathcal{R}_X \cap \mathcal{L}_X$  und so folgt die Behauptung aus den bereits bewiesenen Aussagen.  $\square$

5.4.13. Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen gesättigten Oresystem. Gibt es eine Rechtslinksanpassung, so ist über einem erlaubten Basisquadrat mit Eigmorphismen auf zwei gegenüberliegenden Kanten jedes kommutative Quadrat kartesischen Horizontalen und kokartesischer rechter Vertikale isomorph zu einem naiven Verflechtungsquadrat. In der Tat liefert 5.4.10 ein kommutierendes naives Verflechtungsquadrat mit isomorpher Ausgangsecke, zu dem es aufgrund der Funktorialität 5.4.12 isomorph sein muß.

**Lemma 5.4.14 (Nebeneinanderkleben naiver Verflechtungsquadrate).** *Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen gesättigten Oresystem. Gibt es eine Rechtslinksanpassung  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ , so liefert das Verkleben zweier naiver Verflechtungsquadrate der Lokalisierung längs einer gemeinsamen vertikalen Kante stets wieder ein naives Verflechtungsquadrat.*

5.4.15. Man bemerke, daß wir hier nur eine Aussage machen für den Fall, daß von den beteiligten naiven Verflechtungsquadraten das rechte voll kokartesisch ist.

*Beweis.* Unser Argument für die Existenz ausreichend vieler naiver Verflechtungsquadrate 5.4.10 zeigt, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, unser rechtes naives Verflechtungsquadrat sei Bild eines lokalisierbaren Verflechtungsquadrats, das aus Objekten von  $\mathcal{R}$  besteht. Damit folgt die Behauptung aus der Funktorialität naiver Verflechtungsquadrate 5.4.12.  $\square$

**Lemma 5.4.16 (Untereinanderkleben naiver Verflechtungsquadrate).** *Gegeben seien eine präverflochtene Winkelfaserung mit einem faserweisen gesättigten Oresystem  $S$ . Gibt es eine Rechtslinksanpassung  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ , so liefert das Verkleben zweier voll kokartesischer naiver Verflechtungsquadrate der Lokalisierung längs einer gemeinsamen horizontalen Kante wieder ein naives Verflechtungsquadrat.*

*Beweis.* Um das zu zeigen, leiten wir eine alternative Beschreibung für voll kokartesische naive Verflechtungsquadrate her. Sei dazu über der oberen Kante  $W \rightarrow X$  eines vorgegebenen erlaubten Basisquadrats ein Morphismus  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  von Objekten von  $\mathcal{L}$  gegeben und sei  $Q\mathcal{E} \rightarrow Q\mathcal{F}$  kartesisch. Ist das nach der Funktorialität naiver Verflechtungsquadrate 5.4.12 zugehörige naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch, so ist es isomorph zum Bild in der Lokalisierung vom Rand des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & q^\dagger \mathcal{F} & \cdots \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ g_i \mathcal{E} & \longrightarrow & p^\dagger f_i \mathcal{F} & \cdots \longrightarrow & f_i \mathcal{F} \end{array}$$

mit dem rechten Quadrat aus unserer ursprünglichen Präverflechtung und dem linken Quadrat aus der universellen Eigenschaft des Schreibvorschubs. Aus dieser Beschreibung und der Funktorialität naiver Verflechtungsquadrate 5.4.12 folgt das Lemma sofort. Im Rest des Beweises leiten wir sie her. Gegeben in  $\mathcal{C}$  ein Morphismus  $\mathcal{E}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha$  über  $W \rightarrow X$  mit denselben Eigenschaften, wie wir sie von  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  und  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  gefordert hatten, sowie ein kommutatives Quadrat in  $\mathcal{C}$  mit  $S$ -Morphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{F}_\alpha \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F} \end{array}$$

bilden wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}_\alpha & \longrightarrow & q^\dagger \mathcal{F}_\alpha & \cdots \longrightarrow & \mathcal{F}_\alpha \\ \downarrow S & & \downarrow & & \downarrow S \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & q^\dagger \mathcal{F} & \cdots \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ g_i \mathcal{E} & \longrightarrow & p^\dagger f_i \mathcal{F} & \cdots \longrightarrow & f_i \mathcal{F} \\ \downarrow S & & \downarrow & & \downarrow S \\ g_i \mathcal{E}_\alpha & \longrightarrow & p^\dagger f_i \mathcal{F}_\alpha & \cdots \longrightarrow & f_i \mathcal{F}_\alpha \end{array}$$

und erkennen, daß es einen Isomorphismus der entsprechenden Quadrate in der Lokalisierung induziert. Jetzt finden wir von der Definition einer Rechtslinksanpassung ausgehend eine Ergänzung der oberen Horizontale von eben zu einem

kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{E}_\alpha & \xrightarrow[3]{S} & q^\dagger \mathcal{F}_{\dagger i} & \cdots \cdots \rightarrow & \mathcal{F}_{\dagger i} \\
 \parallel & & \uparrow & & \uparrow S \\
 3 & & & & \\
 \mathcal{E}_\alpha & \xrightarrow[2]{S} & \mathcal{G} & \xrightarrow[1]{} & q^\dagger \mathcal{F}_i & \cdots \cdots \rightarrow & \mathcal{F}_i \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow S & & \downarrow S \\
 & & \mathcal{E} & \longrightarrow & q^\dagger \mathcal{F} & \cdots \cdots \rightarrow & \mathcal{F}
 \end{array}$$

mit den angedeuteten  $S$ -Morphismen, mit  $\mathcal{F}_i, \mathcal{E}, \mathcal{E}_\alpha \in \mathcal{L}$  und mit  $\mathcal{F}_{\dagger i} \in \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ . Hier verwenden wir im ersten Schritt, daß  $S$  ein faserweises Oresystem ist, um  $\mathcal{G}$  und die beiden davon ausgehenden Morphismen zu finden, und ganz wesentlich die Eigenschaft einer Rechtslinksanpassung, daß  $q^\dagger$  aus  $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_i$  auch dann einen  $S$ -Morphismus macht, wenn diese Objekte nicht  $Qq^\dagger$ -rechtsentfaltet sind. Im zweiten Schritt finden wir einen  $S$ -Morphismus von einem Objekt  $\mathcal{E}_\alpha \in \mathcal{L}_W$  nach  $\mathcal{G}$  aufgrund der Definition einer Linksanpassung. Im dritten Schritt erkennen wir, daß  $Q\mathcal{E}_\alpha \rightarrow Q\mathcal{F}_{\dagger i}$  kartesisch sein muß, also  $Q\mathcal{E}_\alpha \rightarrow Qq^\dagger \mathcal{F}_{\dagger i}$  ein Isomorphismus wegen  $\mathcal{F}_{\dagger i} \in \mathcal{R}$ , also  $\mathcal{E}_\alpha \rightarrow q^\dagger \mathcal{F}_{\dagger i}$  ein  $S$ -Morphismus wegen  $S$  faserweise gesättigt. So können wir uns darauf zurückziehen, die ursprüngliche Behauptung für  $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_X \cap \mathcal{L}_X$  zu zeigen. Gilt nun aber  $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_X \cap \mathcal{L}_X$ , so muß der erste horizontale Pfeil oben links unter  $Q$  ein Isomorphismus werden und wir können unser Diagramm ergänzen zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{E} & \xrightarrow[1]{\approx Q} & q^\dagger \mathcal{F} & \cdots \cdots \rightarrow & \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 g_i \mathcal{E} & \longrightarrow & p^\dagger f_i \mathcal{F} & \cdots \cdots \rightarrow & f_i \mathcal{F} \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow 2 \\
 g_i \mathcal{E} & \xrightarrow[3]{\approx Q} & p^\dagger \mathcal{G} & \cdots \cdots \rightarrow & \mathcal{G}
 \end{array}$$

mit  $\mathcal{G} \in \mathcal{R}_Y$ . Dann muß, wenn das naive Verflechtungsquadrat zur oberen rechten Ecke  $Q\mathcal{F}$  voll kokartesisch ist, die mittlere Vertikale kokartesisch werden in der Lokalisierung. Das hinwiederum zeigt, daß auch der horizontale Morphismus unten links in der Lokalisierung ein Isomorphismus werden muß. So sehen wir, daß das obere lange horizontale Rechteck, das einhüllende Quadrat und das rechte lange vertikale Rechteck alle drei isomorphe Quadrate in der Lokalisierung liefern. Das rechte lange vertikale Rechteck liefert per definitionem ein natives Verflechtungsquadrat und so folgt dasselbe für das obere lange horizontale Rechteck.  $\square$



**Beispiel 5.4.17 (Halbseitig beschränkte derivierte Verflechtung).** Unsere verflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^i, \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

aus 4.5.17 mit der kartesischen Regulierung und der durch Kommutativität konstruierten Verflechtung, immer noch nach 4.5.17, liefert in offensichtlicher Weise verflochtene Winkelfaserungen

$$\left( \text{Hot}^\sharp(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Hot}^\sharp(\text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^i), \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

für  $\sharp$  eine jede unserer vier üblichen Beschränkungsbedingungen. Im Fall von  $\text{Hot}^-$  können wir diese Winkelfaserung nach Quasiisomorphismen lokalisieren, denn der Rückzug ist exakt und alle Garbenkomplexe bilden folglich eine Rechtsanpassung  $\mathcal{R}$  für den opponierten Rückzug, wohingegen wir für den Schreivorschub die Linksanpassung  $\mathcal{L} := \text{Hot}^-(\text{skwAb}_{//\text{Top}})$  durch entsprechend beschränkte Komplexe schwach kompaktweicher Garben nach 5.2.12 zur Verfügung haben. Um eine Verflechtung der lokalisierten Winkelfaserung zu konstruieren, prüfen wir die Bedingungen von Satz 5.4.6. Sicher existiert eine Rechtslinksanpassung, nämlich  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ . Wir müssen also nur noch zeigen, daß in unserer Situation alle naiven Verflechtungsquadrate voll kokartesisch sind. Nach 5.4.11 reicht es zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate mit Ausgangsecke in  $\mathcal{L}$  voll kokartesisch sind. Es reicht also zu zeigen, daß gegeben

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & X \\ | & & | \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm topologischer Räume mit les-Abbildungen  $f, g$  in den Vertikalen und ein Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Hot}^-(\text{skwAb}_{//X})$  alias  $\mathcal{F} \in \text{Hot}^+(\text{skwAb}_{//X})$  der Rückzug  $q^*\mathcal{F}$  ein  $g_{(1)}$ -quisrechtsentfalteter Garbenkomplex ist, so daß das entsprechende voll kokartesische Verflechtungsquadrat in  $\text{Hot}^-(\text{Ab}_{//\text{Top}})$  aus der oben beschriebenen Verflechtung voll kokartesisch bleibt in der Lokalisierung. Nach 5.2.7 ist aber jede faserweise kompaktweiche abelsche Garbe bereits  $g_{(1)}$ -quisrechtsentfaltet für jede les-Abbildung  $g$  und für eine schwach kompaktweiche abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  hat offensichtlich ihr Rückzug  $q^*\mathcal{F}$  diese Eigenschaft. Mithin erhalten wir durch Lokalisieren mit 5.4.6 eine verflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Der}_{//\text{Top}}^- \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^{-i}, \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

in Bezug auf die kartesische Regulierung der Basis. Offensichtlich macht in diesem Fall die Verschiebung [1] Verflechtungsquadrate zu Verflechtungsquadraten, so daß unser Flechtbasiswechsel eine im Sinne von [TD] 2.4.4 verträgliche Transformation von triangulierten Funktoren ist.

*Beispiel 5.4.18 (Unbeschränkte derivierte Verflechtung).* Wir erhalten wie in 5.4.17 eine verflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^i), \text{Top}^{\text{esb}} \right)$$

und können sie wie zuvor nach Quasiisomorphismen lokalisieren, indem wir wie zuvor die Rechtslinksanpassung  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$  beachten mit  $\mathcal{R}$  allen Komplexen und  $\mathcal{L} := \text{Hot}(\text{skwAb}_{//\text{Top}})$  der Linksanpassung durch Komplexe schwach kompaktweicher Garben nach 5.2.16. Der Übergang zur Lokalisierung liefert dann wie zuvor eine verflochtene Winkelfaserung

$$(\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^i, \text{Top}^{\text{esb}})$$

in Bezug auf die kartesische Regulierung der Basis und wieder macht die Verschiebung [1] Verflechtungsquadrate zu Verflechtungsquadraten, so daß Flechtbasiswechsel eine im Sinne von [TD] 2.4.4 verträgliche Transformation von triangulierten Funktoren ist.

## 5.5 Rückzug-Schreibvorschub derivierter Modulgarben

5.5.1. In der hier gegebenen Darstellung baut die Konstruktion von Verflechtungen für derivierte Modulgarben auf der Erkenntnis auf, daß Godementauflösungen halmweise spalten und folglich stets exakt bleiben unter dem Darantensorieren weiterer Modulgarben. Diese Verträglichkeit geeigneter kompaktweicher Auflösungen mit Flachheitseigenschaften liefert uns die Rechtslinksanpassungen, die wir zum Lokalisieren der mehr oder weniger offensichtlichen präverflochtenen Winkelfaserungen auf den Homotopiekategorien benötigen. Das wird im folgenden ausgeführt.

5.5.2. Sei  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf einem Raum  $X$ . Die **Garbe der unstetigen Schnitte** von  $\mathcal{F}$  ist die Garbe  $G\mathcal{F}$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \Subset X$  das Produkt der Halme von  $\mathcal{F}$  an allen Punkten  $x \in U$  zuordnet, in Formeln

$$(G\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

Die Restriktionsabbildungen sind die offensichtlichen. Den durch  $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$  für  $s \in \mathcal{F}(U)$  gegebenen Monomorphismus  $\mathcal{F} \hookrightarrow G\mathcal{F}$  nennen wir den **Godement-Monomorphismus**. Gleichbedeutend können wir die Identität als stetige Abbildung  $\delta : X^\delta \rightarrow X$  von der mit der diskreten Topologie versehenen Menge  $X$  in den topologischen Raum  $X$  betrachten. Der Godementmonomorphismus faktorisiert dann in die Einheit der Adjunktion und einen Isomorphismus als  $\mathcal{F} \rightarrow$

$\delta_{(*)}\delta^{(*)}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} G\mathcal{F}$ . Terminologisch wäre es richtiger, von der „Garbe der nicht notwendig stetigen Schnitte“ zu reden, aber so pedantisch will ich hier nicht sein. Analoges gilt für Garben von Moduln über Garben von Ringen.

5.5.3. Die Schnitte unserer Garbe der unstetigen Schnitte  $G\mathcal{F}$  sind nur über offenen Teilmengen unstetige Schnitte in den étalen Raum der ursprünglichen Garbe. Die Halme der Garbe der unstetigen Schnitte einer Garbe sind im allgemeinen sehr viel größer als die Halme der ursprünglichen Garbe.

5.5.4 (**Halmweises Spalten des Godementmonomorphismus**). Gegeben eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  oder allgemeiner eine Modulgarbe auf einem Raum  $X$  induziert der Godementmonomorphismus  $\mathcal{F} \hookrightarrow G\mathcal{F}$  spaltende Injektionen auf allen Halmen. In der Tat liefert die entsprechende Projektion für  $x \in U \Subset X$  eine Faktorisierung  $\mathcal{F}(U) \rightarrow (G\mathcal{F})(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$  der Abbildung, die jedem Schnitt von  $\mathcal{F}$  über  $U$  seinen Halm bei  $x$  zuordnet. Diese Faktorisierungen sind verträglich mit dem Übergang zu kleineren offenen Umgebungen von  $x$  und liefern im Kolimes die gewünschte Spaltung.

5.5.5. Sei  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum  $X$  oder allgemeiner eine Modularbe auf einem geringten Raum. Die **Godement-Auflösung von  $\mathcal{F}$**  ist der exakte Komplex von abelschen Garben  $\mathcal{F} \hookrightarrow G^0\mathcal{F} \rightarrow G^1\mathcal{F} \rightarrow \dots$ , den wir erhalten durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} G^0\mathcal{F} &:= G\mathcal{F} \\ G^1\mathcal{F} &:= G(\text{cok}(\mathcal{F} \rightarrow G\mathcal{F})) \text{ und dann induktiv} \\ G^i\mathcal{F} &:= G(\text{cok}(G^{i-2}\mathcal{F} \rightarrow G^{i-1}\mathcal{F})) \text{ für } i \geq 2; \end{aligned}$$

Jeder Morphismus von abelschen Garben  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  liefert in offensichtlicher Weise einen Morphismus  $G\mathcal{F} \rightarrow G\mathcal{F}'$  zwischen den zugehörigen Garben unstetiger Schnitte und dann induktiv einen Morphismus von Komplexen von Garben  $G^\triangleleft\mathcal{F} \rightarrow G^\triangleleft\mathcal{F}'$ . Auf diese Weise wird das Bilden der Godementauflösung  $G^\triangleleft$  ein Funktor.

**Lemma 5.5.6.** *Gegeben  $X$  ein geringter Raum und  $\mathcal{F} \in \text{Ket}(\text{Ab}/X)$  ein Komplex von Modulgarben ist der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} G^\triangleleft\mathcal{F} := \text{tot } G^p(\mathcal{F}^q)$$

*in das Summentotal der Godementauflösungen der Einträge unseres Garbenkomplexes und der Abbildungskegel dieses Quasiisomorphismus ist quisflach.*

*Beweis.* Ergänzen wir den Doppelkomplex  $G^p(\mathcal{F}^q)$  durch  $\tilde{G}^{-1}(\mathcal{F}^q) := \mathcal{F}^q$ , so erhalten wir einen Doppelkomplex  $\tilde{G}^\triangleleft(\mathcal{F})$  mit exakten  $p$ -Teilkomplexen alias Zeilen, die für  $p < -1$  verschwindende Einträge haben. Nach dem Exaktheitskriterium [TD] 3.7.3 und der Vertauschbarkeit der Halmbildung mit Koprodukten ist

dann auch das Summentotal unseres Doppelkomplexes exakt und die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung folgt ebenso, wenn wir für jeden exakten Komplex  $\mathcal{E}$  von Rechtsmodulgarben die Exaktheit des Summentotals des Tripelkomplexes der  $\mathcal{E}^r \otimes \tilde{G}^p(\mathcal{F}^q)$  zeigen können. Wir zeigen das sogar für einen beliebigen Komplex  $\mathcal{E}$  von Rechtsmodulgarben. Die  $p$ -Teilkomplexe von  $\tilde{G}^p(\mathcal{F}^q)$  sind ja nicht nur exakt, sondern nach 5.5.4 sogar halmweise maximal spaltend. Folglich sind auch in unserem Tripelkomplex die  $p$ -Teilkomplexe exakt. Sie bleiben exakt beim Übergang zum Summentotal in Bezug auf  $(r, q)$ , da Koprodukte exakter Garbenkomplexe exakt sind. Der so entstehende Doppelkomplex hat dann wieder exaktes Summentotal mit demselben Argument wie zuvor.  $\square$

**5.5.7 (Vorarbeiten zur Rechtslinksanpassung bei Garbenkomplexen).** Für jeden quisflachen Komplex  $\mathcal{L}$  von Modulgarben auf einem geringten Raum  $X$  landet der Quasiisomorphismus  $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} G^\triangleleft \mathcal{L}$  aus 5.5.6, dessen Abbildungskegel ja nach 5.5.6 stets quisflach ist, selbst in einem quisflachen Komplex  $G^\triangleleft \mathcal{L}$ . Dieser Komplex besteht noch dazu aus schwach kompaktweichen Modulgarben, da ja diese Eigenschaft nach 5.2.10 erhalten bleibt unter filtrierenden Kolimites. Für einen beliebigen Komplex  $\mathcal{F}$  von Modulgarben schließlich finden wir nach 2.5.20 einen Quasiisomorphismus  $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  von einem quisflachen Komplex  $\mathcal{L}$  nach  $\mathcal{F}$ . Mit der Funktorialität der Godementauflösung erhalten wir so ein kommutatives Diagramm aus Quasiisomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^\triangleleft \mathcal{L} & \rightarrow & G^\triangleleft \mathcal{F} \end{array}$$

Hier stehen Komplexe schwach kompaktweicher Garben in der unteren Horizontale und die Vertikalen haben quisflachen Abbildungskegel. Insbesondere ist mit  $\mathcal{L}$  auch  $G^\triangleleft \mathcal{L}$  quisflach und für jeden Morphismus  $q : W \rightarrow X$  von geringten Räumen ist  $q^{(*)} \mathcal{F} \rightarrow q^{(*)} G^\triangleleft \mathcal{F}$  ein Quasiisomorphismus, denn der Abbildungskegel von  $\mathcal{F} \rightarrow G^\triangleleft \mathcal{F}$  ist exakt und quisflach und bleibt folglich exakt unter  $q^{(*)}$ .

**5.5.8 (Rechtslinksanpassung bei halbseitig beschränkten Komplexen).** Für jeden in Richtung gegen die Differentiale beschränkten Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Ket}^+$  von Modulgarben auf einem geringten Raum endlicher Torsionsdimension finden wir nach [TD] 3.6.4 oder genauer [TD] 3.6.7 einen Quasiisomorphismus  $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  von einem Komplex  $\mathcal{L} \in \text{Ket}^+$  von flachen Modulgarben nach  $\mathcal{F}$ , der dann nach [TD] 3.6.4 auch quisflach ist. Die Funktorialität der Godementauflösung liefert so dasselbe Diagramm wie in 5.5.7 mit Komplexen aus  $\text{Ket}^+$ .

**5.5.9 (Präverflochtene Winkelfaserung der Modulgarbenkomplexe).** Aus der Faserung der Modulgarben auf geringten Räumen  $\text{Ab}_{//\text{Ger}} \rightarrow \text{Ger}$  nach 1.3.9

erhalten wir wie im Fall abelscher Garben aus 4.5.17 eine präverflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Ab}_{//\text{Ger}} \rightarrow \text{Ger} \supset \text{Ger}^{\text{les}} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Ger}^{\text{les}}}^{\text{i}}, \text{Ger}^{\text{es}} \right)$$

mit der durch Kommutativität konstruierten Präverflechtung. Sie liefert in offensichtlicher Weise präverflochtene Winkelfaserungen

$$\left( \text{Hot}^{\sharp}(\text{Ab}_{//\text{Ger}}) \rightarrow \text{Ger} \supset \text{Ger}^{\text{les}} \leftarrow \text{Hot}^{\sharp}(\text{Ab}_{//\text{Ger}^{\text{les}}}^{\text{i}}), \text{Ger}^{\text{es}} \right)$$

für  $\sharp$  eine jede unserer vier üblichen Beschränkungsbedingungen. Als Regulierung der Basis nehmen wir an dieser Stelle alle Quadrate, bei denen die zugrundeliegenden Quadrate von topologischen Räumen kartesisch sind.

**5.5.10 (Verflochtene halbseitig beschränkt derivierte Modulgarben).** Die in 5.5.9 diskutierte präverflochtene Winkelfaserung von halbseitig beschränkten Homotopiekomplexen opponierter Modulgarben aus  $\text{Hot}^-$  läßt sich mit 5.4.6 nach Quasiisomorphismen lokalisieren, wenn wir uns weiter einschränken. In der hier diskutierten Variante erlauben wir nur geringte Räume endlicher Torsionsdimension und notieren diese volle Unterkategorie  $\text{Gerte} \subset \text{Ger}$ . Weiter erlauben wir als  $\text{!}$ -Morphismen in der Basis nur solche Morphismen von geringten Räumen  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ , bei denen  $f : X \rightarrow Y$  eine les-Abbildung ist und  $\mathcal{A}_x$  flach als Linksmodul über  $\mathcal{B}_{f(x)}$  für alle  $x \in X$ . Wir notieren  $\text{Gerte}^{\text{lesf}} \supset \text{Gerte}^{\text{esf}}$  das multiplikative System dieser Morphismen beziehungsweise besagter Morphismen, die zusätzlich eigentlich sind. So erhalten wir eine präverflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Ab}_{//\text{Gerte}} \rightarrow \text{Gerte} \supset \text{Gerte}^{\text{lesf}} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Gerte}^{\text{lesf}}}^{\text{i}}, \text{Gerte}^{\text{esf}} \right)$$

und eine entsprechend präverflochtene Winkelfaserung auf den Homotopiekategorien. Als Regulierung der Basis wählen wir für das weitere alle Basisquadrate

$$\begin{array}{ccc} (W, \mathcal{D}) & \xrightarrow{q} & (X, \mathcal{A}) \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ (Z, \mathcal{C}) & \xrightarrow{p} & (Y, \mathcal{B}) \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß die zugrundeliegenden topologischen Räume ein kartesisches Quadrat bilden und daß die Multiplikation für alle  $w \in W$  mit der Notation  $v := fq = pg$  einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathcal{C}_{g(w)} \otimes_{\mathcal{B}_{v(w)}} \mathcal{A}_{q(w)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_w$$

induziert. Diese Bedingung bedeutet im Fall gekringter Räume, daß unser Quadrat auch in  $\text{Gek}$  kartesisch ist, aber im Fall nichtkommutativer Koeffizienten bedeutet

sie etwas anderes. Wir nennen unsere Regulierung die **kartesisch-tensorielle Regulierung**. Man beachte, daß diese Regulierung nicht erhalten bleibt unter dem Übergang zu den opponierten Ringgarben. Wir behaupten nun, daß wir daraus mit Satz 5.4.6 durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen eine verflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Der}_{//\text{Gerte}}^- \rightarrow \text{Gerte} \supset \text{Gerte}^{\text{lesf}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Gerte}^{\text{lesf}}}^{-!}, \text{Gerte}^{\text{esf}} \right)$$

erhalten. Zunächst folgt aus unseren Vorarbeiten in 5.5.8, daß die entsprechend beschränkten quisflachen Komplexe zusammen mit den entsprechend beschränkten Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben eine Rechtslinksanpassung bilden. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate voll kokartesisch sind. Nun faktorisiert jeder Morphismus  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von geringten Räumen als  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  und mit  $\mathcal{B}$  hat auch  $f^*\mathcal{B}$  endliche Torsionsdimension. Jedes erlaubte Basisquadrat läßt sich mithin erhalten als Verklebung der vier erlaubten Basisquadrate

$$\begin{array}{ccccc} (W, \mathcal{D}) & \longrightarrow & (W, q^*\mathcal{A}) & \xrightarrow{q} & (X, \mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (W, g^*\mathcal{C}) & \longrightarrow & (W, v^*\mathcal{B}) & \xrightarrow{q} & (X, f^*\mathcal{B}) \\ \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow f \\ (Z, \mathcal{C}) & \longrightarrow & (Z, p^*\mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & (Y, \mathcal{B}) \end{array}$$

Hier schreiben wir  $v = pg = fq$  und die Sternchen meinen Rückzüge von Ringgarben. Unter unseren Annahmen ist nun nach 5.4.14 und 5.4.16 die Menge der voll kokartesischen naiven Verflechtungsquadrate stabil unter Verkleben. Es reicht also für jedes dieser vier Basisquadrate zu zeigen, daß jedes naive Verflechtungsquadrat darüber voll kokartesisch ist. Dabei können wir uns nach 5.4.12 zusätzlich auf den Fall beschränken, daß die Ausgangsecke in  $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$  liegt, daß sie also ein quisflacher Komplex aus schwach kompaktweichen Modulgarben ist. Gehen wir also unsere vier Fälle der Reihe nach durch. Im Basisquadrat oben rechts sind alle Rückzüge und Schreivorschübe exakt und die offensichtliche Verträglichkeit von Rückzug ohne Ringwechsel und Einschränken der operierenden Ringgarbe in der Kategorie der Modulgarben impliziert direkt, daß jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Im Basisquadrat unten rechts ist offensichtlich jedes naive Verflechtungsquadrat mit Ausgangsecke in  $\mathcal{L}$  voll kokartesisch, denn dann ist die Ausgangsecke ein Komplex schwach kompaktweicher Modulgarben und die Behauptung folgt aus dem bereits behandelten Fall abelscher Garben. Im Basisquadrat oben links folgt die Behauptung aus der Flachheit

von  $q^*\mathcal{A}$  über  $v^*\mathcal{B}$ , die dazu führt, daß quisflache Modulgarbenkomplexe zu quisflachen Modulgarbenkomplexen einschränken, und aus unserer Wahl der Regulierung. Im Basisquadrat unten links schließlich vereinfachen wir zunächst einmal die Notation mit den mittlerweile frei gewordenen Buchstaben zu

$$\begin{array}{ccc} (X, f^*\mathcal{C}) & \longrightarrow & (X, f^*\mathcal{B}) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ (Y, \mathcal{C}) & \longrightarrow & (Y, \mathcal{B}) \end{array}$$

für einen Morphismus  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  von Ringgarben auf  $Y$ . Es reicht nach 5.4.12 zu zeigen, daß für jeden quisflachen Komplex  $\mathcal{F}$  in  $\text{Hot}^-$  von schwach kompaktweichen opponierten Modulgarben auf  $X$  das zugehörige naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Les-Basiswechsel zeigt, daß es ausreicht, das im Fall eines einpunktigen Raums  $Y = \text{top}$  zu zeigen. Unsere Ringgarben darauf sind nun schlicht Ringe  $B, C$  mit einem Ringhomomorphismus  $B \rightarrow C$  und  $X$  ist ein lokal kompakter Hausdorffraum und  $\mathcal{F}$  ein quisflacher Komplex in  $\text{Hot}^-$  von kompaktweichen opponierten Modulgarben. Es reicht zu zeigen, wir gehen dabei zur nichtopponierten Situation über, daß im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C \otimes_B \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \otimes_B \mathcal{G} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ f^{(1)}\mathcal{F} \\ \downarrow S \end{array}$$

mit  $\mathcal{G}$  quisflach und einem Quasiisomorphismus als dem mit  $S$  markierten Pfeil die linke Vertikale schreikokartesisch wird in der Lokalisierung. Nach 5.2.20 reicht es zu zeigen, daß die linke Vertikale nach Vergessen der Operation der Skalare  $C$  schreikokartesisch wird in der Lokalisierung. Sei dazu  $M^* \xrightarrow{\sim} C$  ein Quasiisomorphismus von einem beschränkten Komplex flacher  $B$ -Rechtsmoduln nach  $C$ . Wir betrachten das Diagramm von Komplexen abelscher Garben

$$\begin{array}{ccc} M^* \otimes_B \mathcal{F} & \longrightarrow & C \otimes_B \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^{(1)}(M^* \otimes_B \mathcal{F}) & \longrightarrow & M^* \otimes_B f^{(1)}\mathcal{F} \\ & & \downarrow \\ & & M^* \otimes_B \mathcal{G} \longrightarrow C \otimes_B \mathcal{G} \end{array}$$

Ich behaupte, daß alle durchgezogenen Pfeile Quasiisomorphismen sind. In der obersten und untersten Horizontale folgt das, da  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  quisflach sind. Die mittlere Horizontale ist sogar ein echter Isomorphismus nach der Projektionsformel 4.3.2, da  $M^*$  ein beschränkter Komplex aus flachen  $B$ -Rechtsmoduln ist. Die mittlere Vertikale schließlich ist ein Quasiisomorphismus, da sie aus dem Quasiisomorphismus  $f_{(1)}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$  entsteht durch Tensorieren mit einem beschränkten Komplex flacher  $B$ -Rechtsmoduln. Wieder nach der Projektionsformel 4.3.2 besteht nun der Komplex links oben aus kompaktweichen abelschen Garben, folglich bleibt die linke Vertikale schreikokartesisch in der Lokalisierung. Alles zusammen zeigt, daß auch die rechte Vertikale schreikokartesisch werden muß in der Lokalisierung.

**5.5.11 (Verflochtene unbeschränkt derivierte Modulgarben).** Die in 5.5.9 diskutierte präverflochtene Winkelfaserung von unbeschränkten Homotopiekomplexen opponierter Modulgarben läßt sich ebenfalls mit 5.4.6 nach Quasiisomorphismen lokalisieren, wenn wir uns entsprechend einschränken. In der hier diskutierten Variante erlauben wir beliebige geringte Räume und fordern insbesondere nicht die Endlichkeit der Torsionsdimension, lassen aber als  $\mathfrak{i}$ -Morphismen nur solche Morphismen  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  zu, für die  $\mathcal{A}_x$  stets ein flacher  $\mathcal{B}_{f(x)}$ -Modul ist und  $f : X \rightarrow Y$  eine lesb-Abbildung von topologischen Räumen. Wir notieren diese Morphismen  $\text{Ger}^{\text{lesbaf}}$  beziehungsweise  $\text{Ger}^{\text{esbaf}}$ , wenn sie zusätzlich eigentlich sind. Wir erhalten mit diesen Notationen eine präverflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Ab}_{//\text{Ger}} \rightarrow \text{Ger} \supset \text{Ger}^{\text{lesbaf}} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Ger}^{\text{lesbaf}}, \text{Ger}^{\text{esbaf}}} \right)$$

Wir versehen sie mit derselben kartesisch-tensoriellen Regulierung wie im halbseitig beschränkten Fall und behaupten nun für die zugehörige unbeschränkte Homotopiekategorie, daß daraus mit Satz 5.4.6 durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen eine verflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Der}_{//\text{Ger}} \rightarrow \text{Ger} \supset \text{Ger}^{\text{lesbaf}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Ger}^{\text{lesbaf}}, \text{Ger}^{\text{esbaf}}} \right)$$

entsteht. Zunächst folgt aus unseren Vorarbeiten in 5.5.7, daß die quisflachen Komplexe zusammen mit den Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben eine Rechtslinksanpassung bilden. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate voll kokartesisch sind. Dazu können wir genauso argumentieren wie im halbseitig beschränkten Fall, nur daß wir für  $M^*$  eine unbeschränkte flache Auflösung von  $C$  zulassen müssen und dürfen, die auch wieder quisflach ist nach [TD] 3.8.8 und so den benötigten Quasiisomorphismus  $M^* \otimes_B f_{(1)}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} M^* \otimes_B \mathcal{G}$  liefert. Daß der Komplex  $M^* \otimes_B \mathcal{F}$  aus kompaktweichen Garben besteht, folgt dabei, indem man daß Argument aus dem Beweis



im halbseitig beschränkten Fall um die Bemerkung ergänzt, daß auch filtrierende Kolimites kompaktweicher Garben auf lokal kompakten Hausdorffräumen nach 4.2.6 wieder kompaktweich sind. Daß  $M^* \otimes_B \mathcal{F}$  dann auch  $f_{(!)}$ -rechtsentfaltet ist, folgt daraus, daß wir  $f : X \rightarrow Y$  als eine lesb-Abbildung von topologischen Räumen angenommen hatten.

**5.5.12 (Verflochtene unbeschränkt derivierte Kringmodulgarben).** In einer weiteren Variante erlauben wir nur gekringte Räume und lassen als  $j$ -Morphismen nur solche Morphismen  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  zu, für die  $\mathcal{A}_x$  stets ein flacher  $\mathcal{B}_{f(x)}$ -Modul ist und  $f : X \rightarrow Y$  ein lesb-Morphismus. Das reicht für die im vorhergehenden gegebene Argumentation, da in diesem Fall  $M^* \otimes_B \mathcal{F}$  sogar ein Komplex von  $B$ -Moduln ist. Wir notieren diese Morphismen  $\text{Gek}^{\text{lesbf}}$  beziehungsweise  $\text{Gek}^{\text{esbf}}$ , wenn sie zusätzlich eigentlich sind. Dann erhalten wir mit Satz 5.4.6 durch Lokalisierung nach Quasiisomorphismen eine verflochtene Winkelfaserung

$$\left( \text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \text{Gek} \supset \text{Gek}^{\text{lesbf}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Gek}^{\text{lesbf}}}^i, \text{Gek}^{\text{esbf}} \right)$$

5.5.13. Die drei Varianten für Verflechtungen derivierter Modulgarben aus 5.5.10, 5.5.11 und 5.5.12 haben alle offensichtlich die Zusatzeigenschaft, daß alle Shifts [1] von Verflechtungsquadraten wieder Verflechtungsquadrate sind, so daß die Transformationen der Flechtbasiswechsel verträgliche Transformationen zwischen triangulierten Funktoren sind im Sinne von [TD] 2.4.4.

**Beispiel 5.5.14 (Garbenkohomologie auf kompakten Quadern).** Für jede abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $[0, 1]^n$  gilt

$$H^q([0, 1]^n; \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für } q > n.$$

Im Fall  $n = 1$  hatten wir das bereits in [TG] 4.2.3 gezeigt. Gegeben ein beliebiger Raum  $X$  zeigt Basiswechsel für die halbseitig beschränkten derivierten Kategorien damit, daß für die Projektion  $\pi : X \times [0, 1] \rightarrow X$  der Vorschub  $\pi_{(!)} = \pi_{(*)}$  auf abelschen Garben endliche homologische Dimension  $\leq 1$  hat. Mit unserer Abschätzung [TD] 3.6.4 folgt induktiv, daß  $\Gamma : \text{Ab}_{/[0,1]^n} \rightarrow \text{Ab}$  homologische Dimension  $\leq n$  hat.

**Beispiel 5.5.15 (Kompakte Garbenkohomologie auf offenen Quadern).** Für jede abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $(0, 1)^n$  gilt

$$H_!^q((0, 1)^n; \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für } q > n.$$

Ist in der Tat  $j$  die Einbettung in den kompakten Quader  $[0, 1]^n$ , so ist  $j_{(!)}$  exakt und hat damit endliche homologische Rechtsdimension  $\leq 0$ . Wegen  $\Gamma_! = \Gamma \circ j_{(!)}$  folgt die Behauptung mit der Abschätzung [TD] 3.6.4 aus der Abschätzung 5.5.14 im Fall eines kompakten Quaders.

## 5.6 Trennrückzug-Schreibvorschub derivierter Modulgarben

*Beispiel 5.6.1.* Die kommutativen Rückholquadrate über kartesischen Quadraten der Basis der Familienwinkelfaserung bilden eine Präverflechtung der Trenaustauschsituation

$$\left( \text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek}^{\text{les}} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Gek}^{\text{les}}}^i, \text{Gek}^{\text{es}} \right)$$

für die kartesische Regulierung der Basis. Durch Übergang zu den Homotopiekomplexen erhalten wir daraus die präverflochtene Trenaustauschsituation der **Homotopiekomplexe von Modulgarben auf gekringten Räumen**

$$\left( \text{Hot}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek}^{\text{les}} \leftarrow \text{Hot}_{//\text{Gek}^{\text{les}}}^i, \text{Gek}^{\text{es}} \right)$$

Im folgenden diskutieren wir zwei Fälle, in denen sich Einschränkungen dieser präverflochtenen Trenaustauschsituation nach Quasiisomorphismen lokalisieren lassen.

**5.6.2 (Beliebige Komplexe, homologisch endliche Schreimorphismen).** Wir erlauben nur halmweise flache Morphismen  $f$  mit  $f_{(!)}$  homologisch endlich als Schreimorphismen beziehungsweise Eigmorphismen der Basis. Wir erinnern dafür aus 5.5.12 die Notationen  $\text{Gek}^{\text{lesbf}}$  beziehungsweise  $\text{Gek}^{\text{esbf}}$  und notieren diese präverflochtene Trenaustauschsituation

$$\left( \text{Hot}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek}^{\text{lesbf}} \leftarrow \text{Hot}_{//\text{Gek}^{\text{lesbf}}}^i, \text{Gek}^{\text{esbf}} \right)$$

Als Regulierung nehmen wir die kartesische Regulierung der Basis, also alle kartesischen Quadrate der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  mit lesbf-Morphismen in allen Vertikalen. Wir zeigen gleich, daß in der zugrundeliegenden einfachen Kategorie  $\text{Gek}$  alle kartesischen Quadrate mit einem lesbf-Morphismus in einer Kante des Ausgangswinkels auch einen lesbf-Morphismus in der zurückgezogenen Kante aus dem Faserprodukt haben.

**Lemma 5.6.3.** *In der Kategorie  $\text{Gek}$  aller gekringten Räume bilden die lesbf-Morphismen ein rückzugstabiles multiplikatives System.*

*Beweis.* Daß sie ein multiplikatives System bilden, ist klar. Gegeben ein kartesisches Diagramm  $pg = fq$  von gekringten Räumen mit les-Abbildungen  $f, g$  gilt es noch zu zeigen, daß mit  $f_{(!)} : \text{Ab}_{(X, \mathcal{A})} \rightarrow \text{Ab}_{(Y, \mathcal{B})}$  auch  $g_{(!)} : \text{Ab}_{(W, \mathcal{D})} \rightarrow \text{Ab}_{(Z, \mathcal{C})}$  endliche homologische Dimension hat. Mit Basiswechsel reicht es im Fall einpunktiger Räume  $Y, Z$  und  $W = X$  zu zeigen, daß die homologische Dimension von  $g_{(!)}$  beschränkt ist durch die homologische Dimension von  $f_{(!)}$ . In 5.2.20 hatten wir diskutiert, inwiefern der derivierte Schreibvorschub unter les-Morphismen

mit dem Vergessen etwaiger Modulstrukturen vertauscht. Gibt es also  $N$  derart, daß für jedes  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}$  gilt  $R^n f_{(1)} \mathcal{F} = 0$  für  $n \geq N$ , so gilt dasselbe a fortiori für jedes  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/(X, \mathcal{D})}$ , da wir es ja mit  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  zu einer  $\mathcal{A}$ -Modulgarbe einschränken können.  $\square$

**5.6.4 (Halbseitig beschränkte Komplexe, beschränkte Torsion).** Wir gehen in 5.6.1 über zur Regulierung, die von allen kartesischen Quadraten in  $\text{Gek}$  aus Objekten von  $\text{Gekte}$  mit  $\text{lesf}$ -Morphismen als Vertikalen sowie allen Projektionsformelquadraten zu einem  $\text{lesf}$ -Morphismus in  $\text{Gekte}$  erzeugt wird. Weiter betrachten wir nur Komplexe aus  $\text{Hot}^-$ , lassen aber beliebige  $\text{lesf}$ -Morphismen  $f$  als Schreimorphismen und beliebige  $\text{esf}$ -Morphismen als Eigmorphismen der Basis zu. Wir verwenden für diese präverflochtene Trennaustauschsituation die Notation

$$\left( \text{Hot}_{//\text{Gekte}}^- \rightarrow \wedge \text{Gekte} \supset \text{Gekte}^{\text{lesf}} \leftarrow \text{Hot}_{//\text{Gekte}^{\text{lesf}}}^{-i}, \text{Gekte}^{\text{esf}} \right)$$

Diese technische Variante wird insbesondere zum Prüfen die Bedingungen der ersten Variante benötigt. Ich weiß nicht, ob Faserprodukte in der Kategorie  $\text{Gekte}$  der gekringten Räume endlicher Torsionsdimension existieren und inwieweit sie mit den Faserprodukten in  $\text{Gek}$  übereinstimmen. Die Regulierung erlaubt uns, diese Schwierigkeiten zu umgehen.

**Satz 5.6.5 (Trennaustausch für unbeschränkt derivierte Modulgarben).** *Die Familienwinkelfaserung der präverflochtenen Trennaustauschsituation aus 5.6.2 für unbeschränkte Homotopiekomplexe von Modulgarben auf gekringten Räumen besitzt eine Rechtslinksanpassung in Bezug auf Quasiisomorphismen und liefert durch Lokalisieren mit Satz 5.4.6 eine verflochtene Trennaustauschsituation*

$$\left( \text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek}^{\text{lesbf}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Gek}^{\text{lesbf}}}^i, \text{Gek}^{\text{esbf}} \right)$$

*für die kartesische Regulierung der Basis.*

5.6.6. Per definitionem ist in dieser Trennaustauschsituation die Trennfaserung  $\text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$  unsere derivierte Garbenoptrennfaserung aus 2.9.3 und

5.6.7. Einen anderen Zugang zu noch allgemeineren Aussagen in dieser Richtung kann man in der Dissertation von Recktenwald [?] finden, die ihrerseits auf dem Formalismus von Hörmann [?] aufbaut.

*Beweis.* Aus unseren Vorarbeiten in 5.5.7 folgt, daß die Tupel quisflacher Komplexe zusammen mit den Tupeln aus Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben eine Rechtslinksanpassung der Familienwinkelfaserung bilden. Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate voll kokartesisch sind. Nach 5.4.7 reicht es aus, das für naive Verflechtungsquadrate über allen elementaren kartesischen Trennquadraten mit  $\text{lesbf}$ -Vertikalen im Sinne von 4.4.12

zu zeigen, denn aus ihnen können wir nach 4.4.12 durch Vertupeln und Verkleben alle erlaubten Basisquadrate unserer Regulierung erhalten, da sie nach 5.6.3 ein rückzugstabiles multiplikatives System bilden. Im Fall kartesischer Quadrate mit Einstrennungen in den Horizontalen haben wir bereits in 5.5.12 geprüft, daß alle naiven Verflechtungsquadrate darüber voll kokartesisch sind. Im Fall kartesischer Quadrate mit Leertrennungen in den Horizontalen ist eh klar, daß alle naiven Verflechtungsquadrate darüber voll kokartesisch sind. Damit bleibt uns nur noch der Fall der Projektionsformelquadrate alias aller erlaubten Basisquadrate der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}_X, f)} & X \wr Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \wr \text{id}_Y \\ Y & \xrightarrow{(\text{id}_Y, \text{id}_Y)} & Y \wr Y \end{array}$$

Wir können  $f$  faktorisieren in  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  und dürfen die beiden Faktoren getrennt betrachten. Im Fall  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B})$  reicht es zu zeigen, daß für jeden quisflachen Komplex  $\mathcal{G}$  von  $f^*\mathcal{B}$ -Moduln und jeden Komplex  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{A}$ -Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(\text{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}} \mathcal{F}) \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \text{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G}))$$

ist. Das ist sogar ohne alle Annahmen an  $\mathcal{G}$  offensichtlich. Im Fall  $(X, f^*\mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  reicht es zu zeigen, daß für  $\mathcal{F} \in \text{Hot}(\text{Ab}_{//X})$  ein Komplex schwach kompaktweicher Garben und  $\mathcal{G} \in \text{Hot}(\text{Ab}_{//Y})$  ein quisflacher Komplex von flachen Modulgarben das naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. In diesem Fall ist  $\mathcal{F} \wr \mathcal{G}$  quisrechtsentfaltet für die obere Horizontale und quislinksentfaltet für die rechte Vertikale und  $\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G}$  besteht nach 4.3.10 aus faserweise kompaktweichen Garben, ist also quislinksentfaltet für die linke Vertikale, und  $f_{(1)}\mathcal{F} \wr \mathcal{G}$  ist quisrechtsentfaltet für die untere Horizontale und der von der Präverflechtung der Homotopiekategorien herrührende Morphismus ist nach 4.3.10 ein Isomorphismus

$$f_{(1)}(\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f_{(1)}\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G}$$

von Komplexen in der opponierten Garbenkategorie. Das zeigt, daß auch in diesem Fall unser naives Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist.  $\square$

**Satz 5.6.8 (Trennaustausch für halbseitig derivierte Modulgarben).** *Die Familienwinkelfaserung der präverflochtenen Trennaustauschsituation für halbseitig beschränkte Homotopiekomplexe von Modulgarben auf gekringten Räumen aus 5.6.4 besitzt eine Rechtslinksanpassung in Bezug auf Quasiisomorphismen und liefert durch Lokalisieren mit Satz 5.4.6 eine verflochtene Trennaustauschsituation*

$$\left( \text{Der}_{//\text{Gekte}}^- \rightarrow \wr \text{Gekte} \supset \text{Gekte}^{\text{lesf}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Gekte}^{\text{lesf}}}^{-i}, \text{Gekte}^{\text{esf}} \right)$$

5.6.9. Die Regulierung wird hier erzeugt von allen kartesischen Quadraten in  $\text{Gek}$  aus Objekten von  $\text{Gekte}$  mit  $\text{lesf}$ -Morphismen als Vertikalen sowie allen Projektionsformelquadraten zu einem  $\text{lesf}$ -Morphismus in  $\text{Gekte}$ . Mit 4.4.12 folgt, daß zur Regulierung insbesondere alle kartesischen Quadrate der Familienkategorie gehören, die aus konstant mit einem festen Kringsystem endlicher Torsionsdimension gekringten Räumen bestehen. Halten wir so einen Kringsystem fest, so erhalten wir also eine verflochtene Trenaustauschsituation über der kartesischen Regulierung der Basis, und ist dieser Kringsystem  $\mathbb{Z}$ , so ist das eine verflochtene Trenaustauschsituation

$$\left( \text{Der}_{\text{Top}}^- \rightarrow \wedge \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{\text{Top}^{\text{les}}}^{-i}, \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

Die Notwendigkeit einer feineren Regulierung im Satz rührt daher, daß mir nicht klar ist, ob Pushouts von Kringsystemen endlicher Torsionsdimension stets wieder endliche Torsionsdimension haben, wenn einer der Morphismen flach ist.

*Beweis.* Mutatis mutandis bleibt der Beweis derselbe, wir müssen nur 5.5.8 und 5.5.10 zitieren.  $\square$

*Ergänzung 5.6.10.* Will man allgemeiner Schreivorschub unter nicht notwendig flachen Kringsystemkomorphismen zulassen, so wird man mit differentiellen graduierten Kringsystemen arbeiten müssen.

*Beispiel 5.6.11.* Gegeben ein Kringsystemhomomorphismus  $k \rightarrow K$  und eine  $\text{lesb}$ -Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  betrachten wir das kartesische Diagramm konstant gekringter Räume

$$\begin{array}{ccc} (X, K) & \xrightarrow{q} & (X, k) \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ (Y, K) & \xrightarrow{p} & (Y, k) \end{array}$$

Der zugehörige Verflechtungsisomorphismus in der unbeschränkten Situation aus 5.6.5 präzisiert die Verträglichkeit von  $f_!$  mit der Erweiterung der Skalare  $K \otimes_k^L$ . Im Fall eines einpunktigen Raums  $Y$  mag man sie das **universelle Koeffiziententheorem der kompakten Kohomologie** nennen. Mit 5.6.5 folgt es allgemeiner, wenn  $f_{(1)}$  nur auf der Kategorie der Garben von  $k$ -Moduln und a fortiori von  $K$ -Moduln endliche homologische Dimension hat. Mit 5.6.8 folgt es dahingegen für beliebige  $\text{les}$ -Abbildungen, wenn wir  $k$  und  $K$  von endlicher Torsionsdimension annehmen und nur halbseitig beschränkte Komplexe betrachten.

*Beispiel 5.6.12 (Das universelle Koeffiziententheorem in einem Spezialfall).* Im Fall  $X = S^1$  und  $Y = \text{top}$  und dem Kringsystemhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und der nichtkonstanten aber lokal zur konstanten Garbe  $\mathbb{Z}$  isomorphen abelschen Garbe  $\mathcal{M}$  auf  $S^1$  ist  $q^*\mathcal{M} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}$  die konstante Garbe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und wir

erhalten  $g_!q^*\mathcal{M} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus [-1]\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Um andererseits  $f_!\mathcal{M}$  zu bestimmen, erinnern wir die Mayer-Vietoris-Sequenz der lokalen Kohomologie [TG] 4.9.26 und finden, daß nur  $H_!^1(S^1; \mathcal{M})$  von Null verschieden ist und isomorph ist zum Kokern der Abbildung  $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  gegeben durch  $(a, b) \mapsto (a+b, a-b)$  alias  $H_!^1(S^1; \mathcal{M}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $f_!\mathcal{M} \cong [-1]\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Damit ergibt sich  $p^*f_!\mathcal{M} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus [-1]\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und wie behauptet  $g_!q^*\mathcal{M} \cong p^*f_!\mathcal{M}$ .

**Beispiel 5.6.13 (Die Künnethformel der kompakten Kohomologie).** Gegeben lokal kompakte Hausdorffräume  $X, Y$  betrachten wir in der Familienkategorie der banalen Trennkategorie topologischer Räume das kartesische Diagramm mit les-Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \wedge Y \\ c := c_{X \times Y} \downarrow & & \downarrow c_X \wedge c_Y \\ \text{top} & \longrightarrow & \text{top} \wedge \text{top} \end{array}$$

Die Verflechtung in der verflochtenen Trennaustauschsituation der halbseitig derivierten abelschen Garben 5.6.9 in unserem kartesischen Diagramm mit der Diagonale als unterer Horizontale liefert einen Isomorphismus  $c_{X!}\mathbb{Z}_X \otimes c_{Y!}\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} c_!(\mathbb{Z}_X \boxtimes \mathbb{Z}_Y)$ . Aus 1.5.22 erhalten wir weiter einen Isomorphismus  $\underline{X} \times \underline{Y} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \boxtimes \underline{Y}$  oder in anderer Notation  $\mathbb{Z}_{X \times Y} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X \boxtimes \mathbb{Z}_Y$ . Alles in allem erhalten wir so einen Isomorphismus

$$c_{X!}\mathbb{Z}_X \otimes c_{Y!}\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} c_!\mathbb{Z}_{X \times Y}$$

in  $\text{Der}(\text{Ab}/_{\text{top}}) = \text{Der}(\text{Ab})$ . Das Tensorprodukt ist bis hierher stets deriviert als  $\otimes = \otimes^L$  zu verstehen. Mit der abstrakten Künnethformel [TD] 3.8.23 erhalten wir daraus, jetzt aber mit  $\otimes$  als underiviertem Tensorprodukt, natürliche unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen von abelschen Gruppen

$$\bigoplus_{p+q=n} H_!^p X \otimes H_!^q Y \hookrightarrow H_!^n(X \times Y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} H_!^p X * H_!^q Y$$

**Beispiel 5.6.14 (Künnethformel mit Koeffizienten).** Gegeben ein Kring  $k$  endlicher Torsionsdimension und lokal kompakte Hausdorffräume  $X, Y$  liefert unsere Trennverflechtung für halbseitig derivierte Modulgarben 5.6.9 in derselben Weise in  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$c_{X!}k_X \otimes c_{Y!}k_Y \xrightarrow{\sim} c_!k_{X \times Y}$$

Dasselbe folgt für einen beliebigen Kring  $k$  und lesb-Räume  $X, Y$  aus unserer Trennverflechtung für beidseitig derivierte Modulgarben 5.6.5.

## 5.7 Schreirückzug für derivierte Modulgarben

**Satz 5.7.1.** Für jeden lesb-Morphismus gekringter Räume  $f : X \rightarrow Y$  besitzt der Schreivorschub  $f_! : \text{Der}(\text{Ab}/_X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/_Y)$  einen Rechtsadjungierten, den **Schreirückzug**

$$f^! : \text{Der}(\text{Ab}/_Y) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/_X)$$

5.7.2 (**Notationsfragen**). Für die Funktoren auf abelschen Garben, die wir bisher  $f^!$  notiert hatten, vereinbaren wir die neue Notation  $f^{(!)}$ .

5.7.3. Der Beweis des Satzes benötigt größere Vorbereitungen und wird für abelsche Garben in 5.7.21 und für Modulgarben in 5.7.26 gegeben. Zunächst diskutieren wir einige Spezialfälle, die leichter zu haben sind, und erste Eigenschaften. Dann beginnen wir mit Vorbereitungen zum Beweis.

5.7.4 (**Schreirückzug unter separierten étalen Abbildungen**). Im Fall offener Einbettungen  $f$  und allgemeiner im Fall separierter étaler Abbildungen  $f$  liefern [TG] 4.9.9 beziehungsweise [TG] 6.5.1 sogar eine Adjunktion  $(f_{(!)}, f^*)$  exakter Funktoren auf den entsprechenden Kategorien abelscher Garben. Sie führt ohne weitere Schwierigkeiten zu einer Adjunktion  $(f_!, f^*)$  der zugehörigen derivierten Funktoren und liefert damit sowohl die Existenz des Rechtsadjungierten  $f^!$  als auch eine Isotransformation  $f^* \xrightarrow{\sim} f^!$  im Fall derivierter abelscher Garben. Dasselbe gilt im Fall von Modulgarben für einen separierten étalen Morphismus  $f$  von gekringten Räumen „ohne Ringwechsel“, also mit  $\mathcal{A} = f^*\mathcal{B}$ .

5.7.5 (**Schreirückzug unter lokal abgeschlossenen Einbettungen**). Im Fall lokal abgeschlossener Einbettungen  $f$  ist  $f_{(!)} = f_*$  ein exakter Funktor auf den zugrundeliegenden Kategorien abelscher Garben und besitzt dort nach [TG] 6.4.16 einen Rechtsadjungierten, den wir von nun an neu  $f^{(!)} : \text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}/_Y$  notieren und der jeder Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_Y$  auf  $Y$  die Garbe  $f^{(!)}\mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  der Schnitte von  $\mathcal{F}$  mit Träger in  $X$  zuordnet. Da jeder Garbenkomplex nach [TSF] 2.3.2 eine Quisrechtsentfaltung besitzt, existiert in diesem Fall der Rechtsderivierte auf der ganzen derivierten Kategorie und ist dann nach [TD] 3.2.28 der gesuchte Rechtsadjungierte  $f^! = Rf^{(!)}$ . Die  $\mathcal{H}^q f^!\mathcal{F} = R^q f^{(!)}\mathcal{F}$  für  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_Y$  sind in diesem Fall unsere lokalen Kohomologiegarben von  $\mathcal{F}$  mit Träger in  $X$  aus [TG] 6.4.19. Dasselbe gilt im Fall von Modulgarben für einen separierten étalen Morphismus  $f$  von gekringten Räumen „ohne Ringwechsel“, also mit  $\mathcal{A} = f^*\mathcal{B}$ .

**Beispiel 5.7.6 (Problematik einer naiven Konstruktion des Schreirückzugs).** Für die konstante Abbildung  $c : \mathbb{R} \rightarrow \text{pt}$  der Zahlengerade auf einen Punkt besitzt  $c_{(!)} : \text{Ab}/_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Ab}/_{\text{pt}}$  keinen Rechtsadjungierten, da der Funktor  $c_{(!)}$  sonst nach [TG] 2.4.12 rechtsexakt sein müßte. Das ist er jedoch nicht, denn der Epimorphismus der konstanten Garbe auf den Wolkenkratzer am Ursprung  $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{(0)}$  wird unter  $c_{(!)}$  die Einbettung  $0_{\text{pt}} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{\text{pt}}$  und diese ist kein Epimorphismus.

**5.7.7 (Homologische Breite des Schreirückzugs).** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine les-Abbildung in Top mit  $f_{(1)}$  von einer homologischen Dimension  $\leq d$ , so gilt

$$\mathcal{G} \in \text{Der}^{\geq 0}(\text{Ab}_{/Y}) \Rightarrow f^! \mathcal{G} \in \text{Der}^{\geq -d}(\text{Ab}_{/X})$$

In der Tat reicht es dafür nach [TD] 2.7.12 zu zeigen, daß gilt  $\text{Der}_{/X}(\mathcal{F}, f^! \mathcal{G}) = 0$  für alle  $\mathcal{F} \in \text{Der}^{\leq -d-1}(\text{Ab}_{/X})$ . Das folgt mit unserer Adjunktion aus der Erkenntnis  $f_! \mathcal{F} \in \text{Der}^{\leq -1}(\text{Ab}_{/X})$ , die hinwiederum von unseren Erkenntnissen [TD] 3.6.4 zum Derivieren homologisch endlicher Funktoren herkommt, da wir ja aus 2.3.2 wissen, daß jeder Komplex abelscher Garben eine Quisrechtsentfaltung besitzt. Ist zusätzlich  $\text{Ab}_{/Y}$  von endlicher homologischer Dimension  $\leq r$ , so zeigen wir zusätzlich

$$\mathcal{G} \in \text{Der}^{\leq 0}(\text{Ab}_{/Y}) \Rightarrow f^! \mathcal{G} \in \text{Der}^{\leq r}(\text{Ab}_{/X})$$

Nach [TD] 2.6.35 reicht es in der Tat, für  $q > r$  und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  das Verschwinden  $\text{Der}_{/X}(\mathcal{F}[-q], f^! \mathcal{G}) = 0$  zu zeigen alias  $\text{Der}_{/Y}(f_! \mathcal{F}, \mathcal{G}[q]) = 0$ . Nach Annahme und [TD] 3.6.8 ist aber  $\mathcal{G}[q]$  für  $q > r$  quasiisomorph zu einem quisrechtsentfalteten Komplex in  $\text{Hot}^{<0}(\text{Ab}_{/Y})$ . Für Modulgarben gilt mutatis mutandis dasselbe.

