

# GROTHENDIECK'S SECHS FUNKTOREN

Wolfgang Soergel

1. Oktober 2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Trennrückzug</b>	<b>4</b>
1.1	Multilineare Algebra für Garben . . . . .	4
1.2	Relative multilineare Algebra für Garben . . . . .	8
1.3	Verallgemeinerung auf Modulgarben . . . . .	13
1.4	Trennfaserungen bei eindeutigen Leertrennungen . . . . .	16
1.5	Trennfaserungen über banalen Trennkategorien . . . . .	18
1.6	Relativ angereicherte Trennkategorien . . . . .	25
1.7	Trennschmelzfakofaserungen . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Derivierter Trennrückzug</b>	<b>33</b>
2.1	Lokalisierung von Kofaserungen . . . . .	33
2.2	Die derivierte Garbenopfaserung . . . . .	35
2.3	Lokalisieren durch Anpassung . . . . .	37
2.4	Deriviertes Tensorieren von Moduln . . . . .	42
2.5	Deriviertes Tensorieren von Garben . . . . .	46
2.6	Derivierte Garbenoptrennfaserung . . . . .	52
2.7	Verallgemeinerung auf Modulgarben . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>57</b>
3.1	Garbenazyklische Morphismen . . . . .	57
3.2	Künnethformeln der Garbenkohomologie . . . . .	59
3.3	Charakteristische Klassen und Produkte . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Trennrückzug und Eigvorschub</b>	<b>69</b>
4.1	Lokal eigentlicher Basiswechsel . . . . .	69
4.2	Kompakte Schnitte und Kolimites . . . . .	73
4.3	Projektionsformel . . . . .	75
4.4	Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Trennrückzug und Eigvorschub deriviert</b>	<b>81</b>
5.1	Derivierter Eigvorschub . . . . .	81
5.2	Ausgezeichnete Dreiecke einer offenen Teilmenge . . . . .	86
5.3	Austausch und Zwei-Funktor-Formalismus . . . . .	87
5.4	Austausch und Zwei-Funktor-Formalismus NEU . . . . .	99
5.5	Trennaustausch und Drei-Funktor-Formalismus . . . . .	109
5.6	Anwendungen im topologischen Fall . . . . .	119
5.7	Verallgemeinerung auf Modulgarben . . . . .	125
5.8	Verallgemeinerung auf Modulgarben, ALT . . . . .	126
5.9	Ergänzungen für Modulgarben* . . . . .	127

5.10	Eigrückzug und seine Eigenschaften . . . . .	132
5.11	Konstruktion eines Eigrückzugs . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Anwendungen und Vergleichssätze</b>	<b>151</b>
6.1	Mannigfaltiger Eigrückzug . . . . .	151
6.2	Homologien und ihre Funktorialitäten . . . . .	153
6.3	Schnittpaarung und Poincaré-Dualität . . . . .	162
6.4	Vergleich mit der singulären Theorie . . . . .	166
<b>7</b>	<b>Die äquivariante derivierte Kategorie</b>	<b>180</b>
7.1	Ergänzungen zu äquivarianten Garben . . . . .	180
7.2	Äquivariante Objekte (VERLEGEN!) . . . . .	180
7.3	Äquivariante derivierte Kategorie . . . . .	191
7.4	Äquivariante Varianten der Adjungierten . . . . .	199
7.5	Äquivalenzen mit Gruppenwechsel . . . . .	202
7.6	Vernachlässigen zusammenziehbarer Anteile . . . . .	203
7.7	Danksagung . . . . .	205
<b>8</b>	<b>Danksagung</b>	<b>206</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>207</b>
	<b>Indexvorwort</b>	<b>209</b>
	<b>Index</b>	<b>210</b>

# 1 Trennrückzug

## 1.1 Multilineare Algebra für Garben

1.1.1. Ich erinnere an Schmelzkategorien [TSK] 1.1.4, universelle Verschmelzungen [TSK] 1.2.1, stabil universelle Verschmelzungen [TSK] 1.2.2 und Multihom [TSK] 1.3.3.

1.1.2 (**Kartesische Schmelzkategorie der Mengenprägarben**). Gegeben  $X$  ein topologischer Raum erinnern wir die Kategorie  $\text{pEns}/X$  der Mengenprägarben auf  $X$ . Diese Kategorie hat endliche Produkte und die zugehörige banale Trennkategorie  $\wedge \text{pEns}/X$  kann damit nach [TSK] 1.4.9 als Trennschmelzkategorie aufgefaßt werden. Explizit können wir für  $r \geq 0$  eine Verschmelzung

$$\phi \in \text{pEns}/X(\mathcal{F}_1 \gamma \dots \gamma \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

beschreiben als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \Subset X$  eine Abbildung  $\phi_U : \mathcal{F}_1(U) \times \dots \times \mathcal{F}_r(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  so zuordnet, daß für jede weitere offene Teilmenge  $V \Subset U$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(U) \times \dots \times \mathcal{F}_r(U) & \rightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_1(V) \times \dots \times \mathcal{F}_r(V) & \rightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi_U$  und  $\phi_V$  in den Horizontalen kommutiert. Die Multiverknüpfungen sind die offensichtlichen. Insbesondere liefert die Vorschrift  $\phi \mapsto \phi_X(*)$  eine Bijektion

$$\beta_{\mathcal{G}} : \text{pEns}/X(\gamma, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \Gamma \mathcal{G}$$

zwischen der Menge der Leerverschmelzungen nach  $\mathcal{G}$  und der Menge der globalen Schnitte von  $\mathcal{G}$ . In ihrer Gesamtheit bilden diese Bijektionen eine Isotransformation  $\beta : \text{L} \xrightarrow{\sim} \Gamma$  zwischen dem Leerverschmelzungsfunktor unserer Schmelzkategorie und dem Funktor der globalen Schnitte. Ein Multihom

$$(\mathcal{F}_1 \gamma \dots \gamma \mathcal{F}_r) \rightleftarrows_{\text{pEns}/X} \mathcal{G}$$

in der Schmelzkategorie  $\text{pEns}/X$  erhält man, indem man  $U \Subset X$  die Menge  $\text{pEns}/U(\mathcal{F}_1|_U \times \dots \times \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$  aller entsprechenden Verschmelzungen der auf  $U$  eingeschränkten Prägarben zuordnet. All diese Behauptungen sind leicht einzusehen.

1.1.3 (**Kartesische Schmelzkategorie der Mengengarben**). Gegeben ein topologischer Raum  $X$  besitzt auch die Kategorie  $\text{Ens}/X$  der Mengengarben auf  $X$

Produkte und der Einbettungsfunktor  $\text{Ens}/X \xrightarrow{\sim} \text{pEns}/X$  der Garben in die Prägarben ist verträglich mit Produkten. Er induziert folglich eine volltreue Einbettung von Trennschmelzkategorien

$$\wedge \text{Ens}/X \xrightarrow{\sim} \wedge \text{pEns}/X$$

Insbesondere schränkt unser  $\beta$  aus 1.1.2 ein zu einer Isotransformation  $\beta : L \xrightarrow{\sim} \Gamma$  vom Leerverschmelzungsfunktor von  $\text{Ens}/X$  zum Funktor der globalen Schnitte. Auch  $\wedge \text{Ens}/X$  besitzt Multihom und der Einbettungsfunktor der Mengengarben in die Mengenprägarben ist verträglich mit Multihom, wie Sie bereits in [TG] 2.2.47 prüfen sollten. Darüber hinaus ist offensichtlich jedes Multihom von Prägarben in eine Garbe bereits selbst eine Garbe. Im Fall einer Garbe  $\mathcal{G}$  liefert speziell das Vorschalten von  $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1^+$  eine Bijektion

$$\text{pEns}/X(\mathcal{F}_1^+ \curlywedge \mathcal{F}_2 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{pEns}/X(\mathcal{F}_1 \curlywedge \mathcal{F}_2 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

**1.1.4 (Schmelzkategorie der abelschen Prägarben).** Im allgemeinen Rahmen unserer terminologischen Versuche [TSK] 3.5.5 können wir die Schmelzkategorie der abelschen Prägarben auf einem Raum  $X$  einführen als die Schmelzkategorie

$$\text{pAb}/X := \text{kok}(\wedge \text{pEns}/X)$$

der kommutativen und kokommutativen Hopfobjekte der Trennschmelzkategorie  $\wedge \text{pEns}/X$ . Nach [TSK] 3.5.6 trägt  $\text{pAb}/X$  als kok-Konstruktion eine ausgezeichnete additive Struktur und wird angeliefert mit einem Schmelzfunktor  $\text{pAb}/X \rightarrow \wedge \text{pEns}/X$ , der volltreu ist auf Leerverschmelzungen. Weil das so schnell ging und wir die kok-Konstruktion auch nicht so ausführlich besprochen hatten, schreibe ich es nun noch explizit aus.

**1.1.5 (Schmelzkategorie der abelschen Prägarben explizit).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  machen wir die Kategorie  $\text{pAb}/X$  der abelschen Prägarben auf  $X$  zu einer Schmelzkategorie, indem wir für  $r \geq 0$  eine Verschmelzung

$$\phi \in \text{pAb}/X(\mathcal{F}_1 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

erklären als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \Subset X$  eine multiadditive Abbildung  $\phi_U : \mathcal{F}_1(U) \times \dots \times \mathcal{F}_r(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  so zuordnet, daß für  $V \Subset U$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(U) \times \dots \times \mathcal{F}_r(U) & \rightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_1(V) \times \dots \times \mathcal{F}_r(V) & \rightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi$  in den Horizontalen kommutiert. Insbesondere schränkt unser  $\beta$  aus 1.1.2 ein zu einer Isotransformation  $\beta : L \xrightarrow{\sim} \Gamma$

vom Leerverschmelzungsfunktor von  $\text{pAb}/_X$  zum Funktor der globalen Schnitte. Die Multiverknüpfungen sind die offensichtlichen und das Vergessen der Addition liefert einen treuen und auf Leerverschmelzungen volltreuen Schmelzfunktor  $\text{pAb}/_X \rightarrow \wedge \text{pEns}/_X$  in die kartesische Schmelzkategorie der Mengenprägarben. Die Schmelzkategorie  $\text{pAb}/_X$  der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum  $X$  versehen wir mit einer additiven Struktur, indem wir die Summe von zwei Verschmelzungen  $\phi + \psi$  erklären durch  $(\phi + \psi)_U := \phi_U + \psi_U$ .

**Proposition 1.1.6.** *Die Schmelzkategorie  $\text{pAb}/_X$  der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum  $X$  hat universelle Verschmelzungen und Multihom.*

*Beweis.* Eine offensichtliche universelle Verschmelzung von abelschen Prägarben  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$  erhalten wir in die Tensorproduktprägarbe  $U \mapsto \mathcal{F}_1(U) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_r(U)$ . Wir notieren sie

$$\mathcal{F}_1 \otimes^{\text{p}} \dots \otimes^{\text{p}} \mathcal{F}_r$$

Eine universelle Leerverschmelzung wird insbesondere gegeben durch den globalen Schnitt  $1 = 1_X$  der konstanten Prägarbe auf  $X$  mit Schnitten  $\mathbb{Z}$ . Ein Multihom

$$(\mathcal{F}_1 \vee \dots \vee \mathcal{F}_r) \Rightarrow \mathcal{G}$$

erhalten wir als diejenige abelsche Prägarbe, die jedem  $U \in X$  die abelsche Gruppe  $\text{pAb}/_U(\mathcal{F}_1|_U \vee \dots \vee \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$  aller entsprechenden Verschmelzungen der auf  $U$  eingeschränkten Prägarben zuordnet.  $\square$

1.1.7. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  erklären wir die **Schmelzkategorie der abelschen Garben** als die volle Unterschmelzkategorie  $\text{Ab}/_X \subset \text{pAb}/_X$  mit nur abelschen Garben als Objekten. Insbesondere schränkt unser  $\beta$  aus 1.1.5 ein zu einer Isotransformation  $\beta : \text{L} \xrightarrow{\cong} \Gamma$  vom Leerverschmelzungsfunktor von  $\text{Ab}/_X$  zum Funktor der globalen Schnitte. In  $\text{Ab}/_X$  gibt es Multihom und der Einbettungsfunktor  $\text{Ab}/_X \xrightarrow{\hookrightarrow} \text{pAb}/_X$  ist verträglich mit Multihom. In  $\text{Ab}/_X$  gibt es auch universelle Verschmelzungen, aber der Einbettungsfunktor  $\text{Ab}/_X \xrightarrow{\hookrightarrow} \text{pAb}/_X$  ist nicht mit ihnen verträglich. Genauer ist das Prägarbentensorprodukt von abelschen Garben im allgemeinen keine Garbe und man erhält universelle Verschmelzungen von abelschen Garben durch Garbifizierung des Prägarbentensorprodukts. Diese Garbifizierung heißt die **Tensorproduktgarbe** und wir notieren sie

$$\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_r := (\mathcal{F}_1 \otimes^{\text{p}} \dots \otimes^{\text{p}} \mathcal{F}_r)^+$$

Speziell entspricht der konstante Schnitt  $1 = 1_X$  der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$  unter  $\beta$  einer universellen Leerverschmelzung in  $\text{Ab}/_X$ . Gegeben eine abelsche Garbe  $\mathcal{G}$  und abelsche Prägarben  $\mathcal{F}_i$  liefert das Vorschalten von  $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1^+$  eine Bijektion

$$\text{pAb}/_X(\mathcal{F}_1^+ \vee \mathcal{F}_2 \vee \dots \vee \mathcal{F}_r, \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \text{pAb}/_X(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \vee \dots \vee \mathcal{F}_r, \mathcal{G})$$

Das folgt leicht aus der entsprechenden Aussage 1.1.3 für Mengenprägarben.

1.1.8. Im Fall  $r = 1$  heißt unser Multihom die **Hom-Garbe**. Man findet dafür in der Literatur statt  $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$  meist die Notationen  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  oder  $\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ .

1.1.9 (**Halme von Tensorproduktgarben**). Gegeben abelsche Garben  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  auf einem topologischen Raum  $X$  liefert die Verträglichkeit von Tensorprodukt und Kolimes für jeden Punkt  $x \in X$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{G}_x \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_x$$

zwischen dem Tensorprodukt der Halme und den Halmen des Tensorprodukts. Dasselbe gilt für das Prägarbentensorprodukt von abelschen Prägarben.

## Übungen

*Übung 1.1.10 (Notwendigkeit der Garbifizierung beim Tensorprodukt)*. Wir betrachten auf dem Kreisring  $S^1$  die nichtkonstante aber lokal konstante Garbe  $\mathcal{F}$  von abelschen Gruppen vom Rang Eins. Ihr Tensorprodukt  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$  mit sich selbst ist isomorph zur konstanten Garbe mit Faser  $\mathbb{Z}$  und hat von Null verschiedene globale Schnitte, obwohl die Faktoren  $\mathcal{F}$  selbst keine von Null verschiedenen globalen Schnitte haben.

*Übung 1.1.11*. Sind  $\mathcal{F}, \mathcal{I} \in \text{Ab}/_X$  abelsche Garben auf einem topologischen Raum und ist  $\mathcal{I}$  injektiv, so ist die Hom-Garbe  $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{I}$  welk.

*Übung 1.1.12*. Eine abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  heißt **flach**, wenn das Tensorieren mit unserer Garbe ein exakter Funktor ist. Man zeige, daß eine abelsche Garbe genau dann flach ist, wenn sie flache Halme hat. Man zeige, daß jede abelsche Garbe ein Quotient einer flachen Garbe ist. Hinweis: Man verwende Summen von Garben der Gestalt  $\mathbb{Z}_{U \subset X}$  für  $U \Subset X$ . Man zeige, daß jede Untergarbe einer flachen abelschen Garbe wieder flach ist.

*Übung 1.1.13*. Die Wolkenkratzergarbe mit Halm  $\mathbb{Z}$  am Ursprung der reellen Zahlengerade ist nicht starr in der Schmelzkategorie  $\text{Ab}/_{\mathbb{R}}$  der abelschen Garben auf der reellen Zahlengeraden.

1.1.14 (**Tensorprodukt und internes Hom von Modulgarben**). Die Schmelzkategorie  $\text{Mod}_{\mathcal{A}}$  der  $\mathcal{A}$ -Modulgarben auf einem gekringten Raum  $(X, \mathcal{A})$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen und internes Hom im Sinne von [TS] ?? und [TS] ?? . Um das zu sehen, reicht es, die Existenz von universellen Verschmelzungen und Multihom zu zeigen. Eine universelle Verschmelzung der Familie  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r$  erhalten wir, indem wir die Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{F}_1(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \dots \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{F}_r(U)$$

garbifizieren. Ein Multihom  $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$  von unserer Familie zu einer weiteren Modulgarbe  $\mathcal{G}$  erhalten wir als die Garbe

$$(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) : U \mapsto \text{Mod}_{\mathcal{A}|_U}(\mathcal{F}_1|_U \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$$

zusammen mit Bijektionen  $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K} \curlywedge \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}, (\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}))$ , die hoffentlich auch für den Leser offensichtlich sind.

## 1.2 Relative multilineare Algebra für Garben

**Definition 1.2.1.** Ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt eine **Trennfaserung**, wenn der auf den Familienkategorien induzierte Funktor  $\mathcal{M}^\wedge \rightarrow \mathcal{N}^\wedge$  eine Faserung ist und das Vertupeln aus kartesischen Trennungen in  $\mathcal{M}$  stets kartesische Morphismen der Familienkategorie  $\mathcal{M}^\wedge$  macht.

**Definition 1.2.2.** Gegeben ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt eine Trennung in der Ausgangstrennkategorie  **$p$ -kartesisch**, **stark  $p$ -kartesisch**,  **$p$ -kokartesisch** beziehungsweise **stark  $p$ -kokartesisch**, wenn der zugehörige Morphismus in der Familienkategorie für den induzierten Funktor  $\mathcal{M}^\wedge \rightarrow \mathcal{N}^\wedge$  die entsprechende Eigenschaft hat. Die zu einem Trennfunktor gehörigen Rückzugsfunktoren auf der Familienkategorie bezeichnen wir auch als **Trennrückzug**.

1.2.3. Analoge Sprechweisen vereinbaren wir für Schmelzfunktoren und erhalten so insbesondere die Begriffe einer **Schmelzkofaserung** und des zugehörigen **Schmelzvorschubs**.

*Beispiel 1.2.4 (Trennfaserungen zur terminalen Trennkategorie).* Es gibt nach [TSK] 1.5.17 eine terminale Trennkategorie, bestehend aus einem einzigen Objekt mit einelementigen Mengen von Trennungen. Unsere universellen Trennungen aus [TSK] 1.2.16 sind genau die Trennungen, die in Bezug auf den einzigen Trennfunktor in die terminale Trennkategorie stark kartesische Morphismen der Familienkategorie liefern. Unsere stabil universellen Trennungen aus [TSK] 1.2.16 sind genau die Trennungen, die auch beim Vertupeln mit endlich vielen Identitätstrennungen in Bezug auf den einzigen Trennfunktor in die terminale Trennkategorie stark kartesische Morphismen der Familienkategorie liefern. Eine Trennkategorie hat stabil universelle Trennungen [TSK] 1.2.16 genau dann, wenn der einzige von ihr ausgehende Trennfunktor in die terminale Trennkategorie im Sinne der vorhergehenden Definition eine **Trennfaserung** ist. Opponiertes gilt für Schmelzkofaserungen über der terminalen Schmelzkategorie.

1.2.5 (**Stark kartesische Lifts stabil universeller Trennungen**). Bei einer Verknüpfung  $qp$  von Funktoren ist nach [TG] 6.2.20 ein Morphismus über einem stark  $q$ -kartesischen Morphismus stark  $p$ -kartesisch genau dann, wenn er stark  $qp$ -kartesisch ist. Insbesondere ist die Verknüpfung von Faserungen wieder eine Faserung und damit auch die Verknüpfung von Trennfaserungen wieder eine Trennfaserung. Nach 1.2.4 ist weiter bei einem Trennfunktor ein Lift einer universellen Trennung genau dann universell, wenn er stark kartesisch ist. Ebenso ist bei einem Trennfunktor ein Lift einer stabil universellen Trennung genau dann stabil universell, wenn er stark kartesisch ist. Opponiertes gilt für Schmelzkofaserungen.



*Beispiel 1.2.6.* Wir erinnern die Mengengarbenfaserung  $\text{Ens}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.7. Sie induziert wie jeder Funktor einen Trennfunktor zwischen den zugehörigen banalen Trennkategorien. Im Fall der Mengengarbenfaserung ist dieser Funktor sogar eine Trennfaserung, die **Mengengarbentrennfaserung**. Genauer geht die kartesische Trennung über  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  nach  $(Y_1, \mathcal{G}_1) \wedge \dots \wedge (Y_r, \mathcal{G}_r)$  in dieser Trennfaserung vom Produkt der auf  $X$  zurückgezogenen Mengengarben  $f_i^* \mathcal{G}_i$  aus.

*Beispiel 1.2.7.* Wir erweitern die Mengengarbenopfaserung  $\text{Ens}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.12 zu einem Trennfunktor in die banale Trennkategorie  $\wedge \text{Top}$ , indem wir einen **Multiopkomorphismus**  $(X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y_1, \mathcal{G}_1) \wedge \dots \wedge (Y_r, \mathcal{G}_r)$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  erklären als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder Familie von offenen Teilmengen  $V_i \subseteq Y_i$  und jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  mit  $f_i(U) \subset V_i \forall i$  eine Abbildung

$$\mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V_n) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

so zuordnet, daß für alle  $V'_i \subseteq V_i \subseteq Y_i$  und  $U' \subseteq U$  mit  $f_i(U') \subset V'_i \forall i$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V_n) & \rightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_1(V'_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V'_n) & \rightarrow & \mathcal{F}(U') \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi$  in den Horizontalen kommutiert. Auch dieser Trennfunktor ist eine Trennfaserung. Wir nennen ihn die **Mengengarbenoptrennfaserung**. Die Faser  $\text{Ens}/_X$  mit den Trennungen über den Identitätstupeln  $(\text{id}, \dots, \text{id})$  als Trennungen ist opponiert zur kartesischen Schmelzkategorie  $\text{Ens}/_X$  der Mengengarben aus 1.1.3. Wir erhalten insbesondere für jede Garbe  $\mathcal{G}$  eine ausgezeichnete Bijektion

$$\text{Ens}/_{\text{Top}}(\mathcal{G}, \wedge) \xrightarrow{\sim} \Gamma \mathcal{G}$$

zwischen der Menge der von  $\mathcal{G}$  ausgehenden Leertrennungen und der Menge  $\Gamma \mathcal{G}$  der globalen Schnitte von  $\mathcal{G}$  und diese Bijektionen bilden in ihrer Gesamtheit eine Isotransformation  $L \xrightarrow{\sim} \Gamma$  von Trennfunktoren nach  $\text{kEns}^{\text{opp}}$ .

1.2.8. Man konstruiert unschwer eine eineindeutige Entsprechung zwischen kartesischen Trennungen der Mengengarbentrennfaserung und kartesischen Trennungen der Mengengarbenoptrennfaserung. Wir diskutieren in 1.7.7, inwiefern diese beiden Trennfaserungen durch „Oppinvertieren“ auseinander hervorgehen. Im folgenden wird es hauptsächlich um die Mengengarbenoptrennfaserung und insbesondere ihr Analogon für abelsche Garben gehen, das wir nun einführen.

*Beispiel 1.2.9.* Wir erweitern die Garbenopfaserung  $\text{Ab}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  der abelschen Garben aus [TG] 6.2.17 zu einem Trennfunktor in die banale Trennkategorie  $\wedge \text{Top}$ , indem wir einen **Multiopkomorphismus**  $(X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y_1, \mathcal{G}_1) \wedge \dots \wedge$

$(Y_r, \mathcal{G}_r)$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  erklären als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder Familie von offenen Teilmengen  $V_i \subseteq Y_i$  und jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  mit  $f_i(U) \subset V_i \forall i$  eine multiadditive Abbildung

$$\mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V_n) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

so zuordnet, daß für alle  $V'_i \subseteq V_i \subseteq Y_i$  und  $U' \subseteq U$  mit  $f_i(U') \subset V'_i \forall i$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V_n) & \rightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_1(V'_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V'_n) & \rightarrow & \mathcal{F}(U') \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi$  in den Horizontalen kommutiert. Der offensichtliche „vergeßliche“ Trennfunktor  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Ens}_{//\text{Top}}$  ist volltreu auf Leertrennungen und mit 1.2.7 erhalten wir ausgezeichnete Bijektionen

$$\text{Ab}_{//\text{Top}}(\mathcal{G}, \lambda) \xrightarrow{\sim} \Gamma \mathcal{G}$$

Die Faser  $\text{Ab}_{//X}$  mit den Trennungen über den Identitätstupeln  $(\text{id}, \dots, \text{id})$  als Trennungen ist opponiert zur Schmelzkategorie  $\text{Ab}/_X$  der abelschen Garben aus 1.1.7. Wir zeigen gleich, daß auch unser Trennfunktor

$$\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$$

eine Trennfaserung ist und nennen ihn die **Garbenoptrennfaserung** oder ausführlicher die **Optrennfaserung der abelschen Garben**.

**Satz 1.2.10 (Optrennfaserung der abelschen Garben).** *Der Trennfunktor des Vergessens der Garbe  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  ist eine Trennfaserung.*

1.2.11. Im Verlauf der Beweises werden wir sehen, daß in dieser Trennfaserung ein kartesischer Lift der einzigen Leertrennung aus einem Objekt  $X \in \text{Top}$  die konstante Garbe  $\mathbb{Z}_X$  auf  $X$  ist mit derjenigen ausgezeichneten Leertrennung, die unter unserer ausgezeichneten Bijektion aus 1.2.9 zum globalen Schnitt  $1_X \in \Gamma \mathbb{Z}_X$  wird.

*Beweis.* Für stetige Abbildungen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  und  $\mathcal{G}_i \in \text{Ab}_{//Y_i}$  ist per definitionem die Trennung über  $(f_1, \dots, f_n)$  aus derjenigen Garbe  $\mathcal{F}$  kartesisch, die durch Garbifizierung aus der Prägarbe

$$U \mapsto \text{colf}_{f_i(U) \subset V_i \subseteq X_i} \mathcal{G}_1(V_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}_r(V_r)$$

für  $U \subseteq X$  entsteht. Da das Tensorprodukt mit Kolimites vertauscht und der offensichtliche Morphismus von der Garbifizierung eines Prägarbentensorprodukts

von Prägarben zum Garbentensorprodukt der Garbifizierungen unserer Prägarben stets ein Isomorphismus ist, erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_n^* \mathcal{G}_n$$

Jetzt gilt es noch zu zeigen, daß die Verknüpfung kartesischer Trennungen kartesisch ist, daß also für  $g_{ij} : Y_i \rightarrow Z_{ij}$  und  $\mathcal{H}_{ij} \in \text{Ab}_{//Z_{ij}}$  für  $1 \leq j \leq n_i$  die von der kartesischen Eigenschaft herrührenden Morphismen Isomorphismen

$$\bigotimes_{i,j} (f_i g_{ij})^* \mathcal{H}_{ij} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^n f_i^* \left( \bigotimes_{j=1}^{n_i} g_{ij}^* \mathcal{H}_{ij} \right)$$

sind. Das prüft man leicht auf den Halmen. Genauer folgt es aus der Erkenntnis, daß der Halm eines Tensorprodukts nach 1.1.9 das Tensorprodukt der Halme ist und der Halm der zurückgeholten Garbe an einem Punkt der Halm der ursprünglichen Garbe an seinem Bildpunkt.  $\square$

1.2.12 (**Boxprodukt**). Für die Ausgangsobjekte stabil universeller Trennungen in der Ausgangstrennkategorie einer Trennfaserung und ebenso für die Zielobjekte stabil universeller Verschmelzungen in der Ausgangsschmelzkategorie einer Schmelzkofaserung verwenden wir gerne das Symbol

$\boxtimes$

Wenn wir das Symbol  $\boxtimes$  für eine stabil universelle Verschmelzung verwenden, so verwenden wir es wie in [TS] ?? angekündigt auch für die davon auf Leerverschmelzungen induzierte Abbildung.

*Beispiel 1.2.13 (Boxprodukt von Moduln).* Gegeben Ringalgebren  $A, B$  über einem Kring  $k$  und ein  $A$ -Modul  $M$  sowie ein  $B$ -Modul  $N$  haben wir in der Algebra die Notation  $M \boxtimes N = M \boxtimes_k N$  eingeführt für die abelsche Gruppe  $M \otimes_k N$  mit ihrer offensichtlichen Struktur als  $A \otimes_k B$ -Modul. Wir besprechen in 1.2.17, inwiefern diese Konstruktion in der Tat eine stabil universelle Verschmelzung in der Ausgangsschmelzkategorie einer Schmelzkofaserung ist. Gegeben  $m \in M$  und  $n \in N$  könnte man das Element  $m \otimes n \in M \otimes_k N$  nach unseren Konventionen dann auch  $m \boxtimes n \in M \boxtimes N$  notieren, schließlich entsprechen ja die Elemente  $m \in M$  den Leerverschmelzungen  $\gamma \rightarrow M$ .

*Beispiel 1.2.14 (Bezug zum Produkt von  $\sigma$ -Algebren).* Das Vergessen der  $\sigma$ -Algebra ist eine Trennfaserung  $\text{Meß} \rightarrow \text{Ens}$  von der banalen Trennkategorie der Meßräume in die banale Trennkategorie der Mengen. Es ist in diesem Sinne passend wenn auch nicht zwingend, das Produkt von Meßräumen zu notieren in der Form

$$(X, \mathcal{M}) \times (Y, \mathcal{N}) = (X \times Y, \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})$$

**Beispiel 1.2.15 (Bezug zum Produkt von Maßen).** Wir können auch Schmelzkategorie  $\text{Maß}_{\mathbb{R}}$  der reellen Maßräume betrachten. Objekte sind Tripel  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  aus einer Menge, einer zugehörigen  $\sigma$ -Algebra und einem reellen Maß  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Verschmelzungen sind meßbare Abbildungen  $f : X_1 \times \dots \times X_r \rightarrow Y$  mit  $f_*(\mu_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mu_r) = \nu$  für  $\nu$  das Maß auf  $Y$ . Dann ist quasi per definitionem  $(X_1 \times X_2, \mu_1 \boxtimes \mu_2)$  das Zielobjekt der universellen Verschmelzung von  $(X_1, \mu_1)$  mit  $(X_2, \mu_2)$  und in diesem Sinne ist auch unsere Notation für das Produktmaß passend aber nicht zwingend.

## Übungen

**Übung 1.2.16 (Modulschmelzkofaserung).** Bezeichne  $\text{Mod}_{\text{Kring}}$  die Schmelzkategorie, deren Objekte Paare  $(A, M)$  aus einem Kring  $A$  und einem  $A$ -Modul  $M$  sind. Verschmelzungen  $(A_1, M_1) \Upsilon \dots \Upsilon (A_r, M_r) \rightarrow (B, N)$  erklären wir als Tupel  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi)$  bestehend aus Ringhomomorphismen  $\varphi_i : A_i \rightarrow B$  und einer  $\mathbb{Z}$ -multilinearen Abbildung  $\psi : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow N$  derart, daß gilt

$$\psi(m_1, \dots, a_i m_i, \dots, m_r) = \varphi_i(a_i) \psi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r)$$

für alle  $i, a_i \in A_i$  und  $m_j \in M_j$ . Man zeige, daß der Schmelzfunktor des Vergessens des Moduls in die banale Schmelzkategorie der Kringe  $\text{Mod}_{\text{Kring}} \rightarrow \Upsilon \text{Kring}$  eine Schmelzkofaserung ist. Man beschreibe kokartesische Verschmelzungen.

**Übung 1.2.17 (Modulschmelzkofaserung, nichtkommutative Variante).** Bezeichne  $\text{kkRing}$  die Schmelzkategorie mit beliebigen Ringen als Objekten und als Verschmelzungen  $R_1 \Upsilon \dots \Upsilon R_n \rightarrow R$  allen Tupeln von Ringhomomorphismen  $\varphi_i : R_i \rightarrow R$  mit  $\varphi_i(a) \varphi_j(b) = \varphi_j(b) \varphi_i(a)$  für alle  $i \neq j$  und  $a \in R_i, b \in R_j$ . Man zeige, daß das Tensorprodukt von Ringen über  $\mathbb{Z}$  in dieser Schmelzkategorie universelle Verschmelzungen liefert. Bezeichne  $\text{Mod}_{\text{kkRing}}$  die Schmelzkategorie, deren Objekte Paare  $(A, M)$  aus einem Ring  $A$  und einem  $A$ -Modul  $M$  sind. Verschmelzungen  $(A_1, M_1) \Upsilon \dots \Upsilon (A_r, M_r) \rightarrow (B, N)$  erklären wir als Tupel  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi)$  bestehend aus Ringhomomorphismen  $\varphi_i : A_i \rightarrow B$ , die zusammen eine Verschmelzung in  $\text{kkRing}$  bilden, und einer  $\mathbb{Z}$ -multilinearen Abbildung  $\psi : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow N$  derart, daß gilt

$$\psi(m_1, \dots, a_i m_i, \dots, m_r) = \varphi_i(a_i) \psi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r)$$

für alle  $i, a_i \in A_i$  und  $m_j \in M_j$ . Man zeige, daß der Schmelzfunktor des Vergessens des Moduls  $\text{Mod}_{\text{kkRing}} \rightarrow \text{kkRing}$  eine Schmelzkofaserung ist. Man beschreibe kokartesische Verschmelzungen.

**Übung 1.2.18 (Optrennfaserung der Darstellungen von Monoiden).** Wir betrachten die Kategorie  $\text{Mon}$  der Monoide und konstruieren eine Trennfaserung

$$\text{Ab}_{//\text{Mon}} \rightarrow \wedge \text{Mon}$$

über der banalen Trennkategorie der Monoide mit opponierten Kategorien von Darstellungen als Fasern. Gegeben  $X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  eine Trennung in  $\wedge \text{Mon}$  alias ein Tupel von Monoidhomomorphismen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  sowie Darstellungen  $D, E_1, \dots, E_r$  unserer Monoide erklären wir dazu eine Trennung

$$\varphi : D \rightarrow E_1 \wedge \dots \wedge E_r$$

über einer vorgegebenen Trennung von Monoiden als eine multiadditive Abbildung  $\varphi^\circ : E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow D$  in die Gegenrichtung mit

$$x\varphi^\circ(e_1, \dots, e_r) = \varphi^\circ(f_1(x)e_1, \dots, f_r(x)e_r)$$

für alle  $x \in X$  und  $e_i \in E_i$ . Der Trennrückzug ist in diesem Fall das Tensorprodukt der zurückgezogenen Darstellungen.

### 1.3 Verallgemeinerung auf Modulgarben

1.3.1. Oft ist Kohomologie mit  $\mathbb{R}$ -Koeffizienten oder  $\mathbb{Q}$ -Koeffizienten einfacher als Kohomologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . In der algebraischen Geometrie sind auch allgemeiner Garben von Moduln über Garben von Kringen fundamental. Für uns wären hier erst einmal auch Garben von Moduln über konstanten Garben von Kringen ausreichend und eine gemeinsame Verallgemeinerung der Opponierten der Schmelzkofaserung der Moduln über Kringen  $\text{Mod}_{\text{Kring}} \rightarrow \vee \text{Kring}$  aus 1.2.16 und der Optrennfaserung der abelschen Garben  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  aus 1.2.10.

**Definition 1.3.2.** Ein **geringter Raum** ist ein Paar

$$(X, \mathcal{A})$$

bestehend aus einem topologischen Raum  $X$  mit einer Garbe von Ringen  $\mathcal{A}$ , seiner **Strukturgarbe**. Die Schnitte der Strukturgarbe über  $U \subseteq X$  nennen wir oft **reguläre Funktionen**, obwohl sie keineswegs Funktionen auf  $U$  zu sein brauchen. Ein **Morphismus** von einem geringten Raum  $(X, \mathcal{A})$  in einen weiteren geringten Raum  $(Y, \mathcal{B})$  ist ein Paar  $\varphi = (\varphi, \varphi^\#)$  bestehend aus einer stetigen Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  und darüber einem Komorphismus von Ringgarben im Sinne von [TG] 4.3.1 alias einer Vorschrift, die für beliebige  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  mit  $\varphi(U) \subset V$  einen Ringhomomorphismus  $\varphi_{UV}^\# : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{A}(U)$  so auszeichnet, daß diese Ringhomomorphismen verträglich sind mit den Restriktionen auf kleinere offene Teilmengen. Es ist klar, wie man Morphismen von geringten Räumen zu verknüpfen hat und daß wir auf diese Weise eine Kategorie erhalten, die **Kategorie der geringten Räume**  $\text{Ger}$ . Besteht die Strukturgarbe aus kommutativen Ringen, so sprechen wir von einem **gekringten Raum**. Die Kategorie der gekringten Räume notieren wir

$$\text{Gek}$$

**Definition 1.3.3.** Gegeben ein geringter Raum  $(X, \mathcal{A})$  verstehen wir unter einer **Garbe von  $\mathcal{A}$ -Moduln** oder einem  **$\mathcal{A}$ -Modul** oder einer **Modulgarbe** eine abelsche Garbe  $\mathcal{M}$  auf  $X$  mitsamt der Vorgabe für alle  $U \subseteq X$  von einer  $\mathcal{A}(U)$ -Modulstruktur auf  $\mathcal{M}(U)$  derart, daß für alle  $V \subseteq U \subseteq X$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(U) \times \mathcal{M}(U) & \rightarrow & \mathcal{M}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(V) \times \mathcal{M}(V) & \rightarrow & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

mit den Restriktionsabbildungen in den Vertikalen kommutiert. Es sollte offensichtlich sein, was unter einem Homomorphismus von  $\mathcal{A}$ -Moduln zu verstehen ist. Die Kategorie aller  $\mathcal{A}$ -Moduln notieren wir  $\mathcal{A}\text{-Mod}$  oder  $\text{Mod}_{\mathcal{A}}$  oder in unserem Kontext  $\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}$  oder noch einfacher  $\text{Ab}_{/X}$  mit der Interpretation  $X = (X, \mathcal{A})$ .

*Ergänzung 1.3.4 (Modulgarben als Schmelzkategorie).* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  mit einer Garbe von Kringen  $\mathcal{A}$  machen wir in Verallgemeinerung von [TG] ?? die Kategorie  $\mathcal{A}\text{-Mod}$  aller Modulgarben auf  $X$  zu einer Schmelzkategorie, indem wir für  $r \geq 0$  eine Verschmelzung

$$\phi : \mathcal{G}_1 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{G}_r \rightarrow \mathcal{F}$$

erklären als eine Vorschrift  $\phi$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  eine  $\mathcal{A}(U)$ -multilineare Abbildung  $\mathcal{G}_1(U) \times \dots \times \mathcal{G}_r(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  so zuordnet, daß für alle  $U' \subseteq U$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(U) \times \dots \times \mathcal{G}_r(U) & \rightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_1(U') \times \dots \times \mathcal{G}_r(U') & \rightarrow & \mathcal{F}(U') \end{array}$$

mit den Restriktionen in den Vertikalen und  $\phi$  in den Horizontalen kommutiert. Die Multiverknüpfungen sind die Offensichtlichen.

**1.3.5 (Tensorprodukt und internes Hom von Modulgarben).** Die Schmelzkategorie  $\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}$  der  $\mathcal{A}$ -Modulgarben auf einem gekringten Raum  $(X, \mathcal{A})$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen und internes Hom im Sinne von [TS] ?? und [TS] ?? . Um das zu sehen, reicht es, die Existenz von universellen Verschmelzungen und Multihom zu zeigen. Eine universelle Verschmelzung der Familie  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r$  erhalten wir, indem wir die Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{F}_1(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \dots \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{F}_r(U)$$

garbifizieren. Ein Multihom  $\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}$  von unserer Familie zu einer weiteren Modulgarbe  $\mathcal{G}$  erhalten wir als die Garbe

$$(\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}) : U \mapsto \text{Ab}_{/(U, \mathcal{A}|_U)}(\mathcal{F}_1|_U \curlywedge \dots \curlywedge \mathcal{F}_r|_U, \mathcal{G}|_U)$$

zusammen mit Bijektionen  $\text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}(\mathcal{K} \curlywedge \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/(X, \mathcal{A})}(\mathcal{K}, (\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}))$ , die hoffentlich auch für den Leser offensichtlich sind.

1.3.6. Die Modulgarben auf einem geringten Raum  $(X, \mathcal{A})$  bilden offensichtlich eine abelsche Kategorie und der Funktor  $\mathcal{A}\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}/_X$  des Vergessens der  $\mathcal{A}$ -Modulstruktur ist exakt. Weiter gibt es in unserer Kategorie beliebige Produkte und Koprodukte, ja beliebige Limites und Kolimites, und auch diese kommutieren mit dem Vergessen der  $\mathcal{A}$ -Modulstruktur.

*Ergänzung 1.3.7.* In der in [TS] ?? eingeführten Terminologie ist eine Ringgarbe auf einem topologischen Raum  $X$  ein Monoidobjekt der Schmelzkategorie [TSF] 1.1.5 der abelschen Garben auf  $X$  und eine Kringgarbe ein Abmonoidobjekt. In dieser Terminologie ist eine Modulgarbe ein Objekt mit Operation im Sinne von [TS] ??.

1.3.8 (**Trennfaserung der Modulgarben auf gekringten Räumen**). Wir erklären einen Trennfunktor

$$\text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$$

in die banale Trennkategorie der gekringten Räume. Objekte links sind Paare  $\mathcal{F} = (X, \mathcal{F})$  bestehend auf einem gekringten Raum  $X = (X, \mathcal{A})$  und einer  $\mathcal{A}$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$ . Eine Trennung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  der Basis mit  $Y_i = (Y_i, \mathcal{B}_i)$  ist ein Multiopkomorphismus  $\psi$  von abelschen Garben im Sinne von 1.2.9 derart, daß für alle  $U \subseteq X$  und  $V_i \subseteq Y_i$  mit  $f_i(U) \subset V_i$  für die zugehörige multiadditive Abbildung

$$\psi : \mathcal{G}_1(V_1) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V_n) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

und alle  $i$  und alle  $b_i \in \mathcal{B}_i(V_i)$  und beliebige  $g_j \in \mathcal{G}_j(V_j)$  für  $1 \leq j \leq r$  gilt

$$\psi(g_1, \dots, b_i g_i, \dots, g_r) = f_i^\sharp(b_i) \psi(g_1, \dots, g_i, \dots, g_r)$$

Insbesondere bleibt der Leertrennungsfunktor derselbe wie bei  $\text{Ab}_{//\wedge \text{Top}}$  und wir erben eine ausgezeichnete Isotransformation des Leertrennungsfunktors zum Funktor der globalen Schnitte, aufgefaßt als Trennfunktor  $\Gamma : \text{Ab}_{//\wedge \text{Gek}} \rightarrow \text{kEns}^{\text{opp}}$ . Die Fasern unseres Trennfunktors sind opponierte Kategorien von Modulgarben  $\text{Ab}_{//(\mathcal{X}, \mathcal{A})} = \mathcal{A}\text{-Mod}$ . Unser Trennfunktor ist sogar eine Trennfaserung. Eine kartesische Trennung über einer einfachen Trennung  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  mit Ziel  $\mathcal{G} \in \text{Ab}_{//(\mathcal{Y}, \mathcal{B})}$  geht von  $f^* \mathcal{G} = f^* \text{Gek} \mathcal{G} := \mathcal{A} \otimes_{f^* \text{Ab} \mathcal{B}} f^* \text{Ab} \mathcal{G}$  aus, mit der Notation  $f^* \text{Ab}$  für den Rückzug in  $\text{Ab}_{//\wedge \text{Top}}$  und dem offensichtlichen Transportmorphismus. Eine kartesische Trennung über einer allgemeinen Trennung der Basis wie oben geht aus von

$$f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} f_r^* \mathcal{G}_r$$

mit dem offensichtlichen Multiopkomorphismus. Insbesondere liefert der globale Schnitt  $1 \in \Gamma(\mathcal{A})$  des  $\mathcal{A}$ -Moduls  $\mathcal{A}$  unter unserer Identifikation von globalen Schnitten mit Leertrennungen eine kartesische Leertrennung über der eindeutigen Leertrennung  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow \vee$  der Basis.

1.3.9 (**Vorschub von Modulgarben**). Unsere Faserung  $\text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \text{Gek}$  aus 1.3.8 besitzt Vorschübe, ist also eine Bifaserung. Gegeben ein Morphismus  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  und ein  $\mathcal{A}$ -Modul  $\mathcal{F}$  erhalten wir  $f_*\mathcal{F}$ , indem wir den Vorschub als abelsche Garbe  $f_*\mathcal{F} = f_{*\text{Ab}}\mathcal{F}$  nehmen und für  $V \in \mathcal{B}$  ein  $b \in \mathcal{B}(V)$  auf  $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$  operieren lassen durch Multiplikation mit  $f^\sharp(b) \in \mathcal{A}(f^{-1}(V))$ . Die weiteren Details mögen dem Leser überlassen bleiben. Wir schreiben auch in diesem Kontext  $f_\dagger = f_*^{\text{opp}}$ .

## 1.4 Trennfaserungen bei eindeutigen Leertrennungen

1.4.1. Ein besonders übersichtlicher Fall, in dem sich viele der folgenden Aussagen gut einsehen lassen, ist die zur Schmelzkofaserung  $\text{Mod}_{\text{Kring}} \rightarrow \text{Kring}$  der Moduln über Kringen aus 1.2.16 opponierte Trennfaserung. Wir nennen sie die **Modulopptrennfaserung**. Sie ist eine Bifaserung, die Linksadjungierten der Rückzüge längs opponierter Ringhomomorphismen, also die Linksadjungierten der Skalarerweiterungen nach Opponieren, sind die Restriktionen der Skalare. Weil dies Beispiel oft vorkommen wird, vereinbaren wir die Abkürzung  $\text{Kringo} := \text{Kring}^{\text{opp}}$  und notieren unsere Trennfaserung

$$\text{Mod}_{//\text{Kringo}} \rightarrow \text{Kringo}$$

1.4.2. Gegeben ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  verstehen wir unter einem **Trennschnitt** einen Trennfunktor  $s : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  mit  $ps = \text{id}$ . Weiter verstehen wir unter einem **kartesischen Trennschnitt** einen Trennschnitt, der beliebige Trennungen zu kartesischen Trennungen macht. Jeder kartesische Trennschnitt einer Trennfaserung macht nach 1.2.5 stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen.

1.4.3. Wir sagen, eine Trennkategorie **habe eindeutige Leertrennungen**, wenn von jedem Objekt genau eine Leertrennung ausgeht. Zum Beispiel hat jede banale Trennkategorie diese Eigenschaft.

1.4.4. Eine Trennfaserung  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  über einer Trennkategorie mit eindeutigen Leertrennungen besitzt einen bis auf eindeutige Transformation eindeutig bestimmten kartesischen Trennschnitt, nämlich den Trennfunktor  $u : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ , der jedem Objekt  $X$  der Basis dasjenige Objekt

$$\underline{X} := l_X^\dagger(\lambda)$$

der Faser zuordnet, von dem der kartesische Lift der eindeutigen Leertrennung  $l_X : X \rightarrow \lambda$  ausgeht, und jeder Trennung in der Basis ihren kartesischen Lift. Wir nennen ihn den **eindeutigen kartesischen Trennschnitt** und notieren ihn meist

$$u : X \mapsto \underline{X}$$



Wir nennen  $\underline{X} \in \mathcal{M}_X$  das **konstante Objekt auf  $X$**  und notieren  $1_X : \underline{X} \rightarrow \wedge$  die zugehörige kartesische Leertrennung. Gegeben  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  liefert das Nachschalten von  $1_X : \underline{X} \rightarrow \wedge$  per definitionem eine Bijektion  $\mathcal{M}_X(\mathcal{F}, \underline{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{F}, \wedge)$ . Nach 1.4.2 macht der eindeutige kartesische Trennschnitt stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen.

*Beispiel 1.4.5.* Der eindeutige kartesische Trennschnitt der **Garbentrennfaserung**  $\text{Ens}/\text{Top} \rightarrow \wedge \text{Top}$  ordnet jedem Raum  $X$  als konstantes Objekt  $\underline{X}$  die finale Mengengarbe auf  $X$  zu, also die Mengengarbe mit der Identität als zugehöriger étaler Abbildung.

*Beispiel 1.4.6.* Der eindeutige kartesische Trennschnitt der **Optrennfaserung der abelschen Garben**  $\text{Ab}/\text{Top} \rightarrow \wedge \text{Top}$  ordnet jedem Raum  $X$  als konstantes Objekt  $\underline{X}$  die konstante abelsche Garbe  $\underline{X} = \mathbb{Z}_X$  zu mit derjenigen Leertrennung, die unter unserer Bijektion aus 1.2.9 ihrem globalen Schnitt  $1_X$  entspricht.

*Beispiel 1.4.7.* Der eindeutige kartesische Trennschnitt der **Moduloptrennfaserung**  $\text{Mod}/\text{Kringo} \rightarrow \wedge \text{Kringo}$  ordnet jedem Kring  $R$  als konstantes Objekt  $\underline{R}$  den  $R$ -Modul  $R$  zu mit derjenigen Leertrennung, die durch das Einselement  $1 \in R$  gegeben wird.

**1.4.8 (Leertrennungen und finale Objekte).** Sei  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine Trennfaserung über einer Trennkategorie mit eindeutigen Leertrennungen. Besitzt zusätzlich die Basis  $\mathcal{N}$  eine universelle Leertrennung  $\text{pt} \rightarrow \wedge$ , so ist deren kartesischer Lift nach dem Vorhergehenden eine universelle Leertrennung  $\underline{\text{pt}} \rightarrow \wedge$  in  $\mathcal{M}$  und deren Nachschalten liefert folglich eine Bijektion

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}, \underline{\text{pt}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{F}, \wedge)$$

*Beispiel 1.4.9.* Im Fall der Optrennfaserung der abelschen Garben erhalten wir so ausgezeichnete Bijektionen  $\text{Ab}/\text{Top}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}_{\text{pt}}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}/\text{Top}(\mathcal{F}, \wedge)$  und im Fall der Moduloptrennfaserung Bijektionen  $\text{Mod}/\text{Kringo}(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}/\text{Kringo}(M, \wedge)$ .

**1.4.10 (Leertrennungen und Vorschub).** Sei  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine Trennfaserung über einer Trennkategorie mit eindeutigen Leertrennungen. Besitzt für einen Morphismus der Basis  $f : X \rightarrow Y$  der Rückzug  $f^\dagger : \mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$  einen Linksadjungierten  $f_\dagger$ , so liefert das Nachschalten des kanonischen Isomorphismus  $\underline{X} \xrightarrow{\sim} f^\dagger \underline{Y}$  für beliebiges  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  den dritten Morphismus einer Folge von natürlichen Isomorphismen

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}, \wedge) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X(\mathcal{F}, \underline{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X(\mathcal{F}, f^\dagger \underline{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_Y(f_\dagger \mathcal{F}, \underline{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(f_\dagger \mathcal{F}, \wedge)$$

**1.4.11.** Alles in diesem Abschnitt Gesagte gilt opponiert analog für Schmelzkofaserungen.

## 1.5 Trennfaserungen über banalen Trennkategorien

1.5.1. Banale Trennkategorien haben stets eindeutige Leertrennungen. Für jede Trennfaserung über einer banalen Trennkategorie sind also die im vorhergehenden Abschnitt diskutierten konstanten Objekte sinnvoll definiert und erfüllen die dort angegebenen Beziehungen. Gegeben eine Trennfaserung über einer banalen Trennkategorie können wir sogar noch stärkere Aussagen machen, wie im folgenden ausgeführt werden soll.

1.5.2. Gegeben ein Trennfunktor  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie erklären wir seine **Faser** über einem Objekt  $X$  als die Trennkategorie  $\mathcal{M}_X$  aller Objekte über  $X$  mit nur solchen Trennungen, die über Tupeln aus Identitäten auf  $X$  liegen. Im Fall der Garbenoptrennfaserung ist die Faser  $\text{Ab}_{//X}$  über einem topologischen Raum  $X$  die opponierte Trennkategorie zur Schmelzkategorie der abelschen Garben auf  $X$ . Im Fall der Moduloptrennfaserung ist die Faser  $\text{Mod}_{//R}$  über einem Kring  $R$  die opponierte Trennkategorie zur Schmelzkategorie der  $R$ -Moduln.

1.5.3 (**Faserweises Tensorprodukt**). Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  über einer banalen Trennkategorie hat jede Faser  $\mathcal{M}_X$  stabil universelle Trennungen, nämlich die kartesischen Lifts von denjenigen Trennungen in der Basis, die Tupel von Kopien der Identität auf  $X$  sind. Wir notieren

$$\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_r \rightarrow \mathcal{F}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_r$$

den entsprechenden kartesischen Lift von  $(\text{id}, \dots, \text{id}) : X \rightarrow X \wedge \dots \wedge X$ . Die opponierte Schmelzkategorie notieren wir in diesem Kontext

$$\mathcal{M}_{/X} := \mathcal{M}_X^{\text{opp}}$$

Statt  $\otimes$  schreiben wir manchmal ausführlicher  $\otimes_X$ . Das Einsobjekt einer derartigen Schmelzkategorie ist das konstante Objekt  $\underline{X} \in \mathcal{M}_{/X}$ , das wir ja in 1.4.4 gerade durch Rückzug  $\underline{X} := l_X^\dagger(\wedge)$  unter der von  $X$  ausgehenden Leertrennung erklärt hatten. Den vom einfachen Rückzug  $f^\dagger : \mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$  unter  $f : X \rightarrow Y$  auf den opponierten Kategorien induzierten Funktor notieren wir

$$f^* := (f^\dagger)^{\text{opp}} : \mathcal{M}_{/Y} \rightarrow \mathcal{M}_{/X}$$

Offensichtlich hat  $f^\dagger$  genau dann einen Linksadjungierten  $f_\dagger$ , wenn der Rückzug  $f^*$  auf den opponierten Fasern einen Rechtsadjungierten  $f_*$  hat. Wir nennen ihn den **Vorschub unter  $f$**  und sprechen von einer **Trennfaserung mit Vorschub**, wenn für jede Einstrennung der Basis so ein Rechtsadjungierter  $f_*$  existiert.

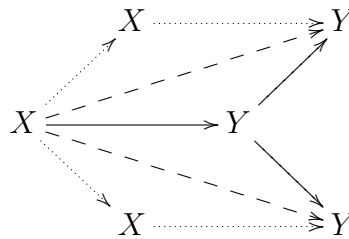
1.5.4 (**Diskussion der Notation**). Die Notationen  $\mathcal{M}_{/X}$  und  $(f^*, f_*)$  führe ich ein, damit wir uns in den üblichen Anwendungsfällen in der üblichen Notation wiederfinden. Typisch ist für uns die Situation einer **Trennfaserung mit Adjungierten**

**über einer banalen Trennkategorie**, bei der wir sowohl für alle Morphismen der Basis die Existenz von Adjungierten der Rückzüge fordern, die wir notieren als  $f^\dagger$  auf den Fasern beziehungsweise  $f_*$  auf den opponierten Fasern, als auch internes Hom in allen opponierten Fasern, das wir dann  $\Rightarrow$  oder ausführlicher  $\Rightarrow_X$  notieren. In konkreten Beispielen notieren wir die Ausgangskategorie unserer Trennfaserung meist in der Form  $\mathcal{M} = \text{Was}_{\parallel \text{Banal}}$  und die Faser über einem Objekt  $X \in \text{Banal}$  dann  $\mathcal{M}_X = \text{Was}_{\parallel X}$  und die opponierte Faser  $\mathcal{M}_{/X} = \text{Was}_{/X}$ .

**1.5.5 (Tensorprodukt und Rückzug).** Gegeben ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in einer Kategorie  $\mathcal{T}$  gilt in der zugehörigen banalen Trennkategorie die Identität

$$(\text{id}_Y, \text{id}_Y) \circ f = (f, f) = (f \wedge f) \circ (\text{id}_X, \text{id}_X)$$

von Zweitrennungen  $X \rightarrow Y \wedge Y$ . Graphisch mag man sie darstellen wie im folgenden Diagramm mit der durchgezogenen linken Seite und der gestrichelten Mitte und der gepunkteten linken Seite



Ist nun  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  eine Trennfaserung und schreiben wir für  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{M}_Y$  den kartesischen Lift von  $(f, f)$  nach  $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$  auf die beiden entsprechenden Weisen als Verknüpfung kartesischer Lifts, so finden wir einen ausgezeichneten Isomorphismus  $f^\dagger(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f^\dagger \mathcal{F}) \otimes (f^\dagger \mathcal{G})$  in  $\mathcal{M}_X$  und in unseren neuen Notationen in  $\mathcal{M}_{/X}$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$(f^* \mathcal{F}) \otimes (f^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

Etwas feiner liefert unser Formalismus, daß der Rückzug  $f^* : \mathcal{M}_{/Y} \rightarrow \mathcal{M}_{/X}$  verträglich ist mit universellen Verschmelzungen und wir erhalten so im Fall universeller Leerverschmelzungen insbesondere unsere ausgezeichneten Isomorphismen  $\underline{X} \xrightarrow{\sim} f^* \underline{Y}$  zurück. Ich erinnere daran, daß wir bereits aus 1.5.3 wissen, daß unter unseren Annahmen die opponierten Fasern  $\mathcal{M}_{/X}$  sogar stabil universelle Verschmelzungen haben.

*Beispiel 1.5.6.* Im Spezialfall unserer Optrennfaserung  $\text{Ab}_{\parallel \text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  von abelschen Garben 1.2.9 spezialisiert diese Konstruktion zu einem natürlichen Isomorphismus zwischen einem zurückgeholten Tensorprodukt und dem Tensorprodukt der zurückgeholten Garben. Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung

$\text{Mod}_{//\text{Kringo}} \rightarrow \wedge\text{Kringo}$  ist  $f^*$  die Skalarerweiterung und unsere Konstruktion spezialisiert für  $f \in \text{Kringo}(A, B)$  alias einen Kringhomomorphismus  $f^\circ : B \rightarrow A$  zum kanonischen Modulisomorphismus

$$(A \otimes_B F) \otimes_A (A \otimes_B G) \xrightarrow{\sim} A \otimes_B (F \otimes_B G)$$

**1.5.7 (Internes Hom und Vorschub).** Gegeben seien eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge\mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis. Für jedes feste Objekt  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_Y$  betrachten wir die Funktoren  $\mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$  gegeben durch  $\mathcal{G} \mapsto f^\dagger \mathcal{G} \mapsto f^\dagger \mathcal{E} \otimes_X f^\dagger \mathcal{G}$  sowie  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{G} \mapsto f^\dagger(\mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{G})$ . Unsere Vorgaben beinhalten eine ausgezeichnete Isotransformation zwischen diesen Funktoren. Diese Isotransformation hinwiederum induziert eine Isotransformation zwischen ihren Linksadjungierten, wenn diese existieren, und in jedem Fall zwischen ihren partiellen Linksadjungierten. Haben insbesondere die Opponierten  $\mathcal{M}_{/X}$  der Fasern internes Hom  $\Rightarrow$  und hat  $f^\dagger$  einen Linksadjungierten  $f_\dagger$  alias  $f^*$  einen Rechtsadjungierten  $f_*$ , so erhalten wir für  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_{/Y}$  und  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{/X}$  natürliche Isomorphismen

$$f_*(f^* \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E} \Rightarrow f_* \mathcal{F})$$

Gegeben  $\mathcal{G} \in \mathcal{M}_{/X}$  erhalten wir daraus, indem wir die Koeinheit der Adjunktion  $f^* f_* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  vorschalten, einen ausgezeichneten Morphismus

$$f_*(\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}) \rightarrow (f_* \mathcal{G} \Rightarrow f_* \mathcal{F})$$

*Beispiel 1.5.8.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung spezialisiert diese Konstruktion für  $f \in \text{Kringo}(A, B)$  alias einen Kringhomomorphismus  $f^\circ : B \rightarrow A$  zum kanonischen Modulisomorphismus

$$\text{res}_A^B \text{Hom}_A(A \otimes_B E, F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_B(E, \text{res}_A^B F)$$

**1.5.9 (Internes Hom und Rückzug).** Gegeben seien eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge\mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis. Übung [TS] ?? liefert für je zwei Objekte  $\mathcal{E}, \mathcal{G} \in \mathcal{M}_{/Y}$ , für die die fraglichen internen Hom-Objekte existieren, einen ausgezeichneten Morphismus

$$f^*(\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{G}) \rightarrow (f^* \mathcal{E} \Rightarrow f^* \mathcal{G})$$

*Beispiel 1.5.10.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung spezialisiert diese Konstruktion für  $f \in \text{Kringo}(A, B)$  alias einen Kringhomomorphismus  $f^\circ : B \rightarrow A$  zu einem kanonischen Modulhomomorphismus

$$A \otimes_B \text{Hom}_B(E, G) \rightarrow \text{Hom}_A(A \otimes_B E, A \otimes_B G)$$

**1.5.11 (Dualisieren und Rückzug).** Gegeben seien eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus der Basis  $f : X \rightarrow Y$ . Gegeben  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_{/Y}$  derart, daß  $\mathcal{E}$  und  $f^*\mathcal{E}$  dualisierbar sind, liefern unsere ausgezeichneten Morphismen 1.5.9 vom Rückzug eines internen Hom in das interne Hom der Rückzüge zusammen mit dem ausgezeichneten Isomorphismus 1.5.5 zwischen der Eins von  $\mathcal{M}_{/X}$  und dem Rückzug der Eins von  $\mathcal{M}_{/Y}$  einen ausgezeichneten Morphismus

$$f^*(\mathcal{E}^\vee) \rightarrow (f^*\mathcal{E})^\vee$$

*Beispiel 1.5.12.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung spezialisiert diese Konstruktion für  $f \in \text{Kringo}(A, B)$  alias einen Kringshomomorphismus  $f^\circ : B \rightarrow A$  zu einem kanonischen Modulhomomorphismus

$$A \otimes_B \text{Hom}_B(E, B) \rightarrow \text{Hom}_A(A \otimes_B E, A)$$

**1.5.13 (Internes Hom und Rückzug im starren Fall).** Gegeben seien eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  zu einer banalen Trennkategorie und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis. Da der Rückzug  $f^*$  nach 1.5.5 mit universellen Verschmelzungen vertauscht, macht  $f^*$  nach [TSK] 3.3.5 starre Objekte von  $\mathcal{M}_{/Y}$  zu starren Objekten von  $\mathcal{M}_{/X}$  und der Morphismus aus 1.5.9 spezialisiert für starres  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{G} = \mathbb{I}_Y = \underline{Y}$  zu einem Isomorphismus  $f^*(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{E})^\vee$ . Im Fall eines starren Objekts  $\mathcal{E}$  ist unser Morphismus in 1.5.9 sogar für beliebiges  $\mathcal{G}$  ein Isomorphismus

$$f^*(\mathcal{E} \rightrightarrows \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{E} \rightrightarrows f^*\mathcal{G})$$

In der Tat können wir nämlich besagten Morphismus schreiben als die Verknüpfung von Isomorphismen

$$f^*(\mathcal{E} \rightrightarrows \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{E}^\vee) \otimes f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{E})^\vee \otimes f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{E} \rightrightarrows f^*\mathcal{G})$$

Hier sollte ausgeschrieben werden, daß diese Verknüpfung wirklich besagten Morphismus liefert. Das mag einmal ein Student ausführen.

*Beispiel 1.5.14.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung sind etwa freie endlich erzeugte Moduln starr und für  $E$  frei und endlich erzeugt liefert unsere Konstruktion oben in der Tat einen Isomorphismus

$$A \otimes_B \text{Hom}_B(E, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(A \otimes_B E, A \otimes_B G)$$

**1.5.15 (Tensorprodukt und Vorschub).** Seien  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  eine Trennfaserung zu einer banalen Trennkategorie und  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus in der Basis. Besitzt das Zurückholen  $f^* : \mathcal{M}_{/Y} \rightarrow \mathcal{M}_{/X}$  auf den opponierten Fasern einen Rechtsadjungierten  $f_*$ , so erhalten wir für  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{/X}$  und  $\mathcal{G} \in \mathcal{M}_{/Y}$  durch Adjunktion einen ausgezeichneten Morphismus

$$f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$$

aus der Komposition  $f^*(f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^*f_*\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}$  des Inversen zur Verträglichkeit 1.1.9 von Rückzug und Tensorprodukt mit der Koeinheit der Adjunktion tensoriert mit der Identität. Für  $\mathcal{G} := f_*\mathcal{E}$  erhalten wir speziell einen ausgezeichneten Morphismus

$$f_*\mathcal{F} \otimes f_*\mathcal{E} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$$

durch Adjunktion aus  $f^*(f_*\mathcal{F} \otimes f_*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^*f_*\mathcal{F} \otimes f^*f_*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}$ . Ein Student mag ausschreiben, warum dieser natürliche Morphismus verträglich ist mit dem Vertauschen der Tensorfaktoren.

*Beispiel 1.5.16.* Im Spezialfall unserer Modulbitrennfaserung wäre Ersteres der natürliche Homomorphismus

$$(\operatorname{res}_A^B F) \otimes_B G \rightarrow \operatorname{res}_A^B(F \otimes_A (A \otimes_B G))$$

und ist sogar immer ein Isomorphismus. Im Fall der Garbenoptrennfaserung mit  $f : X \rightarrow Y$  der konstanten Abbildung eines unendlichen diskreten Raums auf den einpunktigen Raum ist unsere Garbe  $\mathcal{F}$  eine durch  $x \in X$  indizierte Familie von abelschen Gruppen  $F_x$  und  $\mathcal{G}$  eine weitere abelsche Gruppe  $G$  und unser Morphismus der natürliche Morphismus

$$\left( \prod_{x \in X} F_x \right) \otimes_{\mathbb{Z}} G \rightarrow \left( \prod_{x \in X} F_x \otimes_{\mathbb{Z}} G \right)$$

und im allgemeinen kein Isomorphismus, etwa für  $G = \mathbb{Q}$ . Für  $G$  frei und endlich erzeugt ist er aber doch wieder ein Isomorphismus, und daß das allgemein für starres  $\mathcal{G}$  gilt, diskutieren wir als nächstes.

**1.5.17 (Tensorprodukt und Vorschub im starren Fall).** Gegeben seien eine über einer banalen Trennkategorie trenngefaserte Trennkategorie  $\mathcal{M}$  und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis. Hat der Rückzug  $f^*$  auf den opponierten Fasern einen Rechtsadjungierten  $f_*$ , so sind die Morphismen aus 1.5.15 für starres  $\mathcal{G}$  Isomorphismen

$$f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$$

Das erkennen wir, indem wir unsere Isomorphismen aus 1.5.7 zu  $\mathcal{E} := \mathcal{G}^\vee$  spezialisieren. Ein Student mag die Details ausschreiben.

*Beispiel 1.5.18.* Im Fall einer abelschen Garbe  $\mathcal{G}$  auf einem topologischen Raum, die lokal frei ist von endlichem Rang, spezialisieren die in 1.5.17 besprochenen Isomorphismen zu natürlichen Isomorphismen von abelschen Garben

$$f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$$

1.5.19 (**Externes Tensorieren alias Boxprodukt**). Gegeben eine zu einer banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  trennengefaserte Trennkategorie  $\mathcal{M}$  und in  $\mathcal{T}$  zu zwei Objekten  $X, Y$  ein Produkt  $X \times Y$  betrachten wir die Projektionszweitrennung

$$(\text{pr}_X, \text{pr}_Y) : X \times Y \rightarrow X \wedge Y$$

Gegeben  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  und  $\mathcal{G} \in \mathcal{M}_Y$  erklären wir dann  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \in \mathcal{M}_{X \times Y}$  als den Rückzug  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := (\text{pr}_X, \text{pr}_Y)^\dagger(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G})$  und nennen dies Objekt wie in 1.2.12 ein **Boxprodukt**. Die entsprechende Zweitrennung  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$  von  $\mathcal{M}$  ist als stark kartesischer Lift einer stabil universellen Trennung nach 1.2.5 auch stabil universell und für  $f : P \rightarrow X$  sowie  $g : Q \rightarrow Y$  liefert die universelle Eigenschaft einen natürlichen Isomorphismus

$$f^\dagger \mathcal{F} \boxtimes g^\dagger \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f \times g)^\dagger(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$$

Schreiben wir die Projektion  $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$  als Projektionszweitrennung gefolgt von  $l_X \wedge \text{id}_Y$  für  $l_X : X \rightarrow \wedge$  die Leertrennung, in Formeln  $\text{pr}_Y = (l_X \wedge \text{id}_Y) \circ (\text{pr}_X, \text{pr}_Y)$ , so erhalten wir für jedes  $\mathcal{G} \in \mathcal{M}_Y$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\underline{X} \boxtimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_Y^\dagger \mathcal{G}$$

Schreiben wir die Leertrennung  $X \times Y \rightarrow \wedge$  als Projektionstrennung gefolgt vom Zweitupel  $l_X \wedge l_Y$  aus Leertrennungen  $X \times Y \rightarrow X \wedge Y \rightarrow (\wedge) \wedge (\wedge) = \wedge$ , so ist die zugehörige Identifikation ein ausgezeichneter Isomorphismus

$$\underline{X} \times \underline{Y} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \boxtimes \underline{Y}$$

In unserer opponierten Notation erhalten wir dieselben ausgezeichneten Isomorphismen in der Gegenrichtung mit  $*$  statt  $\dagger$  für dieselben Objekte als Objekte der opponierten Fasern, also  $(f \times g)^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f^* \mathcal{F} \boxtimes g^* \mathcal{G}$  und  $\text{pr}_Y^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \boxtimes \mathcal{G}$  und  $\underline{X} \boxtimes \underline{Y} \xrightarrow{\sim} \underline{X} \times \underline{Y}$  für  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := (\text{pr}_X, \text{pr}_Y)^*(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G})$ .

*Beispiel 1.5.20.* Im Spezialfall unserer Moduloptrennfaserung ist  $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$  das Koprodukt in Kring alias das Produkt in Kringo und gegeben Moduln  $M$  über  $A$  und  $N$  über  $B$  ist  $M \boxtimes N$  der offensichtliche Modul  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$  über  $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ .

*Ergänzung 1.5.21 (Bezug zum Boxprodukt von Funktionen).* In den Notationen der vorhergehenden Diskussion zu Boxprodukten entspricht es unserer allgemeinen Konvention [TS] ??, auch die auf den Leertrennungen induzierten Abbildungen

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}, \wedge) \times \mathcal{M}(\mathcal{G}, \wedge) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, \wedge)$$

als  $(f, g) \mapsto f \boxtimes g$  zu notieren. Im Spezialfall der Garben von  $k$ -Vektorräumen auf diskreten Mengen und der konstanten Garben  $\mathcal{F} = \underline{X}$  sowie  $\mathcal{G} = \underline{Y}$  spezialisiert diese Konstruktion unter verschiedenen weiteren hoffentlich offensichtlichen Identifikationen zu der Abbildung  $\text{Ens}(X, k) \times \text{Ens}(Y, k) \rightarrow \text{Ens}(X \times Y, k)$ , die wir schon bisher immer  $(f, g) \mapsto f \boxtimes g$  notiert hatten.

## Übungen

**Übung 1.5.22 (Externes Tensorieren und gewöhnliches Tensorieren).** Gegeben eine über einer banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  trenngefaserte Trennkategorie  $\mathcal{M}$  und in  $\mathcal{T}$  zu zwei Objekten  $X, Y$  ein Produkt  $X \times Y$  sowie  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}/_X$  und  $\mathcal{G} \in \mathcal{M}/_Y$  konstruiere man einen Isomorphismus  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (\text{pr}_X)^* \mathcal{F} \otimes (\text{pr}_Y)^* \mathcal{G}$  sowie im Fall  $X = Y$  einen Isomorphismus  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \Delta^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$  für die diagonale Einbettung  $\Delta : X \rightarrow X \times X$ .

**Übung 1.5.23 (Vorschub auf finales Objekt als Trennfunktor).** Sei  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  eine Trennfaserung mit Vorschüben über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$ . So erhalten wir einen Trennfunktor

$$c_{\dagger} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{pt}}$$

durch die Vorschrift, daß jedes Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  auf  $c_{\dagger} \mathcal{F}$  abgebildet wird für  $c : X \rightarrow \text{pt}$  und jede Trennung  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  auf die durch die stark kokartesische Eigenschaft [TG] 6.3.13 von  $\mathcal{F} \rightarrow c_{\dagger} \mathcal{F}$  in Bezug auf den Funktor auf den Familienkategorien  $\mathcal{M}^{\wedge} \rightarrow (\wedge \mathcal{T})^{\wedge}$  bestimmte Trennung  $c_{\dagger} \mathcal{F} \rightarrow c_{1\dagger} \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge c_{r\dagger} \mathcal{G}_r$  über der Trennung  $(\text{id}, \dots, \text{id}) : \text{pt} \rightarrow \text{pt} \wedge \dots \wedge \text{pt}$  mit der Notation  $c_i : Y_i \rightarrow \text{pt}$  für den jeweils einzigen Morphismus. Auf den opponierten Schmelzkategorien erhalten wir so einen Schmelzfunktor

$$\text{fin}_* : \mathcal{M}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{pt}}$$

Nach 1.4.10 ist er volltreu auf Leerverschmelzungen in dem Sinne, daß er Bijektionen  $\mathcal{M}^{\text{opp}}(\Upsilon, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\text{pt}}(\Upsilon, \text{fin}_* \mathcal{F})$  induziert für alle  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$ . Der Schmelzfunktor der Leerverschmelzungen [TS] ?? von  $\mathcal{M}^{\text{opp}}$  in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen faktorisiert mithin als  $\text{fin}_*$  gefolgt vom Schmelzfunktor der Leerverschmelzungen von  $\mathcal{M}_{\text{pt}}$  in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen. Im Fall der Garbenopentrennfaserung 1.2.9 mag man  $\mathcal{M}_{\text{pt}}$  mit der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen identifizieren und  $\text{fin}_*$  mit dem Funktor der globalen Schnitte. So folgt im Rahmen unseres Formalismus, daß jede Verschmelzung von abelschen Garben über topologischen Räumen eine multilineare Abbildung zwischen den jeweiligen Räumen von globalen Schnitten induziert.

**Übung 1.5.24.** Sei  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  eine Trennfaserung mit Vorschüben über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$ . Schalten wir unserem Schmelzfunktor  $\text{fin}_* : \mathcal{M}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{pt}}$  aus 1.5.23 den Opponierten  $(\wedge \mathcal{T})^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{M}^{\text{opp}}$  des kartesischen Trennschnitts nach 1.4.4 vor, so erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\Upsilon \mathcal{T}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{pt}}$$



Im Fall der Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  erhalten wir so den Schmelz-funktor  $\Upsilon \text{Top}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ab}$ , der jedem Raum  $X$  die Gruppe  $\Gamma(X)$  der lokal konstanten  $\mathbb{Z}$ -wertigen Funktionen auf  $X$  zuordnet und jedem Tupel von von  $X$  ausgehenden stetigen Abbildungen die multiadditive Abbildung „nimm das Produkt der zurückgezogenen Funktionen“.

*Übung 1.5.25.* Ich erinnere an die Trennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Mon}} \rightarrow \text{Mon}$  der Darstellungen von Monoiden aus 1.2.18. Man zeige, daß wir in den Fasern über Gruppen sogar Multihom haben.

*Übung 1.5.26 (Boxprodukt von Moduln, Variante).* Sei  $k$  ein fester Krings. Im Fall der in 1.2.16 betrachteten Schmelzkofaserung  $\text{Mod}_{\text{Kring}^k} \rightarrow \Upsilon \text{Kring}^k$  oder vielmehr der zugehörigen Trennfaserung auf den opponierten Kategorien ist  $\underline{R}$  der  $k$ -Kring  $R$  selbst als  $R$ -Modul und gegeben  $M \in \text{Mod}_R$  sowie  $N \in \text{Mod}_S$  kann  $M \boxtimes N$  beschrieben werden als  $M \otimes_k N$  mit der durch  $(r \otimes s)(m \otimes n) = rm \otimes sn$  gegebenen Struktur als Modul über  $R \otimes_k S$ .

## 1.6 Relativ angereicherte Trennkategorien

1.6.1. Ähnlich wie in der absoluten Situation in [TSK] 2.4.1 folgende besprechen wir zunächst „relative additive Strukturen“ und „relative  $(\mathcal{S}, v)$ -Strukturen“, bevor wir das allgemeine Konzept einer relativen  $\mathcal{S}$ -Trennkategorie einführen.

1.6.2. Gegeben ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  erklären wir eine **relative additive Struktur** als die Vorgabe einer Verknüpfung „Addition“ auf der Menge

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r)$$

der Trennungen über einer festen Trennung  $f : p\mathcal{F} \rightarrow p\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge p\mathcal{G}_r$  der Basis für beliebige Objekte  $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_r \in \mathcal{M}$  derart, daß die Multiverknüpfungen multiadditiv sind.

*Beispiel 1.6.3 (Relative additive Struktur der Garbenoptrennfaserung).* Bei unserer Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  ist für jede feste Trennung der Basis  $f = (f_1, \dots, f_r)$  alias jedes Tupel stetiger Abbildungen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  und abelsche Garben  $\mathcal{F}, \mathcal{G}_i$  auf  $X, Y_i$  die Menge  $\text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r)$  von Multiopkomorphismen eine abelsche Gruppe in offensichtlicher Weise. Formal haben wir ausgezeichnete Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \Upsilon \dots \Upsilon \mathcal{G}_r) &\xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/X}(f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes_X \dots \otimes_X f_r^* \mathcal{G}_r, \mathcal{F}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/X}(\Upsilon, (f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes_X \dots \otimes_X f_r^* \mathcal{G}_r) \Rightarrow \mathcal{F}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/\text{pt}}(\Upsilon, \text{fin}_{X^*}((f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes_X \dots \otimes_X f_r^* \mathcal{G}_r) \Rightarrow \mathcal{F})) \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma \text{fin}_{X^*}((f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes_X \dots \otimes_X f_r^* \mathcal{G}_r) \Rightarrow \mathcal{F}) \end{aligned}$$

mit der Isotransformation  $\beta : L \xrightarrow{\cong} \Gamma$  aus 1.1.7 ganz unten. Indem wir die Addition von unten nach oben übertragen, erhalten wir unsere relative additive Struktur auf der Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$ . Mit  $\mathcal{B} := \mathcal{G}_1 \vee \dots \vee \mathcal{G}_r$  und weniger Umwegen können wir unsere Bijektionen auch schreiben als

$$\text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} \text{Ab}_{//X}(\mathcal{F}, f^\dagger \mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} \text{Ab}_{//\text{Top}}(f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F}, \wedge) \xrightarrow{\cong} \Gamma(f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F})$$

*Beispiel 1.6.4.* Gegeben eine Trennfaserung über einer banalen Trennkategorie  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  mit  $\text{Multihom}$  in den opponierten Fasern und eine Faktorisierung  $L^{\text{opp}} = v \circ H$  des opponierten Leertrennungsfunktors über  $v : \text{Ab} \rightarrow \text{kEns}$  erhalten wir eine relative additive Struktur auf unserer Trennfaserung, indem wir Additionen auf den Verschmelzungsmengen dadurch festlegen, daß die durch unsere Daten gegebenen Bijektionen  $\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} vH(f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F})$  Isomorphismen von abelschen Gruppen sein sollen.

1.6.5. Gegeben ein Trennfunktor  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  und ein treuer Schmelzfunktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \text{kEns}$  verstehen wir unter einer **relativen**  $(\mathcal{S}, v)$ -**Struktur** die Vorgabe einer  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur auf der Menge

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r)$$

der Trennungen über einer festen Trennung  $f : p\mathcal{F} \rightarrow p\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge p\mathcal{G}_r$  der Basis für beliebige Objekte  $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_r \in \mathcal{M}$  derart, daß die Multiverknüpfungen mit den jeweiligen  $(\mathcal{S}, v)$ -Strukturen verträglich sind.

*Beispiel 1.6.6.* Jede relative additive Struktur liefert eine relative  $(\text{Ab}, v)$ -Struktur und jede relative  $(\text{Ab}, v)$ -Struktur eine relative additive Struktur in offensichtlicher Weise und diese beiden Konstruktionen sind zueinander invers.

1.6.7. Gegeben sei eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  mit **Adjungierten** über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$ . Hat die Schmelzkategorie  $\mathcal{M}_{/\text{pt}}$  einen treuen Leerverschmelzungsfunktor, so erhalten wir auf unserer Trennfaserung eine relative  $(\mathcal{M}_{/\text{pt}}, L)$ -Struktur mittels der Bijektionen

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_X(\mathcal{F}, f^\dagger \mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_{/X}(\gamma, f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_{/\text{pt}}(\gamma, \text{fin}_{X^*}(f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F}))$$

*Beispiel 1.6.8.* Die durch 1.6.7 gegebene relative  $(\text{Ab}_{/\text{pt}}, L)$ -Struktur auf der Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  entspricht unter der offensichtlichen Schmelzäquivalenz  $\text{Ab}_{/\text{pt}} \xrightarrow{\cong} \text{Ab}$  einer  $(\text{Ab}, v)$ -Struktur, die unter unseren Konstruktionen aus 1.6.6 hinwiederum zu der relativen additiven Struktur aus 1.6.3 wird.

1.6.9. Gegeben eine Schmelzkategorie  $\mathcal{S}$  und eine Trennkategorie  $\mathcal{N}$  erklären wir eine  **$\mathcal{S}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}$  über  $\mathcal{N}$**  als ein Datum aus einer Menge  $\mathcal{M}$  von Objekten, einer Abbildung  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  und für Objekte  $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_r \in \mathcal{M}$  und jede Trennung  $f : p\mathcal{F} \rightarrow p\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge p\mathcal{G}_r$  der Basis ein **Trennobjekt**

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) \in \mathcal{S}$$

sowie Multiverknüpfungen, die Verschmelzungen in  $\mathcal{S}$  sind derart, daß das offensichtliche Analogon der Assoziativitätsbedingung aus unserer Definition einer Schmelzkategorie erfüllt ist und daß es für jede Einsfamilie  $\mathcal{F}$  eine Leertrennung  $\text{id}_{\mathcal{F}} \in \mathcal{S}(\gamma, \mathcal{M}_{\text{id}}(\mathcal{F}_*, \mathcal{F}))$  in das Trennobjekt über  $\text{id}_{p\mathcal{F}}$  gibt, das die Analoga unserer Forderungen an Identitätsverschmelzungen aus ?? erfüllt. Als wieder andere Sprechweise sagen wir,  $\mathcal{M}$  sei **angereichert in  $\mathcal{S}$  über  $\mathcal{N}$**  und schreiben  $\mathcal{M}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$ .

*Beispiel 1.6.10.* Sei  $\mathcal{N}$  eine Trennkategorie. Ein Trennfunktor  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ist dasselbe wie eine  $\text{kEns}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}$  über  $\mathcal{N}$ . Eine Ab-Trennkategorie  $\mathcal{M}/\text{Ab} \rightarrow \mathcal{N}$  ist dasselbe wie ein Trennfunktor  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  mit einer relativen additiven Struktur.

*Beispiel 1.6.11.* Sei  $v : \mathcal{S} \rightarrow \text{kEns}$  ein treuer Schmelzfunktor. Wir erinnern aus ?? die Schmelzkategorie  $\text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)}$  der Mengen mit  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur. Ein Trennfunktor  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  mit relativer  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur ist eine  $\text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}/\text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)} \rightarrow \mathcal{N}$  über  $\mathcal{N}$ . Es ist auch im wesentlichen dasselbe wie eine  $\mathcal{S}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  über  $\mathcal{N}$ , wie in 1.6.14 ausgeführt wird.

1.6.12. Gegeben ein Schmelzfunktor  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  und eine Trennkategorie  $\mathcal{N}$  und angereicherte Trennfunktoren  $\mathcal{L}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  sowie  $\mathcal{M}/\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{N}$  erklären wir einen **angereicherten Trennfunktor  $F$  über  $\varphi$  relativ zu  $\mathcal{N}$**  ein Datum aus einer Abbildung auf den Objekten  $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  über  $\mathcal{N}$  zusammen mit  $\mathcal{T}$ -Morphismen

$$F : \varphi(\mathcal{L}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{M}_f(F\mathcal{F}, F\mathcal{B})$$

über jeder Trennung  $f$  der Basis  $\mathcal{N}$ , die mit Multiverknüpfungen verträglich sind und Identitäten auf Identitäten werfen in der offensichtlichen Weise. Wir notieren so einen angereicherten Trennfunktor über  $\varphi$  oft  $F/\varphi$ .

1.6.13. Gegeben eine  $\mathcal{S}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  über  $\mathcal{N}$  und ein Schmelzfunktor  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  erklären wir eine  $\mathcal{T}$ -Trennkategorie  $\varphi(\mathcal{M})/\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{N}$  über  $\mathcal{N}$ , indem wir  $\varphi$  auf alle Trennobjekte und Multiverknüpfungen von  $\mathcal{M}$  anwenden. Wir sagen,  $\varphi(\mathcal{M})$  entstehe durch **Umstrukturieren von  $\mathcal{M}$  mit  $\varphi$** . Die Identität auf den Objekten zusammen mit den Identitäten auf den Bildern unter  $\varphi$  der Trennungsobjekte ist dann ein objektfester angereicherter Trennfunktor

$$U/\varphi : \mathcal{M}/\mathcal{S} \rightarrow \varphi(\mathcal{M})/\mathcal{T}$$

1.6.14. Gegeben ein treuer Schmelzfunktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \text{kEns}$  macht das Umstrukturieren mit der Schmelzäquivalenz  $v : \mathcal{S} \xrightarrow{\cong} \text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)}$  jede relative  $\mathcal{S}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  über  $\mathcal{N}$  zu einer Schmelzkategorie mit relativer  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur  $\mathcal{M}/\text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)} \rightarrow \mathcal{N}$ . Ist unsere Schmelzäquivalenz ein Isomorphismus  $v : \mathcal{S} \xrightarrow{\cong} \text{kEns}_{(\mathcal{S}, v)}$ , so können wir diese Konstruktion auch rückgängig machen.

1.6.15 (**Selbstanreicherung**). Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$  konstruieren wir eine  $\mathcal{M}_{/\text{pt}}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}^{\text{sa}}$  über  $\wedge \mathcal{T}$  mit Trennobjekten

$$\mathcal{M}_f^{\text{sa}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) := \text{fin}_{X^*}(f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F})$$

und Multiverknüpfungen, statt derer ich der Einfachkeit halber nur die einfachen Verknüpfungen ausschreibe. Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  in der Basis und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$  Objekte der jeweiligen Fasern gilt es, eine Verschmelzung

$$\text{fin}_{Y^*}(g^* \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{G}) \vee \text{fin}_{X^*}(f^* \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{F}) \rightarrow \text{fin}_{X^*}((gf)^* \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{F})$$

anzugeben. Dazu bilden wir mit der Einheit der Adjunktion  $(f^*, f_*)$  und dem Heranziehen eines Rückzugs in das interne Hom 1.5.9 die Komposition

$$\text{fin}_{Y^*}(g^* \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{G}) \rightarrow \text{fin}_{Y^*} f_* f^*(g^* \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{G}) \rightarrow \text{fin}_{X^*}((gf)^* \mathcal{H} \rightrightarrows f^* \mathcal{G})$$

Nach diesem Morphismus im Term ganz links unserer zu erklärenden Verschmelzung verwenden wir den ausgezeichneten Morphismus 1.5.15 vom Tensorprodukt von Vorschüben zum Vorschub eines Tensorprodukts und die Komposition von internem Hom in der Schmelzkategorie  $\mathcal{M}_{/X}$ . Jetzt gilt es, dasselbe für Multiverknüpfungen auszuschreiben und alles so übersichtlich zu strukturieren, daß klar wird, daß wir so in der Tat eine  $\mathcal{M}_{/\text{pt}}$ -Trennkategorie  $\mathcal{M}^{\text{sa}}$  über  $\wedge \mathcal{T}$  erhalten. Das möchte ich einem Studenten überlassen. Ebenso möchte ich es einem Studenten überlassen zu zeigen, daß wir einen objektfesten Isomorphismus

$$\mathbb{L}(\mathcal{M}^{\text{sa}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

der Umstrukturierung der automatischen Selbstanreicherung mit dem Leerverschmelzungsfunktor von  $\mathcal{M}_{/\text{pt}}$  zu unserer ursprünglichen Trennfaserung erhalten, indem wir alle die Bijektionen

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(\mathcal{M}_f^{\text{sa}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})) &= \mathcal{M}_{/\text{pt}}(\vee, \text{fin}_{X^*}(f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F})) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{/X}(\vee, f^* \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{F}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{/X}(f^* \mathcal{B}, \mathcal{F}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X(\mathcal{F}, f^\dagger \mathcal{B}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_f(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \end{aligned}$$

zusammenfassen. Hier kommt der Isomorphismus der zweiten Zeile von 1.5.23 her, wo wir allgemein Bijektionen  $\mathcal{M}^{\text{opp}}(\vee, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{/\text{pt}}(\vee, \text{fin}_* \mathcal{H})$  konstruieren.

*Beispiel* 1.6.16. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  mit Adjungierten über einer banalen Trennkategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$  derart, daß  $\mathcal{M}_{/\text{pt}}$  einen treuen Leerverschmelzungsfunktor hat, liefert der objektfeste Isomorphismus  $\mathbb{L}(\mathcal{M}^{\text{sa}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$  aus 1.6.15 die relative  $(\mathcal{M}_{/\text{pt}}, \mathbb{L})$ -Struktur auf  $\mathcal{M}$  aus 1.6.7. Im Fall der Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  erhalten wir mit 1.6.8 unsere ursprüngliche relative additive Struktur zurück.

## 1.7 Trennschmelzfakofaserungen

**Definition 1.7.1.** Eine **Trennschmelzfakofaserung** über einer Trennkategorie  $\mathcal{T}$  ist ein Datum aus einer Trennfaserung  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  und einer Schmelzkofaserung  $\bar{p} : \bar{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{T}^{\text{opp}}$ , die nach Zurückholen auf die diskretisierte Basis  $\mathcal{T}^\delta$  übereinstimmen,  $\mathcal{M}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \bar{\mathcal{M}}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \forall X \in \mathcal{T}$ , sowie ausgezeichneten Bijektionen

$$i : \mathcal{M}_f^\times(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{M}}_{f^\circ}^\times(\mathcal{G}_1 \vee \dots \vee \mathcal{G}_r, \mathcal{F})$$

zwischen den Mengen der jeweiligen kartesischen Trennungen beziehungsweise kokartesischen Verschmelzungen, die verträglich sind mit Multiverknüpfung und die im Fall  $f = \text{id}_X$  zum Invertieren von Isomorphismen der Faser spezialisieren.

*Beispiele 1.7.2.* Im Fall einer gewöhnlichen Kategorie in der Basis spezialisiert das zu einer Fakofaserung im Sinne von [TG] 8.4.4. Im Fall der terminalen Trennkategorie in der Basis spezialisiert das zum Begriff einer Trennschmelzkategorie im Sinne von [TSK] 1.4.2.

**1.7.3 (Ergänzung zu Trennschmelzfakofaserung).** Wie in den Spezialfällen der eben beschriebenen Beispiele besitzt auch im allgemeinen jede Trennfaserung und jede Schmelzkofaserung eine bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Ergänzung zu einer Trennschmelzfakofaserung. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  notieren wir den Schmelzkofaserungsanteil dieser Ergänzung

$$\mathcal{M}^{\text{sk}} \rightarrow \mathcal{T}^{\text{opp}}$$

Für eine Trennung  $\psi : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  in  $\mathcal{T}$  werden dann Verschmelzungen in der Schmelzkofaserung  $\mathcal{M}^{\text{sk}}$  über der opponierten Verschmelzung  $\psi^\circ : Y_1 \vee \dots \vee Y_r \rightarrow X$  in  $\mathcal{T}^{\text{opp}}$  gegeben durch die Vorschrift

$$\mathcal{M}_{\psi^\circ}^{\text{sk}}(\mathcal{G}_1 \vee \dots \vee \mathcal{G}_r, \mathcal{F}) := \mathcal{M}_X(\psi^\dagger(\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r), \mathcal{F})$$

mit  $\psi^\dagger$  dem Rückzug in unserer Trennfaserung. Die Definition der Multiverknüpfungen geht analog zu [TG] 8.4.9. Gegeben eine Schmelzkofaserung  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{S}$  notieren wir umgekehrt den Trennfaserungsanteil der Ergänzung zu einer Trennschmelzfakofaserung als

$$\mathcal{N}^{\text{tf}} \rightarrow \mathcal{S}^{\text{opp}}$$

Wir nennen wie in den bereits betrachteten Spezialfällen [TG] 8.4.9 und [TSK] 1.4.4 diese Konstruktionen das **Invertieren** einer Trennfaserung beziehungsweise Schmelzkofaserung zu einer Schmelzkofaserung beziehungsweise Trennfaserung über der opponierten Basis.

1.7.4. Gegeben eine Trennschmelzfakofaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  ist in offensichtlicher Weise auch  $\mathcal{M}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{T}^{\text{opp}}$  eine Trennschmelzfakofaserung. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  betrachten wir ihre Erweiterung zu einer Trennschmelzfakofaserung und erhalten eine weitere Trennfaserung

$$\mathcal{M}^{\text{otf}} := (\mathcal{M}^{\text{opp}})^{\text{tf}} \rightarrow \mathcal{T}$$

durch das Opponieren gefolgt vom Invertieren. Wir nennen diese Trennfaserung die **oppinvertierte Trennfaserung**. Sie verallgemeinert sowohl die Oppinverse einer Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen als auch die Oppinverse eines Faserfunktors. Explizit werden ihre Trennungen über einer Trennung  $\psi : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  in  $\mathcal{T}$  gegeben durch

$$\mathcal{M}_\psi^{\text{otf}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) := \mathcal{M}_X(\psi^\dagger(\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r), \mathcal{F})$$

Gegeben eine Schmelzkofaserung  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{S}$  konstruieren wir analog die **oppinvertierte Schmelzkofaserung**

$$\mathcal{N}^{\text{osk}} := (\mathcal{N}^{\text{opp}})^{\text{sk}} \rightarrow \mathcal{S}$$

Quasi per definitionem haben wir ausgezeichnete Isomorphismen  $(\mathcal{M}^{\text{sk}})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\text{otf}}$  und  $(\mathcal{N}^{\text{tf}})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}^{\text{osk}}$ , die die Objekte festhalten.

*Beispiel 1.7.5.* Eine Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen ist nach 1.2.4 schmelzkogefasert über der terminalen Schmelzkategorie. Unsere invertierte Trennfaserung spezialisiert in diesem Fall zur invertierten Trennkategorie aus [TSK] 1.4.4.

*Beispiel 1.7.6.* Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  erinnern wir aus ?? unsere Familienfaserung  $\mathcal{C}/_{\text{Ens}} \rightarrow \text{Ens}$ . Ist  $\mathcal{C}$  eine Trennkategorie, so können wir  $\mathcal{C}/_{\text{Ens}}$  zu einer Trennkategorie  $\mathcal{C}/_{\wedge \text{Ens}}$  machen und unseren Funktor zu einem Trennfunktor in die banale Trennkategorie  $\wedge \text{Ens}$  der Mengen, indem wir eine Trennung  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow G_1 \wedge \dots \wedge G_r$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  von Mengen als eine Familie  $(\phi_x)_{x \in X}$  von Trennungen  $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow G_{1, f_1(x)} \wedge \dots \wedge G_{r, f_r(x)}$  erklären. Wir erhalten so einen Trennfunktor, den **Familientrennfunktor**

$$\mathcal{C}/_{\wedge \text{Ens}} \rightarrow \wedge \text{Ens}$$

Manchmal vereinfachen wir hier auch die Notation zu  $\mathcal{C}/_{\text{Ens}} \rightarrow \wedge \text{Ens}$  oder zu  $\mathcal{C}/_{\text{Ens}} \rightarrow \text{Ens}$ . Besitzt  $\mathcal{C}$  stabil universelle Trennungen, so ist das sogar eine Trennfaserung, die **Familientrennfaserung**. Kartesisch sind dabei genau alle Familien  $(\phi_x)$  aus universellen Trennungen. In diesem Fall haben wir einen natürlichen Isomorphismus

$$(\mathcal{C}/_{\wedge \text{Ens}})^{\text{otf}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{otf}})_{/\wedge \text{Ens}}$$

von Trennfaserungen über  $\wedge \text{Ens}$  zwischen der Oppinvertierten Familientrennfaserung und der Familientrennfaserung der oppinvertierten Trennkategorie.

*Beispiel 1.7.7.* Die Mengengarbentrennfaserung 1.2.6 und die Mengengarbenoptrennfaserung 1.2.7 sind zueinander oppinvers, in Formeln und unter etwas sorgloser Verwendung des Gleichheitszeichens haben wir also

$$\text{Ens}_{//\text{Top}} = (\text{Ens}_{/\text{Top}})^{\text{otf}}$$

Ich finde die Mengengarbentrennfaserung anschaulicher, aber die Mengengarbenoptrennfaserung ist algebraisch einfacher und läßt sich leichter verallgemeinern. Im Fall der Optrennfaserung der abelschen Garben kann ich auch für die oppinvertierte Trennfaserung keine Anschauung mehr anbieten, die mir weiterhelfen würde.

*Beispiel 1.7.8 (Verschiedene Trennungen im diskreten Fall).* Wir spezialisieren das Vorhergehende auf den Fall diskreter Räume. Eine Mengengarbe  $\mathcal{A}$  auf einem diskreten Raum  $X$  ist eine durch  $X$  indizierte Mengenfamilie  $(\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ . Gegeben Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : X \rightarrow Z$  sowie Mengengarben  $\mathcal{B}$  auf  $Y$  und  $\mathcal{C}$  auf  $Z$  ist eine Garbenoptrennung  $\phi \in \text{Ens}_{//(f,g)}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$  über der Zweitrennung  $(f, g) : X \rightarrow Y \wedge Z$  ein Datum  $(\phi_x)_{x \in X}$  bestehend aus Abbildungen  $\phi_x : \mathcal{B}_{f(x)} \times \mathcal{C}_{g(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$  für alle  $x \in X$ . Dahingegen ist eine Garbentrennung  $\psi \in \text{Ens}_{/(f,g)}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$  ein Datum  $(\psi_x)_{x \in X}$  bestehend aus Abbildungen  $\psi_x : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{B}_{f(x)} \times \mathcal{C}_{g(x)}$  für alle  $x \in X$ . Das kann auch als ein Spezialfall unserer Erkenntnisse in 1.7.6 verstanden werden.

**1.7.9 (Faserweises Dualisieren als Trennfunktor).** Gegeben sei eine Trennfaserung zu einer banalen Trennkategorie  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  derart, daß alle Objekte der opponierten Fasern dualisierbar sind. Wir behaupten, daß dann das faserweise Dualisieren einen Trennfunktor

$$\mathcal{M}^{\text{otf}} \rightarrow \mathcal{M}^{\text{f}}$$

induziert wie folgt. Ein Trennung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  der Basis in  $\mathcal{M}^{\text{otf}}$  ist wie in 1.7.4 ausgeführt ein Element von

$$\mathcal{M}_{\psi}^{\text{otf}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) := \mathcal{M}_X(\psi^{\dagger}(\mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r), \mathcal{F})$$

In unserem speziellen Fall haben wir also Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\psi}^{\text{otf}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r) & & \mathcal{M}_{\psi}^{\text{tf}}(\mathcal{F}^{\vee}, \mathcal{G}_1^{\vee} \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r^{\vee}) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{M}_X(f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{G}_r, \mathcal{F}) & & \mathcal{M}_{/X}(f_1^*(\mathcal{G}_1^{\vee}) \otimes \dots \otimes f_r^*(\mathcal{G}_r^{\vee}), \mathcal{F}^{\vee}) \\ \parallel & & \uparrow \\ \mathcal{M}_{/X}(\mathcal{F}, f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{G}_r) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{/X}((f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{G}_r)^{\vee}, \mathcal{F}^{\vee}) \end{array}$$

mit dem Dualisieren in der unteren Horizontale und Vorschalten der natürlichen Morphismen [TSK] 1.3.19 vom Tensorprodukt der Dualen zum Dualen des Tensorprodukts und der natürlichen Morphismen 1.5.11 vom Rückzug des Dualen zum Dualen des Rückzugs in der rechten Vertikale. Man kann nun zeigen, daß diese Vorschrift auf Trennungen in der Tat einen Trennfunktor induziert wie behauptet. Im Spezialfall, daß  $\mathcal{T}$  die finale Trennkategorie ist, haben wir das bereits in [TSK] 1.5.23 in Gestalt eines Dualisierungsfunktors  $\mathcal{M}^t \rightarrow \mathcal{M}^{ot}$  für eine Trennschmelzkategorie mit Multihom  $\mathcal{M}$  kennengelernt. In der dort gegebene Fassung geschieht das Dualisieren in  $\mathcal{M}^s$  und in der hier gegebene Fassung in den Fasern der Schmelzkofaserung  $\mathcal{M}^{osk}$ .



## 2 Derivierter Trennrückzug

### 2.1 Lokalisierung von Kofaserungen

2.1.1. Ich erinnere daran, daß sich nach [TD] 1.3.9 bei der Lokalisierung einer Kategorie nach einem Rechtsoresystem  $S$  die Morphismen der Lokalisierung als Äquivalenzklassen von Rechtsbrüchen  $s^{-1} \circ f$  mit  $s \in S$  beschreiben lassen, bei denen also der Zähler rechts steht.

**Definition 2.1.2.** Sei  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor. Unter einem **faserweisen Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$**  verstehen wir ein multiplikatives System  $S$  in  $\mathcal{C}$ , das über den Identitäten der Basis liegt derart, daß für alle  $X \in \mathcal{B}$  die Menge  $S_X$  der  $S$ -Morphismen über  $\text{id}_X$  ein Rechtsoresystem der Faser  $\mathcal{C}_X$  ist.

2.1.3 (**Diskussion der Terminologie**). Man beachte, daß in diesem Zusammenhang der Zusatz „faserweise“ die Bedingung „Rechtsoresystem“ sowohl verschärft als auch abschwächt. Will ich besonders betonen, daß der Begriff „Rechtsoresystem“ nicht nur faserweise gemeint ist, so spreche ich von einem **globalen Rechtsoresystem**.

2.1.4. Analog erklären wir die Begriffe eines **faserweisen Linksoresystems** und eines **faserweisen Oresystems**.

2.1.5 (**Lokalisierung einer Faser als Faser der Lokalisierung**). Sei ein Funktor  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  gegeben und sei  $S$  ein globales Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  über den Identitäten von  $\mathcal{B}$ . Gegeben  $X \in \mathcal{B}$  ist die Menge  $S_X$  der  $S$ -Morphismen über  $\text{id}_X$  dann offensichtlich ein Linksoresystem in der Faser  $\mathcal{C}_X$  und für den auf der Lokalisierung induzierten Funktor  $p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen von Kategorien

$$S_X^{-1}\mathcal{C}_X \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C})_X$$

zwischen der Lokalisierung der Faser und der Faser der Lokalisierung. Das folgt direkt aus der Interpretation der Morphismen der Lokalisierung als Äquivalenzklassen von Brüchen. Es gilt genauso für Rechtsoresysteme.

2.1.6 (**Rückzug von Funktoren**). Gegeben Funktoren  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  zu derselben Zielkategorie bezeichne

$$\mathcal{C} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$$

das **Faserprodukt in der Kategorie Cat der Kategorien**. Explizit können wir das Faserprodukt  $\mathcal{C} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$  als Unterkategorie der Produktkategorie konstruieren wie folgt: Als Objekte nehmen wir alle Paare  $(C, D) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$  mit  $F(C) = G(D)$  und als Morphismen  $(C, D) \rightarrow (C', D')$  alle Paare  $(u, v)$  von Morphismen

mit  $F(u) = G(v)$ . Je nach Kontext verwenden wir für dies Faserprodukt auch die Notation  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  und nennen  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}$  den **zurückgezogenen Funktor**. Im Fall der durch ein Objekt  $X \in \mathcal{B}$  gegebenen Einbettung  $\text{cat} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$  der terminalen Kategorie spezialisiert  $\mathcal{C}_{\text{cat}}$  zu unserer Faser  $\mathcal{C}_X$ .

**2.1.7 (Rückzug erhält Faserungen und Kofaserungen).** Seien Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  gegeben. Ist ein Morphismus  $u$  in  $\mathcal{C}$  kartesisch beziehungsweise kokartesisch für  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ , so ist auch jeder Morphismus der Gestalt  $(u, v)$  im Faserprodukt kartesisch beziehungsweise kokartesisch für  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}$ . Ist  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung beziehungsweise Kofaserung und  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  ein beliebiger Funktor, so ist auch  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}$  eine Faserung beziehungsweise Kofaserung.

**2.1.8 (Lokalisierung und Rückzug).** Sei ein Funktor  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  gegeben und sei  $S$  ein globales Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  über den Identitäten von  $\mathcal{B}$ . Gegeben ein Funktor  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$  sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen

$$S_{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{C}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} (S^{-1} \mathcal{C})_{\mathcal{U}}$$

zwischen der Lokalisierung des Rückzugs und dem Rückzug der Lokalisierung mit der Notation  $S_{\mathcal{U}}$  für das Urbild von  $S$  unter  $\mathcal{C}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{C}$ . Das folgt direkt aus der Interpretation der Morphismen der Lokalisierung als Äquivalenzklassen von Brüchen und gilt ganz genauso auch für globale Rechtsoresysteme.

**Satz 2.1.9 (Lokalisieren einer Kofaserung nach globalem Rechtsoresystem).** Seien  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Kofaserfunktor und  $S$  ein globales Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$  über den Identitäten der Basis. So ist auch der auf der Lokalisierung induzierte Funktor ein Kofaserfunktor

$$p_S : S^{-1} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$$

und jeder kokartesische Morphismus in  $\mathcal{C}$  bleibt kokartesisch in  $S^{-1} \mathcal{C}$ .

*Beweis.* Um das zu zeigen beachten wir für jeden Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis sowie Objekte  $\mathcal{F}$  über  $X$  und  $\mathcal{G}$  über  $Y$  die natürlichen Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} (S^{-1} \mathcal{C})_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & & (S^{-1} \mathcal{C})_Y(f_{\dagger} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ \downarrow \wr & & \uparrow \wr \\ \text{colf}_{\mathcal{G} \xrightarrow{S} \mathcal{G}'} \mathcal{C}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}') & \xrightarrow{\sim} & \text{colf}_{\mathcal{G} \xrightarrow{S} \mathcal{G}'} \mathcal{C}_Y(f_{\dagger} \mathcal{F}, \mathcal{G}') \end{array}$$

Der Satz folgt. □

**Lemma 2.1.10 (Faserweise als globale Rechtsoresysteme).** Seien  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Kofaserung und  $S$  ein faserweises Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$ . Können wir für jeden Morphismus der Basis einen Vorschub wählen, der  $S$  stabilisiert, so ist  $S$  sogar ein globales Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$ .

2.1.11. In der Situation von Lemma 2.1.10 können wir insbesondere unsere Proposition 2.1.9 anwenden und erhalten durch Lokalisieren eine Kofaserung  $p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit der Eigenschaft, daß kokartesische Morphismen in  $\mathcal{C}$  kokartesisch bleiben in  $S^{-1}\mathcal{C}$ .

*Beweis.* Jeder Linksbruch läßt sich zu einem Rechtsbruch umschreiben, das zeigt das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F} & \longrightarrow & f_{\dagger}\mathcal{F} & \dashrightarrow & \mathcal{G}' \\
 \uparrow S & & \uparrow S & & \uparrow S \\
 \mathcal{F}' & \longrightarrow & f_{\dagger}\mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{G}
 \end{array}$$

zeigt. Je zwei Morphismen, die durch Vorschalten eines  $S$ -Morphismus egalisiert werden, können auch durch Nachschalten eines  $S$ -Morphismus egalisiert werden, das zeigt das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F} & \longrightarrow & f_{\dagger}\mathcal{F} & \rightrightarrows & \mathcal{G} \\
 \uparrow S & & \uparrow S & & \downarrow S \\
 \mathcal{F}' & \longrightarrow & f_{\dagger}\mathcal{F}' & & \mathcal{G}'
 \end{array}$$

Das Lemma ist bewiesen. □

2.1.12 (**Opponierete Aussagen zur Lokalisierung von Faserungen**). Ist  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung und  $S$  ein globales Linksoresystem in  $\mathcal{C}$ , so erhalten wir dual zu 2.1.9 durch Lokalisieren wieder eine Faserung  $p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit der Eigenschaft, daß kartesische Morphismen in  $\mathcal{C}$  kartesisch bleiben in  $S^{-1}\mathcal{C}$ . Ist  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung und  $S$  ein faserweises Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  und können wir für jeden Morphismus der Basis einen Rückholfunktor wählen, der unser faserweises Linksoresystem  $S$  stabilisiert, so ist  $S$  opponiert zu 2.1.10 ein globales Linksoresystem in  $\mathcal{C}$  und wir erhalten durch Lokalisieren wieder eine Faserung  $p_S : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit der Eigenschaft, daß kartesische Morphismen in  $\mathcal{C}$  kartesisch bleiben in  $S^{-1}\mathcal{C}$ .

*Vorschau 2.1.13.* Die Lokalisierung von Kofaserungen nach faserweisen Linksoresystemen beziehungsweise von Faserungen nach faserweisen Rechtssoresystemen ist delikater. In 2.3.6 und 2.3.9 diskutieren wir Annahmen, unter denen in diesen Fällen die Lokalisierung wieder eine Kofaserung ist und die Linksderivierten der Vorschübe die Vorschübe der lokalisierten Kofaserung sind.

## 2.2 Die derivierte Garbenopfaserung

2.2.1. Wir erinnern aus [TG] 6.2.17 die Bifaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$ , die wir die Garbenopfaserung genannt hatten und deren Fasern  $\text{Ab}_{//X}$  opponiert sind zu den

üblichen Kategorien  $\text{Ab}/X$  von abelschen Garben auf  $X$ . Dazu bilden wir in offensichtlicher Weise Funktoren  $\text{Ket}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$  und  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$  mit Fasern  $\text{Ket}(\text{Ab}_{//X})$  beziehungsweise  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//X})$ . Der erste dieser Funktoren ist offensichtlich ein Faserfunktoren mit den auf Komplexen induzierten Funktoren  $f^{*\text{opp}}$  als Rückholfunktoren. Für den zweiten gilt dasselbe, gegeben  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\mathcal{F} \in \text{Ket}(\text{Ab}_{//X})$  sowie  $\mathcal{G} \in \text{Ket}(\text{Ab}_{//Y})$  erhalten wir sogar einen Isomorphismus

$$\text{Ab}_{//X}(\mathcal{F}, f^{*\text{opp}}\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

von in offensichtlicher Weise erklärten Komplexen abelscher Gruppen und damit auch einen Isomorphismus auf deren nullter Kohomologie. In Bezug auf den Faserfunktoren  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$  bilden nun die Quasiisomorphismen über den Identitäten der Basis ein faserweises Oresystem, das unter allen Rückholfunktoren stabil ist. Nach 2.1.10 ist es damit sogar ein globales Linksoresystem in  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}})$ . Wenn wir danach lokalisieren, erhalten wir nach 2.1.9 einen Faserfunktoren

$$\text{Der}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top}$$

mit Fasern  $\text{Der}(\text{Ab}_{//X})$  und Rückholfunktoren  $f^{*\text{opp}}$ . Wir nennen ihn die **derivierte Garbenopfaserung**.

2.2.2. Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Der Rückholfunktor der Faserung durch Homotopiekomplexe  $f_{\text{Hot}}^{*\text{opp}} : \text{Hot}(\text{Ab}_{//Y}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{//X})$  hat den Linksadjungierten  $f_*^{\text{Hot opp}} : \text{Hot}(\text{Ab}_{//X}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{//Y})$ . Der Rückholfunktor der derivierten Garbenopfaserung ist nach unseren Überlegungen in 2.1.5 der Rechtsderivierte

$$f_{\text{Der}}^{*\text{opp}} = R(Qf_{\text{Hot}}^{*\text{opp}}) = Rf_*^{\text{opp}} : \text{Der}(\text{Ab}_{//Y}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{//X})$$

Das  $Q$  bezeichnet hier den Funktor von der Homotopiekategorie in die derivierte Kategorie, von dem wir in [TD] 3.4.2 bereits vereinbart hatten, daß er im vorliegenden Kontext zusammen mit  $\text{Hot}$  auch aus der Notation weggelassen werden darf. Dessen Linksadjungierter ist dann nach [TG] 6.3.13, wo immer er existiert, ein Vorschubfunktoren unserer Faserung, und der Transportmorphismus dorthin ist immer noch nach [TG] 6.3.13 sogar stark kokartesisch. Nach [TD] 3.2.27 ist nun der Derivierte

$$L(Qf_*^{\text{Hot opp}}) : \text{Der}(\text{Ab}_{//X}) \dashrightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{//Y})$$

solch ein Linksadjungierter, wo immer dieser Derivierte in unserem zahmen Sinne existiert. Wir zeigen in [TD] 3.6.10, daß das immer der Fall ist, aber dazu muß man sich durch Kardinalitätsargumente quälen. Unser Derivierter existiert jedoch offensichtlich auf  $\text{Der}^-(\text{Ab}_{//X})$  und ist per definitionem der opponierte Funktoren zum Rechtsderivierten  $Rf_*^+ : \text{Der}^+(\text{Ab}_{//X}) \rightarrow \text{Der}^+(\text{Ab}_{//Y})$ , von dem wir bereits

wissen, daß man ihn durch injektive Auflösungen berechnen kann. Insgesamt erhalten wir, daß unser Funktor eine Bifaserung

$$\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{//\mathrm{Top}}) \rightarrow \mathrm{Top}$$

induziert mit Fasern  $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})^{\mathrm{opp}}$ , Vorschubfunktoren  $(Rf_*)^{\mathrm{opp}}$  und Rückhol-funktoren  $(Lf^*)^{\mathrm{opp}}$ . Damit haben wir die ersten zwei der sechs Funktoren des Sechs-Funktor-Formalismus konstruiert in Gestalt adjungierter Paare  $(f^*, f_*)$  und haben deren Beziehungen untereinander beschrieben.

2.2.3. Ist speziell  $f = \mathrm{fin}_X : X \rightarrow \mathrm{top}$  die konstante Abbildung und  $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$  ein Komplex abelscher Garben auf  $X$ , so setzen wir

$$\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q \mathrm{fin}_{X*} \mathcal{F}$$

Diese Gruppe heißt die  $q$ -te **Hyperkohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$** .

## Übungen

*Übung 2.2.4.* Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  ein Komorphismus abelscher Garben darüber alias ein Morphismus  $f^* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ . Die Einheit der Adjunktion  $\mathcal{G} \rightarrow f_* f^* \mathcal{G}$  induziert dann einen Morphismus

$$\mathrm{fin}_{Y*} \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{fin}_{Y*} f_* f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{fin}_{X*} f^* \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{fin}_{X*} \mathcal{F}$$

und so einen Morphismus  $\mathbb{H}^q(Y; \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{H}^q(X; \mathcal{F})$ . Man zeige, daß er unser Rückzug auf der Garbenkohomologie aus [TG] 4.3.7 ist.

## 2.3 Lokalisieren durch Anpassung

**Definition 2.3.1.** Unter einer **vollen Unterkofaserung** einer Kofaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  verstehen wir eine volle Unterkategorie  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  derart, daß wir für jeden Morphismus der Basis einen Vorschubfunktor unserer Kofaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  wählen können, der  $\mathcal{D}$  stabilisiert.

**Definition 2.3.2.** Seien  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Kofaserfunktor und  $S$  ein faserweises Linksoresystem in  $\mathcal{C}$ . Eine **volle Unterkofaserung**  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  heiße eine **Rechtsanpassung für  $S$** , wenn (1) die Menge  $T$  aller  $S$ -Morphismen aus  $\mathcal{D}$  ein faserweises Oresystem in  $\mathcal{D}$  bildet, wenn (2) Vorschubfunktoren  $f_{\dagger}$  so gewählt werden können, daß sie unsere Menge  $T$  stabilisieren, und wenn es (3) für jedes  $C \in \mathcal{C}$  einen  $S$ -Morphismus  $D \rightarrow C$  gibt mit  $D \in \mathcal{D}$ .

2.3.3. Opponiert erklären wir für  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  einen Faserfunktor und  $S$  ein faserweises Rechtsoresystem in  $\mathcal{C}$  den Begriff einer **Linksanpassung**.

*Beispiel 2.3.4.* Ganz  $\mathcal{C}$  ist eine Rechtsanpassung für eine Kofaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit faserweisem Linksoresystem  $S$  genau dann, wenn  $S$  ein faserweises Oresystem ist und die Bedingung 2.1.10 erfüllt, die sicherstellt, daß  $S$  sogar zusätzlich ein globales Rechtsoresystem ist.

*Beispiel 2.3.5.* Wir betrachten als Basis  $\mathcal{B}$  die Kategorie aller Mengen der Gestalt  $\{1, \dots, n\}$  mit  $n \geq 0$  und monoton wachsenden Abbildungen als Morphismen. Wir halten einen topologischen Raum fest und nehmen als Objekte von  $\mathcal{C}$  über  $\{1, \dots, n\}$  Tupel  $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  von Komplexen abelscher Garben auf unserem festen topologischen Raum und als Morphismen über einer monoton wachsenden Abbildung entsprechende Tupel von multiadditiven Morphismen von Komplexen abelscher Garben. Für den Vorschub unter der konstanten Abbildung  $c : \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$  etwa haben wir dann natürliche Isomorphismen

$$c_{\dagger}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$$

Zu dieser Kofaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  betrachten wir das faserweise Linksoresystem  $S$  aller Tupel von Quasiisomorphismen in den Fasern. Es ist sogar ein faserweises Oresystem, ist jedoch nicht stabil unter Vorschub und wir können deshalb 2.1.10 und 2.1.9 nicht anwenden, um die Lokalisierung zu beschreiben. Wir finden jedoch eine Rechtsanpassung in Gestalt aller Tupel von Komplexen flacher Garben. Die Bedingung (2) an eine Rechtsanpassung läuft dabei auf die Erkenntnis [TD] 3.9.11 hinaus, daß das Tensorieren mit einem Komplex flacher Garben Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen macht.

**Satz 2.3.6 (Lokalisierung durch Rechtsanpassung).** *Seien  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Kofaserfunktorkomplex und  $S$  ein faserweises Linksoresystem in  $\mathcal{C}$ . Gibt es eine Rechtsanpassung  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  für  $S$ , so gilt:*

1. *Der von  $p$  induzierte Funktor  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ist eine Kofaserung;*
2. *Die Einbettungen liefern Isomorphismen  $S_{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{C}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$  für jeden Funktor  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$  in die Basis;*
3. *Für jeden Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis ist jedes Objekt von  $\mathcal{D}_X$  als Objekt von  $\mathcal{C}_X$  linksentfaltet in Bezug auf  $S_X$  für den Vorschubfunktorkomplex gefolgt von der Lokalisierung  $Qf_{\dagger} : \mathcal{C}_X \rightarrow S_Y^{-1}\mathcal{C}_Y$ ;*
4. *Genau dann ist  $E \in \mathcal{C}_X$  ein  $Qf_{\dagger}$ -linksentfaltetes Objekt, wenn der Transportmorphismus  $E \rightarrow f_{\dagger}E$  in der Lokalisierung  $S^{-1}\mathcal{C}$  kokartesisch bleibt.*

*Vorschau 2.3.7.* Einen etwas stärkeren Satz über Lokalisierung durch „lokale Rechtsanpassung“ ergänzen wir in ???. Den Spezialfall der Lokalisierung einer Kofaserung nach einem faserweisen Rechtsoresystem haben wir bereits in 2.1.11 diskutiert.

*Ergänzung 2.3.8.* Ich wüßte gerne, ob dieser Satz aus allgemeinen Aussagen über Modellkategorien gefolgert werden kann.

**2.3.9 (Vorschübe als derivierte Funktoren).** Betrachten wir in der Situation des Satzes einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis und eine  $Qf_{\dagger}$ -Entfaltung  $E \rightarrow C$  von  $C \in \mathcal{C}_X$ , kürzen den Linksderivierten mit  ${}^L f_{\dagger} := L(Qf_{\dagger})$  ab, bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & f_{\dagger}E & \xleftarrow{\sim} & {}^L f_{\dagger}E \\ \downarrow s & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ C & \longrightarrow & f_{\dagger}C & \longleftarrow & {}^L f_{\dagger}C \end{array}$$

und lassen darin  $f_{\dagger}C$  weg, so ist die Komposition in  $S^{-1}\mathcal{C}$  der restlichen Morphismen nach unserem Satz ein kokartesischer Morphismus

$$C \rightarrow {}^L f_{\dagger}C$$

in Bezug auf die Kofaserung  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ . In der Tat ist sie eine Komposition von Isomorphismen über Identitäten mit dem nach Teil 4 unseres Satzes kokartesischen Morphismus dazwischen.

*Beispiel 2.3.10.* In der Situation von Beispiel 2.3.5 liefert uns dieser Satz eine Kofaserung über derselben Basis mit Tupeln  $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  von Objekten der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf unserem festen Raum als Fasern und natürlichen Isomorphismen  $c_{\dagger}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$  im Fall von Komplexen flacher Garben.

*Beweis.* Zunächst einmal folgt (3) direkt aus der Definition einer Rechtsanpassung. Bezeichne nun  $T$  die Menge der  $S$ -Morphismen in  $\mathcal{D}$ . Wir bemerken, daß  $T$  nach 2.1.10 ein globales Rechtssoresystem in  $\mathcal{D}$  ist. Hierfür verwenden wir unsere Annahme, daß  $T$  ein faserweises Rechtssoresystem in  $\mathcal{D}$  ist. Weiter bemerken wir, daß nach 2.1.11 der induzierte Funktor  $T^{-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Kofaserfunktors ist und daß kokartesische Morphismen aus  $\mathcal{D}$  kokartesisch bleiben in der Lokalisierung  $T^{-1}\mathcal{D}$ . Schließlich induziert nach 2.1.5 die Einbettung für alle  $X \in \mathcal{B}$  einen Isomorphismus  $T_X^{-1}\mathcal{D}_X \xrightarrow{\sim} (T^{-1}\mathcal{D})_X$  und nach [TD] 1.3.18 sind die auf den Lokalisierungen der Fasern induzierten Funktoren Äquivalenzen  $T_X^{-1}\mathcal{D}_X \xrightarrow{\sim} S_X^{-1}\mathcal{C}_X$ . Alle Objekte von  $\mathcal{D}_X$  sind also  $S_X$ -linksentfaltet für  $Qf_{\dagger} : \mathcal{C}_X \rightarrow S_Y^{-1}\mathcal{C}_Y$ . Wir behaupten nun (5), daß der von der Einbettung induzierte Funktor eine Äquivalenz

$$T^{-1}\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} S^{-1}\mathcal{C}$$

ist und zeigen zunächst, wie aus dieser Erkenntnis die restlichen Aussagen (1), (2), (4) des Satzes folgen. Mit  $T^{-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  ist dann auch  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine

Kofaserung, was Teil (1) unseres Satzes zeigt. Um (2) zu zeigen, betrachten wir das kommutative Funktordiagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{D}_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\sim} & (T^{-1} \mathcal{D})_{\mathcal{U}} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ S_{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{C}_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & (S^{-1} \mathcal{C})_{\mathcal{U}} \end{array}$$

Der obere Isomorphismus kommt von 2.1.8 her, die rechte Äquivalenz von der noch zu zeigenden Äquivalenz  $T^{-1} \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} S^{-1} \mathcal{C}$  und die linke Äquivalenz von derselben noch zu zeigenden Äquivalenz im Fall der Rechtsanpassung  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ . Um (4) abzuleiten, wählen wir einen  $S$ -Morphismus  $D \rightarrow E$  mit  $D \in \mathcal{D}_X$  und betrachten mit einer  $T$  und insbesondere  $\mathcal{D}$  stabilisierenden Wahl von  $f_{\dagger}$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & f_{\dagger} D \\ \downarrow s & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & f_{\dagger} E \end{array}$$

Da nach dem Anfang unseres Beweises der Transportmorphismus  $D \rightarrow f_{\dagger} D$  kokartesisch ist für  $T^{-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ , ist unter unserer Annahme (5) die untere Horizontale kokartesisch für  $S^{-1} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  genau dann, wenn die rechte Vertikale einen Isomorphismus in  $(S^{-1} \mathcal{C})_Y$  und nach (2) gleichbedeutend einen Isomorphismus in  $S_Y^{-1} \mathcal{C}_Y$  induziert. Da wir  $D$  bereits als  $S_X$ - $Qf_{\dagger}$ -linksentfaltet erkannt haben für  $Qf_{\dagger} : \mathcal{C}_X \rightarrow S_Y^{-1} \mathcal{C}_Y$ , ist das gleichbedeutend dazu, daß auch  $E$  linksentfaltet ist für  $S_X$  und  $Qf_{\dagger}$ . So folgt (4) und es bleibt nur noch zu zeigen, daß der offensichtliche Funktor

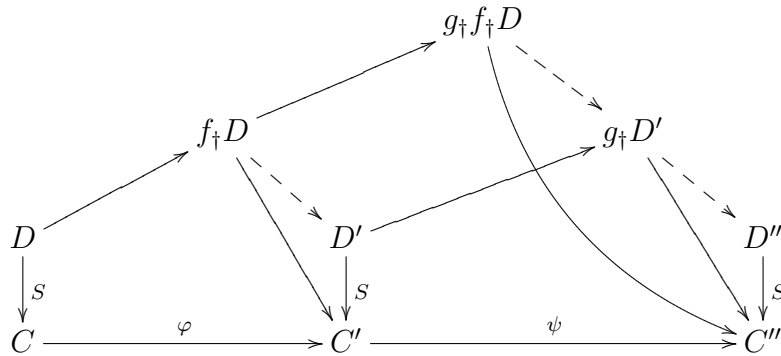
$$T^{-1} \mathcal{D} \rightarrow S^{-1} \mathcal{C}$$

eine Äquivalenz ist. Dazu konstruieren wir im folgenden einen quasiinversen Funktor. In einem ersten Schritt wählen wir für jedes  $X \in \mathcal{B}$  und jedes  $C \in \mathcal{C}_X$  ein Objekt  $D = D(C) \in \mathcal{D}_X$  zusammen mit einem  $S$ -Morphismus  $D \rightarrow C$ . Gegeben  $f : X \rightarrow X'$  und darüber ein Morphismus  $\varphi : C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$  erklären wir weiter einen Morphismus  $\tilde{\varphi} : D \rightarrow D'$  über  $f$  in  $T^{-1} \mathcal{D}$  durch das Diagramm

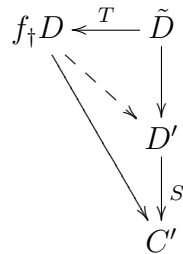
$$\begin{array}{ccccc} & & f_{\dagger} D & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ D & & & & D' \\ \downarrow s & & & & \downarrow s \\ C & \xrightarrow{\varphi} & & & C' \end{array}$$



Die durchgezogenen Pfeile bedeuten Morphismen in  $\mathcal{C}$ , der gestrichelte Pfeil dahingegen einen Morphismus in  $T_{X'}^{-1}\mathcal{D}_{X'}$ , der durch das Kommutieren des rechten Dreiecks in  $S_{X'}^{-1}\mathcal{C}_{X'}$  festgelegt wird. Jetzt prüfen wir, daß die Vorschrift  $C \mapsto D(C), \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  ein Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow T^{-1}\mathcal{D}$  ist. Dazu betrachten wir einen weiteren Morphismus  $g : X' \rightarrow X''$  und darüber  $\psi : C' \rightarrow C''$  und bilden das Diagramm



Dessen obere Raute entstehe durch Anwenden des Funktors  $g_+ : T_{X'}^{-1}\mathcal{D}_{X'} \rightarrow T_{X''}^{-1}\mathcal{D}_{X''}$  auf  $f_+D \dashrightarrow D'$  und verwendet unsere Erkenntnis vom Beginn des Beweises, daß  $T^{-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Kofaserung ist mit den Lokalisierungen der ursprünglichen Fasern als neuen Fasern, wobei der Funktor in die Lokalisierung kokartesischen Morphismen zu kokartesischen Morphismen macht. Man muß nun zeigen, daß der lange gekrümmte Pfeil, wenn er durch die universelle Eigenschaft von Vorschüben erklärt wird, auch das Dreieck rechts von ihm mit  $g_+D'$  als dritter Ecke in  $S_{X''}^{-1}\mathcal{C}_{X''}$  zum Kommutieren bringt. Beide durchgezogenen Pfeile faktorisieren über  $g_+C' \rightarrow C''$  und es reicht a fortiori zu zeigen, daß das entsprechende Dreieck mit der durch  $g_+C'$  ersetzten unteren Ecke in  $S_{X''}^{-1}\mathcal{C}_{X''}$  kommutiert. Das ist nun zwar fast das Bild unter  $g_+$  eines kommutativen Dreiecks in der Mitte, aber eben nur fast, da das Bild des gestrichelten Pfeils in Bezug auf die Kofaserung  $T^{-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  verstanden werden muß und die Bilder der durchgezogenen Pfeile in Bezug auf die Kofaserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ . Die behauptete Kommutativität folgt aber, wenn wir  $f_+D \dashrightarrow D'$  so als Bruch schreiben können, daß im Diagramm



die durchgezogenen Pfeile ein kommutatives Diagramm in  $\mathcal{C}$  bilden und  $\tilde{D}$  zu  $\mathcal{D}$  gehört. Dazu schreiben wir zunächst den gestrichelten Pfeil irgendwie als Linksbruch in  $T_{X'}^{-1}\mathcal{D}_{X'}$ , erweitern dann so zu einem Linksbruch in  $S_{X'}^{-1}\mathcal{C}_{X'}$ , daß das

Diagramm der durchgezogenen Pfeile kommutiert, und erweitern schließlich noch so, daß wir in der beschriebenen Situation landen. Auf dieses Diagramm können wir nun  $g_{\dagger}$  anwenden und so die behauptete Kommutativität des Dreiecks mit dem gebogenen Pfeil als Kante folgern. Das zeigt hinwiederum, daß unsere Vorschrift in der Tat ein Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow T^{-1}\mathcal{D}$  ist. Offensichtlich induziert er einen Funktor  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow T^{-1}\mathcal{D}$  und man sieht ohne weitere Schwierigkeiten, daß dieser Funktor der gesuchte Quasiinverse ist. Besonders bequem geht das unter Verwendung unserer Erkenntnis [TD] 1.2.12, daß jeder Lokalisierungsfunktor volllicht ist.  $\square$

## 2.4 Deriviertes Tensorieren von Moduln

**2.4.1 (Lokalisierung von Schmelzkategorien).** Seien  $\mathcal{M}$  eine Schmelzkategorie und  $S$  eine Menge von Einsverschmelzungen in  $\mathcal{M}$ . In 2.4.3 konstruieren wir ein Paar  $(\mathcal{M}_{\parallel S}, \text{can})$  bestehend aus einer Schmelzkategorie  $\mathcal{M}_{\parallel S}$  mitsamt einem Schmelzfunktor  $\text{can} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\parallel S}$  derart, daß gilt:

1. Alle Einsverschmelzung aus  $S$  werden unter  $\text{can}$  invertierbar in  $\mathcal{M}_{\parallel S}$ ;
2. Ist  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Schmelzfunktor, unter dem alle Einsverschmelzungen aus  $S$  invertierbar werden, so gibt es genau einen Schmelzfunktor  $\tilde{F} : \mathcal{M}_{\parallel S} \rightarrow \mathcal{N}$  mit  $F = \tilde{F} \circ \text{can}$ .

Natürlich ist ein derartiges Paar in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir erlauben uns deshalb den bestimmten Artikel und nennen  $(\mathcal{M}_{\parallel S}, \text{can})$  die **Lokalisierung von  $\mathcal{M}$  an  $S$** .