**Satz 5.7.8 (Darstellbarkeit von Funktoren auf Garben).** Seien  $\mathfrak{U}$  ein Universum und  $X$  ein topologischer Raum aus  $\mathfrak{U}$ . Ein Funktor  $\mu : \mathfrak{U}\text{Ab}_{/X} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ab}^{\text{opp}}$  ist genau dann darstellbar alias isomorph zu einem Funktor der Gestalt  $\mathcal{F} \mapsto \text{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$  mit  $\mathcal{C} \in \mathfrak{U}\text{Ab}_{/X}$ , wenn er mit Kolimites über  $\mathfrak{U}$ -punktkleine Köcher vertauscht.

*Beweis.* Daß ein darstellbarer Funktor mit Kolimites vertauschen muß, ist eh klar. Sind weiter eine abelsche Garbe  $\mathcal{C} \in \text{Ab}_{/X}$  und natürliche Bijektionen

$$\mu(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$$

gegeben, so erhalten wir mit  $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_{U \subset X} := i_{(1)} \mathbb{Z}_U$  für  $i : U \hookrightarrow X$  die Einbettung einer offenen Teilmenge Bijektionen  $\mu(\mathbb{Z}_{U \subset X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(U)$ . Für  $V \Subset U$  muß darüber hinaus der offensichtliche Morphismus  $\mathbb{Z}_{V \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_{U \subset X}$  zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mu(\mathbb{Z}_{U \subset X}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \text{res}_U^V \\ \mu(\mathbb{Z}_{V \subset X}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}(V) \end{array}$$

mit besagten Bijektionen in den Horizontalen führen. Damit ist der weitere Gang des Beweises klar: Wir konstruieren zu unserem Funktor  $\mu$  eine abelsche Prägarbe  $\mathcal{C}_\mu$  durch die Vorschrift

$$\mathcal{C}_\mu(U) := \mu(\mathbb{Z}_{U \subset X})$$



und zeigen, daß sie unter unseren zusätzlichen Annahmen eine Garbe ist, die den Funktor  $\mu$  darstellt. Um zu zeigen, daß  $\mathcal{C}_\mu$  eine Garbe ist, betrachten wir ein System  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von offenen Teilmengen mit Vereinigung  $V \Subset X$  und das Diagramm

$$\bigoplus_{(U,U') \in \mathcal{U}^2} \mathbb{Z}_{(U \cap U') \subset X} \rightrightarrows \bigoplus_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_{V \subset X}$$

mit den beiden ersten Pfeilen gegeben einerseits durch  $\mathbb{Z}_{(U \cap U') \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_{U \subset X}$  und andererseits durch  $\mathbb{Z}_{(U \cap U') \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_{U' \subset X}$ . An den Halmen erkennt man, daß hier  $\mathbb{Z}_{V \subset X}$  der Kolimes der linken Hälfte unseres Diagramms alias der Koegalisor der beiden linken Pfeile ist. Kommutiert  $\mu$  mit Kolimites, so muß mithin  $\mathcal{C}_\mu$  eine abelsche Garbe sein. Es bleibt noch zu zeigen, daß diese abelsche Garbe auch in der Tat den Funktor  $\mu$  darstellt. Bezeichne dazu  $\text{Off}_X$  die Kategorie der offenen Teilmengen von  $X$  mit Inklusionen als Morphismen und  $J : \text{Off}_X \rightarrow \text{Ab}/X$  den Funktor  $U \mapsto \mathbb{Z}_{U \subset X}$ . Nun betrachten wir für alle  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  die Verknüpfungen

$$\begin{array}{ccc} \mu(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cat}(\text{Ab}/X, \text{Ab}^{\text{opp}})(\mu, \text{Ab}/X(\cdot, \mathcal{F})) \\ & & \downarrow \circ J \\ \text{Ab}/X(\mathcal{F}, \mathcal{C}_\mu) & \xleftarrow{\sim} & \text{Cat}(\text{Off}_X, \text{Ab}^{\text{opp}})(\mu \circ J, \text{Ab}/X(\cdot, \mathcal{F}) \circ J) \end{array}$$

der Identifikation des Yoneda-Lemmas mit einigen weiteren offensichtlichen Abbildungen unter Verwendung von  $\text{Ab}/X(\cdot, \mathcal{F}) \circ J \xrightarrow{\cong} \mathcal{F} : \text{Off}_X \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ . Sie bilden eine Transformation  $\tau : \mu \Rightarrow \text{Ab}/X(\cdot, \mathcal{C}_\mu)$  von Funktoren  $\text{Ab}/X \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ , die auf allen Objekten der Gestalt  $\mathbb{Z}_{U \subset X}$  Isomorphismen  $\tau : \mu(\mathbb{Z}_{U \subset X}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}/X(\mathbb{Z}_{U \subset X}, \mathcal{C}_\mu)$  induziert. Es gilt zu zeigen, daß sie auf überhaupt allen Objekten  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  Isomorphismen  $\tau : \mu(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}/X(\mathcal{F}, \mathcal{C}_\mu)$  induziert. Da beide Seiten mit Kolimites vertauschen, folgt das zunächst für beliebige direkte Summen von Kopien unserer  $\mathbb{Z}_{U \subset X}$ . Jede abelsche Garbe ist aber Quotient einer derartigen direkten Summe und dann auch Kokern eines Morphismus zwischen zwei derartigen direkten Summen, und so folgt es dann für  $\mathcal{F}$  beliebig.  $\square$

**Satz\* 5.7.9 (Darstellbarkeit von Funktoren auf Modulgarben).** *Seien  $\mathfrak{A}$  ein Universum und  $X = (X, \mathcal{A})$  ein geringter Raum aus  $\mathfrak{A}$ . Ein Funktor  $\mu : \mathfrak{A}\text{Ab}/X \rightarrow \mathfrak{A}\text{Ab}^{\text{opp}}$  ist genau dann darstellbar alias isomorph zu einem Funktor der Gestalt  $\mathcal{F} \mapsto \mathfrak{A}\text{Ab}/X(\mathcal{F}, \mathcal{C})$  mit  $\mathcal{C} \in \mathfrak{A}\text{Ab}/X$ , wenn er mit Kolimites über  $\mathfrak{A}$ -punktkleine Köcher vertauscht.*

*Beweis.* Indem wir auf  $\hat{\mu} : \mathcal{G} \mapsto \mu(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G})$  unseren vorherigen Satz anwenden, erkennen wir, daß dieser Funktor dargestellt wird durch die abelsche Garbe  $\mathcal{C}$  mit Schnitten  $\mathcal{C}(U) := \mu(\mathcal{A}_{U \subset X})$ . Versehen wir nun  $\mathcal{C}$  mit seiner offensichtlichen Struktur als  $\mathcal{A}$ -Modulgarbe, so erhalten wir Abbildungen

$$\mu(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Ab}/X(\mathcal{F}, \mathcal{C})$$

durch die Vorschrift, daß wir  $\alpha \in \mu(\mathcal{F})$  abbilden auf die  $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$  für  $U \subseteq X$  gegeben dadurch, daß wir zu  $s \in \mathcal{F}(U)$  den Morphismus  $\tilde{s} : \mathcal{A}_{U \subset X} \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $1 \mapsto s$  betrachten und dazu  $\mu(\tilde{s}) : \mu(\mathcal{F}) \rightarrow \mu(\mathcal{A}_{U \subset X})$  bilden und dann  $\alpha_U(s) := (\mu(\tilde{s}))(\alpha)$  setzen. Gehen wir die Definitionen durch, so ergibt sich, daß unsere Abbildungen zu Isomorphismen  $\mu(\mathcal{A}_{U \subset X}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/X}(\mathcal{A}_{U \subset X}, \mathcal{C})$  spezialisieren. Da aber jede  $\mathcal{A}$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  Kokern eines Morphismus zwischen direkten Summen von Kopien gewisser  $\mathcal{A}_{U \subset X}$  ist und da beide Seiten mit Kolimites vertauschen, muß unsere Abbildung für alle  $\mathcal{A}$ -Modulgarben  $\mathcal{F}$  ein Isomorphismus sein.  $\square$

**Korollar 5.7.10.** *Seien  $\mathfrak{A}$  ein Universum und  $X$  ein topologischer Raum oder allgemeiner ein geringter Raum und  $\mathcal{D}$  eine abelsche  $\mathfrak{A}$ -Kategorie. Ein Funktor  $\Lambda : \mathfrak{A}\text{Ab}_{/X} \rightarrow \mathcal{D}$  besitzt genau dann einen Rechtsadjungierten, wenn er mit Kolimites über  $\mathfrak{A}$ -punktkleine Köcher vertauscht.*

*Beweis.* Jeder Funktor, der einen Rechtsadjungierten besitzt, vertauscht mit Kolimites. Andererseits vertauscht auch für alle  $D \in \mathcal{D}$  der Funktor  $\mathcal{D} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}, A \mapsto \mathcal{D}(A, D)$  mit Kolimites. Vertauscht weiter  $\Lambda$  mit Kolimites, so auch die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \text{Ab}_{/X} & \rightarrow & \text{Ab}^{\text{opp}} \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{D}(\Lambda\mathcal{F}, D) \end{array}$$

Nach dem Darstellbarkeitskriterium 5.7.8 beziehungsweise 5.7.9 ist unsere Verknüpfung also darstellbar durch eine abelsche Garbe  $RD \in \text{Ab}_{/X}$ . Man sieht nun ohne Mühe, daß wir damit schon den gesuchten Rechtsadjungierten  $R$  zu  $\Lambda$  konstruiert haben.  $\square$

**Beispiel 5.7.11 (Spezialfälle des Schreirückzugs).** Gegeben eine les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  vertauscht der Schreivorschub  $f^{(!)} : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$  nach 4.2.4 mit filtrierenden Kolimites. Ist  $f^{(!)}$  zusätzlich exakt, etwa für  $f$  eine lokal abgeschlossene Einbettung oder eine separierte étale Abbildung, so vertauscht es mithin mit beliebigen Kolimites und besitzt nach 5.7.10 einen Rechtsadjungierten

$$f^{(!)} : \text{Ab}_{/Y} \rightarrow \text{Ab}_{/X}$$

Gegeben eine Garbe  $\mathcal{G} \in \text{Ab}_{/Y}$  finden wir für ihren Schreirückzug immer im Fall, daß der Schreivorschub exakt ist, sogar die explizite Beschreibung

$$(f^{(!)}\mathcal{G})(U) = \text{Ab}_{/Y}(f^{(!)}(\mathbb{Z}_{U \subset X}), \mathcal{G})$$

In diesem Fall erhalten wir nach [TD] 3.2.28 auch auf den derivierten Funktoren ein adjungiertes Paar  $(f_!, Rf^{(!)})$  und so eine vergleichsweise explizite Beschreibung des Schreirückzugs auf den derivierten Kategorien. Im Fall étaler separierter Abbildungen  $f$  erhalten wir so ein weiteres Mal unseren ausgezeichneten Isomorphismus  $f^{(!)} \xrightarrow{\cong} f^{(*)}$  aus [TG] 6.5.1.

5.7.12. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  mit einer offenen Teilmenge  $U \Subset X$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  erklären wir ganz allgemein die abelsche Garbe  $\mathcal{F}_{U \subset X} \in \text{Ab}/X$  durch die Vorschrift

$$\mathcal{F}_{U \subset X} := j_{(!)}j^{(*)}\mathcal{F}$$

für  $j : U \rightarrow X$  die Einbettung. Da beide fraglichen Funktoren exakt sind, fällt diese Garbe auch zusammen mit dem Objekt  $j_{!}j^*\mathcal{F}$  der derivierten Kategorie.

**Lemma 5.7.13 (Kriterium für die Eigenschaft relativ kompaktweich).** *Gegeben eine les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist eine Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  genau dann  $f$ -kompaktweich, wenn für alle  $U \Subset X$  die Garbe  $\mathcal{F}_{U \subset X}$  eine  $f_{(!)}$ -rechtsazyklische Garbe ist. Insbesondere ist mit  $\mathcal{F}$  auch  $\mathcal{F}_{U \subset X}$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe.*

*Beweis.* Bezeichnet  $i := i_y : \{y\} \hookrightarrow Y$  die Einbettung des Punktes  $y \in Y$ , so ist  $\mathcal{G} \in \text{Ab}/X$  genau dann eine  $f_{(!)}$ -rechtsazyklische Garbe, wenn für alle  $y \in Y$  aus  $\mathcal{H}^\nu i^* f_! \mathcal{G} \neq 0$  bereits folgt  $\nu = 0$ . Mit mehrfachem derivierten Basiswechsel, also Basiswechsel 4.5.14 in der verflochtenen Winkelfaserung 5.4.18 der derivierten abelschen Garben, über dem doppelt kartesischen Diagramm der Basis

$$\begin{array}{ccc} U \cap f^{-1}(y) & \xrightarrow{l} & U \\ u \downarrow & & \downarrow j \\ f^{-1}(y) & \xrightarrow{k} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \{y\} & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

für alle  $y \in Y$  erkennen wir, daß die  $f_{(!)}$ -Rechtsazyklizität von  $\mathcal{F}_{U \subset X}$  gleichbedeutend ist dazu, daß für

$$i^* f_! \mathcal{F}_{U \subset X} \cong g_! k^* \mathcal{F}_{U \subset X} = g_! k^* j_! j^* \mathcal{F} \cong g_! u_! l^* j^* \mathcal{F} \cong g_! u_! u^* k^* \mathcal{F}$$

und alle  $y \in Y$  wieder  $\mathcal{H}^\nu$  für  $\nu \neq 0$  verschwindet, daß also für alle  $y \in Y$  mit der Notation  $Z := f^{-1}(y)$  für die Faser die Garbe  $(k^* \mathcal{F})_{(U \cap Z) \subset Z}$  eine  $\Gamma_!$ -rechtsazyklische Garbe ist. Damit ziehen wir uns auf den Fall eines einpunktigen Raumes zurück, den wir im anschließenden Lemma 5.7.14 behandeln.  $\square$

**Lemma 5.7.14 (Kompaktweichheitskriterium).** *Eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $Z$  ist kompaktweich genau dann, wenn für alle  $W \Subset Z$  die Garbe  $\mathcal{F}_{W \subset Z}$  eine  $\Gamma_!$ -rechtsazyklische Garbe ist.*

*Beweis.* Bezeichne  $j : W \hookrightarrow Z$  die Einbettung. Ist  $\mathcal{F}$  kompaktweich, so ist auch  $j^*\mathcal{F}$  kompaktweich nach [TG] 4.8.11 und für die konstante Abbildung  $c : Z \rightarrow \text{pt}$  hat folglich

$$(c \circ j)_! j^* \mathcal{F} \cong c_! j_! j^* \mathcal{F} \cong c_! \mathcal{F}_{W \subset Z}$$

die Eigenschaft  $\mathcal{H}^\nu = 0$  für  $\nu \neq 0$ , als da heißt,  $\mathcal{F}_{W \subset Z}$  ist  $\Gamma_1$ -rechtsazyklisch. Sei umgekehrt  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $Z$  derart, daß  $\mathcal{F}_{W \subset Z}$  für alle  $W \Subset Z$  eine  $\Gamma_1$ -rechtsazyklische Garbe ist. Gegeben ein Kompaktum  $K \subset Z$  betrachten wir dann sein Komplement  $W \Subset Z$  und folgern aus [TG] 4.8.14 sogar die Surjektivität der Restriktion  $\Gamma_1(Z; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(K; \mathcal{F})$ .  $\square$

**Lemma 5.7.15.** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine les-Abbildung derart, daß der Schreivorschub  $f_{(1)} : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$  homologische Dimension  $r < \infty$  hat. Gibt es in  $\text{Ab}_{/X}$  eine exakte Sequenz  $\mathcal{I}^{-r} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{I}^{-1} \rightarrow \mathcal{I}^0 \rightarrow \mathcal{K}$  mit  $f$ -kompaktweichen  $\mathcal{I}^\nu$ , so ist auch  $\mathcal{K}$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe.*

*Beweis.* Nach dem Kriterium 5.7.13 reicht es zu zeigen, daß für alle  $U \Subset X$  die Garbe  $\mathcal{K}_{U \subset X}$  eine  $f_{(1)}$ -rechtsazyklische Garbe ist. Sicher paßt diese Garbe in eine exakte Sequenz

$$\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{I}_{U \subset X}^{-r} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{I}_{U \subset X}^{-1} \rightarrow \mathcal{I}_{U \subset X}^0 \rightarrow \mathcal{K}_{U \subset X}$$

Mit  $\mathcal{I}^\nu$  ist auch  $\mathcal{I}_{U \subset X}^\nu$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe nach 5.7.13. Spalten wir unsere exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen auf, so liefern die zugehörigen langen exakten Sequenzen der  $R^q f_{(1)}$  für  $q \geq 1$  Isomorphismen

$$R^q f_{(1)} \mathcal{K}_{U \subset X} \xrightarrow{\sim} R^{q+r} f_{(1)} \mathcal{G}$$

Die rechte Seite aber verschwindet nach Annahme.  $\square$

**Lemma 5.7.16.** *1. Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  eine les-Abbildung vertauscht der derivierte Schreivorschub  $f_! : \text{Der}^+(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Der}^+(\text{Ab}_{/Y})$  mit filtrierenden Kolimites;*

*2. Gegeben eine lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  vertauscht sogar der unbeschränkt derivierte Schreivorschub  $f_! : \text{Der}(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  mit filtrierenden Kolimites.*

*Beweis.* Gegeben eine les-Abbildung ist nach 4.3.8 jeder filtrierende Kolimes von faserweise kompaktweichen Garben wieder faserweise kompaktweich. Das Lemma ergibt sich, da wir die entsprechenden derivierten Funktoren durch faserweise kompaktweiche Auflösungen berechnen können.  $\square$

**Lemma 5.7.17.** *Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine lesb-Abbildung und  $\mathcal{K}, \mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  abelsche Garben. Ist  $\mathcal{K}$  zusätzlich  $f$ -kompaktweich und  $\mathcal{F}$  flach, so ist auch  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe.*

5.7.18. Das gilt ebenso, wenn wir statt der Flachheit von  $\mathcal{F}$  die Flachheit von  $\mathcal{K}$  annehmen. Für diese Variante habe ich jedoch im folgenden keine Verwendung.

*Beweis.* Jede Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  besitzt eine Auflösung  $\dots \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \rightarrow \mathcal{F}^0 \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $\mathcal{F}^\nu$  jeweils einer direkten Summe von Kopien von Garben der Gestalt  $\mathbb{Z}_{U \subset X}$  für  $U \Subset X$ . Diese liefert eine exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$$

Nach 5.7.15 reicht es zu zeigen, daß  $\mathcal{F}^\nu \otimes \mathcal{K}$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe ist für alle  $\nu$ . Aber  $\mathcal{F}^\nu \otimes \mathcal{K}$  ist eine direkte Summe von Garben der Gestalt  $\mathbb{Z}_{U \subset X} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}_{U \subset X}$  und ist  $f$ -kompaktweich, da nach 4.3.8 filtrierende Kolimites  $f$ -kompaktweicher Garben  $f$ -kompaktweich sind und da nach 5.7.13 mit  $\mathcal{K}$  auch  $\mathcal{K}_{U \subset X}$  faserweise kompaktweich ist für  $U \Subset X$ .  $\square$

**Lemma 5.7.19.** *Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  eine lesb-Abbildung und  $\mathcal{K} \in \text{Ab}_{/X}$  eine  $f$ -kompaktweiche abelsche Garbe auf  $X$  besitzt der durch die Vorschrift*

$$f_{(1)}^{\mathcal{K}} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}^0 f_1(\mathcal{F} \otimes^{\text{L}} \mathcal{K})$$

*gegebene Funktor  $f_{(1)}^{\mathcal{K}} : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$  einen Rechtsadjungierten  $f_{\mathcal{K}}^{(1)}$ .*

*Beweis.* Nach 5.7.10 reicht es zu zeigen, daß  $f_{(1)}^{\mathcal{K}}$  mit beliebigen Kolimites vertauscht. Dazu reicht es zu zeigen, daß unser Funktor rechtsexakt ist und mit filtrierenden Kolimites, ja mit beliebigen Koprodukten vertauscht. Wir können nun aber  $\otimes^{\text{L}}$  mit einer Linksauflösung von  $\mathcal{F}$  durch flache Garben berechnen. Aus Lemma 5.7.17 folgt dann, daß  $\mathcal{F} \otimes^{\text{L}} \mathcal{K}$  durch einen Komplex  $f$ -kompaktweicher Garben in nichtpositiven Graden dargestellt werden kann und mit [TD] 3.6.4 folgt  $\mathcal{H}^1 f_1(\mathcal{F} \otimes^{\text{L}} \mathcal{K}) = 0$  und damit ist unser Funktor schon mal rechtsexakt. Unser Funktor vertauscht aber auch mit beliebigen Koprodukten. Genauer wissen wir das für  $\otimes^{\text{L}} \mathcal{K}$ , weil er ein Linksadjungierter ist, für  $f_1$  nach 5.7.16 und für  $\mathcal{H}^0$  folgt es aus der Beschreibung [TD] 3.9.2 von Koprodukten in derivierten Kategorien unter der Annahme der Existenz von Quisrechtsentfaltungen, die es ja nach 2.3.2 im Fall abelscher Garben gibt, zusammen mit der Exaktheit von Koprodukten in der Kategorie der abelschen Garben.  $\square$

5.7.20. Geht man die Konstruktion des Rechtsadjungierten in 5.7.19 durch, so erhält man für die Schnitte von  $f_{\mathcal{K}}^{(1)} \mathcal{G}$  die Beschreibung

$$(f_{\mathcal{K}}^{(1)} \mathcal{G})(U) = \text{Ab}_{/Y}(f_{(1)} \mathcal{K}_{U \subset X}, \mathcal{G})$$

Der Isomorphismus  $\text{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_{U \subset X}, f_{\mathcal{K}}^{(1)} \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/Y}(f_{(1)}^{\mathcal{K}}(\mathbb{Z}_{U \subset X}), \mathcal{G})$ , der davon induziert wird, ist dann die Adjunktion für das Paar  $(\mathbb{Z}_{U \subset X}, \mathcal{G})$ .

**5.7.21 (Existenz des Schreirückzugs für abelsche Garben).** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine lesb-Abbildung. Gegeben ein Komplex  $\mathcal{K}\mathcal{K}$  alias  $\dots \rightarrow \mathcal{K}^q \rightarrow \mathcal{K}^{q+1} \rightarrow \dots$  von faserweise kompaktweichen Garben auf  $X$  erklären wir den Funktor

$$f_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} : \text{Hot}(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{/Y})$$

dadurch, daß er jedem Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  das Summentotal des Doppelkomplexes der  $f_{(1)}^{\mathcal{K}^q} \mathcal{F}^p$  zuordnet. Man prüft leicht, daß er einen Rechtsadjungierten

$$f_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(1)} : \text{Hot}(\text{Ab}_{/Y}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$$

besitzt, der jedem Komplex  $\mathcal{G} \in \text{Hot}(\text{Ab}_{/Y})$  das Produkttotal des Doppelkomplexes der  $f_{\mathcal{K}^{-q}}^{(1)} \mathcal{G}^p$  zuordnet. Um die  $q$ -Differentialle zu erklären beachten wir, daß jede Transformation von Funktoren eine Transformation in die Gegenrichtung auf den Adjungierten induziert. Jeder Morphismus  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  von  $f$ -kompaktweichen Garben liefert mithin eine Transformation  $f_{\mathcal{M}}^{(1)} \Rightarrow f_{\mathcal{L}}^{(1)}$ . Wir zeigen nun, daß alle Komplexe aus flachen abelschen Garben quislinksentfaltet sind für  $Qf_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$ . Ist genauer  $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  ein Quasiisomorphismus von Komplexen aus flachen abelschen Garben, so liefert das Darantensorieren von  $\mathcal{K}$  einen Quasiisomorphismus  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$  und nach 5.7.23 bestehen beide Komplexe aus  $f$ -kompaktweichen Garben. Nach [TD] 3.6.4 erhalten wir also weiter einen Quasiisomorphismus  $f_{(1)}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} f_{(1)}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K})$ , da wir auch  $f$  lesb angenommen hatten. Schließlich erinnern wir noch aus 2.5.20, daß es zu jedem Komplex von abelschen Garben einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Garben gibt, und daraus folgt dann mit [TD] 3.2.32, daß alle Komplexe aus flachen abelschen Garben quislinksentfaltet sind für  $Qf_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$ . Folglich existiert der Linksfaktorierte von  $Qf_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$  auf allen Objekten und mit Lemma 5.7.17 erhalten wir für

$$\text{LQ}f_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} : \text{Der}(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$$

sogar eine ausgezeichnete Isotransformation  $\text{LQ}f_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} \xrightarrow{\sim} f_! \circ (\otimes^{\text{L}} \mathcal{K}\mathcal{K})$ . Da andererseits in  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/Y})$  nach 2.3.2 jeder Komplex eine Quisrechtsentfaltung besitzt, existiert auch der Rechtsfaktorierte  $\text{RQ}f_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(1)}$  von  $Qf_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(1)}$  auf allen Objekten und [TD] 3.2.28 liefert für diese faktorierten Funktoren eine Adjunktion

$$(\text{LQ}f_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}, \text{RQ}f_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(1)})$$

Für jede  $f$ -kompaktweiche Auflösung  $\mathcal{K}\mathcal{K}$  der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$  ist also der Rechtsfaktorierte  $\text{RQ}f_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(1)}$  ein Rechtsadjungierter  $f^!$  von  $f_!$ .

**5.7.22 (Berechnung des Verdierdualen).** Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine lesb-Abbildung und  $\mathcal{K}$  ein Komplex von  $f$ -kompaktweichen abelschen Garben auf  $X$ . Die

Isotransformation  $Lf_{(1)}^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\cong} f_! \circ (\otimes \mathcal{K})$  von Funktoren  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  aus 5.7.21 liefert eine ausgezeichnete Isotransformation

$$Rf_{\mathcal{K}}^{(1)} \xrightarrow{\cong} (\mathcal{K} \rightrightarrows ) \circ f^!$$

zwischen den adjungierten Funktoren. Ist insbesondere  $f = \text{fin}$  die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum, so erhalten wir für jeden Komplex  $\mathcal{K}$  von kompaktweichen Garben auf einem lokal kompakten homologisch kompaktendlichen Hausdorffraum  $X$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\text{fin}_{\mathcal{K}}^{(1)} (\mathbb{Q}_{\text{top}}[0] \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{top}}) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{K} \rightrightarrows \text{fin}^! \mathbb{Z}_{\text{top}})$$

und so mit 5.7.20 einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen dem Verdierdualen  $\mathbb{D}_X \mathcal{K}$  von  $\mathcal{K}$  und dem Garbenkomplex mit  $\mathbb{D}_{\text{Ket}} \Gamma_!(U; \mathcal{K})$  als Komplex der Schnitte auf einer offenen Teilmenge  $U \Subset X$ .

**Lemma 5.7.23.** *Seien  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  ein lesb-Morphismus von gekringten Räumen und  $\mathcal{K}, \mathcal{F} \in \text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}$  Modulgarben. Ist  $\mathcal{K}$  faserweise kompaktweich und  $\mathcal{F}$  flach, so ist auch  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$  eine faserweise kompaktweiche Garbe.*

5.7.24. Das gilt ebenso, wenn wir statt der Flachheit von  $\mathcal{F}$  die Flachheit von  $\mathcal{K}$  annehmen. Für diese Variante habe ich jedoch im folgenden keine Verwendung. Die Kringgarbe  $\mathcal{B}$  spielt im folgenden keine Rolle.

*Beweis.* Jede Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}$  besitzt eine Auflösung  $\dots \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \rightarrow \mathcal{F}^0 \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $\mathcal{F}^{\nu}$  jeweils einer direkten Summe von Kopien von Garben der Gestalt  $\mathcal{A}_{U \subset X}$  für  $U \Subset X$ . Diese liefert eine exakte Sequenz von Modulgarben

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F}^0 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$$

Nach dem Kriterium 5.7.15 reicht es zu zeigen, daß  $\mathcal{F}^{\nu} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$  faserweise kompaktweich ist für alle  $\nu$ . Nun ist aber  $\mathcal{F}^{\nu} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$  ist eine direkte Summe von Garben der Gestalt  $\mathcal{A}_{U \subset X} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}_{U \subset X}$  und die Summanden sind faserweise kompaktweich nach 5.7.13. Also ist auch  $\mathcal{F}^{\nu} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$  faserweise kompaktweich nach 4.3.8 als filtrierender Kolimes faserweise kompaktweicher abelscher Garben.  $\square$

**Lemma 5.7.25.** *Gegeben  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  ein lesb-Morphismus gekringter Räume und  $\mathcal{K} \in \text{Ab}_{/X}$  eine faserweise kompaktweiche Modulgarbe auf  $X$  besitzt der durch die Vorschrift*

$$f_{(1)}^{\mathcal{K}} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}^0 f_!(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}^{\text{L}} \mathcal{K})$$

*gegebene Funktor  $f_{(1)}^{\mathcal{K}} : \text{Ab}_{(X, \mathcal{A})} \rightarrow \text{Ab}_{/(Y, \mathcal{B})}$  einen Rechtsadjungierten  $f_{\mathcal{K}}^{(1)}$ .*

*Beweis.* Nach 5.7.10 reicht es zu zeigen, daß  $f_{(!)}^{\mathcal{K}}$  mit Kolimites vertauscht. Dazu reicht es zu zeigen, daß unser Funktor rechtsexakt ist und mit filtrierenden Kolimites, ja mit Koprodukten vertauscht. Wir können  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{K}$  mit einer Linksauffösung von  $\mathcal{F}$  durch flache Modulgarben berechnen, wie wir sie etwa beim Beweis von 5.7.23 beschrieben haben. So folgt aus 5.7.23, daß  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{K}$  durch einen Komplex aus faserweise kompaktweichen Garben in nichtpositiven Graden beschrieben werden kann, und mit [TD] 3.6.4 folgt  $\mathcal{H}^1 f_!(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{K}) = 0$ . Damit ist unser Funktor schon mal rechtsexakt. Unser Funktor vertauscht aber auch mit beliebigen Koprodukten. Genauer wissen wir das für  $\otimes_{\mathcal{A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{K}$ , weil er ein Linksadjungierter ist, für  $f_!$  nach 5.7.16 und für  $\mathcal{H}^0$  folgt es aus der Beschreibung [TD] 3.9.2 von Koprodukten in derivierten Kategorien unter der Annahme der Existenz von Quisrechtsentfaltungen, die es nach 2.3.6 auch im Fall von Modulgarben gibt, zusammen mit der Exaktheit von Koprodukten in der Kategorie der Modulgarben.  $\square$

**5.7.26 (Existenz des Schreirückzugs).** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein lesb-Morphismus von gekringten Räumen. Gegeben ein Komplex  $\mathcal{K}\mathcal{K}$  alias  $\dots \rightarrow \mathcal{K}^q \rightarrow \mathcal{K}^{q+1} \rightarrow \dots$  von faserweise kompaktweichen Modulgarben auf  $X$  erklären wir den Funktor

$$f_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} : \text{Hot}(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{/Y})$$

dadurch, daß er jedem Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  das Summentotal des Doppelkomplexes der  $f_{(!)}^{\mathcal{K}^q} \mathcal{F}^p$  zuordnet. Man prüft leicht, daß  $f_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$  einen Rechtsadjungierten

$$f_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(!)} : \text{Hot}(\text{Ab}_{/Y}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$$

besitzt, der jedem Komplex  $\mathcal{G} \in \text{Hot}(\text{Ab}_{/Y})$  das Produkttotal des Doppelkomplexes der  $f_{\mathcal{K}^{-q}}^{(!)} \mathcal{G}^p$  nach 5.7.25 zuordnet. Um die  $q$ -Differentialle zu erklären beachten wir, daß jede Transformation von Funktoren eine Transformation in die Gegenrichtung auf den Adjungierten induziert. Jeder Morphismus  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  von faserweise kompaktweichen Modulgarben liefert mithin eine Transformation  $f_{\mathcal{M}}^{(!)} \Rightarrow f_{\mathcal{L}}^{(!)}$ . Wir zeigen nun, daß alle quisflachen Komplexe aus flachen Modulgarben quislinksentfaltet sind für  $Qf_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$ . Ist nämlich  $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  ein Quasiisomorphismus quisflacher Komplexe aus flachen Modulgarben, so liefert das Darantensorieren von  $\mathcal{K}\mathcal{K}$  einen Quasiisomorphismus  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}\mathcal{K}$ , da wir  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  quisflach angenommen hatten. Nach 5.7.23 bestehen weiter beide Komplexe aus faserweise kompaktweichen Garben, da wir auch angenommen hatten, daß  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  aus flachen Modulgarben bestehen. Nach [TD] 3.6.4 und da wir  $f$  lesb angenommen hatten, macht  $f_{(!)}$  daraus einen Quasiisomorphismus  $f_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} f_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} \mathcal{F}$ . Schließlich erinnern wir noch aus 2.5.20, daß es zu jedem Komplex von Modulgarben einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex flacher Modulgarben gibt, und daraus folgt dann mit [TD] 3.2.32, daß in der Tat alle quisflachen Komplexe aus flachen Modulgarben quislinksentfaltet sind für  $Qf_{(!)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$ .



Folglich existiert der Linksfaktorierte von  $Qf_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$  auf allen Objekten und mit Lemma 5.7.23 erhalten wir für

$$LQf_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} : \text{Der}(\text{Ab}/_X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/_Y)$$

sogar eine ausgezeichnete Isotransformation  $LQf_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}} \xrightarrow{\cong} f_! \circ (\otimes^L \mathcal{K}\mathcal{K})$ . Da andererseits in  $\text{Hot}(\text{Ab}/_Y)$  nach 2.3.2 jeder Komplex eine Quisrechtsentfaltung besitzt, existiert auch der Rechtsfaktorierte  $RQf_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(1)}$  von  $Qf_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(1)}$  auf allen Objekten und [TD] 3.2.28 liefert für diese faktorierten Funktoren eine Adjunktion

$$(LQf_{(1)}^{\mathcal{K}\mathcal{K}}, RQf_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(1)})$$

Für jede faserweise kompaktweiche Auflösung  $\mathcal{K}\mathcal{K}$  der Strukturgarbe  $\mathcal{A}$  ist also der Rechtsfaktorierte  $RQf_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(1)}$  ein Rechtsadjungierter  $f^!$  von  $f_! \cong f_! \circ (\otimes^L \mathcal{K}\mathcal{K})$ .

## Übungen

*Übung 5.7.27.* Man zeige, daß gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von lesb-Räumen und ein Komplex  $\mathcal{K}$  von kompaktweichen abelschen Garben auf  $X$  der natürliche Isomorphismus  $\mathbb{D}_Y f_! \mathcal{K} \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} f_* \mathbb{D}_X \mathcal{K}$  aus 4.7.8 unter der in 5.7.22 gegebenen Beschreibung des Verdierdualen und dem natürlichen Morphismus  $f_{(*)} \Rightarrow f_*$  von dem Isomorphismus von Komplexen von abelschen Garben herkommt, der auf den Schnitten über  $V \Subset Y$  gegeben wird durch die offensichtlichen Isomorphismen

$$\mathbb{D}_{\text{Ket}} \Gamma_!(V; f_{(1)} \mathcal{K}) \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} \mathbb{D}_{\text{Ket}} \Gamma_!(f^{-1}(V); \mathcal{K})$$

Hinweis: Ich habe diese Übung noch nicht gemacht und stelle mir vor, daß das einmal ein Student zusammen mit dem Umfeld ausarbeiten könnte.

*Übung 5.7.28.* Ist ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  die disjunkte Vereinigung offener Teilmengen  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ , so liefern für  $\mathcal{F} \in \text{Der}^+(\text{Ab}/_X)$  die Ausdehnungen durch Null Isomorphismen

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{H}_!^q(X_i; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_!^q(X; \mathcal{F})$$

Ist  $X$  sogar lesb, so gilt dasselbe sogar für jedes Objekt  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/_X)$  der derivierten Kategorie. Hinweis: Man gehe von der Zerlegung 2.3.16 von  $\mathcal{F}$  als Summe der Restriktionen auf die Komponenten aus und verwende die Verträglichkeit von  $\text{fin}_!$  mit direkten Summen aus 5.7.16.

*Ergänzende Übung 5.7.29 (Lokalität der Eigenschaft kompaktweich).* Eine abelsche Garbe auf einem lokal kompakten Hausdorffraum ist kompaktweich genau dann, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Garbe darauf kompaktweich ist. Hinweis: Man zeige mit 5.7.14, daß das System der offenen Teilmengen, auf denen eine abelsche Garbe kompaktweich ist, stabil ist unter endlichen Vereinigungen. Dann zeige man mit 4.2.6, daß es auch stabil ist unter beliebigen Vereinigungen.

## 6 Anwendungen und Vergleichssätze

### 6.1 Anwendung auf Mannigfaltigkeiten

6.1.1. Ich erinnere daran, daß wir eine  $n$ -Mannigfaltigkeit erklärt hatten als einen Hausdorffraum, der lokal homöomorph ist zu  $\mathbb{R}^n$ . Zusätzliche Voraussetzungen wie abzählbar basiert oder parakompakt fordern wir explizit, wenn sie gebraucht werden.

**Lemma 6.1.2 (Mannigfaltigkeiten sind lesb).** *Gegeben eine  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt jede abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $M$  eine Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{G}_{n-1} \rightarrow \mathcal{K}_n$  der Länge  $n$  durch kompaktweiche Garben  $\mathcal{G}_0, \dots, \mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{K}_n$ . Insbesondere ist jede Mannigfaltigkeit lesb.*

*Beweis.* Bezeichne  $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{G}_i$  die Kerne in einer beliebigen Auflösung durch kompaktweiche Garben und insbesondere  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{F}$ . Die Randoperatoren der entsprechenden langen exakten Sequenzen liefern für alle  $U \Subset M$  Isomorphismen

$$H_1^1(U; \mathcal{K}_n) \xrightarrow{\sim} H_1^2(U; \mathcal{K}_{n-1}) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} H_1^{n+1}(U; \mathcal{F})$$

Nach [TG] 4.10.2 ist die Gruppe ganz rechts Null. Wir folgern  $H_1^1(U; \mathcal{K}_n) = 0$  für alle  $U \Subset M$  und nach Übung [TG] 4.9.23 ist damit  $\mathcal{K}_n$  kompaktweich.  $\square$

**Lemma 6.1.3.** *Auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum sind alle kompaktweichen abelschen Garben weich.*

*Beweis.* Sei  $X$  unser Raum. Wir finden eine Überdeckung von  $X$  durch eine aufsteigende Folge  $K_0 \subset K_1 \subset \dots$  von Kompakta derart, daß sogar gilt  $K_i \subset K_{i+1}^\circ$  für alle  $i$ . Seien nun  $\mathcal{F}$  unsere kompaktweiche Garbe und  $Z \Subset X$  abgeschlossen und  $s \in \Gamma(Z; \mathcal{F})$  ein Schnitt über  $Z$ . Sicher können wir  $s|_{(K_0 \cap Z)}$  zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger  $g_0 \in \Gamma_1(X; \mathcal{F})$  ausdehnen. Dann können wir den Nullschnitt auf  $K_0$  mit dem Schnitt  $(s - g_0)$  auf  $K_1 \cap Z$  verkleben zu einem Schnitt  $s_1$  auf  $K_0 \cup (K_1 \cap Z)$  und können diesen ausdehnen zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger  $g_1 \in \Gamma_1(X; \mathcal{F})$ . Dann gilt  $s = g_0 + g_1$  auf  $K_1 \cap Z$  und  $g_1 = 0$  auf  $K_0$ . Dann können wir den Nullschnitt auf  $K_1$  mit dem Schnitt  $s - g_0 - g_1$  auf  $K_2 \cap Z$  verkleben zu einem Schnitt  $s_2$  auf  $K_1 \cup (K_2 \cap Z)$  und können diesen ausdehnen zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger  $g_2 \in \Gamma_1(X; \mathcal{F})$ . Dann gilt  $s = g_0 + g_1 + g_2$  auf  $K_2 \cap Z$  und  $g_2 = 0$  auf  $K_1$ . So machen wir immer weiter. Da alle  $g_{i+1}$  jeweils auf  $K_i$  verschwinden und kompakten Träger haben, ist die Summe  $\tilde{s} := \sum_{i=0}^{\infty} g_i$  ein sinnvoll definierter globaler Schnitt  $\tilde{s} \in \Gamma(X; \mathcal{F})$ . Nach Konstruktion setzt er unseren Schnitt  $s$  fort.  $\square$

**Proposition 6.1.4 (Kohomologie oberhalb der Dimension).** *Gegeben eine abzählbar basierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $M$  gilt*

$$q > n \Rightarrow H^q(M; \mathcal{F}) = 0$$

*Beweis.* Nach 6.1.2 besitzt  $\mathcal{F}$  eine kompaktweiche Auflösung der Länge  $n$ . Nach 6.1.3 besteht sie aus weichen Garben. Nach [TG] 5.4.5 sind weiche Garben  $\Gamma$ -azyklisch auf parakompakten Räumen. Nach [TG] 5.3.3 schließlich ist  $M$  parakompakt.  $\square$

**6.1.5 (Lokale Kohomologie oberhalb der Dimension plus Eins).** Gegeben eine abzählbar basierte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $C \not\subseteq M$  folgt aus dem Verschwinden der Kohomologie oberhalb der Dimension 6.1.4 mit der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie [TG] 4.4.9 sofort  $q > n + 1 \Rightarrow H_C^q(M; \mathcal{F}) = 0$ .

**Lemma 6.1.6.** Gegeben eine abzählbar basierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt jede abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $M$  eine Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{G}_n \twoheadrightarrow \mathcal{K}_{n+1}$  der Länge  $n + 1$  durch welche Garben  $\mathcal{G}_0, \dots, \mathcal{G}_n, \mathcal{K}_{n+1}$ .

*Beweis.* Bezeichne  $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{G}_i$  die Kerne in einer beliebigen Auflösung durch welche Garben. Die Randoperatoren der entsprechenden langen exakten Sequenzen liefern für alle  $C \not\subseteq M$  Isomorphismen

$$H_C^1(M; \mathcal{K}_{n+1}) \xrightarrow{\sim} H_C^2(M; \mathcal{K}_n) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} H_C^{n+2}(M; \mathcal{F})$$

Nach 6.1.5 ist die Gruppe ganz rechts Null. Wir folgern  $H_C^1(M; \mathcal{K}_{n+1}) = 0$  für alle  $C \not\subseteq M$  und nach der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie [TG] 4.4.9 ist damit  $\mathcal{K}_{n+1}$  welk.  $\square$

**Proposition 6.1.7.** Gegeben eine  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  und  $i : C \hookrightarrow M$  die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge hat  $i^{(1)}$  endliche homologische Rechtsdimension  $\leq n + 1$ .

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß für jede abzählbar basierte offene Teilmenge  $U \subseteq M$  mit  $C \cap U \not\subseteq U$  der Funktor  $i^{(1)}$  für  $i : (C \cap U) \hookrightarrow U$  endliche homologische Rechtsdimension  $\leq n + 1$  hat. Nach [TG] 6.4.26 können seine Rechtsderivierten jedoch mit welchen Auflösungen berechnet werden. So folgt die Proposition aus Lemma 6.1.6.  $\square$

**Lemma 6.1.8.** Für die konstante Abbildung  $c : E \rightarrow \text{top}$  eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums auf einen Punkt und alle  $G \in \text{Der}(\text{Ab})$  induziert die Einheit der Adjunktion  $(c_!, c^!)$  einen Isomorphismus

$$c_* c^* G \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_! c^* G$$

*Vorschau 6.1.9.* In 6.1.12 zeigen wir stärker, daß die Einheit der Adjunktion  $(c_!, c^!)$  sogar einen Isomorphismus  $c^* G \xrightarrow{\sim} c^! c_! c^* G$  induziert.

*Beweis.* Wir wissen aus [TG] 4.8.17, daß  $c_1\mathbb{Z}_E$  in  $\text{Der}(\text{Ab})$  eine Einheit im Sinne von [TSK] 3.4.16 ist. Wir wissen aus 6.1.2, daß  $E$  lesb ist, so daß uns für  $c$  die Projektionsformel auf der vollen derivierten Kategorie zur Verfügung steht. Die Isomorphismen  $c_1c^*G \xrightarrow{\sim} c_1(\mathbb{Z}_E \otimes c^*G) \xrightarrow{\sim} (c_1\mathbb{Z}_E) \otimes G$  zum Tensorprodukt mit dem Einsobjekt gefolgt vom Isomorphismus der Projektionsformel 4.7.6 zeigen damit, daß  $c_1c^*$  eine Äquivalenz von Kategorien ist. Dasselbe gilt für den adjungierten Funktor  $c_*c^!$ . Also ist die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $G \xrightarrow{\sim} c_*c^!c_1c^*G$ . Dieser Isomorphismus faktorisiert als  $G \rightarrow c_*c^*G \rightarrow c_*c^!c_1c^*G$  mit den von den Einheiten der Adjunktionen  $(c^*, c_*)$  und  $(c_!, c^!)$  herrührenden Morphismen. Der erste dieser Morphismen ist ein Isomorphismus nach 3.1.4. Also ist auch der zweite dieser Morphismen ein Isomorphismus.  $\square$

**Lemma 6.1.10.** *Für  $i : \text{top} \hookrightarrow E$  die Einbettung eines beliebigen Punktes in einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum und  $c : E \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung und  $G \in \text{Der}(\text{Ab})$  beliebig induziert die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus*

$$c_1i_!i^!c^*G \xrightarrow{\sim} c_1c^*G$$

*Beweis.* Ist  $G$  ein in einem homologischen Grad konzentrierter Komplex, so hatten wir das bereits in 5.3.4 in anderen Notationen und unter der Annahme  $\dim E \geq 1$  bewiesen. Im Fall  $\dim E = 0$  ist die Behauptung eh trivial. Damit ist die Proposition bewiesen für den Fall, daß  $G$  in einem Grad konzentriert ist. Mit dévissage folgt sie sofort für  $G \in \text{Der}^b(\text{Ab})$ . Nun bilden beide Seiten  $\text{Der}^{\geq r}(\text{Ab})$  in sich selber ab und  $\text{Der}^{\leq r}(\text{Ab})$  in  $\text{Der}^{\leq r+n+1}(\text{Ab})$  beziehungsweise stärker  $\text{Der}^{\leq r+n}(\text{Ab})$  wegen 6.1.7 beziehungsweise [TG] 4.10.2 und unseren Erkenntnissen [TD] 3.6.4 zum Derivieren homologisch rechtsendlicher Funktoren. Die zu festem  $q$  von unserem Morphismus auf  $\mathcal{H}^q$  induzierte Abbildung ändert sich also nicht, wenn wir erst zu  $\tau^{\leq q}G$  und dann zu  $\tau^{\geq q-n-1}\tau^{\leq q}G$  übergehen. Mithin ist sie für alle  $q$  und alle  $G$  ein Isomorphismus.  $\square$

**Lemma 6.1.11.** *Gegeben  $j : D \hookrightarrow E$  die Einbettung einer offenen konvexen nichtleeren Teilmenge in einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum und  $c : E \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung und  $G \in \text{Der}(\text{Ab})$  induziert die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus*

$$c_1j_!j^!c^*G \xrightarrow{\sim} c_1c^*G$$

*Beweis.* Sei  $i : \text{top} \rightarrow D$  die Einbettung eines Punktes. Wir betrachten die Komposition  $c_1j_!i_!i^!j^!c^*G \rightarrow c_1j_!j^!c^*G \rightarrow c_1c^*G$ . Wegen  $j^! = j^*$  und 6.1.10 ist hier der erste Morphismus ein Isomorphismus. Mit einer zweiten Anwendung von 6.1.10 ist auch die Verknüpfung ein Isomorphismus. Das Lemma folgt.  $\square$

**Proposition 6.1.12.** Für die konstante Abbildung  $c : E \rightarrow \text{top}$  eines endlich-dimensionalen reellen affinen Raums auf einen Punkt und alle  $G \in \text{Der}(\text{Ab})$  induziert die Einheit der Adjunktion  $(c_!, c^!)$  einen Isomorphismus

$$c^*G \xrightarrow{\sim} c^!c_!c^*G$$

*Vorschau 6.1.13.* Eine relative Version dieser Aussage zeigen wir in 6.2.2.

6.1.14. Für  $G = \mathbb{Z}$  und  $\dim E = n$  liefert uns das insbesondere einen Isomorphismus  $\underline{E} \xrightarrow{\sim} c^!H_1^n(E)[-n]$  und damit  $\underline{E} \otimes H_1^n(E)^*[n] \xrightarrow{\sim} \omega_E$ .

*Beweis.* Nach dem Verschwindungskriterium 2.3.20 reicht es zu zeigen, daß für jede Einbettung  $j : D \hookrightarrow E$  einer nichtleeren konvexen offenen Teilmenge unser Morphismus einen Isomorphismus  $c_*j_*j^!c^*G \xrightarrow{\sim} c_*j_*j^!c^!c_!c^*G$  liefert. Nach [TG] 6.3.20 fällt nun aber der von der Einheit der Adjunktion induzierte Morphismus  $j^! \Rightarrow j^!c^!c_!$  zusammen mit der aus Einheiten und Koeinheiten von Adjunktionen gebildeten Komposition

$$j^! \Rightarrow (cj)^!(cj)_!j^! \xrightarrow{\sim} j^!c^!c_!j_!j^! \Rightarrow j^!c^!c_!$$

Wir wissen aus 6.1.11, daß hier die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus  $c_!j_!j^!c^*G \xrightarrow{\sim} c_!c^*G$  liefert. Das bedeutet, daß der dritte dieser Pfeile einen Isomorphismus liefert, wenn wir ihn auf  $c^*G$  anwenden. Die ganze Komposition liefert also einen Isomorphismus auf  $c^*G$  bei Nachschalten von  $c_*j_*$  genau dann, wenn ihr erster Pfeil das tut. Das aber ist gerade die Aussage von Lemma 6.1.8 angewandt auf  $cj$ .  $\square$

**Beispiel 6.1.15 (Dualisierende Garbe einer Mannigfaltigkeit).** Gegeben eine  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  konstruieren wir einen Isomorphismus, den **Dualisierungs-isomorphismus**

$$p_M : \omega_M \xrightarrow{\sim} \text{or}_M[n]$$

ihrer dualisierenden Garbe mit der Orientierungsgarbe aus [TG] 4.10.8, verschoben in das Negative der Dimension. Dazu gehen wir von der Erkenntnis aus, daß  $\omega_M[-n]$  nach 6.1.14 eine gewöhnliche Garbe ist, und betrachten weiter für  $U \subseteq M$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  den Isomorphismus  $(\omega_M[-n])(U) \xrightarrow{\sim} H_1^n(U; \mathbb{Z})^*$  aus 6.1.14. So erhalten wir einen Isomorphismus der Restriktionen beider Garben auf die durch die fraglichen Mengen  $U$  gegebene Basis der Topologie. Unsere verallgemeinerte Garbifizierung aus [TG] 2.2.42 zeigt dann, daß er von genau einem Isomorphismus der ursprünglichen Garben herkommen muß.

**Beispiel 6.1.16 (Dualisierende Garbe einer Randfaltung).** Gegeben eine  $n$ -Randfaltung  $M$  und  $i : \partial M \hookrightarrow M$  die abgeschlossene Einbettung ihres Randes und  $j : M^\circ \hookrightarrow M$  die offene Einbettung seines Komplements betrachten wir das

ausgezeichnete Dreieck  $i_!i^!\omega_M \rightarrow \omega_M \rightarrow j_*j^*\omega_M \rightarrow [1]$ . Wir können es umschreiben zu einem ausgezeichneten Dreieck  $i_*\omega_{\partial M} \rightarrow \omega_M \rightarrow j_*\omega_{M^\circ} \rightarrow [1]$  und folgern die Beschreibung  $\omega_M = \text{Keg}(j_*\text{or}_{M^\circ} \rightarrow i_*\mathbb{Z}_{\partial M})[n-1]$  der dualisierenden Garbe unserer Randfaltung  $M$  als verschobener Kegel eines Morphismus von Garben  $j_*\text{or}_{M^\circ} \rightarrow i_*\mathbb{Z}_{\partial M}$ . Nun wird der Leser etwa durch Einschränkung auf den Fall eines Halbraums unschwer zeigen können, daß der fragliche Morphismus unter  $i^*$  ein Isomorphismus wird. So folgt  $i^*\omega_M = 0$  und das ausgezeichnete Dreieck  $j_!j^!\omega_M \rightarrow \omega_M \rightarrow i_*i^*\omega_M \rightarrow [1]$  liefert damit einen Isomorphismus

$$j_!\text{or}_{M^\circ}[n] \xrightarrow{\sim} \omega_M$$

Dasselbe gilt auch für Eckfaltigkeiten, die sich ja topologisch nicht von Randfaltigkeiten unterscheiden.

## Übungen

*Übung 6.1.17.* Gegeben eine lokal konstante abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  mit endlich erzeugten Halmen auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  ist der kanonische Morphismus ein Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_X \mathbb{D}_X \mathcal{F}$$

## 6.2 Mannigfaltiger Eigrückzug

6.2.1. Gegeben ein topologischer Raum  $Y$  und ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum  $E$  der Dimension  $d := \dim E$  und die Projektion  $c : E \times Y \rightarrow Y$  haben wir mit Basiswechsel und [TG] 4.8.17 Isomorphismen

$$c_!\mathbb{Z}_{E \times Y} \xrightarrow{\sim} c_!\text{pr}_E^*\mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \text{pr}_Y^*\text{fin}_!\mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \text{pr}_Y^*(H_!^d(E))[-d] \cong \mathbb{Z}_Y[-d]$$

Der letzte dieser Isomorphismen ist unkanonisch. Es geht im weiteren aber nur darum, daß alle unsere Objekte Einheiten von  $\text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  sind.

**Lemma 6.2.2.** *Gegeben ein topologischer Raum  $Y$  und ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum  $E$  ist für die Projektion  $c : E \times Y \rightarrow Y$  und beliebiges  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  die Einheit der Adjunktion stets ein Isomorphismus*

$$c^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c^!c^*\mathcal{G}$$

6.2.3. Wir wissen aus der Projektionsformel, daß  $c_!c^*$  isomorph ist zum Funktor  $(c_!\mathbb{Z}_{E \times Y}) \otimes$  und mit 6.2.1 weiter zum Funktor  $\mathbb{Z}_Y[-d] \otimes$ . Das Lemma liefert uns damit die Existenz eines Isomorphismus  $c^!\mathbb{Z}_Y \cong \mathbb{Z}_{E \times Y}[d]$  für  $d = \dim E$  und sogar einen ausgezeichneten Isomorphismus  $c^!\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{E \times Y}[d] \otimes H_!^d(E)^*$ .

*Beweis.* Nach dem Verschwindungskriterium 2.3.20 reicht es zu zeigen, daß unsere Einheit der Adjunktion für jede nichtleere konvexe offene Teilmenge  $D \subseteq E$  und die zugehörige Einbettung  $j : D \times Y \hookrightarrow E \times Y$  Isomorphismen  $c_* j_* j^* c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* j_* j^* c^! c_1 c^* \mathcal{G}$  liefert. Hierfür können wir die im Fall eines einpunktigen Raums  $Y$  in 6.1.12 gegebene Argumentation kopieren, sobald wir zeigen können, daß auch in dieser Situation die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$c_1 j_! j^! c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_1 c^* \mathcal{G}$$

liefert. Das aber dürfen wir halmweise an jedem Punkt  $y \in Y$  prüfen und mit Basiswechsel folgt es so aus der bereits beim Beweis von 6.1.12 gezeigten Aussage im Fall eines einpunktigen Raums  $Y$ . Jetzt kann die Argumentation wie in 6.1.12 weiterlaufen. Da  $D$  homöomorph ist zu  $E$ , reicht es zu zeigen, daß unsere Abbildung für alle  $Y$  einen Isomorphismus  $c_* c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_1 c^* \mathcal{G}$  induziert. Wir wissen aber aus der Projektionsformel, daß  $c_1 c^*$  isomorph ist zum Funktor  $(c_1 \mathbb{Z}_{E \times Y}) \otimes$  und damit nach 6.2.1 eine Äquivalenz von Kategorien. Also ist auch der adjungierte Funktor  $c_* c^!$  eine Äquivalenz von Kategorien und die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_1 c^* \mathcal{G}$ . Daß andererseits auch die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^* \mathcal{G}$  ist, wissen wir bereits aus 3.1.4. Das Lemma folgt.  $\square$

**Lemma 6.2.4.** *Gegeben ein topologischer Raum  $Y$  und ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum  $E$  ist für die Projektion  $c : E \times Y \rightarrow Y$  und beliebiges  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}_Y)$  die Koeinheit der Adjunktion stets ein Isomorphismus*

$$c_1 c^! \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$$

*Beweis.* Aus dem vorherigen Lemma wissen wir, daß die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus  $c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c^! c_1 c^* \mathcal{G}$  liefert. Aus der Dreiecksidentität wissen wir, daß die Komposition  $c_1 c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_1 c^! c_1 c^* \mathcal{G} \rightarrow c_1 c^* \mathcal{G}$  mit dem von der Koeinheit der Adjunktion induzierten zweiten Morphismus die Identität ist. Also induziert die Koeinheit der Adjunktion stets einen Isomorphismus  $c_1 c^! c_1 c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_1 c^* \mathcal{G}$ . Wie beim vorigen Beweis bemerkt wissen aber aus der Projektionsformel, daß  $c_1 c^*$  isomorph ist zum Funktor  $(c_1 \mathbb{Z}_{E \times Y}) \otimes$  und damit nach 6.2.1 eine Äquivalenz von Kategorien.  $\square$

**Definition 6.2.5.** Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **mannigfaltig von der relativen Dimension  $d$**  oder kurz  **$d$ -mannigfaltig**, wenn sie separiert ist und es für jeden Punkt  $x \in X$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{R}^d & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ V & \hookrightarrow & Y \end{array}$$



gibt mit offenen Einbettungen in den Horizontalen und  $x$  im Bild der oberen Horizontalen.

*Beispiel 6.2.6.* Eine 0-mannigfaltige Abbildung ist dasselbe wie eine separierte étale Abbildung.

6.2.7. Offensichtlich ist jede mannigfaltige Abbildung lokal eigentlich und für  $d$  die relative Dimension unserer Abbildung ist jede ihrer Fasern eine  $d$ -Mannigfaltigkeit. Nach dem Verschwinden hoher kompakter Kohomologie bei Mannigfaltigkeiten [TG] 4.10.2 und les-Basiswechsel ist also jede mannigfaltige Abbildung lesb. Nach 6.2.3 ist für  $f : X \rightarrow Y$  mannigfaltig von der relativen Dimension  $d$  der Komplex  $f^! \mathbb{Z}_Y[-d]$  eine abelsche Garbe auf  $X$ , die lokal frei ist vom Rang Eins. Wir nennen sie die **relative Orientierungsgarbe** und notieren sie

$$\text{or}_f = \text{or}_{X/Y} := f^! \mathbb{Z}_Y[-d]$$

Ist die relative Orientierungsgarbe isomorph zur konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$ , so nennen wir unsere mannigfaltige Abbildung **orientierbar** und die Wahl eines Isomorphismus  $\text{or}_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$  eine **Orientierung von  $f$** . Für jede 0-mannigfaltige alias separierte étale Abbildung haben wir in 5.7.4 bereits eine ausgezeichnete Orientierung konstruiert.

**Satz 6.2.8 (Eigrückzug unter mannigfaltigen Abbildungen).** *Im Fall einer mannigfaltigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  induziert unser natürlicher Morphismus 4.7.10 Isomorphismen*

$$f^! \mathbb{Z}_Y \otimes f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f^! \mathcal{G}$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß unsere mannigfaltige Abbildung  $f$  die Projektion  $c : E \times Y \rightarrow Y$  ist für einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum  $E$ . In diesem Fall ist schon mal die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $c_! c^! \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_Y$  nach 6.2.4. Wir können also von einem Isomorphismus

$$c_!(c^! \mathbb{Z}_Y \otimes c^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} c_! c^! \mathbb{Z}_Y \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_Y \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$$

ausgehen und müssen zeigen, daß er unter der Adjunktion einem Isomorphismus  $c^! \mathbb{Z}_Y \otimes c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c^! \mathcal{G}$  entspricht. Nach 6.2.3 ist  $c^! \mathbb{Z}_Y \cong \mathbb{Z}_{E \times y}[d]$  und nach 6.2.2 gibt es folglich  $\mathcal{E}$  mit  $c^! \mathcal{E} \cong (c^! \mathbb{Z}_Y \otimes c^* \mathcal{G})$ , denn die rechte Seite liegt damit im wesentlichen Bild von  $c^*$ . Jeder Isomorphismus  $c_!(c^! \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$  entspricht aber in der Tat unter der Adjunktion einem Isomorphismus  $c^! \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} c^! \mathcal{G}$ , denn wir können die von der Adjunktion induzierte Abbildung verstehen als die Komposition

$$(c^! \mathcal{E}) \rightarrow c^! c_!(c^! \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} c^! \mathcal{G}$$

mit dem von der Einheit der Adjunktion induzierten Morphismus links und dieser linke Morphismus ist ein Isomorphismus, da die Komposition  $c^! \mathcal{E} \rightarrow c^! c_! c^! \mathcal{E} \rightarrow c^! \mathcal{E}$  die Identität ist nach den Dreiecksidentitäten und die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $c_! c^! \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$  nach 6.2.4.  $\square$

## Übungen

*Übung 6.2.9.* Die Verknüpfung von zwei mannigfaltigen Abbildungen ist wieder eine mannigfaltige Abbildung. Orientierungen unserer beiden Abbildungen induzieren in natürlicher Weise eine Orientierung ihrer Verknüpfung. Wir nennen sie die **Verknüpfungsorientierung**.

*Übung 6.2.10.* Ist in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen eine Ausgangskante  $d$ -mannigfaltig, so auch die gegenüberliegende Kante aus dem Faserprodukt. Ist  $fp = qg$  kartesisch mit  $f$  mannigfaltig, so ist die ausgezeichnete Transformation aus 4.7.12 eine Isotransformation

$$p^* f^! \xrightarrow{\sim} g^! q^*$$

Insbesondere induziert jede Orientierung von  $f$  eine Orientierung von  $g$ . Wir nennen sie die **zurückgezogene Orientierung**. Ich habe diese Übung noch nicht gemacht.

## 6.3 Homologien und ihre Funktorialitäten

6.3.1. Seien  $X$  lesb und  $c := \text{fin}_X : X \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung. Unsere Vergleichsisomorphismen zur singulären Homologie und Kohomologie, die wir im Anschluß in 6.3.4 besprechen, motivieren uns zu den Definitionen

$$\begin{aligned} H_q(X)_{\text{garb}} &:= \mathcal{H}^{-q} c_! c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & H^q(X)_{\text{garb}} &:= \mathcal{H}^q c_* c^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ H_q^!(X)_{\text{garb}} &:= \mathcal{H}^{-q} c_* c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & H^q_!(X)_{\text{garb}} &:= \mathcal{H}^q c_! c^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \end{aligned}$$

Wir nennen diese Gruppen die **garbentheoretische Homologie, Kohomologie, lokalendliche Homologie** und **kompakte Kohomologie**. Analoge Definitionen  $H_q(X; G)_{\text{garb}} := \mathcal{H}^{-q} c_! c^! G_{\text{top}}$  und dergleichen vereinbaren wir für den Fall einer abelschen Gruppe  $G$ . Wenn wir den Zusatz *garb* weglassen, gilt es aus dem Kontext zu erschließen, was genau gemeint ist. Sei weiter eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  gegeben, sei  $i : U \hookrightarrow X$  die Einbettung ihres Komplements und bezeichne  $a = \text{fin}_U : U \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung. In dieser Situation motivieren die Vergleichsisomorphismen zur singulären Homologie und Kohomologie, die wir im Anschluß in 6.3.4 besprechen, uns zu den Definitionen

$$H_q(X, U)_{\text{garb}} := \mathcal{H}^{-q} a_! i^* c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \quad H^q(X, U)_{\text{garb}} = H^q_A(X) := \mathcal{H}^q a_* i^! c^* \mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Wir nennen sie die **relative garbentheoretische Homologie** und die **relative garbentheoretische Kohomologie** alias **lokale Kohomologie**.

6.3.2. Die wesentlichen Funktorialitäten dieser vier Theorien faßt die folgende Tabelle zusammen. Mehr dazu wird im Anschluß diskutiert.

	Vorschub	Rückzug
$H_q$	beliebig	eigentlich orientiert mannigfaltig
$H_q^!$	eigentlich	orientiert mannigfaltig
$H_!^q$	orientiert mannigfaltig	eigentlich
$H^q$	eigentlich orientiert mannigfaltig	beliebig

6.3.3 (**Diskussion weiterer Verallgemeinerungen**). Die beiden Kohomologien aus 6.3.1 sind sogar für beliebige topologische Räume sinnvoll definiert, aber die kompakte Kohomologie hat nur im Fall lokal kompakter Hausdorffräume gute Eigenschaften. Unsere Isomorphismen aus 4.7.8 induzieren für jeden lesb-Raum  $X$  und  $c : X \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung einen Isomorphismus  $\mathbb{D}_{c_!c^*}\mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} c_*c^!\mathbb{Z}_{\text{top}}$  und dann mit dem abstrakten universellen Koeffiziententheorem [TD] 3.8.24 für jede abelsche Gruppe  $G$  kurze exakte und unnatürlich spaltende Sequenzen

$$\text{Ext}(H_!^{q+1}X, G) \hookrightarrow H_q^!(X; G) \twoheadrightarrow \text{Hom}(H_!^qX, G)$$

Die lokalendliche Homologie kann man sogar für beliebige topologische Räume sinnvoll definieren als

$$H_q^!(X)_{\text{garb}} := \mathcal{H}^{-q}\mathbb{D}_{c_!c^*}\mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Auch sie hat jedoch nur im Fall lokal kompakter Hausdorffräume gute Eigenschaften. Für die garbentheoretische Homologie kenne ich keine sinnvolle Verallgemeinerung über den Fall von lesb-Räumen hinaus.

6.3.4 (**Vergleichsisomorphismen zur singulären Theorie**). Um die obigen Definitionen zu motivieren und mit Anschauung zu füllen, diskutiere ich Vergleichsisomorphismen zur singulären Theorie.

**Kohomologie:** Einen Vergleichsisomorphismus  $H^q(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H^q(X)_{\text{sing}}$  haben wir bereits in [TG] 5.1.4 für jeden lokal singulärzyklischen Raum konstruiert;

**Kompakte Kohomologie:** Einen Isomorphismus  $H_!^q(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H_!^q(X)_{\text{sing}}$  haben wir bereits in [TG] 5.1.21 für jeden lokal singulärzyklischen lokal kompakten Hausdorffraum konstruiert;

**Relative Kohomologie:** Gegeben seien ein lokal singulärzyklischer Raum  $X$  mit  $i : A \hookrightarrow X$  der Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und  $a$  der konstanten Abbildungen von  $A$  auf den einpunktigen Raum. Aus [TG] 5.1.20 kennen wir den zweiten Isomorphismus der Sequenz

$$\mathcal{H}^q a_* i^! c^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} H_A^q(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H^q(X, X \setminus A)_{\text{sing}}$$

Den ersten dieser Isomorphismen kennen wir aus 5.3.8 für eine beliebige abgeschlossene Teilmenge eines beliebigen topologischen Raums.

Wir vereinbaren, daß ein topologischer Raum  $X$  **polyederähnlich** heißt, wenn er lokal kompakt ist und es es darin eine konfinale Folge von Kompakta  $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset X$  gibt derart, daß die relative singuläre Homologie  $H_q(X, X \setminus K_n)_{\text{sing}}$  für alle  $q$  und  $n$  endlich erzeugt ist.

**Homologie:** Einen Isomorphismus  $H_q(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H_q(X)_{\text{sing}}$  konstruieren wir in 6.7.27 für jeden lokal singulärzyklischen lokal polyederähnlichen lesb-Raum;

**Lokalendliche Homologie:** Einen Isomorphismus  $H_q^!(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H_q^!(X)_{\text{sing}}$  konstruieren wir ebenfalls in 6.7.27 für jeden lokal singulärzyklischen lokal polyederähnlichen und abzählbar basierten lesb-Raum mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß der Funktor der globalen Schnitte  $\Gamma : \text{Ab}/X \rightarrow \text{Ab}$  endliche homologische Dimension hat.

**Relative Homologie:** Gegeben  $X$  ein lokal singulärzyklischer lokal polyederähnlicher lesb-Raum und  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und  $c : X \rightarrow \text{top}$  sowie  $a : A \rightarrow \text{top}$  die jeweils einzige Abbildung konstruieren wir in 6.7.28 einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^{-q} a_! i^* c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} = \mathbb{H}_1^{-q}(A; \omega_X) \xrightarrow{\sim} H_q(X, X \setminus A; \mathbb{Z})_{\text{sing}}$$

Für die reduzierten Theorien liefern unsere ausgezeichneten Isomorphismen der nichtreduzierten Theorien unmittelbar ausgezeichnete Isomorphismen

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(X)_{\text{sing}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q}(\text{Keg}(c_! c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{top}})[-1]) \\ \tilde{H}^q(X)_{\text{sing}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q(\text{Keg}(\mathbb{Z}_{\text{top}} \rightarrow c_* c^* \mathbb{Z}_{\text{top}})) \end{aligned}$$

Die Abbildungskegel darin sind über der Koeinheit beziehungsweise Einheit der jeweiligen Adjunktion zu verstehen.

*Ergänzung 6.3.5.* Mit 9.10.2 ist klar, daß jede abzählbar basierte Mannigfaltigkeit alle für unsere Vergleichssätze geforderten Eigenschaften hat. Es ist auch klar, daß

die Realisierung  $X = \Delta(\mathcal{K})$  eines abzählbaren lokal endlichen endlichdimensionalen Simplizialkomplexes  $\mathcal{K}$  alle für unsere Vergleichssätze geforderten Eigenschaften hat. Man sollte noch einen Beweis dafür ausschreiben, daß die Menge der komplexen Punkte einer separierten komplexen Varietät mit ihrer analytischen Topologie alle für unsere Vergleichssätze geforderten Eigenschaften hat.

6.3.6. Gegeben ein lesb-Raum  $X$  liefert die Koeinheit der Adjunktion einen ausgezeichneten Homomorphismus, die **Augmentation**

$$\varepsilon : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

beziehungsweise  $\varepsilon : H_0(X; G) \rightarrow G$ . In der singulären Theorie ist der entsprechende Homomorphismus die von der Augmentation [TS] 3.3.5 induzierte Abbildung, daher die Terminologie.

6.3.7 (**Universelle Koeffiziententheoreme der Garbenkohomologie**). Universelle Koeffiziententheoreme gelten in der Garbenhomologie im allgemeinen nur unter starken Voraussetzungen und sind nicht ganz leicht zu zeigen. Für jede Mannigfaltigkeit  $X$  liefert jedoch Satz 6.2.8 angewandt auf die konstante Abbildung  $c : X \rightarrow \text{top}$  für jede abelsche Gruppe  $G$  einen ausgezeichneten Isomorphismus  $c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \otimes c^* G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} c^! G_{\text{top}}$ . Mit der Projektionsformel erhalten wir daraus einen ausgezeichneten Isomorphismus  $c_! c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \otimes G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} c_! c^! G_{\text{top}}$ . Mit [TD] 3.8.23 erhalten wir so für jede Mannigfaltigkeit natürliche und unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$H_q(X) \otimes G \hookrightarrow H_q(X; G) \twoheadrightarrow H_{q-1}(X) * G$$

in der Garbenhomologie. Weiter ist für Mannigfaltigkeiten  $c^! \mathbb{Z}_{\text{top}}$  starr und wir erhalten mit relativer Verdierdualität und ?? und der vorhergehenden Beschreibung von  $c^! G_{\text{top}}$  in vereinfachter Notation ausgezeichnete Isomorphismen

$$(c_! c^! \mathbb{Z} \rightrightarrows G) \xrightarrow{\sim} c_* (c^! \mathbb{Z} \rightrightarrows c^! G) \xrightarrow{\sim} c_* ((c^! \mathbb{Z})^* \otimes (c^! \mathbb{Z}) \otimes c^* G) \xrightarrow{\sim} c_* c^* G$$

Mit dem abstrakten universellen Koeffiziententheorem [TD] 3.8.24 erhalten wir so wie in ?? für jede abelsche Gruppe  $G$  und jede Mannigfaltigkeit  $X$  auch für die Garbenhomologie und -kohomologie natürliche und unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\text{Ext}(H_{q-1} X, G) \hookrightarrow H^q(X; G) \twoheadrightarrow \text{Hom}(H_q X, G)$$

6.3.8. Im folgenden besprechen wir einige Funktorialitäten, die aus der Verdierdualität abgeleitet werden können, ohne daß sie darin explizit vorkommt. Das Prinzip ist immer dasselbe. Gegeben eine  $d$ -mannigfaltige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$

erinnern wir aus 6.2.7 die lokal zur konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$  isomorphe relative Orientierungsgarbe  $\text{or}_f := f^! \mathbb{Z}_Y[-d]$ . Für sie liefert Satz 6.2.8 Isomorphismen

$$f^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{or}_f[d] \otimes f^* \mathcal{F}$$

Im Spezialfall einer 0-mannigfaltigen alias étalen separierten Abbildung liefert 5.7.3 sogar eine Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*$  alias einen Isomorphismus  $\text{or}_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$ . Im allgemeinen heißt eine mannigfaltige Abbildung  $f$  **orientierbar**, wenn es einen derartigen Isomorphismus gibt. Die Wahl eines derartigen Isomorphismus heißt dann eine **Orientierung** unserer Abbildung  $f$ .

**6.3.9 (Funktorialitäten der Kohomologie).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und die konstante Abbildung  $a : X \rightarrow \text{top}$  haben wir

$$H^q(X) = \mathcal{H}^q a_* a^* \mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Das **Zurückholen** unter einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  auf der Garbenkohomologie können wir beschreiben als eine Konsequenz der Einheit der Adjunktion  $\text{id} \Rightarrow f_* f^*$  mit der Notation  $b : Y \rightarrow \text{top}$  für die konstante Abbildung vermittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^q b_* b^* \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q b_* f_* f^* b^* \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^q a_* a^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ H^q(Y) & \longrightarrow & & \longrightarrow & H^q(X) \end{array}$$

In der de-Rham-Theorie kann es nach [TG] 5.4.10 durch das Zurückholen glatter Differentialformen beschrieben werden. Im Spezialfall einer eigentlichen separierten étalen Abbildung alias endlichen Überlagerung  $f$  können wir auch ein **Vorschieben** alias eine **Summation über die Fasern** auf der Kohomologie erklären, indem wir  $f_! = f_*$  beachten und unsere Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*$  aus 5.7.3 erinnern und mit der Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \Rightarrow \text{id}$  unser Vorschieben erklären vermittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^q a_* a^* \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^q b_* f_! f^! b^* \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q b_* b^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ H^q(X) & \longrightarrow & & \longrightarrow & H^q(Y) \end{array}$$

Gegeben allgemeiner eine eigentliche  $d$ -mannigfaltige und orientierte Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  liefert dieselbe Konstruktion mit 6.3.8 analog einen ausgezeichneten Morphismus

$$H^q(X) \rightarrow H^{q-d}(Y)$$

Er heißt die **Integration über die Fasern**, da er in der de-Rham-Theorie durch Integration über die Fasern im Sinne von ?? berechnet werden kann. Noch allgemeiner haben wir für eine beliebige stetige Abbildung das Zurückholen  $H^q(Y; \mathcal{G}) \rightarrow H^q(X; f^*\mathcal{G})$  und für eine beliebige eigentliche  $d$ -mannigfaltige Abbildung eine Integration über die Fasern  $H^q(X; f^*\mathcal{G} \otimes \text{or}_f) \rightarrow H^{q-d}(Y; \mathcal{G})$ .

6.3.10 (**Funktorialitäten der kompakten Kohomologie**). Sei  $X$  ein lokal kompakter Hausdorffraum. Die kompakte Kohomologie von  $X$  ist

$$H_!^q(X) = \mathcal{H}^q_{a_!a^*} \mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  eine abgeschlossene Einbettung oder allgemeiner eine eigentliche Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen erhalten wir wegen  $f_! = f_*$  aus der Einheit der Adjunktion  $\text{id} \Rightarrow f_* f^*$  das **abgeschlossene** oder allgemeiner **eigentliche Zurückholen**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q_{b_!b^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q_{b_!f_!f^*b^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q_{a_!a^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & \parallel \\ H_!^q(Y) & \longrightarrow & H_!^q(X) \end{array}$$

In der de-Rham-Theorie kann es nach [TG] 5.4.20 durch das Zurückholen glatter kompakt getragener Differentialformen beschrieben werden. Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  eine offene Einbettung oder allgemeiner eine étale Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen liefert dahingegen unsere ausgezeichnete Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*$  aus 5.7.3 zusammen mit der Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \Rightarrow \text{id}$  die **Ausdehnung durch Null** und allgemeiner **Summation über die Fasern**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q_{a_!a^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q_{b_!f_!f^*b^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q_{b_!b^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & \parallel \\ H_!^q(X) & \longrightarrow & H_!^q(Y) \end{array}$$

Gegeben allgemeiner eine  $d$ -mannigfaltige und orientierte Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  liefert dieselbe Konstruktion mit 6.3.8 analog einen ausgezeichneten Morphismus

$$H_!^q(X) \rightarrow H_!^{q-d}(Y)$$

Er heißt die **Integration über die Fasern**, da er in der de-Rham-Theorie durch Integration über die Fasern im Sinne von ?? berechnet werden kann. Noch allgemeiner haben wir für eine eigentliche stetige Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen das Zurückholen  $H_!^q(Y; \mathcal{G}) \rightarrow H_!^q(X; f^*\mathcal{G})$  und für jede  $d$ -mannigfaltige Abbildung eine Integration über die Fasern  $H_!^q(X; f^*\mathcal{G} \otimes \text{or}_f) \rightarrow H_!^{q-d}(Y; \mathcal{G})$ .

6.3.11 (**Funktorialitäten der lokalendlichen Homologie**). Sei  $X$  ein lesb-Raum. Die lokalendliche Homologie von  $X$  erhalten wir als

$$H_q^!(X) = \mathcal{H}^{-q} a_* a^! \mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Gegeben eine abgeschlossene Einbettung oder allgemeiner eine eigentliche lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen weiteren derartigen Raum erhalten wir das **eigentliche Verschieben** für die lokalendliche Homologie aus der Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \Rightarrow \text{id}$  mit  $f_! = f_*$  als die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^{-q} a_* a^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^{-q} b_* f_* f^! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-q} b_* b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ H_q^!(X) & \longrightarrow & & \longrightarrow & H_q^!(Y) \end{array}$$

Gegeben eine offene Einbettung oder allgemeiner eine étale Abbildung  $f$  liefert dahingegen unsere ausgezeichnete Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\cong} f^*$  aus 5.7.3 zusammen mit der Einheit der Adjunktion  $\text{id} \Rightarrow f_* f^*$  das **étale Zurückholen** auf der lokalendlichen Homologie als die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^{-q} b_* b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-q} b_* f_* f^! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^{-q} a_* a^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ H_q^!(Y) & \longrightarrow & & \longrightarrow & H_q^!(X) \end{array}$$

Ist allgemeiner  $f$  eine  $d$ -mannigfaltige orientierte Abbildung, so daß wir einen ausgezeichneten Isomorphismus  $f^! \xrightarrow{\cong} f^*[d]$  zur Verfügung haben, so ergibt sich in derselben Weise für die lokalendliche Homologie das **mannigfaltige Zurückholen**

$$H_q^!(Y) \rightarrow H_{q+d}^!(X)$$

Ist  $A \looparrowright Y$  eine orientierte Mannigfaltigkeit, so bildet es etwa das Bild  $z_A \in H_q^!(Y)$  des Fundamentalzykels von  $A$  auf das Bild  $z_{f^{-1}(A)} \in H_{q+d}^!(X)$  des Fundamentalzykels von  $f^{-1}(A)$  ab, das wir dazu mit der durch die Orientierungen von  $f$  und  $A$  bestimmten Verknüpfungsorientierung 6.2.9 zu versehen haben, vergleiche 6.3.13.

6.3.12 (**Funktorialitäten der Homologie**). Sei  $X$  ein lesb-Raum und  $a : X \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung. Die Homologie von  $X$  wird in der Garbenkohomologie erklärt als

$$H_q(X) = \mathcal{H}^{-q} a_! a^! \mathbb{Z}_{\text{top}}$$



Gegeben eine abgeschlossene Einbettung oder allgemeiner eine eigentliche lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen weiteren derartigen Raum erklären wir das **Vorschieben unter**  $f$  mit Hilfe der Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \Rightarrow \text{id}$  als die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^{-q} a_! a^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^{-q} b_! f_! f^! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-q} b_! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ \mathrm{H}_q(X) & \longrightarrow & & \longrightarrow & \mathrm{H}_q(Y) \end{array}$$

Im Spezialfall einer eigentlichen separierten étalen Abbildung alias endlichen Überlagerung  $f$  können wir auch ein **eigentliches étales Zurückholen** auf der Homologie erklären, indem wir  $f_! = f_*$  beachten und von unserer ausgezeichneten Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*$  nach 5.7.3 ausgehen und mit der Einheit der Adjunktion  $\text{id} \Rightarrow f_* f^*$  unser Zurückholen erklären vermittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^{-q} b_! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-q} b_! f_! f^! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^{-q} a_! a^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ \mathrm{H}_q(Y) & \longrightarrow & & \longrightarrow & \mathrm{H}_q(X) \end{array}$$

Wir kennen diese Abbildungen in der singulären Theorie bereits aus [TS] 1.3.16 und hatten sie dort „Transferabbildungen“ genannt. Ist allgemeiner  $f$  eine eigentliche  $d$ -mannigfaltige orientierte Abbildung, so daß wir einen ausgezeichneten Isomorphismus  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*[d]$  zur Verfügung haben, so erhalten wir ebenso für die Homologie das **eigentliche mannigfaltige Zurückholen**

$$\mathrm{H}_q(Y) \rightarrow \mathrm{H}_{q+d}(X)$$

Gegeben eine kompakte orientierte  $q$ -Mannigfaltigkeit  $A \looparrowright Y$  bildet es etwa das Bild ihres Fundamentalzykels  $\omega_A \in \mathrm{H}_q(Y)$  ab auf das Bild des Fundamentalzykels  $\omega_{f^{-1}(A)} \in \mathrm{H}_{q+d}(X)$  ihres Urbilds  $f^{-1}(A) \looparrowright X$ , das wir dazu mit der durch die Orientierungen von  $f$  und  $A$  bestimmten Verknüpfungsorientierung 6.2.9 zu versehen haben, vergleiche 6.3.14.

## Übungen

*Übung* 6.3.13. (Ich habe sie noch nicht gemacht.) Gegeben ein kartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{p} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

alias  $fp = qg$  von lesb-Räumen mit  $d$ -mannigfaltigem orientiertem  $f$  und der zurückgezogenen Orientierung 6.2.10 auf  $g$  und  $p, q$  eigentliche lesb-Abbildungen kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{n+d}^! W & \longrightarrow & H_{n+d}^! X \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n^! Z & \longrightarrow & H_n^! Y \end{array}$$

mit dem mannigfaltigen Zurückholen in den Vertikalen und dem eigentlichen Vorschieben in den Horizontalen. Ebenso kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_!^n W & \longleftarrow & H_!^n X \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_!^{n-d} Z & \longleftarrow & H_!^{n-d} Y \end{array}$$

mit dem eigentlichen Zurückholen in den Horizontalen und der Integration über die Fasern in den Vertikalen.

*Übung 6.3.14.* (Ich habe sie noch nicht gemacht.) Gegeben ein kartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{p} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

alias  $fp = qg$  von lesb-Räumen mit eigentlichem  $d$ -mannigfaltigen orientierten  $f$  und der zurückgezogenen Orientierung 6.2.10 auf  $g$  und  $p, q$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{n+d} W & \longrightarrow & H_{n+d} X \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n Z & \longrightarrow & H_n Y \end{array}$$

mit dem eigentlichen mannigfaltigen Zurückholen in den Vertikalen und dem Vorschieben in den Horizontalen. Ebenso kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n W & \longleftarrow & H^n X \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{n-d} Z & \longleftarrow & H^{n-d} Y \end{array}$$

mit dem Zurückholen in den Horizontalen und der Integration über die Fasern in den Vertikalen.

*Übung 6.3.15.* Gegeben  $X = U \cup Z$  ein lokal kompakter Hausdorffraum mit einer Zerlegung in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge konstruiere man die lange exakte Sequenz der lokalendlichen Homologie

$$\dots \rightarrow H_q^!(Z) \rightarrow H_q^!(X) \rightarrow H_q^!(U) \rightarrow H_{q-1}^!(Z) \rightarrow \dots$$

## 6.4 Schnittpaarung und Poincarédualität

6.4.1 (**Poincarédualität als Verdierdualität**). Gegeben eine orientierte  $m$ -Mannigfaltigkeit  $X$  erinnere ich an den **Poincaré-Isomorphismus**

$$P = P_X = P_{\bar{X}} : H_q X \xrightarrow{\sim} H_!^{m-q} X$$

für die singuläre Homologie aus [TS] 7.4.3. Im Rahmen der sechs Funktoren erhalten wir ihn, diesmal für die **Garbenhomologie** und kompakte Garbenkohomologie, indem wir vom Dualisierungs-Isomorphismus  $p_X : c_! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \text{or}_X[m]$  nach 6.1.15 ausgehen und durch Nachschalten der Orientierung  $\text{or}_X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$  den **orientierten Dualisierungs-Isomorphismus**  $p_{\bar{X}} : c_! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X[m]$  bilden, den wir im folgenden auch kurz als **Dualisierungs-Isomorphismus** ansprechen und  $p_X$  notieren. Er induziert dann den gewünschten Isomorphismus

$$H_q X = \mathcal{H}^{-q} c_! c_! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} c_! \mathbb{Z}_X[m] = H_!^{m-q} X$$

von der Homologie zur kompakten Kohomologie. Ein Student mag mir einmal ausschreiben, warum er unter den Vergleichs-Isomorphismen 6.7.27 und 6.7.6 unserem Poincaré-Isomorphismus aus der singulären Homologietheorie [TS] 7.4.5 entspricht.

6.4.2 (**Dualisierte Poincaré-Isomorphismen**). Gegeben eine orientierte Mannigfaltigkeit  $X$  der Dimension  $m$  erhalten wir in derselben Weise mit  $c_*$  statt  $c_!$  Isomorphismen

$$P^! = P_X^! : H_q^! X \xrightarrow{\sim} H^{m-q} X$$

Wir nennen sie die **dualisierten Poincaré-Isomorphismen**, da sie im Fall von Körperkoeffizienten durch Übergang zur transponierten Abbildung auf den Dualräumen und Vertauschen von  $q$  mit  $m - q$  aus den gewöhnlichen Poincaré-Isomorphismen entstehen. Wir verstehen dabei die lokalendliche Homologie links im garbentheoretischen Sinne. Die meiner Anschauung besser zugängliche lokalendliche singuläre Homologie stimmt nicht für allgemeine Mannigfaltigkeiten, aber nach 6.7.27 und 6.1.4 doch zumindest für abzählbar basierte Mannigfaltigkeiten mit der lokalendlichen garbentheoretischen Homologie überein. Die singuläre Kohomologie stimmt nach 6.7.2 für beliebige Mannigfaltigkeiten mit der Garbenkohomologie überein. Ich habe die Konstruktion der dualisierten Poincaré-Isomorphismen in der singulären Homologietheorie nicht ausgeführt, deshalb bleibt es uns in diesem Fall erspart, etwaige Rückwärtskompatibilitäten zu prüfen.

6.4.3. Für kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten  $X$  gilt  $P_X = P_X^!$ .

**Proposition 6.4.4 (Freiheit der Homologie bei Mannigfaltigkeiten).** *Gegeben eine abzählbar basierte orientierbare  $m$ -Mannigfaltigkeit  $X$  ist  $H_{m-1}X$  eine freie abelsche Gruppe.*

*Beweis.* Es reicht, das für  $X$  zusammenhängend zu zeigen. Für  $X$  kompakt wissen wir es bereits aus [TS] 5.5.9. Es reicht also, es für  $X$  zusammenhängend nicht-kompakt zu zeigen. In dem Fall haben wir  $H_0^!(X; G) = 0$  für jede abelsche Gruppe  $G$  nach [TS] 7.3.6 und damit  $H^m(X; G) = 0$  nach den dualisierten Poincaré-Isomorphismen 6.4.2 mit Koeffizienten  $G$  und damit  $\text{Ext}(H_{m-1}X, G) = 0$  für jede abelsche Gruppe  $G$  nach dem universellen Koeffiziententheorem der Kohomologie [TS] 6.7.2. Die Proposition folgt.  $\square$

6.4.5. Gegeben eine orientierte  $m$ -Mannigfaltigkeit  $X$  definieren wir wie in [TS] 7.4.9 angekündigt das **Schnittprodukt** oder genauer **cup-Schnittprodukt** als die vom cup-Produkt  $\cup : H^p X \times H^q X \rightarrow H^{p+q} X$  unter den dualisierten Poincaré-Isomorphismen induzierte bilineare Abbildung

$$H_{m-p}^! X \times H_{m-q}^! X \rightarrow H_{m-p-q}^! X$$

Wir notieren es  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$ . Im folgenden zeigen wir, daß es in der Tat die in [TS] 7.4.9 angekündigten Eigenschaften hat, die dann auch eigentlich erst die Bezeichnung als Schnittprodukt rechtfertigen.

6.4.6 (**Funktorialität der dualisierten Poincaré-Isomorphismen**). Gegeben eine eigentliche Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von orientierten Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $m, n$  erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q^! X & \xrightarrow[\cong]{P_X^!} & H^{m-q} X \\ f_! \downarrow & & \downarrow \\ H_q^! Y & \xrightarrow[\cong]{P_Y^!} & H^{n-q} Y \end{array}$$

mit der rechten Vertikale, die für  $c : X \rightarrow \text{top}$  und  $d : Y \rightarrow \text{top}$  mit  $fd = c$  entsteht aus der Verknüpfung

$$f_* \mathbb{Z}_X[m] \xrightarrow{\cong} f_! \mathbb{Z}_X[m] \xrightarrow{\cong} f_! c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\cong} f_! f^! d^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \rightarrow d^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_Y[n]$$

von Morphismen gegeben durch die Isotransformation  $f_! \xrightarrow{\cong} f_*$ , den Dualisierungsisomorphismus  $p_{\bar{X}}$ , die Identifikation  $c^! \xrightarrow{\cong} f^! d^!$ , die Koeinheit der Adjunktion  $(f_!, f^!)$  und den Dualisierungsisomorphismus  $p_{\bar{Y}}$ .

6.4.7. Für den Fall, daß unsere eigentliche Abbildung aus 6.4.6 die Einbettung einer orientierten Untermannigfaltigkeit  $X \looparrowright Y$  der Kodimension  $p := n - m$  in eine orientierte Mannigfaltigkeit  $Y$  ist, notieren wir sie  $i : X \rightarrow Y$ , vereinbaren wir für die Bilder von  $1 \in H^0 X$  unter den verschiedenen Pfeilen unseres Diagramms und ihren Inversen die Notationen

$$\begin{array}{ccc} [X]^! \in H_m^! X & \xrightarrow[\sim]{P_X^!} & H^0 X \ni 1 \\ i_! \downarrow & & \downarrow \\ [X]^! \in H_m^! Y & \xrightarrow[\sim]{P_Y^!} & H^p Y \ni \tau_X \end{array}$$

Wir nennen  $[X]^!$  den **Fundamentalzykel von  $X$** . Ist  $X$  abzählbar basiert oder stärker kompakt, so entspricht er unter unseren Vergleichsisomorphismen mit der singulären Homologie dem Fundamentalzykel aus [TS] 7.3.13 beziehungsweise [TS] 4.3.2. Wir nennen  $\tau_X$  den **Fundamentalkozykel von  $X$** .

6.4.8 (**Anschauung für den Fundamentalkozykel**). Man mag sich den Fundamentalkozykel von  $A$  in  $X$  salopp gesprochen denken als ein Etwas, daß jedem Zykel in  $X$  komplementärer Dimension seine Schnittmultiplizität mit  $A$  zuordnet.

6.4.9. Gegeben  $A \looparrowright X$  ein topologischer Raum mit einer abgeschlossenen Teilmenge mit Einbettungsabbildung  $i : A \hookrightarrow X$  und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  und  $a : A \rightarrow \text{top}$  erinnern wir aus 5.3.8 den Isomorphismus

$$\mathcal{H}^p a_* i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} H_A^p(X; \mathcal{F})$$

Im Rahmen der sechs Funktoren nehmen wir die linke Seite direkt als Definition der rechten Seite. In jedem Fall liefern unsere Konstruktionen auch Isomorphismen

$$\text{Der}_{/X}(i_! \mathbb{Z}_A[-p], \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{/A}(\mathbb{Z}_A, i^! \mathcal{F}[p]) \xrightarrow{\sim} H_A^p(X; \mathcal{F})$$

6.4.10 (**Fundamentalkozykel als Element der lokalen Kohomologie**). Seien weiter  $X \looparrowright Y$  eine abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeit einer orientierten Mannigfaltigkeit der Kodimension  $p$  und  $i : X \hookrightarrow Y$  die Einbettung. Die rechte Vertikale in unserem Diagramm 6.4.7 ist, wie in 6.4.6 erklärt, der Effekt einer Verknüpfung

$$i_* \mathbb{Z}_X = i_! \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} i_! i^! \mathbb{Z}_Y[p] \rightarrow \mathbb{Z}_Y[p]$$

von Homomorphismen in  $\text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  auf der Hyperkohomologie. Nach 5.3.8 haben wir  $H^0(Y; i_! i^! \mathbb{Z}_Y[p]) = H_X^p(Y)$ . Die rechte Vertikale unseres Diagramms faktorisiert mithin als Isomorphismus  $H^q X \xrightarrow{\sim} H_X^{p+q}(Y) \rightarrow H^{p+q}(Y)$  in die lokale

Kohomologie gefolgt von Delokalisieren. Wir nennen das Bild unter dieser Faktorisierung von  $1 \in H^0 X$  den **lokalen Fundamentalkozykel** und notieren ihn wie den ursprünglichen Fundamentalkozykel

$$\tau_X \in H_X^p(Y)$$

*Beispiel 6.4.11.* Gegeben  $(Y, \omega)$  eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $y \in Y$  ein Punkt ist der lokale Fundamentalkozykel  $\tau_{\{y\}} \in H_{\{y\}}^n(Y) = H^n(Y, Y \setminus \{y\})$  dasjenige Element, das unter der Kroneckerpaarung mit der lokalen Orientierung  $\omega_y \in H_n(Y, Y \setminus \{y\})$  zu 1 paart.

**6.4.12 (Cup-Produkt der lokalen Kohomologie).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und Einbettungen abgeschlossener Teilmengen  $i : A \hookrightarrow X$  sowie  $j : B \hookrightarrow X$  und  $k : A \cap B \hookrightarrow X$  haben wir einen offensichtlichen Isomorphismus

$$k_! \mathbb{Z}_{A \cap B} \xrightarrow{\sim} i_! \mathbb{Z}_A \otimes j_! \mathbb{Z}_B$$

Wir diskutieren im Anschluß in 6.4.13, wie er im Rahmen der sechs Funktoren erhalten werden kann. Er induziert eine bilineare Abbildung

$$H_A^p(X) \times H_B^q(X) \rightarrow H_{A \cap B}^{p+q}(X)$$

durch die Vorschrift  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \otimes \beta$  in der Interpretation der lokalen Kohomologieklassen als Morphismen  $\alpha : i_! \mathbb{Z}_A \rightarrow \mathbb{Z}_X[p]$  und  $\beta : j_! \mathbb{Z}_B \rightarrow \mathbb{Z}_X[q]$  der derivierten Kategorie  $\text{Der}/X$ .

**6.4.13 (Ausdehnung durch Null und Tensorieren).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und Einbettungen lokal abgeschlossener Teilmengen  $i : A \hookrightarrow X$  sowie  $j : B \hookrightarrow X$  und Objekte  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/A)$  sowie  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/B)$  liefert Basiswechsel im kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & A \wedge B \\ k \downarrow & & \downarrow i \wedge j \\ X & \longrightarrow & X \wedge X \end{array}$$

der Trennkategorie mit den Notationen  $k : A \cap B \hookrightarrow X$  und  $a : A \cap B \hookrightarrow A$  und  $b : A \cap B \hookrightarrow B$  für die jeweiligen Einbettungen Isomorphismen

$$k_!(a^* \mathcal{F} \otimes b^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} i_! \mathcal{F} \otimes j_! \mathcal{G}$$

Für  $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathbb{Z}_X$  erhalten wir so den in 6.4.12 als offensichtlich deklarierten Isomorphismus  $k_! \mathbb{Z}_{A \cap B} \xrightarrow{\sim} i_! \mathbb{Z}_A \otimes j_! \mathbb{Z}_B$  sogar im Fall lokal abgeschlossener Einbettungen.

6.4.14 (**Verschwinden von cup-Produkten**). Gegeben seien ein topologischer Raum  $X$  und abgeschlossene Teilmengen  $A \subset X$  sowie  $B \subset X$ . In Übung 6.4.35 werden Sie die Funktorialität der lokalen Kohomologie diskutieren und werden insbesondere sehen, daß unser cup-Produkt der lokalen Kohomologie das gewöhnliche cup-Produkt verallgemeinert. Wir erhalten also mit den bekannten Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_A^p(X) \times H_B^q(X) & \rightarrow & H_{A \cap B}^{p+q}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(X) \times H^q(X) & \rightarrow & H^{p+q}(X) \end{array}$$

Das Analogon dieser Abbildung in der singulären Kohomologie kennen wir bereits aus [TSK] 4.2.10, allerdings heißt unsere lokale Kohomologie dort die relative Kohomologie  $H^p(X, X \setminus A)$ . In jedem Fall gilt  $H_\emptyset^n(X) = 0$  für alle  $n$ . Das bedeutet insbesondere für Elemente  $\alpha, \beta$  des Kohomologierings, die von Elementen der lokalen Kohomologie in Bezug auf abgeschlossene Teilmengen  $A, B$  mit leerem Schnitt  $A \cap B = \emptyset$  herkommen, im vollen Kohomologiering von  $X$  das Verschwinden des cup-Produkts

$$\alpha \cup \beta = 0$$

*Beispiel 6.4.15 (Verschwindende Schnittprodukte und erzwungene Schnitte).* Gegeben eine orientierte Mannigfaltigkeit  $X$  und orientierte abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten  $A, B \subset X$  gilt

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow [A]^! \cdot [B]^! = 0$$

In der Tat ist das Verschwinden des Schnittprodukts per definitionem gleichbedeutend zu  $\tau_A \cup \tau_B = 0$  und das folgt im Fall  $A \cap B = \emptyset$  aus 6.4.12, da unsere Fundamentalkozykel nach 6.4.10 bereits von der jeweiligen lokalen Kohomologie herkommen. Umgekehrt gilt dann natürlich auch

$$[A]^! \cdot [B]^! \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

In Worten wird also durch das Nichtverschwinden des Schnittprodukts bereits die Existenz von Schnittpunkten erzwungen. Bei dieser Argumentation fällt einem die Notation schon fast auf die Füße. Es bezeichnet darin  $A \cap B$  einen Schnitt von Mengen,  $\tau_A \cup \tau_B$  jedoch ein cup-Produkt von Kohomologieklassen.

6.4.16 (**Beschreibung der lokalen Kohomologie mit Lokalgarben**). Gegeben  $A \subset X$  eine abgeschlossene Teilmenge in einem topologischen Raum mit ihrer Einbettungsabbildung  $i : A \hookrightarrow X$  erinnern wir aus 5.3.8 die Isomorphismen  $H_A^q(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; i_* i^! \mathbb{Z}_X)$ . Wir nennen

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A \subset X} := i_* i^! \mathbb{Z}_X$$

die **Lokalgarbe von  $A$  in  $X$**  und erhalten Isomorphismen  $H_A^q(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{L}_A)$ . Der Isomorphismus der relativen Verdierdualität 4.7.8 liefert für  $A \Subset X$  und  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung eine Beschreibung der Lokalgarbe als Homgarbe

$$\mathcal{L}_A = i_* i^! \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} (i_! \mathbb{Z}_A \rightrightarrows \mathbb{Z}_X)$$

Gegeben  $u : U \hookrightarrow X$  die Einbettung einer offenen Teilmenge liefert die relative Verdierdualität 4.7.8 zusammen mit dem durch die Adjunktion  $(u_!, u^*)$  gegebenen Isomorphismus  $u^* \xrightarrow{\sim} u^!$  Isomorphismen  $u^* \mathcal{L}_{A \subset X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{(A \cap U) \subset U}$ .

**6.4.17 (Beschreibung des cup-Produkts mit Lokalgarben).** Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $A, B \Subset X$  abgeschlossene Teilmengen,  $i, j$  deren Einbettungsabbildungen und  $k : A \cap B \hookrightarrow X$  die Einbettung ihres Schnitts. Unter diesen Annahmen liefert unser Isomorphismus  $k_! \mathbb{Z}_{A \cap B} \xrightarrow{\sim} i_! \mathbb{Z}_A \otimes j_! \mathbb{Z}_B$  aus 6.4.12 unter  $(\rightrightarrows \mathbb{Z}_X)$  einen Morphismus

$$\mathcal{L}_A \otimes \mathcal{L}_B \rightarrow \mathcal{L}_{A \cap B}$$

vom derivierten Tensorprodukt der Lokalgarben in die Lokalgarbe des Schnitts. Wir nennen sie die **Lokalgarbenpaarung**. Das zugehörige cup-Produkt mit Koeffizienten paßt dann offensichtlich in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_A^p(X) \times H_B^q(X) & \rightarrow & H_{A \cap B}^{p+q}(X) \\ \downarrow \wr & & \wr \downarrow \\ \mathbb{H}^p(X; \mathcal{L}_A) \times \mathbb{H}^q(X; \mathcal{L}_B) & \rightarrow & \mathbb{H}^{p+q}(X; \mathcal{L}_{A \cap B}) \end{array}$$

mit den Isomorphismen aus 6.4.16 in den Vertikalen.

**6.4.18 (Lokalität der Lokalgarbenpaarung).** Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $A, B \Subset X$  abgeschlossene Teilmengen. Für  $U \Subset X$  mit Einbettungsabbildung  $u : U \hookrightarrow X$  erhalten wir dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} u^* \mathcal{L}_A \otimes u^* \mathcal{L}_B & \rightarrow & u^* \mathcal{L}_{A \cap B} \\ \downarrow \wr & & \wr \downarrow \\ \mathcal{L}_{A \cap U} \otimes \mathcal{L}_{B \cap U} & \rightarrow & \mathcal{L}_{A \cap B \cap U} \end{array}$$

mit den Vertikalen aus 6.4.16 und der zurückgezogenen Lokalgarbenpaarung beziehungsweise der Lokalgarbenpaarung der eingeschränkten Situation in den Horizontalen.

**Beispiel 6.4.19 (Lokalgarbe einer Untermannigfaltigkeit).** Gegeben  $A \Subset X$  eine orientierte Mannigfaltigkeit mit einer orientierten abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $p$  haben wir bereits in 6.4.10 einen Isomorphismus  $i_* \mathbb{Z}_A[-p] \xrightarrow{\sim} i_* i^! \mathbb{Z}_X[p]$  angegeben, der in unserer neuen Terminologie interpretiert werden kann als eine Beschreibung der Lokalgarbe durch einen Isomorphismus

$$i_* \mathbb{Z}_A[-p] \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{A \subset X}$$



**Beispiel 6.4.20 (Multiplizität von Schnitten).** Seien  $X$  eine orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A, B \subset X$  abgeschlossene Teilmengen, die ihrerseits orientierbare Mannigfaltigkeiten der Kodimensionen  $p, q$  sind. Zusätzlich nehmen wir an, daß auch ihr Schnitt  $A \cap B$  eine orientierbare Mannigfaltigkeit der Kodimension  $p + q$  in  $X$  sein möge. Wählen wir jeweils Orientierungen auf  $X, A, B$  und  $A \cap B$ , so wird unter diesen Wahlen unsere Lokalgardenpaarung  $\mathcal{L}_A \otimes \mathcal{L}_B \rightarrow \mathcal{L}_{A \cap B}$  aus 6.4.17 für  $i, j, k$  die jeweiligen Einbettungen mit den Isomorphismen aus 6.4.19 zu einem Morphismus

$$i_*\mathbb{Z}_A[-p] \otimes j_*\mathbb{Z}_B[-q] \rightarrow k_*\mathbb{Z}_{A \cap B}[-p - q]$$

Nach Wegkürzen der Graduierungsverschiebungen und Vorschalten des Inversen des offensichtlichen Isomorphismus  $i_*\mathbb{Z}_A \otimes j_*\mathbb{Z}_B \xrightarrow{\sim} k_*\mathbb{Z}_{A \cap B}$  erhalten wir einen Morphismus  $k_*\mathbb{Z}_{A \cap B} \rightarrow k_*\mathbb{Z}_{A \cap B}$  und unter der Adjunktion eine lokal konstante Funktion

$$S = S_{X;A,B} : A \cap B \rightarrow \mathbb{Z}$$

Den Wert unserer Funktion an einer Stelle  $x \in A \cap B$  nennen wir die **lokale Schnittmultiplizität** und finden damit für das cup-Produkt der Fundamentalkozykel in  $H_{A \cap B}^{p+q}(X)$  alias das Schnittprodukt der Fundamentalkozykel unter der zusätzlichen Annahme, daß der Schnitt  $A \cap B$  nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat, die Darstellung

$$\tau_A \cup \tau_B = \sum_{Z \in \text{Zus}(A \cap B)} S_{X;A,B}(Z) \tau_Z \quad \text{alias} \quad [A]^! \cdot [B]^! = \sum_{Z \in \text{Zus}(A \cap B)} S_{X;A,B}(Z) [Z]^!$$

als Summe über die Zusammenhangskomponenten  $Z$  von  $A \cap B$ . Hat der Schnitt unendlich viele Zusammenhangskomponenten, so gilt das immer noch, wenn wir die unendliche Summe im Sinne der Trägerzerlegung [TG] 4.4.16 der lokalen Kohomologie als ein Tupel interpretieren. Ist weiter  $U \Subset X$  eine offene Teilmenge, so haben wir nach der Lokalität der Lokalgardenpaarung 6.4.18 zusätzlich

$$S_{U;A \cap U, B \cap U} = S_{X;A,B}|_{A \cap B \cap U}$$

Unsere lokale Schnittmultiplizität an einer Stelle  $x \in A \cap B$  ändert sich also nicht, wenn wir  $X$  durch eine offene Umgebung  $U \Subset X$  von  $x$  ersetzen.

**Vorschau 6.4.21.** Jetzt diskutieren wir erst einmal Schnitte von Kurven in der Ebene. Dann zeigen wir in ?? im Fall von „transversalem Schnitt“, daß unsere Schnittmultiplizitäten  $\pm 1$  sind mit einem durch die Orientierungen beschriebenen Vorzeichen.

**Lemma 6.4.22.** Gegeben eine abgeschlossene zusammenhängende nichtkompakte Einsmannigfaltigkeit  $Z \looparrowright \mathbb{R}^2$  besteht ihr Komplement aus zwei Komponenten, deren höhere Garbenkohomologie jeweils verschwindet.

*Erster Beweis.* Alexanderdualität [TG] 5.1.22. □

*Zweiter Beweis.* Wir schreiben  $X := \mathbb{R}^2$  und  $U := X \setminus Z$  und notieren  $i, j$  die Einbettungen von  $Z, U$ . Nach [TM] 1.8.5 gilt  $Z \cong \mathbb{R}$ . Das ausgezeichnete Dreieck  $i^! \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow j_* j^* \mathbb{Z}_X \rightarrow [1]$  aus 5.3.3 liefert wegen  $i^! \mathbb{Z}_X \cong \text{or}_{Z \subset X}[-1] \cong \mathbb{Z}_Z[-1]$  nach 9.10.4 eine kurze exakte Sequenz

$$H^0(X) \hookrightarrow H^0(U) \twoheadrightarrow H^0(Z)$$

und wir sehen, daß  $U$  genau zwei Zusammenhangskomponenten hat. Die anderen  $H^q(U)$  sind in einer exakten Sequenz zwischen Nullen eingequetscht und müssen folglich verschwinden. □

**Proposition 6.4.23 (Lokale Schnittmultiplizität von Kurven in der Ebene).** *Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  zwei abgeschlossene nichtkompakte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeiten in der Ebene  $X := \mathbb{R}^2$ , die sich in genau einem Punkt  $x \in X$  treffen. Trifft jede Komponente von  $X \setminus A$  jede Komponente von  $X \setminus B$ , so liefert das cup-Produkt der lokalen Kohomologie einen Isomorphismus*

$$H_A^1(X) \otimes H_B^1(X) \xrightarrow{\sim} H_{\{x\}}^2(X)$$

*Andernfalls ist diese Abbildung Null. Insbesondere ist unter den gegebenen Voraussetzungen die lokale Schnittmultiplizität unserer beiden ebenen Kurven bei beliebiger Wahl der Orientierungen stets  $\pm 1$  im ersten Fall und Null im zweiten Fall.*

*Beweis.* Bezeichne  $U := X \setminus A$  das Komplement von  $A$ . Nach 6.4.22 hat  $U$  genau zwei Komponenten  $U_1, U_2$  und deren höhere Garbenkohomologie verschwindet. Unsere allgemeine Erkenntnis [TG] 4.9.15 liefert eine kurze exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}_{U \subset X} \hookrightarrow \mathbb{Z}_X \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{A \subset X}$$

von abelschen Garben auf  $X$  und zeigt, wenn wir dazu die lange exakte Sequenz der Morphismen in die  $\mathbb{Z}_X[q]$  bilden, schon einmal  $H_A^q(X) \cong \mathbb{Z}$  für  $q = 1$  und Null sonst. In anderen Worten liefert unsere kurze exakte Sequenz einen Quasiisomorphismus  $(\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X[0]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{A \subset X}[0]$ , der nach der Beschreibung von  $\text{Ext}^q(\mathbb{Z}_{U \subset X}, \mathcal{F})$  aus [TG] 4.9.32 und dem Vergleich von Morphismen in Hot und Der aus [TD] 2.7.18 eine Bijektion

$$\text{Hot}_{\text{Ab}/X}((\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X[0]), \mathbb{Z}_X[1]) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\text{Ab}/X}(\mathbb{Z}_{A \subset X}, \mathbb{Z}_X[1])$$

induziert. Das Symbol  $[0]$  verwenden wir hier, um bei einem Komplex den Term im Grad Null anzuzeigen. Wir erhalten offensichtlich einen Erzeuger von

$$\text{Hot}_{\text{Ab}/X}((\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X[0]), \mathbb{Z}_X[1]) = \mathcal{H}^0((\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X[0]) \rightrightarrows_{\text{Hot}} \mathbb{Z}_X[1])$$

durch einen Morphismus  $\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X$ , der unter der offensichtlichen Zerlegung  $\mathbb{Z}_{U_1 \subset X} \oplus \mathbb{Z}_{U_2 \subset X} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{U \subset X}$  zu einem Erzeuger des Raums der Morphismen  $\mathbb{Z}_{U_1 \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X$  beziehungsweise zum Nullmorphismus  $\mathbb{Z}_{U_2 \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X$  einschränkt. Ebenso hat auch  $V := X \setminus B$  genau zwei Komponenten  $V_1, V_2$ . Nach [TG] 4.10.28 hat weiter das Komplement von  $A \cup B$  genau vier Komponenten. Sind alle Schnitte  $U_i \cap V_j$  nicht leer, so müssen diese Schnitte genau unsere vier Komponenten sein. Wählt man nun analog einen Repräsentanten in der Homotopiekategorie für einen Erzeuger der lokalen Kohomologie  $H_B^1(X)$  und bildet das Tensorprodukt in der Homotopiekategorie, so kann man wieder in der Homotopiekategorie unschwer prüfen, daß wir einen Repräsentanten eines Erzeugers von  $H_{\{x\}}^2(X)$  erhalten. Andernfalls haben wir nach eventueller Umnummerierung ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $U_1 \cap V_1 = \emptyset$  und dann ist das cup-Produkt der entsprechenden Erzeuger in der Homotopiekategorie in der Tat der Nullmorphismus.  $\square$

**Beispiel 6.4.24 (Schnitte in einem Torus).** Seien  $A, B \subset T := S^1 \times S^1$  die zwei Kreislinien  $S^1 \times \{1\}$  und  $\{1\} \times S^1$  im Torus  $T$ . Sie schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich dem Punkt  $x := (1, 1)$ , und ihre Schnittmultiplizität ist dort nach der lokalen Beschreibung 6.4.23 offensichtlich  $\pm 1$  mit einem von den gewählten Orientierungen abhängigem Vorzeichen. Wir finden so

$$[A]^! \cdot [B]^! = \pm [x]^! \neq 0$$

Das bedeutet unter anderem, daß für beliebige abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten  $X, Y \subset T$  mit  $[X]^! = [A]^!$  und  $[Y]^! = [B]^!$  ebenso gilt  $[X]^! \cdot [Y]^! \neq 0$  und damit insbesondere  $X \cap Y \neq \emptyset$ . Wir können also salopp gesprochen durch Verbiegen und Verschieben unserer beiden Kreislinien  $A$  und  $B$  niemals erreichen, daß diese beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden. Da  $T$  kompakt ist, hätten wir hier auch auf die Ausrufezeichen verzichten können.

**Beispiel 6.4.25 (Schnitte in der Ebene).** Seien  $A, B \subset X := \mathbb{R}^2$  die beiden Koordinatenachsen. Sie schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich dem Ursprung  $x := (0, 0)$ , und ihre Schnittmultiplizität ist dort nach der lokalen Beschreibung 6.4.23 offensichtlich  $\pm 1$  mit einem von den gewählten Orientierungen abhängigen Vorzeichen. Wir finden so wieder

$$[A]^! \cdot [B]^! = \pm [x]^!$$

Das ist jedoch weniger interessant, da in der lokalendlichen Homologie alle die beteiligten Klassen Null sind. Wir können salopp gesprochen durch Verbiegen und Verschieben von  $A$  und  $B$  auch leicht erreichen, daß diese beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden, aber das führt aufgrund des Verschwindens all unserer Klassen nicht zum Widerspruch.

**Beispiel 6.4.26 (Schnitte in der punktierten Ebene).** Seien  $A, B \subset X := \mathbb{R}^2 \setminus 0$  die positive  $x$ -Achse und der Graph der Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = (x-1)^2 - 1$ . Sie schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich dem Punkt  $x := (2, 0)$ , und ihre Schnittmultiplizität dort ist nach der lokalen Beschreibung 6.4.23 offensichtlich  $\pm 1$  mit einem von den gewählten Orientierungen abhängigen Vorzeichen. Wir finden so wieder

$$[A]^! \cdot [B]^! = \pm [x]^!$$

Das ist jedoch weniger interessant, da in diesem Fall die Klasse  $[x]^!$  eines jeden Punktes Null ist in der lokalendlichen Homologie. Wir können salopp gesprochen durch Verbiegen und Verschieben von  $A$  und  $B$  auch leicht erreichen, daß unsere beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden, aber das führt nicht zum Widerspruch.

**Beispiel 6.4.27 (Schnitte in der punktierten Ebene, halbkompakte Variante).** Seien  $A, B \subset X := \mathbb{R}^2 \setminus 0$  der Einheitskreis und die positive  $x$ -Achse. In diesem Fall gilt bereits  $[A]^! = 0$  und die Identität

$$[A]^! \cdot [B]^! = \pm [x]^!$$

liefert erst recht keine interessanten Aussagen. Es ist jedoch nicht klar, ob wir durch Verbiegen und Verschieben von  $A$  und  $B$  erreichen können, daß unsere beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden. In der Tat ist das unmöglich und folgt aus der Variante  $[A] \cdot [B]^! = \pm [x] \neq 0$  unserer Formel, die im Fall von kompaktem  $B$  in der gewöhnlichen Homologie gilt und deren Diskussion wir uns jetzt zuwenden.

6.4.28. Gegeben eine orientierte  $m$ -Mannigfaltigkeit  $X$  definieren wir wie in [TS] 7.4.9 angekündigt das **cap-Schnittprodukt** als die von der Modulstruktur  $H_!^p X \times H^q X \rightarrow H_!^{p+q} X$  nach 4.7.15 unter den Poincaré-Isomorphismen und dualisierten Poincaré-Isomorphismen induzierte bilineare Abbildung

$$H_{m-p} X \times H_{m-q}^! X \rightarrow H_{m-p-q} X$$

Wir notieren sie auch  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$ . Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und abgeschlossene Teilmengen  $A \subset X$  sowie  $B \subset X$  mit  $A$  kompakt erhalten mit den bekannten Vertikalen in diesem Fall ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_A^p(X) \times H_B^q(X) & \rightarrow & H_{A \cap B}^{p+q}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_!^p(X) \times H^q(X) & \rightarrow & H_!^{p+q}(X) \end{array}$$

mit der durch die Struktur der kompakten Kohomologie als Modul über dem Kohomologiering nach 4.7.15 gegebenen unteren Horizontale. Bezeichne für  $A$

kompakt nun  $\tau_{1A} \in H_1^p(X)$  das Bild des Fundamentalkozykels  $\tau_A \in H_A^p(X)$ . Wir finden dann für  $A$  kompakt unter denselben Annahmen wie in 6.4.20 und mit denselben lokalen Schnittmultiplizitäten die Identität

$$\tau_{1A} \cup \tau_B = \sum_{Z \in \text{Zus}(A \cap B)} S_{X;A,B}(Z) \tau_{1Z} \quad \text{alias} \quad [A] \cdot [B]^! = \sum_{Z \in \text{Zus}(A \cap B)} S_{X;A,B}(Z) [Z]$$

in der kompakten Kohomologie beziehungsweise in der Homologie von  $X$ .

**Beispiel 6.4.29 (Schnitte in der punktierten Ebene, halbkompakte Variante).** Seien  $A, B \subset X := \mathbb{R}^2 \setminus 0$  der Einheitskreis und die positive  $x$ -Achse. Da  $A$  kompakt ist, können wir das cap-Schnittprodukt betrachten und erhalten die Identität

$$[A] \cdot [B]^! = \pm [x] \neq 0$$

in der gewöhnlichen Homologie  $H_0(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ . Es folgt sowohl  $[A] \neq 0$  in  $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$  als auch  $[B]^! \neq 0$  in  $H_1^!(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$  und weiter, daß wir salopp gesprochen durch Verbiegen und Verschieben von  $A$  und  $B$  nicht erreichen können, daß unsere beiden Untermannigfaltigkeiten zueinander disjunkt werden.