**2.4.2.** Gegeben eine Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  mit einer Menge  $S$  von Einsverschmelzungen weiß ich nicht, ob der offensichtliche Funktor  $(E\mathcal{M})_S \rightarrow E(\mathcal{M}_{\parallel S})$  von der Lokalisierung der zugehörigen einfachen Kategorie in die einfache Kategorie ihrer Lokalisierung als Schmelzkategorie im allgemeinen ein Isomorphismus von Kategorien sein muß. Das ist meine Motivation für die Notation der „Lokalisierung als Schmelzkategorie“ mit einem vorgestellten  $\parallel$ .

**2.4.3 (Lokalisierung von Schmelzkategorien, Existenz).** Um die Lokalisierung einer Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  an einer Menge  $S$  von Einsverschmelzungen zu konstruieren, betrachten wir in der zugehörigen Familienkategorie  $\mathcal{M}^{\vee}$  die Menge  $S^{\parallel}$  aller Morphismen, die Tupel von Einsverschmelzungen aus  $S$  sind und die insbesondere unter dem Indexfunktoren auf eine Bijektion geworfen werden, und bilden im Sinne von [TD] 1.2 die Lokalisierung  $\mathcal{M}_{S^{\parallel}}^{\vee}$  der Familienkategorie mit dem vom Indexfunktoren induzierten Funktor nach  $\text{Ens}$ . Es ist klar, daß das Vertupeln für je zwei Objektkleinfamilien  $A, B$  und jede Abbildung  $\varphi : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$  ihrer Indexmengen eine Bijektion

$$\prod_{j \in \bar{B}} \mathcal{M}_{S^{\parallel}}^{\vee}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j) \xrightarrow{\sim} (M_{S^{\parallel}}^{\vee})_{\varphi}(A, B)$$

induziert. Wir können also die Morphismen zu Einobjektfamilien als die Verschmelzungen unserer lokalisierten Schmelzkategorie nehmen und mittels obiger Bijektionen unsere Multiverknüpfungen erklären und erhalten so wieder eine Schmelzkategorie. Der Schmelzfunktor  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{i,S}$  mit der geforderten universellen Eigenschaft ist der offensichtliche.

**2.4.4 (Leerverschmelzungsfunktor der Lokalisierung).** Sei  $\mathcal{M}$  eine Schmelzkategorie und  $S$  eine Menge von Einsverschmelzungen. Macht der Leerverschmelzungsfunktor  $L$  alle Morphismen  $s \in S$  zu Bijektionen, so induziert er einen Schmelzfunktor  $\mathcal{M}_{i,S} \rightarrow \mathbf{kEns}$  wir erhalten einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen diesem Schmelzfunktor und dem Leerverschmelzungsfunktor der Lokalisierung  $\mathcal{M}_{i,S}$ .

**2.4.5.** In derselben Weise und formal durch Übergang zur opponierten Kategorie erklären wir auch die Lokalisierung einer Trennkategorie an einer Menge  $S$  von Einstrennungen.

**Satz 2.4.6.** *Für die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe  $\text{Hot}(\text{Ab})$  aus [TS] ?? und ihre Lokalisierung nach Quasiisomorphismen gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\text{E Hot}(\text{Ab}))_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} \text{E}(\text{Hot}(\text{Ab}))_{\text{qis}}$$

*Wir erklären die **Schmelzkategorie der derivierten abelschen Gruppen** als*

$$\text{Der}(\text{Ab}) := \text{Hot}(\text{Ab})_{\text{qis}}$$

2. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen, wir notieren sie  $\otimes = \otimes^L = \otimes_{\text{Der}(\text{Ab})}$ . Jede universelle Verschmelzung in  $\text{Hot}(\text{Ab})$  zwischen Komplexen abelscher Gruppen, von denen höchstens einer nicht aus flachen abelschen Gruppen besteht, bleibt universell in  $\text{Der}(\text{Ab})$ ;*
3. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  besitzt internes Hom. Ist  $A$  ein Komplex aus freien abelschen Gruppen oder  $B$  ein Komplex aus injektiven abelschen Gruppen, so stimmt das in der derivierten Kategorie gebildete Homobjekt  $A \rightleftarrows B$  mit dem in der Homotopiekategorie gebildeten Homobjekt überein;*
4. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  ist intern im Sinne von ??.*

**2.4.7 (Totale Homologie als Schmelzfunktor).** Wir erinnern den Schmelzfunktor der totalen Homologie  $\mathcal{H} : \text{Hot}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$  von der Schmelzkategorie

der Homotopiekomplexe in die Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen aus [TS] ?? . Er faktorisiert offensichtlich über die Lokalisierung nach Quasiisomorphismen und induziert so einen Schmelzfunktor

$$\mathcal{H} : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$$

2.4.8. Der Leerverschmelzungsfunktor  $\mathcal{H}^0$  von  $\text{Hot}(\text{Ab})$  macht Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen und induziert folglich einen Schmelzfunktor  $\mathcal{H}^0 : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{kEns}$ , der nach 2.4.4 kanonisch isomorph ist zum Leerverschmelzungsfunktor von  $\text{Der}(\text{Ab})$ . Er faktorisiert in offensichtlicher Weise über  $v : \text{Ab} \rightarrow \text{kEns}$  und versieht so die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  mit einer additiven Struktur.

*Beweis.* Wir wenden unseren Satz 2.3.6 über Lokalisierung durch Rechtsanpassung an auf den Indexfunktoren  $p : \text{Hot}(\text{Ab})^\vee \rightarrow \text{Ens}$ . Er ist ein Kofaserfunktoren, da die fraglichen Homotopiekomplexe nach [TS] ?? stabil universelle Verschmelzungen haben. Für diesen Funktoren bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach [TD] 2.5.3 ein **faserweises Oresystem**. Für dieses faserweise Oresystem der Quasiisomorphismen ist nun die Unterkategorie  $\text{Hot}(\text{flAb})^\vee$  aller Tupel von Homotopiekomplexen flacher abelscher Gruppen eine **Rechtsanpassung**, denn die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten bilden darin, immer noch nach [TD] 2.5.3, weiter ein **faserweises Oresystem**, das Tensorprodukt macht aus flachen abelschen Gruppen flache abelsche Gruppen, das Tensorprodukt von Quasiisomorphismen zwischen Komplexen flacher abelscher Gruppen ist nach [TD] 3.9.14 wieder ein Quasiisomorphismus, und nach [TD] 3.7.5 finden wir für jeden Komplex abelscher Gruppen einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Gruppen dorthin. Das Tensorprodukt mit einem Komplex flacher abelscher Gruppen macht nach [TD] 3.9.14 sogar einen beliebigen Quasiisomorphismus in  $\text{Ket}(\text{Ab})$  zu einem Quasiisomorphismus. Wir sehen so, daß der Funktoren  $A \otimes_{\text{Der}(\text{Ab})}$  des Darantensorieren in der Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  isomorph ist zu unserem derivierten Tensorieren  $L(A \otimes) : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$  aus [TD] 3.9.14, von dem wir bereits aus [TD] 3.9.17 wissen, daß er einen Rechtsadjungierten besitzt und wie dieser Rechtsadjungierte beschrieben werden kann.  $\square$

2.4.9 (**Dualität in den derivierten abelschen Gruppen**). Das Einsobjekt unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  ist  $\mathbb{I} = \mathbb{Z}[0]$ . Gegeben  $X \in \text{Ket}(\text{Ab})$  wird das derivierte Duale  $X^\vee \in \text{Der}(\text{Ab})$  also repräsentiert durch unseren Komplex  $\mathbb{D}X := (X \rightrightarrows_{\text{Ket}}(\mathbb{Q}[0] \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$  aus [TG] 5.1.13.

**Satz 2.4.10.** *Für die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe  $\text{Hot}(\text{Mod}_k)$  der Moduln über einem Krings  $k$  aus [TS] ?? gilt:*

1. Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus

$$(E \text{ Hot}(\text{Mod}_k))_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} E(\text{Hot}(\text{Mod}_k)_{\text{qis}})$$

Wir erklären die **Schmelzkategorie der derivierten  $k$ -Moduln** als

$$\text{Der}(\text{Mod}_k) := \text{Hot}(\text{Mod}_k)_{\text{qis}}$$

2. Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen, wir notieren sie  $\otimes = \otimes_k^L$ . Jede universelle Verschmelzung in  $\text{Hot}(\text{Mod}_k)$  zwischen Komplexen von  $k$ -Moduln, von denen höchstens einer nicht homotopieflach ist, bleibt universell in  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$ ;
3. Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  besitzt internes Hom. Ist  $A$  ein homotopieprojektiver oder  $B$  ein homotopieinjektiver Komplex, so stimmt das in der derivierten Kategorie gebildete Homobjekt  $A \rightleftarrows B$  mit dem in der Homotopiekategorie gebildeten Homobjekt überein;
4. Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  ist intern im Sinne von ??.

*Beweis.* Wir wenden unseren Satz 2.3.6 über Lokalisierung durch Rechtsanpassung an auf den Indexfunktor  $p : \text{Hot}(\text{Mod}_k)^\vee \rightarrow \text{Ens}$ . Er ist ein Kofaserfunktor, da die fraglichen Homotopiekomplexe nach [TS] ?? stabil universelle Verschmelzungen haben. Für diesen Funktor bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach [TD] 2.5.3 ein **faserweises Oresystem**. Für dieses faserweise Oresystem der Quasiisomorphismen ist nun die Unterkategorie  $\text{hflHot}(\text{Mod}_k)^\vee$  aller Tupel von homotopieflachen Komplexen eine **Rechtsanpassung**, denn die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten bilden darin, immer noch nach [TD] 2.5.3, weiter ein **faserweises Oresystem**, das Tensorprodukt macht aus homotopieflachen Komplexen homotopieflache Komplexe, das Tensorprodukt von Quasiisomorphismen zwischen homotopieflachen Komplexen ist nach [TD] 3.9.14 wieder ein Quasiisomorphismus, und nach [TD] 3.9.13 und [TD] 3.9.8 finden wir für jeden Komplex von Moduln einen Quasiisomorphismus von einem homotopieflachen Komplex dorthin. Wir sehen so, daß der Funktor  $A \otimes_{\text{Der}(\text{Mod}_k)}$  des Darantensorieren in der Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  isomorph ist zur Variante  $L(A \otimes_k) : \text{Der}(\text{Mod}_k) \rightarrow \text{Der}(\text{Mod}_k)$  unseres derivierten Tensorierens für beliebige Ringe aus [TD] 3.9.14, von dem wir bereits aus [TD] 3.9.17 wissen, daß er einen Rechtsadjungierten besitzt und wie dieser Rechtsadjungierte beschrieben werden kann.  $\square$

2.4.11. Der Leerverschmelzungsfunktor  $\mathcal{H}^0$  von  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  faktorisiert in offensichtlicher Weise über  $v : \text{Mod}_k \rightarrow k\text{Ens}$  und versieht so die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  mit einer  $k$ -linearen Struktur. Diese ist aber auch so schon offensichtlich.

## Übungen

*Übung 2.4.12.* Alle Objekte in  $\text{Der}(\text{Ab})$  mit endlich erzeugter totaler Kohomologie sind starr. Hinweis: [TD] 2.3.11. Ist allgemeiner  $k$  ein noetherscher Krings von endlicher homologischer Dimension, so sind alle Objekte von  $\text{Der}(\text{Mod}_k)$  mit endlich erzeugter totaler Kohomologie starr.

*Übung 2.4.13.* Gegeben ein Krings  $k$  ist in  $\text{Der}(k[T_1, \dots, T_r]\text{-Mod})$  das Duale  $k^\vee$  des Moduls  $k = k[T_1, \dots, T_r]/\langle T_1, \dots, T_r \rangle$  isomorph zu  $k[-r]$ . Hinweis: Koszul-Komplex [TG] 3.2.28.

## 2.5 Deriviertes Tensorieren von Garben

**2.5.1 (Schmelzkategorien von Komplexen).** Gegeben eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur  $\mathcal{M}$  erklären wir die Struktur einer Schmelzkategorie auf der Kategorie  $\text{Ket}(\mathcal{M}) = \text{Ket}_{\mathcal{M}}$  der Komplexe der zugrundeliegenden einfachen Kategorie analog wie im Fall von abelschen Gruppen. Eine Leerverschmelzung in einen Komplex  $C^*$  ist insbesondere ein Nullzykel des Komplexes der Leerverschmelzungen in die Objekte von  $C^*$  alias

$$\text{Ket}_{\mathcal{M}}(\gamma, C^*) = \mathcal{Z}^0 \mathcal{M}(\gamma, C^*)$$

Besitzt unsere Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  stabil universelle Verschmelzungen und endliche Koprodukte, so auch die Schmelzkategorien  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}^+$  und  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}^-$ ; universelle Zweiverschmelzungen landen in einem Komplex, der analog zum Tensorprodukt zweier Komplexe von abelschen Gruppen konstruiert wird, und der Shift [1] ist ein Signumsautomorphismus. Besitzt unsere Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  zusätzlich abzählbare Koprodukte, so zeigt man in derselben Weise, daß auch ganz  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  stabil universelle Verschmelzungen besitzt. Besitzt unsere Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  internes Hom, so zeigt man analog, daß auch  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}^b$  internes Hom besitzt. Besitzt unsere Schmelzkategorie zusätzlich abzählbare Produkte, so zeigt man wieder in derselben Weise, daß auch ganz  $\text{Ket}_{\mathcal{M}}$  internes Hom besitzt.

**2.5.2 (Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe).** Gegeben eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur  $\mathcal{M}$  erklären wir die Struktur einer Schmelzkategorie auf der Kategorie  $\text{Hot}(\mathcal{M}) = \text{Hot}_{\mathcal{M}}$  ihrer Homotopiekomplexe analog wie im Fall von abelschen Gruppen. Eine Leerverschmelzung in einen Komplex  $C^*$  ist in diesem Fall ein Element der nullten Kohomologie des Komplexes der Leerverschmelzungen in die Objekte von  $C^*$  alias ein Element von

$$\text{Hot}_{\mathcal{M}}(\gamma, C^*) = \mathcal{H}^0 \mathcal{M}(\gamma, C^*)$$

Gibt es in  $\mathcal{M}$  stabil universelle Verschmelzungen und abzählbare direkte Summen, so gibt es auch in  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$  stabil universelle Verschmelzungen und die übliche

triangulierte Struktur ist intern. Gibt es zusätzlich in  $\mathcal{M}$  internes Hom und abzählbare Produkte, so gibt es auch in  $\text{Hot}_{\mathcal{M}}$  internes Hom.

**2.5.3 (Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Garben).** Speziell erhalten wir so für jeden topologischen Raum  $X$  die Schmelzkategorien  $\text{Ket}(\text{Ab}_{/X})$  und  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  mit stabil universellen Verschmelzungen und internem Hom und die übliche triangulierte Struktur auf  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  ist intern. In  $\text{Ket}(\text{Ab}_{/X})$  sind die Leerverschmelzungen in einen Komplex die Nullzykel des Komplexes der globalen Schnitte, in  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  sind es die Elemente der nullten Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte. Das Einsobjekt ist jeweils die konstante Garbe  $\mathbb{Z}_X$  mit ihrem ausgezeichneten globalen Schnitt 1 beziehungsweise dessen Kohomologiekategorie als ausgezeichnete Leerverschmelzung.

**Satz 2.5.4 (Schmelzkategorie derivierter abelscher Garben).** *Gegeben ein topologischer Raum  $X$  gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\text{E Hot}(\text{Ab}_{/X}))_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} \text{E}(\text{Hot}(\text{Ab}_{/X}))_{\text{qis}}$$

*von der derivierten Kategorie der Kategorie der abelschen Garben in die einfache Kategorie der Lokalisierung der Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Garben nach Quasiisomorphismen. Für die so erhaltene Schmelzkategorie verwenden die beiden Notationen*

$$\text{Der}(\text{Ab}_{/X}) = \text{Der}_{/X}$$

2. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  besitzt stabil universelle Verschmelzungen, wir notieren sie  $\otimes^L$  oder auch abkürzend  $\otimes$ , und jede universelle Verschmelzung in  $\text{Hot}(\text{Ab}_{/X})$  zwischen Komplexen abelscher Garben, von denen höchstens einer nicht flach ist, bleibt darin universell;*
3. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  ist intern;*
4. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  besitzt internes Hom.*

**2.5.5 (Leerverschmelzungen als Hyperkohomologie).** Die universelle Leerverschmelzung in den Homotopiekomplex  $\mathbb{Z}_X[0]$  bleibt nach Teil 2 insbesondere universell in  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$ , denn der Komplex  $\mathbb{Z}_X[0]$  besteht aus flachen Garben. Wir erhalten so für jeden Garbenkomplex  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  eine Bijektion

$$\text{Der}_{/X}(\gamma, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{/X}(\mathbb{Z}_X[0], \mathcal{F})$$

Da jeder Garbenkomplex universell rechtsentfaltbar ist, erhalten wir mithilfe der Beschreibung [TD] 3.2.18 von Morphismen in Lokalisierungen als faktorierten Funktoren, der Definition der Homotopiekategorie und unseren Erkenntnissen [TD] 3.2.19 zur Faktorisierung einer Verknüpfung weiter ausgezeichnete Bijektionen

$$\mathrm{Der}_{/X}(\mathbb{Z}_X[0], \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathrm{Hot}_{/X}(\mathbb{Z}_X[0], ))(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathcal{H}^0\Gamma)(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathrm{R}\Gamma)(\mathcal{F})$$

und mit unserer Definition  $\mathbb{H}^q(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q(\mathrm{R}\Gamma)(\mathcal{F})$  der Hyperkohomologie aus [TD] 3.4.15 schließlich Bijektionen  $\mathrm{Der}_{/X}(\gamma, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$  und allgemeiner

$$\mathrm{Der}_{/X}(\gamma, [q]\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{F})$$

**2.5.6 (Kommutativität des Kohomologierings).** Die supergraduierte Kommutativität des garbentheoretischen Kohomologierings folgt aus unseren allgemeinen Erkenntnissen zu Signumseinheiten in Schmelzkategorien [TS] ???. Das Argument läuft darauf hinaus, für Morphismen  $f : \mathbb{Z}_X \rightarrow_{\mathrm{Der}} [p]\mathbb{Z}_X$  und  $g : \mathbb{Z}_X \rightarrow_{\mathrm{Der}} [q]\mathbb{Z}_X$  die Verknüpfung  $([q]f) \circ g$  mit  $f \otimes g$  zu identifizieren.

**2.5.7.** Unser Satz zeigt, daß der durch die Struktur einer Schmelzkategorie auf  $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$  gegebene Tensorfunktoren gerade das derivierte Tensorprodukt  $\otimes^{\mathrm{L}}$  ist. Er liefert, was man in einer anderen Terminologie die „Struktur auf  $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$  einer symmetrischen monoidalen Kategorie“ nennen würde. Das interne  $\mathrm{Hom} A \Rightarrow D$  unserer Schmelzkategorie heißt der **derivierte Garbenhomkomplex** und wird in der Literatur meist  $\mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}(A, D)$  notiert.

*Beweis.* Wir wenden unseren Satz 2.3.6 über Lokalisierung durch Rechtsanpassung an auf den Indexfunktoren  $p : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X})^{\vee} \rightarrow \{[[0]], [[1]], [[2]], \dots\}$ . Er ist ein Kofaserfunktoren, da die fraglichen Homotopiekomplexe nach 2.5.2 stabil universelle Verschmelzungen haben. Darin bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach [TD] 2.5.3 ein **faserweises Oresystem**. Für dieses faserweise Oresystem der Quasiisomorphismen ist nun die Unterkategorie  $\mathrm{Hot}(\mathrm{flAb}_{/X})^{\vee}$  aller Tupel von Homotopiekomplexen flacher abelscher Garben eine **Rechtsanpassung**, denn die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten bilden darin immer noch nach [TD] 2.5.3 ein **faserweises Oresystem**, das Tensorprodukt macht aus flachen Garben flache Garben und das Tensorprodukt von Quasiisomorphismen zwischen Komplexen flacher abelscher Garben ist nach [TD] 3.9.13 und [TD] 3.9.14 wieder ein Quasiisomorphismus. Nach 1.1.12 und [TD] 3.7.5 oder dem Beweis von [TD] 3.7.4 finden wir weiter für jeden Komplex abelscher Garben einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Garben dorthin. Aus dem vorhergehenden folgt weiter, daß auch für jeden Komplex  $A$  von abelschen Garben der Funktoren  $Q \circ (A \otimes) : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{/X}) \rightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/X})$  einen



Linksfaktorierten  $(A \otimes)^L : \text{Der}(\text{Ab}/X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/X)$  besitzt und daß der offensichtliche Morphismus für alle  $B$  ein Isomorphismus  $A \otimes^L B \xrightarrow{\sim} (L(A \otimes))(B)$  ist. Gegeben ein Komplex  $A \in \text{Hot}(\text{Ab}/X)$  besitzt schließlich der Funktor  $(A \otimes) : \text{Hot}(\text{Ab}/X) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}/X)$  den Rechtsadjungierten  $A \Rrightarrow$ . Diese Adjunktion induziert dann nach [TD] 3.2.29 für jedes feste  $A$  eine partielle Adjunktion des Linksderivierten von  $A \otimes$  mit dem Rechtsderivierten von  $A \Rrightarrow$  wo immer diese Derivierten definiert sind. Unsere Derivierten sind jedoch global definiert, da jeder Komplex eine flache Linksauflösung und nach [TD] 3.6.10 eine universelle Rechtsentfaltung besitzt.  $\square$

**2.5.8 (Erweiterungen als Hyperkohomologie des Homkomplexes).** Wir wissen aus [TG] 2.5.9, daß es auf einer Kategorie mit endlichen Produkten höchstens eine additive Struktur geben kann. Unsere additive Struktur auf der derivierten Kategorie  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  durch Lokalisierung ?? muß also dieselbe sein wie die additive Struktur durch Faktorisieren des Leerverschmelzungsfunktors über  $\text{Ab}$  nach ?? . Gegeben abelsche Garben  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Ab}/X$  haben wir nach [TD] 2.6.7, [TSK] 1.3.2 und 2.5.5 Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\text{Ext}_{\text{Ab}/X}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\text{Ab}/X}(\mathcal{F}, [q]\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\text{Ab}/X}(\gamma, \mathcal{F} \Rrightarrow [q]\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G})$$

**Definition 2.5.9.** Sei  $k$  ein Ring. Ein Komplex von  $k$ -Modulgarben heißt **homotopieflach**, wenn das Darantensorieren von unserem Komplex aus jedem exakten Komplex von  $k$ -Rechtsmoduln einen exakten Komplex von abelschen Gruppen macht. Allgemeiner vereinbaren wir dieselbe Terminologie auch für Garben von Moduln über einer Garbe von Ringen.

2.5.10. Hat unser Ring  $k$  endliche Torsionsdimension, so ist jeder Komplex von flachen  $k$ -Modulgarben bereits homotopieflach.

**Proposition 2.5.11 (Homotopieflache Linksauflösung).** *Jeder Komplex von  $k$ -Modulgarben besitzt eine homotopieflache Linksauflösung durch einen Komplex flacher Garben. Dasselbe gilt mit demselben Beweis auch für Garben von Moduln über einer Garbe von Ringen.*

*Beweis.* Jede Garbe  $A$  von  $k$ -Moduln auf einem topologischen Raum  $X$  ist Quotient einer direkten Summe von Garben der Gestalt  $k_{U \subset X}$  für  $U \Subset X$  in der Notation aus ?? . Jeder Komplex  $(A^n)$  von  $k$ -Modulgarben besitzt nach [TG] 9.3.5 also eine Cartan-Eilenberg-Linksauflösung  $(F^{p,q})_{q \leq 0}$  durch flache  $k$ -Modulgarben. Wie beim Beweis von ?? zeigt man, daß der Epimorphismus auf den horizontalen Kokernkomplex auch in diesem Fall ein Quasiisomorphismus  $\text{tot}^\oplus(F^{p,q}) \xrightarrow{\sim} (A^n)$  ist. Dafür brauchen die  $k$ -Modulgarben  $F^{p,q}$  noch nicht einmal spezielle Eigenschaften zu haben, wichtig ist allein die Vertauschbarkeit von Koprodukten mit dem Bilden der Halme. Nun zeigen wir, daß im Fall eines Doppelkomplexes

$(F^{p,q})_{q \leq 0}$  von flachen  $k$ -Modulgarben mit maximal spaltenden Zeilen und einem exakten Komplex  $E$  von Garben von  $k$ -Rechtsmoduln auch der Garbenkomplex

$$E \otimes_k \text{tot}^\oplus(F^{p,q})$$

exakt ist. In der Tat ist er das Summentotal des Tripelkomplexes  $E^r \otimes_k F^{p,q}$  und dieser Tripelkomplex hat exakte  $r$ -Komplexe, da  $E$  exakt ist und die  $F^{p,q}$  flach. Zusätzlich sind die  $r$ -Kernkomplexe der  $p$ -Differenziale exakt, da  $F^{p,q}$  maximal spaltende Zeilen hat. Nach ?? ist also  $\text{tot}_{p,r}^\oplus(E^r \otimes_k F^{p,q})$  exakt. Dann ist aber wieder nach ?? auch  $\text{tot}^\oplus(\text{tot}_{p,r}^\oplus(E^r \otimes_k F^{p,q}))$  halmweise exakt als Produktsumentotal eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen, mit dem das Summentotal wegen unserer Einschränkung  $q \leq 0$  übereinstimmt.  $\square$

**Proposition 2.5.12 (Deriviertes Tensorieren von Modulgarben).** *Gegeben ein Ring  $k$  und ein topologischer Raum  $X$  ist der Linksfaktorierte von*

$$Q \circ \otimes_k : \text{Hot}((\text{Mod}_{-k})/X) \times \text{Hot}((\text{Mod}_k)/X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/X)$$

*auf jedem Paar von Garbenkomplexen definiert. Linksentfaltet sind alle Paare mit mindestens einem homotopieflachen Eintrag.*

2.5.13. Der Linksfaktorierte wird

$$\otimes_k^L : \text{Der}((\text{Mod}_{-k})/X) \times \text{Der}((\text{Mod}_k)/X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/X)$$

notiert und heißt das **derivierete Tensorieren** von Garben. Der folgende Beweis zeigt auch, daß für jeden festen Komplex  $A \in \text{Ket}((\text{Mod}_{-k})/X)$  von Garben von  $k$ -Rechtsmoduln der Funktor  $Q \circ (A \otimes_k) : \text{Hot}((\text{Mod}_k)/X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/X)$  einen globalen Linksfaktorierten besitzt und daß der offensichtliche Morphismus stets ein Isomorphismus

$$A \otimes_k^L B \xrightarrow{\sim} (L(A \otimes_k))(B)$$

ist. Aus der Existenz universeller Rechtsauflösungen folgern wir wie zuvor, daß  $L(A \otimes_k)$  den Rechtsadjungierten  $\text{RHom}_{\mathbb{Z}}(A, \ )$  hat, den Rechtsderivierten des Bildens der Homomorphismengarbe in  $\text{Hot}(\text{Ab})$  mit ihrer von der  $k$ -Rechtsoperation auf  $A$  herrührenden Struktur als  $k$ -Modulgarbe. Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor. Analoges gilt mit demselben Beweis auch für Garben von Moduln über einer Garbe von Ringen.

*Beweis.* Ist  $(A, F)$  ein Paar von Komplexen mit  $F$  homotopieflach und  $(A', B) \xrightarrow{\sim} (A, F)$  ein Paar von Quasiisomorphismen beliebiger Garbenkomplexe dorthin, so finden wir nach 2.5.11 ein Paar  $(G', F')$  von homotopieflachen Garbenkomplexen und ein Paar von Quasiisomorphismen  $(G', F') \xrightarrow{\sim} (A, B)$ . Es gilt zu zeigen, daß die Komposition  $(G', F') \rightarrow (A, F)$  einen Quasiisomorphismus  $G' \otimes_k F' \xrightarrow{\sim} A \otimes_k$

$F$  induziert. Wir zeigen separat  $G' \otimes_k F' \xrightarrow{\sim} G' \otimes_k F$  und  $G' \otimes_k F \xrightarrow{\sim} A \otimes_k F$ . Es reicht den zweiten Quasiisomorphismus zu zeigen, den ersten zeigt man genauso. Der Abbildungskegel darüber ist jedoch isomorph zu  $\text{Keg}(G' \rightarrow A) \otimes_k F$  und damit exakt, da wir  $F$  homotopieflach angenommen hatten.  $\square$

**Satz 2.5.14 (Schmelzkategorie derivierter Modulgarben).** *Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und ein Kring  $k$  gilt:*

1. *Der offensichtliche Funktor ist ein Isomorphismus*

$$(\text{E Hot}(k\text{-Mod}/X))_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} \text{E}(\text{Hot}(k\text{-Mod}/X)_{\text{qis}})$$

*Für die so erhaltene Schmelzkategorie verwenden die Notation*

$$\text{Der}(k\text{-Mod}/X)$$

2. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(k\text{-Mod}/X)$  der  $k$ -Modulgarben besitzt stabil universelle Verschmelzungen, wir notieren sie  $\otimes_k^L$ , und jede universelle Verschmelzung in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}(k\text{-Mod}/X)$  zwischen Komplexen von  $k$ -Modulgarben, von denen höchstens einer nicht homotopieflach ist, bleibt darin universell;*
3. *Die übliche Struktur einer triangulierten Kategorie auf unserer Schmelzkategorie  $\text{Der}(k\text{-Mod}/X)$  ist intern;*
4. *Die Schmelzkategorie  $\text{Der}(k\text{-Mod}/X)$  besitzt internes Hom.*

*Beweis.* Mutatis mutandis derselbe Beweis wie im Fall abelscher Garben. Universelle Rechtsentfaltungen von  $k$ -Modulgarben haben wir in [TD] 3.6.13 bereitgestellt.  $\square$

2.5.15. Wie im Fall abelscher Garben 2.5.5 konstruieren wir auch für einen beliebigen Kring  $k$  und einen beliebigen topologischen Raum  $X$  und einen beliebigen Komplex von  $k$ -Modulgarben eine ausgezeichnete Bijektion

$$\text{Der}_{k\text{-Mod}/X}(\gamma, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^0(X; \mathcal{F})$$

## Übungen

*Übung 2.5.16.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und abelsche Gruppen  $K, L$  konstruiere man ein Cup-Produkt  $\mathbb{H}^p(X; K) \times \mathbb{H}^q(X; L) \rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X; K \otimes L)$ .

## 2.6 Derivierte Garbenoptrennfaserung

2.6.1. Wir erinnern aus 1.2.10 die Garbenoptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \mathcal{A}\text{Top}$  über der banalen Trennkategorie der topologischen Räume. Wir erinnern weiter unsere allgemeinen Erkenntnisse zu Trennfunktoren zu banalen Trennkategorien 1.5.2 und insbesondere, wie auf den Fasern in diesem Fall selbst die Struktur einer Trennkategorie induziert wird, die im Fall einer Trennfaserung nach 1.5.1 ihrerseits stabil universelle Trennungen besitzt. Indem wir erst zu Komplexen und dann zu Homotopiekomplexen übergehen, erhalten wir in offensichtlicher Weise weitere Trennfaserungen, für die ich die Notationen  $\text{Ket}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \mathcal{A}\text{Top}$  und  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \mathcal{A}\text{Top}$  verwende. Die Lokalisierung letzterer Trennkategorie nach allen denjenigen Einstrennungen über Identitäten, die Quasiisomorphismen sind, notiere ich  $\text{Der}_{//\text{Top}} := \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}})_{\text{qis}}$ . Wir erhalten so einen Trennfunktor

$$\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \mathcal{A}\text{Top}$$

**Satz 2.6.2 (Rückzug und Tensorprodukt).** 1. *Der soeben in 2.6.1 erklärte Trennfunktor  $\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \mathcal{A}\text{Top}$  ist eine Trennfaserung;*

2. *Jede für  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \mathcal{A}\text{Top}$  kartesische Trennung zwischen Komplexen flacher abelscher Garben liefert eine für  $\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \mathcal{A}\text{Top}$  kartesische Trennung;*
3. *Für jeden topologischen Raum  $X$  sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen von Trennkategorien*

$$\text{Hot}(\text{Ab}_{//X})_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} (\text{Der}_{//\text{Top}})_X$$

*zwischen der Lokalisierung der Faser über  $X$  als Trennkategorie und der Faser über  $X$  der globalen Lokalisierung mit ihrer offensichtlichen Struktur als Trennkategorie.*

2.6.3. Insbesondere werden im vorliegenden Fall die Fasern, für die wir von nun an die abkürzende Notation  $\text{Der}_{//X}$  verwenden, selbst zu Trennkategorien und unser Satz liefert ausgezeichnete Isomorphismen

$$(\text{Der}_{/X})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{//X}$$

der Opponierten unserer Schmelzkategorien der derivierten abelschen Garben auf  $X$  aus 2.5.4 mit den Fasern unserer Trennfaserung. Wir verwenden hier unser Notationsschema 1.5.3 und notieren  $f^\dagger$  die Rückzüge unserer Trennfaserung zu einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und  $f^* := (f^\dagger)^{\text{opp}} : \text{Der}_{/Y} \rightarrow \text{Der}_{/X}$  die auf den opponierten Fasern induzierten Funktoren. Ebenso halten wir es mit den Vorschüben  $f_* = (f_\dagger)^{\text{opp}}$  und haben also Adjunktionen  $(f^*, f_*)$ .

**2.6.4 (Analoge Aussagen für Modulgarben).** Der Satz und sein Beweis gelten analog für Garben von  $k$ -Moduln über einem beliebigen Kring  $k$ . Man muß nur feiner mit homotopieflachen Garbenkomplexen nach 2.5.11 arbeiten und bemerken, daß deren Rückzüge stets wieder homotopieflach sind. Das ist jedoch klar, da ein Garbenkomplex genau dann homotopieflach ist, wenn an jedem Punkt des zugrundeliegenden topologischen Raums der Komplex der Halme homotopieflach ist. Wir besprechn im nächsten Abschnitt sogar den noch allgemeineren Fall von Modulgarben über Kringgarben.

**2.6.5 (Garbenkohomologie als Trennfunktor).** Unser Schmelzfunktor 1.5.23 des Vorschubs auf das finale Objekt spezialisiert in dieser Situation zu einem Schmelzfunktor

$$\text{fin}_* : \text{Der}_{//\text{Top}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Der}_{/\text{pt}}$$

Zusammen mit den Isomorphismen  $\text{Der}_{/\text{pt}} \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab}_{/\text{pt}}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab})$  von Schmelzkategorien aus dem vorhergehenden Satz und den Definitionen erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\text{fin}_* : \text{Der}_{//\text{Top}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$$

Halten wir noch den Schmelzfunktor  $\mathcal{H} : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$  der Homologie aus 2.4.7 dahinter, so erhalten wir den **Schmelzfunktor**  $(X, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{H}^*(X; \mathcal{F})$  **der totalen Hyperkohomologie**, den wir bisher in 2.2.3 nur als einfachen Funktor kennengelernt hatten. Halten wir zusätzlich den Opponierten des eindeutigen kartesischen Trennschnitts davor, erhalten wir einen Schmelzfunktor  $\Upsilon\text{Top}^{\text{opp}} \rightarrow \text{sgAb}$ , der jedem Raum  $X$  die supergraduierte abelsche Gruppe  $H^*(X; \mathbb{Z})_{\text{garb}}$  zuordnet und jedem Tupel von von  $X$  ausgehenden stetigen Abbildungen die multiadditive Abbildung „cup-Produkt des Rückzugs der Kohomologieklassen“. Er ist eine garbenkohomologische Variante des entsprechenden Schmelzfunktors  $\Upsilon\text{Top}^{\text{opp}} \rightarrow \text{sgAb}$  der singulären Kohomologie, den wir in [TS] ?? als Trennfunktor  $\wedge\text{Top} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$  besprochen hatten.

*Ergänzung 2.6.6.* Es sollte einmal diskutiert werden, inwiefern unser Vergleichsisomorphismus zur singulären Kohomologie eine Transformation von Trennfunktoren ist. Das würde ich gerne einem Studenten überlassen. Er sollte es gleich für „topologische Räume mit einem vorgegebenen Kring von Koeffizienten“ machen, als Teil der Trennfaserung derivierter Modulgarben über gekringten Räumen.

*Beweis.* Wir wenden unseren Satz 2.3.6 zur Lokalisierung von Kofaserfunktoren durch Rechtsanpassung oder genauer den daraus durch Übergang zu den opponierten Kategorien entstehenden Satz zur Lokalisierung von Faserfunktoren durch Linksanpassung an auf den auf den Familienkategorien induzierten Funktor

$$\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}})^{\wedge} \rightarrow \text{Top}^{\wedge}$$

Er ist ein Faserfunktork. Genauer ist für stetige Abbildungen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  und  $\mathcal{G}_i \in \text{Hot}(\text{Ab}_{//Y_i})$  die tautologische Trennung

$$f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_n^* \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_n$$

über  $(f_1, \dots, f_n)$  kartesisch. Wie beim Beweis des Spezialfalls 2.5.4, nur jetzt in der opponierten Situation, bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach [TD] 2.5.3 ein **faserweises Rechtsoresystem**, ja sogar ein faserweises Oresystem. Für dieses faserweise Rechtsoresystem der Quasiisomorphismen ist nun wie beim Beweis des Spezialfalls 2.5.4 die Unterkategorie  $\text{Hot}(\text{flAb}_{//\text{Top}})^\wedge$  aller Tupel von Homotopiekomplexen flacher abelscher Garben über topologischen Räumen eine **Linksanpassung**, denn Tensorprodukt wie Rückzug machen aus flachen Garben flache Garben, Tensorprodukt wie Rückzug von Quasiisomorphismen zwischen Komplexen flacher abelscher Garben sind wieder Quasiisomorphismen, und nach [TD] 3.7.6 finden wir für jeden Komplex abelscher Garben einen Quasiisomorphismus von einem Komplex flacher abelscher Garben dorthin, der dann in der opponierten Kategorie entsprechend von dort ausgeht.  $\square$

## 2.7 Verallgemeinerung auf Modulgarben

2.7.1. Wir erinnern aus 1.3.8 die Trennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$  der Modulgarben über der banalen Trennkategorie der gekringten Räume. Wir erinnern weiter unsere allgemeinen Erkenntnisse zu Trennfunktoren zu banalen Trennkategorien 1.5.2 und insbesondere, wie auf den Fasern in diesem Fall selbst die Struktur einer Trennkategorie induziert wird, die im Fall einer Trennfaserung nach 1.5.1 ihrerseits stabil universelle Trennungen besitzt. Indem wir erst zu Komplexen und dann zu Homotopiekomplexen übergehen, erhalten wir in offensichtlicher Weise weitere Trennfaserungen, für die ich die Notationen  $\text{Ket}(\text{Ab}_{//\text{Gek}}) \rightarrow \wedge \text{Gek}$  und  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}}) \rightarrow \wedge \text{Gek}$  verwende. Die Lokalisierung letzterer Trennkategorie im Sinne von 2.4.3 nach allen denjenigen Einstrennungen über Identitäten, die Quasiisomorphismen sind, notiere ich  $\text{Der}_{//\text{Gek}} := \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}})_{\text{qis}}$ . Wir erhalten so einen Trennfunktork

$$\text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$$

**Satz 2.7.2 (Rückzug und Tensorprodukt).** 1. *Der soeben in 2.7.1 erklärte Trennfunktork  $\text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$  ist eine Trennfaserung;*

2. *Jede für  $\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}}) \rightarrow \wedge \text{Gek}$  kartesische Trennung zwischen homotopieflachen Komplexen von Modulgarben liefert eine für  $\text{Der}_{//\text{Gek}} \rightarrow \wedge \text{Gek}$  kartesische Trennung;*

3. Für jede Untertrennkategorie  $\mathcal{T} \subset \text{Gek}$  sind die offensichtlichen Funktoren Isomorphismen von Trennkategorien

$$\text{Hot}(\text{Ab}_{//\mathcal{T}})_{\text{qis}} \xrightarrow{\sim} (\text{Der}_{//\text{Gek}})_{\mathcal{T}}$$

zwischen der Lokalisierung der Restriktion unserer Faserung und der Restriktion der Lokalisierung.

2.7.3. Wir verwenden weiter unser Notationsschema 1.5.3 und notieren  $f^\dagger$  die Rückzüge unserer Trennfaserung zu einem Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  und  $f^* := (f^\dagger)^{\text{opp}} : \text{Der}_{/Y} \rightarrow \text{Der}_{/X}$  die auf den opponierten Fasern induzierten Funktoren. Ebenso halten wir es mit den Vorschüben  $f_* = (f_\dagger)^{\text{opp}}$  und haben also Adjunktionen  $(f^*, f_*)$  für den Rechtsderivierten des Vorschubs auf Modulgarben 1.3.9, den aus aufgrund der Existenz universeller Rechtsentfaltungen ?? gibt und der dann aus allgemeinen Gründen der Rechtsadjungierte des Linksderivierten des Rückzugs auf Modulgarben sein muß.

2.7.4 (**Garbenkohomologie als Trennfunktor**). Unser Schmelzfunktor 1.5.23 des Vorschubs auf das finale Objekt spezialisiert in dieser Situation zu einem Schmelzfunktor

$$\text{fin}_* : \text{Der}_{//\text{Top}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Der}_{/\text{pt}}$$

Zusammen mit den Isomorphismen  $\text{Der}_{/\text{pt}} \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab}_{/\text{pt}}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab})$  von Schmelzkategorien aus dem vorhergehenden Satz und den Definitionen erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\text{fin}_* : \text{Der}_{//\text{Top}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})$$

Halten wir noch den Schmelzfunktor  $\mathcal{H} : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{sgAb}$  der Homologie aus 2.4.7 dahinter, so erhalten wir den **Schmelzfunktor**  $(X, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{H}^*(X; \mathcal{F})$  **der totalen Hyperkohomologie**, den wir bisher in 2.2.3 nur als einfachen Funktor kennengelernt hatten. Halten wir zusätzlich den Opponierten des eindeutigen kartesischen Trennschnitts davor, erhalten wir einen Schmelzfunktor  $\Upsilon_{\text{Top}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{sgAb}$ , der jedem Raum  $X$  die supergraduierte abelsche Gruppe  $H^*(X; \mathbb{Z})_{\text{garb}}$  zuordnet und jedem Tupel von von  $X$  ausgehenden stetigen Abbildungen die multiadditive Abbildung „cup-Produkt des Rückzugs der Kohomologieklassen“. Er ist eine garbenkohomologische Variante des entsprechenden Schmelzfunktors  $\Upsilon_{\text{Top}}^{\text{opp}} \rightarrow \text{sgAb}$  der singulären Kohomologie, den wir in [TS] ?? als Trennfunktor  $\wedge_{\text{Top}} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$  besprochen hatten.

*Beweis.* Wir wenden unseren Satz 2.3.6 zur Lokalisierung von Kofaserfunktoren durch Rechtsanpassung oder genauer den daraus durch Übergang zu den opponierten Kategorien entstehenden Satz zur Lokalisierung von Faserfunktoren durch Linksanpassung an auf den auf den Familienkategorien induzierten Funktor

$$\text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}})^\wedge \rightarrow \text{Gek}^\wedge$$

Er ist ein Faserfunktork. Genauer ist für Morphismen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  gekringter Räume und  $\mathcal{G}_i \in \text{Hot}(\text{Ab}_{//Y_i})$  die tautologische Trennung

$$f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_n^* \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_n$$

über  $(f_1, \dots, f_n)$  kartesisch. Wie beim Beweis des Spezialfalls 2.5.4, nur jetzt in der opponierten Situation, bilden die Tupel von Quasiisomorphismen über Identitäten nach [TD] 2.5.3 ein **faserweises Rechtsoresystem**, ja sogar ein faserweises Oresystem. Für dieses faserweise Rechtsoresystem der Quasiisomorphismen ist nun wie beim Beweis des Spezialfalls 2.5.4 die Unterkategorie  $(\text{HflAb}_{//\text{Gek}})^\wedge \subset \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Gek}})^\wedge$  aller Tupel von homotopieflachen Komplexen von Modulgarben eine **Linksanpassung**, denn Tensorprodukt wie Rückzug machen aus homotopieflachen Komplexen homotopieflache Komplexe, Tensorprodukt wie Rückzug von Quasiisomorphismen zwischen homotopieflachen Komplexen von Modulgarben sind wieder Quasiisomorphismen, und nach 2.5.11 finden wir für jeden Komplex von Modulgarben einen Quasiisomorphismus von einem homotopieflachen Komplex von Modulgarben dorthin, der dann in der opponierten Kategorie entsprechend von dort ausgeht.  $\square$



## 3 Anwendungen

### 3.1 Garbenazyklische Morphismen

**Proposition 3.1.1.** *Gegeben ein topologischer Raum  $Y$  und ein Komplex von abelschen Garben  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  ist für  $\pi : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  die Projektion die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_* \pi^* \mathcal{F}$$

*Beweis.* Nach [TG] 4.3.21 ist für jede Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}_{/Y}$  die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_{(*)} \pi^{(*)} \mathcal{F}$ , denn  $\pi$  ist eine finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern. Also ist auch für alle Komplexe  $\mathcal{F} \in \text{Hot}(\text{Ab}_{/Y})$  die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_{(*)} \pi^{(*)} \mathcal{F}$ . Nun hat nach eigentlichem Basiswechsel [TG] 6.6.8 der Vorschub  $\pi_{(*)} : \text{Ab}_{/Y \times [0,1]} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$  eine homologische Dimension kleinergleich Eins und insbesondere endliche homologische Dimension. Damit zeigt [TD] 3.7.4, daß jeder Komplex  $\mathcal{A}$  von  $\pi_{(*)}$ -entfalteten abelschen Garben bereits  $\pi_{(*)}$ -entfaltet ist in dem Sinne, daß der natürliche Morphismus in der derivierten Kategorie ein Isomorphismus  $\pi_{(*)} \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_* \mathcal{A}$  ist. Nach [TG] 6.6.9 und [TG] 4.2.3 wissen wir weiter, daß das Zurückholen  $\pi^{(*)} : \text{Ab}_{/Y} \rightarrow \text{Ab}_{/Y \times [0,1]}$  jede Garbe zu einer  $\pi_{(*)}$ -entfalteten Garbe macht und nach [TD] 3.7.4 damit jeden Komplex von abelschen Garben zu einem  $\pi_{(*)}$ -entfalteten Komplex. Das schließlich zeigt die Behauptung.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß unser Morphismus für alle  $y \in Y$  einen Isomorphismus  $\text{em}_y^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{em}_y^* \pi_* \pi^* \mathcal{F}$  induziert. Mit eigentlichem Basiswechsel reicht es also, die Proposition in dem Fall zu zeigen, daß  $Y$  der einpunktige Raum ist. Nach [TG] 4.2.3 verschwindet auf reellen Intervallen die Garbenkohomologie jeder abelschen Garbe im Grad  $> 1$  und die Garbenkohomologie jeder konstanten abelschen Garbe im Grad  $\geq 1$ . Die Behauptung folgt so mit unseren Erkenntnissen [TD] 3.7.4 zum Derivieren homologisch endlicher Funkoren.  $\square$

**Definition 3.1.2.** Eine stetige Abbildung topologischer Räume  $f : X \rightarrow Y$  heiße **garbenazyklisch**, wenn für jeden Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_* f^* \mathcal{F}$$

liefert. Sie heiße **basisfest garbenazyklisch** oder kurz **bagazyklisch**, wenn sie unter jedem Basiswechsel eine garbenazyklische Abbildung liefert, wenn also in Formeln für jede stetige Abbildung  $S \rightarrow Y$  die induzierte Abbildung  $X \times_Y S \rightarrow S$  garbenazyklisch ist. Ein topologischer Raum  $X$  heiße **garbenazyklisch** beziehungsweise **basisfest garbenazyklisch** oder kurz **bagazyklisch**, wenn die konstante Abbildung  $X \rightarrow \text{top}$  die entsprechende Eigenschaft hat.

3.1.3. Jede garbenazyklische Abbildung ist offensichtlich schwach garbenazyklisch im Sinne unserer Definition [TG] 6.6.10, der Rückzug induziert also Isomorphismen auf der Kohomologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe.

**Satz 3.1.4.** *Jeder zusammenziehbare Raum ist bagazyklisch.*

*Beweis.* Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  erhalten wir einen Funktor

$$H(\ ; G) : \text{Top} \rightarrow \text{Der}(\text{Ab})^{\text{opp}}$$

durch die Vorschrift  $X \mapsto \text{fin}_{X^*} \text{fin}_X^* G$  auf Objekten und die Vorschrift, daß jedem Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  die Komposition

$$f^\# : \text{fin}_{Y^*} \text{fin}_Y^* G \rightarrow \text{fin}_{Y^*} f_* f^* \text{fin}_Y^* G \xrightarrow{\sim} \text{fin}_{X^*} \text{fin}_X^* G$$

zugeordnet wird. Ich notiere ihn  $X \mapsto H(X; G)$ . Das Nachschalten von  $\mathcal{H}^q$  macht daraus den üblichen Funktor  $X \mapsto H^q(X; G)$  der Garbenkohomologie mit Koeffizienten in  $G$ . Diese Konstruktion funktioniert genauso und liefert weitere Funktoren, wenn wir für  $G$  ein beliebiges Objekt von  $\text{Der}(\text{Ab})$  zulassen. Sie funktioniert auch für eine beliebige Bifaserung  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  über einer Kategorie mit finalem Objekt  $\text{pt}$ . Für jedes Objekt  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}_{\text{pt}}$  erhalten wir dann einen Funktor  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{pt}}$  durch die Vorschrift  $X \mapsto \text{fin}_{X^\dagger} \text{fin}_X^\dagger \mathcal{G}$  auf Objekten und die Vorschrift, daß jedem Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis die Komposition

$$f^\# : \text{fin}_{X^\dagger} \text{fin}_X^\dagger \mathcal{G} \rightarrow \text{fin}_{Y^\dagger} f_\dagger f^\dagger \text{fin}_X^\dagger \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \text{fin}_{Y^\dagger} \text{fin}_Y^\dagger \mathcal{G}$$

zugeordnet wird. Gegeben ein topologischer Raum  $S$  und  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/_S)$  erhalten wir so insbesondere einen Funktor auf der Kategorie der topologischen Räume über  $S$ , den wir

$$H_S(\ ; \mathcal{G}) : \text{Top}_S \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/_S)^{\text{opp}}$$

notieren. Unsere Erkenntnisse 3.1.1 zeigen, daß für einen Raum  $X \in \text{Top}_S$  über  $S$  und die Projektion  $\pi : X \times [0, 1] \rightarrow X$  der „relative Rückzug“ stets ein Isomorphismus

$$\pi^\# : H_S(X; \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H_S(X \times [0, 1]; \mathcal{G})$$

ist. Für  $i_t : X \hookrightarrow X \times [0, 1]$  die durch das Dahinterschreiben von  $t \in [0, 1]$  gegebene Abbildung folgt daraus wegen  $i_t^\# \circ \pi^\# = \text{id}$ , daß sie gar nicht von  $t$  abhängt. Sind speziell  $f, g : X \rightarrow Y$  homotop, so folgt

$$(f \times \text{id})^\# = (g \times \text{id})^\# : H_S(Y \times S; \mathcal{G}) \rightarrow H_S(X \times S; \mathcal{G})$$

Jede Homotopieäquivalenz  $f : Y \rightarrow Z$  induziert folglich einen Isomorphismus  $(f \times \text{id})^\# : H_S(Z \times S; \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H_S(Y \times S; \mathcal{G})$ . Ist insbesondere  $Z$  ein zusammenziehbarer Raum, so ist der relative Rückzug zur Projektion  $c : Z \times S \rightarrow S$  ein Isomorphismus  $c^\# : H_S(S; \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H_S(Z \times S; \mathcal{G})$  alias die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^* \mathcal{G}$ .  $\square$

**3.1.5 (Permanenzeigenschaften garbenazyklischer Abbildungen).** Jede Verknüpfung garbenazyklischer Abbildungen ist garbenazyklisch. Ist  $g \circ f$  garbenazyklisch und  $f$  garbenazyklisch, so ist auch  $g$  garbenazyklisch. Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und besitzt  $Y$  eine Überdeckung durch offene Teilmengen  $U \subseteq Y$  derart, daß  $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$  jeweils garbenazyklisch ist, so ist schon  $f : X \rightarrow Y$  selbst garbenazyklisch. Insbesondere ist jedes Faserbündel mit bagazyklischer Faser bagazyklisch.

**Definition 3.1.6.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Wir sagen, ein Komplex von abelschen Garben  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  **kommt her von  $Y$** , wenn es  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/Y)$  gibt mit  $\mathcal{F} \cong f^*\mathcal{G}$ .

**Lemma 3.1.7.** Seien  $f : X \rightarrow Y$  garbenazyklisch und  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$ . So sind gleichbedeutend:

1. Das Objekt  $\mathcal{F}$  kommt her von  $Y$ ;
2. Die Koeinheit der Adjunktion liefert einen Isomorphismus  $f^*f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ ;
3. Es gibt eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(Y)$  von  $Y$  derart, daß für alle  $U \in \mathcal{U}$  die Einschränkung  $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}$  von  $U$  herkommt.

*Beweis.* Die Definition garbenazyklischer Abbildungen und formale Eigenschaften adjungierter Funktoren nach [TF] 4.8.1 liefern  $1 \Leftrightarrow 2$ . Formulieren wir 3 um mittels dieser Erkenntnis, so erhalten wir auch  $2 \Leftrightarrow 3$ . □

## 3.2 Künnethformeln der Garbenkohomologie

3.2.1. In der Garbenkohomologie gilt eine besonders einfache und allgemeine Künnethformel für die kompakte Kohomologie. Wir lernen sie in 5.6.1 kennen. Im folgenden diskutieren wir Künnethformeln für die gewöhnliche Kohomologie. Wir benötigen sie für die Arbeit mit Kohomologierungen.

**Satz 3.2.2 (Derivierter gefasertes Basiswechsel).** Sind in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen  $f q = p g$  die Horizontalen  $p, q$  Faserbündel mit offenlokal zusammenziehbarer Faser, so ist der Basiswechsel auf den derivierten Kategorien von abelschen Garben eine Isotransformation

$$p^* f_* \xrightarrow{\sim} g_* q^*$$

3.2.3. Wir zeigen den Satz sogar etwas allgemeiner für Faserbündel mit offenlokal bagazyklischer Faser. In [TG] 8.2.2 hatten wir eine Variante diskutiert, die ohne derivierte Kategorien auskommt und stattdessen eine Aussage über die Folge der höheren derivierten Funktoren macht.

*Beispiel 3.2.4.* Die geometrische Realisierung  $\Delta(\mathcal{K})$  eines Simplicialkomplexes  $(E, \mathcal{K})$  ist stets offenlokal zusammenziehbar: Jede Umgebung eines jeden Punktes kann in anderen Worten einer offenen zusammenziehbaren Umgebung desselben Punktes verkleinert werden. Insbesondere ist jede komplexe algebraische Varietät mit ihrer analytischen Topologie offenlokal zusammenziehbar, denn nach [Hir75] ist jede algebraische Teilmenge eines  $\mathbb{C}^n$  homöomorph zur geometrischen Realisierung eines Simplicialkomplexes.

*Beweis.* Gegeben  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  reicht es nach unserem Verschwindungskriterium [TD] 3.4.26 zu zeigen, daß jeder Punkt aus dem Definitionsbereich von  $p$  ein Fundamentalsystem von offenen Umgebungen hat derart, daß von der Einbettung  $j$  der fraglichen Umgebung herrührende Abbildung ein Isomorphismus

$$\text{fin}_* j^* p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{fin}_* j^* g_* q^* \mathcal{F}$$

ist, für  $\text{fin}$  die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum. Mit dieser Erkenntnis können wir uns darauf zurückziehen, im Fall kartesischen Diagramms der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y \times Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

mit zusammenziehbarem oder allgemeiner bagazyklischem  $Z$  zu zeigen, daß Basiswechsel Isomorphismen

$$p_* p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_* g_* q^* \mathcal{F}$$

induziert. Das ist aber klar, da ja gilt  $p_* g_* = f_* q_*$  und da nach Annahme die Einheiten der Adjunktion Isomorphismen  $\text{id} \xrightarrow{\sim} p_* p^*$  und  $\text{id} \xrightarrow{\sim} q_* q^*$  sind.  $\square$

3.2.5. Für beliebige topologische Räume  $X, Y$  liefert der Rückzug auf der Kohomologie einen Ringhomomorphismus

$$H^*(X) \bar{\otimes} H^*(Y) \rightarrow H^*(X \times Y)$$

mit  $(u, v) \mapsto u \times v := \text{pr}_X^*(u) \cup \text{pr}_Y^*(v)$ . Hier meint  $\bar{\otimes}$  das für Ringobjekte in der Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen zu verstehende Tensorprodukt, also das übliche Tensorprodukt von graduierten abelschen Gruppen mit der üblichen Vorzeichenregel für der Multiplikation von zwei Tensoren. Dieser Ringhomomorphismus heißt das **Kreuzprodukt der Garbenkohomologie**.

**Satz 3.2.6 (Künnethformeln der Garbenkohomologie).** *Seien  $X, Y$  topologische Räume. Ist  $X$  offenlokal zusammenziehbar und sind alle  $H^q(Y)$  endlich erzeugte freie abelsche Gruppen, so induziert das Kreuzprodukt der Kohomologie einen Isomorphismus*

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y)$$

3.2.7. Analoges gilt mit demselben Beweis für Kohomologie mit Koeffizienten in einem beliebigen Ring endlicher Torsionsdimension. Im Verlauf des Beweises und im Anschluß diskutieren wir verschiedene Varianten dieses Satzes, die auch noch unter schwächeren Voraussetzungen gelten. In 5.5.20 werden wir noch eine Künnethformel für die kompakte Kohomologie kennenlernen, die ihrerseits in sehr großer Allgemeinheit gilt.

*Beweis.* Basiswechsel im kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\text{pr}_X} & X \\ \text{pr}_Y \downarrow & & \downarrow a \\ Y & \xrightarrow{b} & \text{top} \end{array}$$

liefert stets einen Homomorphismus  $a_* a^* b_* \mathbb{Z}_Y \rightarrow a_* \text{pr}_{X*} \mathbb{Z}_{X \times Y}$ . Erinnern wir aus [TD] 2.6.16 unseren unkanonischen Isomorphismus zwischen  $b_* \mathbb{Z}_Y$  und dem Komplex  $\mathcal{H}(b_* \mathbb{Z}_Y)$  mit verschwindenden Differentialen und Einträgen  $H^q(Y)$ , so erhalten wir daraus für beliebige topologische Räume  $X, Y$  unkanonische Homomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y)) \rightarrow H^n(X \times Y)$$

Von nun an nehmen wir an,  $X$  sei offenlokal zusammenziehbar oder allgemeiner offenlokal bagazyklisch. Derivierter gefasertes Basiswechsel 3.2.2 liefert dann einen Isomorphismus  $\text{pr}_{X*} \mathbb{Z}_{X \times Y} \xrightarrow{\sim} a^* b_* \mathbb{Z}_Y$  und unsere unkanonischen Homomorphismen werden damit zu ebenso unkanonischen Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y)) \xrightarrow{\sim} H^n(X \times Y)$$

In Übung 3.2.13 wird diskutiert, inwiefern alle diese Isomorphismen im allgemeinen mit geeigneten Filtrierungen beider Seiten verträglich sind und einen kanonischen Isomorphismus zwischen den assoziierten Graduierten induzieren. Sind alle  $H^q(Y)$  frei, so gibt es jedoch nach [TD] 2.6.16 oder alternativ [TD] 3.9.18 in  $\text{Der}(\text{Ab})$  nur genau einen Isomorphismus  $b_* \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(b_* \mathbb{Z}_Y)$  zwischen dem Komplex  $b_* \mathbb{Z}_Y$  und dem Komplex der  $H^q(Y)$  mit Differential Null, der unter  $\mathcal{H}$  den offensichtlichen Isomorphismus  $\mathcal{H}(b_* \mathbb{Z}_Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\mathcal{H}(b_* \mathbb{Z}_Y))$  induziert. So erhalten wir im Fall, daß alle  $H^q(Y)$  frei sind, sogar kanonische Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y)) \xrightarrow{\sim} H^n(X \times Y)$$

Man prüft leicht, daß sie mit der Multiplikation verträglich sind. Sind schließlich unsere  $H^q(Y)$  auch noch endlich erzeugt, so kann unser Isomorphismus in

offensichtlicher Weise und formal aufgrund der starren Projektionsformel 3.2.9 verlängert werden zu einem Isomorphismus

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y)$$

Man prüft ohne größere Schwierigkeiten, daß die so konstruierte Abbildung genau unser Kreuzprodukt ist. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

3.2.8. Sind alle Annahmen von Satz 3.2.6 erfüllt bis auf die Freiheit der  $H^q(Y)$ , ist also  $X$  offenlokal zusammenziehbar und sind alle  $H^q(Y)$  endlich erzeugte abelsche Gruppen, so konstruieren wir nun noch eine Fortsetzung der durch das Kreuzprodukt gegebenen Homomorphismen zu natürlichen und unnatürlich spaltenden kurzen exakten Sequenzen

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p X \otimes H^q Y \hookrightarrow H^n(X \times Y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} H^p X * H^q Y$$

Verschwinden fast alle  $H^q(Y)$ , so folgt das aus den Argumenten aus dem Beweis von 3.2.6 mit dem Isomorphismus  $a_* \mathbb{Z}_X \otimes b_* \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} a_*(\mathbb{Z}_X \otimes a^* b_* \mathbb{Z}_Y)$  unserer starren Projektionsformel aus 3.2.9 zusammen mit [TD] 3.9.19. Das verallgemeinert sich jedoch nur noch auf den Fall von Koeffizienten in einem Hauptidealring. Wenn wir nicht fordern, daß fast alle  $H^q(Y)$  verschwinden, müssen wir etwas feiner argumentieren und uns überlegen, daß wir dann in unserer Argumentation unsere starre Projektionsformel 3.2.9 auf  $\tau^{\leq n} b_* \mathbb{Z}_Y$  durchaus anwenden dürfen und daß das dann zum gewünschten Resultat führt.

3.2.9 (**Starre Projektionsformel**). Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  stetig erhalten wir aus den Adjunktionen für  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/_X)$  und  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/_Y)$  einen kanonischen Morphismus  $(f_* \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G})$ . Halten wir  $\mathcal{F}$  fest, so bilden die Objekte  $\mathcal{G}$ , für die unsere Morphismen Isomorphismen

$$(f_* \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G})$$

sind, eine volle triangulierte Unterkategorie von  $\text{Der}(\text{Ab}/_Y)$ , die zumindest die konstante Garbe  $\mathbb{Z}_Y$  enthält. In 1.5.17 haben wir diskutiert, warum für beliebiges  $\mathcal{F}$  unsere starre Projektionsformel insbesondere für alle „starren“ Objekte  $\mathcal{G}$  gilt.

3.2.10 (**Relative Künnethformel mit Koeffizienten**). Wir betrachten ein Diagramm von topologischen Räumen der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{\text{pr}_Y} & Y \\ \text{pr}_X \downarrow & \searrow c & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{a} & Z \end{array}$$

und nehmen an,  $a$  sei ein Faserbündel mit offenlokal zusammenziehbarer oder allgemeiner offenlokal bagazyklischer Faser. Für  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  starr und  $\mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/Y)$  mit  $b_*\mathcal{G}$  starr zeigen wir, daß der natürliche Morphismus ein Isomorphismus

$$c_*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*\mathcal{F} \otimes b_*\mathcal{G}$$

ist. Dazu beachten wir die Isomorphismen

$$a_* \text{pr}_{X*}(\text{pr}_X^* \mathcal{F} \otimes \text{pr}_Y^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \otimes (\text{pr}_{X*} \text{pr}_Y^* \mathcal{G})) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \otimes a^*b_*\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*\mathcal{F} \otimes b_*\mathcal{G}$$

aus der starren Projektionsformel 3.2.9 außen mit dem gefaserten derivierten Basiswechsel 3.2.2 in der Mitte und beachten  $a \text{pr}_X = c$  und unsere Definition  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := \text{pr}_X^* \mathcal{F} \otimes \text{pr}_Y^* \mathcal{G}$  für das Boxprodukt  $\boxtimes = \boxtimes_Z$ . Wenn wir gar keine Starrheitsannahmen machen, erhalten wir nur noch mit 1.5.7 und gefasertem Basiswechsel kanonische Isomorphismen

$$c_*(\text{pr}_X^* \mathcal{F} \rightrightarrows \text{pr}_Y^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \rightrightarrows \text{pr}_{X*} \text{pr}_Y^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} a_*(\mathcal{F} \rightrightarrows a^*b_*\mathcal{G})$$

**Satz\* 3.2.11 (Leray-Hirsch).** *Gegeben  $X \rightarrow Y$  ein Faserbündel über einem offenlokal zusammenziehbaren Raum und  $c_1, \dots, c_n \in H^*(X)$  homogene Klassen, deren Rückzüge für alle  $y \in Y$  eine Basis der Kohomologie  $H^*(X_y)$  der Faser bilden, bilden  $c_1, \dots, c_n$  auch eine Basis von  $H^*(X)$  als  $H^*(Y)$ -Modul.*

*Beweis.* Bezeichne  $p : X \rightarrow Y$  die Projektion. Eine Klasse  $c \in H^q(X)$  können wir nach [TD] 2.6.10 auffassen als einen Morphismus  $c : p^*\mathbb{Z}_Y \rightarrow \mathbb{Z}_X[q]$  in der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf  $X$ . Die Zeilenmatrix  $(c_1, \dots, c_n)$  liefert so einen Homomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_Y[-q(i)] \rightarrow p_*\mathbb{Z}_X$$

Unser Satz folgt, wenn wir nachweisen, daß er ein Quasiisomorphismus ist. Dazu dürfen wir aber unser Faserbündel als trivial annehmen und dann folgt die Behauptung aus deriviertem gefaserten Basiswechsel 3.2.2.  $\square$

**Satz\* 3.2.12 (Leray-Hirsch, Variante).** *Gegeben  $X \rightarrow Y$  ein Faserbündel über einem offenlokal zusammenziehbaren Raum und homogene Kohomologieklassen  $c_i \in H^{q(i)}(X)$  für  $i = 1, \dots, n$ , deren Rückzüge für alle  $y \in Y$  eine Basis der abgeschnittenen Kohomologie  $H^{\leq s}(X_y)$  der Faser bilden, induziert die durch Multiplikation mit  $c_1, \dots, c_n$  gegebene Abbildung*

$$\bigoplus_{i=1}^n H^*(Y)[-q(i)] \rightarrow H^*(X)$$

*einen Isomorphismus in allen Graden  $\leq s$ .*

*Beweis.* Bezeichne  $p : X \rightarrow Y$  die Projektion. Eine Klasse  $c \in H^q(X)$  können wir nach [TD] 2.6.10 auffassen als einen Morphismus  $c : p^*\mathbb{Z}_Y \rightarrow \mathbb{Z}_X[q]$  in der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf  $X$ . Die Zeilenmatrix  $(c_1, \dots, c_n)$  liefert so einen Homomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_Y[-q(i)] \rightarrow \tau^{\leq s} p_* \mathbb{Z}_X$$

Unser Satz folgt, wenn wir nachweisen, daß er ein Quasiisomorphismus ist. Dazu dürfen wir aber unser Faserbündel als trivial annehmen und dann folgt die Behauptung aus deriviertem gefaserten Basiswechsel 3.2.2.  $\square$

## Übungen

*Übung 3.2.13.* Gegeben topologische Räume  $X, Y$  erinnern wir die unkanonischen Homomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y)) \rightarrow H^n(X \times Y)$$

aus dem Beweis von 3.2.6. Will man eine kanonischere Aussage erhalten, mag man zum Komplex von abelschen Gruppen  $B := b_* \mathbb{Z}_Y$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & [-q]\mathcal{H}^q B & & [-(q+1)]\mathcal{H}^{q+1} B & & \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\ \dots & \tau^{\leq q-1} B & & \tau^{\leq q} B & & \tau^{\leq q+1} B & \dots \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\ & & & & & & \end{array}$$

(Note: The diagram in the image shows horizontal arrows from  $\tau^{\leq q-1} B$  to  $\tau^{\leq q} B$  and from  $\tau^{\leq q} B$  to  $\tau^{\leq q+1} B$ . The diagonal arrows are labeled with 0 and [1].)

betrachten. Die Morphismen vom Grad Eins der ausgezeichneten Dreiecke verschwinden wie angedeutet, da gilt  $\text{Der}_{\text{Ab}}(A, B) = 0$  für  $A \in \text{Der}^{\geq 2}(\text{Ab})$  und  $B \in \text{Der}^{\leq 0}(\text{Ab})$  oder expliziter nach [TD] 2.6.16. Alle Morphismen der unteren Horizontalen sind also spaltende Einbettungen in der additiven Kategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$ . Wenden wir auf dieses Diagramm  $\mathcal{H}^n a_* a^*$  an, so erhalten wir eine gradweise unkanonisch spaltende Filtrierung von  $H^n(X \times Y)$  und einen kanonischen Homomorphismus

$$\text{gr } H^n(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=n} H^p(X; H^q(Y))$$

Es ist eine gute Übung zu zeigen, daß unsere Filtrierung den Kohomologiering des Produkts zu einem filtrierten Ring macht und daß unser kanonischer Homomorphismus ein Ringhomomorphismus wird, wenn wir die Multiplikation rechts erklären, indem wir das Produkt

$$H^p(X; K) \times H^q(X; L) \rightarrow H^{p+q}(X; K \otimes L)$$

aus 2.5.16 mit  $K = H^k(Y)$  und  $L = H^l(Y)$  anwenden und den Effekt des Cup-Produkts  $H^k(Y) \otimes H^l(Y) \rightarrow H^{k+l}(Y)$  nachschalten.



### 3.3 Charakteristische Klassen und Produkte

3.3.1 (**Äquivariante Kohomologie als Trennfunktor**). Bezeichne  $\text{Topog}$  die Kategorie der topologischen Räume mit Operation einer topologischen Gruppe. Aus dem nicht-äquivarianten Fall 2.6.5 folgt unmittelbar, daß auch die äquivariante Kohomologie  $(G \backslash X) \mapsto H_G^*(X)$  aus [TG] 7.2.4 einen Trennfunktor

$$H^* : \text{Topog} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$$

liefert, dessen Effekt auf Trennungen durch das „Produkt der Rückzüge“ gegeben wird.

3.3.2 (**Charakteristischer Homomorphismus**). Gegeben  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein topologischer Raum und  $E$  ein  $G$ -Torsor auf  $X$  erinnere ich daran, wie wir in [TG] 7.2.8 den charakteristischen Homomorphismus

$$C_E : H_G^*(\text{top}) \rightarrow H^*(X)$$

erklärt hatten als die Komposition  $H_G^*(\text{top}) \rightarrow H_G^*(E) \xrightarrow{\sim} H^*(X)$  des äquivarianten Zurückholens längs der konstanten Abbildung mit dem Inversen des Quotienten- isomorphismus  $H^*(X) \xrightarrow{\sim} H_G^*(E)$ .

3.3.3 (**Charakteristische Klassen und Produkt**). Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und topologische Gruppen  $G, H$  und auf  $X$  ein  $G$ -Torsor  $E$  sowie ein  $H$ -Torsor  $F$  ist  $E \times_X F$  ein  $(G \times H)$ -Torsor in offensichtlicher Weise und wir erhalten in  $\text{Topog}$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G \backslash \text{top} & \leftarrow & G \backslash E & \rightarrow & 1 \backslash X \\ \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ (G \times H) \backslash \text{top} & \leftarrow & (G \times H) \backslash (E \times_X F) & \rightarrow & 1 \backslash X \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ H \backslash \text{top} & \leftarrow & H \backslash F & \rightarrow & 1 \backslash X \end{array}$$

Wenden wir darauf äquivariante Kohomologie an, so folgt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_G^*(\text{top}) \otimes H_H^*(\text{top}) & \rightarrow & H^*(X) \otimes H^*(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{G \times H}^*(\text{top}) & \rightarrow & H^*(X) \end{array}$$

mit den durch Rückzug und Produkt gegebenen Vertikalen und den durch unsere charakteristischen Homomorphismen gegebenen Horizontalen. In Formeln ausgedrückt gilt also  $C_E(a)C_F(b) = C_{E \times F}(a \times b)$  mit der Notation  $a \times b := \text{pr}_1^*(a) \text{pr}_2^*(b)$  für den Effekt der linken Vertikale.

**3.3.4 (Kohomologieringe klassifizierender Räume und Produkte).** Jede Liegruppe  $G$  ist offenlokal zusammenziehbar und dasselbe folgt mit [TG] 7.3.5 für die Milnorkonstruktion  $EG$  und den klassifizierenden Raum  $BG$ . Gegeben Liegruppen  $G, H$  derart, daß alle Kohomologiegruppen  $H^q(BG)$  der ersten freie endlich erzeugte abelsche Gruppen sind, liefert das Kreuzprodukt der Kohomologie nach der Künnethformel 3.2.6 also einen Isomorphismus

$$H_G^*(\text{top}) \otimes H_H^*(\text{top}) \xrightarrow{\sim} H_{G \times H}^*(\text{top})$$

**3.3.5 (Chern'sche Klassen).** Gegeben ein Torus  $T(n) := (S^1)^n$  liefern nach 3.3.4 für jede Wahl eines Erzeugers  $z \in H_{S^1}^2(\text{top})$  dessen Rückzüge unter den Projektionen unseres Torus auf seine Faktoren Klassen  $z_1, \dots, z_n \in H_{T(n)}^2(\text{top})$  mit

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] \xrightarrow{\sim} H_{T(n)}^*(\text{top})$$

Nach [TD] 3.4.20 liefert weiter der Rückzug unter der Einbettung  $T(n) \hookrightarrow U(n)$  der Diagonalmatrizen in die unitären Matrizen einen Isomorphismus  $H_{U(n)}^*(\text{top}) \xrightarrow{\sim} H_{T(n)}^*(\text{top})^{S_n}$ . Insgesamt erhalten wir so einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n} \xrightarrow{\sim} H_{U(n)}^*(\text{top})$$

Ebenso erhalten wir auch für die entsprechenden komplexen Gruppen Isomorphismen  $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] \xrightarrow{\sim} H_{T(n; \mathbb{C})}^*(\text{top})$  und

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n} \xrightarrow{\sim} H_{GL(n; \mathbb{C})}^*(\text{top})$$

Nach [AL] 2.9.6 haben wir nun  $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[s_1, s_2, \dots, s_n]$  für  $s_q$  das  $q$ -te elementarsymmetrische Polynom in den  $z_i$ . Dies Polynom  $s_q$  ist homogen vom Grad  $q$  in den  $z_i$  und bereits sein Bild  $c_q \in H_{GL(n; \mathbb{C})}^*(\text{top})$  unter dem obigen Isomorphismus heißt manchmal die  **$q$ -te Chern'sche Klasse**. Gegeben ein  $GL(n; \mathbb{C})$ -Hauptfaserbündel  $E$  auf einem Raum  $X$  erklärt man dann seine  **$q$ -te Chern'sche Klasse** durch die Vorschrift

$$c_q(E) := C_E(c_q) \in H^{2q}(X)$$

für  $C_E : H_{GL(n; \mathbb{C})}^*(\text{top}) \rightarrow H^*(X)$  den charakteristischen Homomorphismus. Die Chern'schen Klassen eines komplexen Vektorbündels  $V$  werden schließlich erklärt als  $c_q(V) := c_q(E)$  mit  $E = E_V$  dem zugehörigen  $GL(n; \mathbb{C})$ -Torsor alias dem Rahmenbündel von  $V$  aus [?] ??.

**3.3.6.** Gegeben ein  $n$ -dimensionales komplexes Vektorbündel  $V$  auf einem Raum  $X$  vereinbaren wir zusätzlich  $c_0(V) := 1$  und erklären die **totale Chern'sche Klasse**  $c_*(V) \in H^*(X)$  von  $V$  durch die Vorschrift

$$c_*(V) := c_0(V) + c_1(V) + c_2(V) + \dots + c_n(V) \in H^*(X)$$

**Lemma 3.3.7.** Für die totale Chern'schen Klasse der direkten Summe von zwei komplexen Vektorbündeln gilt im Kohomologiering der Basis die **Whitney'sche Summenformel**

$$c_*(V \oplus W) = c_*(V)c_*(W)$$

*Beweis.* Die elementarsymmetrischen Polynome  $s_q \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n}$  können charakterisiert werden durch die Identität

$$(1 + z_1)(1 + z_2) \dots (1 + z_n) = 1 + s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

zusammen mit der Eigenschaft, daß  $s_q$  homogen ist vom Grad  $q$ . Erklären wir unseren Ausdruck als das „totale symmetrische Polynom“  $s_*(z_1, \dots, z_n)$ , so gilt für  $l + m = n$  mithin  $s_*(z_1, \dots, z_n) = s_*(z_1, \dots, z_l)s_*(z_{l+1}, \dots, z_n)$ . Sei nun  $X$  die Basis unserer Bündel. Bezeichnet  $D$  das Rahmenbündel von  $V \oplus W$ , so haben wir per definitionem  $s_*(z_1, \dots, z_n) \mapsto c_*(V \oplus W)$  unter der Komposition

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n} \xrightarrow{\sim} H_{\text{GL}(n; \mathbb{C})}^*(\text{top}) \xrightarrow{C_D} H^*(X)$$

Jetzt betrachten wir für  $l + m = n$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T(l; \mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{GL}(l; \mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ T(l; \mathbb{C}) \times T(m; \mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{GL}(l; \mathbb{C}) \times \text{GL}(m; \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ T(n; \mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{GL}(n; \mathbb{C}) \end{array}$$

mit den jeweiligen Projektionen als Pfeile nach oben und dem „Zusammenblocken“  $\phi : (A, B) \mapsto \text{diag}(A, B)$  als Pfeile nach unten. Zusätzlich betrachten noch einmal dasselbe Diagramm mit  $m$  statt  $l$  in der oberen Horizontale. Gehen wir zu den Kohomologierungen der jeweiligen klassifizierenden Räume über, so ergibt sich ein weiteres kommutatives Diagramm, das mit unseren ausgezeichneten Isomorphismen isomorph wird zum Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_l] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_l]^{S_l} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_l] \otimes \mathbb{Z}[w_1, \dots, w_m] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_l]^{S_l} \otimes \mathbb{Z}[w_1, \dots, w_m]^{S_m} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]^{S_n} \end{array}$$

mit der Umbenennung von  $z_{l+1}, \dots, z_n$  zu  $w_1, \dots, w_m$  bei beiden Pfeilen nach oben. Im analogen Fall mit  $m$  statt  $l$  gilt Analoges. Sind nun  $E, F$  die Rahmenbündel von  $V, W$ , so haben wir offensichtlich  $D \cong \phi_*(E \times F)$  und damit

$$\begin{aligned}
c_*(V \oplus W) &= C_D(s_*(z_1, \dots, z_n)) && \text{per definitionem} \\
&= C_{\phi_*(E \times F)}(s_*(z_1, \dots, z_l) s_*(z_{l+1}, \dots, z_n)) && \text{nach Vorigem} \\
&= C_{E \times F}(s_*(z_1, \dots, z_l) \times s_*(w_1, \dots, w_m)) && \text{nach [TG] 7.2.10} \\
&= C_E(s_*(z_1, \dots, z_l)) C_F(s_*(w_1, \dots, w_m)) && \text{nach 3.3.3} \\
&= c_*(V) c_*(W) && \text{per definitionem.} \quad \square
\end{aligned}$$

**Vorschau 3.3.8 (Stiefel-Whitney-Klassen).** Nun arbeiten wir mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und mit reellen Gruppen. Dann liefert explizite Rechnung einen Isomorphismus  $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\sim} H_{T(n; \mathbb{R})}^*(\text{top}; \mathbb{F}_2)$  mit Variablen vom Grad Eins und Rückzug liefert wieder  $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]^{S_n} \xrightarrow{\sim} H_{GL(n; \mathbb{R})}^*(\text{top}; \mathbb{F}_2)$ , da dieselbe Argumentation wie zuvor zeigt, daß sich zwischendrin homologisch nichts wegkürzen kann, sonst bräuchte  $H_{T(n; \mathbb{R})}^*(\text{top}; \mathbb{F}_2)$  als Modul über  $H_{GL(n; \mathbb{R})}^*(\text{top}; \mathbb{F}_2)$  zu viele Erzeuger. Dann wiederholt man alle Argumente. Das Bild des  $q$ -ten elementarsymmetrischen Polynoms  $s_q$  in  $H_{GL(n; \mathbb{R})}^q(\text{top}; \mathbb{F}_2)$  heißt in diesem Fall die  **$q$ -te Stiefel-Whitney-Klasse**. Ebenso im Fall  $GL(n; \mathbb{H})$ , in dem wir die sogenannten **Pontrjagin-Klassen** mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten in allen durch Vier teilbaren Graden erhalten.

## 4 Trennrückzug und Eigvorschub

### 4.1 Lokal eigentlicher Basiswechsel

4.1.1. Ich erinnere an die Garbeneigopkofaserung aus [TG] 6.4.9, eine Kofaserung

$$\text{Ab}_{\text{Top}^s}^! \rightarrow \text{Top}^s$$

über topologischen Räumen mit nur separierten Abbildungen als Morphismen durch abelschen Garben mit eigentlichen Opkomorphismen [TG] 6.4.4 als Morphismen. Im folgenden führen wir „lokal eigentliche separierte Abbildungen“ oder kurz „les-Abbildungen“ zwischen topologischen Räumen ein und zeigen dann in 4.4.10, daß der „Trennrückzug“ unter einer beliebigen Trennung topologischer Räume Tupel eigkokartesischer Opkomorphismen von flachen Garben über les-Abbildungen zu einem eigkokartesischen Opkomorphismus von flachen Garben über einer les-Abbildung macht. Der Beweis dieser Aussage bildet den Schlußpunkt unserer Diskussion des underivierten Drei-Funktoren-Kalküls. Diese Allgemeinheit geht in Richtung von Grothendieck’s Desiderata nach [Gro86, 1.5.2, Note 81<sub>2</sub>]. In [RV04] wird das Konzept einer lokal eigentlichen Abbildung unter einer anderen Bezeichnung eingeführt.

**Definition 4.1.2.** Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  topologischer Räume heiße **lokal eigentlich**, wenn es für jeden Punkt  $x \in X$  und jede Umgebung  $U$  von  $x$  Umgebungen  $A \subset U$  von  $x$  und  $V \subset Y$  von  $f(x)$  gibt derart, daß gilt  $f(A) \subset V$  und daß  $f : A \rightarrow V$  eigentlich ist.

*Vorschau* 4.1.3. Sie dürfen als Übung 4.1.19 zeigen, daß jede Verknüpfung von lokal eigentlichen Abbildungen lokal eigentlich ist.

*Beispiele* 4.1.4. Eine Einbettung  $i : X \hookrightarrow Y$  von topologischen Räumen ist lokal eigentlich genau dann, wenn ihr Bild lokal abgeschlossen ist. Jede étale Abbildung ist lokal eigentlich. Die konstante Abbildung von einem Raum auf einen Punkt ist lokal eigentlich genau dann, wenn der fragliche Raum lokal kompakt ist.

**Lemma 4.1.5.** *Jede eigentliche und separierte Abbildung ist lokal eigentlich.*

4.1.6. Das ist das relative Analogon der Tatsache, daß jeder kompakte Hausdorffraum lokal kompakt ist. Eine beliebige eigentliche Abbildung muß keineswegs lokal eigentlich sein, selbst wenn sie konstant ist.

4.1.7. Wir schicken dem Beweis eine Vorbemerkung voraus. Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Gegeben  $Z \subset X$  mit  $f : Z \rightarrow Y$  eigentlich und  $U \Subset X$  ist  $\{y \in Y \mid (f^{-1}(y) \cap Z) \subset U\}$  offen in  $Y$ , denn für  $K \Subset X$  das Komplement von  $U$  ist das Komplement unserer Menge genau  $f(Z \cap K)$ .

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  unsere eigentliche und separierte Abbildung. Gegeben  $x \in X$  mit einer offenen Umgebung  $U \Subset X$  betrachten wir  $Z := X \setminus U$ . Wir setzen  $y := f(x)$ . Für jeden Punkt  $z \in f^{-1}(y) \cap Z$  gibt es eine offene Umgebung  $W_z \Subset X$  von  $z$  und eine offene Umgebung  $B_z \Subset U$  von  $x$  mit  $W_z \cap B_z = \emptyset$ . Endlich viele solche  $W_z$  überdecken das Kompaktum  $f^{-1}(y) \cap Z$ . Ist  $W$  ihre Vereinigung und  $B$  der Schnitt der zugehörigen  $B_z$ , so gilt  $x \in B \Subset U \Subset X$ ,  $(f^{-1}(y) \cap Z) \subset W \Subset X$  und  $B \cap W = \emptyset$ . Nach 4.1.7 finden wir eine offene Umgebung  $V \Subset Y$  von  $y$  mit  $(f^{-1}(V) \cap Z) \subset W$ . Der Abschluß  $A$  von  $B \cap f^{-1}(V)$  in  $f^{-1}(V)$  trifft also  $f^{-1}(V) \cap Z$  nicht und ist folglich eine in  $U$  enthaltene Umgebung von  $x$  derart, daß  $f : A \rightarrow V$  eigentlich ist.  $\square$

**Lemma 4.1.8.** *Seien  $g : Z \rightarrow X$  und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $f \circ g$  lokal eigentlich und  $f$  separiert, so ist bereits  $g$  lokal eigentlich.*

*Beweis.* Sei  $W \subset Z$  eine Umgebung von  $z \in Z$ . Ist  $f \circ g$  lokal eigentlich, so gibt es Umgebungen  $A \subset W$  von  $z$  und  $V$  von  $f(g(z))$  derart, daß  $f \circ g$  eine eigentliche Abbildung  $A \rightarrow V$  induziert. Diese Abbildung faktorisiert als

$$A \xrightarrow{\check{g}} f^{-1}(V) \xrightarrow{\check{f}} V$$

mit  $\check{g}$  und  $\check{f}$  jeweils den von  $g$  und  $f$  induzierten Abbildungen. Da  $\check{f}$  nach [TM] 2.4.10 separiert ist, zeigt [TM] 2.4.11, daß  $\check{g} : A \rightarrow f^{-1}(V)$  eigentlich ist. Das zeigt, daß  $g$  lokal eigentlich ist.  $\square$

4.1.9. Im folgenden werden lokal eigentliche separierte Abbildungen oft vorkommen. Wir nennen sie abkürzend **les-Abbildungen** oder als Eigenschaft **les**.

**Korollar 4.1.10.** *Jede stetige Abbildung  $g : Z \rightarrow X$  von einem lokal kompakten Hausdorffraum  $Z$  in einen Hausdorffraum  $X$  ist eine les-Abbildung.*

*Beweis.* Da  $Z$  lokal kompakt ist und  $X$  Hausdorff, muß  $g$  lokal eigentlich sein nach 4.1.8. Da  $Z$  Hausdorff ist, ist  $g$  separiert.  $\square$

**Lemma 4.1.11 (Lokale Eigentlichkeit ist stabil unter Basiswechsel).** *Ist in einem kartesischen Diagramm einer der ursprünglichen Pfeile lokal eigentlich, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.*

*Beweis.* Wir schreiben unser kartesisches Diagramm aus als

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

Wir nehmen  $f$  lokal eigentlich an und wollen dasselbe für  $g$  zeigen. Sei also  $t \in T$  gegeben mit einer Umgebung  $S \subset T$ . Wir können, indem wir  $S$  notfalls verkleinern, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es eine Umgebung  $V \subset X$  von  $q(t)$  und eine Umgebung  $W \subset Z$  von  $g(t)$  gibt derart, daß gilt  $g(S) \subset W$  und  $q(S) \subset V$  und daß auch das Diagramm von Teilräumen

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{q} & V \\ g \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

kartesisch ist. Dann finden wir eine Umgebung  $A \subset V$  von  $q(t)$  und eine Umgebung  $U \subset Y$  von  $f(q(t))$  derart, daß  $f : A \rightarrow U$  eigentlich ist. Dasselbe folgt für den durch Basiswechsel entstehenden Morphismus  $g : q^{-1}(A) \rightarrow p^{-1}(U)$ .  $\square$

**Satz 4.1.12 (Vereigentlichung).** Für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gilt:

1. Die Mengen  $U \sqcup V$  mit  $U \Subset X$  und  $V \Subset Y$  und  $f : f^{-1}(V) \setminus U \rightarrow V$  eigentlich bilden eine Topologie auf der disjunkten Vereinigung  $X \sqcup Y$ ;
2. Die Abbildung  $\bar{f} := (f, \text{id}_Y) : X \sqcup Y \rightarrow Y$  ist eigentlich in Bezug auf diese Topologie.

4.1.13. Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  notieren wir  $X \sqcup Y$  mit seiner Topologie aus dem Satz  $X \sqcup_f Y$  oder abkürzend  $X \sqcup Y$  und nennen  $\bar{f} : X \sqcup Y \rightarrow Y$  die **Vereigentlichung von  $f$** . Ist  $Y$  ein Punkt, so spezialisiert unsere Vereigentlichung zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Ist  $f$  eine abgeschlossene Einbettung, so spezialisiert unsere Vereigentlichung zum Koproduct  $X \sqcup Y$  der beteiligten Räume. Offensichtlich ist die Einbettung von  $X$  nach  $X \sqcup Y$  eine offene Einbettung und die Einbettung von  $Y$  nach  $X \sqcup Y$  eine abgeschlossene Einbettung.

*Beweis.* 1. Sei eine Familie  $(U_i \sqcup V_i)_{i \in I}$  solcher Mengen gegeben. So ist  $U := \bigcup U_i$  offen in  $X$  und  $f : f^{-1}(V_i) \setminus U \rightarrow V_i$  ist eigentlich als Verknüpfung der abgeschlossenen Einbettung  $f^{-1}(V_i) \setminus U \rightarrow f^{-1}(V_i) \setminus U_i$  mit der eigentlichen Abbildung  $f : f^{-1}(V_i) \setminus U_i \rightarrow V_i$ . Da Eigentlichkeit lokal ist in der Basis, ist dann für  $V := \bigcup V_i$  auch  $f : f^{-1}(V) \setminus U \rightarrow V$  eigentlich. Seien andererseits  $(U_1 \sqcup V_1)$  und  $(U_2 \sqcup V_2)$  gegeben. Mit  $f^{-1}(V_1) \setminus U_1 \rightarrow V_1$  ist auch  $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2) \setminus U_1 \rightarrow V_1 \cap V_2$  eigentlich als Basiswechsel einer eigentlichen Abbildung. Dasselbe gilt für  $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2) \setminus U_2 \rightarrow V_1 \cap V_2$  und mit [TM] 2.4.18 folgt die Eigentlichkeit von  $f : f^{-1}(V_1 \cap V_2) \setminus (U_1 \cap U_2) \rightarrow V_1 \cap V_2$ .

2. Offensichtlich ist  $\bar{f} := (f, \text{id}_Y) : X \sqcup_f Y \rightarrow Y$  stetig. Diese Abbildung ist sogar abgeschlossen, denn wir haben

$$\bar{f}(X \sqcup_f Y \setminus U \sqcup V) = Y \setminus V \cup f(X \setminus U) = Y \setminus V \cup f(f^{-1}(V) \setminus U)$$

Gegeben ein weiterer topologischer Raum  $Z$  zeigen wir nun, daß die offensichtliche Bijektion eine stetige Abbildung

$$(X \times Z) \sqcup (Y \times Z) \rightarrow (X \sqcup Y) \times Z$$

ist. In der Tat, gegeben  $U \sqcup V \subseteq X \sqcup Y$  und  $W \subseteq Z$  gilt es zu zeigen  $(f \times \text{id}_Z) : f^{-1}(V \times W) \cup (U \times W) \rightarrow V \times W$  eigentlich. Das aber folgt aus der Eigentlichkeit von  $f : f^{-1}(V) \cup U \rightarrow V$  durch Basiswechsel. Um nun zu zeigen, daß  $\tilde{f}$  eigentlich ist, betrachten wir für einen weiteren Raum  $Z$  die Komposition

$$(X \sqcup Y) \times Z \rightarrow (X \times Z) \sqcup (Y \times Z) \rightarrow Y \times Z$$

und müssen nur bemerken, daß die erste dieser Abbildungen abgeschlossen ist als Inverse unserer stetigen Bijektion, die wir gerade hergeleitet hatten, und daß die zweite abgeschlossen ist nach unserer Vorüberlegung vom Beginn des Beweises des zweiten Teils.  $\square$

**Satz 4.1.14.** *Die Vereigentlichung einer les-Abbildung ist separiert.*

4.1.15. Das ist ein relatives Analogon der Tatsache, daß die Einpunktkompaktifizierung eines lokal kompakten Hausdorffraums Hausdorff ist.

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  unsere les-Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß  $\tilde{f} : X \sqcup Y \rightarrow Y$  separiert ist, daß also je zwei verschiedene Punkte aus ein- und derselben Faser disjunkte Umgebungen haben. Der einzig nichttriviale Fall betrifft Punkte  $\text{in}_X(x), \text{in}_Y(y)$  mit  $f(x) = y$ . Nach Annahme gibt es eine offene Umgebung  $V \subseteq Y$  von  $y$  und eine Umgebung  $A \subset X$  von  $x$  mit  $f(A) \subset V$  und  $f : A \rightarrow V$  eigentlich. Dann ist die Verknüpfung  $A \rightarrow f^{-1}(V) \rightarrow V$  eigentlich. Da  $f^{-1}(V) \rightarrow V$  separiert ist, muß auch  $A \rightarrow f^{-1}(V)$  eigentlich sein und wir finden  $A \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ . Bilden wir also  $U := f^{-1}(V) \setminus A$ , so ist  $U \sqcup V$  eine Umgebung von  $\text{in}_Y(y)$  in  $X \sqcup Y$  und disjunkt zur Umgebung  $\text{in}_X(A)$  von  $\text{in}_X(x)$ .  $\square$

**Satz 4.1.16 (Lokal eigentlicher Basiswechsel).** *Seien  $pg = fq$  ein kartesisches Quadrat von topologischen Räumen mit les-Vertikalen  $f, g$  und  $\tilde{p}\tilde{q} = \tilde{f}\tilde{q}$  darüber ein kommutatives Diagramm von Opkomorphismen abelscher Garben mit  $\tilde{p}, \tilde{q}$  kartesisch. Ist dann  $\tilde{f}$  eigkokartesisch, so auch  $\tilde{g}$ .*

4.1.17. In anderen Worten besagt unser Satz, daß die vom Basiswechsel ?? der Garbenopfaserung für Funktoren zwischen nichttopponierten Kategorien von Garben induzierte Transformation  $p^* f_* \Rightarrow g_* q^*$  unter den genannten Voraussetzungen Isomorphismen  $p^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} g_* q^* \mathcal{F}$  auf den jeweiligen Unterobjekten induziert, also eine Isotransformation

$$p^* f_* \xrightarrow{\sim} g_* q^*$$



*Beweis.* Nach 4.1.14 und 4.1.19 ist eine stetige Abbildung genau dann *les*, wenn sie sich als Verknüpfung einer offenen Einbettung gefolgt von einer separierten eigentlichen Abbildung schreiben läßt. Nach der Kofaserungseigenschaft eigentlicher Vorschübe im Fall separierter Abbildungen [TG] 6.4.9 reicht es also, unsere Aussage für  $f$  separiert eigentlich und für  $f$  eine offene Einbettung zu zeigen. Im ersten Fall ist das eigentlicher Basiswechsel [TG] 6.3.23. Im zweiten Fall der Ausdehnung durch Null ist die Behauptung auch schnell geprüft.  $\square$

## Übungen

*Übung 4.1.18.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Besitzt  $X$  eine Überdeckung durch offene Teilmengen  $U$  derart, daß die Restriktionen  $f : U \rightarrow Y$  jeweils lokal eigentlich sind, so ist auch  $f$  selbst bereits lokal eigentlich.

*Übung 4.1.19.* Jede Verknüpfung von lokal eigentlichen Abbildungen ist lokal eigentlich. Eine stetige Abbildung ist genau dann *les*, wenn sie sich als Verknüpfung einer offenen Einbettung gefolgt von einer separierten eigentlichen Abbildung darstellen läßt.

## 4.2 Kompakte Schnitte und Kolimites

**Lemma 4.2.1 (Filtrierende Kolimites und kompakte Schnitte).** *Das Bilden der Schnitte mit kompaktem Träger für abelsche Garben auf einem lokal kompakten Hausdorffraum vertauscht mit filtrierenden Kolimites von abelschen Garben, in Formeln*

$$\text{colf}(\Gamma_! \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(\text{colf} \mathcal{F}_i)$$

*Beispiel 4.2.2.* Gegeben  $K \subset X$  kompakt notieren wir  $\Gamma_K(X; \mathcal{F})$  die Menge der globalen Schnitte  $s \in \Gamma(X; \mathcal{F})$  mit Träger  $\text{supp}(s) \subset K$ . Der Funktor  $\Gamma_K$  vertauscht auch auf lokal kompakten Hausdorffräumen keineswegs mit filtrierenden Kolimites. Als Gegenbeispiel mag man den direkten Limes der  $a_{i*} \mathbb{Z}_{[0,1/i]}$  betrachten für  $a_i : [0, 1/i] \hookrightarrow \mathbb{R}$  die Einbettungen und die offensichtlichen Epimorphismen von abelschen Garben als Systemmorphismen.

*Beispiel 4.2.3.* Ist  $X$  ein unendlicher diskreter Raum, so ist der Raum der globalen Schnitte des Koprodukts aller Wolkenkratzergarben  $\mathbb{Z}_{(x)}$  für  $x \in X$  größer als das Koprodukt der Räume der globalen Schnitte der Summanden. Der Funktor der globalen Schnitte vertauscht mithin auch auf lokal kompakten Hausdorffräumen keineswegs mit filtrierenden Kolimites.

*Beweis.* Die Injektivität benötigt keinerlei Annahmen und war auch bereits Übung [TG] 4.8.20. Wir führen das Argument nocheinmal aus. Sicher ist der Kolimes

eines Systems von abelschen Garben die Garbifizierung des Kolimes in der Kategorie der abelschen Prägarben. Um im Lemma die Injektivität zu zeigen, beginnen wir mit einem Schnitt  $s \in \Gamma_!(X; \mathcal{F}_i)$  für ein vorgegebenes  $i \in I$ . Geht er rechts nach Null, so gibt es für jeden Punkt  $x \in X$  nach der Transitivität von Kolimites [TS] 7.1.34 eine offene Umgebung  $U(x)$  und einen Index  $i(x)$  mit  $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}_{i(x)}(U(x))$ . Endlich viele  $U(x)$  überdecken  $\text{supp}(s)$ , ein  $i$  wird erreicht von allen beteiligten  $i(x)$ , und dann gilt offensichtlich  $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}_i(X)$ . Das zeigt die Injektivität. Um die Surjektivität zu zeigen, ziehen wir uns zunächst auf den Fall  $X$  kompakt zurück. Sei dazu ein Schnitt  $s \in \Gamma_!(X; \text{colf } \mathcal{F}_i)$  gegeben. Wir finden  $U \subset X$  offen mit kompaktem Abschluß und  $\text{supp}(s) \subset U$ . Finden wir ein  $j$  und ein  $\tilde{s} \in \Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}_j)$  mit  $\tilde{s} \mapsto s|_{\bar{U}}$ , so folgt unmittelbar  $\tilde{s}|_{\partial\bar{U}} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial\bar{U}; \text{colf } \mathcal{F}_i)$  und nach dem bereits bewiesenen  $\tilde{s}|_{\partial\bar{U}} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial\bar{U}; \mathcal{F}_l)$  für geeignetes  $l \geq j$ . Also läßt sich das Bild  $\hat{s} \in \Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}_l)$  von  $\tilde{s}$  durch Null fortsetzen zu einem Schnitt  $\hat{s} \in \Gamma_!(X; \mathcal{F}_l)$  mit  $\hat{s} \mapsto s$ , und das war gerade zu zeigen. Wir dürfen also  $X$  kompakt annehmen. Gegeben ein Schnitt  $s \in \Gamma(X; \text{colf } \mathcal{F}_i)$  gibt es für jeden Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U(x)$  und einen Index  $i(x)$  und einen Schnitt  $\tilde{s}(x) \in \mathcal{F}_{i(x)}(U(x))$  mit  $s(x) \mapsto \tilde{s}(x)|_{U(x)}$ . Wir dürfen unsere  $U(x)$  kompakt annehmen. Weiter gibt es  $E \subset X$  endlich derart, daß die  $U(x)$  mit  $x \in E$  bereits  $X$  überdecken. Wählen wir  $j$  hinreichend groß, so können wir nach der bereits bewiesenen Injektivität annehmen, daß für alle  $x, y \in E$  die Bilder von  $\tilde{s}(x)$  und  $\tilde{s}(y)$  in  $\mathcal{F}_j(U(x) \cap U(y))$  übereinstimmen. Dann aber verkleben sie zu einem globalen Schnitt und der repräsentiert das gesuchte Urbild unseres Schnittes  $s$ .  $\square$

**Lemma 4.2.4.** *Der Eigvorschub von abelschen Garben unter les-Abbildungen vertauscht mit filtrierenden Kolimites.*

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  les. Wir behaupten, daß für jedes gerichtete System von abelschen Garben auf  $Y$  die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\text{colf}(f_! \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} f_!(\text{colf } \mathcal{F}_i)$$

liefert. Da das Zurückholen mit Kolimites vertauscht, können wir uns mit Basiswechsel 4.1.16 auf den Fall eines einpunktigen Raums  $Y$  zurückziehen und müssen also nur für jeden lokal kompakten Hausdorffraum zeigen, daß das Bilden der Schnitte mit kompaktem Träger mit filtrierenden Kolimites vertauscht. Das aber wissen wir aus 4.2.1.  $\square$

**4.2.5 (Koproduct als Eigvorschub).** Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten von  $\text{Ab}_{/X}$  und sind  $\text{em}_i : X \rightarrow X \times I$  die Einbettungen und ist ein Objekt  $\mathcal{G} \in \text{Ab}_{/X \times I}$  gegeben zusammen mit Isomorphismen  $\text{em}_i^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_i$ , so liefern diese Isomorphismen zusammen nach ?? einen Isomorphismus  $\bigoplus_{i \in I} \text{em}_{i!} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$  und der Eigvorschub unter der Projektion auf  $X$  liefert

nach 4.2.4 einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}_i \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{X!} \mathcal{G}$$

**Lemma 4.2.6 (Filtrierende Kolimites kompaktweicher Garben).** *Auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  ist jeder filtrierende Kolimes kompaktweicher Garben wieder kompaktweich.*

*Beweis.* Sei  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  ein filtrierendes System kompaktweicher Garben auf  $X$ . Kolimites vertauschen nach [TS] 7.1.30 mit dem Rückzug von Garben, da dieser Rückzug einen Rechtsadjungierten hat. Ist  $u : K \hookrightarrow X$  die Einbettung einer kompakten Teilmenge, so ist mithin der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus  $\text{colf } u^{(*)} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} u^{(*)} \text{colf } \mathcal{F}_i$  und 4.2.1 liefert uns einen Isomorphismus

$$\text{colf } \Gamma(K; \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \Gamma(K; \text{colf } \mathcal{F}_i)$$

Jeder Schnitt  $t$  rechts ist also das Bild eines Schnitts  $s \in \Gamma(K; \mathcal{F}_i)$  für ein  $i \in I$ . Da  $\mathcal{F}_i$  kompaktweich ist, muß er von einem globalen Schnitt  $\tilde{s} \in \Gamma(X; \mathcal{F}_i)$  herkommen, und dieser globale Schnitt  $\tilde{s}$  hinwiederum liefert einen globalen Schnitt  $\tilde{t} \in \Gamma(X; \text{colf } \mathcal{F}_i)$ , der unser  $t$  fortsetzt.  $\square$

### 4.3 Projektionsformel

**Proposition 4.3.1 (Tensorprodukt und Schnitte mit kompaktem Träger).** *Gegeben  $X$  ein lokal kompakter Hausdorffraum und  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $X$  und  $G$  eine flache abelsche Gruppe ist die natürliche Abbildung ein Isomorphismus*

$$\Gamma_! \mathcal{F} \otimes G \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes G)$$

*Ist zusätzlich  $\mathcal{F}$  kompaktweich, so auch  $\mathcal{F} \otimes G$ .*

4.3.2. Analoges mit  $\otimes_R$  gilt mit demselben Beweis für jeden Ring  $R$ , jede Garbe von  $R$ -Rechtsmoduln  $\mathcal{F}$  und jeden flachen  $R$ -Modul  $G$ .

Vorschau 4.3.3. Wir zeigen Varianten in 5.9.8 und 5.8.1.

*Beispiel 4.3.4.* Ich gebe ein Gegenbeispiel im Fall, daß  $G$  nicht flach ist. Ist etwa  $\pi : S^1 \rightarrow \text{pt}$  die Projektion und  $\mathcal{F}$  das nichtkonstante lokale System auf  $S^1$ , das halmweise frei ist über  $\mathbb{Z}$  von Rang Eins, so ist  $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  konstant mit  $\Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , aber wir haben  $\Gamma_! \mathcal{F} = 0$ .

*Beispiel 4.3.5.* Ist in der Situation der Proposition  $K \subset X$  ein Kompaktum und bezeichnet  $\Gamma_K$  Schnitte mit Träger in  $K$ , so muß unser Isomorphismus keineswegs

Isomorphismen  $\Gamma_K \mathcal{F} \otimes G \xrightarrow{\sim} \Gamma_K(\mathcal{F} \otimes G)$  induzieren. Ein Gegenbeispiel liefert der flache  $\mathbb{Z}$ -Modul  $G = \mathbb{Q}$  und die abelsche Garbe

$$\mathcal{F} = \prod_{n=1}^{\infty} i_{n*}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{[0,1/n]}$$

für  $i_n : [0, 1/n] \hookrightarrow \mathbb{R}$  die Einbettungen. Die Garbe  $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  hat nur im Ursprung einen von Null verschiedenen Halm, aber die Garbe  $\mathcal{F}$  hat keine von Null verschiedenen Schnitte mit dem Ursprung als Träger.

*Beweis.* Wir beginnen mit der Injektivität. Gegeben ein Element  $s \in \Gamma_! \mathcal{F} \otimes G$  mit  $s \mapsto 0$  besitzt jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U(x)$  mit  $s \mapsto 0 \in \mathcal{F}(U(x)) \otimes G$ . Schreiben wir  $s = \sum s_\nu \otimes g_\nu$ , so überdecken endlich viele  $U_1, \dots, U_r$  dieser  $U(x)$  die Träger aller  $s_\nu$ . Nehmen wir als  $U_0$  das Komplement der Vereinigung dieser Träger, so liefert das Einschränken eine Injektion

$$\Gamma_! \mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{i=0}^r \mathcal{F}(U_i)$$

Sie bleibt eine Injektion nach dem Tensorieren mit unserem flachen  $G$ , und das zeigt die Injektivität. Um die Surjektivität zu zeigen, ziehen wir uns zunächst auf den Fall von kompaktem  $X$  zurück. Gegeben  $s \in \Gamma(\mathcal{F} \otimes G)$  mit Träger in einem Kompaktum  $K$  finden wir stets  $U \Subset X$  offen mit  $K \subset U$  und  $\bar{U}$  kompakt. Ist der Fall von kompaktem  $X$  bekannt, so finden wir schon mal ein Urbild  $\tilde{s} \in \Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}) \otimes G$  von  $s|_{\bar{U}}$  und wegen der bereits bewiesenen Injektivität gilt  $\tilde{s} \mapsto 0 \in \Gamma(\partial\bar{U}; \mathcal{F}) \otimes G$ . Da  $G$  flach ist, kommt damit  $\tilde{s}$  von

$$\ker(\Gamma(\bar{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\partial\bar{U}; \mathcal{F})) \otimes G$$

her und wir finden durch Ausdehnen durch Null auf dem ersten Tensorfaktor das gesuchte Urbild von  $s$  in  $\Gamma_!(X; \mathcal{F}) \otimes G$ . Wir dürfen also in der Tat ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X$  kompakt annehmen. Sei nun also  $X$  kompakt und  $s \in \Gamma(\mathcal{F} \otimes G)$ . So gibt es eine endliche Überdeckung  $X = U_1 \cup \dots \cup U_r$  durch Kompakta und  $\tilde{s}_i \in \mathcal{F}(U_i) \otimes G$  mit  $\tilde{s}_i \mapsto s|_{U_i}$ . Wegen der bereits bewiesenen Injektivität haben  $\tilde{s}_i$  und  $\tilde{s}_j$  dasselbe Bild in  $\mathcal{F}(U_i \cap U_j) \otimes G$ . Die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

bleibt aber exakt unter dem Tensorieren mit  $G$  und erlaubt das Verkleben der  $\tilde{s}_i$  zum gesuchten Urbild  $\tilde{s} \in \mathcal{F}(X) \otimes G$  von  $s$ . Um die letzte Aussage zu zeigen, erinnern wir für  $K \subset X$  kompakt aus [TG] 4.8.14, daß für kompaktweiches  $\mathcal{F}$

die Restriktion sogar eine Surjektion  $\Gamma_1 \mathcal{F} \rightarrow \Gamma(K; \mathcal{F})$  liefert. Tensorieren mit  $G$  und Anwenden unseres Resultats mit  $K$  statt  $X$  liefert

$$\Gamma_1 \mathcal{F} \otimes G \rightarrow \Gamma(K; \mathcal{F}) \otimes G \xrightarrow{\sim} \Gamma(K; \mathcal{F} \otimes G)$$

Da diese Verknüpfung über  $\Gamma_1(\mathcal{F} \otimes G)$  faktorisiert, muß auch diese Gruppe surjektiv auf  $\Gamma(K; \mathcal{F} \otimes G)$  abgebildet werden.  $\square$

4.3.6. Gegeben eine stetige Abbildung  $\pi : X \rightarrow Y$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{G}$  auf  $Y$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  liefern unsere allgemeinen Konstruktionen 1.5.15 einen natürlichen Garbenhomomorphismus  $\pi_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \pi_*(\mathcal{F} \otimes \pi^* \mathcal{G})$ . Daß dieser Homomorphismus im allgemeinen kein Isomorphismus sein kann, zeigt bereits das Beispiel der konstanten Abbildung von einer unendlichen Menge auf einen Punkt. Unser natürlicher Homomorphismus induziert weiter offensichtlich einen natürlichen Homomorphismus

$$(\pi_1 \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{F} \otimes \pi^* \mathcal{G})$$

auf den eigentlichen Vorschüben im Sinne von [TG] 6.4.5. Analoges gilt für  $\pi$  einen Morphismus von gekringten Räumen und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  Modulgarben.

**Definition 4.3.7.** Gegeben eine stetige Abbildung nennen wir eine abelsche Garbe auf ihrem Definitionsbereich **faserweise kompaktweich**, wenn ihre Einschränkung auf jede Faser unserer Abbildung kompaktweich ist. Heißt unsere Abbildung  $f$ , so sprechen wir von einer  **$f$ -kompaktweichen** Garbe.

4.3.8. Unser Begriff scheint nur im Fall von les-Abbildungen  $f$  nützlich zu sein. In diesem Fall zeigen wir in 5.1.12, daß jede  $f$ -kompaktweiche Garbe  $f_!$ -entfaltet ist. Die im folgenden gezeigten Zusatzaussagen über die Erhaltung der Eigenschaft „faserweise kompaktweich“ unter verschiedenen Rückzügen werden sich bei der Konstruktion des vollen derivierten Formalismus als hilfreich erweisen.

**Korollar 4.3.9 (Projektionsformel).** *Seien  $\pi : X \rightarrow Y$  eine les-Abbildung und  $\mathcal{G} \in \text{Ab}_{/Y}$  sowie  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  abelsche Garben. Ist  $\mathcal{G}$  flach, so ist die natürliche Abbildung aus 4.3.6 ein Isomorphismus*

$$(\pi_1 \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{F} \otimes \pi^* \mathcal{G})$$

*Ist zusätzlich  $\mathcal{F}$  faserweise kompaktweich, so ist auch  $\mathcal{F} \otimes \pi^* \mathcal{G}$  faserweise kompaktweich. Analoges gilt für Garben von Moduln.*

*Beweis.* Wir dürfen uns mit lokal eigentlichem Basiswechsel 4.1.16 auf den Fall zurückziehen, daß  $Y$  ein Punkt ist. In diesem Fall haben wir die Aussagen bereits als 4.3.1 bewiesen.  $\square$

## 4.4 Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen

4.4.1. Wir nennen eine Menge  $R$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{B}$  **rückzugstabil**, wenn das Faserprodukt für alle Winkel mit einem  $R$ -Morphismus existiert und in jedem kartesischen Quadrat mit einem  $R$ -Morphismus im Ausgangswinkel der gegenüberliegende Morphismus aus dem Faserprodukt auch wieder ein  $R$ -Morphismus ist.

4.4.2. Sei  $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung und sei in der Basis  $\mathcal{B}$  ein rückzugstabiles multiplikatives System  $R$  ausgezeichnet. Unter einem **faserrückzugstabilen multiplikativen System  $S$  über  $R$**  verstehen wir ein multiplikatives System  $S$  in  $\mathcal{C}$  über  $R$  mit der Eigenschaft, daß für jede Hochhebung nach  $\mathcal{C}$  eines kartesischen Quadrats in  $\mathcal{B}$  mit vertikalen  $R$ -Pfeilen zu einem kommutativen Quadrat



in  $\mathcal{C}$  mit den Pfeilen nach rechts kartesisch und dem durchgezogenen Pfeil nach unten einem  $S$ -Morphismus auch der induzierte gestrichelte Pfeil nach unten ein  $S$ -Morphismus ist.

**Beispiel 4.4.3 (Rückzug eigentlicher Opkomorphismen).** In unserer Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.17 bilden die eigentlichen Opkomorphismen über stetigen Abbildungen nach [TG] 6.4.30 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System.

**Beispiel 4.4.4 (Rückzug eigkokartesischer Opkomorphismen).** Wir betrachten unsere Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus [TG] 6.2.12. In der Kategorie der topologischen Räume bilden die les-Abbildungen nach 4.1.11 ein rückzugstabiles multiplikatives System. Darüber bilden die eigkokartesischen Opkomorphismen nach lokal eigentlichem Basiswechsel 4.1.16 ein faserrückzugstabiles multiplikatives System.

4.4.5. In der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  der banalen Trennkategorie einer Kategorie  $\mathcal{T}$  notieren wir  $\mathcal{T}^\parallel$  die Menge aller Morphismen mit der Identität als Indexabbildung. Hat  $\mathcal{T}$  endliche Faserprodukte, so ist  $\mathcal{T}^\parallel$  rückzugstabil in  $\mathcal{T}^\wedge$ . Eine allgemeinere Aussage zeigen wir als Lemma 4.4.8.

**Lemma 4.4.6 (Trennrückzug eigentlicher Opkomorphismen).** *Unter dem Faserfunktorkomplex  $\text{Ab}_{//\text{Top}}^\wedge \rightarrow \text{Top}^\wedge$  auf den Familienkategorien der Garbenopftrennfaserung bilden die Tupel eigentlicher Opkomorphismen ein faserrückzugstabiles multiplikatives System über  $\text{Top}^\parallel$ .*

4.4.7. Das faserrückzugstabile multiplikative System aller Tupel eigentlicher Opkomorphismen aus dem vorhergehenden Lemma notieren wir  $\text{Ab}_{//\text{Top}}^{\parallel\wedge}$ .

*Beweis.* Jeder Morphismus der Familienkategorie der banalen Trennkategorie entsteht nach [TS] ?? durch Vertupeln und Verknüpfen aus Leertrennungen, Einstrennungen und Diagonalzweitrennungen. Es reicht also zu zeigen, daß der Rückzug von Tupeln eigentlicher Opkomorphismen mit jedem Morphismus dieser drei Typen wieder ein eigentlicher Opkomorphismus ist. Im Fall einer Leertrennung ist das die einigermaßen banale Erkenntnis, daß für jeden topologischen Raum  $X$  der identische Opkomorphismus  $\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X$  über  $\text{id} : X \rightarrow X$  eigentlich ist alias daß die natürliche Einbettung eine Gleichheit  $\text{id}_! \mathbb{Z}_X = \text{id}_* \mathbb{Z}_X$  ist. Im Fall von Einstrennungen ist das unsere Übung [TG] 6.4.30. Im Fall einer Diagonalzweitrennung läuft unsere Behauptung auf den Nachweis hinaus, daß für beliebige stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y' \rightarrow Y$  sowie je ein eigentlicher Opkomorphismus  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  über  $f$  und  $\psi : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  über  $g$  auch der induzierte Opkomorphismus  $\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{C}$  über  $f$  eigentlich ist. Da jeder Opkomorphismus über einer Identität und speziell über der Identität auf  $X$  eigentlich ist, reicht es, das für  $g = \text{id}$  und  $\psi = \text{id}$  zu zeigen alias zu zeigen, daß für eine beliebige stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und einen eigentlichen Opkomorphismus  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  über  $f$  und jedes Objekt  $\mathcal{C} \in \text{Ab}_Y$  der davon induzierte Opkomorphismus  $\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{C}$  über  $f$  eigentlich ist. Das seinerseits läuft auf den Nachweis hinaus, daß der Garbenhomomorphismus  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{C} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{C})$ , der für  $V \in \mathcal{O}_Y$  und  $g \in \mathcal{G}(V)$  und  $c \in \mathcal{C}(V)$  gegeben wird durch  $g \otimes c \mapsto \varphi(g) \otimes c$ , über  $f_!(\mathcal{G} \otimes f^* \mathcal{C})$  faktorisiert. Da nun der Vorschub von den  $\varphi(g) \otimes c$  erzeugt wird, reicht es zu zeigen, daß diese Tensoren zu  $f_!(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{C})$  gehören. Es ist aber klar, daß der Träger in  $f^{-1}(V)$  unseres Tensors  $\varphi(g) \otimes c$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\text{supp}(\varphi(g))$  ist und folglich auch eigentlich nach  $V$  abgebildet wird.  $\square$

**Lemma 4.4.8.** *Gegeben ein rückzugstabiles multiplikatives System  $\mathcal{T}^!$  in einer Kategorie  $\mathcal{T}$  mit endlichen Produkten, dessen Morphismen wir im folgenden als **Lesmorphismen** ansprechen, ist auch das System  $\mathcal{T}^{!n}$  aller Tupel von Lesmorphismen mit der Identität als Indexabbildung ein rückzugstabiles multiplikatives System in der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  der banalen Trennkategorie zu  $\mathcal{T}$ .*

4.4.9. Das System aller Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{T}$  ist genau dann rückzugstabil, wenn unsere Kategorie endliche Faserprodukte hat.

*Beweis.* Jeder Morphismus der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie mit endlichen Produkten entsteht nach [TS] ?? durch das Vertupeln und Verknüpfen aus Leertrennungen, Einstrennungen und Projektionszweitrennungen. Es reicht also zu zeigen, daß der Rückzug eines Tupels von Lesmorphismen mit jedem Morphismus dieser drei Typen wieder ein Lesmorphismus ist. Im Fall von Einstrennungen ist das unsere Annahme. Im Fall einer Leertrennung ist es die Aussage, daß alle Identitäten Lesmorphismen sind, was bei uns Teil der Definition eines multiplikativen Systems ist. Im Fall einer Projektionszweitrennung

$(\text{pr}_X, \text{pr}_Y) : X \times Y \rightarrow X \wedge Y$  überlegt man sich, daß wir nur zeigen müssen, daß für jeden Lesmorphismus  $f : X' \rightarrow X$  auch  $f \times \text{id} : X' \times Y \rightarrow X \times Y$  ein Lesmorphismus ist. Das aber folgt unmittelbar aus unseren Annahmen.  $\square$

**Lemma 4.4.10 (Trennrückzug eigkokartesischer Opkomorphismen).** *In dem auf Tupel flacher Garben eingeschränkten Faserfunktorkomplex*

$$\text{flAb}_{\text{Top}}^{\wedge} \rightarrow \text{Top}^{\wedge}$$

zwischen den Familienkategorien unserer Garbenopentrennfaserung bilden die Tupel eigkokartesischer Opkomorphismen über dem rückzugstabilen multiplikativen System  $\text{Top}^{\text{lesi}}$  aller Tupel von les-Abbildungen ein faserrückzugstabiles multiplikatives System.

4.4.11. Dasselbe gilt analog für Modulgarben.

*Beweis.* Wir argumentieren wie beim Beweis unseres Lemmas zum Trennrückzug eigkokartesischer Opkomorphismen 4.4.6. Es reicht nach [TS] ?? zu zeigen, daß der Rückzug von Tupeln eigkokartesischer Opkomorphismen flacher Garben über lokal eigentlichen separierten Abbildungen mit jeder Leertrennung, Einstrennung und Diagonalzweitrennung wieder ein eigkokartesischer Opkomorphismus ist. Im Fall einer Leertrennung ist das die einigermaßen banale Erkenntnis, daß für jeden topologischen Raum  $X$  der identische Opkomorphismus  $\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X$  über der Identität  $\text{id} : X \rightarrow X$  eigkokartesisch ist. Im Fall einer Einstrennung ist das lokal eigentlicher Basiswechsel 4.1.16. Im Fall einer Diagonalzweitrennung ziehen wir uns wie beim Beweis unseres Lemmas zum Trennrückzug eigkokartesischer Opkomorphismen 4.4.6 darauf zurück, zu zeigen, daß für jede lokal eigentliche separierte Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und jeden eigkokartesischen Opkomorphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  über  $f$  und jede flache abelsche Garbe  $\mathcal{C} \in \text{Ab}_Y$  auch der induzierte Opkomorphismus  $\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{C}$  über  $f$  eigkokartesisch ist. Das hinwiederum läuft auf den Nachweis hinaus, daß der aus 4.4.6 entstehende Garbenhomomorphismus ein Isomorphismus  $f_!\mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{C})$  ist, und das schließlich ist genau die Aussage der Projektionsformel 4.3.9.  $\square$



## 5 Trennrückzug und Eigvorschub deriviert

### 5.1 Derivierter Eigvorschub

5.1.1. Wir beginnen mit der Konstruktion eines Funktors

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}_{\parallel \mathrm{Top}^s}^!) \rightarrow \mathrm{Top}^s$$

Als Zielkategorie nehmen wir die Kategorie  $\mathrm{Top}^s$  aller topologischen Räume mit nur separierten Abbildungen als Morphismen. Als Objekte der Ausgangskategorie nehmen wir alle Komplexe von abelschen Garben auf unseren topologischen Räumen. Als Morphismen der Ausgangskategorie über einer separierten Abbildung  $f$  schließlich nehmen wir Homotopieklassen von Kettenabbildungen aus eigentlichen Opkomorphismen über  $f$ . Unser Funktor ist ein Kofaserfunktor mit dem komponentenweisen Eigvorschub  $f_i$  eines Komplexes als Vorschub, wie man unschwer aus der analogen Aussage [TG] 6.4.9 für abelsche Garben folgert. Wir nennen sie die **Eigopkofaserung der Homotopiekomplexe**.

5.1.2. Eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum, deren Einschränkung auf jeden relativ Hausdorff'schen lokal kompakten Teilraum kompaktweich ist, heiße **schwach kompaktweich**. Jede kompaktweiche Garbe ist schwach kompaktweich und jede schwach kompaktweiche Garbe ist faserweise kompaktweich in Bezug auf eine beliebige les-Abbildung.

**Proposition 5.1.3.** *Die entsprechend beschränkten Komplexe schwach kompaktweicher Garben bilden eine Rechtsanpassung fur unsere auf les-Abbildungen in der Basis beschränkte Eigopkofaserung  $\mathrm{Hot}^-(\mathrm{Ab}_{\parallel \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}^!) \rightarrow \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$  der Homotopiekomplexe und das faserweise Linksoresystem der Quasiisomorphismen.*

*Beweis.* Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird erst zu Ende dieses Abschnitts gegeben.  $\square$

**Korollar 5.1.4 (Halbseitig derivierte Garbeneigopkofaserung).** *Der Funktor*

$$\mathrm{Der}_{\parallel \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}^{-!} := \mathrm{Hot}^-(\mathrm{Ab}_{\parallel \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}^!)_{\mathrm{qis}} \rightarrow \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$$

*ist eine Kofaserung und jeder fur  $\mathrm{Hot}^-(\mathrm{Ab}_{\parallel \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}}^!) \rightarrow \mathrm{Top}^{\mathrm{les}}$  kokartesische Morphismus, der von einem Komplex schwach kompaktweicher abelscher Garben ausgeht, bleibt kokartesisch in der Lokalisierung. Fur jeden topologischen Raum  $X$  ist weiter der naturliche Funktor ein Isomorphismus  $\mathrm{Der}^-(\mathrm{Ab}_{\parallel X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\parallel X}^{-!}$  zwischen der Lokalisierung der Faser und der Faser der Lokalisierung.*

*Beweis.* Das folgt unmittelbar mit unserem Satz 2.3.6 uber die Lokalisierung durch Rechtsanpassung aus der Beschreibung einer Rechtsanpassung 5.1.3.  $\square$

5.1.5. Die Beschränkung auf halbseitig beschränkte derivierte Kategorien brauchen wir hier für den Nachweis, daß wir einen Kofaserfunktor vor uns haben. Man kann  $f_!$  durchaus ohne weitere Annahmen und unbeschränkt mit universellen Rechtsentfaltungen derivieren, aber es ist dann nicht klar, warum die Verknüpfung der Derivierten der Derivierten der Verknüpfung sein sollte. Vermutlich ist das sogar falsch.

5.1.6. Beschränken wir uns in der Basis auf die Unterkategorie  $\text{Top}^{\text{lesb}} \subset \text{Top}^{\text{les}}$  mit nur denjenigen les-Abbildungen  $f$  als Morphismen, für die der Eigvorschub  $f_!$  beschränkte homologische Dimension hat, so gilt Analoges für die unbeschränkten derivierten Kategorien. Abbildungen mit dieser Eigenschaft nennen wir **lesb-Abbildungen** oder kurz **lesb**. Wenn sie sogar eigentlich sind, sprechen wir von **eigentlichen lesb-Abbildungen**. Einen topologischen Raum nennen wir **lesb** oder ausführlicher lokal kompakt Hausdorff **homologisch kompaktendlich**, wenn die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum lesb ist. Aus 5.1.4 folgt, daß die Verknüpfung von zwei lesb-Abbildungen wieder lesb ist und somit  $\text{Top}^{\text{lesb}}$  eine Unterkategorie von  $\text{Top}^{\text{les}}$ .

**Proposition 5.1.7.** *Die Komplexe schwach kompaktweicher Garben bilden eine Rechtsanpassung für unsere auf lesb-Abbildungen in der Basis beschränkte Eigokofaserung  $\text{Hot}(\text{Ab}_{\text{Top}^{\text{lesb}}}^!) \rightarrow \text{Top}^{\text{lesb}}$  der Homotopiekomplexe und das faserweise Linksoresystem der Quasiisomorphismen.*

*Beweis.* Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird erst zu Ende dieses Abschnitts gegeben.  $\square$

**Korollar 5.1.8 (Derivierte Garbeneigokofaserung).** *Der Funktor*

$$\text{Der}_{\text{Top}^{\text{lesb}}}^! := \text{Hot}(\text{Ab}_{\text{Top}^{\text{lesb}}}^!)_{\text{qis}} \rightarrow \text{Top}^{\text{lesb}}$$

*ist eine Kofaserung und jeder für  $\text{Hot}(\text{Ab}_{\text{Top}^{\text{lesb}}}^!) \rightarrow \text{Top}^{\text{lesb}}$  kokartesische Morphismus, der von einem Komplex schwach kompaktweicher Garben ausgeht, hat als Bild einen kokartesischen Morphismus der lokalisierten Kofaserung. Für jeden topologischen Raum  $X$  ist weiter der natürliche Funktor ein Isomorphismus  $\text{Der}(\text{Ab}_{\text{Top}^{\text{lesb}}/X}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\text{Top}^{\text{lesb}}/X}^!$  zwischen der Lokalisierung der Faser und der Faser der Lokalisierung.*

*Beweis.* Das folgt unmittelbar mit unserem Satz 2.3.6 über die Lokalisierung durch Rechtsanpassung aus der Beschreibung einer Rechtsanpassung 5.1.7.  $\square$

5.1.9. Die halbseitig beschränkte Variante 5.1.4 dieser beiden Kofaserungen erweist sich insbesondere dann als hilfreich, wenn es gilt, die Voraussetzungen für die unbeschränkte Variante zu prüfen. Der Beweis des Satzes braucht einige Vorbereitungen und wird erst gegen Ende dieses Abschnitts gegeben.

5.1.10 (**Kriterien für homologische Kompaktendlichkeit**). Nach [TG] 4.10.13 ist ein lokal kompakter Hausdorffraum homologisch kompaktendlich, wenn er eine Überdeckung durch offene Teilmengen besitzt, für die die homologische Dimension von  $\Gamma_!$  eine gemeinsame endliche Schranke besitzt. Nach der Lokalisierungssequenz ist ein lokal kompakter Hausdorffraum homologisch kompaktendlich, wenn er eine Zerlegung in eine offene Teilmenge und ihr abgeschlossenes Komplement besitzt derart, daß beide Stücke dieser Zerlegung homologisch kompaktendlich sind. Jede lokal abgeschlossene Teilmenge eines *lesb*-Raums ist *lesb*.

5.1.11. Der Rest dieses Abschnitts gilt dem Beweis unserer beiden Propositionen zu Rechtsanpassungen der Eigopkofaserung der Homotopiekomplexe in den beiden angegebenen Varianten.