**6.4.30 (Lokale Schnittmultiplizitäten bei transversalem Schnitt).** Seien  $X$  eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A, B \subset X$  abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten der Kodimensionen  $p, q$ , die sich **transversal schneiden** in dem Sinne, daß jeder Punkt  $x \in A \cap B$  eine offene Umgebung  $U \subset X$  besitzt mit samt einem Homöomorphismus  $U \xrightarrow{\sim} E$  zu einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, unter dem  $A \cap U$  und  $B \cap U$  bijektiv auf Untervektorräume der Kodimensionen  $p$  beziehungsweise  $q$  abgebildet werden, die zusammen  $E$  erzeugen. Wir nennen so einen Homöomorphismus eine **Schnittplättung**. Unter diesen Annahmen ist auch  $A \cap B$  eine Mannigfaltigkeit und wir können darauf die **Schnittorientierung** erklären durch die Vorschrift, daß sie unter jeder Schnittplättung der Schnittorientierung entspricht, wie wir sie in 6.6.11 im Fall von Untervektorräumen eingeführt haben. Mit dieser Schnittorientierung auf  $A \cap B$  gilt dann mit derselben Argumentation in der lokalendlichen Homologie von  $X$  die Identität

$$[A]^! \cdot [B]^! = [A \cap B]^! = \sum_{Z \in \text{Zus}(A \cap B)} [Z]^!$$

In Worten ist also im Fall eines transversalen Schnitts das Schnittprodukt der Fundamentalykel der Fundamentalykel des Schnitts. Ebenso erhalten wir im Fall von kompaktem  $A$  zusätzlich in der gewöhnlichen Homologie die feinere Identität

$$[A] \cdot [B]^! = [A \cap B] = \sum_{Z \in \text{Zus}(A \cap B)} [Z]$$

6.4.31. Gegeben eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  liefert unser cap-Schnittprodukt gefolgt von der Augmentation eine bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} H_q(X) \times H_{n-q}^!(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \odot \beta \end{aligned}$$

Sie heißt die **Schnittpaarung**. Gegeben abgeschlossene orientierte sich transversal schneidende Untermannigfaltigkeiten  $A, B \subset X$  der Dimensionen  $q, n-q$  mit  $A$  kompakt liefert 9.10.13 insbesondere die Formel

$$[A] \odot [B]^! = \varepsilon([A \cap B])$$

Hier ist  $A \cap B$  eine endliche Menge alias kompakte Nullmannigfaltigkeit und die Schnittorientierung darauf ist eine Abbildung  $\eta : A \cap B \rightarrow \{1, -1\}$  und die Augmentation des zugehörigen Fundamentalzykels ergibt sich zu

$$\varepsilon([A \cap B]) = \sum_{x \in A \cap B} \eta(x)$$

**Satz 6.4.32 (Eigenschaften der Schnittpaarung).** *Gegeben eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  induziert die Schnittpaarung  $H_q(X) \times H_{n-q}^!(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  stets eine Surjektion  $H_{n-q}^!(X) \twoheadrightarrow \text{Hom}(H_q(X), \mathbb{Z})$  und im Fall von freiem  $H_{q-1}(X)$  ist diese Surjektion sogar ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Schalten wir unserer cap-Schnittpaarung im zweiten Eintrag den Inversen des dualisierten Poincaré-Isomorphismus  $P^! : H_{n-q}^!(X) \xrightarrow{\sim} H^q(X)$  vor, so erhalten wir die Kroneckerpaarung  $H_q(X) \times H^q(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Nach dem universellen Koeffiziententheorem 6.3.7 haben wir jedoch eine kurze exakte Sequenz

$$\text{Ext}(H_{q-1}(X), \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^q(X) \twoheadrightarrow \text{Hom}(H_q(X), \mathbb{Z}) \quad \square$$

6.4.33. Analoges gilt mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Kring endlicher homologischer Dimension. Im Fall eines Krings der Charakteristik Zwei brauchen wir noch nicht einmal irgendwelche Orientierbarkeiten vorauszusetzen. Mit Koeffizienten in einem Körper  $k$  etwa ist die totale Homologie immer frei und dann induziert unsere Schnittpaarung einen Isomorphismus

$$H_{n-q}^!(X; k) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(H_q(X; k), k)$$

und im Fall eines Körpers der Charakteristik Zwei brauchen wir noch nicht einmal  $X$  orientiert vorauszusetzen.

**Beispiel 6.4.34 (Ebene ohne abgeschlossene diskrete Teilmenge).** Im Fall der Zweimannigfaltigkeit  $X := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  ist die erste Homologie  $H_1(X)$  eine freie abelsche Gruppe mit kleinen Zykeln um die ganzen Zahlen als Repräsentanten einer Basis, denn schreiben wir unseren Raum als aufsteigende Vereinigung immer größerer offener Teilmengen, so ist die Homologie der Kolimes. Weiter ist  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  frei und nach 6.4.32 liefert damit die Schnittpaarung einen Isomorphismus  $H_1^1(X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z})$ . Folglich ist  $H_1^1(X)$  isomorph zu einem Produkt von abzählbar vielen Kopien von  $\mathbb{Z}$  und man erhält Repräsentanten für die Elemente der ersten lokalendlichen Homologie zum Beispiel, indem man die Fundamentalzykel von vertikalen Halbgeraden betrachtet, die von Punkten  $n \in \mathbb{Z}$  nach oben ins Unendliche laufen, und von ihnen geeignet definierte „unendliche Linearkombinationen“ nimmt.

## Übungen

**Übung 6.4.35 (Funktorialität des cup-Produkts der lokalen Kohomologie).** Für eine beliebige stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und  $C, D \Subset Y$  mit der Eigenschaft  $f^{-1}(C) \subset A$  und  $f^{-1}(D) \subset B$  erhalten wir für das cup-Produkt der lokalen Kohomologie 6.4.12 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_C^p(Y) \times H_D^q(Y) & \rightarrow & H_{C \cap D}^{p+q}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_A^p(X) \times H_B^q(X) & \rightarrow & H_{A \cap B}^{p+q}(X) \end{array}$$

**Übung 6.4.36 (Fundamentalkozykel einer Untervarietät).** Seien  $X$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A \Subset X$  eine abgeschlossene Teilmenge, die eine Filtrierung der Gestalt

$$A = A^{\leq a} \supset A^{\leq a-1} \supset \dots \supset A^{\leq 0} \supset \emptyset = A^{\leq -1}$$

durch abgeschlossene Teilmengen  $(A^{\leq n})_{n \in \mathbb{Z}}$  besitzt derart, daß das Komplement  $A^{\leq q} \setminus A^{\leq q-1}$  jeweils eine  $q$ -Mannigfaltigkeit ist. Man zeige  $\mathcal{H}^p \mathcal{L}_{A^{\leq q}} = 0$  für  $p + q < n$  und zeige unter der zusätzlichen Annahme, daß sogar  $A^\circ := A \setminus A^{\leq a-2}$  eine  $a$ -Mannigfaltigkeit ist, daß der natürliche Morphismus einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_{A^\circ}$$

liefert. Sind schließlich Orientierungen auf  $X$  und  $A^\circ$  gewählt, so erhält man weiter wie in 9.10.5 ausgezeichnete Isomorphismen  $\mathcal{L}_{A^\circ} \xrightarrow{\sim} j_* \mathbb{Z}_{A^\circ}[a-n]$  für  $j : A^\circ \hookrightarrow X$  die Einbettung und damit einen ausgezeichneten globalen Schnitt  $1 \in \Gamma \mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_{A^\circ}$  und dann auch in  $\Gamma \mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_A$ . Weil wir bereits wissen, daß gilt  $\mathcal{H}^q \mathcal{L}_A = 0$  für  $q < n - a$ , ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus  $\Gamma \mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{n-a}(X; \mathcal{L}_A)$  und wir erhalten ein ausgezeichnetes Element

der lokalen Kohomologie, das wir wieder den **Fundamentalkozykel von  $A$  in  $X$**  nennen und

$$\tau_A = \tau_{A \subset X} \in H_A^{n-a}(X)$$

notieren. Er hängt von den gewählten Orientierungen ab. Man zeigt unschwer, daß er im Fall einer Mannigfaltigkeit  $A$  mit dem Fundamentalkozykel aus 9.10.5 übereinstimmt und daß für  $U \Subset X$  offen und  $u : U \hookrightarrow X$  die Einbettung in  $H_{A \cap U}^{n-a}(U)$  gilt  $u^* \tau_A = \tau_{A \cap U}$ . Ein typisches Beispiel für eine Situation der hier beschriebenen Art ist der Fall einer glatten komplexen algebraischen Varietät  $V$  mit einer abgeschlossenen Untervarietät  $W \Subset V$  und den zugehörigen topologischen Räumen  $W(\mathbb{C}) \Subset V(\mathbb{C})$  mit der analytischen Topologie als  $A \Subset X$ , vergleiche [TG] 4.10.25.

**Übung 6.4.37 (Berechnung lokaler Schnittmultiplizitäten).** Seien  $A, B$  abgeschlossene Teilmengen von  $X := \mathbb{R}^n$  und  $a, b \in \mathbb{N}$  und  $\tau_A \in H_A^{n-a}(X)$  sowie  $\tau_B \in H_B^{n-b}(X)$  lokale Kohomologieklassen. Wir nehmen an, der Schnitt  $A \cap B = \{x\}$  sei ein einziger Punkt, und wollen  $\tau_A \cup \tau_B \in H_x^n(X)$  bestimmen. Gegeben eine kompakte Kugel  $K \subset X$  mit  $x \in K$  ist der Rückzug ein Isomorphismus  $H_x^n(X) \xrightarrow{\sim} H_K^n(X)$ . Wir können damit  $\tau_A$  ersetzen durch sein Bild in  $H_{A \cup K}^{n-a}(X)$  und  $\tau_B$  durch sein Bild in  $H_{B \cup K}^{n-b}(X)$ . Die Homotopieinvarianz der lokalen Kohomologie [TG] 4.5.16 zeigt nun, daß jede Abbildung  $\varphi : (X, K) \rightarrow (X, K)$ , die als Abbildung von Raumpaaren homotop ist zur Identität im Sinne von [TS] 2.1.10 und die außerhalb von  $K$  die Identität ist, die Klasse  $\tau_B \in H_{B \cup K}^{n-b}(X)$  festhält. Diese Klasse ist damit auch das Bild von  $\varphi^*(\tau_B) \in H_{\varphi^{-1}(B)}^{n-b}(X)$ . Bei geschickter Wahl von  $\varphi$  kann nun

$$\tau_A \cup \varphi^*(\tau_B) \in H_K^n(X)$$

leichter zu berechnen sein. Wenn wir etwa ein  $\varphi$  finden können, für das gilt  $A \cap \varphi^{-1}(B) = \emptyset$ , so folgern wir sofort  $\tau_A \cup \tau_B = \tau_A \cup \varphi^*(\tau_B) = 0$ . Im Fall der Fundamentalkozykel von Untervarietäten und ähnlich gelagerten Fällen wie in 6.4.36 dahingegen gilt es salopp gesprochen, mit  $\varphi$  „unser  $B$  ein bißchen zu verschieben, so daß aus dem einem Schnittpunkt  $x$  mehrere Schnittpunkte mit transversalem Schnitt werden, und diese Schnittpunkte müssen wir dann nach 6.4.30 nur noch mit geeigneten Vorzeichen zählen“. Im Fall von Untervarietäten einer glatten komplexen Varietät weiß man sogar zusätzlich, daß dann alle diese Vorzeichen  $+1$  sein müssen.

**Übung 6.4.38 (Zurückholen der lokalen Kohomologie mit sechs Funktoren).** Gegeben  $A \Subset X$  eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  und  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung und  $c = c_A : A \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung kennen wir aus 5.3.8 einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathcal{H}^q c_{A*} i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} H_A^q(X; \mathcal{F})$$



Gegeben  $B \subsetneq Y$  eine weitere abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums und  $j : B \hookrightarrow Y$  die Einbettung  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung mit  $f^{-1}(B) \subset A$  und  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ein Morphismus in  $\text{Der}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  alias ein Morphismus  $\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$  in  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  konstruieren wir einen Morphismus

$$\phi^{\otimes} : c_{B*}j^!\mathcal{G} \rightarrow c_{A*}i^!\mathcal{F}$$

in  $\text{Der}(\text{Ab})$  oder ganz pedantisch  $\text{Der}(\text{Ab}_{/\text{top}})$  unter Betrachtung des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B) & \xhookrightarrow{u} & A \xhookrightarrow{i} X \\ \downarrow f_B & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

als die Komposition

$$c_{B*}j^!\mathcal{G} \rightarrow c_{B*}j^!f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{B*}f_{B*}u^!i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{A*}u_*u^!i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{A*}u_!u^!i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{A*}i^!\mathcal{F}$$

eines von  $\phi$  induzierten Morphismus mit Basiswechsel, der Isotransformation  $u_! \xrightarrow{\sim} u_*$  und der Koeinheit der Adjunktion. Man zeige, daß dieser Morphismus  $\phi^{\otimes}$  im Fall von gewöhnlichen abelschen Garben  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  unser Zurückholen auf der lokalen Kohomologie aus [TG] 4.4.7 induziert, in Formeln also die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q c_{B*}j^!\mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}_B^q(Y; \mathcal{G}) \\ \downarrow \phi^{\otimes} & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q c_{A*}i^!\mathcal{F} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}_A^q(X; \mathcal{F}) \end{array}$$

Man zeige weiter für verknüpfbare Komorphismen  $\phi^{\otimes} \circ \psi^{\otimes} = (\psi \circ \phi)^{\otimes}$  und der Vollständigkeit halber auch  $\text{id}^{\otimes} = \text{id}$ .

**Übung 6.4.39 (Vorschub der relativen Homologie mit sechs Funktoren).** Sind in den Notationen der vorhergehenden Übung 6.4.38 alle beteiligten topologischen Räume *lesb*, so konstruiert man in derselben Weise für jeden Morphismus  $\varphi : f_!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  in  $\text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  einen Morphismus

$$\varphi_{\otimes} : c_{A!}i^*\mathcal{F} \rightarrow c_{B!}j^*\mathcal{G}$$

in  $\text{Der}(\text{Ab})$  oder ganz pedantisch  $\text{Der}(\text{Ab}_{/\text{top}})$  und zeigt  $\psi_{\otimes} \circ \varphi_{\otimes} = (\psi \circ \varphi)_{\otimes}$  und der Vollständigkeit halber auch  $\text{id}_{\otimes} = \text{id}$ . Man beachte, daß ein Morphismus  $\varphi : f_!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  nicht einem eigentlichen Opkomorphismus entspricht.

**Beispiel 6.4.40.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten derselben Dimension  $n$  mit diskreten Fasern, so ist  $f_{(!)}$  nach eigentlichem Basiswechsel ein exakter Funktor und induziert einen Morphismus  $f_!\omega_X \rightarrow \omega_Y$  oder

auch einfacher einen Morphismus  $\varphi : f_! \text{or}_X \rightarrow \text{or}_Y$ . Gegeben  $A \sqsubset X$  und  $B \sqsubset Y$  mit  $f^{-1}(B) \subset A$  entspricht die zugehörige Abbildung  $\varphi_{\otimes} : \Gamma_!(A; \text{or}_X) \rightarrow \Gamma_!(B; \text{or}_Y)$  unter unserem Isomorphismus [TS] 4.3.5 dem Vorschub

$$H_n(X, X \setminus A) \rightarrow H_n(Y, Y \setminus B)$$

Das ist seinerseits ein Spezialfall der Natürlichkeit des Vergleichsisomorphismus der relativen Homologie 6.7.29.

## 6.5 Schnittpaarung und Poincarédualität, ERWEITERT

6.5.1 (**Starke dualisierte Poincaré-Isomorphismen**). Seien  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit und  $G$  eine abelsche Gruppe und  $a : A \rightarrow \text{top}$  sowie  $c : X \rightarrow \text{top}$  die konstanten Abbildungen. Unter diesen Annahmen haben wir in der Garbenkohomologie Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_q^!(A; G) &= \mathcal{H}^{-q} a_* a^! G_{\text{top}} && \text{nach Definition 6.3.1} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} a_* i^! c^! G_{\text{top}} && \text{mit } c \circ i = a, \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} a_* i^! \text{or}_X(G)[m] && \text{mit 6.1.15,} \\ &\xrightarrow{\sim} H_A^{m-q}(X; \text{or}_X(G)) && \text{mit 5.3.8.} \end{aligned}$$

Ist zusätzlich  $X$  orientierbar und ein Isomorphismus  $G_X \xrightarrow{\sim} \text{or}_X(G)$  alias eine Orientierung ausgezeichnet, so können wir das nach 6.3.4 verlängern zu einem Isomorphismus, der **starken dualisierten Poincaré-Dualität**

$$H_q^!(A; G)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H_A^{m-q}(X; G)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H^{m-q}(X, X \setminus A; G)_{\text{sing}}$$

Ist  $A$  auch noch kompakt, so haben wir zusätzlich  $H_q(A; G)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H_q^!(A; G)_{\text{garb}}$ . Im Fall  $A = X$  erhalten wir die dualisierten Poincaré-Isomorphismen aus 9.10.10.

6.5.2 (**Starke Poincaré-Isomorphismen**). Seien  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit und  $G$  eine abelsche Gruppe und  $a : A \rightarrow \text{top}$  sowie  $c : X \rightarrow \text{top}$  die konstanten Abbildungen. Unter diesen Annahmen haben wir in der Garbenkohomologie natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_q^q(A; \text{or}_X(G)) &= \mathcal{H}^q a_! i^* \text{or}_X(G) && \text{nach den Definitionen,} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q a_! i^* c^! G_{\text{top}}[-n] && \text{mit 6.1.15,} \\ &\xrightarrow{\sim} H_{n-q}(X, X \setminus A; G)_{\text{sing}} && \text{mit 6.3.4.} \end{aligned}$$

Im Fall  $A = X$  erhalten wir unsere Poincaré-Isomorphismen aus 9.10.10. Im Fall  $X = \mathbb{R}^n$  erhalten wir die Alexander-Dualität aus [TG] 5.1.22. Gegeben eine

$n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  mit einer abgeschlossenen Teilmenge  $A \subsetneq X$  konstruieren wir in [TSF] 6.7.28 diesmal nur der Einfachheit der Notation halber ohne Koeffizienten sogar ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_!^q(X \setminus A; \text{or}_X) & \rightarrow & H_!^q(X; \text{or}_X) & \rightarrow & H_!^q(A; \text{or}_X) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ \dots & \rightarrow & H_{n-q}(X \setminus A) & \rightarrow & H_{n-q}X & \rightarrow & H_{n-q}(X, X \setminus A) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

mit den gewöhnlichen Poincaré-Isomorphismen in den beiden linken Vertikalen und dem starken Poincaré-Isomorphismus in der rechten Vertikalen. Im Fall  $q = 0$  spezialisiert er zu unserem Satz [TS] 4.3.5 über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten. Ebenso unmittelbar erhalten wir Proposition [TS] 3.3.9 über das Verschwinden der reduzierten Homologie des Komplements  $S^n \setminus A$  eines Hyperkubus  $A$  in einer Sphäre. Der Rückzug liefert ja offensichtlich Surjektionen  $H_!^q S^n \twoheadrightarrow H_!^q A$  für alle  $q, n$  und diese sind Isomorphismen im Fall  $q \neq n$  und haben im Fall  $q = n$  als Kern eine freie abelsche Gruppe vom Rang Eins. Es folgt  $H_q(S^n \setminus A) = 0$  für  $q \neq 0$  und  $H_0(S^n \setminus A) \cong \mathbb{Z}$  und folglich  $\check{H}_q(S^n \setminus A) = 0$  für alle  $q$ .

## 6.6 Wohin damit?

**6.6.1 (Trennkategorien von Raumpaaren).** Um unseren Trennfunktor der relativen singulären Kohomologie relativ zu einer offenen Teilmenge

$$H_{\text{sing}}^* : \text{Top}^{\circlearrowleft} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$$

aus [TSK] 4.2.10 in der Garbenkohomologie wiederzufinden, führen wir eine Variante  $\text{Top}^{\mathfrak{A}}$  unserer Trennkategorie  $\text{Top}^{\circlearrowleft}$  aus [TSK] 4.1.16 ein. Objekte sind Paare  $(X, A)$  mit  $A \subsetneq X$ . Trennungen  $(X, A) \rightarrow (Y_1, B_1) \wedge \dots \wedge (Y_r, B_r)$  sind Tupel von stetigen Abbildungen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  mit  $A \supset f_1^{-1}(B_1) \cap \dots \cap f_r^{-1}(B_r)$ . Das Bilden des Komplements  $(X, U) \mapsto (X, X \setminus U)$  ist dann ein Isomorphismus von Trennkategorien

$$\text{Top}^{\circlearrowleft} \xrightarrow{\sim} \text{Top}^{\mathfrak{A}}$$

Wir drehen in der Notation das Inklusionszeichen um, weil  $\text{Top}^{\mathfrak{A}}$  im Gegensatz zu  $\text{Top}^{\circlearrowleft}$  keine volle Untertrennkategorie der in [TSK] 4.1.16 erklärten Trennkategorie  $\text{Top}^{\subsetneq}$  der Raumpaare ist, sondern vielmehr eine volle Untertrennkategorie ihrer in offensichtlicher Weise erklärten Variante  $\text{Top}^{\supsetneq}$ .

**6.6.2 (Lokale Kohomologie als Hyperkohomologie der Lokalgarbe).** Unsere Beschreibung [TG] 4.4.5 der lokalen Kohomologie als Erweiterungsgruppe zusammen mit der Beschreibung 2.8.18 einer Erweiterungsgruppe als die Hyperkohomologie des entsprechenden Homkomplexes liefern für  $A \subsetneq X$  abgeschlossen

und  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung Isomorphismen

$$H_A^q(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{Ab}/X}^q(\mathbb{Z}_{ACX}, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathbb{Z}_{ACX}^\vee)$$

Wir vereinbaren die Notation  $\mathcal{L}_{ACX} := \mathbb{Z}_{ACX}^\vee$ , nennen diesen Komplex die **Lokalgarbe von  $A$  in  $X$**  und erhalten Isomorphismen

$$H_A^q(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{L}_{ACX})$$

6.6.3. Wir erinnern die Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  aus 1.2.9 und betrachten die dazu oppinverse Trennfaserung nach 1.6.4 und notieren sie

$$\text{Ab}_{/\text{Top}} := (\text{Ab}_{//\text{Top}})^{\text{otf}} \rightarrow \wedge \text{Top}$$

Trennungen  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r$  in  $\text{Ab}_{/\text{Top}}$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  in  $\wedge \text{Top}$  sind per definitionem Homomorphismen  $\mathcal{F} \rightarrow f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{G}_r$  in  $\text{Ab}/X$ . Wir betrachten nun den Trennfunktor  $\text{Top}^{\mathbb{A}} \rightarrow \text{Ab}_{/\text{Top}}$  mit  $(X, A) \mapsto \mathbb{Z}_X$ . Die Bilder der Trennungen in der Basis unter diesem Trennfunktor steigen ab zu Trennungen zwischen den Quotienten

$$\mathbb{Z}_{ACX} := i_* \mathbb{Z}_A = i_* i^* \mathbb{Z}_X$$

der Garben  $\mathbb{Z}_X$  mit  $i : A \hookrightarrow X$  der Einbettung und wir erhalten so einen weiteren Trennfunktor  $\text{Top}^{\mathbb{A}} \rightarrow \text{Ab}_{/\text{Top}}$  mit  $(X, A) \mapsto \mathbb{Z}_{ACX}$ . Die zugehörigen Morphismen

$$\mathbb{Z}_{ACX} \rightarrow f_1^* \mathbb{Z}_{B_1 \subset Y_1} \otimes \dots \otimes f_r^* \mathbb{Z}_{B_r \subset Y_r}$$

sind dieselben in  $\text{Ab}/X$  und  $\text{Der}/X$ , da alle beteiligten Garben freie Halme haben, und wir erhalten so einen Trennfunktor  $\text{Top}^{\mathbb{A}} \rightarrow (\text{Der}_{//\text{Top}})^{\text{otf}}$ . Wir erinnern nun unsere Lokalgarben

$$\mathcal{L}_{ACX} := (\mathbb{Z}_{ACX})^\vee = (\mathbb{Z}_{ACX} \rightrightarrows \mathbb{Z}_X) \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$$

aus 6.6.2. Dualisieren wir unseren Morphismus von eben und schalten davor die natürlichen Morphismen [TSK] 1.4.21 vom Tensorprodukt der Dualen zum Dualen des Tensorprodukts und die natürlichen Morphismen 1.5.13 vom Rückzug des Dualen zum Dualen des Rückzugs, so erhalten wir in  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  einen Morphismus

$$f_1^* \mathcal{L}_{B_1 \subset Y_1} \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{L}_{B_r \subset Y_r} \rightarrow \mathcal{L}_{ACX}$$

alias eine Trennung  $\mathcal{L}_{ACX} \rightarrow \mathcal{L}_{B_1 \subset Y_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_{B_r \subset Y_r}$  in  $\text{Der}_{//\text{Top}}$ . Wir erhalten so einigermaßen offensichtlich einen Trennfunktor  $\text{Top}^{\mathbb{A}} \rightarrow \text{Der}_{//\text{Top}}$ . Formal und in der angemessenen Allgemeinheit steht das in 1.6.9. Durch Nachschalten von

$\mathbb{H}$  und unsere Isomorphismen  $H_A^q(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{L}_{A \subset X})$  nach 6.6.2 erhalten wir daraus einen Trennfunktor

$$\text{Top}^{\mathbb{A}} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$$

mit  $(X, A) \mapsto H_A^*(X)$ . Wir nennen ihn den **Trennfunktor der lokalen Kohomologie**. Sein Analogon in der singulären Theorie kennen bereits aus [TSK] 4.2.10. Er beinhaltet das **cup-Produkt der lokalen Kohomologie**

$$\cup : H_A^*(X) \otimes H_B^*(X) \rightarrow H_{A \cap B}^*(X)$$

und die bereits aus [TG] 4.4.7 bekannten Rückzüge  $H^* f : H_B^*(Y) \rightarrow H_A^*(X)$  für  $f : X \rightarrow Y$  stetig mit  $A \supset f^{-1}(B)$  sowie das **externe Produkt der lokalen Kohomologie**

$$\times : H_A^p(X) \times H_B^q(Y) \rightarrow H_{A \times B}^{p+q}(X \times Y)$$

Er beinhaltet außerdem verschiedene Verträglichkeiten zwischen diesen Konstruktionen. Quasi per definitionem ist  $H_X^*(X) = H^*(X)$  die übliche Garbenkohomologie und wir haben  $H_\emptyset^*(X) = 0$ . Das zeigt zum Beispiel, daß das cup-Produkt von zwei Klassen in  $H^*(X)$  verschwinden muß, wenn unsere Klassen von lokalen Kohomologiegruppen  $H_A^p(X)$  und  $H_B^q(X)$  herkommen mit  $A \cap B = \emptyset$ .

6.6.4. Nach [TG] 4.8.16 haben wir für jeden topologischen Raum  $X$  natürliche Isomorphismen  $\text{colf}_K H_K^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H_1^q(X; \mathcal{F})$  mit dem Kolimes über alle abgeschlossenen Kompakta  $K \triangleleft X$ . Insbesondere macht unser cup-Produkt der lokalen Kohomologie die kompakte Kohomologie von  $X$  zu einem Modul über dem Kohomologiering. Wir notieren auch diese Operation  $\cup$  und bezeichnen die zugehörige Abbildung  $H^p(X) \times H_1^q(X) \rightarrow H_1^{p+q}(X)$  als **cup-Produkt**.

6.6.5. Im Formalismus der zwei Funktoren liefert für jeden topologischen Raum  $X$  und alle  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  der ausgezeichnete Isomorphismus  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  Morphismen  $\text{Der}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathbb{Z}_X[q]) \rightarrow \text{Der}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}[q])$  und so eine Operation von  $H^* X$  auf  $\mathbb{H}^*(X; \mathcal{F})$  und  $\mathbb{H}_1^*(X; \mathcal{F})$ .

## Übungen

*Übung 6.6.6.* Unser Schmelzfunktor der topologischen Orientierungsmenge

$$\text{or}^{\text{top}} : (\gamma \text{Modf}_{\mathbb{R}})^{\times} \rightarrow \text{Par}$$

aus [TSK] 4.1.17 vom banalen Schmelzgruppoid der endlichdimensionalen reellen Vektorräume in die Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten, der jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  die Parität seiner Dimension erweitert um die Menge der beiden Erzeuger der totalen relativen singulären Homologie  $H(V, V \setminus 0)$  zuordnet, ist isomorph durch Übergang zur jeweiligen Koordinatenfunktion gefolgt von den Isomorphismen  $H^*(V, V \setminus 0) \xrightarrow{\sim} H_{\{0\}}^*(V) \xrightarrow{\sim} H_1^*(V)$  aus

[TG] 5.1.20 und [TG] 4.8.16 zum vielleicht noch natürlicheren Schmelzfunktor, der  $V$  die Parität seiner Dimension erweitert um die Menge der beiden Erzeuger von  $H_1^*(V)$  zuordnet. Von nun an betrachten wir diesen Schmelzfunktor als unsere „Hauptinkarnation“ der **topologischen Orientierungsmenge** und nennen die Menge der beiden Erzeuger von  $H_1^*(V)$  im folgenden oft kürzer die **Orientierungsmenge**  $\text{or}^{\text{top}}(V)$  eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$ . Wir erklären ein ausgezeichnetes Element

$$\tau \in \text{or}^{\text{top}}(\mathbb{R})$$

alias einen ausgezeichneten Erzeuger  $\tau \in H_1^1(\mathbb{R})$  als dasjenige Element, das unter der Komposition von natürlichen Isomorphismen von Garbenkohomologien  $H^0(\mathbb{R} \setminus 0)/H^0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_{\{0\}}^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_1^1(\mathbb{R})$  herkommt vom Schnitt mit Wert Eins auf  $\mathbb{R}_{>0}$  und Wert Null auf  $\mathbb{R}_{<0}$  der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R} \setminus 0$ . Das ist auch genau unser  $\tau^1$  aus [TG] 4.9.19. Wenn ich richtig gerechnet habe, ist das auch das Bild unseres ausgezeichneten Erzeugers  $\tau \in H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus 0)$  aus [TS] ?? unter den obigen natürlichen Isomorphismen und dem Anwenden des Vergleichs-Isomorphismus von der singulären Kohomologie zur Garbenkohomologie.

*Übung 6.6.7.* Gegeben topologische Räume  $X, Y$  zusammen mit der Einbettung  $i : A \hookrightarrow X$  einer abgeschlossenen Teilmenge liefert jeder Morphismus  $\alpha : i_* \mathbb{Z}_A \rightarrow \mathbb{Z}_X[p]$  durch Rückzug längs der Projektion einen Morphismus  $\alpha_Y : i_* \mathbb{Z}_{A \times Y} \rightarrow \mathbb{Z}_{X \times Y}[p]$ . Ist  $j : B \hookrightarrow Y$  auch eine abgeschlossene Teilmenge, so liefern die Konstruktionen aus 6.4.12 angewandt auf  $\alpha_Y$  und  $\beta_X$  eine Abbildung

$$H_A^p(X) \times H_B^q(Y) \rightarrow H_{A \times B}^{p+q}(X \times Y)$$

Wir nennen sie das **externe Produkt der lokalen Kohomologie** und notieren unsere Abbildung  $\times$ . Im Fall  $A = X$  und  $B = Y$  spezialisiert sie zum Kreuzprodukt der Garbenkohomologie ?? und im Fall  $X = Y$  erhalten wir durch Nachschalten des Rückzugs auf die Diagonale unser Cup-Produkt der lokalen Kohomologie 6.4.12.

*Übung 6.6.8.* Gegeben topologische Räume mit abgeschlossenen Teilmengen  $A, B \subset X$  und  $C, D \subset Y$  zeige man die Kommutativität bis auf das Vorzeichen  $(-1)^{qr}$  des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_A^p(X) \times H_B^q(X) \times H_C^r(Y) \times H_D^s(Y) & \rightarrow & H_{A \cap B}^{p+q}(X) \times H_{C \cap D}^{r+s}(Y) \\ & \downarrow & \downarrow \\ H_{A \times C}^{p+r}(X \times Y) \times H_{B \times D}^{q+s}(X \times Y) & \rightarrow & H_{(A \cap B) \times (C \cap D)}^{p+q+r+s}(X \times Y) \end{array}$$

aus externen und internen Produkten der lokalen Kohomologie.

*Übung 6.6.9.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $E$  und Teilräume  $A, B \subset E$  der Kodimensionen  $p, q$  mit  $A + B = E$  liefert das cup-Produkt der lokalen Kohomologie einen Isomorphismus

$$H_A^p(E) \otimes H_B^q(E) \xrightarrow{\sim} H_{A \cap B}^{p+q}(E)$$

Hinweis: Man ziehe sich mit Hilfe von Übung 6.6.8 auf den Fall  $\dim E = 1$  zurück.

*Übung 6.6.10.* Gegeben endlichdimensionale reelle Vektorräume  $A \subset E$  mit jeweils einer topologischen Orientierung erklären wir wie in [TS] ?? oder [LA1] 6.5.17 die Quotientenorientierung auf dem Quotienten  $E/A$ . Für  $p = \text{codim}(A \subset E)$  liefert der zugehörige Erzeuger von  $H_1^p(E/A)$  durch Übergang unter  $H_1^p(E/A) \xleftarrow{\sim} H_{\{0\}}^p(E/A)$  und Rückzug dann einen ausgezeichneten Erzeuger von  $H_A^p(E)$ . Wir nennen ihn den **durch die Orientierungen von  $A$  und  $E$  bestimmten Erzeuger**. Für  $A = \mathbb{R}^{n-p} \times 0^p \subset E = \mathbb{R}^n$  mit den Standardorientierungen  $\tau^{\times(n-p)}$  beziehungsweise  $\tau^{\times n}$  entspricht die Quotientenorientierung unter dem hoffentlich offensichtlichen Isomorphismus  $E/A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^p$  der durch  $\tau^{\times p}$  gegebenen Standardorientierung auf  $\mathbb{R}^p$  und unser ausgezeichnete Erzeuger von  $H_A^p(E)$  ergibt sich zu  $1^{\times(n-p)} \times \tau^{\times p}$  für  $1 \in H_{\mathbb{R}}^0(\mathbb{R}) = H^0(\mathbb{R})$  der Standarderzeuger.

*Übung 6.6.11.* Gegeben ein endlichdimensionaler orientierter reeller Vektorraum  $E$  und darin ein angeordnetes Paar  $(A, B)$  aus zwei orientierten Teilräumen  $A, B \subset E$  mit  $A + B = E$  erklären wir auf ihrem Schnitt  $A \cap B$  die **Schnittorientierung** dadurch, daß wir die Quotientenorientierung aus  $E/A$  aus [LA1] 6.5.17 vermittels des Isomorphismus  $B/(A \cap B) \xrightarrow{\sim} E/A$  auf den Definitionsbereich dieses Isomorphismus übertragen und dann in Bezug auf die kurze exakte Sequenz

$$A \cap B \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/(A \cap B)$$

die im Sinne von [LA1] 6.5.17 mit den beiden auf dem zweiten und dritten Raum bereits gegebenen Orientierungen verträgliche Orientierung auf  $A \cap B$  wählen. Ist etwa  $E = \mathbb{R}^n$  und sind  $A = \mathbb{R}^{n-p} \times 0^p$  sowie  $B = 0^q \times \mathbb{R}^{n-q}$  jeweils mit den Standardorientierungen versehen, so ist die Schnittorientierung die Standardorientierung auf  $0^q \times \mathbb{R}^{n-p-q} \times 0^p$ .

*Übung 6.6.12 (Schnittorientierung und Geometrie).* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $E$  und Teilräume  $A, B \subset E$  der Kodimensionen  $p, q$  mit  $A + B = E$  und liefern Orientierungen auf  $A, B$  und  $E$  nach 6.6.10 ausgezeichnete Erzeuger von  $H_A^p(E)$  und  $H_B^q(E)$  und somit als deren cup-Produkt einen ausgezeichneten Erzeuger von  $H_{A \cap B}^{p+q}(E)$ , der seinerseits zu einer ausgezeichneten Orientierung von  $A \cap B$  gehört. Wir behaupten, daß das genau die Schnittorientierung aus 6.6.11 ist. Diese Behauptung müssen wir nur in genügend Beispielen prüfen. Ist  $E = \mathbb{R}^n$  und sind  $A = \mathbb{R}^{n-p} \times 0^p$  sowie  $B = 0^q \times \mathbb{R}^{n-q}$  jeweils mit

den Standardorientierungen versehen, so werden unsere Erzeuger nach 6.6.10 gegeben durch  $1^{\times(n-p)} \times \tau^{\times p}$  sowie  $(-1)^{q(n-q)} \tau^{\times q} \times 1^{\times(n-q)}$  und wir erhalten nach 6.6.8 als Produkt

$$(-1)^{q(n-q)} (-1)^{pq} \tau^{\times q} \times 1^{\times(n-p-q)} \times \tau^{\times p}$$

Zur Standardorientierung von  $A \cap B = 0^q \times \mathbb{R}^{n-p-q} \times 0^p$  gehört andererseits nach 6.6.10 der Erzeuger  $(-1)^{q(n-p-q)} \tau^{\times q} \times 1^{\times(n-p-q)} \times \tau^{\times p}$  der lokalen Kohomologie, und der stimmt mit dem eben berechneten Produkt überein. Das aber war gerade zu zeigen.

## 6.7 Vergleich mit der singulären Theorie

**6.7.1 (Singuläre Kohomologie als Hyperkohomologie).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  besteht sein Kogrenzkomplex  $\mathcal{G}_X^*$  aus welchen Garben und ist offensichtlich beschränkt gegen die Pfeile. Die offensichtlichen Quasiisomorphismen  $S^*X \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\text{Ket}}(SX) \xleftarrow{\sim} \mathbb{D}_{\text{Ket}}(GX)$  liefern mithin Isomorphismen

$$H^q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{G}_X^*)$$

**6.7.2 (Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie).** Gegeben ein lokal singulärzyklischer topologischer Raum  $X$  induziert die Augmentation einen Quasiisomorphismus  $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_X^*$ . Die Isomorphismen aus 6.7.1 liefern für lokal singulärzyklisches  $X$  mithin Isomorphismen

$$H^q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

zwischen der singulären Kohomologie und der Garbenkohomologie.

**6.7.3 (Relative singuläre Kohomologie als Hyperkohomologie).** Gegeben ein topologischer Raum mit einer offenen Teilmenge  $U \Subset X$  betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^*X & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_{\text{Ket}}(SX) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{D}_{\text{Ket}}(GX) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^*U & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_{\text{Ket}}(SU) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{D}_{\text{Ket}}(GU) \end{array}$$

mit vertikalen Surjektionen und horizontalen Quasiisomorphismen. Für  $C := X \setminus U$  erhalten wir auf den Kernen der Vertikalen eine Sequenz von Quasiisomorphismen

$$S^*(X, X \setminus C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\text{Ket}}(S(X, X \setminus C)) \xleftarrow{\sim} \Gamma_C \mathcal{G}_X^*$$

Durch Übergang zur Kohomologie erhalten wir, da welche Garben nach [TG] 4.4.12 entfaltet sind für  $\Gamma_C$ , Isomorphismen

$$H^q(X, X \setminus C)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_C^q(X; \mathcal{G}_X^*)$$



6.7.4 (**Relative singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie**). Gegeben ein lokal singulärzyklischer topologischer Raum  $X$  induziert die Augmentation einen Quasiisomorphismus  $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_X^*$ . Die Isomorphismen aus 6.7.3 liefern für  $C \not\subset X$  mithin Isomorphismen

$$H^q(X, X \setminus C)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H_C^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

zwischen der relativen singulären Kohomologie und der Garbenkohomologie mit Träger in  $C$ .

6.7.5 (**Singuläre kompakte Kohomologie als Hyperkohomologie**). Gegeben ein Hausdorffraum  $X$  ist jedes Kompaktum  $K \subset X$  abgeschlossen und durch Übergang zum filtrierenden Kolimes über alle Kompakta in 6.7.3 erhalten wir Quasiisomorphismen

$$S_!^* X \xrightarrow{\sim} \text{colf}_K \mathbb{D}_{\text{Ket}}(S(X, X \setminus K)) \xleftarrow{\sim} \Gamma_! \mathcal{G}_X^*$$

Die Exaktheit filtrierender Kolimites zeigt mit [TG] 4.4.12 auch, daß welche Garben auf Hausdorffräumen  $\Gamma_!$ -entfaltet sind. Unsere Quasiisomorphismen induzieren also für jeden Hausdorffraum  $X$  einen Isomorphismus

$$H_!^q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_!^q(X; \mathcal{G}_X^*)$$

6.7.6 (**Singuläre kompakte Kohomologie als Garbenkohomologie**). Gegeben ein lokal singulärzyklischer topologischer Raum  $X$  induziert die Augmentation einen Quasiisomorphismus  $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_X^*$ . Ist unser Raum zusätzlich Hausdorff, so liefern die Isomorphismen aus 6.7.3 mithin einen Isomorphismus

$$H_!^q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H_!^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

zwischen der singulären kompakten Kohomologie und der kompakten Garbenkohomologie.

6.7.7. Um Vergleichsisomorphismen zwischen der singulären Homologie und ihren garbenkohomologischen Analoga zu konstruieren, holen wir weiter aus und konstruieren eine Realisierung der dualisierenden Garbe als „Grenzkomplex“. Gegeben ein Raumpaars  $(X, A)$  erklären wir zunächst den Komplex der **relativen Grenzketten**  $G(X, A)$  in Verallgemeinerung von [TG] 5.1.8 als den Kolimes in Bezug auf die Unterteilungsoperatoren

$$G(X, A) := \text{colf} (S(X, A) \xrightarrow{U} S(X, A) \xrightarrow{U} \dots)$$

Die Exaktheit filtrierender Kolimites liefert eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$G(A) \hookrightarrow G(X) \twoheadrightarrow G(X, A)$$

**Satz 6.7.8 (Ausschneidung für Grenzketten).** Seien  $(X, A)$  ein Raumpaar und  $L \subset A$  eine Teilmenge, deren Abschluß im Inneren von  $A$  liegt, in Formeln  $\bar{L} \subset A^\circ$ . So liefert die Einbettung  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf den Komplexen von relativen Grenzketten

$$G(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\sim} G(X, A)$$

6.7.9. Ein Vorteil der Grenzketten besteht darin, daß die Ausschneidungsisomorphismen hier bereits auf Kettenniveau existieren und nicht erst in der Homologie. Die Arbeit mit Grenzketten benötigt jedoch mehr Kenntnisse in homologischer Algebra, da ich nicht weiß, ob sie einen Komplex von freien abelschen Gruppen bilden. Ich erwarte eher das Gegenteil.

*Beweis.* Wie beim Beweis der Ausschneidung [TS] 2.4.10 betrachten wir die Überdeckung  $X = A \cup (X \setminus L)$ , geben ihr den Namen  $\mathcal{V}$  und bilden ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} S(A \setminus L) & \hookrightarrow & SA \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^\mathcal{V} X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X \setminus L) & \hookrightarrow & SX \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & SX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X \setminus L, A \setminus L) & \rightarrow & S(X, A) & \rightarrow & SX/S^\mathcal{V} X \end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die beiden oberen horizontalen Inklusionen die „diagonalen“ Einbettungen  $z \mapsto (z, z)$  sein sollen, und die folgenden Surjektionen die Differenzen  $(x, y) \mapsto x - y$ . Nach dem Neunerlemma ist die untere Horizontale dann auch exakt. Jetzt gehen wir zum filtrierenden Kolimes unter den Unterteilungsoperatoren über und müssen nur zeigen, daß dieser Kolimes bei  $SX/S^\mathcal{V} X$  verschwindet. Das aber haben wir bereits in [TG] 5.1.10 gezeigt.  $\square$

6.7.10. Für jeden topologischen Raum  $X$  erklären wir in Anlehnung an [TS] 7.3.9 den Komplex der **lokalendlichen Grenzketten** als den inversen Limes über alle Kompakta  $K \subset X$  der Grenzketten relativ zu ihrem Komplement

$$G^! X := \lim_{\leftarrow K} G(X, X \setminus K)$$

Gegeben ein Hausdorffraum mit einer offenen Teilmenge  $U \Subset X$  induzieren die Ausschneidungsisomorphismen  $G(U, U \setminus K) \xrightarrow{\sim} G(X, X \setminus K)$  für Grenzketten im Fall  $K \subset U$  kompakt, die wir in 6.7.8 hergeleitet hatten, Homomorphismen  $G^! X \rightarrow G^! U$  vom „längeren Limes zum kürzeren Limes“. Wir nennen sie die **Restriktionsabbildungen**.

**Definition 6.7.11.** Unter einer **lokalen Prägarbe** auf einem topologischen Raum  $X$  verstehen wir eine Prägarbe von Mengen  $\mathcal{C}$  derart, daß für jede Familie  $\mathcal{U}$  von offenen Teilmengen von  $X$  mit Vereinigung  $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  die Restriktionsabbildungen eine Injektion

$$\mathcal{C}(V) \hookrightarrow \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}(U)$$

liefern, daß also „Schnitte durch ihre Einschränkungen auf die Mengen einer offenen Überdeckung bereits eindeutig festgelegt werden“. Setzen wir  $\mathcal{U} = \emptyset$ , so erkennen wir insbesondere, daß für jede abelsche lokale Prägarbe gilt  $\mathcal{C}(\emptyset) = 0$ .

**Proposition 6.7.12 (Lokalendliche Grenzketten als Garbe).** *Auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  bilden für jedes  $q$  die lokalendlichen Grenzketten  $U \mapsto G_q^!(U)$  für  $U \Subset X$  mit den in 6.7.10 erklärten Restriktionsabbildungen eine Garbe.*

*Beweis.* Wir beginnen mit endlich vielen offenen Teilmengen  $V_1, \dots, V_r$  eines beliebigen Raums  $X$  und bilden die in folgender Darstellung vertikal notierte kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} S(\bigcap V_i) & \hookrightarrow & \bigoplus_i S V_i & \rightarrow & \bigoplus_{i < j} S^{\mathcal{V}}(V_i \cup V_j) & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ S X & \hookrightarrow & \bigoplus_i S X & \rightarrow & \bigoplus_{i < j} S X & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ S(X, \bigcap V_i) & \hookrightarrow & \bigoplus_i S(X, V_i) & \rightarrow & \bigoplus_{i < j} S X / S^{\mathcal{V}}(V_i \cup V_j) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

mit der Notation  $\mathcal{V}$  für die Überdeckung durch die  $V_i$  und  $S^{\mathcal{V}}$  die entsprechenden feinen Ketten. Beide oberen Zeilen sind exakt, also gilt dasselbe auch für die untere Zeile. Gegeben eine offene Überdeckung  $\mathcal{V}$  einer Teilmenge  $A \subset X$  zeigt nun die kurze exakte Sequenz  $SA/S^{\mathcal{V}}A \hookrightarrow SX/S^{\mathcal{V}}A \rightarrow SX/SA$  mit [TG] 5.1.10, daß die zweite Abbildung im Kolimes unter iterierter Unterteilung zu einem Isomorphismus  $\operatorname{colf} SX/S^{\mathcal{V}}A \xrightarrow{\sim} \operatorname{colf} SX/SA$  wird. So erhalten wir aus der Exaktheit der unteren Zeile unseres Diagramms im Kolimes unter iterierter Unterteilung die Exaktheit der Sequenz von relativen Grenzketten

$$G(X, \bigcap V_i) \hookrightarrow \bigoplus_i G(X, V_i) \rightarrow \bigoplus_{i < j} G(X, V_i \cup V_j) \rightarrow \dots$$

Sei nun  $X$  Hausdorff. Gegeben endlich viele Kompakta  $K_1, \dots, K_r \subset X$  mit Vereinigung  $K$  folgt, daß wir mit den natürlichen Abbildungen eine linksexakte Sequenz

$$G(X, X \setminus K) \hookrightarrow \bigoplus_i G(X, X \setminus K_i) \rightarrow \bigoplus_{i < j} G(X, X \setminus (K_i \cap K_j))$$

erhalten. Sei nun  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  eine offene Überdeckung. Ist  $a \in G^!X$  von Null verschieden, so gibt es  $K \subset X$  kompakt derart, daß das Bild von  $a$  in  $G(X, X \setminus K)$  nicht Null ist. Weiter gibt es  $U_1, \dots, U_r \in \mathcal{U}$ , die  $K$  überdecken, und nach [TS] 7.2.7 gibt es für  $X$  lokal kompakt auch Kompakta  $K_i \subset U_i$  mit Vereinigungsmenge  $K$ . Nach unserer linksexakten Sequenz kann  $a$  auch nicht in allen  $G(U_i, U_i \setminus K_i) \xrightarrow{\sim} G(X, X \setminus K_i)$  auf Null abgebildet werden, also erst recht nicht in allen  $G^!U_i$ . Das zeigt bereits, daß die Prägarbe der lokalendlichen Grenzketten lokal ist. Nun gilt es noch, eine Familie von zusammenpassenden  $a_U \in G^!U$  für  $U \in \mathcal{U}$  zu einem  $a \in G^!X$  zu verkleben. Sie läßt sich aber nach dem Vorhergehenden für jedes Kompaktum  $K \subset X$  jeweils auf genau eine Weise zu einem Element von  $G(X, X \setminus K)$  verkleben und diese Elemente bilden dann zusammen die gesuchte Verklebung im inversen Limes.  $\square$

**6.7.13 (Umindizierung der Grenzkettengarben).** Die Garbe der lokalendlichen Grenzketten vom Grad  $q$  auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  nenne ich die  **$q$ -te Grenzkettengarbe**

$$\mathcal{G}_{q,X}^! : U \mapsto G_q^!(U)$$

Das Differential geht dabei vom Grad  $q$  zum Grad  $q - 1$  und die Grade werden als untere Indizes notiert. Es ist für das folgende günstiger, die Grade als obere Indizes zu notieren und mit  $(-1)$  zu multiplizieren, also  $\mathcal{G}_X^{q,!} := \mathcal{G}_{-q,X}^!$  zu setzen. So erhalten wir einen Komplex mit Differentialen in Richtung wachsender oberer Indizes, der aus dem Negativen kommt und im Grad Null endet. Den Komplex dieser Garben nenne ich den **Komplex der Grenzkettengarben** oder kurz den **Grenzkomplex** und notiere ihn

$$\mathcal{G}_X^!$$

Unsere Konstruktionen liefern für jede offene Einbettung  $j : U \hookrightarrow X$  einen Isomorphismus  $\mathcal{G}_U^! \xrightarrow{\sim} j^{(*)}\mathcal{G}_X^!$ .

**Lemma 6.7.14.** *Die Grenzkettengarben lokal kompakter Hausdorffräume sind kompaktweich.*

*Beweis.* Jeder Schnitt einer abelschen Garbe auf einem relativ Hausdorffschen Kompaktum  $K \subset X$  läßt sich auf eine offene Umgebung  $U \ni X$  desselben fortsetzen. Wir finden ein Kompaktum  $L$  mit  $K \subset L^\circ \subset L \subset U$  und unsere Fortsetzung liefert ein  $s \in G(U, U \setminus L)$ , für das wir einen Repräsentanten  $\tilde{s} \in GU$  finden. Dieser hinwiederum liefert uns dann die gewünschte globale Fortsetzung unseres auf  $K$  definierten Schnittes.  $\square$

**6.7.15 (Lokalendliche singuläre Homologie durch Grenzketten).** Ich erinnere an die lokalendliche Homologie aus [TS] 7.3.2. Gegeben ein abzählbar basierter

lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  können wir in der Menge aller seiner Kompakta eine konfinale Folge alias ein konfinales abzählbares Teilsystem finden. Nach [TS] 7.1.52 induzieren dann die offensichtlichen natürlichen Kettenabbildungen  $S^!X \rightarrow G^!X$  auf der Homologie Isomorphismen

$$H_q^!(X)_{\text{sing}} = \mathcal{H}_q S^!X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q G^!X$$

Um [TS] 7.1.52 anzuwenden zu dürfen, bemerken wir, daß für Kompakta  $K \subset L \subset X$  die natürlichen Abbildungen Surjektionen  $S_q(X, X \setminus L) \twoheadrightarrow S_q(X, X \setminus K)$  und dann auch Surjektionen  $G_q(X, X \setminus L) \twoheadrightarrow G_q(X, X \setminus K)$  liefern.

**6.7.16 (Offener Rückzug der lokalendlichen singulären Homologie).** Gegeben  $j : U \hookrightarrow Y$  eine offene Einbettung abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffräume induzieren die Restriktionsabbildungen 6.7.10 für lokalendliche Grenzketten mittels der in 6.7.15 erklärten Isomorphismen Abbildungen, den **offenen Rückzug**

$$H_q^!(X)_{\text{sing}} \rightarrow H_q^!(U)_{\text{sing}}$$

**6.7.17 (Lokalendliche singuläre Homologie als Hyperkohomologie).** Gegeben ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  mit  $\Gamma : \text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}$  von endlicher homologischer Dimension konstruieren wir nun einen Isomorphismus

$$H_q^!(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!)$$

zwischen seiner singulären lokalendlichen Homologie und der Hyperkohomologie des Grenzkomplexes. Wir erinnern dazu den Isomorphismus  $H_q^!(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q}\Gamma(X; \mathcal{G}_X^!)$  aus 6.7.15. Da der Grenzkomplex  $\mathcal{G}_X^!$  nach 6.7.14 aus kompaktheichen und damit nach 6.1.3 sogar aus weichen Garben besteht, liefert die Annahme endlicher homologischer Dimension mit [TD] 3.6.4 einen Isomorphismus  $\mathcal{H}^{-q}\Gamma(X; \mathcal{G}_X^!) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!)$ . Der gesuchte Isomorphismus ergibt sich als deren Verknüpfung. Ist zusätzlich  $j : U \hookrightarrow X$  eine offene Einbettung mit  $j_* : \text{Ab}/_U \rightarrow \text{Ab}/_X$  von endlicher homologischer Dimension, so kommutiert offensichtlich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q^!(X)_{\text{sing}} & \longrightarrow & \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q^!(U)_{\text{sing}} & \longrightarrow & \mathbb{H}^{-q}(U; \mathcal{G}_U^!) \end{array}$$

mit den von unseren Vergleichsisomorphismen induzierten Horizontalen und dem offenen Rückzug 6.7.16 in der linken Vertikale und der vom Isomorphismus  $\mathcal{G}_U^! \xrightarrow{\sim} j^* \mathcal{G}_X^!$  aus 6.7.13 mittels der Sequenz von ansonsten offensichtlichen Morphismen in der derivierten Kategorie

$$\text{fin}_{X^*} \mathcal{G}_X^! \rightarrow \text{fin}_{X^*} j_* j^* \mathcal{G}_X^! \rightarrow \text{fin}_{X^*} j_* \mathcal{G}_U^! \xrightarrow{\sim} \text{fin}_{U^*} \mathcal{G}_U^!$$

durch Anwenden von  $\mathcal{H}^q$  induzierten rechten Vertikalen.

**Lemma 6.7.18 (Kompakte Schnitte von Grenzkettengarben).** *Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  liefern die offensichtlichen Abbildungen einen Isomorphismus*

$$GX \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(X; \mathcal{G}_X^!)$$

*zwischen dem Komplex seiner Grenzketten und dem Komplex der Schnitte mit kompaktem Träger seiner Grenzkettengarben.*

*Beweis.* Die Injektivität unserer Abbildung scheint mir offensichtlich. Es bleibt, deren Surjektivität zu zeigen. Ein Schnitt  $s \in \Gamma(X; \mathcal{G}_X^!)$  mit Träger in einem Kompaktum  $L \subset X$  ist nun per definitionem eine verträgliche Familie von Elementen  $s_K \in G(X, X \setminus K)$  für  $K \subset X$  kompakt mit  $s_K = 0$  falls  $K \cap L = \emptyset$ . Für unser  $L$  finden wir nun sicher  $A, B, C \subset X$  kompakt mit  $L \subset A^\circ \subset A \subset B^\circ \subset B \subset C^\circ$  und dann für unser  $s$  einen Repräsentanten  $\tilde{s}_C \in G(X)$  von  $s_C \in G(X, X \setminus C)$ . Da nun gilt  $\tilde{s}_C \mapsto s_R = 0$  für  $R := B \setminus A^\circ$ , finden wir eine Darstellung  $\tilde{s}_C = t + r$  mit  $t \in G(A^\circ)$  und  $r \in G(X \setminus B)$ . Es reicht nun zu zeigen, daß gilt  $t \mapsto s_K$  für alle  $K \subset X$  kompakt. Das ist richtig für  $K = K_1 \subset B^\circ$  nach Konstruktion. Es ist auch richtig für  $K = K_2$  mit der Eigenschaft  $K \cap A = \emptyset$ , dann liefern beide Seiten eben Null. Gilt es für Kompakta  $K_1$  und  $K_2$ , so folgt es für deren Vereinigung wegen der kurzen exakten Sequenz

$$G(X, X \setminus (K_1 \cup K_2)) \hookrightarrow G(X, X \setminus K_1) \oplus G(X, X \setminus K_2) \twoheadrightarrow G(X, X \setminus (K_1 \cap K_2))$$

Da sich aber nun jedes Kompaktum  $K \subset X$  schreiben läßt als  $K_1 \cup K_2$  mit  $K_1 \subset B^\circ$  und  $K_2 \subset X \setminus A$ , folgt die Behauptung.  $\square$

**6.7.19 (Singuläre Homologie als Hyperkohomologie).** Gegeben ein lesb-Raum  $X$  konstruieren wir nun einen Isomorphismus

$$H_q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_1^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!)$$

zwischen seiner singulären Homologie und der kompakten Hyperkohomologie seines Grenzkomplexes. Wir finden Isomorphismen

$$GX \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} \Gamma_!(X; \mathcal{G}_X^!) \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} \text{fin}_{X,(!)} \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} \text{fin}_{X,!} \mathcal{G}_X^!$$

mit Lemma 6.7.18 und unseren Erkenntnissen zum unbeschränkten Derivieren linksexakter Funktoren endlicher homologischer Dimension [TD] 3.6.4. Wenden wir darauf  $\mathcal{H}^{-q}$  an, so ergibt sich der gesuchte Isomorphismus.

**6.7.20 (Morphismen aus Schreivorschüben kompaktweicher Garben).** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von lokal kompakten Hausdorffräumen

und eine kompaktweiche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  ist auch  $f_{(!)}\mathcal{F}$  kompaktweich nach 5.2.8 und für  $V \Subset Y$  liefert Basiswechsel 4.1.16 einen ausgezeichneten Isomorphismus  $\Gamma_!(V; f_{(!)}\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(f^{-1}(V); \mathcal{F})$ . Ein Morphismus  $\varphi : f_{(!)}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  in eine Garbe  $\mathcal{G} \in \text{Ab}/_Y$  ist also nach [TG] 4.8.23 dasselbe wie die Vorgabe einer Familie von Gruppenhomomorphismen

$$\varphi_V : \Gamma_!(f^{-1}(V); \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_!(V; \mathcal{G})$$

für  $V \Subset Y$ , die verträglich sind mit den Ausdehnungen durch Null. Man beachte, daß wir hier nicht unsere eigentlichen Opkomorphismen alias Schreimorphismen über  $f$  aus [TG] 6.4.4 beschreiben, die ja vielmehr Garbenhomomorphismen  $\mathcal{G} \rightarrow f_{(!)}\mathcal{F}$  entsprechen. Ein Student mag prüfen, daß wir für kompaktweiche Garben auf lokal kompakten Hausdorffräumen die oppinvertierte Kofaserung zur Eigopkofaserung beschrieben haben, die wir im Fall étaler separierter Morphismen bereits in [TG] 8.4.9 mit der Garbenfaserung identifiziert hatten.

**6.7.21 (Grenzkomplexvorschub).** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von lokal kompakten Hausdorffräumen erklären wir einen ausgezeichneten Morphismus von Komplexen

$$\text{gkv} = \text{gkv}_f : f_{(!)}\mathcal{G}_X^! \rightarrow \mathcal{G}_Y^!$$

durch die Vorschrift, daß er unter der Beschreibung von Morphismen durch kompakte Schnitte aus 6.7.20 und der Beschreibung der kompakten Schnitte unserer Grenzkettengarben aus 6.7.18 der Gesamtheit der offensichtlichen Abbildungen  $G(f^{-1}(V)) \rightarrow G(V)$  für  $V \Subset Y$  entspricht. Wir nennen diesen Morphismus den **Grenzkomplexvorschub**. Sind unsere Räume zusätzlich homologisch kompaktendlich oder ist auch nur  $f_{(!)}$  von endlicher homologischer Dimension, so induziert unser Morphismus einen Morphismus

$$\text{gkv} = \text{gkv}_f : f_!\mathcal{G}_X^! \rightarrow_{\text{Der}} \mathcal{G}_Y^!$$

Ist  $f$  eine offene Einbettung, so prüft man leicht, daß das genau der Morphismus ist, der unter der Adjunktion unserem Isomorphismus  $\mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim} f^{(*)}\mathcal{G}_Y^!$  aus 6.7.13 entspricht.

**6.7.22 (Natürlichkeit des Homologie-Hyperkohomologie-Vergleichs).** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von lokal kompakten homologisch kompaktendlichen Hausdorffräumen erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} G(X) & \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} & \Gamma_!(X; \mathcal{G}_X^!) & \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} & \text{fin}_{X,(!)} \mathcal{G}_X^! & \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} & \text{fin}_{X,!} \mathcal{G}_X^! \\ & & & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ & & & & \text{fin}_{Y,(!)} f_{(!)} \mathcal{G}_X^! & \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} & \text{fin}_{Y,!} f_!\mathcal{G}_X^! \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ G(Y) & \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} & \Gamma_!(Y; \mathcal{G}_Y^!) & \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} & \text{fin}_{Y,(!)} \mathcal{G}_Y^! & \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} & \text{fin}_{Y,!} \mathcal{G}_Y^! \end{array}$$

mit von unserem Grenzkomplexvorschub  $\text{gkv}$  aus 6.7.21 induzierten Vertikalen im Quadrat unten rechts und der offensichtlichen Vertikale links. Unter unserem Isomorphismus 6.7.19 entspricht also der Vorschub auf der singulären Homologie dem von  $\text{gkv}$  auf der Hyperkohomologie des Grenzkomplexes induzierten Morphismus und wir erhalten die Kommutativität der Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_q(X)_{\text{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}_1^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(Y)_{\text{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}_1^{-q}(Y; \mathcal{G}_Y^!) \end{array}$$

mit unseren Vergleichsisomorphismen in den Horizontalen und dem Vorschub auf der Homologie in der linken Vertikalen und der von unserem Grenzkomplexvorschub  $\text{gkv}$  aus 6.7.21 induzierten rechten Vertikale.

**6.7.23 (Natürlichkeit des !-Homologie-Hyperkohomologie-Vergleichs).** Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  eine eigentliche lesb-Abbildung von abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen mit  $\Gamma : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}$  und  $\Gamma : \text{Ab}_{/Y} \rightarrow \text{Ab}$  von endlicher homologischer Dimension kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q^!(X)_{\text{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q^!(Y)_{\text{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}^{-q}(Y; \mathcal{G}_Y^!) \end{array}$$

mit unseren Vergleichsisomorphismen 6.7.17 in den Horizontalen und dem eigentlichen Vorschub der singulären Theorie [TS] 7.3.10 in der linken Vertikalen und der vom Grenzkomplexvorschub  $\text{gkv} : f_! \mathcal{G}_X^! \rightarrow \mathcal{G}_Y^!$  mittels der Identifikation  $f_! \xrightarrow{\sim} f_*$  von der Komposition  $\text{fin}_{X^*} \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim} \text{fin}_{Y^*} f_* \mathcal{G}_X^! \rightarrow \text{fin}_{Y^*} \mathcal{G}_Y^!$  induzierten rechten Vertikale. Das folgt ziemlich direkt aus den Definitionen und soll hier nicht weiter ausgearbeitet werden.

**6.7.24 (Verdierdual des Grenzkomplexes).** Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  bilden unsere Grenzkettengarben nach 6.7.14 einen Komplex  $\mathcal{G}_X^!$  kompaktweicher Garben. Ist unser Raum sogar lesb, so liefert 5.7.22 einen Isomorphismus zwischen dem Garbenkomplex mit den Schnittkomplexen  $\mathbb{D}_{\text{Ket}} \Gamma_1(U; \mathcal{G}_X^!)$  und dem Verdierdual des Grenzkomplexes, nach 6.7.18 also einen Isomorphismus

$$d_X : \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} \mathcal{G}_X^*$$

Ich behaupte für diese Isomorphismen und jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von lesb-Räumen die Kommutativität in der derivierten Kategorie des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_Y \mathcal{G}_Y^! & \xrightarrow[\sim]{d_Y} & \mathcal{G}_Y^* \\ \mathbb{D} \text{ gkv} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}_Y f_! \mathcal{G}_X^! & \xrightarrow{\sim} f_* \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^! \xrightarrow[\sim]{f_* d_X} & f_* \mathcal{G}_X^* \end{array}$$



mit den hoffentlich offensichtlichen übrigen Pfeilen und insbesondere der durch Rückzug von Koketten gegebenen rechten Vertikale. Das folgt unmittelbar aus der durch 5.7.27 gegebenen Beschreibung des Isomorphismus unten links und den Definitionen. Dualisieren wir unser Diagramm und ergänzen es geeignet, so ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{G}_Y^! & \xrightarrow{\text{ev}} & \mathbb{D}_Y^2 \mathcal{G}_Y^! & \xleftarrow[\sim]{\mathbb{D}d_Y} & \mathbb{D}_Y \mathcal{G}_Y^* \\
\uparrow \text{gkv} & & \uparrow \mathbb{D}^2 \text{gkv} & & \uparrow \\
f_! \mathcal{G}_X^! & \xrightarrow{f_! \text{ev}} & f_! \mathbb{D}_X^2 \mathcal{G}_X^! & \xleftarrow[\sim]{f_! \mathbb{D}d_X} & f_! \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^* \\
\uparrow \text{ev} & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{D}_Y^2 f_! \mathcal{G}_X^! & \xleftarrow[\sim]{} & \mathbb{D}_Y f_* \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^! & \xleftarrow[\sim]{\mathbb{D}f_* d_X} & \mathbb{D}_Y f_* \mathcal{G}_X^*
\end{array}$$

Sind zusätzlich  $X$  und  $Y$  lokal singulärzyklisch, so liefern die Augmentationen Isomorphismen  $a_X : \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \text{Der } \mathcal{G}_X^*$  und  $a_Y : \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \text{Der } \mathcal{G}_Y^*$  und der Morphismus der rechten Vertikale entspricht darunter der Verknüpfung  $\mathbb{Z}_Y \rightarrow f_* f^* \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} f_* \mathbb{Z}_X$  der Einheit der Adjunktion mit dem natürlichen Isomorphismus. Mit 4.7.14 sehen wir, daß die rechte Vertikale in unserem Diagramm unter unseren Isomorphismus dem Morphismus  $f_! \omega_X \rightarrow \omega_Y$  entspricht, den wir als die Komposition  $f_! \omega_X \xrightarrow{\sim} f_! f^! \omega_Y \rightarrow \omega_Y$  erhalten mit der Koeinheit der Adjunktion an zweiter Stelle und dem Bild unter  $f_!$  des natürlichen Morphismus  $\omega_X = \text{fin}_X^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} f^!(\text{fin}_Y^! \mathbb{Z}_{\text{top}}) = f^! \omega_Y$  an erster Stelle. Wir erhalten mit unseren Morphismen dann also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}_Y^! & \longrightarrow & \omega_Y \\
\uparrow \text{gkv} & & \uparrow \\
f_! \mathcal{G}_X^! & \longrightarrow & f_! \omega_X
\end{array}$$

mit  $g_Y := (\mathbb{D}_Y(a_Y))^{-1} \circ (\mathbb{D}_Y(d_Y))^{-1} \circ \text{ev} : \mathcal{G}_Y^! \rightarrow \omega_Y$  in der oberen Horizontalen und  $f_! g_X$  in der unteren Horizontalen.

**Proposition 6.7.25 (Bidual des Grenzkomplexes).** *Gegeben ein lokal polyederähnlicher lesb-Raum  $X$  ist der Grenzkomplex  $\mathcal{G}_X^!$  verdierselbstdual, die kanonische Abbildung ist also ein Isomorphismus*

$$\mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim} \text{Der } \mathbb{D}_X \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^!$$

6.7.26. Insbesondere ist dann der zum Schluß von 6.7.24 betrachtete Morphismus ein Isomorphismus  $g_X : \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim} \omega_X$  zwischen dem Grenzkomplex und der dualisierenden Garbe.

*Beweis.* Wir kürzen im folgenden stets  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\text{Ket}}$  ab. Unser Komplex von Grenzkokettengarben hat über  $U \Subset X$  die Schnitte  $\mathcal{G}_X^*(U) = \mathbb{D}GU$ . Gegeben ein Kompaktum  $K \subset U$  liefert die kurze exakte Sequenz der relativen Grenzketten  $G(U \setminus K) \hookrightarrow G(U) \rightarrow G(U, U \setminus K)$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\mathbb{D}G(U, U \setminus K) \hookrightarrow \mathbb{D}G(U) \rightarrow \mathbb{D}G(U \setminus K)$$

Im Kolimes über alle Kompakta  $K \subset U$  ergeben sich daraus Isomorphismen  $\text{colf}_K \mathbb{D}G(U, U \setminus K) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(U; \mathcal{G}_U^*)$  und dann durch Dualisieren

$$\mathbb{D}\Gamma_!(U; \mathcal{G}_X^*) \xrightarrow{\sim} \limf_K \mathbb{D}\mathbb{D}G(U, U \setminus K)$$

In ?? haben wir unter den Bedingungen des Satzes einen ausgezeichneten Isomorphismus der dualisierenden Garbe mit dem durch die Schnittkomplexe auf der rechten Seite gegebenen Garbenkomplex konstruiert. Andererseits gibt es für jede offene Teilmenge  $U \Subset X$  einen natürlichen Morphismus

$$\mathcal{G}_X^!(U) = \limf_K G(U, U \setminus K) \rightarrow \limf_K \mathbb{D}\mathbb{D}G(U, U \setminus K)$$

Um den Beweis zu beenden müssen wir nur zeigen, daß jeder Punkt eine offene Umgebung  $U$  besitzt, für die er ein Quasiisomorphismus ist. Wir zeigen das sogar für jede polyederähnliche offene Teilmenge  $U \Subset X$ . Dann gibt es ja eine konfinale Folge von Kompakta von  $K_n \subset U$  mit  $H_q(U, U \setminus K_n)$  endlich erzeugt für alle  $q, n$ . Damit sind aber die natürlichen Abbildungen Quasiisomorphismen  $G(U, U \setminus K_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}\mathbb{D}G(U, U \setminus K_n)$  und dann liefern sie nach [TS] 7.1.52 auch im inversen Limes Quasiisomorphismen.  $\square$

**6.7.27 (Singuläre Homologien als Garbenkohomologien).** Für jeden lokal polyederähnlichen lokal singulärzyklischen lesb-Raum  $X$  liefert unsere Beschreibung 6.7.19 der Homologie als kompakte Hyperkohomologie des Grenzkomplexes zusammen mit dem Isomorphismus 6.7.26 zwischen dem Grenzkomplex und der dualisierenden Garbe einen Isomorphismus

$$H_q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H_q(X)_{\text{garb}}$$

Ist  $X$  darüberhinaus abzählbar basiert und  $\Gamma : \text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}$  von endlicher homologischer Dimension, so liefert unsere Beschreibung 6.7.17 der Homologie als Hyperkohomologie des Grenzkomplexes analog einen Isomorphismus

$$H_q^!(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H_q^!(X)_{\text{garb}}$$

Aus dem zum Schluß von 6.7.24 gefundenen kommutativen Diagramm folgt mit 6.7.22 beziehungsweise 6.7.23 beziehungsweise 6.7.17 schließlich die Verträglichkeit dieser Vergleichsisomorphismen mit dem Vorschub der Homologie, dem eigentlichen Vorschub der lokalendlichen Homologie sowie dem offenen Rückzug der lokalendlichen Homologie.

6.7.28 (**Relative singuläre Homologie als Garbenkohomologie**). Seien  $X$  ein lokal polyederähnlicher lokal singulärzyklischer lesb-Raum und  $j : U \hookrightarrow X$  die Einbettung einer offenen Teilmenge und  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung ihres Komplements. Wir erhalten mit der Einheit und der Koeinheit der Adjunktion nach ?? eine kurze exakte Sequenz

$$j_!j^!\mathcal{G}_X^! \hookrightarrow \mathcal{G}_X^! \rightarrow i_*i^*\mathcal{G}_X^!$$

von Garbenkomplexen und nach [TG] 4.8.11 und [TG] 4.8.13 bestehen sie alle aus kompaktweichen abelschen Garben. Nach [TG] 4.8.13 bilden dann die kompakten globalen Schnitte eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und mit 6.7.18 erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} GU & \hookrightarrow & GX & \twoheadrightarrow & G(X, U) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \Gamma_!\mathcal{G}_U^! & \hookrightarrow & \Gamma_!\mathcal{G}_X^! & \twoheadrightarrow & \Gamma_!i^*\mathcal{G}_X^! \end{array}$$

Die letzte Vertikale liefert zusammen mit dem Isomorphismus vom Grenzkomplex in die dualisierende Garbe 6.7.26 einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathbb{H}_1^{-q}(A; \omega_X) \xrightarrow{\sim} H_q(X, X \setminus A)_{\text{sing}}$$

Der Rest des Diagramms zeigt dann auch noch, daß die lange exakte Homologie-sequenz darunter der langen exakten Hyperkohomologiesequenz des ersten ausgezeichneten Dreiecks nach 5.3.3 der dualisierenden Garbe  $\omega_X$  zur gegebenen Zerlegung von  $X$  in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge entspricht. Wir haben also mit unseren Vergleichsisomorphismen zur singulären Homologie in den Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow & \mathbb{H}_1^{-q}j_!j^!\omega_X & \rightarrow & \mathbb{H}_1^{-q}\omega_X & \rightarrow & \mathbb{H}_1^{-q}i_*i^*\omega_X & \rightarrow & \mathbb{H}_1^{-q+1}j_!j^!\omega_X & \rightarrow & \dots \\ & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ \dots \rightarrow & H_q U & \rightarrow & H_q X & \rightarrow & H_q(X, U) & \rightarrow & H_{q-1} U & \rightarrow & \dots \end{array}$$

6.7.29 (**Natürlichkeit des Vergleichsisomorphismus nach  $H_q(X, A)$** ). Wir erinnern 6.4.39. Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von lesb-Räumen sowie  $A \sqsubset X, B \sqsubset Y$  abgeschlossene Teilmengen mit  $f^{-1}(B) \subset A$ . Gegeben  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  und  $\mathcal{G} \in \text{Ab}/_Y$  und ein Morphismus  $\varphi : f_!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  in  $\text{Der}(\text{Ab}/_Y)$  hatten wir dort einen ausgezeichneten Morphismus  $\varphi_{\otimes}$  konstruiert, der unter  $\mathcal{H}^{-q}$  ausgezeichnete Morphismen

$$\varphi_{\otimes} : \mathbb{H}_1^{-q}(A; \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{H}_1^{-q}(B; \mathcal{G})$$

liefert. Spezialisieren wir ihn zu dem aus dem offensichtlichen Isomorphismus  $\omega_X \xrightarrow{\sim} f^!\omega_Y$  hervorgehenden Morphismus  $f_!\omega_X \rightarrow \omega_Y$ , so sollten wir unter den

zusätzliche Annahmen an  $X$  und  $Y$  aus 6.7.28 mit unseren Vergleichsisomorphismen in den Horizontalen und dem Vorschub auf der singulären Homologie in der rechten Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_1^{-q}(A; \omega_X) & \xrightarrow{\sim} & H_q(X, X \setminus A)_{\text{sing}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}_1^{-q}(B; \omega_Y) & \xrightarrow{\sim} & H_q(Y, Y \setminus B)_{\text{sing}} \end{array}$$

erhalten. Ich würde mich freuen, wenn ein Student mir das einmal ausarbeiten könnte.

## 7 Äquivariante derivierte Kategorie

### 7.1 Ergänzungen zu äquivarianten Garben

### 7.2 Äquivariante Objekte (VERLEGEN!)

7.2.1 (**Kartesischer Schnitt als Schmelzfunktor**). Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ist nach 1.2.5 jeder kartesische Lift einer stabil universellen Trennung in  $\mathcal{N}$  eine stabil universelle Trennung in  $\mathcal{M}$ . Insbesondere macht unsere Trennfaserung stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen und hat  $\mathcal{N}$  stabil universelle Trennungen, so auch  $\mathcal{M}$ . Unter dieser Annahme induziert unser Trennfunktor nach [TSK] 1.6.12 folglich einen Trennschmelzfunktor

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

zwischen den jeweiligen Erweiterungen zu Trennschmelzkategorien. Hat darüber hinaus die Basis  $\mathcal{N}$  eindeutige Leertrennungen, so macht der **kartesische Schnitt**  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $X \mapsto \underline{X}$  aus 1.4.4 nach 1.2.5 stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen und induziert folglich einen Trennschmelzfunktor

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$$

Per definitionem ist die Verknüpfung unserer beiden Trennschmelzfunktoren die Identität auf  $\mathcal{N}$ . Jeder Schmelzfunktor macht nun Monoidobjekte zu Monoidobjekten und insbesondere macht der kartesische Schnitt aus jedem Monoidobjekt  $G$  von  $\mathcal{N}$  ein Monoidobjekt  $\underline{G}$  von  $\mathcal{M}$ .

**Definition 7.2.2.** Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  über einer Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen und eindeutigen Leertrennungen und ein Monoidobjekt  $G \in \mathcal{N}$  nennt man ein Objekt  $\mathcal{F}$  der Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  mit  $\underline{G}$ -Operation ein  **$G$ -äquivariantes Objekt von  $\mathcal{M}$** .

7.2.3. Gehört ein  $G$ -äquivariantes Objekt  $\mathcal{F}$  zur Faser  $\mathcal{M}_X$  über  $X \in \mathcal{N}$ , so induziert die  $\underline{G}$ -Operation auf  $\mathcal{F}$  eine  $G$ -Operation auf  $X$  in  $\mathcal{N}$ . Dies Objekt mit  $G$ -Operation in der Basis notieren wir  $G \setminus X$ . Die  $G$ -äquivarianten Objekte von  $\mathcal{M}$  über  $G \setminus X$  bilden selber in offensichtlicher Weise eine Kategorie

$$\mathcal{M}_{G \setminus X}$$

*Beispiel 7.2.4.* Sei speziell  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  eine Trennfaserung über der banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  einer Kategorie  $\mathcal{T}$  mit endlichen Produkten und finalem Objekt  $\text{pt}$ . Ein Monoidobjekt  $G$  von  $\mathcal{T}$  ist dann per definitionem dasselbe wie ein Monoidobjekt der zur Trennschmelzkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  gehörigen Schmelzkategorie

und ein  $G$ -äquivariantes Objekt von  $\mathcal{M}$  ist per definitionem ein Objekt zusammen mit einem Morphismus

$$\alpha : \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

in  $\mathcal{M}$  derart, daß die Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (\underline{G} \boxtimes \underline{G}) \boxtimes \mathcal{F} & \longrightarrow & \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & & & \parallel \\ \underline{G} \boxtimes (\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}) & \longrightarrow & \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \underline{\text{pt}} \boxtimes \mathcal{F} & \longrightarrow & \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{F} \end{array}$$

mit den in offensichtlicher Weise erklärten Morphismen kommutieren. Manchen Lesern mag eine Variante dieser Beschreibung vertrauter vorkommen, bei der man  $\text{pr}_1^* \mathcal{F}$  schreibt statt  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$  und so weiter, für  $\text{pr}_1 : G \times X \rightarrow X$  und  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{/X}$ .

*Ergänzung 7.2.5.* Mit Hilfe unseres natürlichen Isomorphismus  $\underline{X} \boxtimes \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_Y^\dagger \mathcal{F}$  aus 1.5.22 für  $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$  können wir unsere Definition 7.2.1 äquivarianter Objekte oder vielmehr ihre für banale Trennkategorien ausbuchstabierte Fassung 7.2.4 in einer Weise fassen, in der sie für eine gewöhnliche Faserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}$  über einer Kategorie mit endlichen Produkten sinnvoll bleibt. Sei dazu  $G \searrow X$  ein Objekt mit der Operation eines Monoids  $(G, m, e)$  in der Basis. Ein  **$G$ -äquivariantes Objekt über  $X$**  ist dann ein Datum  $(\mathcal{F}, \alpha)$  bestehend aus einem Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  über  $X$  und einem Morphismus  $\alpha : \text{pr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  über der Operation  $a : G \times X \rightarrow X$  derart, daß die beiden im folgenden erklärten Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{prr}^\dagger \mathcal{F} & \xrightarrow{\gamma} & \text{pr}^\dagger \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F} \\ \parallel & & & & \parallel \\ \text{prr}^\dagger \mathcal{F} & \xrightarrow{\beta} & \text{pr}^\dagger \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\iota} & \text{pr}^\dagger \mathcal{F} \\ & \searrow & \downarrow \alpha \\ & & \mathcal{F} \end{array}$$

kommutieren. Für das Rechte betrachten wir die Zerlegung  $X \rightarrow G \times X \rightarrow X$  von  $\text{id}_X = \text{pr} \circ e$  für  $e$  gegeben durch das neutrale Element unseres Monoids  $G$  und darüber die Zerlegung der Identität  $\text{id}_{\mathcal{F}} = \tau \circ \iota$  mit  $\tau : \text{pr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  dem Transportmorphismus. So erhalten wir einen wohlbestimmten Morphismus  $\iota$  über  $e$  und das rechte Diagramm fordert die Identität  $\alpha \circ \iota = \text{id}_{\mathcal{F}}$ . Wegen  $a \circ e = \text{id}_X$  ist das schon mal eine sinnvolle Forderung. Im linken Diagramm bezeichne  $\gamma$  denjenigen Morphismus  $\gamma : \text{prr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \text{pr}^\dagger \mathcal{F}$  über dem Morphismus  $(\text{id}_G \times a) : G \times G \times X \rightarrow G \times X$  in der Basis mit  $\tau \circ \gamma = \alpha \circ \tau \circ c$  für die Transportmorphismen  $\tau : \text{pr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  beziehungsweise  $\tau : \text{pr}_{23}^\dagger(\text{pr}^\dagger \mathcal{F}) \rightarrow \text{pr}^\dagger \mathcal{F}$  für  $\text{pr}_{23} : G \times G \times X \rightarrow G \times X$  die Projektion auf die beiden hinteren Faktoren und  $c : \text{prr}^\dagger \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{23}^\dagger \circ \text{pr}^\dagger$  der Identifikation zu  $\text{prr} = \text{pr} \circ \text{pr}_{23}$ . Weiter bezeichne  $\beta : \text{prr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \text{pr}^\dagger \mathcal{F}$  denjenigen Morphismus über dem Morphismus  $m \times \text{id}_X$  in der Basis, der beim Nachschalten des Transportmorphismus  $\tau$  den Transportmorphismus von

$\text{pr}^\dagger \mathcal{F}$  liefert. Die zweite Eigenschaft, die wir fordern, ist dann die Gleichheit  $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$  der mit im vorhergehenden erklärten Morphismen  $\text{pr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  über dem durch zweimaliges Anwenden der Operation gegebenen Morphismus  $G \times G \times X \rightarrow X$  in der Basis.

**Beispiel 7.2.6 (Äquivariante Objekte der Familientrennfaserung).** Im Fall der Familienfaserung  $\mathcal{C}/\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$  nach [?] ?? zu einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}/_X$  eine Familie  $(\mathcal{F}_x)_{x \in X}$  von Objekten. Operiert dann ein Monoid  $G$  auf  $X$ , so besteht eine äquivariante Struktur aus der Vorgabe von Morphismen  $s(g, x) : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_{gx}$  mit  $s(1, x) = \text{id}$  sowie  $s(h, gx)s(g, x) = s(hg, x)$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$ .

**Beispiel 7.2.7.** Sie mögen zur Übung zeigen, daß die in Bezug auf die Garbenfaserungen  $\text{Ens}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  und  $\text{Ab}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  im Sinne von 7.2.5 äquivalenten Objekte über einem topologischen Raum genau unsere äquivalenten Garben aus ?? beziehungsweise unsere äquivalenten abelschen Garben aus ?? sind.

**Beispiel 7.2.8 (Äquivariante Mengengarben, Variante).** Seien  $G \setminus X$  ein topologischer Raum mit der Operation  $a : G \times X \rightarrow X$  eines topologischen Monoids. Im Fall der Mengengarbenoptrennfaserung  $\text{Ens}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  nach ?? besteht eine  $G$ -äquivariante Mengengarbe auf  $X$  aus dem Datum einer Mengengarbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}/_X$  auf  $X$  und eines Opkomorphismus  $\alpha \in \text{Ens}/_a(G \boxtimes \mathcal{F}, \mathcal{F})$  mit gewissen Eigenschaften. Sind speziell  $G$  und  $X$  diskret, so ist solch ein  $\alpha$  nach 1.6.8 eine Familie von Abbildungen  $\alpha(g, x) : \mathcal{F}_{gx} \rightarrow \mathcal{F}_x$  und die geforderten Verträglichkeiten bedeuten  $\alpha(g, x)\alpha(h, gx) = \alpha(hg, x)$  sowie  $\alpha(1, x) = \text{id}$ . Das ist also dasselbe wie ein äquivalentes Objekt der Familienfaserung der Kategorie  $\text{Ens}^{\text{opp}}$ . Bilden wir die zu  $G \setminus X$  gehörige **Wirkungskategorie**  $X_G$  mit den Punkten  $x \in X$  als Objekten und den Mengen

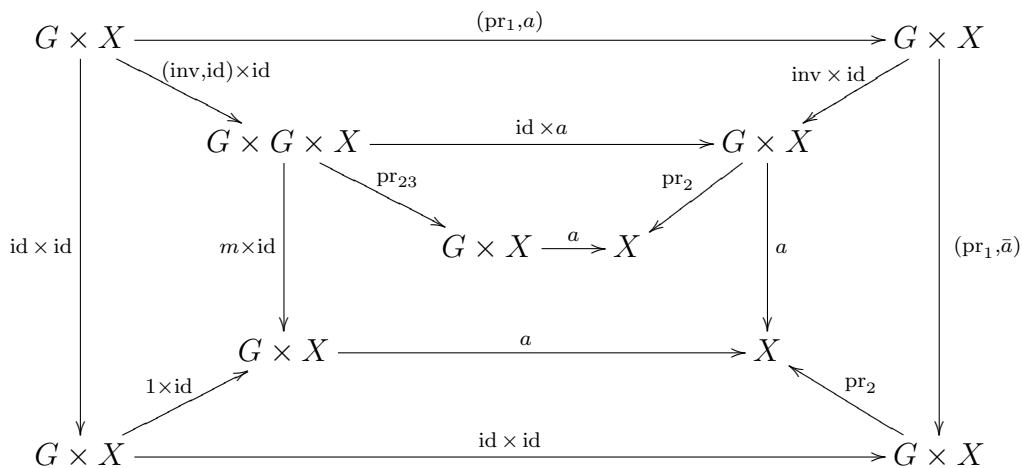
$$X_G(x, y) := \{g \in G \mid gx = y\}$$

als Morphismenmengen, paarweise disjunkt gemacht durch Darankreuzen des Paares  $(x, y)$ , so haben wir natürliche Isomorphismen von Kategorien  $\text{Ens}/_{G \setminus X} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(X_G, \text{Ens})$  und  $\text{Ens}/_{G \setminus X} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(X_G, \text{Ens}^{\text{opp}})$  in Verallgemeinerung unserer Erkenntnisse für Mengengarben aus [TG] 6.2.13.

7.2.9. Operiert eine diskrete Gruppe  $G$  und nicht nur ein Monoid auf einem diskreten Raum  $X$ , so ist die Wirkungskategorie  $X_G$  ein Gruppoid und das Invertieren von Morphismen zusammen mit der Identität auf Objekten liefert einen Isomorphismus  $X_G \xrightarrow{\sim} (X_G)^{\text{opp}}$ . Mit 7.2.8 erhalten wir Isomorphismen von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \text{Ens}/_{G \setminus X} & & (\text{Ens}/_{G \setminus X})^{\text{opp}} \\ \wr \downarrow & & \uparrow \wr \\ \text{Cat}(X_G, \text{Ens}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cat}((X_G)^{\text{opp}}, \text{Ens}^{\text{opp}})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(X_G, \text{Ens}^{\text{opp}})^{\text{opp}} \end{array}$$

7.2.10 (**Der Strukturmorphismus jeder Gruppenoperation ist kartesisch**). Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  über der banalen Trennkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten und  $G \searrow X$  ein Objekt mit Gruppenoperation  $a : G \times X \rightarrow X$  der Basis und  $(\mathcal{F}, \alpha) \in \mathcal{M}_{G \searrow X}$  ein  $G$ -äquivalentes Objekt über  $X$  ist der Morphismus  $\alpha \in \mathcal{M}_a(\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}, \mathcal{F})$  stets kartesisch. Um das zu sehen, betrachten wir in der Basis mit der Notation  $\bar{a}(g, x) := g^{-1}x$  oder besser  $\bar{a} := a \circ (\text{inv} \times \text{id})$  das kommutative Diagramm



Ziehen wir das kommutative Rechteck in  $\mathcal{M}$  über dem inneren Rechteck, das die Assoziativität der Operation zum Ausdruck bringt, zurück auf das äußere Rechteck, so bleibt es kommutativ. Aus offensichtlichen Gründen liefert der Rückzug nach links die Identität auf  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$ . Aufgrund der bei der Definition eines äquivalenten Objekts geforderten Trivialität der Operation der Eins liefert auch der Rückzug nach unten die Identität auf  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$ . Der Rückzug von  $\text{id} \boxtimes \alpha : \underline{G} \boxtimes \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \rightarrow \underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$  nach oben stimmt überein mit dem Rückzug des Strukturmorphismus  $\alpha$  von der Mitte nach ganz oben. Dieser Rückzug hat also ein Linksinverses, nämlich den Rückzug des Strukturmorphismus auf die rechte Vertikale. Genauso zeigt man, daß er auch ein Rechtsinverses besitzt und folglich ein Isomorphismus  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$  über  $(\text{pr}_2, a) : G \times X \rightarrow G \times X$  sein muß. Mithin ist dieser Rückzug kartesisch. Seine Verknüpfung mit der offensichtlichen Trennung  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  über  $\text{pr}_2 : G \times X \rightarrow X$  ist dann als Verknüpfung kartesischer Morphismen wieder kartesisch, und diese Verknüpfung ist gerade unser Strukturmorphismus  $\alpha$ .

*Ergänzung 7.2.11.* Ich wüßte gerne, ob das Vorhergehende genauso gilt für eine beliebige Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  in eine Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen, wenn wir äquivalente Objekte in Bezug auf Hopfobjekte der Basis betrachten, wie sie in [TS] ?? erklärt wurden. Das könnte eine Arbeit für einen Studenten abgeben.

7.2.12 (**Trennfaserung der äquivalenten Objekte**). Gegeben eine Kategorie



$\mathcal{T}$  mit endlichen Produkten bilden wir die Kategorie  $\text{mo}\mathcal{T}$  aller „Objekte mit Operation eines Monoidobjekts“. Morphismen  $G \setminus X \rightarrow H \setminus Y$  sind dabei Paare bestehend aus einem Homomorphismus  $G \rightarrow H$  von Monoidobjekten und einem gewöhnlichen Morphismus  $X \rightarrow Y$  derart, daß die offensichtliche Verträglichkeit erfüllt ist. Auch  $\text{mo}\mathcal{T}$  hat dann endliche Produkte. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \setminus \mathcal{T}$  erhalten wir eine weitere Trennfaserung

$$\text{mof.}\mathcal{M} \rightarrow \setminus \text{mo}\mathcal{T}$$

mit Faser  $\mathcal{M}_{G \setminus X}$  über  $G \setminus X$  und den hoffentlich offensichtlichen Trennungen. Die Schmelzkategorien der opponierten Fasern notieren wir unseren allgemeinen Konventionen folgend

$$\mathcal{M}_{/G \setminus X}$$

Die Restriktion unserer Trennfaserung auf die banale Trennkategorie der vollen Unterkategorie der Räume mit Gruppenoperation notieren wir

$$\text{gof.}\mathcal{M} \rightarrow \setminus \text{go}\mathcal{T}$$

In diesem Fall werden ja wohl, wenn die Fasern von  $\mathcal{M} \rightarrow \setminus \mathcal{T}$  Multihom haben, auch die Fasern von  $\text{gof.}\mathcal{M} \rightarrow \setminus \text{go}\mathcal{T}$  Multihom haben. Das mag einmal ein Student ausarbeiten, gerne auch zusammen mit 7.2.11.

**7.2.13 (Äquivariante Objekte oppinverser Trennfaserungen).** Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \setminus \mathcal{T}$  über der banalen Trennkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten und  $G \setminus X$  ein Objekt mit Gruppenoperation in der Basis ist nach 7.2.10 der Strukturmorphismus kartesisch. Gegeben  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  entsprechen die Strukturmorphismen, die  $\mathcal{F}$  zu einem äquivarianten Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  machen, also eineindeutig den Strukturmorphismen, die  $\mathcal{F}$  zu einem äquivarianten Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X^{\text{opi}}$  für die oppinvertierte Trennfaserung  $\mathcal{M}^{\text{opi}} \rightarrow \mathcal{N}$  nach 1.6.3 machen. Aus unserer Erkenntnis 7.2.10 über die Kartesianität des Strukturmorphismus bei unter Gruppen äquivarianten Objekten folgt, daß wir so einen Isomorphismus

$$(\text{gof.}\mathcal{M})^{\text{opi}} \xrightarrow{\sim} \text{gof.}(\mathcal{M}^{\text{opi}})$$

von Trennfaserungen über der banalen Trennkategorie  $\setminus \text{go}\mathcal{T}$  der Objekte mit Gruppenoperation in der Basis erhalten.

*Beispiel 7.2.14.* Die unter Gruppenoperationen äquivarianten Objekte der Mengengarbentrennfaserung und der Mengengarbenoptrennfaserung bilden zueinander oppinverse Trennfaserungen. Einen Schatten dieser Tatsache haben wir bereits in 7.2.9 gesehen, wo wir im diskreten Fall einen Isomorphismus zwischen der Faser der einen und der opponierten Faser der anderen Trennfaserung konstruiert hatten.

7.2.15 (**Äquivariante Objekte auf dem Produkt mit einer Gruppe**). Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  über der banalen Trennkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten und  $G$  ein Gruppenobjekt der Basis erhalten wir eine Äquivalenz

$$\underline{G} \boxtimes : \mathcal{M}_{\text{pt}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_{G \setminus G}$$

Genauer behaupten wir, daß wir sogar im Fall eines Monoidobjekts der Basis ein adjungiertes Paar  $(\underline{G} \boxtimes, 1^\dagger)$  von Funktoren zwischen den fraglichen Kategorien erhalten, indem wir den offensichtlichen Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\cong} 1^\dagger(\underline{G} \boxtimes \mathcal{F})$  als Einheit der Adjunktion nehmen und als Koeinheit die Komposition  $\underline{G} \boxtimes 1^\dagger \mathcal{E} \rightarrow \underline{G} \boxtimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  von Morphismen über der Komposition  $G \rightarrow G \times G \rightarrow G$  von  $g \mapsto (g, 1)$  gefolgt von der Verknüpfung unseres Monoids. Im Fall eines Gruppenobjekts ist nach 7.2.10 der Strukturmorphismus kartesisch und deshalb ist auch unsere Koeinheit kartesisch über der Identität, also ein Isomorphismus. Mithin liefert unser adjungiertes Paar wie behauptet eine Äquivalenz von Kategorien. Dieselben Argumente liefern für jedes Objekt  $X$  der Basis eine Äquivalenz von Kategorien

$$\underline{G} \boxtimes : \mathcal{M}_X \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_{G \setminus (G \times X)}$$

## Übungen

Übung 7.2.16. Gegeben  $G \setminus X$  ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Operationen einer diskreten Gruppe und  $k$  ein Kring und  $\chi : G \rightarrow k^\times$  ein Gruppenhomomorphismus bezeichne  $P := G \setminus X$  den Bahnenraum und  $\underline{P}_\chi$  die nach [TG] ?? zugehörige lokal konstante Garbe von  $k$ -Moduln auf  $P$ . Gegeben  $G \setminus X$  und  $H \setminus Y$  topologische Räume mit topologisch freien Operationen diskreter Gruppen und  $R := H \setminus Y$  betrachten wir in der Familienkategorie von  $\wedge \text{moTop}$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P \times R & \rightarrow & P \wedge R \\ \uparrow & & \uparrow \\ (G \times H) \setminus (X \times Y) & \rightarrow & (G \setminus X) \wedge (H \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G \times H) \setminus \text{top} & \rightarrow & (G \setminus \text{top}) \wedge (H \setminus \text{top}) \end{array}$$

Da die Rückzüge längs der oberen Vertikalen nach [TG] 7.1.10 Äquivalenzen sind, liefert unser Diagramm ausgezeichnete Isomorphismen

$$\underline{P}_\chi \boxtimes \underline{R}_\xi \xrightarrow{\cong} \underline{P \times R}_{\chi \otimes \xi}$$

Übung 7.2.17. Ist  $X$  topologische Gruppe und  $G \subset X$  eine diskrete zentrale Untergruppe, so operiert  $G$  nach [TM] 2.1.25 topologisch frei auf  $X$  und ein ähnliches Diagramm wie zuvor liefert für jeden Gruppenhomomorphismus  $\chi : G \rightarrow$

$k^\times$  einen kartesischen Morphismus  $\underline{P} \times_{\underline{P}_{X \otimes X}} \underline{P} \rightarrow \underline{P}_X$  über der Multiplikation der Quotientengruppe  $P := G \backslash X$ . Zusammen mit dem Isomorphismus aus 7.2.16 liefert das einen kartesischen Morphismus

$$\underline{P}_X \boxtimes \underline{P}_X \rightarrow \underline{P}_X$$

über der Multiplikation von  $P$ . Man zeige, daß er  $\underline{P}_X$  zu einem Gruppenobjekt in Garben von  $k$ -Moduln über topologischen Räumen macht. Objekte mit einer Operation dieses Gruppenobjekts heißen  **$X$ - $\chi$ -monodrome Garben**.

7.2.18. Ich erinnere an die Definitionen und ersten Resultate zu äquivarianten Garben aus [TG] 7.1.1 folgende. Die im Anschluß bewiesene Aussage hatten wir in [TG] 7.1.10 nur im Fall der Operation einer diskreten Gruppe diskutiert.

**Satz 7.2.19 (Quotientenäquivalenz).** *Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein topologisch freier  $G$ -Raum  $X$  ist der äquivariante Rückzug unter  $\phi \backslash f$  für  $f : X \rightarrow G \backslash X$  und  $\phi : G \rightarrow 1$  eine Äquivalenz*

$$\text{Ens}_{/G \backslash X} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{G \backslash X}$$

*Beweis.* Nach einigen Vorbereitungen zeigen wir eine noch allgemeinere Aussage in 7.2.25. □

**Lemma 7.2.20 (Freie Quotienten äquivarianter Abbildungen).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X \rightarrow Y$  eine stetige  $G$ -äquivariante Abbildung von  $G$ -Räumen. Ist  $Y$  topologisch frei, so ist auch  $X$  topologisch frei und die offensichtlichen Abbildungen liefern ein kartesisches Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \longrightarrow & Y/G \end{array} \quad \lrcorner$$

*Ergänzung 7.2.21.* Man zeigt unschwer auch eine noch allgemeinere Version: Ist zusätzlich  $H \subset G$  eine Untergruppe, so liefern die offensichtlichen Abbildungen sogar ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X/H & \longrightarrow & Y/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \longrightarrow & Y/G \end{array} \quad \lrcorner$$

Dazu geht man wie beim Beweis des Lemmas vor, ergänzt am Schluß das Diagramm entsprechend, und muß einen Homöomorphismus  $X/H \xrightarrow{\sim} G/H \times X/G$  nachweisen. Das ist aber klar, da  $G \times X/G \rightarrow G/H \times X/G$  final ist, vergleiche [TM] 2.2.4. Ich bin ganz verblüfft, daß man hierfür anscheinend noch nicht einmal voraussetzen muß, daß  $G$  topologisch frei ist als  $H$ -Raum.

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $Y = G \times W$  annehmen. Dann entsteht mit dem pull-back ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & G \times X/G & \longrightarrow & G \times W \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & X/G & \longrightarrow & W \end{array}$$

Wir betrachten nun die Abbildung  $\mu : X \rightarrow G$ , die durch die Komposition der oberen Horizontale mit der Projektion auf  $G$  gegeben wird. Sicher gilt  $\mu(gx) = g\mu(x)$ . Folglich ist die Abbildung  $X \rightarrow X$  gegeben durch  $x \mapsto \mu(x)^{-1}x$  konstant auf  $G$ -Bahnen und faktorisiert demnach über eine stetige Abbildung  $\nu : X/G \rightarrow X$ . Man prüft leicht, daß die stetige Abbildung  $G \times X/G \rightarrow X$ ,  $(g, \bar{x}) \mapsto g\nu(\bar{x})$  invers ist zur linken oberen Horizontale  $X \rightarrow G \times X/G$ ,  $x \mapsto (\mu(x), \bar{x})$ .  $\square$

**Korollar 7.2.22.** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von topologisch freien  $G$ -Räumen, die einen Homöomorphismus  $X/G \xrightarrow{\sim} Y/G$  induziert. So ist unsere Abbildung bereits selbst ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Das folgt aus 7.2.20 aus der allgemeinen Erkenntnis [TF] 2.3.4, daß der pull-back eines Isomorphismus stets wieder ein Isomorphismus ist.  $\square$

**Korollar 7.2.23 (Quotienten étaler Abbildungen sind étale).** *Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $X \rightarrow Y$  eine étale Abbildung von  $G$ -Räumen und  $Y$  ein topologisch freier  $G$ -Raum, so ist auch  $X/G \rightarrow Y/G$  étale.*

7.2.24. Die Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  ist étale, nicht aber ihr Quotient nach der Operation durch Addition einer Gerade  $G \subset \mathbb{R}^2$  mit irrationaler Steigung. Es ist also wesentlich, daß die Operation nicht nur abstrakt frei, sondern sogar topologisch frei ist.

*Beweis.* Ist  $Y$  topologisch frei als  $G$ -Raum, so besitzt jeder Punkt von  $Y/G$  eine offene Umgebung  $W \Subset Y/G$ , auf der die Quotientenabbildung gespalten werden kann durch ein stetiges  $s : W \rightarrow Y$ . Wir können also unser kartesisches Diagramm aus dem Lemma, das wir nun auf der Seite liegend dargestellt haben, ergänzen durch ein kartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/G \\ \downarrow & & \lrcorner & \downarrow & \downarrow \\ W & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y/G \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß die Kompositionen in den Horizontalen offene Einbettungen sind. Ist insbesondere  $X \rightarrow Y$  étale, so auch  $X/G \rightarrow Y/G$ .  $\square$

**Satz 7.2.25 (Verallgemeinerte Quotientenäquivalenz).** *Operiert eine topologische Gruppe  $G$  auf einem Raum  $X$  und ist  $N \subset G$  ein Normalteiler, der sowohl auf  $G$  als auch auf  $X$  topologisch frei operiert, so induziert das Zurückholen mit der Quotientenabbildung  $G \backslash X \rightarrow (N \backslash G) \backslash (N \backslash X)$  eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Ens}_{/(N \backslash G) \backslash (N \backslash X)} \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/G \backslash X}$$

*Beweis.* Wir beginnen mit dem in 7.2.19 beschriebenen Fall  $G = N$  und definieren einen Funktor in die Gegenrichtung mithilfe der étalen Räume, indem wir jeder äquivarianten Garbe  $\bar{\mathcal{F}} \rightarrow X$  die nach 7.2.23 étale Abbildung  $G \backslash \bar{\mathcal{F}} \rightarrow G \backslash X$  zuordnen. Dann zeigen wir, daß er linksadjungiert ist zum Zurückholen. Und schließlich prüfen wir, daß beide Adjunktionsabbildungen stets Isomorphismen sind. Das ist nur lokal zu prüfen, also für  $X = G \times Y$ , und in diesem Fall ist es leicht zu sehen. Für das simultane Wegteilen ergänzen wir unsere Argumentation in der offensichtlichen Weise.  $\square$

**Satz 7.2.26 (Induktionsäquivalenz).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe, die topologisch frei auf  $G$  operiert, und  $Y$  ein  $H$ -Raum. So liefert das Zurückholen längs  $H \backslash Y \rightarrow G \backslash (G \times_{/H} Y)$  eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Ens}_{/G \backslash (G \times_{/H} Y)} \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/H \backslash Y}$$

7.2.27. Ein quasiinverser Funktor kann in der Sprache der étalen Räume explizit beschrieben werden durch die Vorschrift  $\bar{\mathcal{F}} \mapsto G \times_{/H} \bar{\mathcal{F}}$ .

*Beweis.* Wir betrachten zusätzlich  $(G \times H) \backslash (G \times Y)$  mit der Operation gegeben durch  $(g, h)(x, y) := (gxh^{-1}, hy)$  und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (G \times H) \backslash (G \times Y) & \longleftarrow & H \backslash Y \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ H \backslash Y & & G \backslash (G \times_{/H} Y) \end{array}$$

mit der oberen Horizontale gegeben durch  $h \mapsto (h, h)$  und  $y \mapsto (1, y)$ . Die Rückzüge in die obere linke Ecke sind verallgemeinerte Quotientenäquivalenzen 7.2.25. Es folgt, daß erst der Rückzug längs der oberen Horizontale und dann der Rückzug längs der rechten Vertikale auch Äquivalenzen sind.  $\square$

**Beispiel 7.2.28 (Äquivariante Garben auf homogenen Räumen).** Im Spezialfall  $Y = \text{top}$  erhalten wir aus dem Zusammenspiel der Beschreibung [TG] 7.1.2 äquivarianter Garben auf einem Punkt und der Induktionsäquivalenz 7.2.26 für jede

topologisch frei operierende lokal zusammenhängende Untergruppe  $H \subset G$  einer topologischen Gruppe  $G$  eine Äquivalenz

$$(H/H^\circ)\text{-Ens} \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/G \setminus (G/H)}$$

zwischen der Kategorie der Mengen mit einer Operation der Komponentengruppe von  $H$  und der Kategorie der  $G$ -äquivalenten Garben auf dem homogenen Raum  $G/H$ . Insbesondere sind in diesem Fall alle äquivalenten Garben lokal konstant.

*Beispiel 7.2.29.* Die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf der topologischen Gruppe  $\mathbb{R}$  nicht mit der Struktur einer  $\mathbb{R}$ -äquivalenten Garbe in unserem Sinne versehen werden, da sie nicht lokal konstant ist, da aber nach 7.2.28 in dieser Situation jede  $\mathbb{R}$ -äquivalente Garbe lokal konstant ist.

**Proposition 7.2.30 (Volltreues Einschränken).** *Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $\varphi : H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus mit  $G/\varphi(H)$  zusammenhängend, so ist für jeden  $G$ -Raum  $X$  die Restriktion ein volltreuer Funktor*

$$\text{Ens}_{/G \setminus X} \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/H \setminus X}$$

*Beweis.* In der Tat müssen wir nur für jeden  $H$ -äquivalenten Garbenhomomorphismus von  $G$ -äquivalenten Garben  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  und alle  $x \in X$  und  $g \in G$  zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_x & \rightarrow & \mathcal{G}_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{gx} & \rightarrow & \mathcal{G}_{gx} \end{array}$$

kommutiert. Es reicht, wenn wir das zeigen für die mittels  $G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto gx$  auf  $G$  zurückgezogenen Garben. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X = G$  und  $x = e$  annehmen. Dann liefert jedoch die Operation von  $G$  für alle  $y \in \mathcal{F}_e$  eine Fortsetzung zu einem globalen Schnitt von  $\mathcal{F}$ , dessen Bild offen ist in  $\bar{\mathcal{F}}$  als Bild einer étalen Abbildung. Mithin oder auch direkt nach 7.2.26 mit  $Y = \text{top}$  und  $H = 1$  ist  $\bar{\mathcal{F}} \rightarrow G$  und ebenso auch  $\bar{\mathcal{G}} \rightarrow G$  eine triviale Überlagerung. Die Mengen der  $g \in G$ , an denen zwei unter  $\varphi(H)$  äquivalente Decktransformationen übereinstimmen beziehungsweise verschieden sind, sind nach dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts bei Überlagerungen [TF] 3.4.10 offen in  $G$  und sind offensichtlich invariant unter  $\varphi(H)$ . Ist nun  $G/\varphi(H)$  zusammenhängend, so ist die einzige Möglichkeit einer derartigen Zerlegung von  $G$  in zwei offene Teilmengen die Zerlegung in ganz  $G$  und die leere Menge. Das zeigt, daß alle unter  $\varphi(H)$  äquivalenten Garbenhomomorphismen zwischen  $G$ -äquivalenten Garben auf  $G$  bereits  $G$ -äquivalent sein müssen.  $\square$

7.2.31. Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von  $G$ -Räumen und  $\mathcal{F} \in \text{Ens}_{/G \setminus X}$  eine äquivalente Garbe, so erbt der Vorschub  $f_*\mathcal{F} \in$

$\text{Ens}/Y$  in offensichtlicher Weise eine Wirkung von  $G$  als abstrakte Gruppe, die auch mit der Wirkung von  $G$  auf  $Y$  verträglich ist. Um jedoch zu zeigen, daß  $G$  auch mit seiner richtigen Topologie stetig auf dem étalen Raum von  $f_*\mathcal{F}$  operiert, brauchen wir stärkere Voraussetzungen.

**Beispiel 7.2.32 (Schwierigkeiten mit äquivariantem Vorschub).** Daß es im Allgemeinen nicht ganz einfach sein wird, einen Vorschub für äquivariante Garben zu erklären, zeigt das folgende Beispiel. Auf der topologischen Gruppe  $\mathbb{Q}$  betrachte man die konstante Garbe  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$ . Ihr Vorschub unter der Projektion auf einen Punkt ist die abelsche Gruppe der globalen Schnitte  $\Gamma(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}})$ . Dieser Gruppe entspricht jedoch unter der offensichtlichen Operation keine  $\mathbb{Q}$ -äquivariante Garbe, da die fragliche Operation nicht stetig ist für die diskrete Topologie auf  $\Gamma(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}})$ . Ist zum Beispiel  $s \in \Gamma(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}})$  Null auf allen  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $q^2 < 2$  und Eins auf allen  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $q^2 > 2$ , so gibt es keine Umgebung der Null in  $\mathbb{Q}$ , die diesen Schnitt festhält.

**Beispiel 7.2.33 (Alternative Beschreibung äquivarianter Garben).** Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum. Bezeichne  $m, p : G \times X \rightarrow X$  die Operation von  $G$  beziehungsweise die Projektion auf  $X$ . Für jede äquivariante Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}/G \setminus X$  erklären wir einen Garbenisomorphismus

$$s : p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} m^*\mathcal{F}$$

Man bezeichne dazu mit  $q : G \times X \rightarrow G$  die Projektion und betrachte die Abbildung  $(q, m) : (g, x) \mapsto (g, gx)$  und beachte zunächst  $m = p \circ (q, m)$ , so daß es gleichbedeutend gilt, einen Isomorphismus  $p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (q, m)^*(p^*\mathcal{F})$  zu konstruieren. Wir haben nun aber einen natürlichen Isomorphismus  $\text{ét}(p^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} G \times \mathcal{F}$ . Das pull-back-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times \bar{\mathcal{F}} & \rightarrow & G \times \bar{\mathcal{F}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times X & \xrightarrow{(q, m)} & G \times X \end{array}$$

mit  $(g, f) \mapsto (g, gf)$  in der oberen Horizontalen liefert dann den gesuchten Isomorphismus. Im Halm an der Stelle  $(g, x)$  wird unser Isomorphismus  $s$  beschrieben durch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (p^*\mathcal{F})_{(g, x)} & \xrightarrow{s} & (m^*\mathcal{F})_{(g, x)} \\ \downarrow \wr & & \wr \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}_{gx} \end{array}$$

mit den offensichtlichen vertikalen Identifikationen. Ist umgekehrt ein Garbenhomomorphismus  $s : p^*\mathcal{F} \rightarrow m^*\mathcal{F}$  gegeben, so erhalten wir eine stetige Abbildung  $G \times \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$  aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} G \times \bar{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\sim} & \text{ét}(p^*\mathcal{F}) & \xrightarrow{s} & \text{ét}(m^*\mathcal{F}) & \rightarrow & \bar{\mathcal{F}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G \times X & = & G \times X & = & G \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

Hierin können die nicht explizit benannten Abbildungen hoffentlich vom Leser erschlossen werden. Kommt  $s$  bereits von einer äquivarianten Struktur auf  $\bar{\mathcal{F}}$  her, so erhalten wir mit dieser Konstruktion unsere äquivariante Struktur zurück.

## Übungen

*Übung 7.2.34.* Seien  $G$  eine zusammenhängende topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum. Bezeichne  $m, p : G \times X \rightarrow X$  die Operation beziehungsweise die Projektion auf  $X$  und sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$ . Gibt es einen Garbenhomomorphismus  $s : p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} m^*\mathcal{F}$ , der auf  $\{e\} \times X$  zur Identität einschränkt, so besitzt  $\bar{\mathcal{F}}$  genau eine stetige  $G$ -Operation, die  $\mathcal{F}$  zu einer  $G$ -äquivarianten Garbe macht. Hinweis: Man verwende 7.2.33 und ziehe sich auf den Fall  $X = G$  zurück.

*Übung 7.2.35.* Es operiere eine topologische Gruppe  $G$  auf einem Raum  $X$  und es sei  $N \subset G$  ein Normalteiler, der auf  $G$  topologisch frei operiert. Genau dann ist die Operation von  $G$  auf  $X$  topologisch frei, wenn die Operationen von  $N$  auf  $X$  und von  $G/N$  auf  $N \backslash X$  topologisch frei sind.

## 7.3 Äquivariante derivierte Kategorie

7.3.1. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  bezeichne  $\text{Der}(X) := \text{Der}(\text{Ab}/X)$  die derivierte Kategorie der abelschen Kategorie aller abelschen Garben auf  $X$ .

7.3.2. Ich erinnere aus 3.1.2 daran, daß eine stetige Abbildung topologischer Räume  $f : X \rightarrow Y$  **garbenazyklisch** heißt, wenn für jeden Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/Y)$  die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_* f^* \mathcal{F}$$

liefert. Sie heißt **bagazyklisch**, wenn sie unter jedem Basiswechsel eine garbenazyklische Abbildung liefert. Ein topologischer Raum  $X$  heißt **bagazyklisch**, wenn die konstante Abbildung  $X \rightarrow \text{top}$  die entsprechende Eigenschaft hat.

7.3.3 (**Produkte mit freien  $G$ -Räumen sind frei**). Sei  $G$  eine topologische Gruppe und seien  $P, X$  zwei  $G$ -Räume. Ist  $P$  topologisch frei, so ist auch das Produkt  $P \times X$  mit der diagonalen  $G$ -Operation topologisch frei. In der Tat reicht es aus, das unter der zusätzlichen Annahme  $P = G \times W$  zu zeigen, mit der Operation von  $G$  nur auf dem ersten Faktor. Dann aber erhalten wir einen Homöomorphismus  $G \times W \times X \xrightarrow{\sim} G \times W \times X$  durch die Vorschrift  $(g, w, x) \mapsto (g, w, gx)$ , und unter diesem Homöomorphismus entspricht die  $G$ -Operation nur auf dem ersten Faktor der diagonalen  $G$ -Operation auf dem ersten und letzten Faktor.

7.3.4. Gegeben ein eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  verstehen wir unter einer **Auflösung von  $X$**  einen  $G$ -äquivarianten Morphismus  $p : P \rightarrow X$  von einem topologisch freien  $G$ -Raum nach  $X$ .



**7.3.5 (Äquivariante derivierte Kategorie zu einer Auflösung).** Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  und eine bagazyklische Auflösung  $p : P \rightarrow X$  erklären wir die  $G$ -äquivariante derivierte Kategorie von  $X$  zu  $P$  als die volle Unterkategorie

$$\mathrm{Der}_{G \setminus} (X; P) \subset \mathrm{Der}(G \setminus P)$$

aller Komplexe, deren Rückzug unter  $\mathrm{quot} : P \rightarrow G \setminus P$  isomorph ist zum Rückzug eines Komplexes aus  $\mathrm{Der}(X)$  unter  $p : P \rightarrow X$ . In Formeln setzen wir also

$$\mathrm{Der}_{G \setminus} (X; P) := \{ \mathcal{F} \in \mathrm{Der}(G \setminus P) \mid \exists \mathcal{G} \in \mathrm{Der}(X) \text{ mit } p^* \mathcal{G} \cong \mathrm{quot}^* \mathcal{F} \}$$

*Vorschau 7.3.6.* Im folgenden werden wir zeigen, daß  $\mathrm{Der}_{G \setminus} (X; P)$  in einem noch zu präzisierenden sehr starken Sinne von der bagazyklischen Auflösung  $P$  gar nicht abhängt, so daß wir  $P$  ohne Schaden aus der Notation entfernen dürfen. Jetzt aber versuchen wir erst einmal, die Sinnhaftigkeit unserer Definition durch Beispiele zu illustrieren.

*Beispiel 7.3.7 (Bezug zur äquivarianten Kohomologie).* Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  und eine bagazyklische Auflösung  $p : P \rightarrow X$  gehört für jede abelsche Gruppe  $M$  die konstante Garbe auf  $G \setminus P$  mit Faser  $M$  zu unserer äquivarianten derivierten Kategorie. Wir notieren dies Objekt  $M_X = M_{X;P} \in \mathrm{Der}_{G \setminus} (X; P)$ . Es ist auch klar, daß  $\mathrm{Der}_{G \setminus} (X; P)$  stabil ist unter den homologischen Verschiebungen  $[q]$ . Wir erhalten nun mit der offensichtlichen Verallemeinerung von ?? auf bagazyklische stetige Abbildungen im letzten Schritt natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Der}_{G \setminus} (X; P)(M_X, M_X[q]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(G \setminus P; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_G^q(P; M) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}_G^q(X; M)$$

Der Raum der Morphismen von  $M_X$  zu  $M_X[q]$  in unserer äquivarianten derivierten Kategorie ist mithin natürlich isomorph zur  $q$ -ten äquivarianten Kohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $M$ .

*Beispiel 7.3.8 (Äquivariante derivierte Kategorien zur Gruppe  $\mathbb{Z}$ ).* Im Fall der Gruppe  $G = \mathbb{Z}$  können wir  $E = \mathbb{R}$  nehmen und erhalten für jeden  $\mathbb{Z}$ -Raum  $X$  die bagazyklische Auflösung  $P = \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ . Der Quotient  $\mathbb{Z} \setminus P = \mathbb{R} \times_{/\mathbb{Z}} X$  ist dann ein Faserbündel über der Kreislinie  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  mit Faser  $X$ , die „verdrillt ist mit dem durch die Operation von  $1 \in \mathbb{Z}$  gegebenen Automorphismus von  $X$ “. Die äquivariante derivierte Kategorie hinwiederum ist in diesem Fall eine volle Unterkategorie der derivierten Kategorie zur Kategorie aller abelschen Garben auf diesem Faserbündel.