**Lemma 5.1.12.** *Gegeben eine les-Abbildung  $f$  ist jede  $f$ -kompaktweiche abelsche Garbe  $f_!$ -entfaltet.*

*Beweis.* Seien  $f : Y \rightarrow X$  unsere Abbildung und  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$  eine injektive Auflösung unserer faserweise kompaktweichen Garbe. Es gilt zu zeigen, daß  $f_!\mathcal{F} \hookrightarrow f_!\mathcal{I}^\triangleleft$  ein exakter Komplex von Garben auf  $X$  ist. Dafür müssen wir nur die Exaktheit auf den Halmen an allen Punkten  $x \in X$  prüfen. Mit Basiswechsel 4.1.16 reicht es dazu, wenn wir für  $i = i_x$  die Inklusion der Faser  $f^{-1}(x)$  die Exaktheit von  $\Gamma_!(i^*\mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma_!(i^*\mathcal{I}^\triangleleft)$  zeigen. Das folgt jedoch formal mit [TG] 4.8.12 oder auch explizit mit [TG] 4.8.13, da  $i^*\mathcal{F} \hookrightarrow i^*\mathcal{I}^\triangleleft$  eine exakte Sequenz kompaktweicher Garben auf  $f^{-1}(x)$  ist.  $\square$

**Lemma 5.1.13.** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen. Ist  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  kompaktweich, so ist auch  $f_!\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/Y}$  kompaktweich.*

*Beweis.* Für  $K \subset Y$  kompakt ist  $f^{-1}(K) \subset X$  abgeschlossen. Nach [TG] 4.8.14 induziert also das Einschränken eine Surjektion auf den Schnitten mit kompaktem Träger  $\Gamma_!(X; \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(f^{-1}(K); \mathcal{F})$ . Die linke Seite können wir nach [TG] 6.4.9 identifizieren mit  $\Gamma_!(Y; f_!\mathcal{F})$ . Die rechte Seite können wir ebenfalls mit [TG] 6.4.9 und Basiswechsel 4.1.16 im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(K) & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow g & \lrcorner & \downarrow f \\ K & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

umschreiben zu

$$\Gamma_!(f^{-1}(K); \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!g_!j^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma_!i^*f_!\mathcal{F} = \Gamma_!(K; f_!\mathcal{F})$$

Die von unserer Surjektion  $\Gamma_1(X; \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_1(f^{-1}(K); \mathcal{F})$  unter diesen Identifikationen induzierte Abbildung  $\Gamma_1(Y; f_! \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_1(K; f_! \mathcal{F})$  ist aber genau die Restriktion von Schnitten. Folglich ist auch diese surjektiv.  $\square$

**Lemma 5.1.14.** *Der Eigvorschub schwach kompaktweicher abelscher Garben unter les-Abbildungen ist wieder schwach kompaktweich.*

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  unsere Abbildung und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  unsere schwach kompaktweiche abelsche Garbe. Gegeben eine relativ Hausdorff'sche lokal kompakte Teilmenge  $L \subset Y$  bilden wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(L) & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow g & \lrcorner & \downarrow f \\ L & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Es gilt zu zeigen, daß  $i^* f_! \mathcal{F}$  kompaktweich ist. Nach Basiswechsel 4.1.16 können wir gleichbedeutend zeigen, daß  $g_! j^* \mathcal{F}$  kompaktweich ist. Nach [TM] 2.4.26 ist  $j$  auch die Einbettung einer relativ Hausdorff'schen Teilmenge und nach 4.1.19 und 4.1.4 ist  $f^{-1}(L)$  auch lokal kompakt. Da wir  $\mathcal{F}$  schwach kompaktweich vorausgesetzt hatten, ist also  $j^* \mathcal{F}$  kompaktweich, und dann muß nach 5.1.13 auch  $g_! j^* \mathcal{F}$  kompaktweich sein.  $\square$

*Beweis der Proposition 5.1.3 zu halbseitigen Rechtsanpassungen.* Die Gesamtheit aller Komplexe schwach kompaktweicher Garben ist nach 5.1.14 stabil unter Eigvorschüben längs les-Abbildungen. Die Gesamtheit aller entsprechend beschränkten Komplexe schwach kompaktweicher Garben bildet folglich eine Unterkofaserung. Weiter sind alle injektiven, ja alle welchen abelschen Garben kompaktweich und damit a fortiori schwach kompaktweich nach [TG] 4.8.11, so daß jeder gegen die Differentiale beschränkte Komplex von abelschen Garben einen Quasiisomorphismus zu einem gegen die Differentiale beschränkten Komplex von schwach kompaktweichen Garben besitzt. Entsprechendes folgt in den opponierten Kategorien. Und schließlich ist jede schwach kompaktweiche abelsche Garbe auf einem Raum  $X$  auch  $f$ -kompaktweich für jede les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und damit  $f_!$ -entfaltet nach 5.1.12. Nach [TD] 3.4.12 sind die entsprechend beschränkten Komplexe schwach kompaktweicher abelscher Garben folglich auch  $f_!$ -entfaltet und bilden damit in der Tat eine Rechtsanpassung wie behauptet.  $\square$

*Beweis der Proposition 5.1.7 zu unbeschränkten Rechtsanpassungen.* Im unbeschränkten Fall argumentieren wir ähnlich und verwenden zusätzlich Satz [TD] 3.7.4 zum unbeschränkten Derivieren homologisch endlicher Funktoren.  $\square$

**5.1.15 (Notation für derivierten Eigvorschub).** Wir notieren von nun an den underivierten Eigvorschub neu  $f_{(!)} : \text{Ab}/X \rightarrow \text{Ab}/Y$  beziehungsweise  $f_{(!)} : \text{Ab}_{//X} \rightarrow \text{Ab}_{//Y}$  und reservieren  $f_!$  beziehungsweise  $f_!$  als Notation für die zugehörigen derivierten Funktoren. Gegeben eine lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist also

$$f_! : \text{Der}(\text{Ab}_{//X}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{//Y})$$

der Vorschub in Bezug auf die Kofaserungen

$$\text{Der}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^! \rightarrow \text{Top}^{\text{lesb}} \quad \text{und} \quad \text{Der}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^{-!} \rightarrow \text{Top}^{\text{les}}$$

und setzen  $f_! := (f_!)^{\text{opp}}$ . Da nach unseren Sätzen die Einschränkung unserer ersten Kofaserung auf die Basis der Zweiten eine volle Unterkofaserung ist, müssen wir dabei keine Mehrdeutigkeiten fürchten. Als Vorschübe einer Kofaserung werden unsere  $f_!$  unter anderem mit ausgezeichneten Isotransformationen  $(gf)_! \xrightarrow{\cong} g_!f_!$  alias  $g_!f_! \xrightarrow{\cong} (gf)_!$  für entsprechend verknüpfbare Morphismen  $f, g$  geliefert. Für die globalen Schnitte mit kompaktem Träger behalten wir jedoch die Notationen  $\Gamma_!$  und  $\text{R}\Gamma_!$  bei und verzichten darauf, diese Funktoren in  $\Gamma_{(!)}$  und  $\Gamma_!$  umzubenennen.

**Lemma 5.1.16.** Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  les ist eine abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  entfaltet für  $f_{(!)}$  genau dann, wenn ihre Restriktion auf jede Faser  $\Gamma_!$ -entfaltet ist.

*Beweis.* Lokal eigentlicher Basiswechsel 4.1.16 liefert natürliche Isomorphismen  $(f_{(!)}\mathcal{F})_y \xrightarrow{\cong} \Gamma_!(\mathcal{F}|X_y)$  für alle  $y \in Y$  mit der Notation  $X_y := f^{-1}(y)$  für die Faser. Um die höheren Derivierten von  $f_{(!)}$  zu berechnen, dürfen wir eine beliebige kompaktweiche Auflösung nehmen. Deren Restriktion auf  $X_y$  ist aber eine kompaktweiche und damit  $\Gamma_!$ -entfaltete Auflösung von  $\mathcal{F}|X_y$ . So erhalten wir natürliche Isomorphismen  $(\text{R}^q f_{(!)}\mathcal{F})_y \xrightarrow{\cong} \text{R}^q \Gamma_!(\mathcal{F}|X_y)$  und unser Lemma folgt aus der Erkenntnis, daß eine abelsche Garbe genau dann Null ist, wenn alle ihre Halme verschwinden.  $\square$

## Übungen

*Übung 5.1.17.* Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine eigentliche Abbildung lokal kompakter Hausdorffräume und  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  ein Komorphismus abelscher Garben darüber alias ein Morphismus  $f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  und  $a : X \rightarrow \text{top}$  sowie  $b : Y \rightarrow \text{top}$  die konstanten Abbildungen. Die Einheit der Adjunktion  $\mathcal{G} \rightarrow f_*f^*\mathcal{G}$  induziert dann einen Morphismus

$$b_!\mathcal{G} \rightarrow b_!f_*f^*\mathcal{G} = b_!f_!f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\cong} a_!f^*\mathcal{G} \rightarrow a_!\mathcal{F}$$

und so einen Morphismus  $\text{H}_!^q(Y; \mathcal{G}) \rightarrow \text{H}_!^q(X; \mathcal{F})$ . Man zeige, daß er genau unser eigentlicher Rückzug auf der kompakten Garbenkohomologie aus [TG] 4.9.3 ist.

*Übung 5.1.18.* Gegeben  $j : X \hookrightarrow Y$  eine offene Einbettung induziert unsere Adjunktion  $(j_{(!)}, j^{(*)})$  exakter Funktoren nach [TD] 3.4.14 eine Adjunktion  $(j_!, j^*)$  der zugehörigen derivierten Funktoren. Sind hier  $X, Y$  lokal kompakte Hausdorffräume und bezeichnet  $c : Y \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung, so liefert für  $\mathcal{G} \in \text{Ab}_Y$  die Einheit der Adjunktion  $j_! j^* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  unter  $\mathcal{H}^q c_!$  Morphismen  $H_1^q(X; \mathcal{G}) \rightarrow H_1^q(Y; \mathcal{G})$ . Man zeige, daß sie genau unsere Ausdehnung durch Null auf der kompakten Garbenkohomologie aus [TG] 4.9.7 sind.

## 5.2 Ausgezeichnete Dreiecke einer offenen Teilmenge

5.2.1. Ich verwende im folgenden wie vereinbart runde Klammern um Indizes  $*$  und  $!$  als Notation für die underivierten Versionen unserer üblichen Funktoren. Gegeben eine offene Einbettung  $j : U \hookrightarrow X$  erinnern wir aus [TG] 4.9.9, [TG] 4.3.13 die adjungierten Funktoren  $(j_{(!)}, j^{(*)}, j_{(*)})$  zu  $j^{(*)} : \text{Ab}_X \rightarrow \text{Ab}_U$ . Hier sind die Ausdehnung  $j_{(!)}$  durch Null und der Rückzug  $j^{(*)}$  exakt und der Vorschub  $j_{(*)}$  ist zumindest linksexakt. Gegeben eine abgeschlossene Einbettung  $i : Z \hookrightarrow X$  erinnern wir aus [TG] 4.3.13, [TG] 6.4.14 auch die adjungierten Funktoren  $(i^{(*)}, i_{(*)}, i^{(!)})$  zu  $i_{(*)} : \text{Ab}_Z \rightarrow \text{Ab}_X$ . Hier sind der Vorschub  $i_{(*)}$  und der Rückzug  $i^{(*)}$  exakt und der Funktor  $i^{(!)}$  ist zumindest linksexakt. Nach [TD] 3.6.10 ist jeder linksexakte Funktor  $\text{Ab}_X \rightarrow \mathcal{B}$  auf jedem Objekt zahm rechtsderivierbar. Mit der Notation  $f^!$  für den Rechtsadjungierten von  $f_!$ , wann immer denn so ein Rechtsadjungierter existiert, und speziell  $i^! := \text{R}i^{(!)}$  erhalten wir nach [TD] 3.2.27 Tripel adjungierter triangulierter Funktoren

$$(j_!, j^! = j^*, j_*) \quad \text{und} \quad (i^*, i_* = i_!, i^!)$$

zwischen den entsprechenden derivierten Kategorien  $\text{Der}(\text{Ab}_U)$ ,  $\text{Der}(\text{Ab}_X)$  und  $\text{Der}(\text{Ab}_Z)$ .

**Proposition 5.2.2 (Gysin-Sequenzen).** *Seien  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}_X)$  ein Komplex abelscher Garben auf einem Raum  $X$  und  $i : Z \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge sowie  $j : U \hookrightarrow X$  die Einbettung ihres offenen Komplements. So lassen sich die Einheit und Koeinheit der jeweiligen Adjunktionen auf genau eine Weise durch Morphismen vom Grad Eins ergänzen zu ausgezeichneten Dreiecken*

$$\begin{array}{ccccc} j_! j^! \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & i_* i^* \mathcal{F} & \xrightarrow{[1]} \\ i_! i^! \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & j_* j^* \mathcal{F} & \xrightarrow{[1]} \end{array}$$

*Beweis.* Offensichtlich liefern für jede abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_X$  die Koeinheit und Einheit der entsprechenden Adjunktionen eine kurze exakte Sequenz

$$j_{(!)} j^{(!)} \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow i_{(*)} i^{(*)} \mathcal{F}$$

Betrachten wir diese kurzen exakten Sequenzen für Komplexe von Garben und beachten, daß unsere Funktoren soweit alle exakt sind, so erhalten wir mit [TD] 2.6.4 für alle  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  ein ausgezeichnetes Dreieck

$$j_! j^! \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \xrightarrow{[1]}$$

in  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$ . Der dritte Pfeil  $i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow j_! j^! \mathcal{F}[1]$  wird hier nach [TD] 2.2.14 bereits durch die beiden anderen festgelegt, da Basiswechsel  $i^* j_! = 0$  zeigt und mit einer Adjunktion  $\text{Der}/X(j_! j^! \mathcal{F}[1], i_* i^* \mathcal{F}) = 0$  folgt. Damit ist das erste Dreieck hergeleitet. Offensichtlich liefern für jede abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  die Koeinheit und Einheit der entsprechenden Adjunktionen auch eine linksexakte Sequenz

$$i_{(!)} i^{(!)} \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_{(*)} j^{(*)} \mathcal{F}$$

Man erkennt leicht, daß sie für welches und insbesondere für injektives  $\mathcal{F}$  sogar exakt ist und folgert dann genau wie zuvor die Existenz und Eindeutigkeit des zweiten Dreiecks aus der Existenz universeller Rechtsentfaltungen durch Komplexe aus injektiven Garben nach [TD] 3.6.10.  $\square$

## Übungen

*Übung 5.2.3.* Seien  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  eine abelsche Garbe auf einem Raum  $X$  und  $i : Z \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und  $j : U \hookrightarrow X$  die Einbettung ihres offenen Komplements. Bezeichne  $c$  die jeweiligen konstanten Abbildungen auf den einpunktigen Raum und identifizieren abelsche Garben auf dem einpunktigen Raum mit abelschen Gruppen. Die offensichtliche Isotransformation  $c_{(*)} i^{(!)} \xrightarrow{\cong} \Gamma_Z$  induziert vermittle [TG] 6.4.25 und ?? durch welche Auflösung einen wohlbestimmten Isomorphismus

$$\mathcal{H}^q c_* i^! \mathcal{F} \xrightarrow{\cong} H_Z^q(X; \mathcal{F})$$

Man zeige, wie darunter zusammen mit einigen weiteren Identifikationen die lange exakte Kohomologiesequenz des ausgezeichneten Dreiecks  $c_* i_! i^! \mathcal{F} \rightarrow c_* \mathcal{F} \rightarrow c_* j_* j^* \mathcal{F} \rightarrow [1]$  der langen exakten Sequenz der lokalen Kohomologie [TG] 4.4.9 entspricht.

## 5.3 Austausch und Zwei-Funktor-Formalismus

5.3.1. In diesem Abschnitt soll die Beziehung von deriviertem Eigvorschub und Rückzug, im nächsten Abschnitt die von deriviertem Eigvorschub und Trennrückzug ausgearbeitet werden. Wir beginnen damit, dafür einen begrifflichen Rahmen zu zimmern.

**Definition 5.3.2.** Unter einer **Austauschsituation** verstehen wir eine Vorgabe von Daten

$$(\mathcal{C} \xrightarrow{a} \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \xleftarrow{b} \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e, i)$$

bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{B}$ , der **Basiskategorie** oder **Basis**; darin zwei ausgezeichneten **rückzugstabilen** multiplikativen Systemen  $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{B}^! \subset \mathcal{B}$ , die beide alle Isomorphismen enthalten; einem Faserfunktoren  $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ ; einem Kofaserfunktoren  $b : \mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$ ; sowie einem Isomorphismus  $i : \mathcal{C}^!|_{\mathcal{B}^e} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}|_{\mathcal{B}^e}$  von Kategorien über  $\mathcal{B}^e$ .

- 5.3.3 (**Sprechweisen und Notationen**). 1. Wir behandeln unseren Isomorphismus  $i$  in der Notation meist als eine Gleichheit und reden dann vereinfachend von einer Austauschsituation  $(\mathcal{C} \xrightarrow{a} \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \xleftarrow{b} \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$ . Da alle Identitäten zu  $\mathcal{B}^e$  gehören, bedeutet das insbesondere, daß  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}^!$  dieselben Objekte haben und sogar dieselben Fasern  $\mathcal{C}_X = \mathcal{C}_X^!$  über denselben Objekten der Basis.
2. Den Rückzug der Faserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  für einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{B}$  notieren wir  $f^\dagger : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$ . In typischen Situationen sind die Fasern opponiert zu Kategorien von Garben und wir haben  $f^\dagger = (f^*)^{\text{opp}}$ .
3. Die Morphismen in  $\mathcal{B}^!$  nenne ich **Lesmorphismen**, weil sie im Fall topologischer Räume die lokal eigentlichen separierten Morphismen sind, also unsere les-Abbildungen.
4. Den Vorschub der Kofaserung  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  für Lesmorphismen  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{B}^!$  nenne ich **Eigvorschub** und notiere ihn  $f_i : \mathcal{C}_X^! \rightarrow \mathcal{C}_Y^!$  und, wenn  $i$  eine Gleichheit ist, einfacher  $f_i : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_Y$ . In typischen Situationen sind die Fasern opponiert zu Kategorien von Garben und wir haben  $f_i = (f_i)^{\text{opp}}$ .
5. Ich sage meist  $\dagger$ -kartesisch oder kurz kartesisch statt  $a$ -kartesisch und ebenso  $\ddagger$ -kokartesisch oder eigkokartesisch statt  $b$ -kokartesisch.
6. Die Morphismen in  $\mathcal{B}^e$  nenne ich **Eigmorphismen**, weil sie in typischen Beispielen die eigentlichen Morphismen sind. Unsere Daten beinhalten speziell eine Bifaserung über  $\mathcal{B}^e$  und damit für jeden Eigmorphismus  $f$  eine Adjunktion  $(f_i, f^\dagger)$ . Sie entspricht einer Adjunktion  $(f^*, f_i)$  von Funktoren zwischen den opponierten Fasern.

*Beispiel 5.3.4.* Die Kategorien  $\text{Top} \supset \text{Top}^s \supset \text{Top}^{\text{es}}$  der topologischen Räume mit separierten Abbildungen als Lesmorphismen und eigentlichen separierten Abbildungen als Eigmorphismen in der Basis bilden mit unserer Garbenopfaserung [TG] 6.2.17  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  als Faserung und dem Kofaserfunktoren unserer Garbeneigkofaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}^s}^! \rightarrow \text{Top}^s$  aus [TG] 6.4.9 und deren offensichtlicher



Gleichheit [TG] 6.4.2 über eigentlichen Abbildungen in der Basis eine Austausch-situation. Die hier besprochene Situation weist die Besonderheit auf, daß die Ko-faserung aus der Faserung hervorgeht, indem man nur noch einen Teil der Mor-phismen zuläßt, genauer unter allen Opkomorphismen nur die eigentlichen Op-komorphismen. Das wird uns dabei helfen, in dieser Situation ein sogenanntes „Verflechtungsdatum“ zu konstruieren.

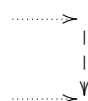
5.3.5. Gegeben eine Austauschsituation  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$  verstehen wir unter einem **Rückholquadrat** ein Diagramm



über einem kartesischen Quadrat in der Basis  $\mathcal{B}$  mit Objekten von  $\mathcal{C}$  oder gleich-bedeutend  $\mathcal{C}^!$  an den Ecken und  $\dagger$ -kartesischen  $\mathcal{C}$ -Morphismen als horizontalen gepunkteten Pfeilen und  $\mathcal{C}^!$ -Morphismen als vertikalen gestrichelten Pfeilen, so daß insbesondere die Bilder der gestrichelten vertikalen Pfeile in unserem kartesi-schen Quadrat in der Basis  $\mathcal{B}$  Lesmorphismen sind. Die gepunktelt gezeichneten horizontalen Kanten nenne ich die **Rückholkanten** unseres Rückholquadrats und die rechte gestrichelte vertikale Kante seine **Ausgangskante**. Den Morphismus in der Basis länges der unteren Horizontale nenne ich den **zurückholenden Mor-phismus** unseres Rückholquadrats. Wir vereinbaren die Konvention, im Kontext einer Austauschsituation  $\mathcal{C}$ -Morphismen als gepunktete Pfeile,  $\mathcal{C}^!$ -Morphismen als gestrichelte Pfeile und  $\mathcal{C}^e$ -Morphismen als durchgezogene Pfeile zu notieren. Man beachte, daß es nicht sinnvoll ist, die Kommutativität eines Rückholquadrats zu fordern, da sich  $\mathcal{C}^!$ -Morphismen und  $\mathcal{C}$ -Morphismen im allgemeinen nicht verknüpfen lassen. Die Gesamtheit aller Rückholquadrats über einem vorgegebenen kartesischen Quadrat der Basis bildet selbst eine Kategorie, da ja nach Annahme  $\mathcal{C}$ -Morphismen und  $\mathcal{C}^!$ -Morphismen über Identitäten, ja sogar über beliebigen Eigmorphismen der Basis übereinstimmen.

5.3.6. Gegeben eine Austauschsituation  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$  verstehen wir unter einer **Verflechtung** zu unserer Austauschsituation eine Menge von Rückhol-quadraten, genannt **Verflechtungsquadraten**, mit den folgenden Eigenschaften:

**Eindeutige Ergänzung:** Jedes „partielle Rückholquadrat“, bei dem nur der  $\mathcal{C}^!$ -Morphismus in der linken Vertikale fehlt, bei dem aber alle vier Mor-phismen in der Basis durchaus vorhanden sind, läßt sich auf genau eine Weise zu einem Verflechtungsquadrat ergänzen. Ich versuche, diese Aussage zusätzlich zu verdeutlichen durch die graphische Darstellung



und nenne die dadurch eindeutig bestimmte neue Kante die **zurückgeholte Kante** zu unserer Ausgangskante;

**Verkleben:** Unter beiden Arten des Verklebens längs gleicher Kanten mit der Komposition in den neu entstehenden Kanten wird aus zwei Verflechtungsquadraten wieder ein Verflechtungsquadrat;

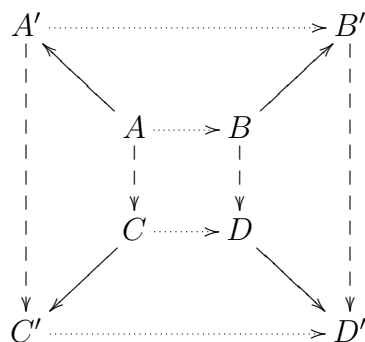
**Eigentliche Kommutativität:** Über kartesischen Quadraten in der Basis mit Eigmorphismen auf gegenüberliegenden Kanten kommutiert jedes Verflechtungsquadrat in  $\mathcal{C}$  im Fall vertikaler eig-Kanten beziehungsweise in  $\mathcal{C}^!$  im Fall horizontaler eig-Kanten;

**Zurückholen kokartesischer Kanten:** Ist die Ausgangskante in einem Verflechtungsquadrat  $\mathfrak{j}$ -kokartesisch, so auch die zurückgeholte Kante.

Eine Austauschsituation mit einer ausgezeichneten Verflechtung nennen wir eine **verflochtene Austauschsituation**. Gegeben eine Austauschsituation mit Verflechtung sagen wir auch, die **Faserung sei verflochten mit der Kofaserung längs der Eigmorphismen**. Ein Verflechtungsquadrat mit eigkokartesischer Ausgangskante und damit nach unseren Annahmen auch eigkokartesischer zurückgeholter Kante nennen wir ein **kokartesisches Verflechtungsquadrat**.

5.3.7 (**Verflechtungsquadrate durch Kommutativität**). Jedes Rückholquadrat über einem kartesischen Quadrat in der Basis, das in  $\mathcal{C}$  beziehungsweise  $\mathcal{C}^!$  kommutativ ist im Fall von Eigmorphismen auf gegenüberliegenden horizontalen beziehungsweise vertikalen Kanten in der Basis, ist ein Verflechtungsquadrat für jede Verflechtung. Das folgt aus der eigentlichen Kommutativität von Verflechtungsquadraten und der eindeutigen Ergänzung.

5.3.8 (**Funktorialität von Verflechtungsquadraten**). Gegeben eine verflochtene Austauschsituation läßt sich jeder Morphismus zwischen den Ausgangskanten zweier Verflechtungsquadrate über einem vorgegebenen kartesischen Quadrat der Basis auf genau eine Weise zu einem Morphismus zwischen den beiden Verflechtungsquadraten fortsetzen. Um das einzusehen, betrachten wir das Diagramm



Beide Quadrate sind Verflechtungsquadrate nach Annahme. Die durchgezogenen Pfeile stellen Morphismen über Identitäten der Basis dar. Das rechte  $BD$ -Trapez ist kommutativ nach Annahme und stellt unseren Morphismus von Ausgangskanten dar. Das obere  $AB$ -Trapez wird durch genau einen Morphismus  $A \rightarrow A'$  kommutativ gemacht, da nach Annahme  $A' \rightarrow B'$  kartesisch ist. Das untere  $CD$ -Trapez wird durch genau einen Morphismus  $C \rightarrow C'$  kommutativ gemacht, da nach Annahme  $C' \rightarrow D'$  kartesisch ist. Es bleibt zu zeigen, daß dann auch das rechte  $AC$ -Trapez kommutiert. Nach der Charakterisierung von Verflechtungsquadraten durch Kommutativität 5.4.7 sind aber das obere  $AB$ -Trapez und das untere  $CD$ -Trapez beide Verflechtungsquadrate. Aufgrund der Verklebbarkeit von Verflechtungsquadraten sind dann auch das Teildiagramm mit den vertikalen Kanten  $((ACC'), (BDD'))$  sowie das Teildiagramm mit den vertikalen Kanten  $((AA'C'), (BB'D'))$  Verflechtungsquadrate. Aus der Gleichheit ihrer Ausgangskanten folgt dann mit der Eindeutigkeit der Ergänzung die Gleichheit ihrer zurückgeholten Kanten und so die Kommutativität im rechten  $AC$ -Trapez.

**5.3.9 (Eigentlicher Basiswechsel einer verflochtenen Austauschsituation).** Gegeben eine verflochtene Austauschsituation und in der Basis  $\mathcal{B}$  ein kartesisches Diagramm  $fq = pg$  mit Lesmorphismen  $f, g$  erhalten wir eine ausgezeichnete Isotransformation

$$g_i q^\dagger \xrightarrow{\cong} p^\dagger f_i$$

durch „denjenigen Isomorphismen, die die Transportmorphismen von  $g_i$  zu einem Verflechtungsquadrat ergänzen“. Wir nennen sie den **eigentlichen Basiswechsel** zu unserer Verflechtung. Sind  $f, g$  beide Eigmorphismen, so stimmt er nach der Charakterisierung 5.4.7 von Verflechtungsquadraten durch Kommutativität mit dem allgemeinen Basiswechsel [TG] 6.3.11 der Faserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  überein. Sind  $p, q$  beide Eigmorphismen, so stimmt er aus demselben Grund mit dem allgemeinen Basiswechsel der Kofaserung  $\mathcal{C}^\dagger \rightarrow \mathcal{B}^\dagger$  überein.

**5.3.10 (Verflechtungsdaten durch Kommutativität).** Seien  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung über einer Kategorie  $\mathcal{B}$  mit rückzugstabilem multiplikativen System  $\mathcal{B}^\dagger$  und sei  $\mathcal{C}^\dagger$  ein faserrückzugstabiles multiplikatives System in  $\mathcal{C}$  über  $\mathcal{B}^\dagger$  im Sinne von 4.4.2. Sei weiter der restringierte Funktor  $\mathcal{C}^\dagger \rightarrow \mathcal{B}^\dagger$  eine Kofaserung, deren kokartesische Morphismen auch ein faserrückzugstabiles multiplikatives System über  $\mathcal{B}^\dagger$  bilden. Sei schließlich  $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{B}^\dagger$  ein rückzugstabiles multiplikatives Teilsystem derart, daß über Morphismen aus  $\mathcal{B}^e$  alle  $\mathcal{C}$ -Morphismen bereits  $\mathcal{C}^\dagger$ -Morphismen sind. So ist  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^\dagger \leftarrow \mathcal{C}^\dagger, \mathcal{B}^e)$  eine Austauschsituation und die kommutativen Rückholquadrate bilden darin eine Verflechtung.

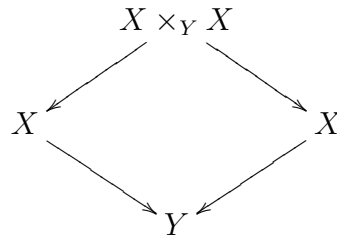
*Beispiel 5.3.11 (Verflechtungen in topologischen Austauschsituationen).* Wir erinnern unsere topologische Austauschsituation aus 5.4.4. Bezeichnen wir mit  $\text{Top}^{\text{les}}$  die Kategorie der topologischen Räume mit nur lokal eigentlichen separ-

rierten Abbildungen als Morphismen, so ist auch

$$(\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^!, \text{Top}^{\text{es}})$$

eine Austauschsituation. Darin bilden nach 5.4.10 die in  $\text{Ab}_{//\text{Top}}$  kommutierenden Rückholquadrate eine Verflechtung, da nach 4.4.3 der Rückzug eines eigkokartesischen Opkomorphismus über einer les-Abbildung stets wieder eigkokartesisch ist. In unserer Terminologie aus 5.4.6 ist das eine Verflechtung der Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  mit der Garbeneigopkofaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^! \rightarrow \text{Top}^{\text{les}}$  längs der eigentlichen separierten Abbildungen.

**5.3.12 (Transformation vom Vorschub zum Eigvorschub).** Gegeben sei eine verflochtene Austauschsituation  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$ . Nach der Definition eines rückzugstabilen multiplikativen Systems existiert für jeden Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis das Faserprodukt  $X \times_Y X$ . Die Verflechtung liefert für jeden Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$ , für den die Diagonale  $\Delta = \Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$  ein Eigmorphismus ist, mit der Notation  $\text{Id}$  für den Identitätsfunktorkomplex eine Transformation  $\text{Id} \Rightarrow f^\dagger f_i$  mithilfe des kartesischen Quadrats



in der Basis als die Komposition  $\text{Id} = \text{Id} \circ \text{Id} \xrightarrow{\cong} \text{id}_i \text{id}_i^\dagger \xrightarrow{\cong} \text{pr}_{2i} \Delta_i \Delta_i^\dagger \text{pr}_{1i}^\dagger \Rightarrow \text{pr}_{2i} \text{pr}_{1i}^\dagger \Rightarrow f^\dagger f_i$  unter Ausnützen der Adjunktion  $(\Delta_i, \Delta_i^\dagger)$  aus 5.4.3 und eigentlichem Basiswechsel 5.4.9. Besitzt  $f^\dagger$  einen Linksadjungierten, so erhalten wir auf diese Weise eine natürliche Transformation  $f_\dagger \Rightarrow f_i$ . Sie entspricht einer Transformation

$$f_i \Rightarrow f_*$$

von Funktoren der opponierten Fasern, mit denen wir es in den Anwendungen meist zu tun haben. Ist zusätzlich  $f$  selbst ein Eigmorphismus, so ist diese Transformation nach [TG] 6.3.17 und [TG] 6.3.15 die Identität auf dem Vorschub. Hier verwenden wir unsere Konvention, den Isomorphismus  $i$  aus 5.4.2 als die Identität anzunehmen, sonst muß das alles sorgfältiger formuliert werden.

*Ergänzung 5.3.13.* Im Spezialfall der abelschen Garben mag ein Student ausarbeiten, warum das der offensichtliche Morphismus aus [TG] 6.4.5 ist.

**Satz 5.3.14.** Sei eine Austauschsituation  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$  gegeben.

**Lokalisieren einer Austauschsituation:** Sei  $S$  ein faserweises Oresystem in  $\mathcal{C}$ , das stabil ist unter den Rückzügen der Faserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  und für das die Kofaserung  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  eine Rechtsanpassung besitzt. So liefert Lokalisieren eine Austauschsituation  $(S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow S^{-1}\mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$ ;

**Lokalisieren einer Verflechtung:** Sei zusätzlich in unserer noch nicht lokalisierten Austauschsituation eine Verflechtung gegeben derart, daß für jedes kokartesisches Verflechtungsquadrat, dessen Ausgangskante in der Lokalisierung  $S^{-1}\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  kokartesisch bleibt, auch die gegenüberliegende Kante in der Lokalisierung kokartesisch bleibt. So gibt es genau eine Verflechtung in der lokalisierten Austauschsituation, die alle auf diese Weise entstehenden Rückholquadrate enthält.

5.3.15. Wir nennen die im vorigen Satz konstruierte Verflechtung die **lokalisierte Verflechtung**.

5.3.16 (**Vereinfachtes Prüfen der Bedingungen**). Gegeben ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{B}^!$  bleibt ein kokartesischer Morphismus  $\mathcal{F} \rightarrow f_!\mathcal{F}$  genau dann kokartesisch in der Lokalisierung, wenn  $\mathcal{F}$  ein  $S_X$ -entfaltetes Objekt ist für den Funktor  $Qf_i : \mathcal{C}_X \rightarrow S_Y^{-1}\mathcal{C}_Y$ , wie aus 2.3.6 folgt. Sei nun  $f q = p g$  ein kartesisches Diagramm der Basis mit  $g : W \rightarrow Z$ . Es reicht zu prüfen, daß der Rückzug unter  $q$  jedes  $S_X$ - $Qf_i$ -entfalteten Objekts seinerseits ein  $S_W$ - $Qg_i$ -entfaltetes Objekt ist. Dafür hinwiederum reicht es zu zeigen, daß wir für jedes Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_X$  einen  $S_X$ -Morphismus  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  finden können derart, daß sowohl  $\mathcal{G}$  ein  $S_X$ - $Qf_i$ -entfaltetes Objekt ist als auch  $q^\dagger \mathcal{G}$  ein  $S_W$ - $Qg_i$ -entfaltetes Objekt.

*Beispiel 5.3.17.* Unsere topologische Austauschsituation aus 5.4.11 mit der durch Kommutativität konstruierten Verflechtung liefert in offensichtlicher Weise verflochtene Austauschsituationen

$$\left( \text{Hot}^\sharp(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Hot}^\sharp(\text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^!), \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

für  $\sharp$  eine jede unserer vier üblichen Beschränkungsbedingungen. Im Fall von  $\text{Hot}^-$  können wir diese Verflechtung nach Quasiisomorphismen lokalisieren, da wir nach 5.1.3 die Rechtsanpassung durch Komplexe schwach kompaktweicher Garben zur Verfügung haben und da nach 5.1.16 in einem kartesischen Diagramm  $f q = p g$  topologischer Räume mit les-Abbildungen  $f, g$  der Rückzug jeder  $Qf_{(1)}$ -entfalteten Garbe unter  $q$  eine  $Qg_{(1)}$ -entfaltete Garbe ist und wir das vereinfachte Kriterium vom Ende von 5.4.16 anwenden können. So erhalten wir eine Verflechtung der Austauschsituation

$$\left( \text{Der}_{//\text{Top}}^- \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^{-!}, \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

Weiter erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Austauschsituationen mit Verflechtung

$$\left( \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^!), \text{Top}^{\text{esb}} \right)$$

und können sie wie zuvor nach Quasiisomorphismen lokalisieren, da wir nach 5.1.7 eine Rechtsanpassung zur Verfügung haben und damit genauso argumentieren können. So erhalten wir eine Verflechtung zur Austauschsituation

$$(\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^!, \text{Top}^{\text{esb}})$$

Nach Konstruktion sind in diesen beiden Situationen die Verflechtungsquadrate zu Ausgangskanten aus  $\text{Der}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^{-1}$  dieselben.

*Beweis.* 1. Wir wissen aus 2.3.6, daß der Funktor  $S^{-1}\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  eine Kofaserung ist und daß der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus von Kategorien  $S_{\mathcal{B}^e}^{-1}(\mathcal{C}_{\mathcal{B}^e}^!) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C}^!)_{\mathcal{B}^e}$ . Wir wissen aus 2.3.6 und sogar bereits aus 2.1.5 und 2.1.11, daß der Funktor  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung ist und der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus von Kategorien  $S_{\mathcal{B}^e}^{-1}(\mathcal{C}_{\mathcal{B}^e}) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C})_{\mathcal{B}^e}$ . Das zeigt die erste Aussage.

2. Daß es höchstens eine derartige lokalisierte Verflechtung gibt, ist klar: Ihre Verflechtungsquadrate müssen mindestens alle Rückholquadrate sein, die isomorph sind zu Rückholquadraten, die man erhält, indem man an ein Rückholquadrat der im zweiten Teil unseres Satzes beschriebenen Art unten noch ein kommutatives Rückholquadrat über einem kartesischen Diagramm in der Basis mit Identitäten als Lesmorphismen anfügt. Explizit besteht unsere Verflechtung in spe mithin aus allen Rückholquadraten, die isomorph sind zu Randquadraten eines Diagramms der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} W \xrightarrow{q} X & & Qq^\dagger \mathcal{F} \cdots \cdots \rightarrow Q\mathcal{F} \\ \downarrow g & & \downarrow \downarrow \\ Z \xrightarrow{p} Y & & Qp^\dagger f_i \mathcal{F} \cdots \cdots \rightarrow Qf_i \mathcal{F} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \\ Z \xrightarrow{p} Y & & Qp^\dagger \mathcal{G} \cdots \cdots \rightarrow Q\mathcal{G} \end{array}$$

Hier habe ich links das zugrundeliegende Diagramm der Basis dargestellt und rechts das Diagramm auf den Fasern mit als oberem Quadrat einem Verflechtungsquadrat des Ausgangsdatums mit  $\mathcal{F}$  entfaltet für  $Qf_i$  und als unterem Quadrat einem kommutativen Rückholquadrat in der Lokalisierung mit Morphismen über Identitäten in den Vertikalen. Andererseits kann eine Verflechtung für die lokalisierte Austauschsituation auch nicht größer sein, da sonst unsere Bedingung der

eindeutigen Ergänzbarkeit verletzt wäre. Jetzt überlegen wir uns, daß die so gegebene Menge von Rückholquadraten, die wir vorerst unsere „Verflechtungsquadrate in spe“ nennen, auch wirklich eine Verflechtung für die lokalisierte Austauschsituation ist. Um zu sehen, daß jede Ausgangskante zu einem Verflechtungsquadrat in spe ergänzt werden kann, erinnern wir aus 2.3.6, daß es für jeden Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis und jedes  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}_X$  eine  $S_X$ -Linksentfaltung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$  für  $Qf_i$  gibt und daß der Transportmorphismus  $\mathcal{F} \rightarrow f_i\mathcal{F}$  sowohl für  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  als auch für  $S^{-1}\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  kokartesisch ist. Jede Ausgangskante kann mithin zu einem Verflechtungsquadrat in spe ergänzt werden. Daß die Ergänzung partieller Rückholquadrate eindeutig ist in unseren Verflechtungsquadraten in spe, zeigen wir zunächst im Fall partieller Rückholquadrate mit kokartesischer Ausgangskante. Dazu müssen wir zeigen, daß gegeben ein Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis und  $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{C}_X$  beide  $S_X$ - $Qf_i$ -entfaltet jedes kommutative Diagramm

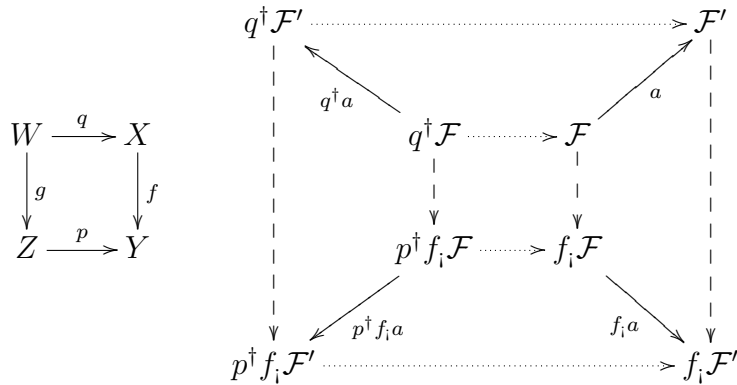
$$\begin{array}{ccc} X & Q\mathcal{F} & \longrightarrow & Q\mathcal{F}' \\ \downarrow f & \downarrow & & \downarrow \\ Y & Qf_i\mathcal{F} & \longrightarrow & Qf_i\mathcal{F}' \end{array}$$

in  $S^{-1}\mathcal{C}^!$  mit Isomorphismen aus  $S^{-1}\mathcal{C}^!$  als waagerechten Pfeilen und den von den Transportmorphismen in der Kofaserung  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  herrührenden Vertikalen bei beliebigen Wahlen der kartesischen horizontalen Kanten einen Isomorphismus der zugehörigen Verflechtungsquadrate in spe induziert. Nun, der Morphismus  $Qf_i\mathcal{F} \rightarrow Qf_i\mathcal{F}'$  ist bereits eindeutig durch den Isomorphismus  $Q\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'$  bestimmt, da ja  $S^{-1}\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  eine Kofaserung ist. Der Morphismus  $Q\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} Q\mathcal{F}'$  in  $S_X^{-1}\mathcal{C}_X$  läßt sich schreiben als Linksbruch  $hs^{-1}$  und im Diagramm

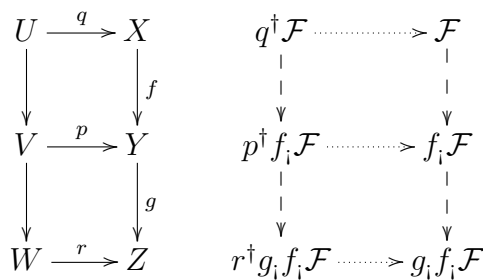
$$\mathcal{F} \xleftarrow{s} \mathcal{F}'' \xrightarrow{h} \mathcal{F}'$$

dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß dabei auch  $\mathcal{F}''$  ein  $S_X$ - $Qf_i$ -entfaltetes Objekt der Faser ist. Mit dieser Zerlegung sehen wir, daß wir bereits zuvor annehmen durften, daß unser  $S_X^{-1}\mathcal{C}_X$ -Isomorphismus  $Q\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} Q\mathcal{F}'$  Bild eines  $\mathcal{C}_X$ -Morphismus  $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  ist. In diesem Fall wissen wir jedoch

nach der Funktorialität von Verflechtungsquadraten 5.4.8, daß im Diagramm



mit senkrechten Morphismen in  $\mathcal{C}^!$  und waagerechten Morphismen in  $\mathcal{C}$  und schrägen Morphismen über Identitäten der Basis mit den linken Vertikalen gegeben durch die eindeutige Ergänzung zu Verflechtungsquadraten in der ursprünglichen Verflechtung auch das linke Trapez kommutiert. Mithin kommutiert auch das Bild des linken Trapezes in  $S^{-1}\mathcal{C}^!$ . Nach unseren Annahmen werden beim Übergang zur Lokalisierung alle schrägen Morphismen Isomorphismen und wir sehen, daß in der Tat jedes partielle Rückholquadrat in der lokalisierten Austauschsituation mit kokartesischer Ausgangskante auf genau eine Weise zu einem Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  ergänzt werden kann. Die Eindeutigkeit der Ergänzung im allgemeinen folgt unmittelbar und wir sehen, daß unsere Verflechtungsquadrate in  $\text{spe}$  schon mal die erste Bedingung an eine Verflechtung erfüllen. Daß das Verkleben zweier Verflechtungsquadrate in  $\text{spe}$  längs einer vertikalen Kante stets wieder ein Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  liefert, ist offensichtlich. Wir zeigen dasselbe nun für das Verkleben längs horizontaler Kanten. Dabei können wir uns offensichtlich auf den Fall beschränken, daß das unten angeklebte Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  eine kokartesische Ausgangskante hat. Es reicht, die beiden Fälle zu betrachten, daß das obere Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  auch eine kokartesische Ausgangskante hat oder daß es eine Ausgangskante über einer Identität in der Basis hat. Wir beginnen mit dem ersten Fall und argumentieren anhand des folgenden Diagramms aus zwei Verflechtungsquadraten des Ausgangsdatums.





Jedes Verflechtungsquadrat in spe der lokalisierten Situation mit kokartesischer Ausgangskante ist isomorph zum Bild eines Verflechtungsquadrats wie es hier oben steht mit  $\mathcal{F}$  in Bezug auf  $S_X$  entfaltet ist für  $Qf_i$ . Indem wir zu einem Verflechtungsquadrat mit isomorphem Bild in der lokalisierten Situation übergehen, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß  $\mathcal{F}$  auch entfaltet ist für  $Qg_i f_i$  und daß  $f_i \mathcal{F}$  in Bezug auf  $S_Y$  entfaltet ist für  $Qg_i$ . Dann repräsentieren insbesondere unsere beiden Quadrate übereinandersetzbare Verflechtungsquadrate in spe mit kokartesischen Ausgangskanten, ja sogar alle bis auf Isomorphismus, und das erledigt den ersten Fall. Für den zweiten Fall gehen wir aus von einem Diagramm aus zwei Verflechtungsquadraten in spe der lokalisierten Austauschsituation der Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 W \xrightarrow{q} X & & q^\dagger \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{F} \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow \\
 W \xrightarrow{q} X & & q^\dagger \mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{G} \\
 \downarrow & & \vdots \\
 Z \xrightarrow{p} Y & & p^\dagger f_i \mathcal{G} \dashrightarrow f_i \mathcal{G}
 \end{array}$$

und nehmen dabei an, daß  $\mathcal{G}$  entfaltet ist für  $S_X$  und  $Qf_i$  wohingegen das obere Quadrat irgendein kommutatives Quadrat in  $S^{-1}\mathcal{C}$  ist mit Transportmorphismen in den Horizontalen. Es gilt zu zeigen, daß das durch Verkleben entstehende Rückholquadrat in der lokalisierten Austauschsituation wieder ein Verflechtungsquadrat in spe ist, also isomorph zu einem anderes herum verklebten Rückholquadrat. Indem wir  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  als Bruch schreiben, dürfen wir annehmen, daß dieser Morphismus bereits von einem Morphismus in  $\mathcal{C}_X$  herkommt. Indem wir andernfalls  $\mathcal{F}$  entfalten, dürfen wir annehmen, daß es bereits  $S_X$ - $Qf_i$ -entfaltet ist. Dann erhalten wir in der Ausgangssituation ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 & & q^\dagger \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{F} \\
 & \swarrow & \downarrow \\
 W \xrightarrow{q} X & & q^\dagger \mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{G} \\
 \downarrow g & & \downarrow \\
 Z \xrightarrow{p} Y & & p^\dagger f_i \mathcal{F} \dashrightarrow f_i \mathcal{F} \\
 & \swarrow & \downarrow \\
 & & p^\dagger f_i \mathcal{G} \dashrightarrow f_i \mathcal{G}
 \end{array}$$

mit Verflechtungsquadraten in der Ausgangssituation als Vorderseite und Rückseite und kommutierender Oberseite und Unterseite und kommutierender nach rechts

weisender Fläche. Die Funktorialität von Verflechtungsquadraten 5.4.8 zeigt dann, daß auch die nach links weisende Fläche kommutiert. Damit ist gezeigt daß unsere Übereinandersetzung von zwei Verflechtungsquadraten in  $\text{spe}$  wieder ein Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  ist. Bleibt noch, die beiden letzten Eigenschaften zu prüfen, die wir von einer Verflechtung fordern. Daß jedes Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  mit Eigorphismen auf gegenüberliegenden Kanten der Basis kommutiert, folgt sofort aus der entsprechenden Eigenschaft in der nicht lokalisierten Austauschsituation. Daß schließlich auch in der lokalisierten Situation das Zurückholen einer kokartesischen Kante wieder kokartesisch ist, folgt unmittelbar aus unseren Definitionen.  $\square$

## 5.4 Austausch und Zwei-Funktor-Formalismus NEU

5.4.1. In diesem Abschnitt soll die Beziehung von deriviertem Eigvorschub und Rückzug, im nächsten Abschnitt die von deriviertem Eigvorschub und Trennrückzug ausgearbeitet werden. Wir beginnen damit, dafür einen begrifflichen Rahmen zu zimmern.

**Definition 5.4.2.** Unter einer **Austauschsituation** verstehen wir eine Vorgabe von Daten

$$(\mathcal{C} \xrightarrow{a} \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \xleftarrow{b} \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e, i)$$

bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{B}$ , der **Basiskategorie** oder **Basis**; darin zwei ausgezeichneten **rückzugstabilen** multiplikativen Systemen  $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{B}^! \subset \mathcal{B}$ , die beide alle Isomorphismen enthalten; einem Faserfunktoren  $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ ; einem Kofaserfunktoren  $b : \mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$ ; sowie einem Isomorphismus  $i : \mathcal{C}^!|_{\mathcal{B}^e} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}|_{\mathcal{B}^e}$  von Kategorien über  $\mathcal{B}^e$ .

- 5.4.3 (**Sprechweisen und Notationen**). 1. Wir behandeln unseren Isomorphismus  $i$  in der Notation meist als eine Gleichheit und reden dann vereinfachend von einer Austauschsituation  $(\mathcal{C} \xrightarrow{a} \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \xleftarrow{b} \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$ . Da alle Identitäten zu  $\mathcal{B}^e$  gehören, bedeutet das insbesondere, daß  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}^!$  dieselben Objekte haben und sogar dieselben Fasern  $\mathcal{C}_X = \mathcal{C}_X^!$  über denselben Objekten der Basis.
2. Den Rückzug der Faserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  für einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{B}$  notieren wir  $f^\dagger : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$ . In typischen Situationen sind die Fasern opponiert zu Kategorien von Garben und wir haben  $f^\dagger = (f^*)^{\text{opp}}$ .
  3. Die Morphismen in  $\mathcal{B}^!$  nenne ich **Lesmorphismen**, weil sie im Fall topologischer Räume die lokal eigentlichen separierten Morphismen sind, also unsere les-Abbildungen.
  4. Den Vorschub der Kofaserung  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  für Lesmorphismen  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{B}^!$  nenne ich **Eigvorschub** und notiere ihn  $f_i : \mathcal{C}_X^! \rightarrow \mathcal{C}_Y^!$  und, wenn  $i$  eine Gleichheit ist, einfacher  $f_i : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_Y$ . In typischen Situationen sind die Fasern opponiert zu Kategorien von Garben und wir haben  $f_i = (f_i)^{\text{opp}}$ .
  5. Ich sage meist  $\dagger$ -kartesisch oder kurz kartesisch statt  $a$ -kartesisch und ebenso  $\ddagger$ -kokartesisch oder eigkokartesisch statt  $b$ -kokartesisch.
  6. Die Morphismen in  $\mathcal{B}^e$  nenne ich **Eigmorphismen**, weil sie in typischen Beispielen die eigentlichen Morphismen sind. Unsere Daten beinhalten speziell eine Bifaserung über  $\mathcal{B}^e$  und damit für jeden Eigmorphismus  $f$  eine Adjunktion  $(f_i, f^\dagger)$ . Sie entspricht einer Adjunktion  $(f^*, f_i)$  von Funktoren zwischen den opponierten Fasern.

*Beispiel 5.4.4.* Die Kategorien  $\text{Top} \supset \text{Top}^s \supset \text{Top}^{\text{es}}$  der topologischen Räume mit separierten Abbildungen als Lesmorphismen und eigentlichen separierten Abbildungen als Eigmorphismen in der Basis bilden mit unserer Garbenopfaserung [TG] 6.2.17  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  als Faserung und dem Kofaserfunktorkonstruktor unserer Garbeneigkofaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}^s}^! \rightarrow \text{Top}^s$  aus [TG] 6.4.9 und deren offensichtlicher Gleichheit [TG] 6.4.2 über eigentlichen Abbildungen in der Basis eine Austauschsituation. Die hier besprochene Situation weist die Besonderheit auf, daß die Kofaserung aus der Faserung hervorgeht, indem man nur noch einen Teil der Morphismen zuläßt, genauer unter allen Opkomorphismen nur die eigentlichen Opkomorphismen. Das wird uns dabei helfen, in dieser Situation ein sogenanntes „Verflechtungsdatum“ zu konstruieren.

5.4.5. Gegeben eine Austauschsituation  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$  verstehen wir unter einem **Rückholquadrat** ein Diagramm

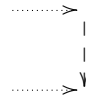


über einem kartesischen Quadrat in der Basis  $\mathcal{B}$  mit Objekten von  $\mathcal{C}$  oder gleichbedeutend  $\mathcal{C}^!$  an den Ecken und  $\dagger$ -kartesischen  $\mathcal{C}$ -Morphismen als horizontalen gepunkteten Pfeilen und  $\mathcal{C}^!$ -Morphismen als vertikalen gestrichelten Pfeilen, so daß insbesondere die Bilder der gestrichelten vertikalen Pfeile in unserem kartesischen Quadrat in der Basis  $\mathcal{B}$  Lesmorphismen sind. Die gepunktelt gezeichneten horizontalen Kanten nenne ich die **Rückholkanten** unseres Rückholquadrats und die rechte gestrichelte vertikale Kante seine **Ausgangskante**. Den Morphismus in der Basis länges der unteren Horizontale nenne ich den **zurückholenden Morphismus** unseres Rückholquadrats. Wir vereinbaren die Konvention, im Kontext einer Austauschsituation  $\mathcal{C}$ -Morphismen als gepunktete Pfeile,  $\mathcal{C}^!$ -Morphismen als gestrichelte Pfeile und  $\mathcal{C}^e$ -Morphismen als durchgezogene Pfeile zu notieren. Man beachte, daß es nicht sinnvoll ist, die Kommutativität eines Rückholquadrats zu fordern, da sich  $\mathcal{C}^!$ -Morphismen und  $\mathcal{C}$ -Morphismen im allgemeinen nicht verknüpfen lassen. Die Gesamtheit aller Rückholquadrate über einem vorgegebenen kartesischen Quadrat der Basis bildet selbst eine Kategorie, da ja nach Annahme  $\mathcal{C}$ -Morphismen und  $\mathcal{C}^!$ -Morphismen über Identitäten, ja sogar über beliebigen Eigmorphismen der Basis übereinstimmen.

5.4.6. Gegeben eine Austauschsituation  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$  verstehen wir unter einer **Verflechtung** zu unserer Austauschsituation eine Menge von Rückholquadraten, genannt **Verflechtungsquadraten**, mit den folgenden Eigenschaften:

**Eindeutige Ergänzungbarkeit:** Jedes „partielle Rückholquadrat“, bei dem nur der  $\mathcal{C}^!$ -Morphismus in der linken Vertikale fehlt, bei dem aber alle vier Morphismen in der Basis durchaus vorhanden sind, läßt sich auf genau eine

Weise zu einem Verflechtungsquadrat ergänzen. Ich versuche, diese Aussage zusätzlich zu verdeutlichen durch die graphische Darstellung



und nenne die dadurch eindeutig bestimmte neue Kante die **zurückgeholte Kante** zu unserer Ausgangskante;

**Verkleben:** Unter beiden Arten des Verklebens längs gleicher Kanten mit der Komposition in den neu entstehenden Kanten wird aus zwei Verflechtungsquadraten wieder ein Verflechtungsquadrat;

**Eigentliche Kommutativität:** Über kartesischen Quadraten in der Basis mit Eigmorphismen auf gegenüberliegenden Kanten kommutiert jedes Verflechtungsquadrat in  $\mathcal{C}$  im Fall vertikaler eig-Kanten beziehungsweise in  $\mathcal{C}^!$  im Fall horizontaler eig-Kanten;

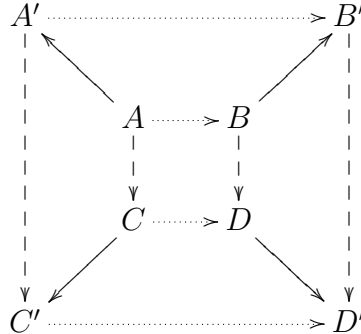
**Zurückholen kokartesischer Kanten:** Ist die Ausgangskante in einem Verflechtungsquadrat  $j$ -kokartesisch, so auch die zurückgeholte Kante.

Eine Austauschsituation mit einer ausgezeichneten Verflechtung nennen wir eine **verflochtene Austauschsituation**. Gegeben eine Austauschsituation mit Verflechtung sagen wir auch, die **Faserung sei verflochten mit der Kofaserung längs der Eigmorphismen**. Ein Verflechtungsquadrat mit eigkokartesischer Ausgangskante und damit nach unseren Annahmen auch eigkokartesischer zurückgeholter Kante nennen wir ein **kokartesisches Verflechtungsquadrat**.

5.4.7 (**Verflechtungsquadrate durch Kommutativität**). Jedes Rückholquadrat über einem kartesischen Quadrat in der Basis, das in  $\mathcal{C}$  beziehungsweise  $\mathcal{C}^!$  kommutativ ist im Fall von Eigmorphismen auf gegenüberliegenden horizontalen beziehungsweise vertikalen Kanten in der Basis, ist ein Verflechtungsquadrat für jede Verflechtung. Das folgt aus der eigentlichen Kommutativität von Verflechtungsquadraten und der eindeutigen Ergänzung.

5.4.8 (**Funktorialität von Verflechtungsquadraten**). Gegeben eine verflochtene Austauschsituation läßt sich jeder Morphismus zwischen den Ausgangskanten zweier Verflechtungsquadrate über einem vorgegebenen kartesischen Quadrat der Basis auf genau eine Weise zu einem Morphismus zwischen den beiden Verflech-

tungsquadraten fortsetzen. Um das einzusehen, betrachten wir das Diagramm



Beide Quadrate sind Verflechtungsquadrate nach Annahme. Die durchgezogenen Pfeile stellen Morphismen über Identitäten der Basis dar. Das rechte  $BD$ -Trapez ist kommutativ nach Annahme und stellt unseren Morphismus von Ausgangskanten dar. Das obere  $AB$ -Trapez wird durch genau einen Morphismus  $A \rightarrow A'$  kommutativ gemacht, da nach Annahme  $A' \rightarrow B'$  kartesisch ist. Das untere  $CD$ -Trapez wird durch genau einen Morphismus  $C \rightarrow C'$  kommutativ gemacht, da nach Annahme  $C' \rightarrow D'$  kartesisch ist. Es bleibt zu zeigen, daß dann auch das rechte  $AC$ -Trapez kommutiert. Nach der Charakterisierung von Verflechtungsquadraten durch Kommutativität 5.4.7 sind aber das obere  $AB$ -Trapez und das untere  $CD$ -Trapez beide Verflechtungsquadrate. Aufgrund der Verklebbarkeit von Verflechtungsquadraten sind dann auch das Teildiagramm mit den vertikalen Kanten  $((ACC'), (BDD'))$  sowie das Teildiagramm mit den vertikalen Kanten  $((AA'C'), (BB'D'))$  Verflechtungsquadrate. Aus der Gleichheit ihrer Ausgangskanten folgt dann mit der Eindeutigkeit der Ergänzung die Gleichheit ihrer zurückgeholtten Kanten und so die Kommutativität im rechten  $AC$ -Trapez.

**5.4.9 (Eigentlicher Basiswechsel einer verflochtenen Austauschsituation).** Gegeben eine verflochtene Austauschsituation und in der Basis  $\mathcal{B}$  ein kartesisches Diagramm  $fq = pg$  mit Lesmorphismen  $f, g$  erhalten wir eine ausgezeichnete Isotransformation

$$g_i q^\dagger \cong p^\dagger f_i$$

durch „denjenigen Isomorphismen, die die Transportmorphismen von  $g_i$  zu einem Verflechtungsquadrat ergänzen“. Wir nennen sie den **eigentlichen Basiswechsel** zu unserer Verflechtung. Sind  $f, g$  beide Eigmorphismen, so stimmt er nach der Charakterisierung 5.4.7 von Verflechtungsquadraten durch Kommutativität mit dem allgemeinen Basiswechsel [TG] 6.3.11 der Faserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  überein. Sind  $p, q$  beide Eigmorphismen, so stimmt er aus demselben Grund mit dem allgemeinen Basiswechsel der Kofaserung  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  überein.

**5.4.10 (Verflechtungsdaten durch Kommutativität).** Seien  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung über einer Kategorie  $\mathcal{B}$  mit rückzugstabilem multiplikativen System  $\mathcal{B}^!$  und

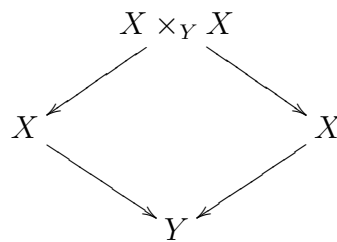
sei  $\mathcal{C}^!$  ein faserrückzugstabiles multiplikatives System in  $\mathcal{C}$  über  $\mathcal{B}^!$  im Sinne von 4.4.2. Sei weiter der restringierte Funktor  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  eine Kofaserung, deren kokartesische Morphismen auch ein faserrückzugstabiles multiplikatives System über  $\mathcal{B}^!$  bilden. Sei schließlich  $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{B}^!$  ein rückzugstabiles multiplikatives Teilsystem derart, daß über Morphismen aus  $\mathcal{B}^e$  alle  $\mathcal{C}$ -Morphismen bereits  $\mathcal{C}^!$ -Morphismen sind. So ist  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$  eine Austauschsituation und die kommutativen Rückholquadrate bilden darin eine Verflechtung.

**Beispiel 5.4.11 (Verflechtungen in topologischen Austauschsituationen).** Wir erinnern unsere topologische Austauschsituation aus 5.4.4. Bezeichnen wir mit  $\text{Top}^{\text{les}}$  die Kategorie der topologischen Räume mit nur lokal eigentlichen separierten Abbildungen als Morphismen, so ist auch

$$(\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Ab}'_{//\text{Top}^{\text{les}}}, \text{Top}^{\text{es}})$$

eine Austauschsituation. Darin bilden nach 5.4.10 die in  $\text{Ab}_{//\text{Top}}$  kommutierenden Rückholquadrate eine Verflechtung, da nach 4.4.3 der Rückzug eines eigkokartesischen Opkomorphismus über einer les-Abbildung stets wieder eigkokartetisch ist. In unserer Terminologie aus 5.4.6 ist das eine Verflechtung der Garbenopfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  mit der Garbeneigopkofaserung  $\text{Ab}'_{//\text{Top}^{\text{les}}} \rightarrow \text{Top}^{\text{les}}$  längs der eigentlichen separierten Abbildungen.

**5.4.12 (Transformation vom Vorschub zum Eigvorschub).** Gegeben sei eine verflochtene Austauschsituation  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$ . Nach der Definition eines rückzugstabilen multiplikativen Systems existiert für jeden Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis das Faserprodukt  $X \times_Y X$ . Die Verflechtung liefert für jeden Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$ , für den die Diagonale  $\Delta = \Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$  ein Eigmorphismus ist, mit der Notation  $\text{Id}$  für den Identitätsfunktor eine Transformation  $\text{Id} \Rightarrow f^\dagger f_i$  mithilfe des kartesischen Quadrats



in der Basis als die Komposition  $\text{Id} = \text{Id} \circ \text{Id} \xrightarrow{\cong} \text{id}_i \text{id}_i^\dagger \xrightarrow{\cong} \text{pr}_2 \Delta_i \Delta_i^\dagger \text{pr}_1^\dagger \Rightarrow \text{pr}_2 \text{pr}_1^\dagger \Rightarrow f^\dagger f_i$  unter Ausnützen der Adjunktion  $(\Delta_i, \Delta_i^\dagger)$  aus 5.4.3 und eigentlichem Basiswechsel 5.4.9. Besitzt  $f^\dagger$  einen Linksadjungierten, so erhalten wir auf diese Weise eine natürliche Transformation  $f_\dagger \Rightarrow f_i$ . Sie entspricht einer Transformation

$$f_i \Rightarrow f_*$$

von Funktoren der opponierten Fasern, mit denen wir es in den Anwendungen meist zu tun haben. Ist zusätzlich  $f$  selbst ein Eigmorphismus, so ist diese Transformation nach [TG] 6.3.17 und [TG] 6.3.15 die Identität auf dem Vorschub. Hier verwenden wir unsere Konvention, den Isomorphismus  $i$  aus 5.4.2 als die Identität anzunehmen, sonst muß das alles sorgfältiger formuliert werden.

*Ergänzung 5.4.13.* Im Spezialfall der abelschen Garben mag ein Student ausarbeiten, warum das der offensichtliche Morphismus aus [TG] 6.4.5 ist.

**Satz 5.4.14.** *Sei eine Austauschsituation  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow \mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$  gegeben.*

**Lokalisieren einer Austauschsituation:** *Sei  $S$  ein faserweises Oresystem in  $\mathcal{C}$ , das stabil ist unter den Rückzügen der Faserung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  und für das die Kofaserung  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  eine Rechtsanpassung besitzt. So liefert Lokalisieren eine Austauschsituation  $(S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}^! \leftarrow S^{-1}\mathcal{C}^!, \mathcal{B}^e)$ ;*

**Lokalisieren einer Verflechtung:** *Sei zusätzlich in unserer noch nicht lokalisierten Austauschsituation eine Verflechtung gegeben derart, daß für jedes kokartesische Verflechtungsquadrat, dessen Ausgangskante in der Lokalisierung  $S^{-1}\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  kokartesisch bleibt, auch die gegenüberliegende Kante in der Lokalisierung kokartesisch bleibt. So gibt es genau eine Verflechtung in der lokalisierten Austauschsituation, die alle auf diese Weise entstehenden Rückholquadrate enthält.*

5.4.15. Wir nennen die im vorigen Satz konstruierte Verflechtung die **lokalisierte Verflechtung**.

5.4.16 (**Vereinfachtes Prüfen der Bedingungen**). Gegeben ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{B}^!$  bleibt ein kokartesischer Morphismus  $\mathcal{F} \rightarrow f_!\mathcal{F}$  genau dann kokartesisch in der Lokalisierung, wenn  $\mathcal{F}$  ein  $S_X$ -entfaltetes Objekt ist für den Funktor  $Qf_! : \mathcal{C}_X \rightarrow S_Y^{-1}\mathcal{C}_Y$ , wie aus 2.3.6 folgt. Sei nun  $f_!q = pg$  ein kartesisches Diagramm der Basis mit  $g : W \rightarrow Z$ . Es reicht zu prüfen, daß der Rückzug unter  $q$  jedes  $S_X$ - $Qf_!$ -entfalteten Objekts seinerseits ein  $S_W$ - $Qg_!$ -entfaltetes Objekt ist. Dafür hinwiederum reicht es zu zeigen, daß wir für jedes Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_X$  einen  $S_X$ -Morphismus  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  finden können derart, daß sowohl  $\mathcal{G}$  ein  $S_X$ - $Qf_!$ -entfaltetes Objekt ist als auch  $q^!\mathcal{G}$  ein  $S_W$ - $Qg_!$ -entfaltetes Objekt.