*Beispiel 7.3.9 (Äquivariante derivierte Kategorien zur Gruppe  $\mathbb{R}$ ).* Im Fall der Gruppe  $G = \mathbb{R}$  können wir auch  $E = \mathbb{R}$  nehmen und erhalten für einen  $\mathbb{R}$ -Raum

$X$  die bagazyklische Auflösung  $P = \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ . Der Quotient  $\mathbb{R} \backslash P = \mathbb{R} \times_{/\mathbb{R}} X$  ist dann eine Faserung über dem Punkt  $\mathbb{R}/\mathbb{R}$  mit Faser  $X$  und kanonisch isomorph zu  $X$  selber. Die äquivariante derivierte Kategorie ist in diesem Fall eine volle Unterkategorie der derivierten Kategorie zur Kategorie aller abelschen Garben auf  $X$ . Dasselbe gilt für jede zusammenziehbare topologische Gruppe  $G$ .

**7.3.10 (Triangulierung der äquivarianten derivierten Kategorien).** Für jeden  $G$ -Raum  $X$  mit bagazyklischer Auflösung  $p : P \rightarrow X$  ist äquivariante derivierte Kategorie  $\text{Der}_{G \backslash}(X; P)$  eine triangulierte Unterkategorie von  $\text{Der}(G \backslash P)$ . In der Tat induziert für  $\mathcal{G} \in \text{Der}(X)$  die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} p_* p^* \mathcal{G}$$

Die Bedingung, daß es  $\mathcal{G}$  gibt mit  $\text{quo}^* \mathcal{F} \cong p^* \mathcal{G}$ , ist also gleichbedeutend zur Bedingung, daß die Koeinheit der Adjunktion für  $\text{quo}^* \mathcal{F}$  einen Isomorphismus  $p^* p_* \text{quo}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{quo}^* \mathcal{F}$  induziert. Man sieht auch leicht, daß die Abschneide-funktoren  $\tau^{\leq n}$  und  $\tau^{\geq n}$  zu  $\text{Der}(G \backslash P)$  aus ?? die äquivariante derivierte Kategorie erhalten.

**Proposition 7.3.11 (Äquivariante Garben als gewöhnliche Garben).** Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum und  $p : P \rightarrow X$  eine Auflösung von  $X$ , die basisfest final ist mit zusammenhängenden Fasern. So erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Ens}_{/G \backslash X} \xrightarrow{\sim} \{ \mathcal{F} \in \text{Ens}_{G \backslash P} \mid \exists \mathcal{G} \in \text{Ens}_{/X} \text{ mit } p^* \mathcal{G} \cong \text{quo}^* \mathcal{F} \}$$

für  $\text{quo} : P \rightarrow G \backslash P$  der Quotient durch die Vorschrift  $\bar{\mathcal{E}} \mapsto G \backslash (P \times_X \bar{\mathcal{E}})$  auf den étalen Räumen.

*Beweis.* Zunächst prüfen wir, daß unser Funktor überhaupt sinnvoll definiert ist. Nach 7.2.23 ist mit  $P \times_X \bar{\mathcal{E}} \rightarrow P$  auch  $G \backslash (P \times_X \bar{\mathcal{E}}) \rightarrow G \backslash P$  étale. Also ist unser Funktor sinnvoll definiert. Einen quasiinversen Funktor erhält man, indem man bemerkt, daß nach [TG] 4.3.23 die Einheit der Adjunktion eine Isotransformation  $\text{id} \xrightarrow{\sim} p_* p^*$  ist und wir folglich  $\mathcal{G}$  aus  $\mathcal{F}$  zurückgewinnen können als  $\mathcal{G} = p_* \text{quo}^* \mathcal{F}$ . Das zeigt, daß  $\bar{\mathcal{G}}$  zumindest genau eine stetige Operation von  $G^{\text{dis}}$  trägt, die unter Rückzug die Operation von  $G$  auf  $\overline{\text{quo}^* \mathcal{F}} \cong P \times_X \bar{\mathcal{G}}$  als Garbe auf  $P$  wird. Da aber die zurückgeholte Operation stetig ist als Operation von  $G$ , muß auch die Operation auf  $\bar{\mathcal{G}}$  selbst stetig sein, denn sie paßt in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times (P \times_X \bar{\mathcal{G}}) & \rightarrow & P \times_X \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times \bar{\mathcal{G}} & \rightarrow & \bar{\mathcal{G}} \end{array}$$

und die linke Vertikale ist aufgrund unserer Annahmen an  $p$  final. □

**7.3.12 (Äquivariante Garben und äquivariante derivierte Kategorie).** Sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum. Gegeben eine bagazyklische Auflösung  $P \rightarrow X$ , die außerdem basisfest final ist mit zusammenhängenden Fasern, liefern unsere Proposition 7.3.11 eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der äquivarianten abelschen Garben auf einem  $G$ -Raum  $X$  im anschaulichen Sinne [TG] 7.1.4 und der vollen Unterkategorie aller Komplexe  $\mathcal{F} \in \text{Der}_{G \setminus}(X; P)$  der äquivarianten derivierten Kategorie, die exakt sind außerhalb vom Grad Null, alias eine Äquivalenz

$$\text{Ab}_{/G \setminus X} \xrightarrow{\cong} \{\mathcal{F} \in \text{Der}_{G \setminus}(X; P) \mid \mathcal{H}^i \mathcal{F} \neq 0 \Rightarrow i = 0\}$$

Unsere Konstruktion liefert sogar einen triangulierten Funktor  $\text{Der}(\text{Ab}_{/G \setminus X}) \rightarrow \text{Der}_{G \setminus}(X; P)$ . Dieser Funktor ist nur in Ausnahmefällen eine Äquivalenz von Kategorien. Ein solcher Ausnahmefall ist der Fall der trivialen Gruppe  $G = 1$ . In diesem Fall induziert der Rückzug unter  $\text{pr} : P \rightarrow X$  offensichtlich eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\text{Der}(\text{Ab}_{/X}) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{1 \setminus}(X; P)$$

In 7.3.13 zeigen wir, daß es stets bagazyklische Auflösungen gibt, die auch basisfest final sind mit zusammenhängenden Fasern.

**7.3.13 (Bagazyklische Auflösung mit der Milnor-Konstruktion).** Die Milnor-Konstruktion [TG] 7.3.5 liefert zu einer beliebigen topologischen Gruppe  $G$  einen topologisch freien zusammenziehbaren  $G$ -Raum  $EG$ , den abzählbaren Join  $EG = *_{i \in \mathbb{N}} G$  mit seiner Milnor-Topologie. Insbesondere ist  $EG$  nach 3.1.4 basisfest azyklisch im Sinne von 3.1.2. Man nennt  $EG$  auch den „Totalraum des klassifizierenden Bündels“ aus Gründen, die hier nicht diskutiert werden sollen. Diese Konstruktion ist sogar funktoriell in dem Sinne, daß jeder stetige Homomorphismus von topologischen Gruppen  $\phi : G \rightarrow H$  einen Morphismus von Räumen mit Operation  $\phi \setminus E\phi : EG \rightarrow EH$  induziert. Gegeben ein  $G$ -Raum  $X$  ist dann die Projektion  $EG \times X \rightarrow X$  mit der diagonalen  $G$ -Operation vorne offensichtlich eine bagazyklische Auflösung und darüber hinaus basisfest final mit zusammenhängenden Fasern.

**Definition 7.3.14.** Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  erklären wir die  $G$ -äquivariante derivierte Kategorie von  $X$  mithilfe der Milnor-Konstruktion [TG] 7.3.5 eines universellen Bündels  $EG$  als die äquivariante derivierte Kategorie zur bagazyklischen Auflösung  $\text{pr}_X : EG \times X \rightarrow X$  und setzen also in Formeln

$$\begin{aligned} \text{Der}_{G \setminus}(X) &:= \text{Der}_{G \setminus}(X; EG \times X) \\ &= \{\mathcal{F} \in \text{Der}(EG \times_{/G} X) \mid \exists \mathcal{G} \in \text{Der}(X) \text{ mit } \text{pr}_X^* \mathcal{G} \cong \text{quot}^* \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

**Lemma 7.3.15 (Freie Quotienten und Rückzug).** Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X \rightarrow Y$  eine stetige bagazyklische  $G$ -äquivariante Abbildung von topologisch freien  $G$ -Räumen. So gilt:

1. Die induzierte Abbildung  $X/G \rightarrow Y/G$  ist bagazyklisch;
2. Ein Objekt  $\mathcal{F} \in \text{Der}(X/G)$  kommt von  $Y/G$  her genau dann, wenn sein Rückzug nach  $X$  von  $Y$  herkommt.

*Beweis.* Nach Annahme besitzt jeder Punkt von  $Y/G$  eine offene Umgebung  $W \Subset Y/G$ , auf der die Projektion eine stetige Spaltung  $W \hookrightarrow Y$  besitzt. Mit dem entsprechenden Faserprodukt  $F$  erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X/G & \longleftarrow & X & \longleftarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y/G & \longleftarrow & Y & \longleftarrow & W \end{array}$$

In diesem Diagramm ist nach 7.2.20 auch das linke Quadrat kartesisch. Folglich ist auch das einhüllende Rechteck kartesisch und seine Horizontalen sind offene Einbettungen. Die Eigenschaft bagazyklisch ist nun lokal in der Basis und das zeigt die erste Aussage. Weiter zeigt in der Situation von Teil 2 Rückzug auf die rechte Vertikale, daß unser  $\mathcal{F}$  lokal von unten herkommt. Damit aber kommt es nach 3.1.7 auch global von unten her.  $\square$

**Lemma 7.3.16 (Unabhängigkeit von der Wahl der Auflösung).** Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  und ein Morphismus  $a : P \rightarrow Q$  von bagazyklischen Auflösungen ist der Rückzug auf unseren derivierten Kategorien eine Äquivalenz

$$\text{Der}_{G \setminus}(X; Q) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{G \setminus}(X; P)$$

7.3.17. Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  und eine bagazyklische Auflösung  $p : P \rightarrow X$  liefern insbesondere die Rückzüge längs der Projektionen Äquivalenzen von Kategorien

$$\text{Der}_{G \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{G \setminus}(X; EG \times_X P) \xleftarrow{\cong} \text{Der}_{G \setminus}(X; P)$$

*Beweis.* Gegeben bagazyklische Auflösungen  $P, Q$  ist offensichtlich auch ihr Produkt  $P \times_X Q$  mit der diagonalen  $G$ -Wirkung eine bagazyklische Auflösung. Wir beginnen damit, das Lemma im Fall der Projektion  $P \times_X Q \rightarrow Q$  zu zeigen. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G \setminus(P \times_X Q) & \longleftarrow & P \times_X Q & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ G \setminus Q & \longleftarrow & Q & \longrightarrow & X \end{array}$$

sind dann die Vertikalen garbenazyklisch. Damit ist der Rückzug längs jeder Vertikale schon mal ein volltreuer Funktor. Es gilt zu zeigen, daß der Rückzug längs der linken Vertikale auch essentiell surjektiv ist auf den entsprechenden Kategorien. Ein Objekt von  $\text{Der}_{G\setminus}(X; P \times_X Q)$  ist charakterisiert durch die Eigenschaft, daß sein Rückzug nach  $P \times_X Q$  von  $X$  herkommt. A fortiori kommt dieser Rückzug dann auch von  $Q$  her, und dann zeigt Lemma 7.3.15 über freie Quotienten und Rückzug, daß unser Objekt bereits selbst von  $\text{Der}_{G\setminus}(X; Q)$  herkommen muß. Damit ist das Lemma für den durch die Projektion gegebenen Morphismus von bagazyklischen Auflösungen  $\text{pr}_Q : P \times_X Q \rightarrow Q$  gezeigt. Ist  $a : P \rightarrow Q$  ein beliebiger Morphismus von bagazyklischen Auflösungen, so können wir den Morphismus von bagazyklischen Auflösungen  $(\text{id}, a) : P \rightarrow P \times_X Q$  betrachten und wegen  $\text{pr}_P \circ (\text{id}, a) = \text{id}$  muß dann auch der Rückzug mit  $(\text{id}, a)$  eine Äquivalenz von Kategorien  $\text{Der}_{G\setminus}(X; P \times_X Q) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{G\setminus}(X; P)$  sein. Mit  $\text{pr}_Q \circ (\text{id}, a) = a$  folgt das Lemma im allgemeinen.  $\square$

**7.3.18 (Übergang zu Standardauflösungen).** Ist  $G\setminus X \rightarrow H\setminus Y$  ein Morphismus von Räumen mit Gruppenoperation und  $G\setminus P \rightarrow H\setminus Q$  ein Lift zu einem Morphismus von bagazyklischen Auflösungen und  $G\setminus P' \rightarrow H\setminus Q'$  ein weiterer derartiger Lift, so erhalten wir ein Diagramm aus Rückzügen und Isotransformationen

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Der}_{G\setminus}(X; P) & \xrightarrow{\sim} & \text{Der}_{G\setminus}(X; P \times_X P') & \xleftarrow{\sim} & \text{Der}_{G\setminus}(X; P') \\
 \uparrow & \swarrow \sim & \uparrow & \searrow \sim & \uparrow \\
 \text{Der}_{H\setminus}(Y; Q) & \xrightarrow{\sim} & \text{Der}_{H\setminus}(Y; Q \times_X Q') & \xleftarrow{\sim} & \text{Der}_{H\setminus}(Y; Q')
 \end{array}$$

mit Äquivalenzen in den Horizontalen und Rückzügen in den Vertikalen. So sehen wir zum Beispiel, daß wenn wir einen Lift unseres Morphismus zu einem Morphismus von bagazyklischen Auflösungen so finden können, der Rückzug eine Äquivalenz  $\text{Der}_{H\setminus}(Y; Q) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{G\setminus}(X; P)$  induziert, daß er dann für jeden derartigen Lift eine Äquivalenz induziert und damit insbesondere eine Äquivalenz  $\text{Der}_{H\setminus}(Y) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{G\setminus}(X)$  für die mit den Milnorkonstruktionen erklärten äquivarianten derivierten Kategorien.

**7.3.19 (Äquivariante derivierte Kategorien für die triviale Gruppe).** Unsere Äquivalenz zwischen äquivarianten Garben für die triviale Gruppe und gewöhnlichen Garben auf einem Raum  $X$  erhalten wir nocheinmal als die Verknüpfung

$$\text{Der}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{1\setminus}(X; X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{1\setminus}(X)$$

mit dem Rückzug unter dem Morphismus  $E1 \times X \rightarrow X$  von bagazyklischen Auflösungen als zweitem Funktor und dem offensichtlichen ersten Funktor.

7.3.20. Wir definieren die Kategorie  $\text{Topoga}$  aller Tripel  $(P, G, X)$  bestehend aus einem Raum mit Gruppenoperation  $G \setminus X$  und einer **Auflösung**  $P$  von  $X$ . Morphismen  $(P, G, X) \rightarrow (Q, H, Y)$  sind Tripel  $(a, \phi, f)$  mit  $a : P \rightarrow Q$  und  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\phi : G \rightarrow H$  einem stetigen Gruppenhomomorphismus derart, daß  $\phi \setminus f$  sowie  $\phi \setminus a$  Morphismen von Räumen mit Operation sind. Der Rückzug von Garben liefert dann in offensichtlicher Weise eine Trennfaserung über der banalen Trennkategorie unserer Kategorie  $\text{Topoga}$  mit der opponierten Kategorie zu  $\text{Der}_{G \setminus X}(X; P)$  als Faser über  $(P, G, X)$ . Lassen wir als Schreimorphismen nur Tripel  $(a, \text{id}, f)$  zu mit  $f$  einer les-Abbildung und so, daß der Morphismus  $a$  von Auflösungen zusammen mit  $f$  ein kartesisches Diagramm liefert, und notieren diese Unterkategorie  $\text{Topoga}^{\text{les}}$ , so erhalten wir eine verflochtene Trenaustauschsituation

$$(\text{Der}_{\text{Topoga}}^- \rightarrow \text{Topoga} \supset \text{Topoga}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{\text{Topoga}^{\text{les}}}^{-!}, \text{Topoga}^{\text{es}})$$

. Lassen wir als Schreimorphismen nur Tripel  $(a, \text{id}, f)$  zu mit  $f$  einer lesb-Abbildung, die wir  $\text{Topoga}^{\text{lesb}}$  notieren, so erhalten wir sogar für die unbeschränkten derivierten Kategorien eine verflochtene Trenaustauschsituation

$$(\text{Der}_{\text{Topoga}} \rightarrow \text{Topoga} \supset \text{Topoga}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Der}_{\text{Topoga}^{\text{lesb}}}^!, \text{Topoga}^{\text{esb}})$$

7.3.21 (**Äquivarianter Drei-Funktor-Formalismus**). Bezeichne nun  $\text{Topog}$  die Kategorie der topologischen Räume mit Operation einer topologischen Gruppe. Unsere Trennfaserung  $\text{Der}_{\text{Topog}} \rightarrow \text{Topog}$  aus 7.3.20 ?????????? restringiert zu einer Trennfaserung

$$\text{Der}_{\text{Topog}} \rightarrow \text{Topog}$$

mit der opponierten Kategorie zur äquivarianten derivierten Kategorie  $\text{Der}_{G \setminus X}(X)$  als Faser über  $G \setminus X$ . Wir können also Objekte der äquivarianten derivierten Kategorien tensorieren und zurückziehen sowohl unter stetigen Abbildungen als auch unter stetigen Gruppenhomomorphismen, und diese ganzen Konstruktionen sind miteinander verträglich. Den Rückzug unter einem stetigen Gruppenhomomorphismus  $\phi : H \rightarrow G$  notieren wir

$$\phi^* = \text{res}_G^H : \text{Der}_{G \setminus X}(X) \rightarrow \text{Der}_{H \setminus X}(X)$$

Des weiteren ist für jede unter einer topologischen Gruppe  $G$  äquivariante lokal eigentliche separierte Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  auch die induzierte Abbildung  $EG \times_{/G} X \rightarrow EG \times_{/G} Y$  lokal eigentlich separiert und lokal eigentlicher Basiswechsel zeigt, daß der Schreivorschub mit dieser Abbildung einen Funktor

$$f! : \text{Der}_{G \setminus X}(X) \rightarrow \text{Der}_{G \setminus X}(Y)$$

induziert, wenn  $f$  sogar eine lesb-Abbildung ist, und sonst immer noch einen Funktor

$$f_! : \text{Der}_{G \setminus}^+(X) \rightarrow \text{Der}_{G \setminus}^+(Y)$$

Insbesondere erhalten wir so für eine beliebige aber feste topologische Gruppe  $G$ -äquivalente Analoga  $\text{Der}_{//G \setminus \text{Top}}^-$  und  $\text{Der}_{//G \setminus \text{Top}}$  unserer in ?? und ?? betrachteten verflochtenen Trennaustauschsituationen. Das alles ist jedoch zusätzlich noch verträglich mit dem Rückzug unter stetigen Gruppenhomomorphismen und ist formal eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$(\text{Der}_{//\text{Topog}}^- \rightarrow \text{Topog} \supset \text{Topog}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Topog}^{\text{les}}}^{-!}, \text{Topog}^{\text{es}})$$

mit der Maßgabe, daß wir in  $\text{Topog}^{\text{les}}$  nur lokal eigentliche separierte äquivalente Abbildungen zwischen Räumen mit Gruppenoperation zulassen, bei denen der entsprechende Gruppenhomomorphismus ein Isomorphismus ist, und bei  $\text{Topog}^{\text{es}}$  nur eigentliche derartige Abbildungen. Ebenso erhalten wir eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$(\text{Der}_{//\text{Topog}} \rightarrow \text{Topog} \supset \text{Topog}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Topog}^{\text{lesb}}}^!, \text{Topog}^{\text{esb}})$$

mit unbeschränkten äquivalenten derivierten Kategorien als Fasern, wenn wir in  $\text{Topog}^{\text{lesb}}$  nur lesb-Abbildungen zulassen und ebenso bei  $\text{Topog}^{\text{esb}}$  nur eigentliche lesb-Abbildungen. Salopp gesprochen kann man also mit  $(f^*, \otimes, f_!)$  äquivalent so rechnen, als gebe es die Gruppenoperation gar nicht, und kann dabei die Gruppenoperation zurückziehen unter stetigen Gruppenhomomorphismen  $\text{res}_G^H = \phi^*$ , ohne daß das die restlichen Formeln beeinflußt.

7.3.22. Insbesondere liefert der Rückzug auf die triviale Gruppe gefolgt von einem Quasiinversen der Äquivalenz 7.3.12 alias dem Vorschub unter  $E1 \times X \rightarrow X$  einen triangulierten Funktor

$$\text{Der}_{G \setminus}(X) \rightarrow \text{Der}(X)$$

Wir nennen ihn das **Vergessen der Gruppenoperation**. Die Konstruktion zeigt, daß ein Objekt, daß beim Vergessen der Gruppenoperation zu Null wird, bereits Null gewesen sein muß. Mithin müssen auch Morphismen, die beim Vergessen der Gruppenoperation Isomorphismen werden, bereits Isomorphismen gewesen sein. Das Vergessen der Gruppenoperation ist in offensichtlicher Weise verträglich mit unseren Funktoren  $(f^*, \otimes, f_!)$ . Formal ist diese Aussage für die Restriktion  $\text{Der}_{G \setminus}(X) \rightarrow \text{Der}_{1 \setminus}(X)$  auf die triviale Gruppe Teil des äquivalenten Drei-Funktor-Formalismus 7.3.21 und für die Äquivalenzen  $\text{Der}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{1 \setminus}(X)$  Teil des mit Auflösungen angereicherten äquivalenten Drei-Funktor-Formalismus 7.3.20 zusammen mit der Unabhängigkeit 7.3.16 von der Auflösung.

## 7.4 Äquivariante Varianten der Adjungierten

7.4.1. Um die Existenz der Adjungierten  $(f_*, \Rightarrow, f^!)$  zu  $(f^*, \otimes, f_!)$  im äquivarianten Kontext zeigen, benötigen wir zusätzliche Voraussetzungen an unsere Gruppe. Wir werden zeigen, daß es diese Adjungierten im Fall von Liegruppen stets gibt und daß sie in diesen Fällen auch mit dem Zurückziehen der Operation verträglich sind. Die Frage der Existenz von Adjungierten zur Restriktion der Gruppenwirkung diskutieren wir im anschließenden Abschnitt.

**Lemma 7.4.2 (Vertauschen von Rückzug und internem Hom).** *Gegeben ein Faserbündel  $f : X \rightarrow Y$  mit offenlokal bagazyklischer Faser ist für alle  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  der natürliche Morphismus aus 1.5.11 ein Isomorphismus*

$$f^*(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f^* \mathcal{F} \Rightarrow f^* \mathcal{G})$$

*Beweis.* Mit unserem Verschwindungskriterium [TD] ?? können wir uns darauf beschränken, zu zeigen, daß für  $f : X \rightarrow Y$  garbenazyklisch der obige Morphismus einen Isomorphismus  $f_* f^*(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_*(f^* \mathcal{F} \Rightarrow f^* \mathcal{G})$  induziert. Da jedoch die Einheit der Adjunktion in diesem Fall eine Isotransformation  $\text{id} \xrightarrow{\sim} f_* f^*$  ist, reicht es zu zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f_* f^*(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) & \longrightarrow & f_*(f^* \mathcal{F} \Rightarrow f^* \mathcal{G}) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{F} \Rightarrow f_* f^* \mathcal{G}) \end{array}$$

kommutiert mit der rechten Vertikale aus 1.5.9. Um das zu sehen, dürfen wir die Adjunktion anwenden und statt beiden  $f_*$  in der oberen Horizontale vor beide Ausdruck der unteren Horizontale ein  $f^*$  davorschreiben. Dann steht in der linken Vertikale die Identität und die Kommutativität folgt aus der Definition der beteiligten Morphismen.  $\square$

**Satz 7.4.3 (Äquivarianter Vorschub und internes Hom).** *Gegeben eine offenlokal zusammenziehbare Gruppe  $G$  gilt:*

1. *Für jeden  $G$ -Raum  $X$  ist  $\text{Der}_{G \setminus}(X) \subset \text{Der}(EG \times_{/G} X)$  stabil unter internem Hom  $\Rightarrow$  und insbesondere hat die Schmelzkategorie  $\text{Der}_{G \setminus}(X)$  internes Hom;*
2. *Für jede stetige  $G$ -äquivariante Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von  $G$ -Räumen bildet der Vorschub  $(\text{id} \times_{/G} f)_*$  die Kategorie  $\text{Der}_{G \setminus}(X)$  nach  $\text{Der}_{G \setminus}(Y)$  ab und liefert mithin einen Rechtsadjungierten  $f_*$  von  $f^*$ .*



*Beweis.* Die erste Aussage folgt mit dem Vertauschen von Rückzug und internem Hom 7.4.2 aus der Erkenntnis [TG] 7.3.8, daß mit  $G$  auch  $EG$  offenlokal zusammenziehbar ist. Die zweite Aussage folgt genauso mit gefasertem Basiswechsel 3.2.2.  $\square$

7.4.4. Gegeben ein stetiger Homomorphismus von offenlokal zusammenziehbaren Gruppen  $G \rightarrow H$  liefert die Restriktion  $\text{res}_H^G f^* f_* \Rightarrow \text{res}_H^G$  der Koeinheit der Adjunktion zunächst  $f^* \text{res}_H^G f_* \Rightarrow \text{res}_H^G$  und dann  $\text{res}_H^G f_* \Rightarrow f_* \text{res}_H^G$ . Ich behaupte, daß diese letzte Transformation eine Isotransformation

$$\text{res}_H^G f_* \xrightarrow{\sim} f_* \text{res}_H^G$$

ist. Da unter Restriktion nur Isomorphismen zu Isomorphismen werden, müssen wir unsere Behauptung nur für die triviale Gruppe  $G = 1$  prüfen. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E1 \times X & \rightarrow & EH \times X & \rightarrow & EH \times_{/H} X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E1 \times Y & \rightarrow & EH \times Y & \rightarrow & EH \times_{/H} Y \end{array}$$

Es gilt zu zeigen, daß für  $\mathcal{F} \in \text{Der}_{\setminus H}(X) \subset \text{Der}(EH \times_{/H} X)$  der Basiswechsel zur derivierten Garbenopfaserung im einhüllenden Rechteck einen Isomorphismus liefert. Im rechten Teilrechteck gilt das schon mal nach gefasertem Basiswechsel. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E1 \times X & \rightarrow & EH \times X & \rightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E1 \times Y & \rightarrow & EH \times Y & \rightarrow & Y \end{array}$$

liefert der Basiswechsel zur derivierten Garbenopfaserung sowohl im einhüllenden Rechteck als auch im rechten Teilrechteck einen Isomorphismus, wieder nach gefasertem Basiswechsel. Also induziert er im linken Teilrechteck einen Isomorphismus für alle Objekte, die durch Rückzug von  $X$  herkommen. Setzen wir diese Erkenntnis oben ein, so folgt die Behauptung.

7.4.5. Gegeben ein stetiger Homomorphismus von offenlokal zusammenziehbaren Gruppen  $G \rightarrow H$  liefert die Komposition

$$(\text{res}_H^G \mathcal{F}) \otimes \text{res}_H^G(\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \text{res}_H^G(\mathcal{F} \otimes (\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{H})) \rightarrow \text{res}_H^G \mathcal{H}$$

durch das Herüberschaffen von  $\text{res}_H^G \mathcal{F}$  einen natürlichen Morphismus, von dem ich behaupte, daß er ein Isomorphismus

$$\text{res}_H^G(\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} (\text{res}_H^G \mathcal{F}) \rightrightarrows (\text{res}_H^G \mathcal{H})$$

ist. Da unter Restriktion nur Isomorphismen zu Isomorphismen werden, müssen wir unsere Behauptung nur für die triviale Gruppe  $G = 1$  prüfen. Das geht analog wie in 7.4.4, nur einfacher.

**Lemma 7.4.6.** *Ist  $E$  ein offenlokal bagazyklischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  lesb, so ist die offensichtliche Transformation eine Isotransformation*

$$\mathrm{pr}_X^* f^! \xrightarrow{\cong} (\mathrm{id} \times f)^! \mathrm{pr}_Y^*$$

*Beweis.* Nach unserem Verschwindungskriterium [TD] ?? reicht es zu zeigen, daß für  $E$  bagazyklisch unsere Transformation unter  $\mathrm{pr}_{X^*}$  eine Isotransformation wird. Das folgt jedoch unmittelbar aus lokal eigentlichem Basiswechsel.  $\square$

**Satz 7.4.7 (Äquivarianter Eigrückzug).** *Gegeben eine Liegruppe  $G$  und eine  $G$ -äquivariante lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von  $G$ -Räumen bildet der Eigrückzug  $(\mathrm{id} \times_{/G} f)^!$  die Kategorie  $\mathrm{Der}_{G \setminus}(Y)$  nach  $\mathrm{Der}_{G \setminus}(X)$  ab und liefert mithin einen Rechtsadjungierten  $f^!$  von  $f$ .*

*Beweis.* Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} EG \times_{/G} X & \xleftarrow{\mathrm{quo}_X} & EG \times X & \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} & X \\ \downarrow \mathrm{id} \times_{/G} f & & \downarrow \mathrm{id} \times f & & \downarrow f \\ EG \times_{/G} Y & \xleftarrow{\mathrm{quo}_Y} & EG \times Y & \xrightarrow{\mathrm{pr}_Y} & Y \end{array}$$

Die horizontalen Abbildungen nach links sind  $d$ -mannigfaltig für  $d = \dim G$  und jede Wahl einer äquivarianten Orientierung von  $G$  liefert eine Trivialisierung ihrer relativen Orientierungsgarbe und damit liefern unsere Erkenntnisse 6.2.8 zum mannigfaltigen Rückzug Isotransformationen  $\mathrm{quo}_Y^* \xrightarrow{\cong} \mathrm{quo}_Y^![-d]$  und  $\mathrm{quo}_X^* \xrightarrow{\cong} \mathrm{quo}_X^![-d]$ . So folgt  $\mathrm{quo}_X^*(\mathrm{id} \times_{/G} f)^! \mathcal{F} \cong (\mathrm{id} \times f)^! \mathrm{quo}_Y^* \mathcal{F}$  für alle  $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(EG \times_{/G} Y)$  und aus  $\mathrm{quo}_Y^* \mathcal{F} \cong \mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G}$  folgt mit unserem Lemma 7.4.6 unmittelbar

$$\mathrm{quo}_X^*(\mathrm{id} \times_{/G} f)^! \mathcal{F} \cong (\mathrm{id} \times f)^! \mathrm{quo}_Y^* \mathcal{F} \cong (\mathrm{id} \times f)^! \mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G} \cong \mathrm{pr}_X^* f^! \mathcal{G} \quad \square$$

7.4.8. Gegeben ein stetiger Homomorphismus  $G \rightarrow H$  von mannigfaltigen Gruppen liefert die Restriktion der Koeinheit der Adjunktion  $\mathrm{res}_H^G f_! f^! \Rightarrow \mathrm{res}_H^G$  zunächst  $f_! \mathrm{res}_H^G f^! \Rightarrow \mathrm{res}_H^G$  und dann  $\mathrm{res}_H^G f^! \Rightarrow f^! \mathrm{res}_H^G$ . Ich behaupte, daß diese letzte Transformation eine Isotransformation

$$\mathrm{res}_H^G f^! \xrightarrow{\cong} f^! \mathrm{res}_H^G$$

ist. Da unter Restriktion nur Isomorphismen zu Isomorphismen werden, müssen wir unsere Behauptung nur für die triviale Gruppe  $G = 1$  prüfen. Das geht analog wie wir es in 7.4.4 im Fall des Vorschubs ausgeführt hatten.

## 7.5 Äquivalenzen mit Gruppenwechsel

**Satz 7.5.1 (Quotientenäquivalenz).** *Operiert eine topologische Gruppe  $G$  topologisch frei auf einem topologischen Raum  $X$ , so ist der äquivariante Rückzug eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}_{1\backslash}(G\backslash X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X)$$

*Beweis.* Aufgrund der Unabhängigkeit 7.3.16 von der Wahl der bagazyklischen Auflösung reicht es zu zeigen, daß der äquivariante Rückzug eine Äquivalenz

$$\mathrm{Der}_{1\backslash}(G\backslash X; G\backslash X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X)$$

induziert. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} EG \times_{/G} X & \longleftarrow & EG \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ G\backslash X & \longleftarrow & X & \longrightarrow & X \end{array}$$

Da  $G$  topologisch frei auf  $X$  operiert, ist die linke Vertikale ein Faserbündel mit Faser  $EG$  und ist insbesondere garbenazyklisch. Wir müssen also nur zeigen, daß jedes Objekt links oben, dessen Rückzug in die Mitte von unten herkommt, bereits selbst von unten herkommt. Das aber folgt aus unserem Lemma 7.3.15 über freie Quotienten und Rückzug.  $\square$

**Satz 7.5.2 (Verfeinerte Quotientenäquivalenz).** *Operiert eine topologische Gruppe  $G$  auf einem Raum  $X$  und ist  $H \subset G$  ein Normalteiler, der sowohl auf  $G$  als auch auf  $X$  topologisch frei operiert, so induziert der Rückzug mit der Quotientenabbildung  $G\backslash X \rightarrow (H\backslash G)\backslash(H\backslash X)$  eine Äquivalenz*

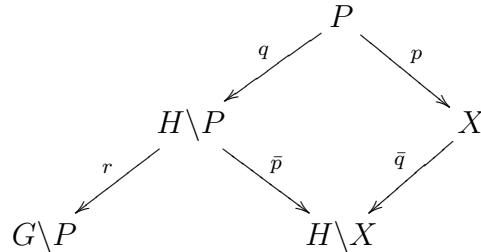
$$\mathrm{Der}_{(H\backslash G)\backslash}(H\backslash X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X)$$

*Beweis.* Wir setzen  $P := EG \times X \rightarrow X$ . Nach 7.2.20 erhalten wir ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ H\backslash P & \longrightarrow & H\backslash X \end{array}$$

Hier ist auch die untere Horizontale bagazyklisch, da sie sich lokal in der Basis als Rückzug der oberen Horizontale beschreiben läßt. Es ist leicht zu sehen, daß  $H\backslash P$  topologisch frei ist als  $(H\backslash G)$ -Raum und daß die offensichtliche Abbildung

einen Homöomorphismus  $c : G \setminus P \xrightarrow{\sim} (H \setminus G) \setminus (H \setminus P)$  induziert. Wir betrachten nun das Diagramm



und behaupten, daß das Zurückholen mit  $c$  eine Äquivalenz

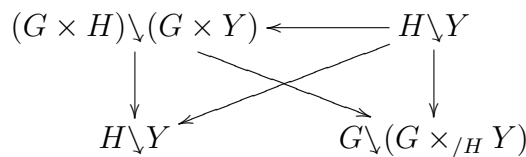
$$\mathrm{Der}_{(H \setminus G) \setminus} (H \setminus X; H \setminus P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{G \setminus} (X; P)$$

induziert. In der Tat, gibt es für  $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(G \setminus P)$  ein  $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(H \setminus X)$  mit  $r^* \mathcal{F} \cong \bar{p}^* \mathcal{G}$ , so folgt  $(r \circ q)^* \mathcal{F} \cong p^*(\bar{q}^* \mathcal{G})$  und folglich  $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}_{G \setminus} (X; P)$ . Gibt es umgekehrt  $\mathcal{G}' \in \mathrm{Der}(X)$  mit  $(r \circ q)^* \mathcal{F} \cong p^* \mathcal{G}'$ , so gibt es nach Lemma 7.3.15 über freie Quotienten und Rückzug ein  $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(H \setminus X)$  mit  $r^* \mathcal{F} \cong \bar{p}^* \mathcal{G}$ . Der Satz folgt mit 7.3.18.  $\square$

**Satz 7.5.3 (Induktionsäquivalenz).** Gegeben  $H \subset G$  eine Untergruppe, die topologisch frei auf  $G$  operiert, und  $Y$  ein  $H$ -Raum liefert das Zurückholen längs des offensichtlichen Morphismus  $H \setminus Y \rightarrow G \setminus (G \times_{/H} Y)$  eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Der}_{G \setminus} (G \times_{/H} Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{H \setminus} (Y)$$

*Beweis.* Wir betrachten zusätzlich  $(G \times H) \setminus (G \times Y)$  mit der Operation gegeben durch  $(g, h)(x, y) := (gxh^{-1}, hy)$  und erhalten ein kommutatives Diagramm



mit der oberen Horizontale gegeben durch  $h \mapsto (h, h)$  und  $y \mapsto (1, y)$ . Die Rückzüge in die obere linke Ecke sind verallgemeinerte Quotientenäquivalenzen. Es folgt, daß erst der Rückzug längs der oberen Horizontale und dann der Rückzug längs der rechten Vertikale auch Äquivalenzen sind.  $\square$

## 7.6 Vernachlässigen zusammenziehbarer Anteile

**Satz 7.6.1 (Operationen zusammenziehbarer Gruppen).** Operiert eine zusammenziehbare topologische Gruppe  $N$  auf einem topologischen Raum  $X$ , so ist das

Vergessen der Gruppenoperation für  $m, \text{pr} : N \times X \rightarrow X$  die Operation beziehungsweise die Projektion eine Äquivalenz

$$\text{Der}_{N \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \{\mathcal{F} \in \text{Der}(X) \mid m^* \mathcal{F} \cong \text{pr}^* \mathcal{F}\}$$

*Beweis.* Per definitionem ist  $\text{Der}_{N \setminus}(X; N \times X)$  die Kategorie

$$\{\mathcal{F} \in \text{Der}(N \times_{/N} X) \mid \exists \mathcal{G} \in \text{Der}(X) \text{ mit } \text{quo}^* \mathcal{F} \cong \text{pr}^* \mathcal{G}\}$$

Die Multiplikation induziert hier einen Homöomorphismus  $\bar{m} : N \times_{/N} X \xrightarrow{\cong} X$  mit  $\bar{m} \circ \text{quo} = m$ . Jetzt müssen wir nur noch bemerken, daß aus  $m^* \mathcal{F} \cong \text{pr}^* \mathcal{G}$  mit der Einschränkung unter  $X \rightarrow N \times X$  mit  $x \mapsto (1, x)$  folgt  $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ .  $\square$

**Proposition 7.6.2 (Volltreues Einschränken).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe, die auf  $G$  topologisch frei operiert. Ist  $G/H$  bagazyklisch, so ist für jeden  $G$ -Raum  $X$  die Restriktion ein volltreuer Funktor*

$$\text{Der}_{G \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{H \setminus}(X)$$

7.6.3. Den Fall  $H = 1$  haben wir bereits in 7.6.1 behandelt. Ich wundere mich, daß die analoge Aussage in 7.2.30 so viel schwächere Voraussetzungen braucht. Ich wüßte zum Beispiel gerne, ob das Einschränken unter surjektiven Gruppenhomomorphismen volltreu ist, etwa für die Identität auf der Kreislinie, einmal mit der diskreten und einmal mit der üblichen Topologie versehen.

*Beweis.* Die Projektion  $EG \times_{/H} X \rightarrow EG \times_{/G} X$  ist eine Faserung mit Faser  $G/H$  und damit nach 3.1.5 garbenazyklisch. Das Zurückholen darunter liefert mithin einen volltreuen Funktor  $\text{Der}(EG \times_{/G} X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}(EG \times_{/H} X)$  und a forteriori auch einen volltreuen Funktor

$$\text{Der}_{G \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{H \setminus}(X; EG \times X).$$

Mit dem Übergang zu Standardauflösungen 7.3.18 folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 7.6.4 (Irrelevante Operationen).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum und  $N \subset G$  ein zusammenziehbarer Normalteiler, der trivial auf  $X$  und topologisch frei auf  $G$  operiert. So ist der Rückzug eine Äquivalenz*

$$\text{Der}_{(N \setminus G) \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{G \setminus}(X)$$

*Beweis.* Jede Auflösung  $P \rightarrow X$  können wir faktorisieren als  $P \rightarrow N \setminus P \rightarrow X$ . Die Komposition ist bagazyklisch und die erste Abbildung desgleichen, also ist

auch die zweite Abbildung bagazyklisch und somit eine  $(N \setminus G)$ -Auflösung von  $X$ . Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G \setminus P & \longleftarrow & P & \longrightarrow & X \\ \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \\ (N \setminus G) \setminus (N \setminus P) & \longleftarrow & N \setminus P & \longrightarrow & X \end{array}$$

Da die mittlere Vertikale garbenazyklisch ist, müssen zwei Objekte unten, deren Rückzüge oben isomorph sind, bereits unten isomorph gewesen sein. Der Satz folgt.  $\square$

**Korollar 7.6.5 (Quotienten nach zusammenziehbaren Gruppen).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum und  $N \subset G$  ein zusammenziehbarer Normalteiler, der topologisch frei auf  $X$  und  $G$  operiert. So ist der Rückzug eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}_{G \setminus} (N \setminus X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{G \setminus} (X)$$

*Beweis.* Die Verknüpfung von Rückzügen

$$\mathrm{Der}_{(N \setminus G) \setminus} (N \setminus X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{G \setminus} (N \setminus X) \rightarrow \mathrm{Der}_{G \setminus} (X)$$

ist unsere verallgemeinerte Quotientenäquivalenz und der Erste unserer Funktoren ist eine Äquivalenz nach 7.6.4. Das Korollar folgt.  $\square$

## 7.7 Danksagung

7.7.1. Eine wesentliche Quelle und Motivation waren für mich die Lecture Notes von Bernstein und Lunts [BL94].

## **8 Schrotthalde**

## 9 Wohin? Hier unnötig.

### 9.1 Relativ angereicherte Schmelz- und Trennkategorien

9.1.1. Ähnlich wie im Fall angereicherter Schmelzkategorien in [TSK] 2.4.1 folgende besprechen wir zunächst „relative additive Strukturen“ und „relative  $(\mathcal{S}, v)$ -Strukturen“, bevor wir das allgemeine Konzept einer relativen  $\mathcal{S}$ -Trennkategorie einführen.

9.1.2. Gegeben ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  erklären wir eine **relative additive Struktur** als die Vorgabe einer Verknüpfung auf der Menge

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r)$$

der Trennungen über einer festen Trennung  $f : p\mathcal{F} \rightarrow p\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge p\mathcal{G}_r$  der Basis für beliebige Objekte  $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_r \in \mathcal{M}$  derart, daß unsere Mengen mit diesen Verknüpfungen abelsche Gruppen werden und unsere Multiverknüpfungen für diese Gruppenstrukturen multiadditiv.

*Beispiel 9.1.3 (Relative additive Struktur der Garbenoptrennfaserung).* Bei unserer Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  ist für jede feste Trennung der Basis  $f = (f_1, \dots, f_r)$  alias jedes Tupel stetiger Abbildungen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  und abelsche Garben  $\mathcal{F}, \mathcal{G}_i$  auf  $X, Y_i$  die Menge  $\text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r)$  von Multiopkomorphismen eine abelsche Gruppe in offensichtlicher Weise und wir erhalten so eine **relative additive Struktur**.

*Beispiel 9.1.4.* Eine Trennfaserung  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  mit additiven Fasern, deren Trennrückzüge additiv sind in jeder Variablen, besitzt genau eine relative additive Struktur, die die eindeutig bestimmten additiven Strukturen auf den Fasern fortsetzt. Wir erhalten unsere relative additive Struktur der Garbenoptrennfaserung als Spezialfall ein weiteres Mal.

*Beispiel 9.1.5 (Relative additive Struktur durch Leerfaktorisierung).* Gegeben eine Trennfaserung über einer banalen Trennkategorie  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  mit Multihom in den opponierten Fasern und eine Faktorisierung  $L^{\text{opp}} = v \circ A$  des opponierten Leertrennungsfunktors über  $v : \text{Ab} \rightarrow \text{kEns}$  erhalten wir eine relative additive Struktur auf unserer Trennfaserung, indem wir Additionen auf den Verschmelzungsmengen dadurch festlegen, daß die durch unsere Daten gegebenen Bijektionen  $\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} vA(f^*\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F})$  Isomorphismen von abelschen Gruppen sein sollen.

9.1.6. Gegeben ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  und ein treuer Schmelzfunktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \text{kEns}$  verstehen wir unter einer **relativen  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur** die Vorgabe einer  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur auf der Menge

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r)$$



der Trennungen über einer festen Trennung  $f : p\mathcal{F} \rightarrow p\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge p\mathcal{G}_r$  der Basis für beliebige Objekte  $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_r \in \mathcal{M}$  derart, daß die Multiverknüpfungen mit den jeweiligen  $(\mathcal{S}, v)$ -Strukturen verträglich sind.

*Beispiel 9.1.7.* Die relativen additiven Strukturen in Bezug auf einen vorgegebenen Trennfunktor entsprechen in offensichtlicher Weise eineindeutig den relativen  $(\text{Ab}, v)$ -Strukturen.

9.1.8. Gegeben sei eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$ . Hat die Schmelzkategorie  $\mathcal{M}/_{\text{pt}}$  einen treuen Leerverschmelzungsfunktor, so erhalten wir auf unserer Trennfaserung eine relative  $(\mathcal{M}/_{\text{pt}}, \text{L})$ -Struktur mittels der Bijektionen

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X(\mathcal{F}, f^\dagger \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{/X}(\gamma, f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{/\text{pt}}(\gamma, \text{fin}_{X^*}(f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F}))$$

Wir nennen sie die **relative Finalstruktur**.

*Beispiel 9.1.9 (Relative Finalstruktur der Garbenoptrennfaserung).* Die als relative Finalstruktur nach 9.1.8 gegebene relative  $(\text{Ab}/_{\text{pt}}, \text{L})$ -Struktur auf der Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  wird unter der offensichtlichen Schmelzäquivalenz  $\text{Ab}/_{\text{pt}} \xrightarrow{\cong} \text{Ab}$  zu einer  $(\text{Ab}, v)$ -Struktur, die unter unseren Konstruktionen aus 9.1.7 hinwiederum der relativen additiven Struktur aus 9.1.3 entspricht.

9.1.10. Gegeben eine Schmelzkategorie  $\mathcal{S}$  und eine Trennkategorie  $\mathcal{N}$  erklären wir eine  **$\mathcal{S}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}$  über  $\mathcal{N}$**  als ein Datum aus einer Menge  $\mathcal{M}$  von Objekten, einer Abbildung  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  und für Objekte  $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_r \in \mathcal{M}$  und jede Trennung  $f : p\mathcal{F} \rightarrow p\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge p\mathcal{G}_r$  der Basis ein **Trennobjekt**

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) \in \mathcal{S}$$

sowie Multiverknüpfungen, die Verschmelzungen in  $\mathcal{S}$  sind derart, daß das offensichtliche Analogon der Assoziativitätsbedingung aus unserer Definition einer Schmelzkategorie erfüllt ist und daß es für jede Einsfamilie  $\mathcal{F}$  eine Leertrennung  $\text{id}_{\mathcal{F}} \in \mathcal{S}(\gamma, \mathcal{M}_{\text{id}}(\mathcal{F}_*, \mathcal{F}))$  in das Trennobjekt über  $\text{id}_{p\mathcal{F}}$  gibt, das die Analoga unserer Forderungen an Identitätsverschmelzungen aus [TSK] 2.4.14 erfüllt. Als wieder andere Sprechweise sagen wir,  $\mathcal{M}$  **sei angereichert in  $\mathcal{S}$  über  $\mathcal{N}$**  und schreiben  $\mathcal{M}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  oder  $\mathcal{M}/(\mathcal{S}, \mathcal{N})$ .

*Beispiele 9.1.11.* Sei  $\mathcal{N}$  eine Trennkategorie. Ein Trennfunktor  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ist dasselbe wie eine  $\text{kEns}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}$  über  $\mathcal{N}$ . Eine  $\text{Ab}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}/\text{Ab} \rightarrow \mathcal{N}$  ist dasselbe wie ein Trennfunktor  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  mit einer relativen additiven Struktur.

*Beispiel 9.1.12.* Sei  $v : \mathcal{S} \rightarrow \text{kEns}$  ein treuer Schmelzfunktor. Wir erinnern aus [TSK] 1.6.18 die Schmelzkategorie  $\text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)}$  der Mengen mit  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur. Ein Trennfunktor  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  mit relativer  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur ist eine  $\text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}/\text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)} \rightarrow \mathcal{N}$  über  $\mathcal{N}$ . Es ist auch im wesentlichen dasselbe wie eine  $\mathcal{S}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  über  $\mathcal{N}$ , wie in 9.1.15 ausgeführt wird.

9.1.13. Gegeben ein Schmelzfunktor  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  und eine Trennkategorie  $\mathcal{N}$  und angereicherte Trennfunktor  $\mathcal{L}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  sowie  $\mathcal{M}/\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{N}$  erklären wir einen **angereicherten Trennfunktor  $F$  über  $\varphi$  relativ zu  $\mathcal{N}$**  ein Datum aus einer Abbildung auf den Objekten  $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  über  $\mathcal{N}$  zusammen mit  $\mathcal{T}$ -Morphismen

$$F : \varphi(\mathcal{L}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{M}_f(F\mathcal{F}, F\mathcal{B})$$

für jede Trennung  $f$  der Basis  $\mathcal{N}$ , die mit Multiverknüpfungen verträglich sind und Identitäten auf Identitäten werfen in der offensichtlichen Weise. Wir notieren so einen relativ angereicherten Trennfunktor  $F$  auch ausführlicher  $F/\varphi$  oder  $F/(\varphi, \mathcal{N})$ . Einigen Spezialfällen geben wir eigene Namen.

1. Relativ angereicherte Trennfunktor, die die Identität auf den Objektmengen sind, nennen wir **objektfest**;
2. Relativ angereicherte Trennfunktor, bei denen die induzierten  $\mathcal{T}$ -Morphismen sämtlich Isomorphismen  $F : \varphi(\mathcal{L}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_f(F\mathcal{F}, F\mathcal{B})$  sind, nennen wir  **$\varphi$ -volltreu**;
3. Relativ angereicherte Trennfunktor von relativen  $\mathcal{S}$ -Trennkategorien über  $\varphi = \text{id} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  nennen wir **relative  $\mathcal{S}$ -Trennfunktor**.

9.1.14 (**Relatives Umstrukturieren**). Gegeben eine relative  $\mathcal{S}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}/(\mathcal{S}, \mathcal{N})$  und ein Schmelzfunktor  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  erklären wir eine  $\mathcal{T}$ -Trennkategorie  $\varphi(\mathcal{M})/(\mathcal{T}, \mathcal{N})$ , indem wir  $\varphi$  auf alle Trennobjekte und Multiverknüpfungen von  $\mathcal{M}$  anwenden. Wir sagen,  $\varphi(\mathcal{M})$  entstehe durch **relatives Umstrukturieren von  $\mathcal{M}$  mit  $\varphi$** . Die Identität auf den Objekten zusammen mit den Identitäten auf den Bildern unter  $\varphi$  der Trennungsobjekte ist dann ein objektfester angereicherter Trennfunktor

$$U/(\varphi, \mathcal{N}) : \mathcal{M}/(\mathcal{S}, \mathcal{N}) \rightarrow \varphi(\mathcal{M})/(\mathcal{T}, \mathcal{N})$$

9.1.15. Gegeben ein treuer Schmelzfunktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \text{kEns}$  macht das Umstrukturieren mit der Schmelzäquivalenz  $v : \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)}$  jede relative  $\mathcal{S}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}/(\mathcal{S}, \mathcal{N})$  zu einer Schmelzkategorie  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  mit relativer  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur. Ist unsere Schmelzäquivalenz ein Isomorphismus  $v : \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)}$ , so können wir diese Konstruktion auch rückgängig machen.

9.1.16 (**Relative Selbstanreicherung**). Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie mit finalelem Objekt  $\text{pt}$  konstruieren wir eine  $\mathcal{M}/_{\text{pt}}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}^{\text{sa}}$  über  $\wedge \mathcal{T}$  mit Trennobjekten

$$\mathcal{M}_f^{\text{sa}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) := \text{fin}_{X_*}(f^*\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F})$$

und Multiverknüpfungen, statt derer ich der Einfachkeit halber nur die einfachen Verknüpfungen ausschreibe. Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  in der Basis und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$  Objekte der jeweiligen Fasern gilt es, eine Verschmelzung

$$\text{fin}_{Y^*}(g^*\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{G}) \vee \text{fin}_{X^*}(f^*\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}) \rightarrow \text{fin}_{X^*}((gf)^*\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{F})$$

anzugeben. Dazu bilden wir mit der Einheit der Adjunktion  $(f^*, f_*)$  und dem Heranziehen eines Rückzugs in das interne Hom 1.5.11 die Komposition

$$\text{fin}_{Y^*}(g^*\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{G}) \rightarrow \text{fin}_{Y^*} f_* f^*(g^*\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{G}) \rightarrow \text{fin}_{X^*}((gf)^*\mathcal{H} \Rightarrow f^*\mathcal{G})$$

Nach diesem Morphismus im Term ganz links unserer zu erklärenden Verschmelzung verwenden wir den ausgezeichneten Morphismus 1.5.17 vom Tensorprodukt von Vorschüben zum Vorschub eines Tensorprodukts und die Komposition von internem Hom in der Schmelzkategorie  $\mathcal{M}_{/X}$ . Jetzt gilt es, dasselbe für Multiverknüpfungen auszuschreiben und alles so übersichtlich zu strukturieren, daß klar wird, daß wir so in der Tat eine relativ angereicherte  $\mathcal{M}_{/\text{pt}}$ -Trennkategorie

$$\mathcal{M}^{\text{sa}} / (\mathcal{M}_{/\text{pt}}, \wedge \mathcal{T})$$

über  $\wedge \mathcal{T}$  erhalten. Das möchte ich einem Studenten überlassen. Ebenso möchte ich es einem Studenten überlassen zu zeigen, daß wir einen objektfesten Isomorphismus

$$\text{L}(\mathcal{M}^{\text{sa}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

der Umstrukturierung der automatischen Selbstanreicherung mit dem Leerverschmelzungsfunktor von  $\mathcal{M}_{/\text{pt}}$  zu unserer ursprünglichen Trennfaserung erhalten, indem wir alle die Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{L}(\mathcal{M}_f^{\text{sa}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})) &= \mathcal{M}_{/\text{pt}}(\gamma, \text{fin}_{X^*}(f^*\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F})) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{/X}(\gamma, f^*\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{/X}(f^*\mathcal{B}, \mathcal{F}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X(\mathcal{F}, f^\dagger \mathcal{B}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \end{aligned}$$

zusammenfassen. Hier kommt der Isomorphismus der zweiten Zeile von 1.5.29 her, wo wir allgemein Bijektionen  $\mathcal{M}^{\text{opp}}(\gamma, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{/\text{pt}}(\gamma, \text{fin}_* \mathcal{H})$  konstruieren.

*Beispiel 9.1.17.* Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$  derart, daß  $\mathcal{M}_{/\text{pt}}$  einen treuen Leerverschmelzungsfunktor hat, liefert der objektfeste Isomorphismus  $\text{L}(\mathcal{M}^{\text{sa}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$  aus 9.1.16 die relative  $(\mathcal{M}_{/\text{pt}}, \text{L})$ -Struktur auf  $\mathcal{M}$  aus 9.1.8. Im Fall der Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  erhalten wir mit 9.1.9 unsere ursprüngliche relative additive Struktur zurück.

9.1.18. Die hier für Trennkategorien eingeführten Begriffsbildungen verwenden wir analog auch für Schmelzkategorien und betrachten sie auch als eingeführt für gewöhnliche Kategorien.

9.1.19 (**Lokalisierung relativer additiver Strukturen**). Sei ein Funktor  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit einer relativen additiven Struktur nach 9.1.2 gegeben und sei  $S$  ein globales Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$  über den Identitäten von  $\mathcal{B}$ . So gibt auf  $p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  genau eine relative additive Struktur, für die  $Q : \mathcal{C} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$  ein Ab-Funktor über  $\mathcal{B}$  ist im Sinne von 9.1.13. In der Tat können wir Rechtsbrüche addieren, indem wir sie auf einen Hauptnenner bringen, und erhalten so aus der vorgegebenen  $(\text{Ab}, v)$ -Strukturen auf  $\mathcal{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  über einem Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis eine wohldefinierte  $(\text{Ab}, v)$ -Struktur auf  $(S^{-1}\mathcal{C})_f(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ . Daß diese  $(\text{Ab}, v)$ -Strukturen eine relative additive Struktur bilden und auch die einzige mit den geforderten Eigenschaften, mag der Leser selber prüfen. Dasselbe gilt für Linksore-systeme.

## 9.2 Homotopie für unbequeme Schmelzkategorien\*

9.2.1. Die in 2.7.1 folgende diskutierte Konstruktion gelingt auch noch in größerer Allgemeinheit, aber es fällt mit schwer, dabei die Vorzeichen im Zaum zu halten. Dieser Abschnitt bleibt deshalb eine Skizze.

9.2.2. Gegeben eine Ab-Schmelzkategorie  $\mathcal{M}/\text{Ab}$  können wir etwa eine  $\text{sgAb}$ -Schmelzkategorie

$$\text{sga}\mathcal{M} = \text{sga}\mathcal{M}/\text{sgAb}$$

dadurch erklären, daß die Schreibanordnung für die homogenen Komponenten der Verschmelzungsobjekte Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\text{sga}\mathcal{M}(X_1 \curlywedge \dots \curlywedge X_r, Y)^n \xrightarrow{\sim} \prod_{i_1 + \dots + i_r + n = j} \mathcal{M}(X_1^{i_1} \curlywedge \dots \curlywedge X_r^{i_r}, Y^j)$$

liefert und daß die Multiverknüpfung die offensichtliche ist bis auf Vorzeichen. Ich führe die Vorzeichen nur in einem Beispiel aus. Gegeben Objekte  $X_{ij}, Y_j, Z \in \text{sg}\mathcal{M}$  gilt es, eine Verknüpfungsverschmelzung von

$$\text{sga}\mathcal{M}(X_{11} \curlywedge X_{21}, Y_1) \curlywedge \text{sga}\mathcal{M}(X_{12}, Y_2) \curlywedge \text{sga}\mathcal{M}(Y_1 \curlywedge Y_2, Z)$$

nach  $\text{sga}\mathcal{M}(X_{11} \curlywedge X_{21} \curlywedge X_{12}, Z)$  anzugeben. Unter Beachtung der Schreibanordnung der drei Faktoren bedeutet das, multiadditive Abbildungen von

$$\text{sga}\mathcal{M}(X_{11} \curlywedge X_{21}, Y_1)^r \times \text{sga}\mathcal{M}(X_{12}, Y_2)^s \times \text{sga}\mathcal{M}(Y_1 \curlywedge Y_2, Z)^t$$

nach  $\text{sga}\mathcal{M}(X_{11} \curlywedge X_{21} \curlywedge X_{12}, Z)^{r+s+t}$  anzugeben. Wir haben also gewisse Tupel von Verschmelzungen gegeben und wollen ein Tupel von Verschmelzungen

erhalten, in dem ein Eintrag  $h$  zu  $\mathcal{M}(X_{11}^i \curlywedge X_{21}^j \curlywedge X_{12}^k, Z^{i+j+k+r+s+t})$  gehört. Zur Verfügung haben wir Verschmelzungen  $f_1 \in \mathcal{M}(X_{11}^i \curlywedge X_{21}^j, Y_1^{i+j+r})$  und  $f_2 \in \mathcal{M}(X_{12}^k, Y_2^{k+s})$  und  $g \in \mathcal{M}(Y_1^{i+j+r} \curlywedge Y_2^{k+s}, Z^{i+j+k+r+s+t})$ . Wir werden

$$h = \pm g \circ (f_1 \curlywedge f_2)$$

nehmen wollen und es bleibt nur noch, das richtige Vorzeichen anzugeben. Dazu schreiben wir symbolisch

$$h(x_{11}, x_{21}, x_{12}) = g \circ (f_1 \curlywedge f_2)(x_{11}, x_{21}, x_{12})$$

und da wir „zum Einsetzen  $x_{11}$  und  $x_{21}$  an  $f_2$  vorbeiziehen müßten“, nehmen wir das Vorzeichen  $(-1)^{is+js}$ . Nun haben wir an verschiedenen Stellen Anordnungen gewählt, um Verschmelzungen supergraduierter Objekte mit gewöhnlichen Verschmelzungen zu identifizieren. Eine andere Wahl dieser Anordnungen ändert diese Identifikationen um Vorzeichen. Um die behauptete sgAb-Anreicherung zu erhalten, gilt es zu prüfen, daß unsere Verknüpfungsverschmelzungen von diesen Wahlen nicht abhängen. Das ist klar, wenn wir in der supergraduierten Version Multihom zur Verfügung haben. Es folgt im allgemeinen, da es ja ausreicht, die fraglichen Vorzeichenverträglichkeiten im Fall der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen zu prüfen und da wir in sgAb Multihom zur Verfügung haben.

**9.2.3 (Relative Darstellungen als angereicherte Schmelzkategorie).** Gegeben eine Trennschmelzkategorie  $\mathcal{S}$  und ein kokommutatives Hopfobjekt  $\Omega \in \mathcal{S}$  und eine angereicherte Schmelzkategorie  $\mathcal{M}/\mathcal{S}$  können wir die  $\Omega$ -Moduln in  $\mathcal{M}$ , wie sie in [TSK] 3.1.24 eingeführt wurden, zu einer Schmelzkategorie

$$(\mathcal{M}/\mathcal{S})_{\Omega_\vee}$$

über der äquivarianten Schmelzkategorie  $\mathcal{S}_{\Omega_\vee}$  machen, indem wir die Operation von  $\Omega$  auf einem Verschmelzungsobjekt  $\mathcal{M}(X_1 \curlywedge \dots \curlywedge X_r, Y)$  erklären wie folgt: Per definitionem haben wir auf diesem Verschmelzungsobjekt paarweise kommutierende Operationen der  $\mathcal{M}(X_\rho)$  von rechts sowie von  $\mathcal{M}(Y)$  von links alias eine Linksoperation von

$$\mathcal{M}(X_1)^{\text{opp}} \otimes \dots \otimes \mathcal{M}(X_r)^{\text{opp}} \otimes \mathcal{M}(Y)$$

Dieser Linksoperation schalten wir die iterierte Komultiplikation  $\Omega \rightarrow \Omega^{\otimes r+1}$  vor gefolgt vom Tensorprodukt der Monoidhomomorphismen  $\mu_\rho \circ S : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(X_\rho)^{\text{opp}}$  mit  $S$  der Antipode von  $\Omega$  und  $\mu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ . Daß die Verknüpfungsverschmelzungen dann in der Tat  $\Omega$ -äquivariant sind, mag der Leser zur Übung selber prüfen.

9.2.4 (**Komplexe in Ab-Schmelzkategorien**). Gegeben eine Ab-Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  erklären wir einen **Komplex aus  $\mathcal{M}$**  als eine relative Darstellung  $X \in \text{sga}\mathcal{M}$  des Hopfbiabmonoids der Differentiale  $D \in \text{sgAb}$  aus [TSK] 3.3.9. Diese Komplexe bilden nach unseren allgemeinen Überlegungen zu Darstellungen 9.2.3 ihrerseits eine über  $\text{dgAb}$  angereicherte Schmelzkategorie

$$\text{dg}\mathcal{M} = \text{dg}\mathcal{M}/\text{dgAb} = (\text{sg}\mathcal{M}/\text{sgAb})_{D\setminus}$$

Indem wir sie mit den Schmelzfunktoren  $\mathcal{Z}^0, \mathcal{H}^0 : \text{dgAb} \rightarrow \text{Ab}$  der Nullzykel beziehungsweise der nullten Homologie umstrukturieren, erhalten wir Ab-Schmelzkategorien, die wir

$$\text{Ket}(\mathcal{M}) = \text{Ket}_{\mathcal{M}} \quad \text{und} \quad \text{Hot}(\mathcal{M}) = \text{Hot}_{\mathcal{M}}$$

notieren und die wir als die Schmelzkategorien der **Komplexe in  $\mathcal{M}$**  beziehungsweise der **Homotopiekomplexe in  $\mathcal{M}$**  ansprechen. Insbesondere haben wir also für jeden Komplex  $X$  in  $\text{dg}\mathcal{M}$  einen Leerverschmelzungskomplex

$$\text{dg}\mathcal{M}(\gamma, X) \in \text{dgAb}$$

von abelschen Gruppen und erhalten für Leerverschmelzungen zu Komplexen beziehungsweise Homotopiekomplexen die Beschreibung

$$\text{Ket}_{\mathcal{M}}(\gamma, X) = \mathcal{Z}^0 \text{dg}\mathcal{M}(\gamma, X) \quad \text{und} \quad \text{Hot}_{\mathcal{M}}(\gamma, X) = \mathcal{H}^0 \text{dg}\mathcal{M}(\gamma, X).$$

Man kann weiter zeigen, daß  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  und  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$  stabil universelle Verschmelzungen besitzen, wenn  $\mathcal{M}$  stabil universelle Verschmelzungen besitzt und die zugrundeliegende einfache Kategorie abzählbare Koprodukte und daß der Funktor  $\text{Ket}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{M}}$  dann stabil universelle Verschmelzungen erhält. Ebenso kann zeigen, daß  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  und  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$  Multihom besitzen, wenn  $\mathcal{M}$  Multihom besitzt und die zugrundeliegende einfache Kategorie abzählbare Produkte hat und daß der Funktor  $\text{Ket}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{M}}$  dann Multihom erhält. Ich führe das nicht aus.

## 9.3 Versuch

9.3.1 (**Relatives Supergraduieren**). Gegeben ein Trennfunktor mit relativer additiver Struktur  $\mathcal{M}/\text{Ab} \rightarrow \mathcal{N}$  im Sinne von 9.1.2 konstruieren wir einen Trennfunktor

$$\text{sg}\mathcal{M}/\text{sgAb} \rightarrow \mathcal{N}$$

mit relativer  $\text{sgAb}$ -Struktur. Als Objekte von  $\text{sg}\mathcal{M}$  nehmen wir mit  $\mathbb{Z}$  indizierte Familien  $X = (X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  von Objekten  $X^i \in \mathcal{M}$ . Um die Trennobjekte  $\text{sg}\mathcal{M}_f(X, B)$

über einer vorgegebenen Trennung  $f$  der Basis  $\mathcal{N}$  anzugeben, betrachten wir Vorschriften, die jeder Anordnung  $\omega$  der Zielfamilie  $B$  ein Tupel von Trennungen über  $f$  der Komponenten

$$\omega \varphi_i^{j_1, \dots, j_r} \in \mathcal{M}_f(X^i, Y_1^{j_1} \curlywedge \dots \curlywedge Y_r^{j_r})$$

zuordnen und zwar so, daß sich bei einer Änderung der Anordnung das Vorzeichen ändert um das Signum der induzierten Permutation der ungeraden  $j_\rho$ . Die Menge aller Tupel derartiger Vorschriften mit  $j_1 + \dots + j_r = j$  notieren wir  $\text{sg}\mathcal{M}_f(X, B)^{(i,j)}$  und setzen

$$\text{sg}\mathcal{M}_f(X, B)^n := \prod_i \text{sg}\mathcal{M}_f(X, B)^{(i,i+n)}$$

Die  $\mathbb{Z}$ -graduierte abelsche Gruppe  $\text{sg}\mathcal{M}_f(X, B)$  mit diesen homogenen Komponenten nehmen wir als unser Trennobjekt. Die Multiverknüpfung von Trennungen ist in Bezug auf verträgliche Anordnungen die von  $\mathcal{M}$  induzierte und man prüft wie im Fall des Twistens [TSK] 2.1.8 oder des Supergraduierens [TSK] 2.1.14, daß das wohldefiniert ist und daß wir so einen Trennfunktor  $\text{sg}\mathcal{M}/\text{sgAb} \rightarrow \mathcal{N}$  mit relativer  $\text{sgAb}$ -Struktur erhalten.

9.3.2. Gegeben ein Trennfunktor  $\mathcal{L}/\text{sgAb} \rightarrow \mathcal{N}$  mit relativer  $\text{sgAb}$ -Struktur verstehen wir unter einem **relativen Shift** eine  $\mathbb{Z}$ -Operation auf jeder Faser, notiert  $X \mapsto X[n]$ , zusammen mit Isomorphismen

$$\text{sg}\mathcal{L}_f(X[n], B) \xrightarrow{\sim} \text{sg}\mathcal{L}_f(X, B)[-n]$$

für jede Trennung  $f$  der Basis, die ihrerseits verträglich sind mit dem Nachschalten weiterer Trennungen in der hoffentlich offensichtlichen Weise.

9.3.3. Gegeben ein Trennfunktor mit relativer additiver Struktur  $\mathcal{M}/\text{Ab} \rightarrow \mathcal{N}$  im Sinne von 9.1.2 ist für seine relative Supergraduierung  $\text{sg}\mathcal{M}/\text{sgAb} \rightarrow \mathcal{N}$  die Operation der Gruppe  $\mathbb{Z}$  auf jeder Faser durch Graduierungsverschiebung ein relativer Shift in offensichtlicher Weise.

9.3.4. Wir erinnern das Hopfobjekt der Differentiale  $D$  von  $\text{sgAb}$ . Gegeben ein Trennfunktor  $\mathcal{L}/\text{sgAb} \rightarrow \mathcal{N}$  mit relativer  $\text{sgAb}$ -Struktur konstruieren wir einen Trennfunktor

$$(\mathcal{L}/\text{sgAb})_{D\setminus} \rightarrow \mathcal{N}$$

mit relativer  $\text{sgAb}_{D\setminus}$ -Struktur alias  $\text{dgAb}$ -Struktur, indem wir wie in 9.2.3 Objekte von  $(\mathcal{L}/\text{sgAb})$  mit  $D$ -Operation als neue Objekte nehmen und die Morphismenobjekte mit der induzierten  $D$ -Operation versehen. Ein relativer Shift induziert einen relativen Shift auf den Objekten mit  $D$ -Operation.

9.3.5 (**Relatives differentielles Graduieren**). Gegeben ein Trennfunktor mit relativer additiver Struktur  $\mathcal{M}/\text{Ab} \rightarrow \mathcal{N}$  im Sinne von 9.1.2 konstruieren wir einen Trennfunktor

$$\text{dg}\mathcal{M}/\text{dgAb} \rightarrow \mathcal{N}$$

mit relativer dgAb-Struktur, indem wir in Spezialisierung von 9.3.4 zu Objekten von  $\text{sg}\mathcal{M}/\text{sgAb}$  mit  $D$ -Operation übergehen. Objekte von  $\text{dg}\mathcal{M}$  sind also Komplexe aus  $\mathcal{M}$ , Morphismenobjekte über einfachen Morphismen der Basis entsprechende Hom-Komplexe und Trennungsobjekte über allgemeineren Trennungen der Basis gewisse Multihom-Komplexe. Der relative Shift überträgt sich auf differentielle graduierte Objekte.

9.3.6 (**Relative Komplexe und Homotopiekomplexe**). Gegeben ein Trennfunktor mit relativer additiver Struktur  $\mathcal{M}/\text{Ab} \rightarrow \mathcal{N}$  im Sinne von 9.1.2 konstruieren wir weitere Trennfunktoren mit relativer additiver Struktur, indem wir mit 9.3.5 den Trennfunktor  $\text{dg}\mathcal{M}/\text{dgAb} \rightarrow \mathcal{N}$  mit relativer dg-Struktur und relativem Shift bilden und ihn mit den Schmelzfunktoren  $\mathcal{Z}^0, \mathcal{H}^0 : \text{dgAb} \rightarrow \text{Ab}$  der Nullzykel beziehungsweise der nullten Homologie umstrukturieren. Wir notieren die so konstruierten Trennfunktoren

$$\text{Ket}(\mathcal{M})/\text{Ab} \rightarrow \mathcal{N} \quad \text{beziehungsweise} \quad \text{Hot}(\mathcal{M})/\text{Ab} \rightarrow \mathcal{N}$$

und sprechen vom **Trennfunktor der Komplexe** beziehungsweise **Homotopiekomplexe**. Ihre Fasern über  $X \in \mathcal{N}$  sind die Kategorien der Komplexe beziehungsweise Homotopiekomplexe von Objekten der Faser, in Formeln

$$\text{Ket}(\mathcal{M})_X = \text{Ket}(\mathcal{M}_X) \quad \text{beziehungsweise} \quad \text{Hot}(\mathcal{M})_X = \text{Hot}(\mathcal{M}_X).$$

9.3.7. Wir erinnern aus [TG] 2.5.4, daß wir eine abelsche Kategorie erklärt hatten als eine Kategorie mit additiver Struktur, die präabelsch ist und endliche Produkte besitzt. Einen Trennfunktor mit relativer additiver Struktur  $\mathcal{M}/\text{Ab} \rightarrow \mathcal{N}$ , dessen Fasern  $\mathcal{M}_X$  über allen Objekten  $X \in \mathcal{N}$  abelsch (Sollte noch Verträglichkeiten der Trennungen beachten) sind, nennen wir einen **Trennfunktor mit abelschen Fasern**.

9.3.8. Wir erinnern aus [TG] 6.2.17 die Bifaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$ , die wir die Garbenopfaserung genannt hatten und deren Fasern  $\text{Ab}_{//X}$  opponiert sind zu den üblichen Kategorien  $\text{Ab}_{/X}$  von abelschen Garben auf  $X$ . Wir hatten sogar ihre Erweiterung zu einer Trennfaserung in 9.1.3 mit einer relativen additiven Struktur versehen. Hier betrachten wir erst einmal nur die zugehörige gewöhnliche Faserung mit ihrer relativen additiven Struktur

$$\text{Ab}_{//\text{Top}}/\text{Ab} \rightarrow \text{Top}$$



und konstruieren nach 9.3.5 ihre differentiell graduierte Version

$$\mathrm{dg}(\mathrm{Ab}_{//\mathrm{Top}})/\mathrm{dgAb} \rightarrow \mathrm{Top}$$

Relatives Umstrukturieren 9.1.14 mit dem Schmelzfunktor  $\mathcal{H} : \mathrm{dgAb} \rightarrow \mathrm{sgAb}$  der totalen Homologie macht daraus einen in  $\mathrm{sgAb}$  relativ angereicherten Funktor

$$\mathcal{H}(\mathrm{dgAb}_{//\mathrm{Top}})/\mathrm{sgAb} \rightarrow \mathrm{Top}$$

Dazu bilden wir Funktoren  $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{//\mathrm{Top}}) \rightarrow \mathrm{Top}$  und  $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{//\mathrm{Top}}) \rightarrow \mathrm{Top}$  mit Fasern  $\mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{//X})$  beziehungsweise  $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{//X})$ . Beide kommen mit einem ausgezeichneten Automorphismus [1] über der Identität in der Basis, der auf den Fasern zu dem durch Verschiebung der Graduierung und Negativieren der Differentiale gegebenen Funktor aus [TD] 2.3.1 einschränkt.

9.3.9. Unter einem **Automorphismus eines Kategorienwinkels** verstehen wir ein Tripel von verträglichen Automorphismen der drei beteiligten Kategorien. Unter einem **Automorphismus eines Winkelfunktors**  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  verstehen wir einen Automorphismus des Kategorienwinkels  $\mathcal{C}$  über der Identität auf  $\mathcal{B}$ . Unter einem **Automorphismus einer präverflochtenen Winkelfaserung** verstehen wir einen Automorphismus des zugrundeliegenden Winkelfunktors, der bijektiv ist auf Verflechtungsquadraten. Die Automorphismen [1] der Homotopiekategorien aus [TD] 2.1.1 bilden in ihrer Gesamtheit einen Automorphismus der oben besprochenen verflochtenen Winkelfaserungen von Homotopiekomplexen. Sie stabilisieren das System der Quasiisomorphismen und induzieren folglich einen Automorphismus der lokalisierten verflochtenen Winkelfaserung nach 5.4.6.

**Lemma 9.3.10.** *Gegeben eine flache abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  besteht auch ihre Godementauflösung aus flachen abelschen Garben.*

*Beweis.* Im Fall abelscher Gruppen ist flach äquivalent zu torsionsfrei und diese Eigenschaft ist stabil unter Produkten und filtrierenden Kolimites. Daraus folgt, daß mit einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  auch die Garbe ihrer unstetigen Schnitte  $G\mathcal{F}$  flache Halme hat. Da die von der Einbettung  $\mathcal{F} \hookrightarrow G\mathcal{F}$  auf den Halmen induzierten Einbettungen  $\mathcal{F}_x \hookrightarrow (G\mathcal{F})_x$  sämtlich spalten, hat auch der Kokern flache Halme. Das Lemma folgt induktiv.  $\square$

## 9.4 Abstract in English

9.4.1. Let  $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}^i \supset \mathcal{B}^e$  be a category with two subcategories containing both all objects. We call it the base.

*Example 9.4.2.* We might think of topological spaces, locally proper separated maps and proper separated maps. Locally proper separated maps are maps which can be written as composition of an open immersion and a proper separated map.

9.4.3. Let  $\mathcal{C}$  be a set of objects with two structures of a category, whose morphism sets will be called  $\mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  and  $\mathcal{C}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ , along with a fibre functor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  and a cofibre functor  $\mathcal{C}^i \rightarrow \mathcal{B}^i$  which agree on  $\mathcal{B}^e$  or, more generally, we are given an isomorphism  $i : \mathcal{C}^i|_{\mathcal{B}^e} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}|_{\mathcal{B}^e}$  as categories over  $\mathcal{B}^e$  of their restrictions fixing the objects. We call this the fibre and denote  $f^\dagger$  the pullback of the fibration and  $f_!$  the pushforward along the cofibration.

*Example 9.4.4.* One might think of  $\mathcal{C}$  as abelian sheaves on topological spaces,  $\mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  as comorphisms  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  over a continuous map in the base and  $\mathcal{C}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  as „proper comorphisms of abelian sheaves“, which are to be defined as comorphisms with special properties, so that the composition  $f_! \mathcal{F} \rightarrow f_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  will be a proper-cocartesian comorphism for any locally proper separated map  $f$ .

9.4.5. A regulation of the base is a collection of squares in  $\mathcal{B}$  with  $\mathcal{B}^i$ -Morphisms as vertical morphisms, stable under gluing along equal horizontals or equal verticals and containing all commutative squares with the identity as both vertical or both horizontal morphisms.

*Example 9.4.6.* We might think of cartesian squares with locally proper separated vertical morphisms.

9.4.7. A weak exchange datum is a collection of diagrams over regulation squares of the base, called exchange squares, with objects of  $\mathcal{C}$  in the corners and cartesian  $\mathcal{C}$ -morphisms in the horizontals and  $\mathcal{C}^i$ -morphisms in the verticals satisfying the following conditions:

1. Our collection is stable under gluing along equal verticals and along equal horizontals.
2. Our collection contains all commutative diagrams with cartesian horizontals over regulation squares in the base with morphisms from  $\mathcal{B}^e$  in both horizontals or both verticals.
3. The left vertical in the fibre is uniquely determined and determinable by the regulation diagram in the base and its other morphisms the fibres.

An exchange datum is a weak exchange datum such that this pulled-back left vertical is cocartesian whenever the right vertical was cocartesian.

*Example 9.4.8.* In our example, all commutative diagrams of comorphisms between abelian sheaves with cartesian horizontals and proper comorphisms in the verticals over a regulation square of topological spaces would do. In general, commutativity of diagrams of objects from  $\mathcal{C}$  with different sorts of morphisms cannot be asked, since  $\mathcal{C}$ -morphisms and  $\mathcal{C}^i$ -morphisms cannot be composed.

*Example 9.4.9.* For the same base with its regulation, we could work with homotopy categories of complexes of abelian sheaves in the fibres. We can also work with commutatively ringed spaces in the base.

9.4.10. Base change in this language is obtained from the fact that for every regulated square of the base as drawn on the left

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{q} & X \\
 \vdots & & \vdots \\
 g \downarrow & & \downarrow f \\
 \vdots & & \vdots \\
 Z & \xrightarrow{p} & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 q^\dagger \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g_! q^\dagger \mathcal{F} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 p^\dagger f_! \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & f_! \mathcal{F}
 \end{array}$$

and any object  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_X$  of the fibre and the pullbacks and pushforwards with their transport morphisms there is by assumption a unique morphism  $g_! q^\dagger \mathcal{F} \rightarrow p^\dagger f_! \mathcal{F}$  in the fibre over  $Z$  such that the right square with the composition as its left vertical is an exchange square.

9.4.11. Now we suppose given a set of morphisms  $S$  in  $\mathcal{C}$  over identities of the base. Under suitable conditions, formally inverting the morphisms from  $S$  again leads to an exchange datum or even makes a weak exchange datum strong. First let us discuss the localization of cofibrations.

9.4.12. Let  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  be a cofibre functor. A full subcofibration is a full subcategory  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  such that the objects of  $\mathcal{D}$  admit pushforwards with respect to the cofibration  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  which again belong to  $\mathcal{D}$ .

9.4.13. Let  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  be a cofibre functor and  $S$  a fibrewise left Ore system in  $\mathcal{C}$ . A full subcofibration  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  is called a left adaptation for  $S$ , if (1) the set  $T$  of all  $S$ -morphisms in  $\mathcal{D}$  is fibrewise an Ore system and (2) pushforward functors  $f_!$  for objects of  $\mathcal{D}$  can be chosen that stabilize  $T$  and (3) for any  $C \in \mathcal{C}$  there exists an  $S$ -morphism  $D \rightarrow C$  with  $D \in \mathcal{D}$ .

*Example 9.4.14.* The base  $\mathcal{B}$  might be finite sets, the objects of the fibres  $\mathcal{C}$  families of modules over a fixed commutative ring  $k$  indexed by finite sets, the morphisms in the fibre of our cofibration families of multilinear maps indexed by points of the set the map in the base goes to, the pushforward constructing an

appropriate family of tensor products. If we go to homotopy complexes bounded from above and want to localize quasiisomorphisms, complexes of flat modules would be a left adaptation.

9.4.15. If a left adaptation exists,  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  is again a cofibre functor. In addition, the obvious functor is an equivalence  $T^{-1}\mathcal{D} \xrightarrow{\cong} S^{-1}\mathcal{C}$  and cocartesian morphisms between objects of  $\mathcal{D}$  stay cocartesian in  $T^{-1}\mathcal{D}$ .

*Example 9.4.16.* We might take same as above but sheaves of modules over a fixed topological space instead of just modules over a commutative ring. Then complexes of flat module sheaves still are a left adaptation, so we obtain derived tensor products of bounded complexes of module sheaves with all their compatibilities.

9.4.17. Now let  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^i \leftarrow \mathcal{C}^i, \mathcal{B}^e)$  be as before. Let furthermore  $S$  be a fibrewise Ore system in  $\mathcal{C}$ . By a leftright adaptation we understand a pair  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$  consisting of a left adaptation  $\mathcal{L}$  for the cofibration  $\mathcal{C}^i \rightarrow \mathcal{B}^i$  and in the opposed way a right adaptation  $\mathcal{R}$  for the fibration  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  such that (1) to every object of  $\mathcal{R}$  goes an  $S$ -morphism from an object of  $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$  and (2) given  $q : W \rightarrow X$  in the base and  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_X$  there exist  $S$ -morphisms  $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{\dagger i}$  with  $\mathcal{F}_i \in \mathcal{L}_X$  and  $q^\dagger \mathcal{F} \leftarrow q^\dagger \mathcal{F}_i$  in  $S$  and  $\mathcal{F}_{\dagger i} \in \mathcal{R}_X \cap \mathcal{L}_X$ .

*Example 9.4.18.* We let  $\mathcal{B}$  be finite families of topological spaces and morphisms families of continuous maps over a map of the indexing set in the other direction. To introduce notation,  $q = (q_1, q_2) : W \rightarrow X_1 \wedge X_2$  for  $q_i : W \rightarrow X_i$  would be such a morphism in the base. We let  $\mathcal{B}^i$  be tupels of locally proper separated morphisms, say  $f = (f_1 \wedge f_2) : X_1 \wedge X_2 \rightarrow Y_1 \wedge Y_2$ . We regulate the base by cartesian squares. To introduce an example for fibre categories, we fix a commutative ring  $k$  and in the fibres take homotopy complexes of module sheaves, say  $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$ . Morphisms in the fibres are multilinear comorphisms  $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{H}$  consisting of  $k$ -bilinear maps  $\mathcal{F}_1(U_1) \times \mathcal{F}_2(U_2) \rightarrow \mathcal{H}(V)$  whenever  $f_i(V) \subset U_i$ , compatible with restrictions. Morphisms in  $\mathcal{C}^i$  are tupels of proper opcomorphisms of finite cohomological dimension for  $f_i$  of sheaves of  $k$ -modules. This might be denoted

$$\left( \text{Hot}_{k//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lps}} \leftarrow \text{Hot}_{k//\text{Top}}^{\text{lpsf}}, \text{Top}^{\text{psf}} \right)$$

As a leftright adaptation for  $S$  quasiisomorphisms we could take quisflat alias  $K$ -flat complexes as right adaptation for the fibration (since now our fibres are opposed to categories of sheaves) and complexes of c-soft sheaves as left adaptation for the cofibration and the needed compatibilities amount to the fact that the mapping cone of a Godement resolution will always be stalkwise split, so the tensor product with any complex of sheaves will be an exact complex.

Example 9.4.19. The projection formula is base change over the square

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(id_X, f)} & X \wedge Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \wedge id_Y \\ Y & \xrightarrow{(id_Y, id_Y)} & Y \wedge Y \end{array}$$

in the base. There is some additional part of the formalism for this special type of base asking that regulation squares as well as exchange squares should be also stable under „taking tuples“. I don't spell this out here and give only an example. Let us extend our diagram to

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{(id_X, f)} & X \wedge Y & \xrightarrow{(id_X, f) \wedge id_Y} & X \wedge Y \wedge Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \wedge id_Y & & \downarrow f \wedge id_Y \wedge id_Y \\ Y & \xrightarrow{(id_Y, id_Y)} & Y \wedge Y & \xrightarrow{(id_Y, id_Y) \wedge id_Y} & Y \wedge Y \wedge Y \end{array}$$

so that on the right we have tupled the square on the left with a square of identities on  $Y$ . Another way to obtain the big rectangle is the gluing

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{(id_X, f)} & X \wedge Y & \xrightarrow{id_X \wedge (id_Y, id_Y)} & X \wedge Y \wedge Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \wedge id_Y & & \downarrow f \wedge id_Y \wedge id_Y \\ Y & \xrightarrow{(id_Y, id_Y)} & Y \wedge Y & \xrightarrow{id_Y \wedge (id_Y, id_Y)} & Y \wedge Y \wedge Y \end{array}$$

Then the fact that gluing two exchange squares over this is again an exchange square leads to an equality of two morphisms

$$f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G} \otimes f^*\mathcal{H}) \rightarrow f_!\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$$

coming from applying the projection formula for  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$  or applying the projection formula first for  $\mathcal{G}$  and then for  $\mathcal{H}$ , along with using associators and the compatibility of pullback with tensor.

9.4.20. Let  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^i \leftarrow \mathcal{C}^i, \mathcal{B}^e)$  be as before and let  $S$  be a fibrewise Ore system in  $\mathcal{C}$  and suppose there exists a leftright adaptation. Suppose furthermore given a weak exchange datum and for every exchange square

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & X \\ | & & | \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F} \\ | & & | \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G} \end{array}$$

in  $\mathcal{C}$  over the regulated square in the base drawn on the left such that  $Q\mathcal{F} \rightarrow Q\mathcal{G}$  is proper-cocartesian in the localized cofibration and the horizontals  $Q\mathcal{E} \rightarrow Q\mathcal{F}$

and  $Q\mathcal{H} \rightarrow Q\mathcal{G}$  are cartesian in the localized fibration, that for such a square of the weak exchange the left vertical  $Q\mathcal{E} \rightarrow Q\mathcal{H}$  is also proper-cocartesian in the localized cofibration. Then there is a unique exchange in the localized situation containing all images under the localization functor  $Q$  of such weak exchange squares.

*Example 9.4.21.* We can apply this to the homotopy case before and get an exchange for

$$\left( \text{Der}_{k//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lps}} \leftarrow \text{Der}_{k//\text{Top}^{\text{lpsf}}}^!, \text{Top}^{\text{psf}} \right)$$

There is also a variant for commutatively ringed spaces. In this case we allow as  $\mathcal{B}^i$ -morphisms only locally proper separated maps which induce flat ring morphisms on the stalks of the ring sheaves.

9.4.22. Then you may ask for adjoints, but there are no additional problems with the coherence of the formalism. I propose another new notation though, namely for internal Hom to use

$$\Rightarrow$$

## 9.5 Trennrückzug-Schreibvorschub für Modulgarben, ALT

*Vorschau 9.5.1.* Wir beginnen mit dem Fall abelscher Garben und erweitern anschließend die Argumentation auf Modulgarben.

9.5.2 (**Trennverflechtung für abelsche Garben**). Die zur Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  gebildete banale Prätrennaustauschsituation mit Präverflechtung liefert durch Einschränken nach ?? eine Trennaustauschsituation mit Präverflechtung

$$\left( \text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^!, \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

Durch Übergang zu den Homotopiekategorien erhalten wir für  $\sharp \in \{+, -, b, \}$  eine jede der vier üblichen Beschränkungsbedingungen eine Trennaustauschsituation mit Präverflechtung

$$\left( \text{Hot}^\sharp(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \wedge \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Hot}^\sharp(\text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^!), \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

*Beispiel 9.5.3* (**Trennverflechtung für halbseitig derivierte abelsche Garben**). Die letzte Trennaustauschsituation mit Präverflechtung aus 9.5.2 mit  $\sharp = -$  läßt sich nach ?? nach Quasiisomorphismen lokalisieren zur verflochtenen Trennaustauschsituation der halbseitig derivierten abelschen Garben

$$\left( \text{Der}_{//\text{Top}}^- \rightarrow \wedge \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^{\text{!}-}, \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

In der Tat finden wir eine Rechtslinksanpassung  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$  mit  $\mathcal{L}$  allen Komplexen aus flachen abelschen Garben und  $\mathcal{R}$  allen Komplexen aus schwach kompaktweichen abelschen Garben. Daß das jeweils für sich genommen Anpassungen sind, wissen wir bereits aus 9.9.2 und 5.2.4. Daß es zu jedem Objekt von  $\mathcal{L}$  einen  $S$ -Morphismus von einem Objekt von  $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$  gibt, zeigt die Godementauflösung  $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} G^{\triangleleft} \mathcal{L}$ , die ja nach 9.3.10 aus flachen Garben besteht, wenn  $\mathcal{L}$  ein Komplex flacher Garben ist. Genauer gilt es, die Godementauflösung in den opponierten Kategorien als Morphismus in die Gegenrichtung zu betrachten. Die zweite Bedingung an eine Rechtslinksentfaltung ?? schließlich zeigt man wie in 5.5.7 ausgeführt wird, nur nimmt man elementarer als  $\mathcal{L}$  einen Komplex flacher abelscher Garben zusammen mit einem Quasiisomorphismus von  $\mathcal{L}$  nach  $\mathcal{F}$ . Um ?? anwenden zu können, müssen wir nur noch prüfen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate über elementaren kartesischen Trennquadraten der Basis mit les-Vertikalen voll kokartesisch sind. Im Fall von kartesischen Trennquadraten mit Einstrennungen in den Horizontalen haben wir das bereits in ?? geprüft. Im Fall von kartesischen Trennquadraten mit Leertrennungen in den Horizontalen ist es offensichtlich. Im Fall von Projektionsformelquadraten schließlich folgt es unmittelbar aus der Projektionsformel 4.3.9.

*Beispiel 9.5.4 (Verflechtung für beidseitig derivierte abelsche Garben).* Die letzte Trennaustauschsituation mit Präverflechtung aus 9.5.2 mit  $\sharp$  der leeren Beschränkungsbedingung läßt sich, wenn wir nur lesb-Abbildungen als les-Morphismen erlauben, wieder nach ?? nach Quasiisomorphismen lokalisieren zur verflochtenen Trennaustauschsituation der beidseitig derivierten abelschen Garben

$$\left( \text{Der}_{// \text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Der}_{// \text{Top}^{\text{lesb}}, \text{Top}^{\text{esb}}} \right)$$

Die Argumente sind dieselben wie im halbseitig beschränkten Fall 9.5.3 mit dem einzigen Unterschied, daß für lesb-Abbildungen  $f$  beliebige Komplexe schwach kompaktweicher abelscher Garben  $Qf_{(1)}$ -entfaltet sind.

9.5.5 (Verflechtung für derivierte Modulgarben, Vorbereitung). Die Trennfaserung der Modulgarben auf gekringten Räumen  $\text{Ab}_{// \text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$  aus 1.3.11 liefert nach ?? eine banale Prätrennaustauschsituation

$$(\text{Ab}_{// \text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek} \leftarrow \text{Ab}_{// \text{Gek}}, \text{Gek})$$

mit banaler Präverflechtung. Nach Übung 4.4.19 bilden die eigentlichen Opkomorphismen aus Übung 1.3.13 darin ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System  $\text{Ab}_{// \text{Gek}}^!$ . Per definitionem sind über jedem auf den zugrundeliegenden topologischen Räumen eigentlichen Morphismus der Basis alle Opkomorphismen von Modulgarben eigentlich. Das multiplikative System der topologisch

eigentlichen Morphismen der Basis notieren wir  $\text{Gek}^e$  und erhalten so durch Einschränken ?? eine weitere Pratrennaustauschsituation

$$(\text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Gek}}^!, \text{Gek}^e)$$

mit Präverflechtung. Schränken wir weiter ein zu topologisch separierten Abbildungen  $\text{Gek}^s \subset \text{Gek}$ , so wird  $\text{Ab}_{//\text{Gek}^s}^! \rightarrow \text{Gek}^s$  sogar eine Kofaserung mit den topologischen  $f_{(!)}$  zusammen mit der entsprechenden Restriktion der Modulstruktur oder vielmehr dem auf den opponierten Kategorien induzierten Funktor als Vorschub und erhalten eine Austauschsituation mit Präverflechtung

$$(\text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek}^s \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Gek}^s}^!, \text{Gek}^{\text{es}})$$

Durch Übergang zu den Homotopiekategorien wird daraus eine Trennaustauschsituation mit Präverflechtung

$$(\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}}) \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek}^s \leftarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}^s}^!), \text{Gek}^{\text{es}})$$

Um durch Lokalisieren nach Quasiisomorphismen eine Verflechtung zu erhalten, schränken wir weiter ein und erlauben als les-Morphismen nur solche Morphismen von gekringten Räumen  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ , bei denen  $f : X \rightarrow Y$  lesb ist und  $\mathcal{A}_x$  flach über  $\mathcal{B}_{f(x)}$  für alle  $x \in X$  und notieren  $\text{Gek}^{\text{lesbf}} \supset \text{Gek}^{\text{esbf}}$  das multiplikative System dieser Morphismen beziehungsweise seiner Elemente, die außerdem eigentlich sind. Wir nennen einen Morphismus von gekringten Räumen einen **lesb-Morphismus**, wenn die zugrundeliegende stetige Abbildung lesb ist. Daß diese Systeme trennruckzugstabil sind, mag man etwa mit Hilfe von 4.4.12 folgern. So erhalten wir schließlich eine Trennaustauschsituation mit Präverflechtung

$$(\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}}) \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek}^{\text{lesbf}} \leftarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}^{\text{lesbf}}}^!), \text{Gek}^{\text{esbf}})$$

*Ergänzung 9.5.6.* Wir verzichten mit unserer Definition eines lesb-Morphismus auf die erwartbare größere Allgemeinheit aller les-Abbildungen, bei denen die homologische Dimension des Schreivorschubs nur auf auf Modulgarben statt wie bei uns auf allen abelschen Garben beschränkt ist.

**Satz 9.5.7 (Trennverflechtung für beidseitig derivierte Modulgarben).** *Die letzte der in 9.5.5 angegebenen Trennaustauschsituationen mit Präverflechtung läßt sich nach Quasiisomorphismen lokalisieren im Sinne von ?? zu einer verflochtenen Trennaustauschsituation*

$$(\text{Der}(\text{Ab}_{//\text{Gek}}) \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek}^{\text{lesbf}} \leftarrow \text{Der}(\text{Ab}_{//\text{Gek}^{\text{lesbf}}}^!), \text{Gek}^{\text{esbf}})$$



9.5.8. Einen höheren Zugang zu noch allgemeineren und stärkeren Aussagen in dieser Richtung kann man in der Dissertation von Recktenwald [?] finden, die ihrerseits auf dem Formalismus von Hörmann [?] aufbaut.

*Beweis.* Eine Rechtslinksanpassung ist das Paar  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$  mit  $\mathcal{L}$  allen quisflachen Komplexen von Modulgarben und  $\mathcal{R}$  allen Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben, wie aus den in 5.5.7 diskutierten Eigenschaften von Godementauflösungen leicht folgt. Nach ?? bleibt damit nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate der lokalisierten Trennaustauschsituation über elementaren Trennquadraten der Basis voll kokartesisch sind. Im Fall eines kartesischen Trennquadrats mit Leertrennungen in den Horizontalen ist das eh klar. Im Fall kartesischer Trennquadrate mit Einstrennungen in den Horizontalen bemerken wir zunächst, daß jeder Morphismus  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von gekringten Räumen faktorisiert als  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ . Jedes derartige Trennquadrat läßt sich mithin erhalten als Verklebung der vier Trennquadrate

$$\begin{array}{ccccc}
 (W, g^*\mathcal{C} \otimes_{v^*\mathcal{B}} q^*\mathcal{A}) & \longrightarrow & (W, q^*\mathcal{A}) & \xrightarrow{q} & (X, \mathcal{A}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (W, g^*\mathcal{C}) & \longrightarrow & (W, v^*\mathcal{B}) & \xrightarrow{q} & (X, f^*\mathcal{B}) \\
 \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 (Z, \mathcal{C}) & \longrightarrow & (Z, p^*\mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & (Y, \mathcal{B})
 \end{array}$$

Hier schreiben wir  $v = pg = fq$  und die Sternchen meinen Rückzüge von Kringgarben. Unter unseren Annahmen ist aber nach ?? und ?? die Menge der voll kokartesischen naiven Verflechtungsquadrate stabil unter Verkleben. Es reicht also, für jedes dieser vier kartesischen Quadrate zu prüfen, daß darüber jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Im Quadrat oben links geht es nur um Beziehungen zwischen Restriktion und Erweiterung von Skalaren, da folgt die Behauptung aus der Voraussetzung der Flachheit der  $\mathcal{A}_x$  über  $\mathcal{B}_{f(x)}$ , die dazu führt, daß jeder quisflache Komplex von  $\mathcal{A}$ -Modulgarben zu einem quisflachen Komplex von  $\mathcal{B}$ -Modulgarben restringiert. Im Quadrat oben rechts ist die Aussage auch leicht zu sehen, dort geht es nur um die Verträglichkeit des gewöhnlichen Rückzugs mit einer Restriktion der Skalare. Unten rechts haben wir lokal eigentlichen Basiswechsel wie wir ihn kennen, nur daß zusätzlich noch Kringgarben operieren. Es bleibt zu zeigen, daß auch über dem Trennquadrat unten links jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Das stellen wir zurück und behandeln zunächst den auch noch ausstehenden Fall der Projektionsformelquadrate zu einem lesbf-Morphismus  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ . Wie zuvor können wir ihn faktorisieren in  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  und dürfen die beiden Faktoren getrennt betrachten. Im Fall  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B})$  reicht es zu zeigen, daß für jeden

quisflachen Komplex  $\mathcal{G}$  von  $f^*\mathcal{B}$ -Moduln und jeden Komplex  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{A}$ -Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(\operatorname{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}} \mathcal{F}) \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \operatorname{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G}))$$

ist. Das ist sogar ohne alle Annahmen an  $\mathcal{G}$  offensichtlich. Im zweiten Fall erinnern wir, daß wir nach 2.5.20 zu jedem Komplex von Modulgarben einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex flacher Modulgarben finden können. Es reicht deshalb zu zeigen, daß für jeden Komplex  $\mathcal{F}$  von schwach kompaktweichen  $f^*\mathcal{B}$ -Moduln und jeden quisflachen Komplex  $\mathcal{G}$  von flachen  $\mathcal{B}$ -Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(f_{(!)}\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_{(!)}(\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G})$$

ist und  $\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G}$  aus  $f$ -kompaktweichen Garben besteht. In der Tat ist dann  $\tau \wedge \operatorname{id} : \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \rightarrow f_{(!)}\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$  mit dem Transportmorphismus vorne ein Morphismus von unter den jeweiligen Rückzügen entfaltenen Objekten, der kokartesisch wird in der Lokalisierung und ein voll kokartesisches naives Verflechtungsquadrat liefert. Unter diesen Annahmen kommt unser Morphismus aber nach der Projektionsformel 4.3.9 sogar von einem Isomorphismus von Doppelkomplexen aus  $f$ -kompaktweichen Garben her. Schließlich kümmern wir uns noch um das kartesische Trennquadrat mit Einsmorphisimen in den Horizontalen in unserem großen Diagramm unten links, dessen Behandlung wir zurückgestellt hatten. Mit einigen Vereinfachungen der Notation hat es die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} (W, g^*\mathcal{C}) & \longrightarrow & (W, g^*\mathcal{B}) \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ (Z, \mathcal{C}) & \longrightarrow & (Z, \mathcal{B}) \end{array}$$

Sei also  $\mathcal{F}$  ein quisflacher Komplex aus kompaktweichen  $g^*\mathcal{B}$ -Moduln. Das zugehörige naive Verflechtungsquadrat hat dann diesselbe linke Vertikale wie das naive Verflechtungsquadrat zu  $\mathcal{F} \wedge \mathcal{C}$  über dem Projektionsformelquadrat „mit Raumwechsel ohne Ringwechsel“, von dem wir bereits wissen, daß es voll kokartesisch ist. Das beendet den Beweis.  $\square$

**9.5.9 (Trennverflechtung für halbseitig derivierte Modulgarben).** Der vorherige Satz gilt analog für halbseitig derivierte Modulgarben. Wir dürfen dann beliebige les-Abbildungen zulassen und müssen uns nicht auf lesb-Abbildungen beschränken, dürfen aber stattdessen nur gekringte Räume  $(X, \mathcal{A})$  endlicher Tor-Dimension zulassen.

*Ergänzung 9.5.10.* Will man Schreivorschübe mit nicht notwendig flachen Kringgarbenkomorphismen zulassen, so wird man allgemeiner mit differentiellen graduiereten Kringgarben arbeiten müssen.

9.5.11. Alternativ ist auch die volle Unterkategorie  $(\text{Hfl}_{//\text{Gek}})^\wedge \subset \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}})^\wedge$  aller Tupel von quisflachen Komplexen aus flachen Modulgarben eine Rechtsanpassung.

## 9.6 Das muß hinter die Diskussion des Formalismus!

**Satz 9.6.1 (Trennverflechtung für beidseitig derivierte Modulgarben).** *Die letzte der in 9.5.5 angegebenen Trennaustauschsituationen mit Präverflechtung läßt sich nach Quasiisomorphismen lokalisieren im Sinne von ?? zu einer verflochtenen Trennaustauschsituation*

$$(\text{Der}(\text{Ab}_{//\text{Gek}}) \rightarrow \wedge \text{Gek} \supset \text{Gek}^{\text{lesbf}} \leftarrow \text{Der}(\text{Ab}_{//\text{Gek}^{\text{lesbf}}}^!, \text{Gek}^{\text{esbf}}))$$

*Beweis.* Eine Rechtslinksanpassung ist das Paar  $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$  mit  $\mathcal{L}$  allen quisflachen Komplexen von Modulgarben und  $\mathcal{R}$  allen Komplexen schwach kompaktweicher Modulgarben, wie aus den in 5.5.7 diskutierten Eigenschaften von Godementauflösungen leicht folgt. Nach ?? bleibt damit nur noch zu zeigen, daß alle naiven Verflechtungsquadrate der lokalisierten Trennaustauschsituation über elementaren Trennquadraten der Basis voll kokartesisch sind. Im Fall eines kartesischen Trennquadrats mit Leertrennungen in den Horizontalen ist das eh klar. Im Fall kartesischer Trennquadrate mit Einstrennungen in den Horizontalen bemerken wir zunächst, daß jeder Morphismus  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von gekringten Räumen faktorisiert als  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ . Jedes derartige Trennquadrat läßt sich mithin erhalten als Verklebung der vier Trennquadrate

$$\begin{array}{ccccc} (W, g^*\mathcal{C} \otimes_{v^*\mathcal{B}} q^*\mathcal{A}) & \longrightarrow & (W, q^*\mathcal{A}) & \xrightarrow{q} & (X, \mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (W, g^*\mathcal{C}) & \longrightarrow & (W, v^*\mathcal{B}) & \xrightarrow{q} & (X, f^*\mathcal{B}) \\ \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow f \\ (Z, \mathcal{C}) & \longrightarrow & (Z, p^*\mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & (Y, \mathcal{B}) \end{array}$$

Hier schreiben wir  $v = pg = fq$  und die Sternchen meinen Rückzüge von Kringgarben. Unter unseren Annahmen ist aber nach ?? und ?? die Menge der voll kokartesischen naiven Verflechtungsquadrate stabil unter Verkleben. Es reicht also, für jedes dieser vier kartesischen Quadrate zu prüfen, daß darüber jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Im Quadrat oben links geht es nur um Beziehungen zwischen Restriktion und Erweiterung von Skalaren, da folgt die Behauptung aus der Voraussetzung der Flachheit der  $\mathcal{A}_x$  über  $\mathcal{B}_{f(x)}$ , die dazu führt, daß jeder quisflache Komplex von  $\mathcal{A}$ -Modulgarben zu einem quisflachen

Komplex von  $\mathcal{B}$ -Modulgarben restringiert. Im Quadrat oben rechts ist die Aussage auch leicht zu sehen, dort geht es nur um die Verträglichkeit des gewöhnlichen Rückzugs mit einer Restriktion der Skalare. Unten rechts haben wir lokal eigentlichen Basiswechsel wie wir ihn kennen, nur daß zusätzlich noch Kringgarben operieren. Es bleibt zu zeigen, daß auch über dem Trennquadrat unten links jedes naive Verflechtungsquadrat voll kokartesisch ist. Das stellen wir zurück und behandeln zunächst den auch noch ausstehenden Fall der Projektionsformelquadrate zu einem lesbf-Morphismus  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ . Wie zuvor können wir ihn faktorisieren in  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  und dürfen die beiden Faktoren getrennt betrachten. Im Fall  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^*\mathcal{B})$  reicht es zu zeigen, daß für jeden quisflachen Komplex  $\mathcal{G}$  von  $f^*\mathcal{B}$ -Moduln und jeden Komplex  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{A}$ -Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(\operatorname{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}} \mathcal{F}) \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \operatorname{res}_{\mathcal{A}}^{f^*\mathcal{B}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} \mathcal{G}))$$

ist. Das ist sogar ohne alle Annahmen an  $\mathcal{G}$  offensichtlich. Im zweiten Fall erinnern wir, daß wir nach 2.5.20 zu jedem Komplex von Modulgarben einen Quasiisomorphismus von einem quisflachen Komplex flacher Modulgarben finden können. Es reicht deshalb zu zeigen, daß für jeden Komplex  $\mathcal{F}$  von schwach kompaktweichen  $f^*\mathcal{B}$ -Moduln und jeden quisflachen Komplex  $\mathcal{G}$  von flachen  $\mathcal{B}$ -Moduln der offensichtliche Morphismus ein Quasiisomorphismus

$$(f_{(1)}\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_{(1)}(\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G})$$

ist und  $\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G}$  aus  $f$ -kompaktweichen Garben besteht. In der Tat ist dann  $\tau \wedge \operatorname{id} : \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \rightarrow f_{(1)}\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$  mit dem Transportmorphismus vorne ein Morphismus von unter den jeweiligen Rückzügen entfalteteten Objekten, der kokartesisch wird in der Lokalisierung und ein voll kokartesisches natives Verflechtungsquadrat liefert. Unter diesen Annahmen kommt unser Morphismus aber nach der Projektionsformel 4.3.9 sogar von einem Isomorphismus von Doppelkomplexen aus  $f$ -kompaktweichen Garben her. Schließlich kümmern wir uns noch um das kartesische Trennquadrat mit Einsmorphisimen in den Horizontalen in unserem großen Diagramm unten links, dessen Behandlung wir zurückgestellt hatten. Mit einigen Vereinfachungen der Notation hat es die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} (W, g^*\mathcal{C}) & \longrightarrow & (W, g^*\mathcal{B}) \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ (Z, \mathcal{C}) & \longrightarrow & (Z, \mathcal{B}) \end{array}$$

Sei also  $\mathcal{F}$  ein quisflacher Komplex aus kompaktweichen  $g^*\mathcal{B}$ -Moduln. Das zugehörige naive Verflechtungsquadrat hat dann diesselbe linke Vertikale wie das

naive Verflechtungsquadrat zu  $\mathcal{F} \wedge \mathcal{C}$  über dem Projektionsformelquadrat „mit Raumwechsel ohne Ringwechsel“, von dem wir bereits wissen, daß es voll kokartesisch ist. Das beendet den Beweis.  $\square$

9.6.2 (**Trennverflechtung für halbseitig derivierte Modulgarben**). Der vorherige Satz gilt analog für halbseitig derivierte Modulgarben. Wir dürfen dann beliebige les-Abbildungen zulassen und müssen uns nicht auf lesb-Abbildungen beschränken, dürfen aber stattdessen nur gekringte Räume  $(X, \mathcal{A})$  endlicher Tor-Dimension zulassen.

## 9.7 Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen, ALT

9.7.1. Sei  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung und sei in der Basis  $\mathcal{B}$  ein multiplikatives System  $R$  ausgezeichnet. Unter einem **faserrückzugstabilen multiplikativen System  $S$  über  $R$**  verstehen wir ein multiplikatives System  $S$  in  $\mathcal{C}$  über  $R$  mit der Eigenschaft, daß für jede Hochhebung nach  $\mathcal{C}$  eines kartesischen Quadrats in  $\mathcal{B}$  mit vertikalen  $R$ -Pfeilen zu einem kommutativen Quadrat



in  $\mathcal{C}$  mit den Pfeilen nach rechts kartesisch und dem durchgezogenen Pfeil nach unten einem  $S$ -Morphismus auch der induzierte gestrichelte Pfeil nach unten ein  $S$ -Morphismus ist.

*Beispiel 9.7.2 (Rückzug eigentlicher Opkomorphismen).* In unserer Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.17 bilden die eigentlichen Opkomorphismen über stetigen Abbildungen nach Übung [TG] 6.4.31 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System.

*Beispiel 9.7.3 (Rückzug eigentlicher Opkomorphismen, Variante).* In unserer Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \text{Gek}$  aus [TG] 6.2.17 bilden die eigentlichen Opkomorphismen über beliebigen Morphismen nach Übung 4.4.19 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System.

*Beispiel 9.7.4 (Rückzug eigkokartesischer Opkomorphismen).* In der Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.12 bilden die eigkokartesischen Opkomorphismen nach lokal eigentlichem Basiswechsel 4.1.16 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System über dem multiplikativen System des les-Morphismen.

9.7.5. Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{T}$  verstehen wir unter einem **Trennquadrat in  $\mathcal{T}$**  ein kommutatives Diagramm der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  ihrer banalen Trennkate-

gorie  $\wedge \mathcal{T}$  der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{(q_1, \dots, q_r)} & X_1 \wedge \dots \wedge X_r \\ g \downarrow & & \downarrow f_1 \wedge \dots \wedge f_r \\ Z & \xrightarrow{(p_1, \dots, p_r)} & Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r \end{array}$$

**9.7.6 (Erzeuger für kartesische Trennquadrate).** Sei  $\mathcal{T}$  eine Kategorie mit endlichen Faserprodukten. In der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  ihrer banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  sei eine Menge von kartesischen Trennquadraten gegeben. Unsere Menge sei stabil unter dem Vertupeln sowie unter dem Verkleben längs gleicher vertikaler oder horizontaler Kanten und enthalte die **elementaren Trennquadrate**, eine neue Bezeichnung, unter der wir zusammenfassen:

1. Alle kartesischen Quadrate mit Einstrennungen oder Leertrennungen in den Horizontalen;
2. Alle **Projektionsformel-Quadrate** alias Quadrate der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}_X, f)} & X \wedge Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \wedge \text{id}_Y \\ Y & \xrightarrow{(\text{id}_Y, \text{id}_Y)} & Y \wedge Y \end{array}$$

So enthält unsere Menge alle kartesischen Trennquadrate der Familienkategorie. Um das einzusehen, betrachten wir für beliebige Morphismen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Z \rightarrow Y$  das aus kartesischen Quadraten mit den offensichtlichen Tupeln einfacher Morphismen in den Vertikalen bestehende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Y Z & \longrightarrow & X \wedge (X \times_Y Z) & \longrightarrow & X \wedge Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \wedge X & \longrightarrow & X \wedge Y \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & & \longrightarrow & Y \wedge Y \end{array}$$

Es zeigt, daß jedes kartesische Trennquadrat mit einer diagonalen Zweitrennung in der unteren Horizontalen zu unserer Menge gehören muß. Jeder Morphismus der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie entsteht jedoch nach [TSK] 1.2.22 durch Vertupeln und Verknüpfen aus Leertrennungen, Einstrennungen und Diagonalzweitrennungen. So folgt dann die Behauptung.

9.7.7 (**Erzeuger für kartesische Trennquadrate, Variante**). Eine Menge  $R$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{T}$  heiße **rückzugstabil**, wenn das Faserprodukt für alle Winkel mit einem  $R$ -Morphismus existiert und in jedem kartesischen Quadrat mit einem  $R$ -Morphismus im Ausgangswinkel der gegenüberliegende Morphismus aus dem Faserprodukt auch wieder ein  $R$ -Morphismus ist. Gegeben  $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}^!$  eine Kategorie mit einem rckzugstabilen multiplikativen System von Morphismen gilt das Vorhergehende analog für kartesische Trennquadrate der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  mit Tupeln von  $\mathcal{T}^!$ -Morphismen in den Vertikalen der Ausgangswinkel: Jedes derartige kartesische Trennquadrat hat  $\mathcal{T}^!$ -Morphismen in allen Vertikalen und eine Menge von derartigen Trennquadraten, die stabil ist unter dem Vertupeln und Verkleben und die alle kartesischen Quadrate mit einer Leertrennung oder einer Einstrennung in den Horizontalen enthält und darüber hinaus alle Projektionsformelquadrate zu Morphismen aus  $R$ , muß bereits alle kartesischen Trennquadrate mit Tupeln von Morphismen aus  $R$  in den Vertikalen des Ausgangswinkels enthalten. Wir nennen in dieser Situation unsere Erzeuger, also alle kartesischen Quadrate mit einer Leertrennung oder einer Einstrennung in den Horizontalen und Vertikalen aus  $R$  sowie alle Projektionsformelquadrate zu Morphismen aus  $R$ , die **elementaren kartesischen Trennquadrate zu  $R$** .

9.7.8. Seien  $\mathcal{T}$  eine Kategorie und  $\mathcal{T}^!$  darin ein multiplikatives System. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  nennen wir ein multiplikatives System  $\mathcal{G}^!$  über  $\mathcal{T}^!$  **fasertrennrückzugstabil**, wenn das System  $\mathcal{G}^{\text{III}}$  aller Tupel von  $\mathcal{G}^!$ -Morphismen faserrückzugstabil ist über  $\mathcal{T}^{\text{III}}$  in der Familienkategorie.

**Lemma 9.7.9 (Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen)**. *In der Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{\parallel \text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  bilden die eigentlichen Opkomorphismen ein fasertrennrückzugstabiles multiplikatives System über dem multiplikativen System aller stetigen Abbildungen.*

9.7.10. Das fasertrennrckzugstabile multiplikative System aller Tupel eigentlicher Opkomorphismen aus dem vorhergehenden Lemma notieren wir  $\text{Ab}_{\parallel \text{Top}}^!$ .

*Beweis.* Jeder Morphismus der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie entsteht nach [TS] ?? durch Vertupeln und Verknüpfen aus Leertrennungen, Einstrennungen und Diagonalzweitrennungen. Es reicht also zu zeigen, daß der Rückzug von Tupeln eigentlicher Opkomorphismen mit jedem Morphismus dieser drei Typen wieder ein eigentlicher Opkomorphismus ist. Im Fall einer Leertrennung ist das die einigermaßen banale Erkenntnis, daß für jeden topologischen Raum  $X$  der identische Opkomorphismus  $\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X$  über  $\text{id} : X \rightarrow X$  eigentlich ist alias daß die natürliche Einbettung eine Gleichheit  $\text{id}_! \mathbb{Z}_X = \text{id}_* \mathbb{Z}_X$  ist. Im Fall von Einstrennungen ist das unsere Übung [TG] 6.4.31. Im Fall einer Diagonalzweitrennung betrachten wir in der Familienkategorie der Basis zu  $f : X \rightarrow Y$  und

$g : Z \rightarrow Y$  das aus kartesischen Quadraten bestehende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_Y Z & \longrightarrow & X \wedge (X \times_Y Z) & \longrightarrow & X \wedge Z \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & X \wedge X & \longrightarrow & X \wedge Y \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & & \longrightarrow & Y \wedge Y
 \end{array}$$

Gegeben je ein eigentlicher Opkomorphismus  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  über  $f$  und  $\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$  über  $g$  gilt es zu zeigen, auch der induzierte Opkomorphismus  $\text{pr}_X^* \mathcal{F} \otimes \text{pr}_Z^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$  über der linken Vertikale eigentlich ist. Da jeder Opkomorphismus über einer Identität eigentlich ist, reicht es, in jedem der drei kartesischen Quadrate zu zeigen, daß der Rückzug eines eigentlichen Opkomorphismus eigentlich ist. Im Quadrat rechts oben folgt das aus dem bereits behandelten Fall des Rückzugs unter einem einfachen Morphismus der Basis. In den beiden anderen Quadraten geht es jeweils darum zu zeigen, daß der Rückzug unter einer Diagonalzweitrennung eines Zweitupels von eigentlichen Opkomorphismen der Gestalt  $\varphi \wedge \text{id}$  wieder eigentlich ist. Das hinwiederum läuft auf den Nachweis hinaus, daß für jede abelsche Garbe  $\mathcal{C}$  auf  $Y$  der Garbenhomomorphismus  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{C} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$ , der für  $V \in \mathcal{O}_Y$  und  $g \in \mathcal{G}(V)$  und  $c \in \mathcal{C}(V)$  gegeben wird durch  $g \otimes c \mapsto \varphi(g) \otimes c$ , über  $f_!(\mathcal{G} \otimes f^*\mathcal{C})$  faktorisiert. Da nun der Vorschub von den  $\varphi(g) \otimes c$  erzeugt wird, reicht es zu zeigen, daß diese Tensoren zu  $f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$  gehören. Es ist aber klar, daß der Träger in  $f^{-1}(V)$  unseres Tensors  $\varphi(g) \otimes c$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\text{supp}(\varphi(g))$  ist und folglich, wenn  $\varphi$  eigentlich ist, auch eigentlich nach  $V$  abgebildet wird.  $\square$

**Lemma 9.7.11 (Trennrückzug eigkokartesischer Opkomorphismen).** *In der auf Tupel flacher Garben eingeschränkten Garbenoptrennfaserung*

$$\text{flAb}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$$

*bilden die eigkokartesischen Opkomorphismen über les-Abbildungen ein faser-trennrückzugstabiles multiplikatives System.*

*Beweis.* Wir argumentieren wie beim Beweis unseres Lemmas zum Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen 4.4.9. Es reicht nach [TSK] 1.2.22 zu zeigen, daß der Rückzug von Tupeln eigkokartesischer Opkomorphismen flacher Garben über les-Abbildungen mit jeder Leertrennung, Einstrennung und Diagonalzweitrennung wieder ein eigkokartesischer Opkomorphismus ist. Im Fall einer Leertrennung ist das die einigermaßen banale Erkenntnis, daß für jeden topologischen Raum  $X$  der identische Opkomorphismus  $\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X$  über der Identität



$\text{id} : X \rightarrow X$  eigkokartesisch ist. Im Fall einer Einstrennung ist das lokal eigentlicher Basiswechsel 4.1.16. Im Fall einer Diagonalzweistrennung gehen wir vor wie beim Beweis unseres Lemmas zum Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen 4.4.9. Mit der Erkenntnis, daß direkte Bilder und eigentliche Vorschübe flacher alias torsionsfreier abelscher Garben wieder flach sind, ziehen wir uns wie bei diesem Beweis darauf zurück, zu zeigen, daß für jede les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und jeden eigkokartesischen Opkomorphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  über  $f$  und jede flache abelsche Garbe  $\mathcal{C} \in \text{Ab}_{/Y}$  auch der induzierte Opkomorphismus  $\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{C}$  über  $f$  eigkokartesisch ist. Das hinwiederum läuft auf den Nachweis hinaus, daß der aus der Eigentlichkeit des Trennrückzugs nach 4.4.9 entstehende Garbenhomomorphismus ein Isomorphismus  $f_! \mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{C})$  ist, und das schließlich ist genau die Aussage der Projektionsformel 4.3.9.  $\square$

9.7.12 (**Eine flache Modulgarbe mit nicht flachem Schnittmodul**). Gegeben eine flache Modulgarbe auf einem Kompaktum muß die Garbe der globalen Schnitte keineswegs flach sein. So gibt es etwa auf  $S^1$  bis auf Isomorphismus genau eine lokal, aber nicht global triviale Garbe von  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -Moduln und deren globale Schnitte sind als Modul isomorph zum Ideal  $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

## Übungen

*Übung 9.7.13.* Die eigentlichen Opkomorphismen von Modulgarben über gekringten Räumen aus 1.3.13 bilden ein fasertrennrückzustabiles multiplikatives System über dem System aller Morphismen gekringter Räume. Hinweis: Man mag sich auf den Fall abelscher Garben stützen, den wir bereits in 4.4.9 behandelt haben, sowie den Fall des einfachen Rückzugs aus Übung 1.3.13.