*Beispiel 5.4.17.* Unsere topologische Austauschsituation aus 5.4.11 mit der durch Kommutativität konstruierten Verflechtung liefert in offensichtlicher Weise verflochtene Austauschsituationen

$$\left( \text{Hot}^\#(\text{Ab}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Hot}^\#(\text{Ab}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^!), \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

für  $\#$  eine jede unserer vier üblichen Beschränkungsbedingungen. Im Fall von  $\text{Hot}^-$  können wir diese Verflechtung nach Quasiisomorphismen lokalisieren, da



wir nach 5.1.3 die Rechtsanpassung durch Komplexe schwach kompaktweicher Garben zur Verfügung haben und da nach 5.1.16 in einem kartesischen Diagramm  $f q = p g$  topologischer Räume mit les-Abbildungen  $f, g$  der Rückzug jeder  $Q f_{(1)}$ -entfalteten Garbe unter  $q$  eine  $Q g_{(1)}$ -entfaltete Garbe ist und wir das vereinfachte Kriterium vom Ende von 5.4.16 anwenden können. So erhalten wir eine Verflechtung der Austauschsituation

$$(\text{Der}_{\parallel \text{Top}}^- \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{\parallel \text{Top}^{\text{les}}}^{-!}, \text{Top}^{\text{es}})$$

Weiter erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Austauschsituationen mit Verflechtung

$$\left( \text{Hot}(\text{Ab}_{\parallel \text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Hot}(\text{Ab}_{\parallel \text{Top}^{\text{lesb}}}^!), \text{Top}^{\text{esb}} \right)$$

und können sie wie zuvor nach Quasiisomorphismen lokalisieren, da wir nach 5.1.7 eine Rechtsanpassung zur Verfügung haben und damit genauso argumentieren können. So erhalten wir eine Verflechtung zur Austauschsituation

$$(\text{Der}_{\parallel \text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Der}_{\parallel \text{Top}^{\text{lesb}}}^!, \text{Top}^{\text{esb}})$$

Nach Konstruktion sind in diesen beiden Situationen die Verflechtungsquadrate zu Ausgangskanten aus  $\text{Der}_{\parallel \text{Top}^{\text{lesb}}}^{-!}$  dieselben.

*Beweis.* 1. Wir wissen aus 2.3.6, daß der Funktor  $S^{-1}\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  eine Kofaserung ist und daß der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus von Kategorien  $S_{\mathcal{B}^e}^{-1}(\mathcal{C}_{\mathcal{B}^e}^!) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C}^!)_{\mathcal{B}^e}$ . Wir wissen aus 2.3.6 und sogar bereits aus 2.1.5 und 2.1.11, daß der Funktor  $S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Faserung ist und der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus von Kategorien  $S_{\mathcal{B}^e}^{-1}(\mathcal{C}_{\mathcal{B}^e}) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}\mathcal{C})_{\mathcal{B}^e}$ . Das zeigt die erste Aussage.

2. Daß es höchstens eine derartige lokalisierte Verflechtung gibt, ist klar: Ihre Verflechtungsquadrate müssen mindestens alle Rückholquadrate sein, die isomorph sind zu Rückholquadraten, die man erhält, indem man an ein Rückholquadrat der im zweiten Teil unseres Satzes beschriebenen Art unten noch ein kommutatives Rückholquadrat über einem kartesischen Diagramm in der Basis mit Identitäten als Lesmorphismen anfügt. Explizit besteht unsere Verflechtung in spe mithin aus allen Rückholquadraten, die isomorph sind zu Randquadraten eines Diagramms der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} W \xrightarrow{q} X & & Qq^\dagger \mathcal{F} \cdots \cdots \cdots \rightarrow Q\mathcal{F} \\ \downarrow g & & \downarrow \text{id} \\ Z \xrightarrow{p} Y & & Qp^\dagger f_i \mathcal{F} \cdots \cdots \cdots \rightarrow Qf_i \mathcal{F} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} \\ Z \xrightarrow{p} Y & & Qp^\dagger \mathcal{G} \cdots \cdots \cdots \rightarrow Q\mathcal{G} \end{array}$$

Hier habe ich links das zugrundeliegende Diagramm der Basis dargestellt und rechts das Diagramm auf den Fasern mit als oberem Quadrat einem Verflechtungsquadrat des Ausgangsdatums mit  $\mathcal{F}$  entfaltet für  $Qf_i$  und als unterem Quadrat einem kommutativen Rückholquadrat in der Lokalisierung mit Morphismen über Identitäten in den Vertikalen. Andererseits kann eine Verflechtung für die lokalisierte Austauschsituation auch nicht größer sein, da sonst unsere Bedingung der eindeutigen Ergänzbarkeit verletzt wäre. Jetzt überlegen wir uns, daß die so gegebene Menge von Rückholquadraten, die wir vorerst unsere „Verflechtungsquadrate in  $\text{spe}$ “ nennen, auch wirklich eine Verflechtung für die lokalisierte Austauschsituation ist. Um zu sehen, daß jede Ausgangskante zu einem Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  ergänzt werden kann, erinnern wir aus 2.3.6, daß es für jeden Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis und jedes  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}_X$  eine  $S_X$ -Linksentfaltung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$  für  $Qf_i$  gibt und daß der Transportmorphismus  $\mathcal{F} \rightarrow f_i\mathcal{F}$  sowohl für  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  als auch für  $S^{-1}\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  kokartesisch ist. Jede Ausgangskante kann mithin zu einem Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  ergänzt werden. Daß die Ergänzung partieller Rückholquadrate eindeutig ist in unseren Verflechtungsquadraten in  $\text{spe}$ , zeigen wir zunächst im Fall partieller Rückholquadrate mit kokartesischer Ausgangskante. Dazu müssen wir zeigen, daß gegeben ein Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis und  $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{C}_X$  beide  $S_X$ - $Qf_i$ -entfaltet jedes kommutative Diagramm

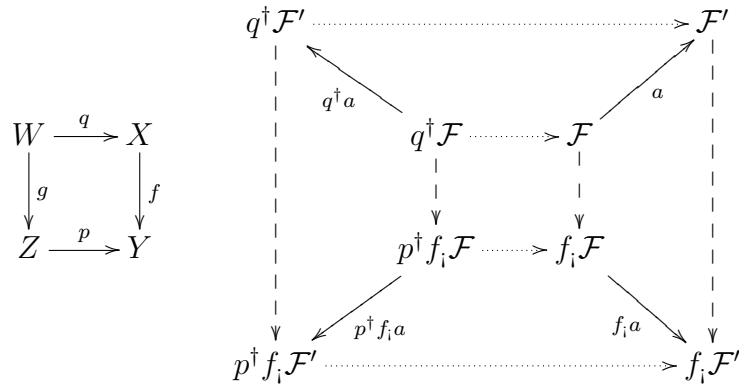
$$\begin{array}{ccc} X & Q\mathcal{F} & \longrightarrow & Q\mathcal{F}' \\ \downarrow f & \downarrow & & \downarrow \\ Y & Qf_i\mathcal{F} & \longrightarrow & Qf_i\mathcal{F}' \end{array}$$

in  $S^{-1}\mathcal{C}^!$  mit Isomorphismen aus  $S^{-1}\mathcal{C}^!$  als waagerechten Pfeilen und den von den Transportmorphismen in der Kofaserung  $\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  herrührenden Vertikalen bei beliebigen Wahlen der kartesischen horizontalen Kanten einen Isomorphismus der zugehörigen Verflechtungsquadrate in  $\text{spe}$  induziert. Nun, der Morphismus  $Qf_i\mathcal{F} \rightarrow Qf_i\mathcal{F}'$  ist bereits eindeutig durch den Isomorphismus  $Q\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  bestimmt, da ja  $S^{-1}\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  eine Kofaserung ist. Der Morphismus  $Q\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} Q\mathcal{F}'$  in  $S_X^{-1}\mathcal{C}_X$  läßt sich schreiben als Linksbruch  $hs^{-1}$  und im Diagramm

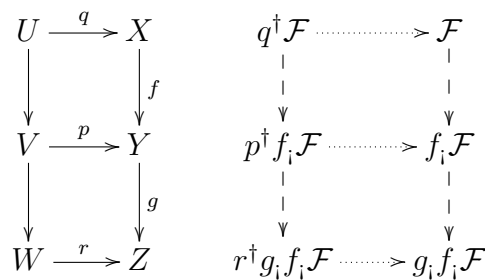
$$\mathcal{F} \xleftarrow{s} \mathcal{F}'' \xrightarrow{h} \mathcal{F}'$$

dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß dabei auch  $\mathcal{F}''$  ein  $S_X$ - $Qf_i$ -entfaltetes Objekt der Faser ist. Mit dieser Zerlegung sehen wir, daß wir bereits zuvor annehmen durften, daß unser  $S_X^{-1}\mathcal{C}_X$ -Isomorphismus  $Q\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} Q\mathcal{F}'$  Bild eines  $\mathcal{C}_X$ -Morphismus  $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  ist. In diesem Fall wissen wir jedoch

nach der Funktorialität von Verflechtungsquadraten 5.4.8, daß im Diagramm



mit senkrechten Morphismen in  $\mathcal{C}^!$  und waagerechten Morphismen in  $\mathcal{C}$  und schrägen Morphismen über Identitäten der Basis mit den linken Vertikalen gegeben durch die eindeutige Ergänzung zu Verflechtungsquadraten in der ursprünglichen Verflechtung auch das linke Trapez kommutiert. Mithin kommutiert auch das Bild des linken Trapezes in  $S^{-1}\mathcal{C}^!$ . Nach unseren Annahmen werden beim Übergang zur Lokalisierung alle schrägen Morphismen Isomorphismen und wir sehen, daß in der Tat jedes partielle Rückholquadrat in der lokalisierten Austauschsituation mit kokartesischer Ausgangskante auf genau eine Weise zu einem Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  ergänzt werden kann. Die Eindeutigkeit der Ergänzung im allgemeinen folgt unmittelbar und wir sehen, daß unsere Verflechtungsquadrate in  $\text{spe}$  schon mal die erste Bedingung an eine Verflechtung erfüllen. Daß das Verkleben zweier Verflechtungsquadrate in  $\text{spe}$  längs einer vertikalen Kante stets wieder ein Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  liefert, ist offensichtlich. Wir zeigen dasselbe nun für das Verkleben längs horizontaler Kanten. Dabei können wir uns offensichtlich auf den Fall beschränken, daß das unten angeklebte Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  eine kokartesische Ausgangskante hat. Es reicht, die beiden Fälle zu betrachten, daß das obere Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  auch eine kokartesische Ausgangskante hat oder daß es eine Ausgangskante über einer Identität in der Basis hat. Wir beginnen mit dem ersten Fall und argumentieren anhand des folgenden Diagramms aus zwei Verflechtungsquadraten des Ausgangsdatums.



Jedes Verflechtungsquadrat in spe der lokalisierten Situation mit kokartesischer Ausgangskante ist isomorph zum Bild eines Verflechtungsquadrats wie es hier oben steht mit  $\mathcal{F}$  in Bezug auf  $S_X$  entfaltet ist für  $Qf_i$ . Indem wir zu einem Verflechtungsquadrat mit isomorphem Bild in der lokalisierten Situation übergehen, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß  $\mathcal{F}$  auch entfaltet ist für  $Qg_i f_i$  und daß  $f_i \mathcal{F}$  in Bezug auf  $S_Y$  entfaltet ist für  $Qg_i$ . Dann repräsentieren insbesondere unsere beiden Quadrate übereinandersetzbare Verflechtungsquadrate in spe mit kokartesischen Ausgangskanten, ja sogar alle bis auf Isomorphismus, und das erledigt den ersten Fall. Für den zweiten Fall gehen wir aus von einem Diagramm aus zwei Verflechtungsquadraten in spe der lokalisierten Austauschsituation der Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 W \xrightarrow{q} X & & q^\dagger \mathcal{F} \cdots \cdots \rightarrow \mathcal{F} \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow \\
 W \xrightarrow{q} X & & q^\dagger \mathcal{G} \cdots \cdots \rightarrow \mathcal{G} \\
 \downarrow & & \vdots \\
 Z \xrightarrow{p} Y & & p^\dagger f_i \mathcal{G} \cdots \cdots \rightarrow f_i \mathcal{G}
 \end{array}$$

und nehmen dabei an, daß  $\mathcal{G}$  entfaltet ist für  $S_X$  und  $Qf_i$  wohingegen das obere Quadrat irgendein kommutatives Quadrat in  $S^{-1}\mathcal{C}$  ist mit Transportmorphis-  
 men in den Horizontalen. Es gilt zu zeigen, daß das durch Verkleben entstehende Rückholquadrat in der lokalisierten Austauschsituation wieder ein Verflechtungsquadrat in spe ist, also isomorph zu einem anderes herum verklebten Rückholquadrat. Indem wir  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  als Bruch schreiben, dürfen wir annehmen, daß dieser Morphismus bereits von einem Morphismus in  $\mathcal{C}_X$  herkommt. Indem wir andernfalls  $\mathcal{F}$  entfalten, dürfen wir annehmen, daß es bereits  $S_X$ - $Qf_i$ -entfaltet ist. Dann erhalten wir in der Ausgangssituation ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 & & q^\dagger \mathcal{F} \cdots \cdots \rightarrow \mathcal{F} \\
 & \swarrow & \downarrow \\
 W \xrightarrow{q} X & & q^\dagger \mathcal{G} \cdots \cdots \rightarrow \mathcal{G} \\
 \downarrow g & & \downarrow \\
 Z \xrightarrow{p} Y & & p^\dagger f_i \mathcal{F} \cdots \cdots \rightarrow f_i \mathcal{F} \\
 & \swarrow & \downarrow \\
 & & p^\dagger f_i \mathcal{G} \cdots \cdots \rightarrow f_i \mathcal{G}
 \end{array}$$

mit Verflechtungsquadraten in der Ausgangssituation als Vorderseite und Rückseite und kommutierender Oberseite und Unterseite und kommutierender nach rechts

weisender Fläche. Die Funktorialität von Verflechtungsquadraten 5.4.8 zeigt dann, daß auch die nach links weisende Fläche kommutiert. Damit ist gezeigt daß unsere Übereinandersetzung von zwei Verflechtungsquadraten in  $\text{spe}$  wieder ein Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  ist. Bleibt noch, die beiden letzten Eigenschaften zu prüfen, die wir von einer Verflechtung fordern. Daß jedes Verflechtungsquadrat in  $\text{spe}$  mit Eighomomorphismen auf gegenüberliegenden Kanten der Basis kommutiert, folgt sofort aus der entsprechenden Eigenschaft in der nicht lokalisierten Austauschsituation. Daß schließlich auch in der lokalisierten Situation das Zurückholen einer kokartesischen Kante wieder kokartesisch ist, folgt unmittelbar aus unseren Definitionen.  $\square$

## 5.5 Trennaustausch und Drei-Funktor-Formalismus

**Definition 5.5.1.** Unter einer **Trennaustauschsituation** verstehen wir eine Vorgabe von Daten

$$(\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^! \leftarrow \mathcal{G}^!, \mathcal{T}^e, i)$$

bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{T}$  mit endlichen Produkten, der **Basiskategorie** oder **Basis**; darin zwei ausgezeichneten rückzugstabilen multiplikativen Systemen  $\mathcal{T}^e \subset \mathcal{T}^! \subset \mathcal{T}$ , die beide alle Isomorphismen enthalten; einer Trennkategorie  $\mathcal{G}$  und einer Trennfaserung  $a : \mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  in die banale Trennkategorie zu  $\mathcal{T}$ ; einem Kofaserfunktorkomplex  $b : \mathcal{G}^! \rightarrow \mathcal{T}^!$ ; sowie einem Isomorphismus  $i : \mathcal{G}^! | \mathcal{T}^e \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} | \mathcal{T}^e$  von Kategorien über  $\mathcal{T}^e$ .

- 5.5.2 (**Sprechweisen und Notationen**). 1. Wir behandeln unseren Isomorphismus  $i$  in der Notation meist als eine Gleichheit und reden dann vereinfachend von einer Trennaustauschsituation  $(\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^! \leftarrow \mathcal{G}^!, \mathcal{T}^e)$ . Da alle Identitäten zu  $\mathcal{T}^e$  gehören, bedeutet das insbesondere, daß  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}^!$  dieselben Objekte haben und sogar dieselben Fasern  $\mathcal{G}_X = \mathcal{G}_X^!$  über allen Objekten  $X$  der Basis.
2. Die Morphismen in  $\mathcal{T}^!$  beziehungsweise  $\mathcal{T}^e$  nennen wir weiter **Lesmorphismen** beziehungsweise **Eigmorphismen**.
3. Den Trennrückzug längs einer Trennung  $p$  in der Basis notieren wir  $p^\dagger$ . Den Vorschub in unserer Kofaserung längs eines Lesmorphismus notieren wir  $f_i$  und nennen ihn weiter den **Eigvorschub**.
4. Gegeben ein Objekt  $X \in \mathcal{T}$  der Basis vereinbaren wir für die zur Faser opponierte Schmelzkategorie die Notation  $\mathcal{G}_{/X} := \mathcal{G}_X^{\text{opp}}$ . In typischen Anwendungen sind das Kategorien von Garben auf  $X$ . Die universellen Verschmelzungen in diesen Schmelzkategorien notieren wir  $\otimes = \otimes_X$  wie in 1.5.3. Den Opponierten des Rückzugs in unserer Faserung  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}$

für einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis  $\mathcal{T}$  notieren wir  $f^* = (f^\dagger)^{\text{opp}} : \mathcal{G}_Y \rightarrow \mathcal{G}_X$ . Den Opponierten des Vorschubs in unserer Kofaserung  $\mathcal{G}^! \rightarrow \mathcal{T}^!$  für einen Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis notieren wir  $f_! := (f_i)^{\text{opp}} : \mathcal{G}_X \rightarrow \mathcal{G}_Y$  oder genauer  $f_! : \mathcal{G}_X^! \rightarrow \mathcal{G}_Y^!$ , wenn unser Isomorphismus  $i$  keine Gleichheit sein sollte.

5. Unsere Daten beinhalten speziell eine Bifaserung über  $\mathcal{T}^e$  und damit für jeden Eigmorphismus  $f$  eine Adjunktion  $(f_i, f^\dagger)$  alias  $(f^*, f_!)$ .

### 5.5.3. Jede Trennaustauschsituation induziert eine Austauschsituation

$$(\mathcal{G}^\wedge \rightarrow \mathcal{T}^\wedge \supset \mathcal{T}^{!!} \leftarrow \mathcal{G}^{!!}, \mathcal{T}^{!e})$$

auf den Familienkategorien, bei der die Eig- beziehungsweise Lesmorphisamen in der Basis genau alle Tupel mit der Identität als Indexabbildung von Morphismen unserer Unterkategorien  $\mathcal{T}^e \subset \mathcal{T}^!$  sind und die  $\mathcal{G}^{!!}$ -Morphisamen in der Faser Tupel von  $\mathcal{G}^!$ -Morphisamen. Unter einer **Verflechtung für eine Trennaustauschsituation** oder kurz **Trennverflechtung** verstehen wir eine **Verflechtung** für die auf den Familienkategorien induzierte Austauschsituation mit der Zusatzeigenschaft, daß das Vertupeln Verflechtungsquadrate zu Verflechtungsquadraten macht. Eine Trennaustauschsituation mit einer ausgezeichneten Verflechtung nennen wir eine **verflochtene Trennaustauschsituation**. Ein Verflechtungsquadrat der Familienkategorie mit einer  $r$ -Trennung als zurückholendem Morphismus nennen wir ein  **$r$ -Verflechtungsquadrat**.

5.5.4 (**Vertauschen von externem Produkt und Eigvorschub**). Gegeben eine verflochtene Trennaustauschsituation und Lesmorphisamen  $f : A \rightarrow X$  sowie  $g : B \rightarrow Y$  in der Basis und Objekte  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_A$  sowie  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_B$  der Fasern liefert Basiswechsel 5.4.9 im kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & A \wedge B \\ f \times g \downarrow & & \downarrow f \wedge g \\ X \times Y & \longrightarrow & X \wedge Y \end{array}$$

der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  einen ausgezeichneten Iso  $(f \times g)_!(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_! \mathcal{F} \boxtimes g_! \mathcal{G}$  alias

$$f_! \mathcal{F} \boxtimes g_! \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (f \times g)_!(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$$

Daß unser obiges Diagramm in  $\mathcal{T}^\wedge$  kartesisch ist, überlegen wir uns eben auch noch. Ein Morphismus in der Familienkategorie in eine Einsfamilie wie etwa  $X \times Y$  muß von einer Einsfamilie ausgehen. Haben wir nun ein Objekt  $T$  und Morphismen  $a : T \rightarrow A$ ,  $b : T \rightarrow B$  und  $u : T \rightarrow X \times Y$  mit  $fa = \text{pr}_X u$  und  $gb = \text{pr}_Y u$ , so gibt es genau einen Morphismus  $v : T \rightarrow A \times B$  mit  $a = \text{pr}_A v$  und  $b = \text{pr}_B v$  und  $u = (f \times g)v$ , nämlich den Morphismus  $v = (a, b)$ .

5.5.5 (**Eigvorschub unter Lesmonomorphismus**). Gegeben eine verflochtene Trenaustauschsituation nennen wir einen Lesmorphismus  $i : A \rightarrow X$  der Basis, der außerdem ein Monomorphismus ist, einen **Lesmonomorphismus**. Gegeben ein Lesmonomorphismus  $i : A \rightarrow X$  ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{id}} & A \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow i \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  kartesisch und Basiswechsel liefert für alle  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X$  einen Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^\dagger i_! \mathcal{F}$  alias  $i^* i_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ . Gegeben ein Lesmonomorphismus ist auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & A \wr A \\ i \downarrow & & \downarrow i \wr i \\ X & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & X \wr X \end{array}$$

der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  kartesisch. Gegeben Objekte  $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{G}_A$  liefert Basiswechsel in diesem kartesischen Diagramm einen ausgezeichneten Isomorphismus  $i_!(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} i_! \mathcal{E} \otimes i_! \mathcal{F}$  alias

$$i_! \mathcal{E} \otimes i_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i_!(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$$

5.5.6 (**Projektionsformel**). Gegeben eine verflochtene Trenaustauschsituation und ein Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  in der Basis und Objekte  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X$  sowie  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  der Fasern liefert Basiswechsel im kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}, f)} & X \wr Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \wr \text{id} \\ Y & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & Y \wr Y \end{array}$$

der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  einen ausgezeichneten Iso  $f_!(\mathcal{F} \otimes f^\dagger \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}$  alias

$$(f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_!(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G})$$

Er heißt der Isomorphismus der **Projektionsformel**. Wenden wir ihn auf  $\mathcal{G} := f_* \mathcal{E}$  an und verwenden zusätzlich die Einheit der Adjunktion  $f^* f_* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , so erhalten wir in  $\mathcal{G}_Y$  einen ausgezeichneten Morphismus

$$f_! \mathcal{F} \otimes f_* \mathcal{E} \rightarrow f_!(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$$

**Beispiel 5.5.7 (Trennverflechtung für  $\text{Ab}_{\parallel \text{Ens}}$ ).** Abelsche Garben auf diskreten topologischen Räumen  $\mathcal{T} = \mathcal{T}^! = \text{Ens}$ , hier besteht  $\mathcal{T}^e$  aus allen Abbildungen mit endlichen Fasern, bilden eine besonders übersichtliche Trenaustauschsituation. Objekte der Faser über einer Menge  $I$  sind Familien  $M = (M_i)_{i \in I} \in \text{Ab}_{\parallel I}$  von abelschen Gruppen. Gegeben eine weitere Familie  $N = (N_i)_{i \in I} \in \text{Ab}_{\parallel I}$  über derselben Menge ist ein Morphismus  $\varphi \in \text{Ab}_{\parallel I}(N, M)$  eine Familie von Gruppenhomomorphismen

$$(\varphi_i : M_i \rightarrow N_i)_{i \in I}$$

in die Gegenrichtung. Gegeben eine weitere Familie  $L = (L_j)_{j \in J}$  über einer weiteren Menge  $J$  und eine Abbildung  $f : I \rightarrow J$  ist ein Opkomorphismus  $\psi \in \text{Ab}_{\parallel f}(M, L)$  über  $f$  eine Familie von Gruppenhomomorphismen

$$(\psi_i : L_{f(i)} \rightarrow M_i)_{i \in I}$$

und ein Eigopkomorphismus  $\psi \in \text{Ab}_{\parallel f}^!(M, L)$  ein Opkomorphismus  $\psi$ , bei dem für jedes feste  $j$  und jedes feste  $l \in L_j$  von den Gruppenhomomorphismen  $\psi_i : L_{f(i)} \rightarrow M_i$  mit  $f(i) = j$  alle bis auf höchstens endlich viele auf  $l$  verschwinden. Gegeben allgemeiner eine  $r$ -Trennung  $f = (f_\rho : I \rightarrow J_\rho)_{\rho=1}^r$  in der Basis und jeweils Familien  $L_\rho = (L_{\rho,j})_{j \in J_\rho}$  von abelschen Gruppen als Objekten über  $J_\rho$  ist eine  $r$ -Trennung  $\psi \in \text{Ab}_{\parallel f}(M, L_1 \wedge \dots \wedge L_r)$  über unserer Trennung in der Basis eine Familie von multiadditiven Abbildungen

$$(L_{1,f_1(i)} \times \dots \times L_{r,f_r(i)} \rightarrow M_i)_{i \in I}$$

Der Eigvorschub längs  $f : I \rightarrow J$  ist das Bilden der direkten Summe über die Fasern, in Formeln

$$(f_i(M))_j = \bigoplus_{f(i)=j} M_i$$

Der gewöhnliche Vorschub längs  $f$  ist das Bilden der Produkte über die Fasern, in Formeln

$$(f^\dagger(M))_j = \prod_{f(i)=j} M_i$$

Der Rückzug längs  $f$  ist das „Zurückkopieren“, in Formeln  $(f^\dagger(L))_i = L_{f(i)}$ . Das Tensorprodukt in den Fasern wird indexweise gebildet, in Formeln haben wir also  $(M \otimes N)_i = M_i \otimes N_i$ . Der Trennrückzug längs  $f = (f_\rho : I \rightarrow J_\rho)_{\rho=1}^r$  wird gegeben durch

$$(f^\dagger(L_1 \wedge \dots \wedge L_r))_i = L_{1,f_1(i)} \otimes \dots \otimes L_{r,f_r(i)}$$

Die zugehörige Trennverflechtung formalisiert die Vertauschbarkeit von Tensorprodukten und direkten Summen. Man konstruiert auch unschwer eine Adjunktion



$(f^\dagger, f_i)$  von Funktoren zwischen  $\text{Ab}_{//I}$  und  $\text{Ab}_{//J}$ . Wir kennen diese Adjunktion bereits aus [TG] 6.5.1 in etwas größerer Allgemeinheit. Im Licht der Verdier-Dualität, wie wir sie später diskutieren, bedeutet sie einen Isomorphismus von Funktoren  $f^\dagger \xrightarrow{\cong} f_i$  und in der Notation für nicht-opponierte Garbenkategorien einen Isomorphismus von Funktoren  $f^! \xrightarrow{\cong} f^*$ .

**Beispiel 5.5.8 (Trennverflechtung für  $\text{flAb}_{//\text{Top}}$ ).** Wir betrachten die Trenaustauschsituation

$$(\text{flAb}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{flAb}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^!, \text{Top}^{\text{es}})$$

mit dem von der Garbenopentrennfaserung induzierten ersten Pfeil und dem von der Garbeneigopkofaserung induzierten zweiten Pfeil. In der Tat ist sowohl jeder Trennrückzug als nach [TG] 6.4.9 auch der Eigvorschub [TG] 6.4.5 von flachen abelschen Garben wieder flach alias torsionsfrei. In diesem Fall bilden die kommutativen Rückholquadrate der Familienkategorie eine Verflechtung, da nach 4.4.6 der Trennrückzug eines Tupels eigentlicher Opkomorphismen über les-Abbildungen wieder ein eigentlicher Opkomorphismus ist und da nach 4.4.10 der Trennrückzug eines Tupels eigkokartesischer Opkomorphismen von flachen abelschen Garben über les-Abbildungen stets wieder eigkokartesisch ist. Diese verflochtene Trenaustauschsituation liefert in offensichtlicher Weise verflochtene Trenaustauschsituationen

$$\left( \text{Hot}^\sharp(\text{flAb}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Hot}^\sharp(\text{flAb}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^!), \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

für  $\sharp$  eine jede der vier üblichen Beschränkungsbedingungen.

**Satz 5.5.9.** Sei  $(\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^! \leftarrow \mathcal{G}^!, \mathcal{T}^e)$  eine Trenaustauschsituation.

**Lokalisieren einer Trenaustauschsituation** Für jedes faserweise Oresystem  $S$  in  $\mathcal{G}$ , das unter den Trennrückzügen der Trennfaserung  $\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  stabil ist und für das die Kofaserung  $\mathcal{G}^! \rightarrow \mathcal{T}^!$  eine Rechtsanpassung besitzt, liefert *Lokalisieren* eine Trenaustauschsituation

$$(S^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \wedge \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^! \leftarrow S^{-1}\mathcal{G}^!, \mathcal{T}^e)$$

**Lokalisieren einer Trennverflechtung** Sei zusätzlich in unserer ursprünglichen Trenaustauschsituation eine *Trennverflechtung* gegeben derart, daß für jedes Verflechtungsquadrat mit kokartesischen Ausgangskanten, die in der Lokalisierung  $S^{-1}\mathcal{C}^! \rightarrow \mathcal{B}^!$  kokartesisch bleiben, auch die zurückgezogene Kante in der Lokalisierung kokartesisch bleibt. So gibt es genau eine Trennverflechtung in der lokalisierten Trenaustauschsituation, die alle auf diese Weise entstehenden Rückholquadrate enthält.

*Beweis.* Das alles folgt unmittelbar, indem wir auf die zu unserer Trennaustausch-situation gehörige Austauschsituation

$$(\mathcal{G}^\wedge \rightarrow \mathcal{T}^\wedge \supset \mathcal{T}^{\text{lin}} \leftarrow \mathcal{G}^{\text{lin}}, \mathcal{T}^{\text{ell}})$$

für die Familienkategorien Satz 5.4.14 über die Lokalisierung von Verflechtungen anwenden.  $\square$

**5.5.10 (Vereinfachtes Prüfen der Bedingungen des Satzes).** Jeder Morphismus der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie entsteht nach Übung [TS] ?? durch Vertupeln und Verknüpfung aus Leertrennungen, Einstrennungen und Diagonalzweitrennungen. Es reicht im zweiten Teil unseres Satzes also, die Bedingung für alle Verflechtungsquadrate über denjenigen kartesischen Quadraten der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  zu prüfen, bei denen die Horizontalen Leertrennungen, Einstrennungen oder Diagonalzweitrennungen sind. Im Fall von Leertrennungen ist eh nichts zu prüfen. Im Fall von Diagonalzweitrennungen dürfen wir uns auf den Fall beschränken, daß von den beiden Ausgangskanten eine die Identität ist. So müssen nur die Fälle betrachtet geprüft werden, daß wir in der Basis ein gewöhnliches kartesisches Quadrat in  $\mathcal{T}$  mit Lesmorphismen in den Vertikalen haben, unten links abgebildet, oder ein kartesisches Diagramm der Familienkategorie  $\mathcal{T}^\wedge$  der rechts abgebildeten Gestalt

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}, f)} & X \wedge Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \wedge \text{id} \\ Y & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & Y \wedge Y \end{array}$$

Dafür hinwiederum reicht es in Spezialisierung von 5.4.16 zu zeigen, daß wir (1) für jedes Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X$  einen  $S_X$ -Morphismus  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{F}$  finden können derart, daß sowohl  $\mathcal{I}$  ein  $S_X$ - $Qf_i$ -entfaltetes Objekt ist als auch  $q^\dagger \mathcal{I}$  ein  $S_W$ - $Qg_i$ -entfaltetes Objekt, und daß wir (2) für jedes Paar  $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{G}_X \times \mathcal{G}_Y$  einen  $S_X$ -Morphismus  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{F}$  und einen  $S_Y$ -Morphismus  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{G}$  finden können derart, daß sowohl  $\mathcal{I}$  als auch  $(q^\dagger \mathcal{I}) \otimes \mathcal{J}$  entfaltet sind für  $S_X$ - $Qf_i$ .

**5.5.11.** Sei  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf einem Raum  $X$ . Die **Garbe der unstetigen Schnitte von  $\mathcal{F}$**  ist die Garbe  $G\mathcal{F}$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  das Produkt der Halme von  $\mathcal{F}$  an allen Punkten  $x \in U$  zuordnet, in Formeln

$$(G\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Wir haben eine kanonische Injektion  $\mathcal{F} \hookrightarrow G\mathcal{F}$  gegeben durch  $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$  für  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Gleichbedeutend

können wir die Identität als stetige Abbildung  $\delta : X^\delta \rightarrow X$  von der mit der diskreten Topologie versehenen Menge  $X$  in den topologischen Raum  $X$  betrachten. Die kanonische Injektion faktorisiert dann in die Einheit der Adjunktion und einen Isomorphismus als  $\mathcal{F} \rightarrow \delta_{(*)}\delta^{(*)}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} G\mathcal{F}$ . Terminologisch wäre es richtiger, von der Garbe der nicht notwendig stetigen Schnitte zu reden, aber so pedantisch will ich hier nicht sein.

5.5.12. Sei  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum  $X$ . Die **Godement-Auflösung von  $\mathcal{F}$**  ist der exakte Komplex von abelschen Garben  $\mathcal{F} \hookrightarrow G^0\mathcal{F} \rightarrow G^1\mathcal{F} \rightarrow \dots$ , den wir nach [TG] 2.4.13 erhalten durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} G^0\mathcal{F} &:= G\mathcal{F} \\ G^1\mathcal{F} &:= G(\text{cok}(\mathcal{F} \rightarrow G\mathcal{F})) \text{ und dann induktiv} \\ G^i\mathcal{F} &:= G(\text{cok}(G^{i-2}\mathcal{F} \rightarrow G^{i-1}\mathcal{F})) \text{ für } i \geq 2; \end{aligned}$$

Jeder Morphismus von abelschen Garben  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  liefert in offensichtlicher Weise einen Morphismus  $G\mathcal{F} \rightarrow G\mathcal{F}'$  zwischen den zugehörigen Garben unstetiger Schnitte und dann induktiv einen Morphismus von Komplexen von Garben  $G^\triangleleft\mathcal{F} \rightarrow G^\triangleleft\mathcal{F}'$ . Auf diese Weise wird das Bilden der Godementauflösung  $G^\triangleleft$  ein Funktor.

5.5.13. Die Schnitte unserer Garbe der unstetigen Schnitte  $G\mathcal{F}$  sind nur über offenen Teilmengen unstetige Schnitte in den étalen Raum der ursprünglichen Garbe. Die Halme der Garbe der unstetigen Schnitte einer Garbe sind im allgemeinen sehr viel größer als die Halme der ursprünglichen Garbe.

**Proposition 5.5.14 (Exaktheiten der Godementauflösung).** *Ist  $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  eine exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum, so sind die auf den Garben der Godement-Auflösungen induzierten Sequenzen sogar exakte Sequenzen in der Kategorie der abelschen Prägarben*

$$G^i\mathcal{F}' \rightarrow G^i\mathcal{F} \rightarrow G^i\mathcal{F}''$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von einer kurzen exakten Sequenz  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  ausgehen. Ergänzen wir sie zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}' & \hookrightarrow & \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G\mathcal{F}' & \rightarrow & G\mathcal{F} & \rightarrow & G\mathcal{F}'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}' & \rightarrow & \mathcal{K} & \rightarrow & \mathcal{K}'' \end{array}$$

mit im Garbensinne exakten Vertikalen, so ist die mittlere Horizontale exakt als Sequenz von Prägarben nach Konstruktion. Dann ist sie erst recht exakt als Sequenz von Garben und das Neunerlemma angewandt auf die Halme zeigt, daß

auch die unterste Zeile exakt ist auf den Halmen, also exakt ist als Sequenz von Garben. Die Proposition folgt durch Induktion.  $\square$

**Lemma 5.5.15.** *Gegeben eine flache abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  besteht auch ihre Godementauflösung aus flachen abelschen Garben.*

*Beweis.* Im Fall abelscher Gruppen ist flach äquivalent zu torsionsfrei und diese Eigenschaft ist stabil unter Produkten und filtrierenden Kolimites. Daraus folgt, daß mit einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  auch die Garbe ihrer un stetigen Schnitte  $G\mathcal{F}$  flache Halme hat. Da die von der Einbettung  $\mathcal{F} \hookrightarrow G\mathcal{F}$  auf den Halmen induzierten Einbettungen  $\mathcal{F}_x \hookrightarrow (G\mathcal{F})_x$  sämtlich spalten, hat auch der Kokern flache Halme. Das Lemma folgt induktiv.  $\square$

**Definition 5.5.16.** Unter einer **flachwelken** abelschen Garbe verstehen wir eine abelsche Garbe, die flach und welk ist.

5.5.17 (**Funktorielle flachwelke Auflösung**). Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{F}$  ein gegen die Differentiale beschränkter Komplex flacher abelscher Garben auf  $X$ . Bilden wir den Doppelkomplex der Godementauflösungen der Garben unseres Komplexes und dazu den Totalkomplex, so erhalten wir einen Quasiisomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}\mathcal{F}$  in einen gegen die Differentiale beschränkten Komplex flachwelker abelscher Garben. Diese Konstruktion  $\mathcal{G}$  ist funktoriell in  $\mathcal{F}$ .

5.5.18. Die Kategorie der schwach kompaktweichen flachen abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$  notieren wir  $\text{skwflAb}/_X$ .

**Lemma 5.5.19.** *Die Komplexe  $\text{Hot}^-(\text{skwflAb}/_{\text{Top}})$  schwach kompaktweicher flacher Garben bilden eine Rechtsanpassung für die Kofaserung*

$$\text{Hot}^-(\text{flAb}^!_{\text{Top}^{\text{les}}}) \rightarrow \text{Top}^{\text{les}}$$

*Beweis.* Die Bedingung „schwach kompaktweich“ bleibt nach 5.1.14 unter eigentlichen Vorschüben  $f_{(!)}$  mit les-Abbildungen  $f$  erhalten. Für die Bedingung „flach“ gilt dasselbe, sie bedeutet ja in unserem Fall nur die Torsionsfreiheit der Halme, und die Halme sind Schnitte mit kompaktem Träger der Restriktionen auf die Fasern. Folglich liegt schon einmal eine Unterkofaserung vor. Die Quasiisomorphismen bilden weiter ein Oresystem in  $\text{Hot}^-(\text{skwflAb}/_X)$ , das gilt allgemein für die Homotopiekategorie jeder unter endlichen Koprodukten stabilen vollen Unterkategorie einer abelschen Kategorie. Die eigentlichen Vorschübe erhalten Quasiisomorphismen zwischen Komplexen aus  $\text{Hot}^-(\text{skwflAb}/_X)$ , da alle Einträge dieser Komplexe entsprechend entfaltet sind. Um schließlich zu zeigen, daß es zu jedem Objekt von  $\text{Hot}^-(\text{flAb}/_X)$  einen Quasiisomorphismus von einem Objekt von  $\text{Hot}^-(\text{skwflAb}/_X)$  gibt, können wir die flachwelke Auflösung 5.5.17 durch un stetige Schnitte verwenden.  $\square$

**Beispiel 5.5.20 (Halbseitig derivierte verflochtene Garbenoptrennfaserung).**  
Die Trennaustauschsituation

$$\left( \text{Hot}^-(\text{flAb}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Hot}^-(\text{flAb}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^!), \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

aus 5.5.8 kann aufgrund von Lemma 5.5.19 im Sinne des ersten Teils von Satz 5.5.9 nach Quasiisomorphismen lokalisiert werden. Die in [TD] 1.3.18 erklärte Äquivalenz  $\text{Hot}^-(\text{flAb}_{//X})_{\text{qis}} \xrightarrow{\cong} \text{Der}^-(\text{Ab}_{//X})$  identifiziert die Fasern der Lokalisierung mit den üblichen derivierten Kategorien von abelschen Garben. Wir notieren die so entstehende Trennaustauschsituation

$$\left( \text{Der}_{//\text{Top}}^- \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Top}^{\text{les}}}^{-!}, \text{Top}^{\text{es}} \right)$$

Auch die im zweiten Teil von Satz 5.5.9 gegebenen Bedingungen für die Lokalisierung einer Trennverflechtung sind, wie wir gleich zeigen, in diesem Beispiel erfüllt und liefern für unsere lokalisierte Trennaustauschsituation eine Trennverflechtung. Um das zu prüfen, müssen wir nur unsere vereinfachten Bedingungen (1) und (2) aus 5.5.10 durchgehen. Bereits beim Beweis von 5.5.19 hatten wir gesehen, daß es zu jedem Objekt  $\mathcal{F} \in \text{Hot}^-(\text{flAb}_{//X})$  einen Quasiisomorphismus von einem Objekt von  $\mathcal{I} \in \text{Hot}^-(\text{skwflAb}_{//X})$  gibt. Dieser Komplex ist  $Qf_i$ -entfaltet, weil alle beteiligten Garben es sind, und der Komplex  $q^\dagger \mathcal{I}$  ist  $Qg_i$ -entfaltet, weil alle beteiligten Garben  $g$ -kompaktweich sind nach 5.1.16. Das zeigt Bedingung (1). Für (2) gehen wir ähnlich vor. Es reicht zu prüfen, daß für  $f : X \rightarrow Y$  les und  $\mathcal{F} \in \text{skwflAb}_{//X}$  eine schwach kompaktweiche flache abelsche Garbe auf  $X$  und  $\mathcal{G} \in \text{flAb}_{//Y}$  eine flache abelsche Garbe auf  $Y$  die Garbe  $\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G}$  auf  $X$  entfaltet ist für  $Qf_i$ . Aufgrund von lokal eigentlichem Basiswechsel 4.1.16 reicht es zu zeigen, daß die Einschränkungen von  $\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G}$  auf alle Fasern unserer Abbildung alias die Garben  $(\mathcal{F}|_{X_y}) \otimes \mathcal{G}_y$  ihrerseits  $\Gamma_1$ -entfaltet sind für alle  $y \in Y$ . Nach Annahme ist aber  $X_y$  lokal kompakt Hausdorff und  $\mathcal{F}|_{X_y}$  kompaktweich und damit folgt unsere Behauptung aus 4.3.1.

**Beispiel 5.5.21 (Beidseitig derivierte verflochtene Garbenoptrennfaserung).**  
Wir geben noch eine Variante zu 5.5.20 an, bei der wir unbeschränkte derivierte Kategorien erlauben, dafür aber weniger Lesmorphismen in der Basis zulassen. Sicher können wir unsere Trennaustauschsituation aus 5.5.8 einschränken zu einer Trennaustauschsituation

$$\left( \text{flAb}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{flAb}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^!, \text{Top}^{\text{esb}} \right)$$

Die kommutativen Rückholquadrate der Familienkategorie bilden darin wieder eine Trennverflechtung und induzieren eine Trennverflechtung der zugehörigen Trennaustauschsituation

$$\left( \text{Hot}(\text{flAb}_{//\text{Top}}) \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Hot}(\text{flAb}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^!), \text{Top}^{\text{esb}} \right)$$

auf den unbeschränkten Homotopiekategorien. Auch diese Trennaustauschsituation läßt sich nach Quasiisomorphismen lokalisieren im Sinne von Satz 5.5.9, wie wir im folgenden ausführen. Aus 5.1.7 wissen wir, daß für jede lesb-Abbildung  $f$  alle Komplexe schwach kompaktweicher Garben entfaltet sind in Bezug auf  $f_{(!)}$  und daß  $f_{(!)}$  schwach kompaktweiche Garben zu schwach kompaktweichen Garben macht. Aus dem Beweis von 5.5.19 wissen wir auch, daß  $f_{(!)}$  flache Garben zu flachen Garben macht. Mithin ist

$$\text{Hot}(\text{skwflAb}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^!)$$

eine volle Unterkofaserung. Um zu zeigen, daß wir sogar eine Rechtsanpassung an  $\text{Hot}(\text{flAb}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}}^!)$  in Bezug auf Quasiisomorphismen vor uns haben, müssen wir nur noch von jedem Komplex flacher Garben einen Quasiisomorphismus zu einem Komplex schwach kompaktweicher flacher Garben angeben. Dazu ergänzen wir unseren als Zeile mit  $q = -1$  gedachten Komplex  $(\mathcal{F}^p)$  zu einem Doppelkomplex in der oberen Halbebene mit den Godement-Auflösungen  $\mathcal{G}^q \mathcal{F}^p$  in den Spalten. Unser Doppelkomplex hat exakte Spalten, folglich halmweise exakte Spalten, folglich ist nach [TD] 3.8.3 sein Summentotal halmweise exakt, also exakt. Die Einbettung des horizontalen Kernkomplexes ist also ein Quasiisomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{tot}^{\oplus} \mathcal{G}\mathcal{F}$$

Nun besteht das Summentotal aus flachen Garben, da ja die Godementauflösung einer flachen abelschen Garbe nach 5.5.15 aus flachen abelschen Garben besteht. Weiter besteht das Summentotal auch aus schwach kompaktweichen Garben nach 4.2.6. Damit bilden die Homotopiekomplexe schwach kompaktweicher flacher abelscher Garben in der Tat eine Rechtsanpassung an unsere Eigokofaserung der Homotopiekomplexe flacher Garben in Bezug auf Quasiisomorphismen und wir können unsere Trennaustauschsituation lokalisieren. Schließlich prüfen wir noch, daß auch die zweite Bedingung aus Satz 5.5.9 erfüllt ist, so daß wir unsere durch Kommutativität gegebene Trennverflechtung auf der Homotopiekategorie lokalisieren können. Hier reicht es, die beiden Bedingungen aus 5.5.10 zu prüfen, und das geht genauso wie es im halbseitig beschränkten Fall in 5.5.20 ausgeführt wird. In unserer Situation gilt es nur zusätzlich, unbeschränkte Komplexe nach dem Rückzug zu tensorieren. Wir müssen also zusätzlich wissen, daß auch abzählbare Koprodukte  $g_{(!)}$ -entfalteter Garben wieder  $g_{(!)}$ -entfaltet sind. Da wir aber die  $R^i g_{(!)}$  durch schwach kompaktweiche Auflösungen berechnen können und Koprodukte schwach kompaktweicher Garben nach 4.2.6 schwach kompaktweich sind und Koprodukte exakter Garbensequenzen wieder exakt und da eigentliche Verschiebe nach 4.2.4 mit Koprodukten vertauschen, ist das klar. So erhalten wir für die lokalisierte Trennaustauschsituation

$$(\text{Der}_{//\text{Top}} \rightarrow \text{Top} \supset \text{Top}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Top}^{\text{lesb}}, \text{Top}^{\text{esb}}}^!)$$

auch eine lokalisierte Trennverflechtung.

## 5.6 Anwendungen im topologischen Fall

**Beispiel 5.6.1 (Die Künnethformel der kompakten Kohomologie).** Gegeben lokal kompakte Hausdorffräume  $X, Y$  betrachten wir in der Familienkategorie der banalen Trennkategorie topologischer Räume das kartesische Diagramm mit les-Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \wedge Y \\ \downarrow c & & \downarrow c_X \wedge c_Y \\ \text{top} & \longrightarrow & \text{top} \wedge \text{top} \end{array}$$

Aus 1.5.19 erhalten wir einen Isomorphismus  $X \times Y \xrightarrow{\sim} \underline{X} \boxtimes \underline{Y}$  oder in anderer Notation  $\mathbb{Z}_{X \times Y} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X \boxtimes \mathbb{Z}_Y$ . Derivierter lokal eigentlicher Basiswechsel 5.5.4 in unserem kartesischen Diagramm mit der Diagonale als unterer Horizontale liefert weiter einen Isomorphismus  $c_{X!} \mathbb{Z}_X \otimes c_{Y!} \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} c_!(\mathbb{Z}_X \boxtimes \mathbb{Z}_Y)$ . Alles in allem erhalten wir so einen Isomorphismus

$$c_{X!} \mathbb{Z}_X \otimes c_{Y!} \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} c_! \mathbb{Z}_{X \times Y}$$

in  $\text{Der}(\text{Ab}/_{\text{top}}) = \text{Der}(\text{Ab})$ . Das Tensorprodukt ist bis hierher stets deriviert als  $\otimes = \otimes^L$  zu verstehen. Mit der abstrakten Künnethformel [TD] 3.9.19 erhalten wir daraus, jetzt aber mit  $\otimes$  als underiviertem Tensorprodukt, natürliche unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen von abelschen Gruppen

$$\bigoplus_{p+q=n} H_1^p X \otimes H_1^q Y \hookrightarrow H_1^n(X \times Y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} H_1^p X * H_1^q Y$$

**5.6.2 (Trennkategorien von Raumpaaren).** Um unseren Trennfunktor der relativen singulären Kohomologie  $H_{\text{sing}}^* : \text{Top}^{\circlearrowleft} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$  relativ zu einer offenen Teilmenge aus [TS] ?? in der Garbenkohomologie wiederzufinden, führen wir eine Variante  $\text{Top}^{\mathfrak{A}}$  unserer Trennkategorie  $\text{Top}^{\circlearrowleft}$  aus [TSK] 4.1.16 ein. Objekte sind Paare  $(X, A)$  mit  $A \not\supset X$  und Morphismen  $(X, A) \rightarrow (Y_1, B_1) \wedge \dots \wedge (Y_r, B_r)$  Tupel von stetigen Abbildungen  $f_i : X \rightarrow Y_i$  ist mit  $A \supset f_1^{-1}(B_1) \cap \dots \cap f_r^{-1}(B_r)$ . Das Bilden des Komplements  $(X, U) \mapsto (X, X \setminus U)$  ist dann ein Isomorphismus von Trennkategorien

$$\text{Top}^{\circlearrowleft} \xrightarrow{\sim} \text{Top}^{\mathfrak{A}}$$

Wir drehen in der Notation das Inklusionszeichen um, weil  $\text{Top}^{\mathfrak{A}}$  im Gegensatz zu  $\text{Top}^{\circlearrowleft}$  keine volle Untertrennkategorie der in [TSK] 4.1.16 erklärten Trennkategorie  $\text{Top}^{\subset}$  der Raumpaare ist, sondern vielmehr eine volle Untertrennkategorie ihrer in offensichtlicher Weise erklärten Variante  $\text{Top}^{\supset}$ .

**5.6.3 (Lokale Kohomologie als Hyperkohomologie der Lokalgarbe).** Unsere Beschreibung [TG] 4.4.5 der lokalen Kohomologie als Erweiterungsgruppe zusammen mit der Beschreibung 2.5.8 einer Erweiterungsgruppe als die Hyperkohomologie des entsprechenden Homkomplexes liefern für  $A \triangleleft X$  abgeschlossen und  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung Isomorphismen  $H_A^q(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{Ab}/X}^q(\mathbb{Z}_{ACX}, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathbb{Z}_{ACX}^\vee)$ . Wir vereinbaren die Notation  $\mathcal{L}_{ACX} := \mathbb{Z}_{ACX}^\vee$ , nennen diesen Komplex die **Lokalgarbe von  $A$  in  $X$**  und erhalten Isomorphismen

$$H_A^q(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{L}_{ACX})$$

**5.6.4.** Wir erinnern die Garbenopptrennfaserung  $\text{Ab}_{//\text{Top}} \rightarrow \wedge \text{Top}$  aus 1.2.9 und betrachten die dazu oppinverse Trennfaserung nach 1.7.4 und notieren sie  $\text{Ab}_{/\text{Top}} := (\text{Ab}_{//\text{Top}})^{\text{otf}} \rightarrow \wedge \text{Top}$ . Trennungen  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_r$  in  $\text{Ab}_{/\text{Top}}$  über einer Trennung  $(f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow Y_1 \wedge \dots \wedge Y_r$  in  $\wedge \text{Top}$  sind per definitionem Homomorphismen  $\mathcal{F} \rightarrow f_1^* \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{G}_r$  in  $\text{Ab}/X$ . Wir betrachten nun den Trennfunktor  $\text{Top}^{\mathfrak{A}} \rightarrow \text{Ab}_{/\text{Top}}$  mit  $(X, A) \mapsto \mathbb{Z}_X$ . Die Bilder der Trennungen in der Basis unter diesem Trennfunktor steigen ab zu Trennungen zwischen den Quotienten

$$\mathbb{Z}_{ACX} := i_* \mathbb{Z}_A = i_* i^* \mathbb{Z}_X$$

der Garben  $\mathbb{Z}_X$  mit  $i : A \hookrightarrow X$  der Einbettung und wir erhalten so einen weiteren Trennfunktor  $\text{Top}^{\mathfrak{A}} \rightarrow \text{Ab}_{/\text{Top}}$  mit  $(X, A) \mapsto \mathbb{Z}_{ACX}$ . Die zugehörigen Morphismen

$$\mathbb{Z}_{ACX} \rightarrow f_1^* \mathbb{Z}_{B_1 C Y_1} \otimes \dots \otimes f_r^* \mathbb{Z}_{B_r C Y_r}$$

sind dieselben in  $\text{Ab}/X$  und  $\text{Der}/X$ , da alle beteiligten Garben freie Halme haben, und wir erhalten so einen Trennfunktor  $\text{Top}^{\mathfrak{A}} \rightarrow (\text{Der}_{//\text{Top}})^{\text{otf}}$ . Wir erinnern nun an unsere Lokalgarnen

$$\mathcal{L}_{ACX} := (\mathbb{Z}_{ACX})^\vee = (\mathbb{Z}_{ACX} \rightrightarrows \mathbb{Z}_X) \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$$

aus 5.6.3. Dualisieren wir unseren Morphismus von eben und schalten davor die natürlichen Morphismen [TSK] 1.3.19 vom Tensorprodukt der Dualen zum Dualen des Tensorprodukts und die natürlichen Morphismen 1.5.11 vom Rückzug des Dualen zum Dualen des Rückzugs, so erhalten wir in  $\text{Der}(\text{Ab}/X)$  einen Morphismus

$$f_1^* \mathcal{L}_{B_1 C Y_1} \otimes \dots \otimes f_r^* \mathcal{L}_{B_r C Y_r} \rightarrow \mathcal{L}_{ACX}$$

alias eine Trennung  $\mathcal{L}_{ACX} \rightarrow \mathcal{L}_{B_1 C Y_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_{B_r C Y_r}$  in  $\text{Der}_{//\text{Top}}$ . Wir erhalten so einigermaßen offensichtlich einen Trennfunktor  $\text{Top}^{\mathfrak{A}} \rightarrow \text{Der}_{//\text{Top}}$ . Formal und in der angemessenen Allgemeinheit steht das in 1.7.9. Durch Nachschalten von  $\mathbb{H}$  und unsere Isomorphismen  $H_A^q(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{L}_{ACX})$  nach 5.6.3 erhalten wir daraus einen Trennfunktor

$$\text{Top}^{\mathfrak{A}} \rightarrow \text{sgAb}^{\text{opp}}$$



mit  $(X, A) \mapsto H_A^*(X)$ . Wir nennen ihn den **Trennfunktor der lokalen Kohomologie**. Sein Analogon in der singulären Theorie kennen bereits aus [TS] ?? . Er beinhaltet das **cup-Produkt der lokalen Kohomologie**

$$\cup : H_A^*(X) \otimes H_B^*(X) \rightarrow H_{A \cap B}^*(X)$$

und die bereits aus [TG] 4.4.7 bekannten Rückzüge  $H^* f : H_B^*(Y) \rightarrow H_A^*(X)$  für  $f : X \rightarrow Y$  stetig mit  $A \supset f^{-1}(B)$  sowie das **externe Produkt der lokalen Kohomologie**

$$\times : H_A^p(X) \times H_B^q(Y) \rightarrow H_{A \times B}^{p+q}(X \times Y)$$

Er beinhaltet außerdem verschiedene Verträglichkeiten zwischen diesen Konstruktionen. Quasi per definitionem ist  $H_X^*(X) = H^*(X)$  die übliche Garbenkohomologie und wir haben  $H_\emptyset^*(X) = 0$ . Das zeigt zum Beispiel, daß das cup-Produkt von zwei Klassen in  $H^*(X)$  verschwinden muß, wenn unsere Klassen von lokalen Kohomologiegruppen  $H_A^p(X)$  und  $H_B^q(X)$  herkommen mit  $A \cap B = \emptyset$ .

5.6.5. Nach [TG] 4.8.16 haben wir für jeden topologischen Raum  $X$  natürliche Isomorphismen  $\text{colf}_K H_K^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H_1^q(X; \mathcal{F})$  mit dem Kolimes über alle abgeschlossenen Kompakta  $K \triangleleft X$ . Insbesondere macht unser cup-Produkt der lokalen Kohomologie die kompakte Kohomologie von  $X$  zu einem Modul über dem Kohomologiering. Wir notieren auch diese Operation  $\cup$  und bezeichnen die zugehörige Abbildung  $H^p(X) \times H_1^q(X) \rightarrow H_1^{p+q}(X)$  als **cup-Produkt**.

5.6.6. Im Formalismus der zwei Funktoren liefert für jeden topologischen Raum  $X$  und alle  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  der ausgezeichnete Isomorphismus  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  Morphismen  $\text{Der}/X(\mathbb{Z}_X, \mathbb{Z}_X[q]) \rightarrow \text{Der}/X(\mathcal{F}, \mathcal{F}[q])$  und so eine Operation von  $H^* X$  auf  $\mathbb{H}_1^*(X; \mathcal{F})$  und  $\mathbb{H}_1^*(X; \mathcal{F})$ .

**Proposition 5.6.7 (Schnitt zweier Kurven in der Ebene).** *Seien  $A, B \triangleleft \mathbb{R}^2$  zwei abgeschlossene nichtkompakte zusammenhängende Einsmannigfaltigkeiten in der Ebene  $X := \mathbb{R}^2$ , die sich in genau einem Punkt  $x \in X$  treffen. Trifft jede Komponente von  $X \setminus A$  jede Komponente von  $X \setminus B$ , so liefert das cup-Produkt der lokalen Kohomologie einen Isomorphismus*

$$H_A^1(X) \otimes H_B^1(X) \xrightarrow{\sim} H_{\{x\}}^2(X)$$

*Andernfalls ist diese Abbildung Null.*

5.6.8. Ein konzeptionelleres Argument unter stärkeren Regularitätsannahmen und in beliebigen Dimensionen wird in Übung 5.6.12 skizziert. Hier fordern wir nur, daß  $A, B$  abgeschlossene Teilmengen und mit ihrer induzierten Topologie topologische Einsmannigfaltigkeiten sind.

*Beweis.* Bezeichne  $U := X \setminus A$  das Komplement von  $A$ . Nach [TG] ?? hat  $U$  genau zwei Komponenten  $U_1, U_2$  und deren höhere Garbenkohomologie verschwindet. Unsere allgemeine Erkenntnis [TG] 4.9.15 liefert eine kurze exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}_{U \subset X} \hookrightarrow \mathbb{Z}_X \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{A \subset X}$$

von abelschen Garben auf  $X$  und zeigt, wenn wir dazu die lange exakte Sequenz der Morphismen in die  $\mathbb{Z}_X[q]$  bilden, schon einmal  $H_A^q(X) \cong \mathbb{Z}$  für  $q = 1$  und Null sonst. In anderen Worten liefert unsere kurze exakte Sequenz einen Quasiisomorphismus  $(\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X[0]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{A \subset X}[0]$ , der nach der Beschreibung von  $\text{Ext}^q(\mathbb{Z}_{U \subset X}, \mathcal{F})$  aus [TG] 4.9.32 und dem Vergleich von Morphismen in  $\text{Hot}$  und  $\text{Der}$  aus [TD] 2.8.18 eine Bijektion

$$\text{Hot}_{\text{Ab}/X}((\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X[0]), \mathbb{Z}_X[1]) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\text{Ab}/X}(\mathbb{Z}_{A \subset X}, \mathbb{Z}_X[1])$$

induziert. Das Symbol  $[0]$  verwenden wir hier, um bei einem Komplex den Term im Grad Null anzuzeigen. Wir erhalten offensichtlich einen Erzeuger von

$$\text{Hot}_{\text{Ab}/X}((\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X[0]), \mathbb{Z}_X[1]) = \mathcal{H}^0((\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X[0]) \rightrightarrows_{\text{Hot}} \mathbb{Z}_X[1])$$

durch einen Morphismus  $\mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X$ , der unter der offensichtlichen Zerlegung  $\mathbb{Z}_{U_1 \subset X} \oplus \mathbb{Z}_{U_2 \subset X} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{U \subset X}$  zu einem Erzeuger des Raums der Morphismen  $\mathbb{Z}_{U_1 \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X$  beziehungsweise zum Nullmorphismus  $\mathbb{Z}_{U_2 \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_X$  einschränkt. Ebenso hat auch  $V := X \setminus B$  genau zwei Komponenten  $V_1, V_2$ . Nach [TG] 4.10.27 hat weiter das Komplement von  $A \cup B$  genau vier Komponenten. Sind alle Schnitte  $U_i \cap V_j$  nicht leer, so müssen diese Schnitte genau unsere vier Komponenten sein. Wählt man nun analog einen Repräsentanten in der Homotopiekategorie für einen Erzeuger der lokalen Kohomologie  $H_B^1(X)$  und bildet das Tensorprodukt in der Homotopiekategorie, so kann man wieder in der Homotopiekategorie unschwer prüfen, daß wir einen Repräsentanten eines Erzeugers von  $H_{\{x\}}^2(X)$  erhalten. Andernfalls haben wir nach eventueller Umnummerierung ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ , und dann ist das cup-Produkt der entsprechenden Erzeuger in der Homotopiekategorie in der Tat der Nullmorphismus.  $\square$

## Übungen

*Übung 5.6.9.* Unser Schmelzfunktor der topologischen Orientierungsmenge

$$\text{or}^{\text{top}} : (\gamma \text{Modf}_{\mathbb{R}})^{\times} \rightarrow \text{Par}$$

aus [TS] ?? vom banalen Schmelzgruppoid der endlichdimensionalen reellen Vektorräume in die Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten, der jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  die Parität seiner Dimension erweitert um die

Menge der beiden Erzeuger der totalen relativen singulären Homologie  $H(V, V \setminus 0)$  zuordnet, ist isomorph durch Übergang zur jeweiligen Koordinatenfunktion gefolgt von den Isomorphismen  $H^*(V, V \setminus 0) \xrightarrow{\sim} H_{\{0\}}^*(V) \xrightarrow{\sim} H_1^*(V)$  aus [TG] 5.1.20 und [TG] 4.8.16 zum vielleicht noch natürlicheren Schmelzfunktor, der  $V$  die Parität seiner Dimension erweitert um die Menge der beiden Erzeuger von  $H_1^*(V)$  zuordnet. Von nun an betrachten wir diesen Schmelzfunktor als unsere „Hauptinkarnation“ der **topologischen Orientierungsmenge** und nennen die Menge der beiden Erzeuger von  $H_1^*(V)$  im folgenden oft kürzer die **Orientierungsmenge**  $or^{\text{top}}(V)$  eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$ . Wir erklären ein ausgezeichnetes Element

$$\tau \in or^{\text{top}}(\mathbb{R})$$

alias einen ausgezeichneten Erzeuger  $\tau \in H_1^1(\mathbb{R})$  als dasjenige Element, das unter der Komposition von natürlichen Isomorphismen von Garbenkohomologien  $H^0(\mathbb{R} \setminus 0)/H^0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_{\{0\}}^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_1^1(\mathbb{R})$  herkommt vom Schnitt mit Wert Eins auf  $\mathbb{R}_{>0}$  und Wert Null auf  $\mathbb{R}_{<0}$  der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R} \setminus 0$ . Das ist auch genau unser  $\tau^1$  aus [TG] 4.9.19. Wenn ich richtig gerechnet habe, ist das auch das Bild unseres ausgezeichneten Erzeugers  $\tau \in H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus 0)$  aus [TS] ?? unter den obigen natürlichen Isomorphismen und dem Anwenden des Vergleichsisomorphismus von der singulären Kohomologie zur Garbenkohomologie.

*Übung 5.6.10.* Gegeben topologische Räume  $X, Y$  zusammen mit der Einbettung  $i : A \hookrightarrow X$  einer abgeschlossenen Teilmenge liefert jeder Morphismus  $\alpha : i_! \mathbb{Z}_A \rightarrow \mathbb{Z}_X[p]$  durch Rückzug längs der Projektion einen Morphismus  $\alpha_Y : i_! \mathbb{Z}_{A \times Y} \rightarrow \mathbb{Z}_{X \times Y}[p]$ . Ist  $j : B \hookrightarrow Y$  auch eine abgeschlossene Teilmenge, so liefern die Konstruktionen aus ?? angewandt auf  $\alpha_Y$  und  $\beta_X$  eine Abbildung

$$H_A^p(X) \times H_B^q(Y) \rightarrow H_{A \times B}^{p+q}(X \times Y)$$

Wir nennen sie das **externe Produkt der lokalen Kohomologie** und notieren unsere Abbildung  $\times$ . Im Fall  $A = X$  und  $B = Y$  spezialisiert sie zum Kreuzprodukt der Garbenkohomologie 2.6.5 und im Fall  $X = Y$  erhalten wir durch Nachschalten des Rückzugs auf die Diagonale unser Cup-Produkt der lokalen Kohomologie ??.

*Übung 5.6.11.* Gegeben topologische Räume mit abgeschlossenen Teilmengen  $A, B \not\subseteq X$  und  $C, D \not\subseteq Y$  zeige man die Kommutativität bis auf das Vorzeichen  $(-1)^{qr}$  des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_A^p(X) \times H_B^q(X) \times H_C^r(Y) \times H_D^s(Y) & \rightarrow & H_{A \cap B}^{p+q}(X) \times H_{C \cap D}^{r+s}(Y) \\ & \downarrow & \downarrow \\ H_{A \times C}^{p+r}(X \times Y) \times H_{B \times D}^{q+s}(X \times Y) & \rightarrow & H_{(A \cap B) \times (C \cap D)}^{p+q+r+s}(X \times Y) \end{array}$$

aus externen und internen Produkten der lokalen Kohomologie.

**Übung 5.6.12.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $E$  und Teilräume  $A, B \subset E$  der Kodimensionen  $p, q$  mit  $A + B = E$  liefert das cup-Produkt der lokalen Kohomologie einen Isomorphismus

$$H_A^p(E) \otimes H_B^q(E) \xrightarrow{\sim} H_{A \cap B}^{p+q}(E)$$

Hinweis: Man ziehe sich mit Hilfe von Übung 5.6.11 auf den Fall  $\dim E = 1$  zurück.

**Übung 5.6.13.** Gegeben endlichdimensionale reelle Vektorräume  $A \subset E$  mit jeweils einer topologischen Orientierung erklären wir wie in [TS] ?? oder [LA1] 6.5.15 die Quotientenorientierung auf dem Quotienten  $E/A$ . Für  $p = \text{codim}(A \subset E)$  liefert der zugehörige Erzeuger von  $H_1^p(E/A)$  durch Übergang unter  $H_1^p(E/A) \xleftarrow{\sim} H_{\{0\}}^p(E/A)$  und Rückzug dann einen ausgezeichneten Erzeuger von  $H_A^p(E)$ . Wir nennen ihn den **durch die Orientierungen von  $A$  und  $E$  bestimmten Erzeuger**. Für  $A = \mathbb{R}^{n-p} \times 0^p \subset E = \mathbb{R}^n$  mit den Standardorientierungen  $\tau^{\times(n-p)}$  beziehungsweise  $\tau^{\times n}$  entspricht die Quotientenorientierung unter dem hoffentlich offensichtlichen Isomorphismus  $E/A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^p$  der durch  $\tau^{\times p}$  gegebenen Standardorientierung auf  $\mathbb{R}^p$  und unser ausgezeichnete Erzeuger von  $H_A^p(E)$  ergibt sich zu  $1^{\times(n-p)} \times \tau^{\times p}$  für  $1 \in H_{\mathbb{R}}^0(\mathbb{R}) = H^0(\mathbb{R})$  der Standarderzeuger.

**Übung 5.6.14.** Gegeben ein endlichdimensionaler orientierter reeller Vektorraum  $E$  und darin ein angeordnetes Paar  $(A, B)$  aus zwei orientierten Teilräumen  $A, B \subset E$  mit  $A + B = E$  erklären wir auf ihrem Schnitt  $A \cap B$  die **Schnittorientierung** dadurch, daß wir die Quotientenorientierung aus  $E/A$  aus [LA1] 6.5.15 vermittels des Isomorphismus  $B/(A \cap B) \xrightarrow{\sim} E/A$  auf den Definitionsbereich dieses Isomorphismus übertragen und dann in Bezug auf die kurze exakte Sequenz

$$A \cap B \hookrightarrow B \rightarrow B/(A \cap B)$$

die im Sinne von [LA1] 6.5.15 mit den beiden auf dem zweiten und dritten Raum bereits gegebenen Orientierungen verträgliche Orientierung auf  $A \cap B$  wählen. Ist etwa  $E = \mathbb{R}^n$  und sind  $A = \mathbb{R}^{n-p} \times 0^p$  sowie  $B = 0^q \times \mathbb{R}^{n-q}$  jeweils mit den Standardorientierungen versehen, so ist die Schnittorientierung die Standardorientierung auf  $0^q \times \mathbb{R}^{n-p-q} \times 0^p$ .

**Übung 5.6.15 (Schnittorientierung und Geometrie).** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $E$  und Teilräume  $A, B \subset E$  der Kodimensionen  $p, q$  mit  $A + B = E$  und liefern Orientierungen auf  $A, B$  und  $E$  nach 5.6.13 ausgezeichnete Erzeuger von  $H_A^p(E)$  und  $H_B^q(E)$  und somit als deren cup-Produkt einen ausgezeichneten Erzeuger von  $H_{A \cap B}^{p+q}(E)$ , der seinerseits zu einer ausgezeichneten Orientierung von  $A \cap B$  gehört. Wir behaupten, daß das genau die Schnittorientierung aus 5.6.14 ist. Diese Behauptung müssen wir nur in genügend Beispielen prüfen. Ist  $E = \mathbb{R}^n$  und sind  $A = \mathbb{R}^{n-p} \times 0^p$  sowie  $B = 0^q \times \mathbb{R}^{n-q}$  jeweils mit

den Standardorientierungen versehen, so werden unsere Erzeuger nach 5.6.13 gegeben durch  $1^{\times(n-p)} \times \tau^{\times p}$  sowie  $(-1)^{q(n-q)} \tau^{\times q} \times 1^{\times(n-q)}$  und wir erhalten nach 5.6.11 als Produkt

$$(-1)^{q(n-q)} (-1)^{pq} \tau^{\times q} \times 1^{\times(n-p-q)} \times \tau^{\times p}$$

Zur Standardorientierung von  $A \cap B = 0^q \times \mathbb{R}^{n-p-q} \times 0^p$  gehört andererseits nach 5.6.13 der Erzeuger  $(-1)^{q(n-p-q)} \tau^{\times q} \times 1^{\times(n-p-q)} \times \tau^{\times p}$  der lokalen Kohomologie, und der stimmt mit dem eben berechneten Produkt überein. Das aber war gerade zu zeigen.

## 5.7 Verallgemeinerung auf Modulgarben

5.7.1 (**Homotopieflache Auflösung der Strukturgarbe**). Gegeben ein gekringter Raum  $(X, \mathcal{A})$  sind Halme des Komplexes bestehend aus der Strukturgarbe und ihrer Godementauflösung

$$\mathcal{A} \hookrightarrow G^0 \mathcal{A} \rightarrow G^1 \mathcal{A} \rightarrow \dots$$

jeweils maximal spaltende exakte Komplexe von  $\mathcal{A}_x$ -Moduln. Folglich ist besagter Komplex von Modulgarben homotopieflach. Andererseits ist auch der Ein-Objekt-Komplex  $\mathcal{A}[0]$  homotopieflach, folglich ist auch der Godementkomplex  $G^0 \mathcal{A} \rightarrow G^1 \mathcal{A} \rightarrow \dots$  selbst homotopieflach. Andererseits besteht er aus welken und somit schwach kompaktweichen Garben.

5.7.2. Gegeben ein Ring  $k$  notieren wir den geringsten Raum  $(X, k_X)$  vereinfachend  $(X, k)$  und nennen ihn einen **konstant geringsten Raum**.

5.7.3. Wir betrachten die Kategorie  $\text{Gekkk} \subset \text{Gek}$  aller konstant gekringten Räume  $(X, k)$  mit  $k$  noethersch oder allgemeiner  $k$  kohärent, als da heißt, Produkte flacher  $k$ -Moduln sind flach. Daß in Fall noetherscher Ringe Produkte flacher Moduln flach sind, zeigen wir in 5.9.18. Wir nennen  $\text{Gekkk}$  die Kategorie der **konstant kohärent gekringten Räume**.

5.7.4 (**Flachheit der Terme der Godementauflösung**). Gegeben ein konstant kohärent gekringter Raum  $(X, k) \in \text{Gekkk}$  besteht die Godementauflösung der konstanten Garbe  $k_X$  aus flachen  $k$ -Modulgarben, da die Einbettung einer Garbe in die Garbe ihrer unstetigen Schnitte stets halmweise spaltet.

5.7.5. Wir nennen eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem topologischen Raum  $X$  **lesb-kompaktweich**, wenn für jede abgeschlossene relativ Hausdorff'sche Teilmenge  $Z \subset X$ , die lesb ist für die induzierte Topologie, die Restriktion  $\mathcal{F}|_Z$  kompaktweich ist. Lesb-kompaktweiche abelsche Garben sind stets entfaltet für den Eigvorschub längs lesb-Abbildungen, denn deren Fasern sind Teilmengen  $Z$

der beschriebenen Art und lokal eigentlicher Basiswechsel liefert die Behauptung. Wie in 5.1.14 zeigt man auch leicht, daß der Eigvorschub  $f_{(1)}\mathcal{F}$  einer lesb-kompaktweichen Garbe unter einer lesb-Abbildung  $f$  wieder lesb-kompaktweich ist. Da für lesb-Abbildungen per definitionem  $f_{(1)}$  endliche homologische Dimension hat, sind damit nach [TD] 3.7.4 auch alle Komplexe aus lesb-kompaktweichen abelschen Garben entfaltet für  $Q\text{Hot}(f_!)$ .

5.7.6. Gegeben ein konstant kohärent gekringter Raum  $(X, k) \in \text{Gekkk}$  ist die Godement-Auflösung  $G^\triangleleft k_X$  der Strukturgarbe ein nach 5.7.1 homotopieflacher Komplex aus nach 5.7.4 flachen und offensichtlich welken, mithin lesb-kompaktweichen, ja sogar schwach kompaktweichen Garben. Nun induziert der Quasiisomorphismus  $k_X \xrightarrow{\sim} G^\triangleleft k_X$  homotopieflacher Komplexe für jeden Komplex  $\mathcal{F}$  von Modulgarben einen Quasiisomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (G^\triangleleft k_X) \otimes_k \mathcal{F}$  und nach ?? landet er in einem Komplex aus lesb-kompaktweichen Garben. Ist  $\mathcal{F}$  homotopieflach, so auch  $(G^\triangleleft k_X) \otimes_k \mathcal{F}$ . Besteht  $\mathcal{F}$  aus flachen Modulgarben, so auch  $(G^\triangleleft k_X) \otimes_k \mathcal{F}$ .

Homotopieflache Komplexe aus flachen Garben? Stabil unter Eigvorschub? Vielleicht  $\mathcal{F} \mapsto f_!(G^\triangleleft k_X) \otimes_k \mathcal{F}$  als einen Funktor sehen, der homotopieflach zu ebenso macht?

## 5.8 Verallgemeinerung auf Modulgarben, ALT

Jetzt mag man hoffen, daß für  $\mathcal{F}$  ein homotopieflacher Komplex aus flachen Garben der Komplex  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} G^\triangleleft \mathcal{A}$  ein homotopieflacher Komplex aus schwach kompaktweichen Garben ist.

mit konstanter Strukturgarbe  $\mathcal{A} = k_X$  für einen kohärenten Kring  $k$ . Die Godement-Auflösung der konstanten Garbe  $k_X$  ist dann ein Komplex aus flachen schwach kompaktweichen Modulgarben, da über einem kohärenten Kring Produkte flacher Moduln wieder flach sind. Die augmentierte Godement-Auflösung ist zusätzlich homotopieflach

Sollte: Nur noethersche Kringe als Koeffizienten und nur les-Morphismen ohne Ringwechsel. So ist die Godement-Auflösung der konstanten Garbe homotopieflach aus flachen Garben. Drantensorieren an  $k_{U \subset X}$  gibt was kompaktweiches. Löse beliebige Garbe mit denen auf. Erkenne, daß Drantensorieren immer was Kompaktweiches gibt. Das reicht dann wohl vielleicht?

Außerdem Zwei-Funktor-Formalismus mit schwächeren Annahmen.

**Lemma 5.8.1 (Lesb-Variante der Projektionsformel).** *Gegeben ein Kring  $k$ , ein lesb-Raum  $X$  und eine flache kompaktweiche  $k$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ist  $\Gamma_! \mathcal{F}$  ein flacher  $k$ -Modul, für jeden  $k$ -Modul  $G$  ist  $\mathcal{F} \otimes_k G$  kompaktweich und die offensichtliche Abbildung ist ein Isomorphismus*

$$\Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G)$$

5.8.2. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Projektionsformel 4.3.2 fordern wir hier nicht  $G$  flach, sondern  $\mathcal{F}$  flach und kompaktweich und brauchen zusätzlich, daß der zugrundeliegende Raum lesb ist. Wir bräuchten sogar statt lesb nur zu fordern, daß der Funktor  $\Gamma_! : k\text{-Mod}/_X \rightarrow k\text{-Mod}$  von endlicher homologischer Dimension ist. Eine Variante mit anderen Zusatzannahmen zeigen wir in 5.9.8.

*Beweis.* Sei  $\dots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \twoheadrightarrow G$  eine Auflösung von  $G$  durch flache  $k$ -Moduln. Da  $\mathcal{F}$  flach ist, führt sie, sogar ohne daß wir die  $G_i$  als flach anzunehmen bräuchten, zu einer exakten Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathcal{F} \otimes_k G_1 \rightarrow \mathcal{F} \otimes_k G_0 \twoheadrightarrow \mathcal{F} \otimes_k G$$

von abelschen Garben auf  $X$ . Nach der Projektionsformel 4.3.2 und da die  $G_i$  flach sind wissen wir von allen Garben dieser Sequenz mit Ausnahme der letzten, daß sie kompaktweich und damit  $\Gamma_!$ -entfaltet sein müssen. Da wir  $X$  lesb angenommen hatten, ist nach Übung [TG] 3.5.17 dann auch die letzte Garbe unseres Komplexes  $\Gamma_!$ -entfaltet und im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \longrightarrow & \Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G_1 & \longrightarrow & \Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G_0 & \twoheadrightarrow & \Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G_1) & \longrightarrow & \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G_0) & \twoheadrightarrow & \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G) \end{array}$$

folgt mit [TG] 3.5.15 die Exaktheit der unteren Horizontale. Die linken vertikalen Isomorphismen folgen aus der Projektionsformel 4.3.2 und bei der oberen Horizontale ist zumindest die ausgeschriebene drei-Term-Sequenz rechtsexakt aufgrund der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts. Zusammen ergibt sich, daß auch die Vertikale ganz rechts ein Isomorphismus  $\Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G)$  sein muß. Als Funktor von  $G$  macht hier die rechte Seite Injektionen zu Injektionen, da  $\mathcal{F}$  flach ist und  $\Gamma_!$  linksexakt, und dasselbe folgt dann für die linke Seite. Also ist  $\Gamma_! \mathcal{F}$  flach. Schließlich ist jede offene Teilmenge  $U \Subset X$  des lesb-Raums  $X$  wieder lesb und die Restriktion von  $\mathcal{F}|_U \otimes_k G \cong (\mathcal{F} \otimes_k G)|_U$  auf  $U$  ist nach dem bereits Bewiesenen angewandt auf  $U$  auch  $\Gamma_!$ -entfaltet. Nach [TG] 4.9.23 ist also  $\mathcal{F} \otimes_k G$  kompaktweich.  $\square$

## 5.9 Ergänzungen für Modulgarben\*

5.9.1. Gegeben ein Krings  $k$  nennen wir eine Garbe von  $k$ -Moduln eine  $k$ -**Garbe**. Gegeben ein Ring  $k$  und ein topologischer Raum  $X$  bezeichne  $\text{Ab}(k)/_X$  die abelsche Kategorie der  $k$ -Garben auf  $X$ .

Die 5.4.11

5.9.2. Ein Ring heißt **linkskohärent**, wenn jedes endlich erzeugte Linksideal endlich präsentiert ist. Nach ?? oder [Lam: Rings and Modules] wissen wir, daß Produkte flacher Rechtsmoduln über einem linkskohärenten Ring wieder flach sind.

5.9.3. Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{A}$  mit additiver Struktur und ein Ring  $k$  können wir ganz allgemein die Kategorie  $\mathcal{A}(k)$  aller Paare  $(M, \rho)$  betrachten für  $M \in \mathcal{A}$  und  $\rho : k \rightarrow \text{End } M$  ein Ringhomomorphismus. Wir nennen so ein Paar einen  **$k$ -Modul in  $\mathcal{A}$** . Die  $k$ -Moduln  $M \in \mathcal{A}(k)$  bilden wieder eine Kategorie mit additiver Struktur, wenn wir ihre Morphismen erklären als

$$\mathcal{A}(k)(M, N) := \{f \in \mathcal{A}(M, N) \mid \rho_N(r) \circ f = f \circ \rho_M(r) \ \forall r \in k\}$$

*Beispiel 5.9.4.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und ein Ring  $k$  ist der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus von Kategorien

$$\text{Ab}(k)_{/X} \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/X}(k)$$

5.9.5. Für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  induziert das adjungierte Paar von Funktoren  $(f^*, f_*)$  zwischen  $\text{Ab}_{/X}$  und  $\text{Ab}_{/Y}$  für jeden Ring  $k$  ein adjungiertes Paar von Funktoren zwischen  $\text{Ab}(k)_{/X}$  und  $\text{Ab}(k)_{/Y}$ . Auch für  $k$ -Garben ist  $f^*$  exakt. Weiter induziert für jede les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  unser Eigvorschub  $f_! : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$  einen Eigvorschub von  $k$ -Garben  $f_! : \text{Ab}(k)_{/X} \rightarrow \text{Ab}(k)_{/Y}$ , der für  $f$  eigentlich separiert mit  $f_*$  übereinstimmt, und für  $f$  étale separiert induziert unsere Adjunktion  $(f_!, f^*)$  im Fall abelscher Garben aus [TG] 6.5.1 auch eine Adjunktion von Funktoren auf  $k$ -Garben.

hat für jede offene Einbettung  $j : U \hookrightarrow X$  der Rückzug

Eine  $k$ -Garbe heißt **flach** oder ausführlicher  **$k$ -flach**, wenn alle ihre Halme flache  $k$ -Moduln sind. Wir kürzen im folgenden  $\otimes_k = \otimes$  ab.

5.9.6. Gegeben ein Ring  $k$  und ein topologischer Raum  $X$  hat die Kategorie  $\text{Ab}(k)_{/X}$  genug Injektive. In der Tat ist die Wolkenkratzergarbe  $\text{em}_{x^*} I$  injektiv für jeden Punkt  $x \in X$  und jeden injektiven  $k$ -Modul. Gegeben  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(k)_{/X}$  wählen wir Einbettungen der Halme in injektive  $k$ -Moduln  $\mathcal{F}_x = \text{em}_x^* \mathcal{F} \hookrightarrow I_x$  und erhalten so Einbettungen

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} \text{em}_{x^*} \text{em}_x^* \mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} \text{em}_{x^*} I_x$$

Rechts steht aber ein injektives Objekt, denn jedes Produkt von injektiven Objekten ist injektiv.

5.9.7. Unsere Sätze zum derivierten Trennaustausch 5.5.20 und 5.5.21 gelten analog und mit analogen Beweisen für Garben von Moduln über einem festen noetherschen Kring endlicher Torsionsdimension. Im unbeschränkten Fall können wir



dann sogar alle diejenigen eigentlichen separierten beziehungsweise lokal eigentlichen separierten Abbildungen  $f$  als  $!$ -Morphismen zulassen, für die  $f_{(!)}$  endliche homologische Dimension hat, wenn wir es auf die abelsche Kategorie der entsprechenden Modulgarben einschränken. Im Folgenden erkläre ich die zusätzlichen Argumente, die für den Nachweis dieser Verallgemeinerungen benötigt werden.

**Lemma 5.9.8 (Projektionsformel, Variante).** *Sei  $k$  ein Kring von endlicher Torsionsdimension. Ist  $\mathcal{F}$  eine flache kompaktweiche  $k$ -Garbe auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $X$ , so ist  $\Gamma_! \mathcal{F}$  ein flacher  $k$ -Modul und die offensichtliche Abbildung ist für jeden  $k$ -Modul  $G$  ein Isomorphismus*

$$\Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G)$$

5.9.9. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Projektionsformel 4.3.2 fordern wir hier nicht  $G$  flach, sondern  $\mathcal{F}$  flach und kompaktweich und brauchen zusätzlich, daß  $k$  endliche Torsionsdimension hat. Eine weitere Variante mit anderen Zusatzannahmen zeigen wir in 5.8.1.

*Beweis.* Nach Annahme finden wir eine Auflösung endlicher Länge von  $G$  durch flache  $k$ -Moduln  $G_d \hookrightarrow \dots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \twoheadrightarrow G$ . Sie führt zu einer exakten Sequenz

$$\mathcal{F} \otimes_k G_d \hookrightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F} \otimes_k G_1 \rightarrow \mathcal{F} \otimes_k G_0 \twoheadrightarrow \mathcal{F} \otimes_k G$$

von abelschen Garben auf  $X$ . Nach der Projektionsformel 4.3.2 wissen wir von allen Garben dieser Sequenz mit Ausnahme der letzten, daß sie kompaktweich und damit  $\Gamma_!$ -entfaltet sein müssen. Nach Übung [TG] 3.5.16 ist dann auch die letzte Garbe unseres Komplexes  $\Gamma_!$ -entfaltet und im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G_d & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G_1 & \longrightarrow & \Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G_0 \longrightarrow \twoheadrightarrow \Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G \\ \downarrow \wr & & & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G_d) & \hookrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G_1) & \longrightarrow & \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G_0) \longrightarrow \twoheadrightarrow \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G) \end{array}$$

folgt wieder mit [TG] 3.5.16 die Exaktheit der unteren Horizontale. Die linken vertikalen Isomorphismen folgen aus 4.3.2 und zusammen folgt, daß auch die Vertikale ganz rechts ein Isomorphismus  $\Gamma_! \mathcal{F} \otimes_k G \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_k G)$  sein muß. Als Funktor von  $G$  macht hier die rechte Seite Injektionen zu Injektionen, da  $\mathcal{F}$  flach ist und  $\Gamma_!$  linksexakt, und dasselbe folgt dann für die linke Seite. Also ist  $\Gamma_! \mathcal{F}$  flach.  $\square$

5.9.10. Jeder Morphismus  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von gekringten Räumen faktorisiert als  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, f^{*\text{Ab}} \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ .

5.9.11. Gegeben ein Winkel von gekringten Räumen  $(Z, \mathcal{C}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}) \leftarrow (X, \mathcal{A})$  erhalten wir einen Pullback, indem wir den topologischen Raum  $Z \times_Y X$  mit der Kringgarbe  $g^* \mathcal{C} \otimes_{v^* \mathcal{B}} q^* \mathcal{A}$  versehen für  $v : Z \times_Y X \rightarrow Y$ .

5.9.12. Wir nennen einen Morphismus  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von gekringten Räumen einen **lesbf-Morphismus**, wenn  $f$  lesb ist und  $\mathcal{A}$  ein flacher  $f^* \mathcal{B}$ -Modul. Die Menge dieser Morphismen ist rückzugstabil.

**Lemma 5.9.13.** *Gegeben ein lesbf-Morphismus  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von gekringten Räumen und eine flache schwach kompaktweiche Modulgarbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  ist  $f_{(!)} \mathcal{F} \in \text{Ab}_{/Y}$  wieder eine flache schwach kompaktweiche Modulgarbe.*

*Beweis.* Schwach kompaktweich folgt aus 5.1.14 und nur die Flachheit bleibt zu zeigen. Dafür können wir uns leicht auf den Fall  $\mathcal{A} = f^* \mathcal{B}$  zurückziehen, weil die Restriktion unter einem flachen Kringhomomorphismus flache Moduln zu flachen Moduln macht. Es reicht, Flachheit aller Halme zu zeigen. Mit lokal eigentlichem Basiswechsel 4.1.16 folgt diese Flachheit aus der Variante 5.8.1 der Projektionsformel.  $\square$

**Satz 5.9.14 (Gekringter lokal eigentlicher Basiswechsel).** *Seien  $pg = fq$  ein kartesisches Quadrat von gekringten Räumen mit lesbf-Vertikalen  $f, g$  und  $\tilde{p}\tilde{q} = \tilde{f}\tilde{q}$  darüber ein kommutatives Diagramm von Opkomorphismen von Modulgarben mit  $\tilde{p}, \tilde{q}$  kartesisch und der Modulgarbe oben rechts flach und schwach kompaktweich. Ist dann  $\tilde{f}$  eigkokartesisch, so auch  $\tilde{g}$ .*

5.9.15. In anderen Worten besagt unser Satz, daß die vom Basiswechsel ?? der Trennfaserung der Modulgarben 1.3.8 mit ihrem Vorschub 1.3.9 für Funktoren zwischen nichttopponierten Kategorien von Garben induzierte Transformation  $p^* f_* \Rightarrow g_* q^*$  unter den genannten Voraussetzungen Isomorphismen  $p^* f_{!} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} g_{!} q^* \mathcal{F}$  auf den jeweiligen Unterobjekten induziert, also eine Isotransformation

$$p^* f_{!} \xrightarrow{\sim} g_{!} q^*$$

*Beweis.* Nach der natürlichen Faktorisierung 5.9.10 erhalten wir eine Zerlegung jedes kartesischen Diagramms in vier kartesische Unterdiagramme

$$\begin{array}{ccccc} (W, g^* \mathcal{C} \otimes_{v^* \mathcal{B}} q^* \mathcal{A}) & \longrightarrow & (W, q^* \mathcal{A}) & \xrightarrow{q} & (X, \mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (W, g^* \mathcal{C}) & \longrightarrow & (W, v^* \mathcal{B}) & \xrightarrow{q} & (X, f^* \mathcal{B}) \\ \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow f \\ (Z, \mathcal{C}) & \longrightarrow & (Z, p^* \mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & (Y, \mathcal{B}) \end{array}$$

Hier schreiben wir  $v = pg = fq$  und die Sternchen meinen Rückzüge von Kringgarben. Es reicht, die Behauptung für jedes dieser vier kartesischen Quadrate zu prüfen. Im Quadrat oben links geht es nur um Beziehungen zwischen Restriktion und Erweiterung von Skalaren, da ist die Behauptung klar. Im Quadrat oben rechts ist die Aussage auch leicht gezeigt, dort geht es nur um die Verträglichkeit des gewöhnlichen Rückzugs mit einer Restriktion der Skalare. Unten rechts haben wir lokal eigentlichen Basiswechsel wie wir ihn kennen, nur daß zusätzlich non Kringgarben operieren. Um schließlich die Verträglichkeit unten links zu zeigen, können wir uns wieder mit lokal eigentlichem Basiswechsel 4.1.16 auf den Fall zurückziehen, daß  $Z$  ein einpunktiger Raum ist. Dann aber folgt die Behauptung auf 5.8.1.  $\square$

**Lemma 5.9.16.** *Gegeben ein lesbf-Morphismus  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  von gekringten Räumen und ein homotopieflacher Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Ket}(\text{Ab}_{/X})$  aus flachen  $f$ -kompaktweichen Modulgarben ist auch  $f_{(1)}\mathcal{F} \in \text{Ket}(\text{Ab}_{/Y})$  ein homotopieflacher Komplex aus flachen Modulgarben.*

*Beweis.* Es gilt zu zeigen, daß für jeden exakten Komplex  $\mathcal{N} \in \text{Ket}(\text{Ab}_{/Y})$  auch der Komplex  $f_{(1)}\mathcal{F} \otimes_B \mathcal{N}$  exakt ist. Wir ziehen uns leicht auf den Fall  $\mathcal{A} = f^{*\text{Ab}}\mathcal{B}$  zurück. Exaktheit kann man auf den Halmen prüfen und mit gekringtem lokal eigentlichen Basiswechsel 5.9.14 können wir uns auf den Fall zurückziehen, daß zusätzlich  $Y$  der einpunktige Raum ist. Es gilt also zu zeigen, daß gegeben ein Kring  $B$  und ein exakter Komplex  $N$  von  $B$ -Moduln auch der Komplex  $\Gamma_!\mathcal{F} \otimes_B N$  exakt ist. Nach unserer lesb-Variante der Projektionsformel 5.8.1 können wir ihn identifizieren mit dem Komplex  $\Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_B N)$ . Nun ist der Komplex  $\mathcal{F} \otimes_B N$  exakt und besteht wieder nach der lesb-Variante der Projektionsformel 5.8.1 und da Koprodukte kompaktweicher Garben nach 4.2.1 wieder kompaktweich sind aus kompaktweichen Garben. Da wir  $X$  lesb angenommen hatten, ist also nach ?? auch der Komplex  $\Gamma_!(\mathcal{F} \otimes_B N)$  exakt. Daß  $\Gamma_!\mathcal{F}$  ein Komplex aus flachen Moduln ist, folgt direkt aus der lesb-Variante der Projektionsformel 5.8.1.  $\square$

**Lemma 5.9.17.** *Sei  $k$  ein Kring von endlicher Torsionsdimension. Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine les-Abbildung und  $\mathcal{F}$  eine flache  $f$ -kompaktweiche  $k$ -Garbe auf  $X$ , so ist auch  $f_{(1)}\mathcal{F}$  eine  $k$ -flache  $k$ -Garbe.*

*Beweis.* Das folgt unmittelbar mit lokal eigentlichen Basiswechsel 4.1.16 aus dem vorhergehenden Lemma 5.9.8.  $\square$

**Lemma 5.9.18.** *Über einem noetherschen Ring ist ein beliebiges Produkt flacher Moduln wieder flach.*

*Beweis.* Da das Tensorprodukt mit Kolimiten vertauscht und jeder Modul der filtrierende Kolimes seiner endlich erzeugten Untermoduln ist und filtrierende Kolimiten von exakten Sequenzen abelscher Gruppen exakt sind, reicht es zu zeigen,

daß das Tensorprodukt mit einem Produkt flacher Moduln jeden injektiven Homomorphismus zwischen endlich erzeugten Moduln zu einer Injektion macht. Das folgt, da beliebige Produkte mit dem Tensorprodukt mit endlich erzeugten freien und dann auch mit dem Tensorprodukt mit endlich präsentierten Moduln kommutieren, und da jeder endlich erzeugte Modul über einem noetherschen Ring endlich präsentiert ist.  $\square$

**5.9.19 (Flachwelke Auflösung von Modulgarben).** Jede flache Garbe von  $k$ -Moduln über einem noetherschen Ring  $k$  kann derart in eine welkflache Garbe eingebettet werden, daß der Kokern wieder flach ist. In der Tat gelingt das sogar in funktorieller Weise mit der Godement-Konstruktion 5.5.11, die wegen 5.9.18 im Fall von Moduln über einem noetherschen Ring wieder eine flache Garbe liefert.

*Ergänzung 5.9.20.* Ist  $k$  ein noetherscher Ring endlicher Torsionsdimension und  $\mathcal{F}$  eine flache Garbe von  $k$ -Moduln auf einem topologischen Raum  $X$ , die entfaltet ist für den Funktor der globalen Schnitte, so ist auch  $\Gamma\mathcal{F}$  flach. In der Tat ist unter den gegebenen Voraussetzungen die Godementauflösung eine exakte Sequenz

$$\Gamma\mathcal{F} \hookrightarrow \Gamma G\mathcal{F} \rightarrow \Gamma G^2\mathcal{F} \rightarrow \dots$$

und deren Einträge sind mit Ausnahme des Ersten alle flach nach 5.9.18. Dann aber muß nach [TG] 3.5.15 auch  $\Gamma\mathcal{F}$  flach sein.

## 5.10 Eigrückzug und seine Eigenschaften

**Satz 5.10.1.** Für jede lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  besitzt der Eigvorschub  $f_! : \text{Der}(\text{Ab}_{/X}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  einen Rechtsadjungierten, den **Eigrückzug**

$$f^! : \text{Der}(\text{Ab}_{/Y}) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_{/X})$$

5.10.2. Der Beweis des Satzes benötigt größere Vorbereitungen und wird erst im kommenden Abschnitt in 5.11.12 gegeben. Hier diskutieren wir einige Spezialfälle, die leichter zu haben sind, und diskutieren anschließend erste Konsequenzen aus unserem Satz.

**5.10.3 (Eigrückzug unter separierten étalen Abbildungen).** Im Fall offener Einbettungen  $f$  und allgemeiner im Fall separierter étaler Abbildungen  $f$  liefern [TG] 4.9.9 beziehungsweise [TG] 6.5.1 sogar eine Adjunktion  $(f_!, f^*)$  exakter Funktoren auf den entsprechenden Kategorien abelscher Garben. Sie führt ohne weitere Schwierigkeiten zu einer Adjunktion  $(f_!, f^*)$  der zugehörigen derivierten Funktoren und liefert damit sowohl die Existenz des Rechtsadjungierten  $f^!$  als auch eine ausgezeichnete Isotransformation  $f^* \xrightarrow{\cong} f^!$ .

**5.10.4 (Eigrückzug unter lokal abgeschlossenen Einbettungen).** Im Fall abgeschlossener Einbettungen  $f$  ist  $f_! = f_*$  ein exakter Funktor auf den zugrundeliegenden Kategorien abelscher Garben und besitzt dort nach [TG] 6.4.14 einen Rechtsadjungierten, den wir von nun an als unterivierten Funktor neu  $f^{(1)} : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$  notieren und der jeder Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/Y}$  auf  $Y$  die Garbe  $f^{(1)}\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  der Schnitte von  $\mathcal{F}$  mit Träger in  $X$  zuordnet. Da jeder Garbenkomplex nach [TD] 3.6.10 eine universelle Rechtsentfaltung besitzt, existiert der Rechtsderivierete  $f^! := Rf^{(1)}$  im Fall einer abgeschlossenen Einbettung auf der ganzen derivierten Kategorie und ist dann nach [TD] 3.2.27 der gesuchte Rechtsadjungierte. Die  $\mathcal{H}^q f^! \mathcal{F}$  für  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/Y}$  sind in diesem Fall unsere lokalen Kohomologiegarben von  $\mathcal{F}$  mit Träger in  $X$  aus [TD] 1.2.2. Indem man diese beiden Spezialfälle kombiniert, erhält man auch die Existenz und eine einigermaßen explizite Beschreibung des Rechtsadjungierten von  $f_!$  für  $f$  eine lokal abgeschlossene Einbettung. Für den allgemeinen Fall müssen wir mehr arbeiten. Wir geben den Beweis im anschließenden Abschnitt 5.11 und genauer in 5.11.12. Die Details des Beweises sind im weiteren nicht relevant und wir ziehen in diesem Abschnitt erst einmal einige Folgerungen aus der Existenz eines Rechtsadjungierten des Eigvorschubs.

*Beispiel 5.10.5.* Für die konstante Abbildung  $c : \mathbb{R} \rightarrow \text{pt}$  der Zahlengerade auf einen Punkt besitzt der Funktor  $c_{(1)} : \text{Ab}_{/\mathbb{R}} \rightarrow \text{Ab}_{/\text{pt}}$  keinen Rechtsadjungierten, da  $c_{(1)}$  sonst nach [TG] 2.4.12 rechtsexakt sein müßte. Das ist er jedoch nicht, denn der Epimorphismus der konstanten Garbe auf den Wolkenkratzer am Ursprung  $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{Z}_{(0)}$  wird unter  $c_{(1)}$  die Einbettung  $0_{\text{pt}} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{\text{pt}}$ , und diese ist kein Epimorphismus.

**5.10.6 (Homologische Breite des Eigrückzugs).** Ist  $f : X \rightarrow Y$  separiert lokal eigentlich mit  $f_{(1)}$  von einer homologischen Dimension  $\leq d$ , so gilt

$$\mathcal{G} \in \text{Der}^{\geq 0}(\text{Ab}_{/Y}) \Rightarrow f^! \mathcal{G} \in \text{Der}^{\geq -d}(\text{Ab}_{/X})$$

In der Tat reicht es dafür nach [TD] 2.8.12 zu zeigen, daß gilt  $\text{Der}_{/X}(\mathcal{F}, f^! \mathcal{G}) = 0$  für alle  $\mathcal{F} \in \text{Der}^{\leq -d-1}(\text{Ab}_{/X})$ , und das folgt mit unserer Adjunktion aus der Erkenntnis  $f_! \mathcal{F} \in \text{Der}^{\leq -1}(\text{Ab}_{/X})$ , die hinwiederum von unseren Erkenntnissen [TD] 3.7.4 zum Derivieren homologisch endlicher Funktoren herkommt. Ist zusätzlich  $\text{Ab}_{/Y}$  von endlicher homologischer Dimension  $\leq r$ , so zeigen wir auch noch

$$\mathcal{G} \in \text{Der}^{\leq 0}(\text{Ab}_{/Y}) \Rightarrow f^! \mathcal{G} \in \text{Der}^{\leq r}(\text{Ab}_{/X})$$

Nach [TD] 2.6.25 reicht es in der Tat, für  $q > r$  und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  das Verschwinden  $\text{Der}_{/X}(\mathcal{F}[-q], f^! \mathcal{G}) = 0$  zu zeigen alias das Verschwinden  $\text{Der}_{/Y}(f_! \mathcal{F}, \mathcal{G}[q]) = 0$ . Nach Annahme und etwa [TD] 3.7.6 ist aber  $\mathcal{G}[q]$  quasiisomorph zu einem homotopieinjektiven Komplex in  $\text{Hot}^{\leq 0}(\text{Ab}_{/Y})$ .

5.10.7. Ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  heiße **homologisch kompakt-endlich**, wenn der Funktor  $\Gamma_! : \text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}$  endliche homologische Dimension hat. Betrachten wir die konstante Abbildung eines homologisch kompakt-  
endlichen lokal kompakten Hausdorffraums  $X$  auf einen Punkt  $\text{fin} : X \rightarrow \text{top}$ , so  
finden wir mit 5.10.6 insbesondere  $\text{fin}^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \in \text{Der}^b(\text{Ab}/_X)$ . Dies Objekt heißt die  
**dualisierende Garbe von  $X$**  und wird notiert als

$$\omega_X := \text{fin}^! \mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Gegeben  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/_X)$  setzen wir dann  $\mathbb{D}_X \mathcal{F} := (\mathcal{F} \rightrightarrows \omega_X)$  und nennen  
den kontravarianten Funktor  $\mathbb{D}_X$  die **Verdier-Dualität**. Im Fall des einpunktigen  
Raums ist das die Dualität der Schmelzkategorie  $\text{Der}(\text{Ab})$  aus [TD] ???. Der For-  
malismus der Schmelzkategorien liefert wie in [TS] ??? erklärt natürliche Mor-  
phismen

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{D}_X \mathbb{D}_X \mathcal{F}$$

Wir werden noch hinreichende Bedingungen dafür diskutieren, daß sie für ge-  
gebenes  $\mathcal{F}$  ein Isomorphismus sind.

5.10.8. Gegeben  $(\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^! \leftarrow \mathcal{G}^!, \mathcal{T}^e, i)$  eine **verflochtene Trennaus-**  
**tauschsituation** sagen wir, sie **habe Adjungierte**, wenn sowohl der Rückzug  $f^*$   
längs jedes Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  aus  $\mathcal{T}$  als auch der Eigvorschub  $f_!$  längs  
jedes Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  aus  $\mathcal{T}^!$  jeweils Linksadjungierte haben und zu-  
sätzlich alle Fasern internes  $\text{Hom} \rightrightarrows$ . Wir notieren unsere Adjungierten  $f_*$  sowie  
 $f^!$  und nennen sie den **Vorschub** sowie den **Eigrückzug**. Dann hat  $f^* : \mathcal{G}_Y \rightarrow$   
 $\mathcal{G}_X$  den Rechtsadjungierten  $f_*$  und  $f_! : \mathcal{G}_X \rightarrow \mathcal{G}_Y$  für jeden Lesmorphismus  $f$   
den Rechtsadjungierten  $f^!$  und wir haben adjungierte Paare  $(f^*, f_*)$  sowie  $(f_!, f^!)$   
wie man es gewohnt ist.

5.10.9 (**Restriktion von Hom-Garben und relative Verdierdualität**). Sei bei  
einer verflochtenen Trennaustauschsituation mit Adjungierten ein Lesmorphismus  
der Basis  $f : X \rightarrow Y$  gegeben. Die Projektionsformel 5.5.6 liefert uns für  $\mathcal{G} \in$   
 $\mathcal{G}_Y$  und  $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_X$  einen natürlichen Isomorphismus

$$f_!(f^* \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \otimes f_! \mathcal{F}$$

Für festes  $\mathcal{G}$  ist das eine Isotransformation von Funktoren in  $\mathcal{F}$ , genauer von Funk-  
toren  $\mathcal{G}_X \rightarrow \mathcal{G}_Y$ . Diese Funktoren sind ihrerseits Kompositionen weiterer Funk-  
toren. Alle diese Funktoren haben nun Rechtsadjungierte und wir erhalten durch  
Übergang zu den Rechtsadjungierten in  $\mathcal{G}_X$  natürliche Isomorphismen

$$(f^* \mathcal{G} \rightrightarrows f^! \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^!(\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{E})$$

Ebenso kann die Projektionsformel für festes  $\mathcal{F}$  als eine Isotransformation von  
Kompositionen von Funktoren  $\mathcal{G}_Y \rightarrow \mathcal{G}_Y$  in  $\mathcal{G}$  gelesen werden. So erhalten

wir durch Übergang zu den Rechtsadjungierten natürliche Isomorphismen, die Isomorphismen der **relativen Verdierdualität**

$$f_*(\mathcal{F} \Rightarrow f^! \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f_! \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{E}$$

5.10.10. Ist speziell  $Y$  lokal kompakt Hausdorff und homologisch kompaktendlich, so gilt dasselbe für  $X$  und wir erhalten natürliche Isomorphismen

$$f^! \omega_Y \xrightarrow{\sim} f^! \text{fin}_Y^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \text{fin}_X^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \omega_X$$

und mit  $\mathcal{E} = \omega_Y$  schließlich natürliche Isomorphismen

$$f_* \mathbb{D}_X \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_Y f_! \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathbb{D}_X f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f^! \mathbb{D}_Y \mathcal{G}.$$

Die Koeinheit der Adjunktion  $f^* f_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  liefert unter Dualisieren den ersten Morphismus von  $\mathbb{D}_X \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{D}_X f^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f^! \mathbb{D}_Y f_* \mathcal{F}$  und dann mit Adjunktion einen natürlichen Morphismus

$$f_! \mathbb{D}_X \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{D}_Y f_* \mathcal{F}$$

Die Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  liefert ähnlich  $\mathbb{D}_Y \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{D}_Y f_! f^! \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_* \mathbb{D}_X f^! \mathcal{G}$  und dann mit Adjunktion einen natürlichen Morphismus

$$f^* \mathbb{D}_Y \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{D}_X f^! \mathcal{G}$$

Der Vollständigkeit halber erinnere ich auch noch aus 1.5.7 die natürlichen Isomorphismen

$$(\mathcal{E} \Rightarrow f_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} f_*(f^* \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F})$$

5.10.11 (**Folgerungen aus lokal eigentlichem Basiswechsel**). Gegeben ein kartesisches Diagramm  $fp = qg$  mit  $f$  lesb ist auch  $g$  lesb und der lokal eigentliche Basiswechsel  $q^* f_! \xrightarrow{\sim} g_! p^*$  liefert durch Übergang zu den Linksadjungierten eine ausgezeichnete Isotransformation

$$f^! q_* \xrightarrow{\sim} p_* g^!$$

Schreiben wir  $p^*$  davor und  $q^*$  dahinter, so erhalten wir mit der Einheit  $\text{id} \Rightarrow q_* q^*$  der Adjunktion und der Koeinheit  $p^* p_* \Rightarrow \text{id}$  der Adjunktion eine ausgezeichnete Transformation

$$p^* f^! \Rightarrow g^! q^*$$

**Lemma 5.10.12.** Für die konstante Abbildung  $c : E \rightarrow \text{top}$  eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums auf einen Punkt und alle  $G \in \text{Der}(\text{Ab})$  ist die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus

$$c^* G \xrightarrow{\sim} c^! c_! c^* G$$

5.10.13. Insbesondere finden wir  $c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \cong \mathbb{Z}_E[d]$  für  $d = \dim E$  und präziser formuliert einen kanonischen Isomorphismus  $c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_E[d] \otimes H_!^d(E)^*$ .

*Beweis.* Nach dem Verschwindungskriterium [TD] 3.4.26 reicht es zu zeigen, daß unsere Einheit der Adjunktion für jede konvexe offene Teilmenge  $D \Subset E$  mit der Einbettung  $j : D \hookrightarrow E$  Isomorphismen  $c_* j_* j^! c^* G \xrightarrow{\sim} c_* j_* j^! c_! c^* G$  liefert. Sie mögen in 5.10.26 prüfen, daß in dieser Situation die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus  $c_! j_! j^! c^* G \xrightarrow{\sim} c_! c^* G$  liefert. Für  $G$  eine abelsche Gruppe wissen wir das bereits aus [TG] 4.8.16. Nach [TG] 6.3.19 fällt nun aber der von der Einheit der Adjunktion induzierte Morphismus  $j^! \Rightarrow j^! c^! c_!$  zusammen mit der aus Einheit und Koeinheit von Adjunktionen gebildeten Komposition

$$j^! \Rightarrow (cj)^!(cj)_! j^! \xrightarrow{\sim} j^! c^! c_! j_! j^! \Rightarrow j^! c^! c_!$$

Wir wissen nach dem Vorhergehenden bereits, daß der Letzte dieser Pfeile einen Isomorphismus liefert, wenn wir ihn auf  $c^* G$  anwenden. Der erste Pfeil liefert also unter  $c_* j_*$  einen Isomorphismus auf  $c^* G$  genau dann, wenn die Komposition einen Isomorphismus auf  $c^* G$  liefert. Da  $D$  homöomorph ist zu  $E$ , reicht es also zu zeigen, daß für  $c$  selber die Adjunktion einen Isomorphismus

$$c_* c^* G \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_! c^* G$$

induziert. Die Projektionsformel liefert Isomorphismen  $c_! c^* G \xrightarrow{\sim} c_!(\mathbb{Z}_E \otimes c^* G) \xrightarrow{\sim} (c_! \mathbb{Z}_E) \otimes G$ . Sie zeigen, daß  $c_! c^*$  eine Äquivalenz von Kategorien ist. Dasselbe gilt für den adjungierten Funktor  $c_* c^!$  und zeigt, daß die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $G \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_! c^* G$  ist. Andererseits zeigt 3.1.4, daß die Einheit der Adjunktion  $(c^*, c_*)$  einen Isomorphismus  $G \xrightarrow{\sim} c_* c^* G$  liefert. Zusammen folgt wie gewünscht, daß die Einheit der Adjunktion  $(c_!, c^!)$  einen Isomorphismus  $c_* c^* G \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_! c^* G$  induziert.  $\square$

*Beispiel 5.10.14 (Dualisierende Garbe einer Mannigfaltigkeit).* Gegeben eine  $d$ -Mannigfaltigkeit  $M$  konstruieren wir einen Isomorphismus

$$\omega_M \xrightarrow{\sim} \text{or}_M[d]$$

ihrer dualisierenden Garbe mit der Orientierungsgarbe aus [TG] 4.10.8 verschoben in das Negative der Dimension. Dazu gehen wir von der Erkenntnis aus, daß  $\omega_M[-d]$  nach 5.10.13 eine Garbe ist und daß 5.10.13 weiter für  $U \Subset M$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^d$  einen natürlichen Isomorphismus  $(\omega_M[-d])(U) \xrightarrow{\sim} H_!^d(U; \mathbb{Z})^*$  liefert. So erhalten wir einen Isomorphismus der Restriktionen beider Garben auf die durch die fraglichen Mengen  $U$  gegebene Basis der Topologie, und unsere verallgemeinerte Garbifizierung aus [TG] 2.2.42 zeigt dann, daß er von genau einem Isomorphismus der ursprünglichen Garben herkommen muß.



**Beispiel 5.10.15 (Dualisierende Garbe einer Randfaltung).** Gegeben eine  $d$ -Randfaltung  $R$  und  $i : \partial R \hookrightarrow R$  die abgeschlossene Einbettung ihres Randes und  $j : M \hookrightarrow R$  die offene Einbettung seines Komplements betrachten wir das ausgezeichnete Dreieck  $i_!i^!\omega_R \rightarrow \omega_R \rightarrow j_*j^*\omega_R \rightarrow$ . Wir können es umschreiben zu einem ausgezeichneten Dreieck  $i_*\omega_{\partial R} \rightarrow \omega_R \rightarrow j_*\omega_M \rightarrow$  und folgern die Beschreibung  $\omega_R = \text{Keg}(j_{*\text{or}_M} \rightarrow i_*\mathbb{Z}_{\partial R})[d-1]$  der dualisierenden Garbe unserer Randfaltung  $R$  als verschobener Kegel eines Morphismus von Garben  $j_{*\text{or}_M} \rightarrow i_*\mathbb{Z}_{\partial R}$ . Nun wird der Leser etwa durch Einschränkung auf den Fall eines Halbraums unschwer zeigen können, daß der fragliche Morphismus unter  $i^*$  ein Isomorphismus wird. So folgt  $i^*\omega_R = 0$  und das ausgezeichnete Dreieck  $j_!j^!\omega_R \rightarrow \omega_R \rightarrow i_*i^*\omega_R \rightarrow$  liefert damit einen Isomorphismus

$$j_!\text{or}_M[d] = j_!\omega_M \xrightarrow{\sim} \omega_R$$

Dasselbe gilt auch für Eckfaltigkeiten, die sich ja topologisch nicht von Randfaltigkeiten unterscheiden.

**5.10.16 (Lokale Kohomologie als Hyperkohomologie).** Gegeben  $A \subset X$  eine lokal abgeschlossene Teilmenge in einem topologischen Raum erklären wir ihre **Lokalgarbe**  $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A \subset X} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  durch die Vorschrift

$$\mathcal{L}_A := (i_!\mathbb{Z}_A \Rightarrow \mathbb{Z}_X)$$

für  $i$  die Inklusionsabbildung. Mit dieser Notation spezialisiert die allgemeine Identifikation [TS] ?? zwischen Einsverschmelzungen und Leerverschmelzungen in das Homobjekt zu ausgezeichneten Isomorphismen

$$\text{Ext}^p(i_!\mathbb{Z}_A, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^p(X; \mathcal{L}_A)$$

Für  $A \triangleleft X$  abgeschlossen liefert der Isomorphismus der relativen Verdierdualität weiter einen Isomorphismus  $i_*i^!\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_A$  und so auch kanonische Isomorphismen  $\mathbb{H}_A^p(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^p(A; i^!\mathbb{Z}_X)$ , die Sie in 5.2.3 sogar mit Koeffizienten hergeleitet haben.

**Beispiel 5.10.17 (Lokalgarbe einer Untermannigfaltigkeit).** Ist  $X$  eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A$  eine orientierte  $a$ -Mannigfaltigkeit und  $i : A \hookrightarrow X$  eine Einbettung als abgeschlossene Teilmenge, so liefern die Orientierungen ausgezeichnete Isomorphismen  $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \omega_X[n]$  und  $\mathbb{Z}_A \xrightarrow{\sim} \omega_A[a]$  und zusammen mit dem offensichtlichen Isomorphismus  $\omega_A \xrightarrow{\sim} i^!\omega_X$  erhalten wir für  $p := n - a$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} i_*\mathbb{Z}_A[-p]$$

zwischen der Lokalgarbe und dem in die Kodimension verschobenen direkten Bild der konstanten Garbe. Insbesondere erhalten wir in dieser Situation ausgezeichnete Isomorphismen  $\mathbb{H}_A^q(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{q-p}(A)$ . Das Urbild von  $1 \in \mathbb{H}^0(A)$  unter

diesem Isomorphismus nennen wir den **Fundamentalkozykel von  $A$  in  $X$**  und notieren es

$$\tau_A = \tau_{A \subset X} \in H_A^p(X)$$

Je nach Kontext verwenden wir dieselbe Notation und Bezeichnung auch für das Bild dieses Elements  $\tau_A$  in  $H^p(X)$ . Insbesondere ist der Fundamentalkozykel von  $X$  in  $X$  die Eins des Kohomologierings. Ist hier  $A$  kompakt, so können wir auch das Bild des Fundamentalkozykels in der kompakten Kohomologie von  $X$  betrachten. Wir notieren es

$$\bar{\tau}_A = \bar{\tau}_{A \subset X} \in H_!^p(X)$$

**5.10.18 (Beschreibung des cup-Produkts mit Lokalgarben).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  mit abgeschlossenen Teilmengen  $A, B \subset X$  liefert unser Isomorphismus  $i_! \mathbb{Z}_A \otimes j_! \mathbb{Z}_B \xrightarrow{\sim} k_! \mathbb{Z}_{A \cap B}$  aus ?? einen ausgezeichneten Morphismus

$$\mathcal{L}_A \otimes \mathcal{L}_B \rightarrow \mathcal{L}_{A \cap B}$$

vom derivierten Tensorprodukt der Lokalgarben in die Lokalgarbe des Schnitts. Das zugehörige cup-Produkt mit Koeffizienten paßt dann offensichtlich in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_A^p(X) \times H_B^q(X) & \rightarrow & H_{A \cap B}^{p+q}(X) \\ \downarrow \wr & & \wr \downarrow \\ \mathbb{H}^p(X; \mathcal{L}_A) \times \mathbb{H}^q(X; \mathcal{L}_B) & \rightarrow & \mathbb{H}^{p+q}(X; \mathcal{L}_{A \cap B}) \end{array}$$

*Beispiel 5.10.19.* Seien  $X$  eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A, B \subset X$  abgeschlossene Teilmengen, die ihrerseits orientierte Mannigfaltigkeiten der Kodimensionen  $p, q$  sind. Schließlich nehmen wir noch an, daß ihr Schnitt  $A \cap B$  eine orientierte Mannigfaltigkeit ist von der Kodimension  $p + q$  in  $X$ . So spezialisiert unser ausgezeichneter Morphismus  $\mathcal{L}_A \otimes \mathcal{L}_B \rightarrow \mathcal{L}_{A \cap B}$  aus 5.10.18 für  $i, j, k$  die jeweiligen Einbettungen zu einem ausgezeichneten Morphismus

$$i_* \mathbb{Z}_A[-p] \otimes j_* \mathbb{Z}_B[-q] \rightarrow k_* \mathbb{Z}_{A \cap B}[-p - q]$$

Die zugehörige Abbildung  $H^0(A) \times H^0(B) \rightarrow H^0(A \cap B)$  bildet das Paar  $(1, 1)$  ab auf eine lokal konstante Funktion  $s : A \cap B \rightarrow \mathbb{Z}$ , deren Wert an einer Stelle  $x \in A \cap B$  wir die **lokale Schnittmultiplizität** nennen. So finden wir für das cup-Produkt der Fundamentalkozykel die Darstellung

$$\tau_A \cup \tau_B = \sum_Z s(Z) \tau_Z$$

mit der Summe über die Zusammenhangskomponenten  $Z$  von  $A \cap B$ . Diese Summe kann durchaus unendlich viele Summanden haben und muß dann in der offensichtlichen Weise in  $H_{A \cap B}^{p+q}(X) \xrightarrow{\sim} H^0(A \cap B)$  interpretiert werden. Erlauben wir allgemeiner, daß  $A \cap B$  zusätzlich Zusammenhangskomponenten haben darf, die Mannigfaltigkeiten einer Kodimension  $> p + q$  in  $X$  sind, so muß

$\mathcal{L}_A \otimes \mathcal{L}_B \rightarrow \mathcal{L}_{A \cap B}$  auf diesen Komponenten der Nullmorphimus sein und unsere Formel gilt entsprechend, wenn wir diese Zusammenhangskomponenten außen vor lassen.

**Beispiel 5.10.20 (Lokale Schnittmultiplizitäten ebener Kurven).** Wir betrachten den Fall von zwei abgeschlossenen orientierten Einsmannigfaltigkeiten in einer orientierten Zweimannigfaltigkeit  $A, B \subset X$  derart, daß ihr Schnitt  $A \cap B$  eine diskrete Teilmenge von  $X$  ist. Gegeben ein Punkt  $x \in A \cap B$  versuchen wir, die zugehörige lokale Schnittmultiplizität  $s(x)$  zu bestimmen. Sicher ist sie in dem Sinne lokal, daß sie sich nicht ändert, wenn wir  $X$  durch eine beliebige offene Umgebung von  $x$  ersetzen und  $A, B$  durch ihre Schnitte mit dieser Umgebung. So ziehen wir uns auf den Fall zurück, daß  $X$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}^2$  und daß  $A, B$  abgeschlossen sind in  $X$  und daß weder die Komponente von  $x$  in  $A$  noch die Komponente von  $x$  in  $B$  kompakt ist. Weiter zeigt Lokalität, daß sich die lokale Schnittmultiplizität bei  $x$  nicht ändert, wenn wir  $A$  und  $B$  durch die Zusammenhangskomponenten in  $A$  beziehungsweise  $B$  von  $x$  ersetzen. Dann aber spezialisiert unsere Formel zu

$$\tau_A \cup \tau_B = s(x)\tau_x$$

und wir hatten in diesem Fall bereits in 5.6.7 besprochen, daß gilt  $|s(x)| \leq 1$  mit  $|s(x)| = 1$  genau dann, wenn jede Komponente von  $X \setminus A$  jede Komponente von  $X \setminus B$  trifft. Um schließlich auch noch das Vorzeichen zu beschreiben, mag man vorgehen wie folgt. Die Orientierungen von  $A$  und  $X$  zeichnen von den beiden Komponenten von  $U := X \setminus A$  eine als die „Rechte“ und die andere als die „Linke“ aus. Wir notieren sie  $U_r$  und  $U_l$ . Ebenso zerfällt  $V := X \setminus B$  in eine „rechte“ und Komponente  $V_r$  und eine „linke“ Komponente  $V_l$ . Nun betrachten wir einen geschlossenen Weg, der in  $V_r \cap U_r$  beginnt und erst in  $U$  nach  $V_l$  läuft, dann in  $V$  nach  $U_l$ , dann in  $U$  nach  $V_r$  und schließlich wieder in  $V$  zum Ausgangspunkt zurück. Dessen Umlaufzahl um  $x \in X$  bestimmt das Vorzeichen von  $s(x)$ . Es sei dem Leser überlassen, diese Aussage zu präzisieren und zu beweisen.

**5.10.21 (Lokale Schnittmultiplizitäten bei transversalem Schnitt).** Seien  $X$  eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A, B \pitchfork X$  abgeschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten der Kodimensionen  $p, q$ , die sich **transversal schneiden** in dem Sinne, daß jeder Punkt  $x \in A \cap B$  eine offene Umgebung  $U \Subset X$  besitzt mit einem Homöomorphismus  $U \xrightarrow{\sim} E$  zu einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, unter dem  $A \cap U$  und  $B \cap U$  bijektiv auf Untervektorräume der Kodimensionen  $p$  beziehungsweise  $q$  abgebildet werden, die zusammen  $E$  erzeugen. Wir nennen so einen Homöomorphismus eine **Schnittplättung**. Unter diesen Annahmen ist auch  $A \cap B$  eine Mannigfaltigkeit und wir können darauf die **Schnittorientierung** erklären durch die Vorschrift, daß sie unter jeder Schnittplättung

der Schnittorientierung entspricht, wie wir sie in 5.6.14 im Fall von Untervektorräumen eingeführt haben. Mit dieser Schnittorientierung auf  $A \cap B$  gilt dann mit derselben Argumentation

$$\tau_A \cup \tau_B = \tau_{A \cap B} = \sum_{Z \in \text{Zus}(A \cap B)} \tau_Z$$

Die Summe läuft hierbei wieder über alle Zusammenhangskomponenten  $Z$  von  $A \cap B$ . In Worten ist also im Fall eines transversalen Schnitts das cup-Produkt der Fundamentalkozykel der Fundamentalkozykel des Schnitts. Diese Identität in  $H_{A \cap B}^{p+q}(X)$  liefert dieselbe Identität  $\tau_A \cup \tau_B = \tau_{A \cap B}$  in  $H^{p+q}(X)$  und liefert im Fall von kompaktem  $B$  zusätzlich in der kompakten Kohomologie  $H_i^{p+q}(X)$  die feinere Identität

$$\tau_A \cup \bar{\tau}_B = \bar{\tau}_{A \cap B}$$

## Übungen

*Übung 5.10.22.* Gegeben eine lokal konstante abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  mit endlich erzeugten Halmen auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  ist der kanonische Morphismus ein Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_X \mathbb{D}_X \mathcal{F}$$

*Übung 5.10.23.* Auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  ist jede kompaktweiche Garbe  $\mathcal{F}$  globale-Schnitte-entfaltet. Hinweis: Man schreibe unseren Hausdorffraum als aufsteigende Vereinigung einer Folge von Kompakta  $X = \bigcup K_n$  und wähle eine welche Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\triangleleft$ . Dann sind die Sequenzen  $\Gamma(K_n; \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(K_n; \mathcal{I}^\triangleleft)$  exakt und im Limes nach dem Mittag-Leffler-Kriterium auch die Sequenzen  $\Gamma \mathcal{F} \hookrightarrow \Gamma \mathcal{I}^\triangleleft$ .

*Übung 5.10.24.* Gegeben eine abzählbar basierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  hat der Funktor  $\Gamma : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}$  der globalen Schnitte höchstens die homologische Dimension  $n$ . Hinweis: Gegeben eine kompaktweiche Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^\triangleleft$  ist  $\text{im}(\mathcal{G}^{n-1} \rightarrow \mathcal{G}^n)$  kompaktweich nach 5.11.6 und [TG] 4.10.2. Dann verwende man 5.10.23.

*Übung 5.10.25 (Lokalität der Eigenschaft kompaktweich).* Eine abelsche Garbe auf einem lokal kompakten Hausdorffraum ist kompaktweich genau dann, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Garbe darauf kompaktweich ist. Hinweis: Man zeige mit 5.11.6, daß das System der offenen Teilmengen, auf denen eine abelsche Garbe kompaktweich ist, stabil ist unter endlichen Vereinigungen. Dann zeige man mit 4.2.6, daß es auch stabil ist unter beliebigen Vereinigungen.

*Übung 5.10.26.* Gegeben  $G \in \text{Der}(\text{Ab})$  und  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung zeige man, daß für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  die wie in [TG] 4.8.16 konstruierten Abbildungen Isomorphismen

$$\mathbb{H}_{\{x\}}^q(\mathbb{R}^n; c^*G) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_1^q(\mathbb{R}^n; c^*G)$$

sind. Hinweis: Nach [TG] 4.10.2 hat  $\Gamma_1 : \text{Ab}/\mathbb{R}^n \rightarrow \text{Ab}$  endliche homologische Dimension. Nach 5.10.24 und der Lokalisierungssequenz hat auch  $\Gamma_{\{x\}} : \text{Ab}/\mathbb{R}^n \rightarrow \text{Ab}$  endliche homologische Dimension. So zieht man sich auf den Fall eines beschränkten Komplexes  $G$  zurück, in dem die Behauptung aus [TG] 4.8.16 folgt.

*Übung 5.10.27 (Fundamentalkozykel einer Untervarietät).* Seien  $X$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A \Subset X$  eine abgeschlossene Teilmenge, die eine Filtrierung

$$A = A^{\leq a} \supset A^{\leq a-1} \supset \dots \supset A^{\leq 0} \supset \emptyset = A^{\leq -1} = A^{\leq -2} = \dots$$

durch abgeschlossene Teilmengen besitzt derart, daß  $A^{\leq q} \setminus A^{\leq q-1}$  jeweils eine  $q$ -Mannigfaltigkeit ist. Man zeige  $\mathcal{H}^p \mathcal{L}_{A^{\leq q}} = 0$  für  $p + q < n$  und zeige unter der zusätzlichen Annahme  $A^{\leq a-1} = A^{\leq a-2}$  für  $A^\circ := A \setminus A^{\leq a-2}$ , daß der natürliche Morphismus einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_{A^\circ}$$

liefert. Sind schließlich Orientierungen auf  $X$  und  $A^\circ$  gewählt, so erhält man weiter wie in 5.10.17 ausgezeichnete Isomorphismen  $\mathcal{L}_{A^\circ} \xrightarrow{\sim} j_* \mathbb{Z}_{A^\circ}[a-n]$  für  $j : A^\circ \hookrightarrow X$  die Einbettung und damit einen ausgezeichneten globalen Schnitt  $1 \in \Gamma \mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_{A^\circ}$  und dann auch in  $\Gamma \mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_A$ . Weil wir bereits wissen, daß gilt  $\mathcal{H}^q \mathcal{L}_A = 0$  für  $q < n - a$ , ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus  $\Gamma \mathcal{H}^{n-a} \mathcal{L}_A \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{n-a}(X; \mathcal{L}_A)$  und wir erhalten ein ausgezeichnetes Element der lokalen Kohomologie, das wir wieder den **Fundamentalkozykel von  $A$  in  $X$**  nennen und

$$\tau_A = \tau_{A \subset X} \in \mathbb{H}_A^{n-a}(X)$$

notieren. Er hängt von den gewählten Orientierungen ab. Man zeigt unschwer, daß er im Fall einer Mannigfaltigkeit  $A$  mit dem Fundamentalkozykel aus 5.10.17 übereinstimmt und daß für  $U \Subset X$  offen und  $u : U \hookrightarrow X$  die Einbettung in  $\mathbb{H}_{A \cap U}^{n-a}(U)$  gilt  $u^* \tau_A = \tau_{A \cap U}$ . Ein typisches Beispiel für eine Situation der hier beschriebenen Art ist der Fall einer glatten komplexen algebraischen Varietät  $V$  mit einer abgeschlossenen Untervarietät  $W \Subset V$  und den zugehörigen topologischen Räumen  $W(\mathbb{C}) \Subset V(\mathbb{C})$  mit der analytischen Topologie als  $A \Subset X$ , vergleiche [TG] 4.10.24.

*Übung 5.10.28 (Berechnung lokaler Schnittmultiplizitäten).* Seien  $A, B$  abgeschlossene Teilmengen von  $X := \mathbb{R}^n$  und  $a, b \in \mathbb{N}$  und  $\tau_A \in \mathbb{H}_A^{n-a}(X)$  sowie

$\tau_B \in H_B^{n-b}(X)$  lokale Kohomologieklassen. Wir nehmen an, der Schnitt  $A \cap B = \{x\}$  sei ein einziger Punkt, und wollen  $\tau_A \cup \tau_B \in H_x^n(X)$  bestimmen. Gegeben eine kompakte Kugel  $K \subset X$  mit  $x \in K$  ist der Rückzug ein Isomorphismus  $H_x^n(X) \xrightarrow{\sim} H_K^n(X)$ . Wir können damit  $\tau_A$  ersetzen durch sein Bild in  $H_{A \cup K}^{n-a}(X)$  und  $\tau_B$  durch sein Bild in  $H_{B \cup K}^{n-b}(X)$ . Die Homotopieinvarianz der lokalen Kohomologie [TG] 4.5.16 zeigt nun, daß jede Abbildung  $\varphi : (X, K) \rightarrow (X, K)$ , die als Abbildung von Raumpaaren homotop ist zur Identität im Sinne von [TS] 2.1.10 und die außerhalb von  $K$  die Identität ist, die Klasse  $\tau_B \in H_{B \cup K}^{n-b}(X)$  festhält. Diese Klasse ist damit auch das Bild von  $\varphi^*(\tau_B) \in H_{\varphi^{-1}(B)}^{n-b}(X)$ . Bei geschickter Wahl von  $\varphi$  kann nun

$$\tau_A \cup \varphi^*(\tau_B) \in H_K^n(X)$$

leichter zu berechnen sein. Wenn wir etwa ein  $\varphi$  finden können, für das gilt  $A \cap \varphi^{-1}(B) = \emptyset$ , so folgern wir sofort  $\tau_A \cup \tau_B = \tau_A \cup \varphi^*(\tau_B) = 0$ . Im Fall der Fundamentalkozykel von Untervarietäten und ähnlich gelagerten Fällen wie in 5.10.27 dahingegen gilt es salopp gesprochen, mit  $\varphi$  „unser  $B$  ein bißchen zu verschieben, so daß aus dem einem Schnittpunkt  $x$  mehrere Schnittpunkte mit transversalem Schnitt werden, und diese Schnittpunkte müssen wir dann nach 5.10.21 nur noch mit geeigneten Vorzeichen zählen“. Im Fall von Untervarietäten einer glatten komplexen Varietät weiß man sogar zusätzlich, daß dann alle diese Vorzeichen  $+1$  sein müssen.