## 9.8 Weiterer underivierter Schrott

### 9.9 Schrott zu derivierten Schmelzkategorien

9.9.1. Wir erinnern aus 1.2.10 die Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  über der banalen Trennkategorie der topologischen Räume. Wir erinnern weiter unsere allgemeinen Erkenntnisse zu Trennfunktoren zu banalen Trennkategorien 1.5.2 und insbesondere, wie auf den Fasern in diesem Fall selbst die Struktur einer Trennkategorie induziert wird, die im Fall einer Trennfaserung nach 1.5.4 ihrerseits stabil universelle Trennungen besitzt. Indem wir erst zu Komplexen und dann zu Homotopiekomplexen übergehen, erhalten wir in offensichtlicher Weise weitere Trennfaserungen, für die ich die Notationen  $\text{Ket}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \wedge \text{Top}$  und  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \wedge \text{Top}$  verwende. Die Lokalisierung letzterer Trennkategorie nach allen denjenigen Einstrennungen über Identitäten, die Quasiisomorphismen

sind, notiere ich  $\text{Der}_{//\text{Top}} := \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}})_{\text{quis}}$ . Wir erhalten so einen Trennfunktor

$$\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$$

**Satz 9.9.2 (Rückzug und Tensorprodukt).** 1. Der soeben in 9.9.1 erklärte Trennfunktor  $\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  ist eine Trennfaserung;

2. Jede für  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \wedge \text{Top}$  kartesische Trennung zwischen Komplexen flacher abelscher Garben liefert eine für  $\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  kartesische Trennung;
3. Für jeden topologischen Raum  $X$  sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen von Trennkategorien

$$\text{Hot}(\text{Ab}_{//X})_{\text{quis}} \xrightarrow{\sim} (\text{Der}_{//\text{Top}})_X$$

zwischen der Lokalisierung der Faser über  $X$  als Trennkategorie und der Faser über  $X$  der globalen Lokalisierung mit ihrer offensichtlichen Struktur als Trennkategorie.

9.9.3. Insbesondere werden im vorliegenden Fall die Fasern, für die wir von nun an die abkürzende Notation  $\text{Der}_{//X}$  verwenden, selbst zu Trennkategorien und unser Satz liefert ausgezeichnete Isomorphismen

$$(\text{Der}_{//X})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{//X}$$

der Opponierten unserer Schmelzkategorien der derivierten abelschen Garben auf  $X$  aus 9.9.19 mit den Fasern unserer Trennfaserung. Wir verwenden hier unser Notationsschema 1.5.4 und notieren  $f^\dagger$  die Rückzüge unserer Trennfaserung zu einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und  $f^* := (f^\dagger)^{\text{opp}} : \text{Der}_{//Y} \rightarrow \text{Der}_{//X}$  die auf den opponierten Fasern induzierten Funktoren. Ebenso halten wir es mit den Vorschüben  $f_* = (f^\dagger)^{\text{opp}}$  und haben also Adjunktionen  $(f^*, f_*)$ .

9.9.4 (**Analoge Aussagen für Modulgarben**). Der Satz und sein Beweis gelten analog für Garben von  $k$ -Moduln über einem beliebigen Kring  $k$ . Man muß nur feiner mit quisflachen Garbenkomplexen nach 2.5.20 arbeiten und bemerken, daß deren Rückzüge stets wieder quisflach sind. Das ist jedoch klar, da ein Garbenkomplex genau dann quisflach ist, wenn an jedem Punkt des zugrundeliegenden topologischen Raums der Komplex der Halme quisflach ist. Wir besprechen im nächsten Abschnitt sogar den noch allgemeineren Fall von Modulgarben über Kringgarben.

9.9.5 (**Garbenkohomologie als Trennfunktor**). Unser Schmelzfunktor 1.5.29 des Vorschubs auf das finale Objekt spezialisiert in dieser Situation zu einem Schmelzfunktor

$$\text{fin}_* : \text{Der}_{//\text{Top}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Der}_{//\text{pt}}$$

Zusammen mit den Isomorphismen  $\text{Der}_{/\text{pt}} \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab}_{/\text{pt}}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab})$  von Schmelzkategorien aus dem vorhergehenden Satz und den Definitionen erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\text{fin}_* : \text{Der}_{//\text{Top}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$$

Halten wir noch den Schmelzfunktor  $\mathcal{H} : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$  der Homologie aus 2.8.19 dahinter, so erhalten wir den **Schmelzfunktor**  $(X, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{H}^*(X; \mathcal{F})$  **der totalen Hyperkohomologie**, den wir bisher in 2.4.7 nur als einfachen Funktor kennengelernt hatten. Halten wir zusätzlich den Opponierten des eindeutigen kartesischen Trennschnitts davor, erhalten wir einen Schmelzfunktor  $\Upsilon\text{Top}^{\text{opp}} \rightarrow \text{sgAb}$ , der jedem Raum  $X$  die supergraduierte abelsche Gruppe  $H^*(X; \mathbb{Z})_{\text{garb}}$  zuordnet und jedem Tupel von von  $X$  ausgehenden stetigen Abbildungen die multiadditive Abbildung „cup-Produkt des Rückzugs der Kohomologieklassen“. Er ist eine garbenkohomologische Variante des entsprechenden Schmelzfunktors  $\Upsilon\text{Top}^{\text{opp}} \rightarrow \text{sgAb}$  der singulären Kohomologie, den wir in [TS] ?? als Trennfunktor  $\wedge\text{Top} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$  besprochen hatten.

*Beweis.* Wir wenden unsere Korollare 2.5.11 und 2.5.12 zur Lokalisierung von Kofaserfunktoren durch Linksanpassung oder genauer die daraus durch Übergang zu den opponierten Kategorien entstehenden Aussagen zur Lokalisierung von Faserfunktoren durch Rechtsanpassung an auf den auf den Familienkategorien induzierten Funktor

$$\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}})^{\wedge} \rightarrow \text{Top}^{\wedge}$$

Er ist ein Faserfunktor. Genauer ist für stetige Abbildungen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  und  $\mathcal{G}_i \in \text{Hot}(\text{Ab}_{//Y_i})$  die tautologische Trennung

$$f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_n^* \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_n$$

über  $(f_1, \dots, f_n)$  kartesisch. Wie beim Beweis des Spezialfalls 9.9.19, nur jetzt in der opponierten Situation, bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach [TD] 2.5.3 ein **faserweises Rechtsoresystem**, ja sogar ein faserweises Oresystem. Für dieses faserweise Rechtsoresystem der Quasiisomorphismen ist nun wie beim Beweis des Spezialfalls 9.9.19 die Unterkategorie  $\text{Hot}(\text{flAb}_{//\text{Top}})^{\wedge}$  aller Tupel von Homotopiekomplexen flacher abelscher Garben über topologischen Räumen eine **Rechtsanpassung**, denn Tensorprodukt wie Rückzug machen aus flachen Garben flache Garben, Tensorprodukt wie Rückzug von Quasiisomorphismen zwischen Komplexen flacher abelscher Garben sind wieder Quasiisomorphismen, und nach [TD] 3.6.8 finden wir für jeden Komplex abelscher Garben einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Garben dorthin, der dann in der opponierten Kategorie entsprechend von dort ausgeht.  $\square$

**Satz 9.9.6 (Schmelzkategorie der derivierten Modulgarben).** *Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und ein Kring  $k$  gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\mathbb{E} \text{Hot}(k\text{-Mod}/X))_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}(\text{Hot}(k\text{-Mod}/X)_{\text{qis}})$$

*Die so erhaltene Schmelzkategorie notieren wir  $\text{Der}_{/(X,k)}$ .*

2. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}_{/(X,k)}$  der derivierten  $k$ -Modulgarben besitzt stabil universelle Verschmelzungen, wir notieren sie  $\otimes_k^{\mathbb{L}}$ , und jede universelle Verschmelzung in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/(X,k)})$  zwischen Komplexen von  $k$ -Modulgarben, von denen höchstens einer nicht quisflach ist, bleibt darin universell;*
3. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}_{/(X,k)}$  ist intern;*
4. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}_{/(X,k)}$  besitzt internes Hom.*

*Beweis.* Mutatis mutandis derselbe Beweis wie im Fall abelscher Garben. Quisrechtsentfaltungen von  $k$ -Modulgarben haben wir in 2.3.6 bereitgestellt.  $\square$

9.9.7. Wie im Fall abelscher Garben 9.9.21 konstruieren wir auch für einen beliebigen Kring  $k$  und einen beliebigen topologischen Raum  $X$  und einen beliebigen Komplex von  $k$ -Modulgarben eine ausgezeichnete Bijektion

$$\text{Der}_{/(X,k)}(\gamma, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$$

**Definition 9.9.8.** Sei  $k$  ein Ring. Ein Komplex von  $k$ -Modulgarben heißt **quisflach**, wenn das Darantensorieren von unserem Komplex aus jedem exakten Komplex von  $k$ -Rechtsmodulgarben einen exakten Komplex von abelschen Garben macht. Allgemeiner vereinbaren wir dieselbe Terminologie auch für Garben von Moduln über einer Garbe  $\mathcal{A}$  von Ringen. Gegeben ein geringter Raum  $(X, \mathcal{A})$  notieren wir

$$\text{HflAb}_{//(X,\mathcal{A})} \subset \text{Hot}(\text{Ab}_{//(X,\mathcal{A})})$$

die volle triangulierte Unterkategorie der quisflachen Komplexe von Modulgarben.

*Beispiel 9.9.9 (Schmelzkategorie derivierter abelscher Garben).* Die abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$  bilden offensichtlich eine bequeme abelsche Schmelzkategorie  $\text{Ab}_{/X}$ . Sie ist entfaltbar im Sinn von 2.8.5. In der Tat besitzt jeder Komplex abelscher Garben eine Quisrechtsentfaltung nach 2.3.2 und die Komplexe flacher abelscher Garben bilden eine Quisschmelzanpassung,

denn das Tensorprodukt macht aus flachen Garben flache Garben, das Darantensorieren eines Komplexes flacher Garben macht Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen nach [TD] 3.8.12 sowie [TD] 3.8.15 und nach 1.1.12 und [TD] 3.6.7 finden wir für jeden Komplex abelscher Garben einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Garben dorthin. Die allgemeine Theorie aus 2.8.7 liefert uns damit die **Schmelzkategorie der derivierten abelschen Garben auf  $X$** , die wir

$$\text{Der}_{/X} := \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$$

notieren, und einen Isomorphismus der zugrundeliegenden einfachen Kategorie mit der gewöhnlichen derivierten Kategorie der abelschen Garben auf  $X$ . In  $\text{Ab}_{/X}$  hatten wir einen Isomorphismus  $L \xrightarrow{\sim} \Gamma$  des Leerverschmelzungsfunktor mit dem Funktor der globalen Schnitte angegeben. Mit 2.8.9 liefert er natürliche Isomorphismen

$$\text{Der}_{/X}(\gamma, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$$

zwischen der abelschen Gruppe der Leerverschmelzungen in einen Garbenkomplex und seiner Hyperkohomologie im Grad Null.

**Lemma 9.9.10.** *Sei wie eben  $(F^{p,q})_{q \leq 0}$  eine Cartan-Eilenberg-Untenauflösung durch flache Garben eines Komplexes von  $k$ -Modulgarben. Besteht die Godementauflösung jedes  $F^{p,q}$  aus flachen Garben, so ist auch das Summentotal des Tripelkomplexes  $G^r(F^{p,q})_{q \leq 0, r \geq 0}$  ein homotopieflacher Komplex aus flachen Garben.*

9.9.11. So kriegen wir, tja, was genau? Irgendwie Quasiisomorphismen mit quiflachem Komplex aus schwach kompaktweichen flachen Garben.

*Beweis.* Sei  $E$  ein exakter Komplex von Garben von  $k$ -Rechtsmoduln. Wir wissen aus 2.5.20, daß  $\text{tot}^\oplus(E^s \otimes_k F^{p,q})_{q \leq 0}$  exakt ist. Wenn wir zeigen können, daß  $\text{tot}^\oplus(E^s \otimes_k G^r(F^{p,q}))_{q \leq 0, r \geq -1}$  exakt ist mit  $G^{-1}(F^{p,q}) := F^{p,q}$ , so folgt die Behauptung. Aufgrund der Funktorialität der Godement-Auflösung haben für festes  $r$  die Doppelkomplexe  $G^r(F^{p,q})_{q \leq 0}$  maximal spaltende  $p$ -Zeilen, folglich ist für festes  $r, q$  das Summentotal  $\text{tot}_{p,s}^\oplus(E^s \otimes_k G^r(F^{p,q}))$  exakt und dann wegen  $q \leq 0$  auch für alle  $r$  das Summentotal  $\text{tot}_{p,q,s}^\oplus(E^s \otimes_k G^r(F^{p,q}))$ . Da aber diese Doppelkomplexe exakte  $r$ -Zeilen haben und verschwinden für  $r < -1$ , haben sie ihrerseits ein exaktes Summentotal.  $\square$

9.9.12 (**Leerverschmelzungen in Homotopiekategorien**). Gegeben eine bequeme abelsche Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  erhalten wir eine Transformation  $L_{\text{Hot}} \Rightarrow L_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$  von Schmelzfunktoren  $\text{Hot}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Ab}$ , indem wir den linksexakten Leerverschmelzungsfunktor von  $\mathcal{M}$  mit  $L := L_{\mathcal{M}}$  abkürzen und  $L_{\text{Hot}} = \mathcal{H}^0 \circ \text{Hot}(L)$  aus 2.7.5 erinnern und jedem Komplex  $(X, d)$  den durch die rechte Vertikale des

Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{im}(L d^{-1}) & \hookrightarrow & \ker(L d^0) & \rightarrow & \mathcal{H}^0 \mathrm{Hot}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \\ L \mathrm{im}(d^{-1}) & \hookrightarrow & L \ker(d^0) & \rightarrow & L \mathcal{H}^0 \end{array}$$

induzierten Morphismus zuordnen. Ist zusätzlich der Leerverschmelzungsfunktor von  $\mathcal{M}$  exakt, so ist unsere Transformation eine Isotransformation

$$L_{\mathrm{Hot}} \xrightarrow{\cong} L_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$$

**9.9.13 (Anreicherung derivierter Schmelzkategorien).** Gegeben eine entfaltbare bequeme abelsche Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  erhalten wir aus  $\tau : Q \circ \mathrm{Hot}(L_{\mathcal{M}}) \Rightarrow R(L_{\mathcal{M}}) \circ Q$  nach [TD] 3.4.1 und  $\mathcal{H}^0 \circ \mathrm{Hot}(L_{\mathcal{M}}) \Rightarrow L_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$  nach 9.9.12 Transformationen

$$\mathcal{H}^0 \circ R(L_{\mathcal{M}}) \circ Q \Leftarrow Q \circ \mathcal{H}^0 \circ \mathrm{Hot}(L_{\mathcal{M}}) \Rightarrow L_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0 \circ Q$$

Ist der Leerverschmelzungsfunktor  $L_{\mathcal{M}}$  exakt, so sind sie beide Isotransformationen und induzieren eine Isotransformation  $\mathcal{H}^0 \circ R(L_{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\cong} L_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$  von Funktoren auf der derivierten Kategorie, in anderen Worten eine Faktorisierung ihres Leerverschmelzungsfunktors als

$$L_{\mathrm{Der}} \xrightarrow{\cong} L_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{H}^0$$

für  $\mathcal{H}^0 : \mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ . Nach 2.8.7 ist nun  $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$  eine Schmelzkategorie mit Multihom und nach [TSK] 2.4.23 können wir die Selbstanreicherung  $\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}} / \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$  bilden und können diese mit jedem Schmelzfunktor  $\varphi : \mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{S}$  zu einer in  $\mathcal{S}$  angereicherten Schmelzkategorie umstrukturieren im Sinne von [TSK] 2.4.21. Strukturieren wir zum Beispiel um mit  $\mathcal{H}^0 : \mathrm{Der}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ , so erhalten wir eine in  $\mathcal{M}$  angereicherte Schmelzkategorie  $\mathcal{H}^0(\mathrm{Der}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}) / \mathcal{M}$ , die wir vereinfacht

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{M}} / \mathcal{M}$$

notieren. Strukturieren wir sie weiter um mit dem Leerverschmelzungsfunktor von  $\mathcal{M}$  und nehmen an, dieser Leerverschmelzungsfunktor sei exakt, so erhalten wir nach [TSK] 2.4.23 einen objektfesten Isomorphismus von Schmelzkategorien

$$L_{\mathcal{M}}(\mathrm{Der}_{\mathcal{M}} / \mathcal{M}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{\mathcal{M}}$$

**Satz 9.9.14 (Schmelzkategorie der derivierten abelschen Gruppen).** Für die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe  $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}) = \mathrm{Hot}$  aus [TSK] 2.5.3 und ihre Lokalisierung nach Quasiisomorphismen  $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}) := \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})_{\mathrm{qis}}$  gilt:

1. Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus

$$(E \text{Hot}(\text{Ab}))_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} E(\text{Hot}(\text{Ab}))_{\text{qis}}$$

2. Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen und jede universelle Verschmelzung in  $\text{Hot}(\text{Ab})$ , bei der höchstens einer der Ausgangskomplexe nicht aus flachen abelschen Gruppen besteht, bleibt universell in  $\text{Der}(\text{Ab})$ ;
3. Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  besitzt internes Hom und ist  $A$  ein Komplex aus freien abelschen Gruppen oder  $B$  ein Komplex aus injektiven abelschen Gruppen, so stimmt das in der derivierten Kategorie gebildete Homobjekt  $A \Rightarrow B$  mit dem in der Homotopiekategorie gebildeten Homobjekt überein;
4. Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  ist intern im Sinne von [TD] 2.3.4.

9.9.15 (**Additive Struktur auf  $\text{Der}(\text{Ab})$** ). Der Schmelzfunktor  $\mathcal{H}^0 : \text{Hot}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$  macht Quasiisomorphismen zu Isomorphismen und induziert folglich einen Schmelzfunktor  $\mathcal{H}^0 : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$ . Unsere Überlegungen 2.6.4 liefern eine Isotransformation  $v \circ \mathcal{H}^0 \xrightarrow{\sim} L$  zum Leerverschmelzungsfunktor von  $\text{Der}(\text{Ab})$ . Sie versieht unsere Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  nach [TSK] 2.4.7 mit einer additiven Struktur, die nach 2.6.7 auch die einzig mögliche additive Struktur auf dieser Schmelzkategorie ist.

9.9.16 (**Totale Homologie als Schmelzfunktor**). Wir erinnern den Schmelzfunktor der totalen Homologie  $\mathcal{H} : \text{Hot}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$  von der Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe in die Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen aus [TSK] 2.5.13. Er faktorisiert offensichtlich über die Lokalisierung nach Quasiisomorphismen und induziert so einen Schmelzfunktor

$$\mathcal{H} : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$$

*Beweis.* Wir wenden unsere Korollare 2.5.11 und 2.5.12 zur Lokalisierung durch Linksanpassung an auf den Indexfunktor  $p : \text{Hot}(\text{Ab})^\vee \rightarrow \text{Ens}$ . Er ist ein Kofaserfunktor, da die fraglichen Homotopiekomplexe nach [TSK] 2.5.3 stabil universelle Verschmelzungen haben. Für diesen Funktor bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach [TD] 2.5.3 ein faserweises Oresystem. Für dieses faserweise Oresystem der Quasiisomorphismen ist nun die Unterkategorie  $\text{Hot}(\text{flAb})^\vee$  aller Tupel von Homotopiekomplexen flacher abelscher Gruppen eine Linksanpassung, denn die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten bilden darin, immer noch nach [TD] 2.5.3, weiter ein faserweises Oresystem, das Tensorprodukt macht aus flachen abelschen Gruppen flache abelsche Gruppen, das Tensorprodukt von Quasiisomorphismen zwischen Komplexen flacher

abelscher Gruppen ist nach [TD] 3.8.17 wieder ein Quasiisomorphismus, und nach [TD] 3.6.7 finden wir für jeden Komplex abelscher Gruppen einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Gruppen dorthin. Das Tensorprodukt mit einem Komplex flacher abelscher Gruppen macht nach [TD] 3.8.17 sogar einen beliebigen Quasiisomorphismus in  $\text{Ket}(\text{Ab})$  zu einem Quasiisomorphismus. Wir sehen so, daß der Funktor  $X \otimes_{\text{Der}(\text{Ab})}$  des Darantensorierens in der Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  isomorph ist zu unserem derivierten Tensorieren  $L(X \otimes) : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  aus [TD] 3.8.17, von dem wir bereits aus [TD] 3.8.22 wissen, daß er einen Rechtsadjungierten besitzt und wie dieser Rechtsadjungierte beschrieben werden kann.  $\square$

**Satz 9.9.17 (Schmelzkategorie der derivierten Kringmoduln).** *Gegeben ein Kring  $k$  und die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe  $\text{Hot}(\text{Mod}_k)$  von  $k$ -Moduln aus [TSK] 2.5.12 und ihre Lokalisierung  $\text{Der}(\text{Mod}_k) := \text{Hot}(\text{Mod}_k)_{\text{qis}}$  nach Quasiisomorphismen gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\text{E Hot}(\text{Mod}_k))_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} \text{E}(\text{Hot}(\text{Mod}_k)_{\text{qis}})$$

2. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen. Des weiteren bleibt jede universelle Verschmelzung in  $\text{Hot}(\text{Mod}_k)$ , bei der höchstens einer der Ausgangskomplexe nicht quisflach ist, universell in  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$ ;*
3. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  besitzt internes Hom und ist  $X$  ein quislinksentfalteter oder  $Y$  ein quisrechtsentfalteter Komplex, so stimmt das in der derivierten Kategorie gebildete Homobjekt  $X \Rightarrow Y$  mit dem in der Homotopiekategorie gebildeten Homobjekt überein;*
4. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  ist intern im Sinne von [TD] 2.3.4.*

*Beweis.* Wir wenden unsere Korollare 2.5.11 und 2.5.12 zur Lokalisierung durch Linksanpassung an auf den Indexfunktor  $p : \text{Hot}(\text{Mod}_k)^\vee \rightarrow \text{Ensf}$ . Er ist ein Kofaserfunktor, da die fraglichen Homotopiekomplexe nach [TSK] 2.5.3 stabil universelle Verschmelzungen haben. Für diesen Funktor bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach [TD] 2.5.3 ein **faserweises Oresystem**. Für dieses faserweise Oresystem der Quasiisomorphismen ist nun die Unterkategorie  $\text{hflHot}(\text{Mod}_k)^\vee$  aller Tupel von quisflachen Komplexen eine **Linksanpassung**, denn die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten bilden darin, immer noch nach [TD] 2.5.3, weiter ein **faserweises Oresystem**, das Tensorprodukt macht aus quisflachen Komplexen quisflache Komplexe, das Tensorprodukt von Quasiisomorphismen zwischen quisflachen Komplexen ist nach [TD]



3.8.17 wieder ein Quasiisomorphismus, und nach [TD] 3.8.15 und [TD] 3.8.8 finden wir für jeden Komplex von Moduln einen Quasiisomorphismus von einem quasisflachen Komplex dorthin. Wir sehen so, daß der Funktor  $X \otimes_{\text{Der}(\text{Mod}_k)}$  des Darantensorierens in der Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  isomorph ist zur Variante  $L(X \otimes_k) : \text{Der}(\text{Mod}_k) \rightarrow \text{Der}(\text{Mod}_k)$  unseres derivierten Tensorierens für beliebige Ringe aus [TD] 3.8.17, von dem wir bereits aus [TD] 3.8.22 wissen, daß er einen Rechtsadjungierten besitzt und wie dieser Rechtsadjungierte beschrieben werden kann.  $\square$

**9.9.18 (Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Garben).** Wie bereits in 2.8.6 erwähnt bilden die abelschen Garben auf einem beliebigen topologischen Raum  $X$  eine bequeme abelsche Schmelzkategorie  $\text{Ab}_{/X}$ . Speziell erhalten wir so für jeden topologischen Raum  $X$  die Ab-Schmelzkategorien  $\text{Ket}(\text{Ab}_{/X})$  und  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  mit stabil universellen Verschmelzungen und internem Hom und die übliche triangulierte Struktur auf  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  ist intern im Sinne von [TD] 2.3.4, vergleiche 2.7.8. In  $\text{Ab}_{/X}$  hatten wir einen Isomorphismus  $L \xrightarrow{\cong} \Gamma$  des Leerverschmelzungsfunktor mit dem Funktor der globalen Schnitte erhalten. In  $\text{Ket}(\text{Ab}_{/X})$  sind die Leerverschmelzungen in einen Komplex folglich die Nullzykel des Komplexes der globalen Schnitte und in  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  die Elemente der nullten Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte. Das Einsobjekt ist jeweils die konstante Garbe  $\mathbb{Z}_X$  im Grad Null, genauer der Komplex  $\mathbb{Z}_X[0]$  mit dem globalen Schnitt  $1_X$  beziehungsweise dessen Kohomologiekategorie als universeller Leerverschmelzung.

**Satz 9.9.19 (Schmelzkategorie derivierter abelscher Garben).** *Für die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  auf einem topologischen Raum  $X$  und ihre Lokalisierung nach Quasiisomorphismen  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X}) := \text{Hot}(\text{Ab}_{/X})_{\text{qis}}$  gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(E \text{Hot}(\text{Ab}_{/X}))_{\text{qis}} \xrightarrow{\cong} E(\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})_{\text{qis}})$$

2. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen und jede universelle Verschmelzung in  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  zwischen Komplexen abelscher Garben, von denen höchstens einer nicht aus flachen Garben besteht, bleibt darin universell;*

3. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  besitzt internes Hom;*

4. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  ist intern.*

9.9.20. Wir verwenden für einen topologischen Raum  $X$  auch die abkürzende Notation  $\text{Der}_{/X} := \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$ .

9.9.21 (**Leerverschmelzungen als Hyperkohomologie**). Ich konstruiere für jeden topologischen Raum  $X$  und jeden Komplex  $\mathcal{F}$  von abelschen Garben auf  $X$  einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\text{Der}_{/X}(\gamma, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$$

Die universelle Leerverschmelzung in den Homotopiekomplex  $\mathbb{Z}_X[0]$  bleibt nach Teil 2 universell in  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$ . Wir erhalten so für jeden Garbenkomplex  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  eine Bijektion  $\text{Der}_{/X}(\gamma, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{/X}(\mathbb{Z}_X[0], \mathcal{F})$ . Da jeder Garbenkomplex quisrechtsentfaltbar ist, erhalten wir mithilfe der Beschreibung [TD] 3.2.20 von Morphismen in Lokalisierungen als faktorierten Funktoren, der Definition der Homotopiekategorie und unseren Erkenntnissen [TD] 3.2.21 zur Faktorisierung einer Verknüpfung ausgezeichnete Bijektionen

$$\text{Der}_{/X}(\mathbb{Z}_X[0], \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{R}(\text{Hot}_{/X}(\mathbb{Z}_X[0], ))(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{R}(\mathcal{H}^0\Gamma)(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\text{R}\Gamma)(\mathcal{F})$$

Mit unserer Definition  $\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q(\text{R}\Gamma)(\mathcal{F})$  der Hyperkohomologie aus [TD] 3.4.17 liefert das schließlich Bijektionen  $\text{Der}_{/X}(\gamma, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$  wie gewünscht.

## 9.10 Reste Schnittpaarung

*Übung 9.10.1.* Auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  ist jede kompaktweiche Garbe  $\mathcal{F}$  globale-Schnitte-entfaltet. Hinweis: Man schreibe unseren Hausdorffraum als aufsteigende Vereinigung einer Folge von Kompakta  $X = \bigcup K_n$  und wähle eine lokale Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ . Dann sind die Sequenzen  $\Gamma(K_n; \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(K_n; \mathcal{I}^\triangleleft)$  exakt und im Limes nach dem Mittag-Leffler-Kriterium auch die Sequenzen  $\Gamma\mathcal{F} \hookrightarrow \Gamma\mathcal{I}^\triangleleft$ .

*Übung 9.10.2.* Gegeben eine abzählbar basierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  hat der Funktor  $\Gamma : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}$  der globalen Schnitte höchstens die homologische Dimension  $n$ . Hinweis: Gegeben eine kompaktweiche Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^\triangleleft$  ist  $\text{im}(\mathcal{G}^{n-1} \rightarrow \mathcal{G}^n)$  kompaktweich nach 5.7.14 und [TG] 4.10.2. Dann verwende man 9.10.1.

9.10.3 (**Lokale Kohomologie als Hyperkohomologie von Lokalgarben**). Gegeben  $A \subset X$  eine lokal abgeschlossene Teilmenge in einem topologischen Raum erklären wir ihre **Lokalgarbe**  $\mathcal{L}_A \in \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  durch die Vorschrift

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A \subset X} := (i_*\mathbb{Z}_A \rightrightarrows \mathbb{Z}_X)$$

mit der Notation  $i$  für die Inklusionsabbildung. Unsere Isomorphismen [TSK] 1.4.2 zwischen Einsverschmelzungen und Leerverschmelzungen in das Homobjekt spezialisieren in diesem Fall zu Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^p(i\mathbb{Z}_A, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^p(X; \mathcal{L}_A)$$

Der Isomorphismus der relativen Verdierdualität 4.7.8 liefert weiter einen Isomorphismus  $i_*i^!\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_A$  und damit Isomorphismen  $\mathbb{H}^p(A; i^!\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^p(X; \mathcal{L}_A)$ . Schließlich liefert für  $A \looparrowright X$  abgeschlossen Übung 5.3.8 Isomorphismen zur lokalen Kohomologie  $\mathbb{H}^p(A; i^!\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_A^p(X)$ . Insgesamt erhalten wir für  $A \looparrowright X$  also Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^p(i\mathbb{Z}_A, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^p(X; \mathcal{L}_A) \xleftarrow{\sim} \mathbb{H}^p(A; i^!\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_A^p(X)$$

**Beispiel 9.10.4 (Lokalgarbe einer Untermannigfaltigkeit).** Ist  $X$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit, so liefert unser Isomorphismus  $\omega_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_X[n]$  aus 6.1.15 einen Isomorphismus  $(\mathrm{or}_X \rightrightarrows \omega_X)[-n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$ . Ist  $A$  eine  $a$ -Mannigfaltigkeit und  $i : A \hookrightarrow X$  eine Einbettung als abgeschlossene Teilmenge  $i(A) \looparrowright X$ , so finden wir mit relativer Verdierdualität 4.7.8 Isomorphismen

$$\begin{aligned} i^!\mathbb{Z}_X &\xrightarrow{\sim} i^!(\mathrm{or}_X \rightrightarrows \omega_X)[-n] \\ &\xrightarrow{\sim} (i^*\mathrm{or}_X \rightrightarrows i^!\omega_X)[-n] \\ &\xrightarrow{\sim} (i^*\mathrm{or}_X \rightrightarrows \omega_A)[-n] \\ &\xrightarrow{\sim} (i^*\mathrm{or}_X \rightrightarrows \mathrm{or}_A)[a-n] \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{ACX}[a-n] \end{aligned}$$

mit der Notation  $\mathrm{or}_{ACX} := (i^*\mathrm{or}_X \rightrightarrows \mathrm{or}_A)$  für die **relative Orientierungsgarbe von  $A$  in  $X$** , einen lokal freien  $\mathbb{Z}_A$ -Modul vom Rang Eins. Wir erhalten weiter Isomorphismen

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{ACX} = i_*i^!\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} i_*\mathrm{or}_{ACX}[a-n]$$

Sind unsere  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  und ihre abgeschlossene  $a$ -Untermannigfaltigkeit  $A \looparrowright X$  beide orientierbar, so liefert die Wahl jeweils einer Orientierung einen Isomorphismus

$$\mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} i_*\mathbb{Z}_A[a-n]$$

**Beispiel 9.10.5 (Fundamentalkozykel einer Untermannigfaltigkeit).** Seien  $X$  eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A$  eine orientierte  $a$ -Mannigfaltigkeit und  $i : A \hookrightarrow X$  eine Einbettung als abgeschlossene Teilmenge  $i(A) \looparrowright X$ . Wir bezeichnen mit

$$p := n - a$$

die Kodimension von  $A$  in  $X$ . So liefert der Isomorphismus  $\mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} i_* \mathbb{Z}_A[-p]$  aus 9.10.4 durch Übergang zur Hyperkohomologie mit 9.10.3 Isomorphismen

$$I_A = I_{A \subset X} = I_{\vec{A} \subset \vec{X}} : H_A^q(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{L}_A) \xrightarrow{\sim} H^{q-p}(A)$$

Das Urbild von  $1 \in H^0(A)$  unter der Verknüpfung dieser Isomorphismen nennen wir den **Fundamentalkozykel von  $A$  in  $X$**  und notieren ihn

$$\tau_A = \tau_{A \subset X} = \tau_{\vec{A} \subset \vec{X}} = I_{\vec{A} \subset \vec{X}}^{-1}(1) \in H_A^p(X)$$

Der Fundamentalkozykel hängt von der Wahl je einer Orientierung auf  $X$  und  $A$  ab. Der Fundamentalkozykel von  $X \subset X$  in Bezug auf ein- und dieselbe Orientierung ist die Eins  $\tau_{X \subset X} = 1 \in H^0(X)$  des Kohomologierings.

**Beispiel 9.10.6 (Erzwungene Schnitte, Variante ohne Orientierung).** Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $X$  und abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten  $A, B \subset X$  gilt

$$\tau_A \cup \tau_B \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

Hier meinen wir mit  $\tau_A, \tau_B$  die Bilder der Fundamentalkozykel mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  im Kohomologiering  $H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

**9.10.7 (Poincarédualität als Verdierdualität).** Gegeben eine  $m$ -Mannigfaltigkeit  $X$  und eine abelsche Gruppe  $G$  erinnere ich an den **Poincaré-Isomorphismus**

$$P = P_X : H_q(X; G) \xrightarrow{\sim} H_1^{m-q}(X; \text{or}_X(G))$$

für die singuläre Homologie aus [TS] 7.4.3. Im Rahmen der sechs Funktoren erhalten wir ihn, diesmal für die **Garbenhomologie** und **Garbenkohomologie**, als den vom Dualisierungs-Isomorphismus  $p_X : c^! G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \text{or}_X(G)[m]$  der Mannigfaltigkeit  $X$  aus 6.1.15 induzierten Isomorphismus

$$H_q(X; G) = \mathcal{H}^{-q} c_! c^! G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} c_! \text{or}_X(G)[m] = H_1^{m-q}(X; \text{or}_X(G))$$

Genau genommen konstruieren wir den Dualisierungs-Isomorphismus in 6.1.15 nur für  $G = \mathbb{Z}$ , aber mit 6.2.8 erweitert man ihn unmittelbar durch  $\otimes_{\mathbb{Z}} G$  auf den allgemeinen Fall.

**9.10.8 (Funktorialität der Poincaré-Isomorphismen).** Die Poincaré-Isomorphismen sind funktoriell in dem Sinne, daß für eine stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten  $f : X \rightarrow Y$  mit  $m = \dim X$  und  $n = \dim Y$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X; G) & \xrightarrow{\sim} & H_1^{m-q}(X; \text{or}_X(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(Y; G) & \xrightarrow{\sim} & H_1^{n-q}(Y; \text{or}_Y(G)) \end{array}$$

kommutiert mit der rechten Vertikalen, die von dem von  $\omega_X(G) \xrightarrow{\sim} f^! \omega_Y(G)$  induzierten Morphismus  $f_! \text{or}_X(G) \rightarrow \text{or}_Y(G)[n-m]$  herkommt.

**Korollar 9.10.9.** *Gegeben eine orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $H_{n-1}M$  frei.*

*Beweis.* GESCHEITERT! Ich will mich auf das universelle Koeffiziententheorem der Kohomologie ?? stützen, also auf die kurze exakte Sequenz

$$\text{Ext}(H_{n-1}M, G) \hookrightarrow H^n(M; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n M, G)$$

Es reicht zu zeigen, daß darin die rechte Abbildung für jede abelsche Gruppe  $G$  ein Isomorphismus ist. Dazu gehen wir von der relativen Verdierdualität aus, die uns für  $c : M \rightarrow \text{top}$  einen Isomorphismus

$$c_*(\mathbb{Z}_M \rightrightarrows c^!G_{\text{top}}) \xrightarrow{\sim} (c_!\mathbb{Z}_M \rightrightarrows G_{\text{top}})$$

liefert. Wenden wir darauf  $\mathcal{H}^0$  an, erhalten wir mithilfe des in [TSF] 6.2.8 konstruierten Isomorphismus  $c^!\mathbb{Z}_{\text{top}} \otimes c^*G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} c^!G_{\text{top}}$  und des durch die Orientierung gegebenen Isomorphismus  $c^!\mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_M[n]$  einen Isomorphismus der linken Seite mit  $H^n(M; G)$ . Andererseits erhalten wir einen Isomorphismus der rechten Seite mit  $\text{Der}_{/\text{top}}(c_!\mathbb{Z}_M, G_{\text{top}})$  und DA KOMMT NUR NOCHMAL DAS UNIVERSELLE KOEFFIZIENTENTHEOREM RAUS!  $\square$

9.10.10 (**Dualisierte Poincaré-Isomorphismen**). Ersetzen wir oben  $c_!$  durch  $c_*$ , so erhalten wir in derselben Weise Isomorphismen

$$P^! = P^!_X : H^!_q(X; G) \xrightarrow{\sim} H^{m-q}(X; \text{or}_X(G))$$

Wir nennen sie die **dualisierten Poincaré-Isomorphismen**, da sie sich im Fall von Körperkoeffizienten durch Dualisieren aus den gewöhnlichen Poincaré-Isomorphismen erhalten lassen. Sie gelten für allgemeine Mannigfaltigkeiten, wenn wir die lokalendliche Homologie links im garbentheoretischen Sinne verstehen. Andernfalls benötigen wir für den entsprechenden Vergleichssatz und auch für die Beschreibung [TS] 7.3.28 als dualisierte kompakte Kohomologie die Eigenschaft „abzählbar basiert“. Unsere dualisierten Poincaré-Isomorphismen  $P^!$  haben analoge Funktorialitätseigenschaften wie die Poincaré-Isomorphismen, diesmal aber nur für eigentliches  $f : X \rightarrow Y$ . Wir erhalten also in Formeln ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^!_q(X; G) & \xrightarrow{\sim} & H^{m-q}(X; \text{or}_X(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^!_q(Y; G) & \xrightarrow{\sim} & H^{n-q}(Y; \text{or}_Y(G)) \end{array}$$

Im Fall von kompaktem  $X$  schließlich haben wir  $P^!_X = P_X$ .

**Bemerkung 9.10.11 (Versuch einer Klärung).** Jetzt ist also im Fall einer orientierten Mannigfaltigkeit  $[X]$  genau, was nach 1 geht. Wie wird die Eins links abgebildet? Fange mal an mit

$$\begin{array}{ccc} H_m^1 A & \xrightarrow{\sim} & H^0 A \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_m^1 X & \xrightarrow{\sim} & H^p X \end{array}$$

für  $m = \dim A$  und  $p$  die Kodimension von  $A$  in  $X$ . Dann  $[A] \mapsto 1$  unter der oberen Horizontale definiert  $[A]$ . Die rechte Vertikale gehört zu  $p_A : \omega_A \xrightarrow{\sim} \text{or}_A[m]$  und  $p_X : \omega_X \xrightarrow{\sim} \text{or}_X[n]$  zu einem Isomorphismus  $i_* \mathbb{Z}_A \rightarrow \mathbb{Z}_X[p]$  gegeben durch blah. Eben als

$$H^0 A = \mathcal{H}^0 a_* \mathbb{Z}_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 c_* i_* \mathbb{Z}_A \rightarrow \mathcal{H}^0 c_* \mathbb{Z}_X[p] = H^p X$$

Faktorisierere als  $i_* \mathbb{Z}_A = i_* i^! \mathbb{Z}_X[p] \rightarrow \mathbb{Z}_X[p]$ . Liefert Faktorisierung über lokale Kohomologie  $H_A^p(X)$ . Das Bild der 1 notieren wir  $\tau_A$ . Die Lokalgarbe ist  $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A \subset X} := (i_* \mathbb{Z}_A \rightrightarrows \mathbb{Z}_X)$ .

9.10.12. Gegeben eine orientierte Mannigfaltigkeit  $X$  der Dimension  $n$  ist unter dem dualisierten Poincaré-Isomorphismus  $P_X^! : H_q^! X \xrightarrow{\sim} H^{n-q} X$  aus 9.10.10 der Erzeuger  $1 \in H^0 X$  das Bild eines wohlbestimmten Elements

$$\omega_X^! \in H_n^! X$$

Dies Element heißt der **Fundamentalzykel von  $X$** . Sie mögen sich zur Übung überlegen, warum dies Element im kompakten beziehungsweise abzählbar basierten Fall unter dem entsprechenden Vergleichs-Isomorphismus unserem Fundamentalzykel der singulären Theorie aus [TS] 4.3.2 beziehungsweise [TS] 7.3.13 entspricht.

9.10.13. Gegeben eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  mit einer abgeschlossenen orientierten Untermannigfaltigkeit  $A \looparrowright X$  der Kodimension  $p$  liefert die Funktorialität 9.10.10 des dualisierten Poincaré-Isomorphismus  $P^!$ , wenn wir mit  $\omega_A^!$  das Bild des Fundamentalzykels von  $A$  in  $H_{n-p}^!(X)$  notieren, in  $H^p(X)$  die Identität

$$P_X^!(\omega_A^!) = \tau_{A \subset X}$$

In Worten bildet der dualisierte Poincaré-Isomorphismus von  $X$  also den Fundamentalzykel von  $A$  auf den Fundamentalkozykel von  $A$  in  $X$  aus 9.10.5 ab. Im Fall, daß  $A$  zusätzlich kompakt ist, bezeichnen wir analog mit  $\omega_A \in H_{n-p}(X)$  das Bild des Fundamentalzykels von  $A$  in der Homologie von  $X$  und erhalten ebenso in  $H^p(X)$  die Identität

$$P_X(\omega_A) = \tau_{A \subset X}$$

Erklären wir nun die **Schnittprodukte**

$$\begin{array}{lcl} H_{n-a}^!(X) \times H_{n-b}^!(X) & \rightarrow & H_{n-a-b}^!(X) \\ H_{n-a}^!(X) \times H_{n-b}^!(X) & \rightarrow & H_{n-a-b}^!(X) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha \cdot \beta \end{array}$$

mit Hilfe unserer **Poincaré-Isomorphismen** und des **cup-Produkts** durch die Vorschriften  $P^!(\alpha \cdot \beta) = P^!(\alpha) \cup P^!(\beta)$  beziehungsweise  $P(\alpha \cdot \beta) = P(\alpha) \cup P(\beta)$ , so liefern unsere Erkenntnisse 6.4.30 über das cup-Produkt der Fundamentalkozykel zweier orientierter sich transversal schneidender abgeschlossener orientierter Untermannigfaltigkeiten  $A, B \subset X$  die Identität

$$z_A^! \cdot z_B^! = z_{A \cap B}^!$$

in der lokalendlichen Homologie und im Fall von kompaktem  $B$  etwas feiner die Identität

$$z_A^! \cdot z_B = z_{A \cap B}$$

in der Homologie von  $X$ . In Worten ist also bei transversalem Schnitt das Schnittprodukt der Fundamentalkozykel der Fundamentalkozykel des Schnitts, den wir uns dabei mit der Schnittorientierung aus 6.4.30 versehen denken.

## 10 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich vielen, insbesondere Olaf Schnürer und Bernhard Link. Der Inhalt geht im wesentlichen zurück auf Grothendieck, Deligne und Verdier [Gro72]. Sehr nützlich waren mir die Darstellungen von Godement [God64] und Kashiwara-Schapira [KS90] und Skripten von Milicic und Hörmann zu derivierten Kategorien. Die Argumente zu unbeschränkten Auflösungen kommen aus [Spa88, Bek00]. Hilfreich waren auch die Texte des Stacks-Projektes. Bei der Behandlung der Verdier-Dualität halte ich mich eng an [SS15]. Die Vereigentlichung kommt aus der Dissertation von Maximilian Gerhards [Ger18]. Die Formulierung der Verträglichkeiten mit Hilfe von Schmelzkategorien habe ich von Fritz Hörmann [Hoe17] gelernt und für die hier relevanten Anwendungen so dargestellt, daß man dabei ohne Zweikategorien auskommt.



## Literatur

- [AL] **Skriptum Algebra und Zahlentheorie**. Wolfgang Soergel.
- [Bek00] Tibor Beke. Sheafifiable homotopy model categories. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 129(3):447–475, 2000. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100004722>, doi:10.1017/S0305004100004722.
- [BL94] Joseph N. Bernstein and Valery Lunts. *Equivariant Sheaves and Functors*, volume 1578 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1994.
- [Ger18] Maximilian Gerhards. Funktorialitäten für relative topologische Gruppen. Dissertation in Freiburg, sollte bald erscheinen auf <http://www.freidok.uni-freiburg.de/>, 2018.
- [God64] Roger Godement. *Théorie des faisceaux*, volume 1252 of *Actualités scientifiques et industrielles*. Hermann Paris, 1964.
- [Gro72] Alexander Grothendieck. *SGA 4*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1972.
- [Gro86] Alexander Grothendieck. Récoltes et Semailles. Im Netz verfügbar, 1985-1986.
- [Hir75] Heisuke Hironaka. Triangulations of algebraic sets. In *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, pages 165–185. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [Hoe17] Fritz Hoermann. Fibered multiderivators and (co)homological descent. *Theory Appl. Categ.*, 32(38):1258–1362, 2017.
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on Manifolds*, volume 292 of *Grundlehren*. Springer, 1990.
- [LA1] **Skriptum Lineare Algebra 1**. Wolfgang Soergel.
- [LA2] **Skriptum Lineare Algebra 2**. Wolfgang Soergel.
- [ML] **Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen**. Wolfgang Soergel.
- [RV04] Günther Richter and Alexander Vauth. Fibrewise sobriety. In *Categorical structures and their applications. Proceedings of the North-West European category seminar, Berlin, Germany, March 28–29, 2003*, pages 265–283. River Edge, NJ: World Scientific, 2004.

- [Spa88] N. Spaltenstein. Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.*, 65(2):121–154, 1988.
- [SS15] Olaf M. Schnürer and Wolfgang Soergel. Proper base change for separated locally proper maps. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 2015.
- [TD] **Skriptum Derivierte Kategorien und Funktoren.** Wolfgang Soergel.
- [TF] **Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie.** Wolfgang Soergel.
- [TG] **Skriptum Garbenkohomologie.** Wolfgang Soergel.
- [TM] **Skriptum Topologie und kompakte Gruppen.** Wolfgang Soergel.
- [TS] **Skriptum Singuläre Homologie.** Wolfgang Soergel.
- [TSF] **Skriptum Grothendieck’s sechs Funktoren.** Wolfgang Soergel.
- [TSK] **Skriptum Kategorielle Produktstrukturen.** Wolfgang Soergel.

## **Indexvorwort**

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das  $\cup$  dem Buchstaben u oder das  $\subset$  dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa  $\zeta$  unter z und  $\omega$  unter o.

## Index

- $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur
  - relative, 239
- $\text{Ab}/\text{Kring}$  Schmelzkategorie, 11
- $\text{Ab}/\text{kkRring}$  Schmelzkategorie, 11
- $\Rightarrow_X$  internes Hom in Faser, 20
- $\phi^{\otimes}$ 
  - Zurückholen von Schnitten, 192
- $f^!$  Schreirückzug
  - auf derivierten Kategorien, 150
- $f^!$  eigentlicher Rückzug
  - Schnitte mit Träger, 150
- $\underline{X}$  Einsobjekt, 19
- $\underline{X}$  konstantes Objekt, 17
- $\odot$  Schnittpaarung, 189
- $\otimes$  Tensorprodukt
  - $\otimes_X$  relatives in Trennfaserung, 19
- $\mathcal{F}_{U \subset X}$  Ausdehnung durch Null, 154
- $\square$  Vereigentlichung, 87
- $\times$  externes Produkt
  - der lokalen Kohomologie, 196, 197
- $\boxtimes$  äußeres Produkt
  - in Trennfaserung, 23
- abelsche Garben
  - Schmelzkategorie, 6
- additive Struktur
  - relative, 239
- adf Morphismen aus Identifikationen und Adjunktionen, 21
- äquivariant
  - derivierte Kategorie, 224, 226
  - Objekt, 212, 213
- angereichert
  - relativ, 240
- Augmentation, 172
- Ausschneidung für Grenzketten, 201
- avf Morphismen, die aus Adjunktionen, Verflechtungen und Identifikationen entstehen, 112
- bagazyklisch, 65, 223
- Basis
  - einer Trennaustauschsituation, 106
- basisfest
  - garbenazyklisch, 65
- Boxprodukt, 23
- $c_*(V)$  totale Chern'sche Klasse, 82
- Chern'sche Klasse, 82
  - totale, 82
- cup-Produkt
  - der lokalen Kohomologie, 196
  - Operation auf kompakter Kohomologie, 196
- $\text{Der}/_X$ , 273
- $\text{Der} //_{\text{Gek}}$ , **62**
- $\text{Der} //_{\text{Top}}$ , **265**
- $\text{Der}(\text{Ab}/_X)$ 
  - als Schmelzkategorie, 272
- derivierte abelsche Gruppen
  - als Schmelzkategorie, 269
- derivierte Moduln
  - als Schmelzkategorie, 271
- Derivierter gefasertes Basiswechsel, 67
- Derivierter gefasertes Basiswechsel in gekringten Räumen, 72
- $\text{Der}_{\mathcal{M}}$ 
  - als Schmelzkategorie, 57
- dualisierendes Objekt, 113
- Dualisierungsisomorphismus, 165
  - orientierter, 178
- eigentlich
  - Komorphismus von Modulgarben, 89
  - lokal, 85

Eigmorphismus  
   in Kategorienwinkel, 101  
   in Trennaustauschsituation, 106  
 elementar  
   kartesisches Trennquadrat, 262  
 eMorphismus  
   e-Morphismus, 101  
 entfaltbar  
   bequeme abelsche Schmelzkategorie, 56  
 erlaubt  
   Basisquadrat, 102  
 Eulerklasse, 76  
 externes Produkt  
   der lokalen Kohomologie, 196, 197  
  
 Familientrennfunktor, 28  
 Familienwinkelfaserung, 107  
 Faser  
   von Trennfunktor, 18  
 Faserprodukt  
   von Kategorien, 31  
 faserrückzugstabil  
   über anderem System, 95, 260  
 fasertrennrückzugstabil, 95, 262  
 faserweise kompaktweich, 93  
 Filtrierung  
   angeordnete, 34  
 Finalstruktur, relative, 240  
 flach  
   abelsche Garbe, 7  
   Modulgarbe, 49  
 Flechtbasiswechsel, 103  
 Fundamentalkozykel, 180, 275  
   lokaler, 181  
   von Untervarietät, 191  
 Fundamentalzykel, 180, 277  
  
 Garbe der unstetigen Schnitte, 137  
 garbenazyklisch  
   basisfest, 65  
   stetige Abbildung, 65, 223  
   topologischer Raum, 66  
 Garbenopfaserung  
   derivierte, 40  
 Garbenoptrennfaserung, 10  
 Gek gekringte Räume, 12  
 Gek<sup>lesbf</sup>, 144  
 gekringter Raum, 12  
 geringter Raum, 12  
 gkv Grenzkomplexvorschub, 206  
 Godement-Auflösung, 138  
 Godementmonomorphismus, 137  
 Grenzketten  
   relative, 200  
 Grenzkettengarbe, 203  
 Grenzkomplex, 203  
 Grenzkomplexvorschub, 206  
  
 $\mathbb{H}$  Hyperkohomologie, 41  
 $H_q(X)_{\text{garb}}$  garbentheoretische Homologie, 169  
 $H_q^!(X)_{\text{garb}}$  garbentheoretische lokalendliche Homologie, 169  
 $\text{HflAb}_{\parallel(X,A)}$  quisflache Komplexe von Modulgarben, 267  
Hom *Hom-Garbe*, 7  
 $\mathcal{H}om$  *Hom-Garbe*, 7  
 Hom-Garbe, 7  
 Hyperkohomologie, 41  
  
 Induktionsäquivalenz, 220, 235  
 invertiert  
   Schmelzkofaserung, 27  
   Trennfaserung, 27  
  
 kartesisch  
   Verschmelzung, 8  
 kartesischer Schnitt  
   einer Trennfaserung, 17  
 kkRing, 11  
 kokartesisch  
   Verschmelzung, 8

Kokern  
     stabiler, 55  
 kompaktweich  
      $f$ -kompaktweich, 93  
     faserweise, 93  
     schwach, 118  
 konstant  
     Objekt, 17  
 Kreuzprodukt  
     der Garbenkohomologie, 68  
 Kringo opponierte Kringe, 16  
 Künnethformel  
     der kompakten Kohomologie, 149  
  
 Leray-Hirsch, 71  
     Variante, 71  
 les lokal eigentlich separiert, 86  
 les-Abbildung, 86  
 lesb, 119  
     Abbildung, 119  
     Morphismus gekringter Räume, 255  
     Raum, 121  
 lesb-Abbildung, 122  
 lesb-Morphismus, 122  
 Linksanpassung, 43  
 Linksoresystem  
     faserweises, 30  
 lokal  
     frei vom Rang Eins  
         abelsche Garbe, 7  
     Prägarbe, 202  
 lokal eigentlich, 85  
 Lokalgarbe, 183, 195, 273  
 Lokalgarbenpaarung, 183  
  
 mannigfaltig  
     stetige Abbildung, 167  
 Maß $_{\mathbb{R}}$  reele Maßräume, 25  
 Mengengarbenoptrennfaserung, 9  
 Mengengarbentrennfaserung, 9  
 Modulgarbe, 13  
  
 monodrom  
     Garbe, 218  
 Morphismus  
      $\dagger$ -Morphismus, 101  
     e-Morphismus, 101  
      $\jmath$ -Morphismus, 101  
     von geringten Räumen, 12  
  
 $\otimes_X$  Verschmelzung in Faser, 107  
 objektfest, 241  
 Oresystem  
     faserweises, 30  
     faserweises gesättigtes, 30  
 orientierbar  
     mannigfaltige Abbildung, 168, 173  
     Sphärenbündel, 74  
 Orientierung  
     von mannigfaltiger Abbildung, 168,  
         173  
     von Sphärenbündel, 74  
     zurückgezogene, 169  
 Orientierungsmenge  
     topologische, 197  
 Orientierungsgarbe  
     relative, 168, 274  
 $or^{\text{top}}(V)$  Orientierungsmenge von  $V$ ,  
     197  
  
 $p_M$  Dualisierungsisomorphismus, 165  
 $P_X$  Poincaré-Isomorphismus, 178, 275  
 $P_X^!$  dualisierter Poincaré-Isomorphi-  
     mus, 178, 276  
 Poincaré-Dualität  
     starke dualisierte, 193  
 polyederähnlich, 171  
 Pontrjagin-Klasse, 84  
 Prägarbe  
     lokale, 202  
 Präverflechtung  
     von Trennaustauschsituation, 107  
 Projektionsformel, 111

flache, 94  
 für Modulgarben, 94  
 Projektionsformel-Quadrat, 97, 261  
 Quadratrivialisierung, 7  
 quisflach  
   in bequemer abelscher Schmelz-  
   kategorie, 56  
   Komplex von Modulgarben, 49, 267  
   Linksauflösung, 56  
 Rechtsanpassung, 43  
 Rechtslinksanpassung, 128  
 Rechtsoresystem  
   faserweises, 30  
   globales, 30  
 regulär  
   Funktionen, 12  
 Regulierung, 101  
   kartesisch-tensorielle, 141  
   kartesische, 101  
   kommutative, 101  
 $R\mathcal{H}om(A, D)$  derivierter Homkomplex,  
   58  
 Rückzug  
   eigentlicher, 150  
   von Funktor, 31  
 rückzugstabil, 96, 262  
 Schmelzkategorie  
   abelsche, 55  
 Schmelzkern, 55  
 Schmelzkofaserung, 8  
   invertierte, 27  
 Schmelzlokalisierung, 51  
 Schmelzvorschub, 8  
 Schnittmultiplizität  
   lokale, 184  
 Schnittorientierung, 188, 198  
 Schnittpaarung, 189  
 Schnittplättung, 188  
 Schnittprodukt, 179, 278  
   cap-Schnittprodukt, 187  
   cup-Schnittprodukt, 179  
 Schreikofaserung  
   der Homotopiekomplexe, 115  
   für Modulgarben, 89  
 schreikokartesisch  
   im Abstrakten, 106  
 Schreimonomorphismus, 110  
 Schreimorphismus, 101, 106  
 Schreiojekt, 113  
 Schreirückzug, 108, 150  
 schwach kompaktweich, 118  
 Sechs-Funktor-Formalismus, 108  
 Shift  
   relativer, 246  
 Sphärenbündel, 74  
 starr  
   Morphismus gekringter Räume, 72  
 Strukturgarbe, 12  
 Tensorproduktgarbe, 6  
 Topog Räume mit Gruppenoperation,  
   80, 229  
 Trägerzerlegung, 127  
 transversaler Schnitt, 188  
 Trenaustauschsituation, 106  
   verflochtene  
   mit Adjungierten, 108  
 Trennfaserung, 8  
   invertierte, 27  
   mit Vorschub, 19  
 Trennfunktor  
    $\mathcal{S}$ -Trennfunktor  
   relativer, 241  
 Trennquadrat  
   elementares, 261  
   elementares kartesisches, 97  
 Trennrückzug, 8  
 Trennschmelzfakofaserung, 26  
 Trennschnitt, 16  
   kartesischer, 16

Umstrukturieren, 241  
Unterkofaserung  
  volle, 43  
  
Verdierdualität  
  relative, 112  
Vereigentlichung, 87  
Verflechtung  
  von Trennaustauschsituation, 107  
Verflechtungsquadrat  
   $r$ -Verflechtungsquadrat, 107  
Verknüpfungsorientierung, 169  
vf Verflechtung, 103  
volltreu  
   $\varphi$ -volltreu, 241  
Vorschieben  
  eigentliches, 175  
Vorschub, 108  
  zu Trennfaserung, 19  
  
Whitney  
  Summenformel, 82  
Wirkungskategorie, 214  
  
 $\mathbb{Z}_{U \subset X} := i_U \mathbb{Z}_U$ , 151