*Übung 5.10.29.* Gegeben eine verflochtene Trennaustauschsituation mit Adjungierten und ein Lesmorphismus  $f : X \rightarrow Y$  der Basis und ein Objekt  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y$  in der Faser über  $Y$  ist die Verknüpfung

$$f_! f^! \mathbb{D}\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_! \mathbb{D} f^* \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{D} f_* f^* \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{G}$$

von natürlichen Morphismen aus 5.10.9 und der dualisierten Einheit der Adjunktion  $(f^*, f_*)$  auf  $\mathcal{G}$  die Koeinheit der Adjunktion  $(f_!, f^!)$  auf  $\mathbb{D}\mathcal{G}$ .

*Übung 5.10.30 (Zurückholen der lokalen Kohomologie mit sechs Funktoren).* Gegeben  $A \Subset X$  eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  und  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung und  $c = c_A : A \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung kennen wir aus 5.2.3 einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathcal{H}^q_{c_A * i^!} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} H_A^q(X; \mathcal{F})$$

Gegeben  $B \Subset Y$  eine weitere abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums und  $j : B \hookrightarrow Y$  die Einbettung  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung mit  $f^{-1}(B) \subset A$  und  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ein Morphismus in  $\text{Der}_{//f}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  alias ein Morphismus  $\mathcal{G} \rightarrow f_* \mathcal{F}$  in  $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$  konstruieren wir einen Morphismus

$$\phi^{\otimes} : c_{B*} j^! \mathcal{G} \rightarrow c_{A*} i^! \mathcal{F}$$

in  $\text{Der}(\text{Ab})$  oder ganz pedantisch  $\text{Der}(\text{Ab}/_{\text{top}})$  unter Betrachtung des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(B) & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow f_B & & & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & & & Y \end{array}$$

als die Komposition

$$c_{B*}j^!\mathcal{G} \rightarrow c_{B*}j^!f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{B*}f_{B*}u^!i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{A*}u_*u^!i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{A*}u_!u^!i^!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} c_{A*}i^!\mathcal{F}$$

eines von  $\phi$  induzierten Morphismus mit Basiswechsel, der Isotransformation  $u_! \xrightarrow{\sim} u_*$  und der Koeinheit der Adjunktion. Man zeige, daß dieser Morphismus  $\phi^{\otimes}$  im Fall von gewöhnlichen abelschen Garben  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  unser Zurückholen auf der lokalen Kohomologie aus [TG] 4.4.7 induziert, in Formeln also die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q c_{B*}j^!\mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}_B^q(Y; \mathcal{G}) \\ \downarrow \phi^{\otimes} & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q c_{A*}i^!\mathcal{F} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}_A^q(X; \mathcal{F}) \end{array}$$

Man zeige weiter für verknüpfbare Komorphismen  $\phi^{\otimes} \circ \psi^{\otimes} = (\psi \circ \phi)^{\otimes}$  und der Vollständigkeit halber auch  $\text{id}^{\otimes} = \text{id}$ .

**Übung 5.10.31 (Vorschub der relativen Homologie mit sechs Funktoren).** Sind in den Notationen der vorhergehenden Übung 5.10.30 alle beteiligten topologischen Räume *lesb*, so konstruiert man in derselben Weise für jeden Morphismus  $\varphi : f_!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  in  $\text{Der}(\text{Ab}/_Y)$  einen Morphismus

$$\varphi_{\otimes} : c_{A!}i^*\mathcal{F} \rightarrow c_{B!}j^*\mathcal{G}$$

in  $\text{Der}(\text{Ab})$  oder ganz pedantisch  $\text{Der}(\text{Ab}/_{\text{top}})$  und zeigt  $\psi_{\otimes} \circ \varphi_{\otimes} = (\psi \circ \varphi)_{\otimes}$  und der Vollständigkeit halber auch  $\text{id}_{\otimes} = \text{id}$ . Man beachte, daß ein Morphismus  $\varphi : f_!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  nicht einem eigentlichen Opkomorphismus entspricht.

**Beispiel 5.10.32.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten derselben Dimension  $n$  mit diskreten Fasern, so ist  $f_{(!)}$  nach eigentlichem Basiswechsel ein exakter Funktor und induziert einen Morphismus  $f_!\omega_X \rightarrow \omega_Y$  oder auch einfacher einen Morphismus  $\varphi : f_!\text{or}_X \rightarrow \text{or}_Y$ . Gegeben  $A \Subset X$  und  $B \Subset Y$  mit  $f^{-1}(B) \subset A$  entspricht die zugehörige Abbildung  $\varphi_{\otimes} : \Gamma_!(A; \text{or}_X) \rightarrow \Gamma_!(B; \text{or}_Y)$  unter unserem Isomorphismus [TS] 4.3.4 dem Vorschub  $\mathbb{H}_n(X, X \setminus A) \rightarrow \mathbb{H}_n(Y, Y \setminus B)$ . Das ist seinerseits ein Spezialfall der Natürlichkeit des Vergleichisomorphismus der relativen Homologie 6.4.30.

## 5.11 Konstruktion eines Eigrückzugs

**Satz 5.11.1 (Darstellbarkeit von Funktoren auf Garben).** *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein Funktor  $\mu : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$  ist genau dann darstellbar alias isomorph zu einem Funktor der Gestalt  $\mathcal{F} \mapsto \text{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$  mit  $\mathcal{C} \in \text{Ab}_{/X}$ , wenn er mit Kolimites vertauscht.*

*Beweis.* Daß ein darstellbarer Funktor mit Kolimites vertauschen muß, ist eh klar. Sind weiter eine abelsche Garbe  $\mathcal{C} \in \text{Ab}_{/X}$  und natürliche Bijektionen

$$\mu(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$$

gegeben, so erhalten wir mit  $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_{U \subset X} := i_{(!)} \mathbb{Z}_U$  für  $i : U \hookrightarrow X$  die Einbettung einer offenen Teilmenge Bijektionen  $\mu(\mathbb{Z}_{U \subset X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(U)$ . Für  $V \Subset U$  muß darüber hinaus der offensichtliche Morphismus  $\mathbb{Z}_{V \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_{U \subset X}$  zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mu(\mathbb{Z}_{U \subset X}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \text{res}_U^V \\ \mu(\mathbb{Z}_{V \subset X}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}(V) \end{array}$$

mit besagten Bijektionen in den Horizontalen führen. Damit ist der weitere Gang des Beweises klar: Wir konstruieren zu unserem Funktor  $\mu$  eine abelsche Prägarbe  $\mathcal{C}_\mu$  durch die Vorschrift

$$\mathcal{C}_\mu(U) := \mu(\mathbb{Z}_{U \subset X})$$

und zeigen, daß sie unter unseren zusätzlichen Annahmen eine Garbe ist, die den Funktor  $\mu$  darstellt. Um zu zeigen, daß  $\mathcal{C}_\mu$  eine Garbe ist, betrachten wir ein System  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von offenen Teilmengen mit Vereinigung  $V \Subset X$  und das Diagramm

$$\bigoplus_{(U, U') \in \mathcal{U}^2} \mathbb{Z}_{(U \cap U') \subset X} \rightrightarrows \bigoplus_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{Z}_{U \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_{V \subset X}$$

mit den beiden ersten Pfeilen gegeben einerseits durch  $\mathbb{Z}_{(U \cap U') \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_{U \subset X}$  und andererseits durch  $\mathbb{Z}_{(U \cap U') \subset X} \rightarrow \mathbb{Z}_{U' \subset X}$ . An den Halmen erkennt man, daß hier  $\mathbb{Z}_{V \subset X}$  der Kolimes der linken Hälfte unseres Diagramms alias der Koegalisor der beiden linken Pfeile ist. Kommutiert  $\mu$  mit Kolimites, so muß mithin  $\mathcal{C}_\mu$  eine abelsche Garbe sein. Es bleibt noch zu zeigen, daß diese abelsche Garbe auch in der Tat den Funktor  $\mu$  darstellt. Bezeichne dazu  $\text{Off}_X$  die Kategorie der offenen Teilmengen von  $X$  mit Inklusionen als Morphismen und  $J : \text{Off}_X \rightarrow \text{Ab}_{/X}$  den Funktor  $U \mapsto \mathbb{Z}_{U \subset X}$ . Nun betrachten wir für alle  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  die Verknüpfungen

$$\begin{array}{ccc} \mu(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cat}(\text{Ab}_{/X}, \text{Ab}^{\text{opp}})(\mu, \text{Ab}_{/X}(\_, \mathcal{F})) \\ & & \downarrow \circ J \\ \text{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{C}_\mu) & \xleftarrow{\sim} & \text{Cat}(\text{Off}_X, \text{Ab}^{\text{opp}})(\mu \circ J, \text{Ab}_{/X}(\_, \mathcal{F}) \circ J) \end{array}$$



der Identifikation des Yoneda-Lemmas mit einigen weiteren offensichtlichen Abbildungen unter Verwendung von  $\text{Ab}/_X(\_, \mathcal{F}) \circ J \xrightarrow{\cong} \mathcal{F} : \text{Off}_X \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ . Sie bilden eine Transformation  $\tau : \mu \Rightarrow \text{Ab}/_X(\_, \mathcal{C}_\mu)$  von Funktoren  $\text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ , die auf allen Objekten der Gestalt  $\mathbb{Z}_{U \subset X}$  Isomorphismen  $\tau : \mu(\mathbb{Z}_{U \subset X}) \xrightarrow{\cong} \text{Ab}/_X(\mathbb{Z}_{U \subset X}, \mathcal{C}_\mu)$  induziert. Es gilt zu zeigen, daß sie auf überhaupt allen Objekten  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  Isomorphismen  $\tau : \mu(\mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \text{Ab}/_X(\mathcal{F}, \mathcal{C}_\mu)$  induziert. Da beide Seiten mit Kolimites vertauschen, folgt das zunächst für beliebige direkte Summen von Kopien unserer  $\mathbb{Z}_{U \subset X}$ . Jede abelsche Garbe ist aber Quotient einer derartigen direkten Summe und dann auch Kokern eines Morphismus zwischen zwei derartigen direkten Summen, und so folgt es dann für  $\mathcal{F}$  beliebig.  $\square$

**Korollar 5.11.2.** *Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{B}$  eine abelsche Kategorie. Ein Funktor  $\Lambda : \text{Ab}/_X \rightarrow \mathcal{B}$  besitzt genau dann einen Rechtsadjungierten, wenn er mit Kolimites vertauscht.*

*Beweis.* Jeder Funktor, der einen Rechtsadjungierten besitzt, vertauscht mit Kolimites. Andererseits vertauscht auch für alle  $B \in \mathcal{B}$  der Funktor  $\mathcal{B} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}, A \mapsto \mathcal{B}(A, B)$  mit Kolimites. Vertauscht weiter  $\Lambda$  mit Kolimites, so auch die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \text{Ab}/_X & \rightarrow & \text{Ab}^{\text{opp}} \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{B}(\Lambda \mathcal{F}, B) \end{array}$$

Nach dem Darstellbarkeitskriterium 5.11.1 ist unsere Verknüpfung also darstellbar durch eine abelsche Garbe  $RB \in \text{Ab}/_X$ . Man sieht nun ohne Mühe, daß wir damit schon den gesuchten Rechtsadjungierten  $R$  zu  $\Lambda$  konstruiert haben.  $\square$

**Beispiel 5.11.3 (Spezialfälle des Eigrückzugs).** Gegeben eine les-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  vertauscht der Eigvorschub  $f^{(1)} : \text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}/_Y$  nach 4.2.4 mit filtrierenden Kolimites. Ist  $f^{(1)}$  zusätzlich exakt, etwa für  $f$  eine lokal abgeschlossene Einbettung oder eine separierte étale Abbildung, so vertauscht es mithin mit beliebigen Kolimites und besitzt nach 5.11.2 einen Rechtsadjungierten

$$f^{(1)} : \text{Ab}/_Y \rightarrow \text{Ab}/_X$$

Gegeben eine Garbe  $\mathcal{G} \in \text{Ab}/_Y$  finden wir für ihren Eigrückzug immer im Fall, daß der Eigvorschub exakt ist, sogar die explizite Beschreibung

$$(f^{(1)}\mathcal{G})(U) = \text{Ab}/_Y(f^{(1)}(\mathbb{Z}_{U \subset X}), \mathcal{G})$$

In diesem Fall erhalten wir nach [TD] 3.2.27 auch auf den derivierten Funktoren ein adjungiertes Paar  $(f_!, Rf^{(1)})$  und so eine vergleichsweise explizite Beschreibung des Eigrückzugs auf den derivierten Kategorien. Im Fall étaler separierter Abbildungen  $f$  erhalten wir so ein weiteres Mal unseren ausgezeichneten Isomorphismus  $f^{(1)} \xrightarrow{\cong} f^{(*)}$  aus [TG] 6.5.1.

5.11.4. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  mit einer offenen Teilmenge  $U \Subset X$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  erklären wir ganz allgemein die abelsche Garbe  $\mathcal{F}_{U \subset X} \in \text{Ab}/X$  durch die Vorschrift  $\mathcal{F}_{U \subset X} := j_{(!)}j^{(*)}\mathcal{F}$  für  $j : U \rightarrow X$  die Einbettung. Da beide fraglichen Funktoren exakt sind, fällt diese Garbe auch zusammen mit dem Objekt  $j_!j^*\mathcal{F}$  der derivierten Kategorie.

**Lemma 5.11.5.** *Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  separiert und lokal eigentlich ist eine Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  genau dann  $f$ -kompaktweich, wenn für alle  $U \Subset X$  die Garbe  $\mathcal{F}_{U \subset X}$  eine  $f_{(!)}$ -entfaltete Garbe ist. Insbesondere ist mit  $\mathcal{F}$  auch  $\mathcal{F}_{U \subset X}$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe.*

*Beweis.* Bezeichnet  $i := i_y : \{y\} \hookrightarrow Y$  die Einbettung des Punktes  $y \in Y$ , so ist  $\mathcal{G} \in \text{Ab}/X$  genau dann eine  $f_{(!)}$ -entfaltete Garbe, wenn für alle  $y \in Y$  aus  $\mathcal{H}^\nu i^*f_!\mathcal{G} \neq 0$  bereits folgt  $\nu = 0$ . Mit mehrfachem derivierten Basiswechsel 5.4.17 im doppelt kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 U \cap f^{-1}(y) & \xrightarrow{l} & U \\
 u \downarrow & & \downarrow j \\
 f^{-1}(y) & \xrightarrow{k} & X \\
 g \downarrow & & \downarrow f \\
 \{y\} & \xrightarrow{i} & Y
 \end{array}$$

für alle  $y \in Y$  erkennen wir, daß die  $f_{(!)}$ -Azyklizität von  $\mathcal{F}_{U \subset X}$  gleichbedeutend ist dazu, daß für

$$i^*f_!\mathcal{F}_{U \subset X} \cong g_!k^*\mathcal{F}_{U \subset X} = g_!k^*j_!j^*\mathcal{F} \cong g_!u_!l^*j^*\mathcal{F} \cong g_!u_!u^*k^*\mathcal{F}$$

und alle  $y \in Y$  wieder  $\mathcal{H}^\nu$  für  $\nu \neq 0$  verschwindet, daß also für alle  $y \in Y$  mit der Notation  $Z := f^{-1}(y)$  für die Faser die Garbe  $(k^*\mathcal{F})_{(U \cap Z) \subset Z}$  eine  $\Gamma_1$ -entfaltete Garbe ist. Damit können wir uns auf den Fall eines einpunktigen Raumes zurückziehen, den wir im anschließenden Lemma 5.11.6 behandeln.  $\square$

**Lemma 5.11.6 (Kompaktweichheitskriterium).** *Eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $Z$  ist kompaktweich genau dann, wenn für alle  $W \Subset Z$  die Garbe  $\mathcal{F}_{W \subset Z}$  eine  $\Gamma_1$ -entfaltete Garbe ist.*

*Beweis.* Bezeichne  $j : W \hookrightarrow Z$  die Einbettung. Ist  $\mathcal{F}$  kompaktweich, so ist auch  $j^*\mathcal{F}$  kompaktweich nach [TG] 4.8.11 und für die konstante Abbildung  $c : Z \rightarrow \text{pt}$  hat folglich

$$(c \circ j)_!j^*\mathcal{F} \cong c_!j_!j^*\mathcal{F} \cong c_!\mathcal{F}_{W \subset Z}$$

die Eigenschaft  $\mathcal{H}^\nu = 0$  für  $\nu \neq 0$ , als da heißt,  $\mathcal{F}_{W \subset Z}$  ist  $\Gamma_!$ -entfaltet. Sei umgekehrt  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $Z$  derart, daß  $\mathcal{F}_{W \subset Z}$  für alle  $W \Subset Z$  eine  $\Gamma_!$ -entfaltete Garbe ist. Gegeben ein Kompaktum  $K \subset Z$  betrachten wir dann sein Komplement  $W \Subset Z$  und folgern aus ?? sogar die Surjektivität der Restriktion  $\Gamma_!(Z; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(K; \mathcal{F})$ .  $\square$

**Lemma 5.11.7.** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  separiert lokal eigentlich und der Eigvorschub  $f_{(!)} : \text{Ab}_X \rightarrow \text{Ab}_Y$  habe homologische Dimension  $r < \infty$ . Gibt es in  $\text{Ab}_X$  eine exakte Sequenz  $\mathcal{I}^{-r} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{I}^{-1} \rightarrow \mathcal{I}^0 \rightarrow \mathcal{K}$  mit  $f$ -kompaktweichen  $\mathcal{I}^\nu$ , so ist auch  $\mathcal{K}$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe.*

*Beweis.* Nach 5.11.5 reicht es zu zeigen, daß für alle  $U \Subset X$  die Garbe  $\mathcal{K}_{U \subset X}$  eine  $f_{(!)}$ -entfaltete Garbe ist. Sicher paßt diese Garbe in eine exakte Sequenz

$$\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{I}_{U \subset X}^{-r} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{I}_{U \subset X}^{-1} \rightarrow \mathcal{I}_{U \subset X}^0 \rightarrow \mathcal{K}_{U \subset X}$$

Mit  $\mathcal{I}^\nu$  ist auch  $\mathcal{I}_{U \subset X}^\nu$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe nach 5.11.5. Spalten wir unsere exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen auf, so liefern die zugehörigen langen exakten Sequenzen der  $R^q f_{(!)}$  für  $q \geq 1$  Isomorphismen

$$R^q f_{(!)} \mathcal{K}_{U \subset X} \xrightarrow{\sim} R^{q+r} f_{(!)} \mathcal{G}$$

Die rechte Seite aber verschwindet nach Annahme.  $\square$

**Lemma 5.11.8.** *1. Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  eine lokal eigentliche separierte Abbildung vertauscht der derivierte Eigvorschub  $f_! : \text{Der}^+(\text{Ab}_X) \rightarrow \text{Der}^+(\text{Ab}_Y)$  mit filtrierenden Kolimites;*

*2. Gegeben eine lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  vertauscht sogar der unbeschränkt derivierte Eigvorschub  $f_! : \text{Der}(\text{Ab}_X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}_Y)$  mit filtrierenden Kolimites.*

*Beweis.* Gegeben eine separierte lokal eigentliche Abbildung ist jeder filtrierende Kolimes von faserweise kompaktweichen Garben wieder faserweise kompaktweich. Das folgt unmittelbar durch Rückzug aus dem Fall, daß unsere Abbildung im einpunktigen Raum landet, den wir in 4.2.6 behandelt haben. Das Lemma ergibt sich, da wir die entsprechenden derivierten Funktoren durch faserweise kompaktweiche Auflösungen berechnen können.  $\square$

**Lemma 5.11.9.** *Seien  $f : X \rightarrow Y$  lesb und  $\mathcal{K} \in \text{Ab}_X$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe. Sind  $\mathcal{K}$  oder  $\mathcal{F}$  flach, so ist auch  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe.*

*Beweis.* Jede Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/X$  besitzt eine Auflösung  $\dots \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \rightarrow \mathcal{F}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{F}$  mit  $\mathcal{F}^\nu$  jeweils einer direkten Summe von Kopien von Garben der Gestalt  $\mathbb{Z}_{U \subset X}$  für  $U \Subset X$ . Diese liefert in beiden Fällen eine exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$$

Nach 5.11.7 reicht es zu zeigen, daß  $\mathcal{F}^\nu \otimes \mathcal{K}$  eine  $f$ -kompaktweiche Garbe ist für alle  $\nu$ . Aber  $\mathcal{F}^\nu \otimes \mathcal{K}$  ist eine direkte Summe von Garben der Gestalt  $\mathbb{Z}_{U \subset X} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}_{U \subset X}$  und ist folglich  $f$ -kompaktweich nach 4.2.6 und der Verträglichkeit von Kolimites und Rückzug.  $\square$

**Lemma 5.11.10.** *Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  lesb und  $\mathcal{K} \in \text{Ab}/X$  eine  $f$ -kompaktweiche abelsche Garbe auf  $X$  besitzt der durch die Vorschrift*

$$f_{(1)}^{\mathcal{K}} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}^0 f_!(\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{K})$$

*gegebene Funktor  $f_{(1)}^{\mathcal{K}} : \text{Ab}/X \rightarrow \text{Ab}/Y$  einen Rechtsadjungierten  $f_{\mathcal{K}}^{(1)}$ .*

*Beweis.* Nach 5.11.1 reicht es zu zeigen, daß  $f_{(1)}^{\mathcal{K}}$  mit beliebigen Kolimites vertauscht. Dazu reicht es zu zeigen, daß unser Funktor rechtsexakt ist und mit filtrierenden Kolimites, ja mit beliebigen direkten Summen vertauscht. Aus Lemma 5.11.9 folgt  $\mathcal{H}^1 f_!(\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{K}) = 0$  und damit ist unser Funktor schon mal rechtsexakt. Unser Funktor vertauscht aber auch mit beliebigen filtrierenden Kolimites, genauer wissen wir das für  $\otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{K}$ , weil er ein Linksadjungierter ist, für  $f_!$  nach 5.11.8 und für  $\mathcal{H}^0$  ist es eh klar.  $\square$

5.11.11. Geht man die Konstruktion des Rechtsadjungierten in 5.11.10 durch, so erhält man für die Schnitte von  $f_{\mathcal{K}}^{(1)} \mathcal{G}$  die Beschreibung

$$(f_{\mathcal{K}}^{(1)} \mathcal{G})(U) = \text{Ab}/Y(f_{(1)} \mathcal{K}_{U \subset X}, \mathcal{G})$$

und der Isomorphismus  $\text{Ab}/X(\mathbb{Z}_{U \subset X}, f_{\mathcal{K}}^{(1)} \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}/Y(f_{(1)}^{\mathcal{K}}(\mathbb{Z}_{U \subset X}), \mathcal{G})$ , der davon induziert wird, ist die Adjunktion für das Paar  $(\mathbb{Z}_{U \subset X}, \mathcal{G})$ .

5.11.12 (**Existenz des eigentlichen Rückzugs**). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine lesb-Abbildung. Gegeben ein Komplex  $\mathcal{K}$  alias  $\dots \rightarrow \mathcal{K}^q \rightarrow \mathcal{K}^{q+1} \rightarrow \dots$  von faserweise kompaktweichen Garben auf  $X$  erklären wir den Funktor

$$f_{(1)}^{\mathcal{K}} : \text{Hot}(\text{Ab}/X) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}/Y)$$

dadurch, daß er jedem Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Hot}(\text{Ab}/X)$  das Summentotal des Doppelkomplexes der  $f_{(1)}^{\mathcal{K}^q} \mathcal{F}^p$  zuordnet. Man prüft leicht, daß er einen Rechtsadjungierten

$$f_{\mathcal{K}}^{(1)} : \text{Hot}(\text{Ab}/Y) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab}/X)$$

besitzt, der jedem Komplex  $\mathcal{G} \in \text{Hot}(\text{Ab}/Y)$  das Produkttotal des Doppelkomplexes der  $f_{\mathcal{K}-q}^{(1)} \mathcal{G}^p$  zuordnet. Um die  $q$ -Differentialie zu erklären beachten wir, daß jede Transformation von Funktoren eine Transformation in die Gegenrichtung auf den Adjungierten induziert. Jeder Morphismus  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  von  $f$ -kompaktweichen Garben liefert mithin eine Transformation  $f_{\mathcal{M}}^{(1)} \Rightarrow f_{\mathcal{L}}^{(1)}$ . Lemma 5.11.9 zeigt nun, daß alle Komplexe aus flachen Garben linksentfaltet sind für  $f_{(1)}^{\mathcal{K}}$ . Folglich existiert der zahme Linksderivierte von  $f_{(1)}^{\mathcal{K}}$  auf allen Objekten und mit Lemma 5.11.9 erhalten wir für

$$Lf_{(1)}^{\mathcal{K}} : \text{Der}(\text{Ab}/X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/Y)$$

sogar eine ausgezeichnete Isotransformation  $Lf_{(1)}^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\cong} f_! \circ (\otimes^L \mathcal{K})$ . Da andererseits in  $\text{Hot}(\text{Ab}/Y)$  nach ?? jeder Komplex eine universelle Rechtsentfaltung besitzt, existiert auch der zahme Rechtsderivierte  $Rf_{\mathcal{K}}^{(1)}$  von  $f_{\mathcal{K}}^{(1)}$  auf allen Objekten und ?? liefert für diese derivierten Funktoren eine Adjunktion

$$(Lf_{(1)}^{\mathcal{K}}, Rf_{\mathcal{K}}^{(1)})$$

Für jede  $f$ -kompaktweiche Auflösung  $\mathcal{K}$  der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$  ist also  $Rf_{\mathcal{K}}^{(1)}$  ein Rechtsadjungierter  $f^!$  von  $f_!$ .

**5.11.13 (Berechnung des Verdierdualen).** Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine lesb-Abbildung und  $\mathcal{K}$  ein Komplex von  $f$ -kompaktweichen abelschen Garben auf  $X$ . Die Isotransformation  $Lf_{(1)}^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\cong} f_! \circ (\otimes \mathcal{K})$  von Funktoren  $\text{Der}(\text{Ab}/X) \rightarrow \text{Der}(\text{Ab}/Y)$  aus 5.11.12 liefert eine ausgezeichnete Isotransformation

$$Rf_{\mathcal{K}}^{(1)} \xrightarrow{\cong} (\mathcal{K} \rightrightarrows ) \circ f^!$$

zwischen den adjungierten Funktoren. Ist insbesondere  $f = \text{fin}$  die konstante Abbildung auf den einpunktigen Raum, so erhalten wir für jeden Komplex  $\mathcal{K}$  von kompaktweichen Garben auf einem lokal kompakten homologisch kompaktendlichen Hausdorffraum  $X$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\text{fin}_{\mathcal{K}}^{(1)} (\mathbb{Q}_{\text{top}}[0] \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{top}}) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{K} \rightrightarrows \text{fin}^! \mathbb{Z}_{\text{top}})$$

und so mit 5.11.11 einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen dem Verdierdualen  $\mathbb{D}_X \mathcal{K}$  von  $\mathcal{K}$  und dem Garbenkomplex mit  $\mathbb{D}_{\text{Ket}} \Gamma_!(U; \mathcal{K})$  als Komplex der Schnitte auf einer offenen Teilmenge  $U \Subset X$ .

## Übungen

*Übung 5.11.14.* Man zeige, daß gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von lokal kompakten homologisch kompaktendlichen Hausdorffräumen und ein

Komplex  $\mathcal{K}$  von kompaktweichen abelschen Garben auf  $X$  der natürliche Isomorphismus  $\mathbb{D}_Y f_! \mathcal{K} \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} f_* \mathbb{D}_X \mathcal{K}$  aus 5.10.9 unter der in 5.11.13 gegebenen Beschreibung des Verdierdualen und dem natürlichen Morphismus  $f_{(*)} \Rightarrow f_*$  von dem Isomorphismus von Komplexen von abelschen Garben herkommt, der auf den Schnitten über  $V \Subset Y$  gegeben wird durch die offensichtlichen Isomorphismen

$$\mathbb{D}_{\text{Ket}} \Gamma_!(V; f_{(!)} \mathcal{K}) \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} \mathbb{D}_{\text{Ket}} \Gamma_!(f^{-1}(V); \mathcal{K})$$

Hinweis: Ich habe diese Übung noch nicht gemacht und stelle mir vor, daß das einmal ein Student zusammen mit dem Umfeld ausarbeiten könnte.

*Übung 5.11.15.* Ist ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  die disjunkte Vereinigung offener Teilmengen  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ , so liefern für jedes Objekt  $\mathcal{F} \in \text{Der}^+(\text{Ab}/X)$  die Ausdehnungen durch Null Isomorphismen

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{H}_!^q(X_i; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_!^q(X; \mathcal{F})$$

Ist  $X$  zusätzlich homologisch kompaktendlich, so gilt dasselbe sogar für jedes Objekt  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/X)$  der unbeschränkten derivierten Kategorie. Hinweis: Man gehe von der Zerlegung ?? von  $\mathcal{F}$  als Summe der Restriktionen auf die Komponenten aus und verwende die Verträglichkeit von  $\text{fin}_!$  mit direkten Summen aus 5.11.8.

## 6 Anwendungen und Vergleichssätze

### 6.1 Mannigfaltiger Eigrückzug

6.1.1. Gegeben ein topologischer Raum  $Y$  und ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum  $E$  der Dimension  $d := \dim E$  und die Projektion  $c : E \times Y \rightarrow Y$  haben wir offensichtliche Isomorphismen

$$c_! \mathbb{Z}_{E \times Y} \xrightarrow{\sim} c_! c^* \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} c_! \operatorname{pr}_E^* \mathbb{Z}_E \xrightarrow{\sim} \operatorname{pr}_Y^* \operatorname{fin}_! \mathbb{Z}_E \cong \mathbb{Z}_Y[-d]$$

**Lemma 6.1.2.** *Gegeben ein topologischer Raum  $Y$  und ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum  $E$  ist für die Projektion  $c : E \times Y \rightarrow Y$  und beliebiges  $\mathcal{G} \in \operatorname{Der}(\operatorname{Ab}_Y)$  die Einheit der Adjunktion stets ein Isomorphismus*

$$c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c^! c_! c^* \mathcal{G}$$

6.1.3. Insbesondere finden wir  $c^! \mathbb{Z}_Y \cong \mathbb{Z}_{E \times Y}[d]$  für  $d = \dim E$  und finden sogar einen kanonischen Isomorphismus  $c^! \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{E \times Y}[d] \otimes H_1^d(E)^*$ .

*Beweis.* Nach dem Verschwindungskriterium [TD] 3.4.26 reicht es zu zeigen, daß unsere Einheit der Adjunktion für jede nichtleere konvexe offene Teilmenge  $D \Subset E$  und die zugehörige Einbettung  $j : D \times Y \hookrightarrow E \times Y$  Isomorphismen  $c_* j_* j^* c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* j_* j^* c^! c_! c^* \mathcal{G}$  liefert. Hierfür können wir die im Fall eines einpunktigen Raums  $Y$  in 5.10.12 gegebene Argumentation kopieren, sobald wir zeigen können, daß auch in dieser Situation die Koeinheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$c_! j_! j^! c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_! c^* \mathcal{G}$$

liefert. Das aber dürfen wir halmweise an jedem Punkt  $y \in Y$  prüfen und mit Basiswechsel folgt es so aus der bereits beim Beweis von 5.10.12 gezeigten Aussage im Fall eines einpunktigen Raums  $Y$ . Jetzt kann die Argumentation wie in 5.10.12 weiterlaufen. Da  $D$  homöomorph ist zu  $E$ , reicht es zu zeigen, daß unsere Abbildung für alle  $Y$  einen Isomorphismus  $c_* c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_! c^* \mathcal{G}$  induziert. Wir wissen aber aus der Projektionsformel, daß  $c_! c^*$  isomorph ist zum Funktor  $(c_! \mathbb{Z}_{E \times Y}) \otimes$  und damit nach 6.1.1 eine Äquivalenz von Kategorien. Also ist auch der adjungierte Funktor  $c_* c^!$  eine Äquivalenz von Kategorien und die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^! c_! c^* \mathcal{G}$ . Daß andererseits auch die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c_* c^* \mathcal{G}$  ist, wissen wir bereits aus 3.1.4. Der Satz folgt.  $\square$

**Definition 6.1.4.** Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt  **$d$ -mannigfaltig von der relativen Dimension  $d$**  oder kurz  **$d$ -mannigfaltig**, wenn sie separiert ist und

es für jeden Punkt  $x \in X$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{R}^d & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ V & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

gibt mit offenen Einbettungen in den Horizontalen und  $x$  im Bild der oberen Horizontalen.

*Beispiel 6.1.5.* Eine 0-mannigfaltige Abbildung ist dasselbe wie eine separierte étale Abbildung.

6.1.6. Offensichtlich ist jede mannigfaltige Abbildung lokal eigentlich und für  $d$  die relative Dimension unserer Abbildung ist jede ihrer Fasern eine  $d$ -Mannigfaltigkeit. Nach dem Verschwinden hoher kompakter Kohomologie bei Mannigfaltigkeiten [TG] 4.10.2 und lokal eigentlichem Basiswechsel ist also jede mannigfaltige Abbildung lesb. Nach 6.1.2 ist für  $f : X \rightarrow Y$  mannigfaltig von der relativen Dimension  $d$  der Komplex  $f^! \mathbb{Z}_Y[-d]$  eine abelsche Garbe auf  $X$ , die lokal frei ist vom Rang Eins. Wir nennen sie die **relative Orientierungsgarbe** und notieren sie

$$\text{or}_f = \text{or}_{X/Y} := f^! \mathbb{Z}_Y[-d]$$

Ist die relative Orientierungsgarbe isomorph zur konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$ , so nennen wir unsere mannigfaltige Abbildung **orientierbar** und die Wahl eines Isomorphismus  $\text{or}_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$  nennen wir eine **Orientierung von  $f$** . Für jede 0-mannigfaltige alias separierte étale Abbildung haben wir in 5.10.2 bereits eine ausgezeichnete Orientierung konstruiert.

6.1.7. Gegeben ein  $f : X \rightarrow Y$  lesb und  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}/Y)$  erhalten wir einen natürlichen Morphismus

$$f^! \mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G} \rightarrow f^! (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

aus der Komposition  $f_!(f^! \mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_! f^! \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$  des von der Projektionsformel herrührenden Morphismus mit der Koeinheit der Adjunktion.

**Satz 6.1.8 (Eigrückzug unter mannigfaltigen Abbildungen).** *Im Fall einer mannigfaltigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  induziert unser natürlicher Morphismus 6.1.7 Isomorphismen*

$$f^! \mathbb{Z}_Y \otimes f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f^! \mathcal{G}$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß unsere mannigfaltige Abbildung  $f$  die Projektion  $c : E \times Y \rightarrow Y$  ist für einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum  $E$ . In diesem Fall ist schon mal die Koeinheit



der Adjunktion einen Isomorphismus  $c_1 c^! \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_Y$ , da es nach 6.1.1 ein Objekt  $\mathcal{F}$  gibt mit  $c_1 \mathcal{F} \cong \mathbb{Z}_Y$ . Wir können also von einem Isomorphismus

$$c_1(c^! \mathbb{Z}_Y \otimes c^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} c_1 c^! \mathbb{Z}_Y \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_Y \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$$

ausgehen und müssen zeigen, daß er unter dem Anwenden der Adjunktion wieder einen Isomorphismus  $c^! \mathbb{Z}_Y \otimes c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c^! \mathcal{G}$  liefert. Das ist klar, sobald wir zeigen können, daß es überhaupt ein Objekt  $\mathcal{E}$  gibt mit  $c^! \mathbb{Z}_Y \otimes c^* \mathcal{G} \cong c^! \mathcal{E}$  oder auch nur ein Objekt  $\mathcal{E}$  mit  $c^* \mathcal{G} \cong c^! \mathcal{E}$ . Das aber folgt aus unserer Erkenntnis 6.1.2, daß die Einheit der Adjunktion stets ein Isomorphismus  $c^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} c^! c^* \mathcal{G}$  ist.  $\square$

## Übungen

*Übung 6.1.9.* Die Verknüpfung von zwei mannigfaltigen Abbildungen ist wieder eine mannigfaltige Abbildung. Orientierungen unserer beiden Abbildungen induzieren in natürlicher Weise eine Orientierung ihrer Verknüpfung. Wir nennen sie die **Verknüpfungsorientierung**.

*Übung 6.1.10.* Ist in einem kartesischen Diagramm von topologischen Räumen eine Ausgangskante  $d$ -mannigfaltig, so auch die gegenüberliegende Kante aus dem Faserprodukt. Ist  $fp = qg$  kartesisch mit  $f$  mannigfaltig, so ist die ausgezeichnete Transformation aus 5.10.11 eine Isotransformation

$$p^* f^! \xrightarrow{\sim} g^! q^*$$

Insbesondere induziert jede Orientierung von  $f$  eine Orientierung von  $g$ . Wir nennen sie die **zurückgezogene Orientierung**. Ich habe diese Übung noch nicht gemacht.

## 6.2 Homologien und ihre Funktorialitäten

6.2.1. Seien  $X$  ein lokal kompakter homologisch kompaktendlicher Hausdorffraum und  $c := \text{fin}_X : X \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung. Unsere Vergleichsisomorphismen zur singulären Homologie und Kohomologie, die wir im Anschluß in 6.2.4 besprechen, motivieren uns zu den Definitionen

$$\begin{aligned} H_q(X)_{\text{garb}} &:= \mathcal{H}^{-q} c_! c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & H^q(X)_{\text{garb}} &:= \mathcal{H}^q c_* c^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ H_q^!(X)_{\text{garb}} &:= \mathcal{H}^{-q} c_* c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & H_!^q(X)_{\text{garb}} &:= \mathcal{H}^q c_! c^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \end{aligned}$$

Wir nennen diese Gruppen die **garbentheoretische Homologie**, **Kohomologie**, **lokalendliche Homologie** und **kompakte Kohomologie**. Analoge Definitionen  $H_q(X; G)_{\text{garb}} := \mathcal{H}^{-q} c_! c^! G_{\text{top}}$  und dergleichen vereinbaren wir für den Fall einer abelschen Gruppe  $G$ . Wenn wir den Zusatz *garb* weglassen, gilt es aus dem Kontext zu erschließen, was genau gemeint ist.

6.2.2. Die wesentlichen Funktorialitäten dieser vier Theorien faßt die folgende Tabelle zusammen. Mehr dazu wird im Anschluß diskutiert.

	Vorschub	Rückzug
$H_q$	beliebig	eigentlich orientiert mannigfaltig
$H_q^!$	eigentlich	orientiert mannigfaltig
$H_!^q$	orientiert mannigfaltig	eigentlich
$H^q$	eigentlich orientiert mannigfaltig	beliebig

6.2.3 (**Diskussion weiterer Verallgemeinerungen**). Die beiden Kohomologien aus 6.2.1 sind sogar für beliebige topologische Räume sinnvoll definiert, aber die kompakte Kohomologie hat nur im Fall lokal kompakter Hausdorffräume gute Eigenschaften. Unsere natürlichen Isomorphismen aus 5.10.9 induzieren für jeden homologisch kompaktendlichen lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  und  $c : X \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung einen Isomorphismus  $\mathbb{D}_{c!}c^*\mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} c_*c^!\mathbb{Z}_{\text{top}}$  und dann mit dem abstrakten universellen Koeffiziententheorem [TD] 3.9.20 für jede abelsche Gruppe  $G$  kurze exakte und unnatürlich spaltende Sequenzen

$$\text{Ext}(H_!^{q+1}X, G) \hookrightarrow H_q^!(X; G) \twoheadrightarrow \text{Hom}(H_!^qX, G)$$

Die lokalendliche Homologie kann man sogar für beliebige topologische Räume sinnvoll definieren als

$$H_q^!(X)_{\text{garb}} := \mathcal{H}^{-q}\mathbb{D}_{c!}c^*\mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Auch sie hat jedoch nur im Fall lokal kompakter Hausdorffräume gute Eigenschaften. Für die garbentheoretische Homologie kenne ich keine sinnvolle Verallgemeinerung über den Fall lokal kompakter homologisch kompaktendlicher Hausdorffräume hinaus.

6.2.4 (**Vergleichsisomorphismen zur singulären Theorie**). Um die obigen Definitionen zu motivieren und mit Anschauung zu füllen, diskutiere ich Vergleichsisomorphismen zur singulären Theorie.

**Kohomologie:** Einen Vergleichsisomorphismus  $H^q(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H^q(X)_{\text{sing}}$  haben wir bereits in [TG] 5.1.4 für jeden lokal singulärzyklischen Raum konstruiert;

**Kompakte Kohomologie:** Einen Isomorphismus  $H_!^q(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H_!^q(X)_{\text{sing}}$  haben wir bereits in [TG] 5.1.21 für jeden lokal singulärzyklischen lokal kompakten Hausdorffraum konstruiert;

**Relative Kohomologie:** Gegeben seien ein lokal singulärzyklischer Raum  $X$  mit  $i : A \hookrightarrow X$  der Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und  $a$  der konstanten Abbildungen von  $A$  auf den einpunktigen Raum. Aus [TG] 5.1.20 kennen wir den zweiten Isomorphismus der Sequenz

$$\mathcal{H}^q a_* i^! \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} H_A^q(X; \mathbb{Z})_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H^q(X, X \setminus A; \mathbb{Z})_{\text{sing}}$$

Den ersten dieser Isomorphismen kennen wir aus 5.2.3.

Wir vereinbaren, daß ein topologischer Raum  $X$  **polyederähnlich** heißt, wenn er lokal kompakt ist und es es darin eine konfinale Folge von Kompakta  $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset X$  gibt derart, daß die relative singuläre Homologie  $H_q(X, X \setminus K_n)_{\text{sing}}$  für alle  $q$  und  $n$  endlich erzeugt ist.

**Homologie:** Einen Isomorphismus  $H_q(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H_q(X)_{\text{sing}}$  konstruieren wir in 6.4.28 für jeden lokal singulärzyklischen lokal polyederähnlichen homologisch kompaktendlichen Hausdorffraum;

**Lokalendliche Homologie:** Einen Isomorphismus  $H_q^!(X)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H_q^!(X)_{\text{sing}}$  konstruieren wir ebenfalls in 6.4.28 für jeden lokal singulärzyklischen lokal polyederähnlichen abzählbar basierten homologisch kompaktendlichen Hausdorffraum mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß der Funktor der globalen Schnitte  $\Gamma : \text{Ab}/X \rightarrow \text{Ab}$  endliche homologische Dimension hat.

**Relative Homologie:** Gegeben  $X$  ein lokal singulärzyklischer lokal polyederähnlicher homologisch kompaktendlicher Hausdorffraum und  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und  $c : X \rightarrow \text{top}$  sowie  $a : A \rightarrow \text{top}$  die jeweils einzige Abbildung konstruieren wir in 6.4.29 einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathcal{H}^{-q} a_! i^* c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} = \mathbb{H}_1^{-q}(A; \omega_X) \xrightarrow{\sim} H_q(X, X \setminus A; \mathbb{Z})_{\text{sing}}$$

Für die reduzierten Theorien liefern unsere ausgezeichneten Isomorphismen der nichtreduzierten Theorien unmittelbar ausgezeichnete Isomorphismen

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(X)_{\text{sing}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q}(\text{Keg}(c_! c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{top}})[-1]) \\ \tilde{H}^q(X)_{\text{sing}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q(\text{Keg}(\mathbb{Z}_{\text{top}} \rightarrow c_* c^* \mathbb{Z}_{\text{top}})) \end{aligned}$$

Die Abbildungskegel darin sind über der Koeinheit beziehungsweise Einheit der jeweiligen Adjunktion zu verstehen.

*Ergänzung 6.2.5.* Mit 5.10.24 ist klar, daß jede abzählbar basierte Mannigfaltigkeit alle für unsere Vergleichssätze geforderten Eigenschaften hat. Es ist auch

klar, daß die Realisierung  $X = \Delta(\mathcal{K})$  eines abzählbaren lokal endlichen endlichdimensionalen Simplizialkomplexes  $\mathcal{K}$  alle für unsere Vergleichssätze geforderten Eigenschaften hat. Man sollte einen Beweis dafür ausschreiben, daß auch die Menge der komplexen Punkte einer separierten komplexen Varietät mit ihrer analytischen Topologie alle für unsere Vergleichssätze geforderten Eigenschaften hat.

6.2.6. Gegeben ein lokal kompakter homologisch kompaktendlicher Hausdorffraum  $X$  liefert die Koeinheit der Adjunktion einen ausgezeichneten Homomorphismus, die **Augmentation**

$$\varepsilon : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

beziehungsweise  $\varepsilon : H_0(X; G) \rightarrow G$ . In der singulären Theorie ist der entsprechende Homomorphismus die von der Augmentation [TS] 3.3.5 induzierte Abbildung, daher die Terminologie.

6.2.7 (**Universelle Koeffiziententheoreme der Garbenkohomologie**). Universelle Koeffiziententheoreme gelten in der Garbenhomologie im allgemeinen nur unter starken Voraussetzungen und sind nicht ganz leicht zu zeigen. Für jede Mannigfaltigkeit  $X$  liefert jedoch mannigfaltiger Rückzug 6.1.8 mit der konstante Abbildung  $c : X \rightarrow \text{top}$  für jede abelsche Gruppe  $G$  einen ausgezeichneten Isomorphismus  $c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \otimes c^* G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} c^! G_{\text{top}}$ . Mit der Projektionsformel erhalten wir daraus einen ausgezeichneten Isomorphismus  $c_! c^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \otimes G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} c_! c^! G_{\text{top}}$ . Mit [TD] 3.9.19 erhalten wir so für jede Mannigfaltigkeit natürliche und unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$H_q(X) \otimes G \hookrightarrow H_q(X; G) \twoheadrightarrow H_{q-1}(X) * G$$

in der Garbenhomologie. Weiter ist für Mannigfaltigkeiten  $c^! \mathbb{Z}_{\text{top}}$  starr und wir erhalten mit relativer Verdierdualität und ?? und der vorhergehenden Beschreibung von  $c^! G_{\text{top}}$  in vereinfachter Notation ausgezeichnete Isomorphismen

$$(c_! c^! \mathbb{Z} \rightrightarrows G) \xrightarrow{\sim} c_* (c^! \mathbb{Z} \rightrightarrows c^! G) \xrightarrow{\sim} c_* ((c^! \mathbb{Z})^* \otimes (c^! \mathbb{Z}) \otimes c^* G) \xrightarrow{\sim} c_* c^* G$$

Mit dem abstrakten universellen Koeffiziententheorem [TD] 3.9.20 erhalten wir so wie in ?? für jede abelsche Gruppe  $G$  und jede Mannigfaltigkeit  $X$  auch für die Garbenhomologie und -kohomologie natürliche und unnatürlich spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\text{Ext}(H_{q-1} X, G) \hookrightarrow H^q(X; G) \twoheadrightarrow \text{Hom}(H_q X, G)$$

6.2.8. Im folgenden besprechen wir einige Funktorialitäten, die aus der Verdierdualität abgeleitet werden können, ohne daß sie darin explizit vorkommt. Das

Prinzip ist immer dasselbe. Gegeben eine  $d$ -mannigfaltige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  erinnern wir aus 6.1.6 die lokal zur konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$  isomorphe relative Orientierungsgarbe  $\text{or}_f := f^! \mathbb{Z}_Y[-d]$ . Für sie liefert 6.1.8 ausgezeichnete natürliche Isomorphismen

$$f^! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{or}_f[d] \otimes f^* \mathcal{F}$$

Im Spezialfall einer 0-mannigfaltigen alias étalen separierten Abbildung liefert 5.10.2 sogar eine ausgezeichnete Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*$  alias einen ausgezeichneten Isomorphismus  $\text{or}_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$ . Im allgemeinen heißt eine mannigfaltige Abbildung  $f$  **orientierbar**, wenn es einen derartigen Isomorphismus gibt, und die Wahl eines derartigen Isomorphismus heißt dann eine **Orientierung** unserer Abbildung  $f$ .

**6.2.9 (Funktorialitäten der Kohomologie).** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und die konstante Abbildung  $a : X \rightarrow \text{top}$  haben wir

$$H^q(X) = \mathcal{H}^q a_* a^* \mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Das **Zurückholen** unter einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  auf der Garbenkohomologie können wir beschreiben als eine Konsequenz der Einheit der Adjunktion  $\text{id} \Rightarrow f_* f^*$  mit der Notation  $b : Y \rightarrow \text{top}$  für die konstante Abbildung vermittelt des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^q b_* b^* \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q b_* f_* f^* b^* \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^q a_* a^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ H^q(Y) & \longrightarrow & & & H^q(X) \end{array}$$

In der de-Rham-Theorie kann es nach [TG] 5.4.10 durch das Zurückholen glatter Differentialformen beschrieben werden. Im Spezialfall einer eigentlichen separierten étalen Abbildung alias endlichen Überlagerung  $f$  können wir auch ein **Vorschieben** alias **Summation über die Fasern** auf der Kohomologie erklären, indem wir  $f_! = f_*$  beachten und unsere ausgezeichnete Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*$  aus 5.10.2 und mit der Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \Rightarrow \text{id}$  unser Vorschieben erklären vermittelt des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^q a_* a^* \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^q b_* f_! f^! b^* \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q b_* b^* \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ H^q(X) & \longrightarrow & & & H^q(Y) \end{array}$$

Gegeben allgemeiner eine eigentliche  $d$ -mannigfaltige und orientierte Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  liefert dieselbe Konstruktion mit 6.2.8 analog einen ausgezeichneten Morphismus

$$H^q(X) \rightarrow H^{q-d}(Y)$$

Er heißt die **Integration über die Fasern**, da er in der de-Rham-Theorie durch Integration über die Fasern im Sinne von ?? berechnet werden kann. Noch allgemeiner haben wir für eine beliebige stetige Abbildung das Zurückholen  $H^q(Y; \mathcal{G}) \rightarrow H^q(X; f^*\mathcal{G})$  und für eine beliebige eigentliche  $d$ -mannigfaltige Abbildung eine Integration über die Fasern  $H^q(X; f^*\mathcal{G} \otimes \text{or}_f) \rightarrow H^{q-d}(Y; \mathcal{G})$ .

6.2.10 (**Funktorialitäten der kompakten Kohomologie**). Sei  $X$  ein lokal kompakter Hausdorffraum. Die kompakte Kohomologie von  $X$  ist

$$H_!^q(X) = \mathcal{H}^q_{a_!a^*} \mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  eine abgeschlossene Einbettung oder allgemeiner eine eigentliche Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen erhalten wir wegen  $f_! = f_*$  aus der Einheit der Adjunktion  $\text{id} \Rightarrow f_* f^*$  das **abgeschlossene** oder allgemeiner **eigentliche Zurückholen**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q_{b_!b^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q_{b_!f_!f^*b^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q_{a_!a^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & \parallel \\ H_!^q(Y) & \longrightarrow & H_!^q(X) \end{array}$$

In der de-Rham-Theorie kann es nach [TG] 5.4.20 durch das Zurückholen glatter kompakt getragener Differentialformen beschrieben werden. Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  eine offene Einbettung oder allgemeiner eine étale Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen liefert dahingegen unsere ausgezeichnete Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*$  aus 5.10.2 zusammen mit der Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \Rightarrow \text{id}$  die **Ausdehnung durch Null** und allgemeiner **Summation über die Fasern**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q_{a_!a^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q_{b_!f_!f^*b^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q_{b_!b^*} \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & \parallel \\ H_!^q(X) & \longrightarrow & H_!^q(Y) \end{array}$$

Gegeben allgemeiner eine  $d$ -mannigfaltige und orientierte Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  liefert dieselbe Konstruktion mit 6.2.8 analog einen ausgezeichneten Morphismus

$$H_!^q(X) \rightarrow H_!^{q-d}(Y)$$

Er heißt die **Integration über die Fasern**, da er in der de-Rham-Theorie durch Integration über die Fasern im Sinne von ?? berechnet werden kann. Noch allgemeiner haben wir für eine eigentliche stetige Abbildung von lokal kompakten Hausdorffräumen das Zurückholen  $H_!^q(Y; \mathcal{G}) \rightarrow H_!^q(X; f^*\mathcal{G})$  und für jede  $d$ -mannigfaltige Abbildung eine Integration über die Fasern  $H_!^q(X; f^*\mathcal{G} \otimes \text{or}_f) \rightarrow H_!^{q-d}(Y; \mathcal{G})$ .

6.2.11 (**Funktorialitäten der lokalendlichen Homologie**). Sei  $X$  ein lokal kompakter homologisch kompaktendlicher Hausdorffraum. Die lokalendliche Homologie von  $X$  erhalten wir als

$$H_q^!(X) = \mathcal{H}^{-q} a_* a^! \mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Gegeben eine abgeschlossene Einbettung oder allgemeiner eine eigentliche lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen weiteren derartigen Raum erhalten wir das **eigentliche Verschieben** für die lokalendliche Homologie aus der Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \Rightarrow \text{id}$  mit  $f_! = f_*$  als die Komposition

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{-q} a_* a^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^{-q} b_* f_* f^! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \longrightarrow \mathcal{H}^{-q} b_* b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & \parallel \\ H_q^!(X) & \longrightarrow & H_q^!(Y) \end{array}$$

Gegeben eine offene Einbettung oder allgemeiner eine étale Abbildung  $f$  liefert dahingegen unsere ausgezeichnete Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\cong} f^*$  aus 5.10.2 zusammen mit der Einheit der Adjunktion  $\text{id} \Rightarrow f_* f^*$  das **étale Zurückholen** auf der lokalendlichen Homologie als die Komposition

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{-q} b_* b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-q} b_* f_* f^! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} a_* a^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & \parallel \\ H_q^!(Y) & \longrightarrow & H_q^!(X) \end{array}$$

Ist allgemeiner  $f$  eine  $d$ -mannigfaltige orientierte Abbildung, so daß wir einen ausgezeichneten Isomorphismus  $f^! \xrightarrow{\cong} f^*[d]$  zur Verfügung haben, so ergibt sich in derselben Weise für die lokalendliche Homologie das **mannigfaltige Zurückholen**

$$H_q^!(Y) \rightarrow H_{q+d}^!(X)$$

Ist  $A \looparrowright Y$  eine orientierte Mannigfaltigkeit, so bildet es etwa das Bild  $z_A \in H_q^!(Y)$  des Fundamentalzykels von  $A$  auf das Bild  $z_{f^{-1}(A)} \in H_{q+d}^!(X)$  des Fundamentalzykels von  $f^{-1}(A)$  ab, das wir dazu mit der durch die Orientierungen von  $f$  und  $A$  bestimmten Verknüpfungsorientierung 6.1.9 zu versehen haben, vergleiche 6.2.13.

6.2.12 (**Funktorialitäten der Homologie**). Sei  $X$  ein lokal kompakter homologisch kompaktendlicher Hausdorffraum und  $a : X \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung. Die Homologie von  $X$  wird in der Garbenkohomologie erklärt als

$$H_q(X) = \mathcal{H}^{-q} a_! a^! \mathbb{Z}_{\text{top}}$$

Gegeben eine abgeschlossene Einbettung oder allgemeiner eine eigentliche lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen weiteren derartigen Raum erklären wir das **Vorschieben unter  $f$**  mit Hilfe der Koeinheit der Adjunktion  $f_! f^! \Rightarrow \text{id}$  als die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^{-q} a_! a^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^{-q} b_! f_! f^! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-q} b_! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ \mathrm{H}_q(X) & \longrightarrow & & \longrightarrow & \mathrm{H}_q(Y) \end{array}$$

Im Spezialfall einer eigentlichen separierten étalen Abbildung alias endlichen Überlagerung  $f$  können wir auch ein **eigentliches étales Zurückholen** auf der Homologie erklären, indem wir  $f_! = f_*$  beachten und von unserer ausgezeichneten Isotransformation  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*$  nach 5.10.2 ausgehen und mit der Einheit der Adjunktion  $\text{id} \Rightarrow f_* f^*$  unser Zurückholen erklären vermittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^{-q} b_! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-q} b_! f_! f^! b^! \mathbb{Z}_{\text{top}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}^{-q} a_! a^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \\ \parallel & & & & \parallel \\ \mathrm{H}_q(Y) & \longrightarrow & & \longrightarrow & \mathrm{H}_q(X) \end{array}$$

Wir kennen diese Abbildungen in der singulären Theorie bereits aus [TS] 1.3.16 und hatten sie dort „Transferabbildungen“ genannt. Ist allgemeiner  $f$  eine eigentliche  $d$ -mannigfaltige orientierte Abbildung, so daß wir einen ausgezeichneten Isomorphismus  $f^! \xrightarrow{\sim} f^*[d]$  zur Verfügung haben, so erhalten wir ebenso für die Homologie das **eigentliche mannigfaltige Zurückholen**

$$\mathrm{H}_q(Y) \rightarrow \mathrm{H}_{q+d}(X)$$

Gegeben eine kompakte orientierte  $q$ -Mannigfaltigkeit  $A \looparrowright Y$  bildet es etwa das Bild ihres Fundamentalzykels  $z_A \in \mathrm{H}_q(Y)$  ab auf das Bild des Fundamentalzykels  $z_{f^{-1}(A)} \in \mathrm{H}_{q+d}(X)$  ihres Urbilds  $f^{-1}(A) \looparrowright X$ , das wir dazu mit der durch die Orientierungen von  $f$  und  $A$  bestimmten Verknüpfungsorientierung 6.1.9 zu versehen haben, vergleiche 6.2.14.

## Übungen

*Übung 6.2.13.* (Ich habe sie noch nicht gemacht.) Gegeben ein kartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{p} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$



alias  $fp = qg$  von lokal kompakten homologisch kompaktendlichen Hausdorffräumen mit  $d$ -mannigfaltigem orientiertem  $f$  und der zurückgezogenen Orientierung 6.1.10 auf  $g$  und  $p, q$  eigentliche lesb-Abbildungen kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{n+d}^! W & \longrightarrow & H_{n+d}^! X \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n^! Z & \longrightarrow & H_n^! Y \end{array}$$

mit dem mannigfaltigen Zurückholen in den Vertikalen und dem eigentlichen Verschieben in den Horizontalen. Ebenso kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_!^n W & \longleftarrow & H_!^n X \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_!^{n-d} Z & \longleftarrow & H_!^{n-d} Y \end{array}$$

mit dem eigentlichen Zurückholen in den Horizontalen und der Integration über die Fasern in den Vertikalen.

*Übung 6.2.14.* (Ich habe sie noch nicht gemacht.) Gegeben ein kartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{p} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

alias  $fp = qg$  von lokal kompakten homologisch kompaktendlichen Hausdorffräumen mit eigentlichem  $d$ -mannigfaltigen orientierten  $f$  und der zurückgezogenen Orientierung 6.1.10 auf  $g$  und  $p, q$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{n+d} W & \longrightarrow & H_{n+d} X \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n Z & \longrightarrow & H_n Y \end{array}$$

mit dem eigentlichen mannigfaltigen Zurückholen in den Vertikalen und dem Verschieben in den Horizontalen. Ebenso kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n W & \longleftarrow & H^n X \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{n-d} Z & \longleftarrow & H^{n-d} Y \end{array}$$

mit dem Zurückholen in den Horizontalen und der Integration über die Fasern in den Vertikalen.

*Übung 6.2.15.* Gegeben  $X = U \sqcup Z$  ein lokal kompakter Hausdorffraum mit einer Zerlegung in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge konstruiere man die lange exakte Sequenz der lokalendlichen Homologie

$$\dots \rightarrow H_q^!(Z) \rightarrow H_q^!(X) \rightarrow H_q^!(U) \rightarrow H_{q-1}^!(Z) \rightarrow \dots$$

### 6.3 Schnittpaarung und Poincaré-Dualität

6.3.1 (**Poincarédualität als Verdierdualität**). Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $X$  der Dimension  $m$  und eine abelsche Gruppe  $G$  erinnere ich an den **Poincaré-Isomorphismus**

$$P = P_X : H_q(X; G) \xrightarrow{\sim} H_1^{m-q}(X; \text{or}_X(G))$$

für die singuläre Homologie aus [TG] 5.1.25. Im Rahmen der sechs Funktoren erhalten wir ihn, diesmal für die Garbenhomologie und Garbenkohomologie, als die Komposition von natürlichen Isomorphismen

$$H_q(X; G) = \mathcal{H}^{-q} c_! c^! G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} c_! \text{or}_X(G)[m] \xrightarrow{\sim} H_1^{m-q}(X; \text{or}_X(G))$$

aus der Beschreibung der dualisierenden Garbe einer Mannigfaltigkeit durch einen ausgezeichneten Isomorphismus  $c^! G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} \text{or}_X(G)[m]$  nach 5.10.14 und 6.1.8. Die Poincaré-Isomorphismen sind funktoriell in dem Sinne, daß für eine stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten  $f : X \rightarrow Y$  mit  $m = \dim X$  und  $n = \dim Y$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X; G) & \xrightarrow{\sim} & H_1^{m-q}(X; \text{or}_X(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(Y; G) & \xrightarrow{\sim} & H_1^{n-q}(Y; \text{or}_Y(G)) \end{array}$$

kommutiert mit der rechten Vertikalen, die von dem von  $\omega_X(G) \xrightarrow{\sim} f^! \omega_Y(G)$  induzierten Morphismus  $f_! \text{or}_X(G) \rightarrow \text{or}_Y(G)[n - m]$  herkommt. Ersetzen wir oben  $c_!$  durch  $c_*$ , so erhalten wir in derselben Weise natürliche Isomorphismen

$$P^! = P_X^! : H_q^!(X; G) \xrightarrow{\sim} H^{m-q}(X; \text{or}_X(G))$$

Wir nennen sie die **dualisierten Poincaré-Isomorphismen**, da sie im Fall von Körperkoeffizienten durch Dualisieren aus den gewöhnlichen Poincaré-Isomorphismen erhalten werden können. Sie gelten für allgemeine Mannigfaltigkeiten, wenn wir die lokalendliche Homologie links im garbentheoretischen Sinne verstehen. Andernfalls benötigen wir für den entsprechenden Vergleichssatz und auch für [TS] 7.3.24 die Eigenschaft „abzählbar basiert“. Unsere dualisierten Poincaré-Isomorphismen  $P^!$  haben analoge Funktorialitätseigenschaften wie unsere Poincaré-Isomorphismen, diesmal aber nur für eigentliches  $f$ . Wir erhalten also in

Formeln ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q^!(X; G) & \xrightarrow{\sim} & H^{m-q}(X; \text{or}_X(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q^!(Y; G) & \xrightarrow{\sim} & H^{n-q}(Y; \text{or}_Y(G)) \end{array}$$

Im Fall von kompaktem  $X$  schließlich haben wir  $P_X^! = P_X$ .

**6.3.2 (Starke dualisierte Poincaré-Isomorphismen).** Seien  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit und  $G$  eine abelsche Gruppe und  $a : A \rightarrow \text{top}$  sowie  $c : X \rightarrow \text{top}$  die konstanten Abbildungen. Unter diesen Annahmen haben wir in der Garbenkohomologie natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_q^!(A; G) &= \mathcal{H}^{-q} a_* a^! G_{\text{top}} && \text{nach unserer Definition 6.2.1} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} a_* i^! c^! G_{\text{top}} && \text{wegen } c \circ i = a \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q} a_* i^! \text{or}_X(G)[m] && \text{wegen 5.10.14} \\ &\xrightarrow{\sim} H_A^{m-q}(X; \text{or}_X(G)) && \text{nach 5.2.3} \end{aligned}$$

Ist zusätzlich  $X$  orientierbar und eine Orientierung alias ein Isomorphismus  $G_X \xrightarrow{\sim} \text{or}_X(G)$  ausgezeichnet, so können wir das nach 6.2.4 verlängern zu einem Isomorphismus, der **starken dualisierten Poincaré-Dualität**

$$H_q^!(A; G)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H^{m-q}(X, X \setminus A; G)_{\text{sing}}$$

Ist  $A$  auch noch kompakt, so haben wir zusätzlich  $H_q(A; G)_{\text{garb}} \xrightarrow{\sim} H_q^!(A; G)_{\text{garb}}$ . Im Fall  $A = X$  erhalten wir unsere dualisierten Poincaré-Isomorphismen aus 6.3.1.

**6.3.3 (Starke Poincaré-Isomorphismen).** Seien  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit und  $G$  eine abelsche Gruppe und  $a : A \rightarrow \text{top}$  sowie  $c : X \rightarrow \text{top}$  die konstanten Abbildungen. Unter diesen Annahmen haben wir in der Garbenkohomologie natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_q^!(A; \text{or}_X(G)) &= \mathcal{H}^q a_! i^* \text{or}_X(G) && \text{nach unseren Definitionen,} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q a_! i^* c^! G_{\text{top}}[-n] && \text{wegen 5.10.14,} \\ &\xrightarrow{\sim} H_{n-q}(X, X \setminus A; G)_{\text{sing}} && \text{wegen 6.2.4.} \end{aligned}$$

Im Fall  $A = X$  erhalten wir unsere Poincaré-Isomorphismen aus 6.3.1. Im Fall  $X = \mathbb{R}^n$  erhalten wir die Alexander-Dualität aus [TG] 5.1.22. Gegeben eine  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  mit einer abgeschlossenen Teilmenge  $A \subsetneq X$  konstruieren

wir in [TSF] 6.4.29 diesmal nur der Einfachheit der Notation halber ohne Koeffizienten sogar ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_1^q(X \setminus A; \text{or}_X) & \rightarrow & H_1^q(X; \text{or}_X) & \rightarrow & H_1^q(A; \text{or}_X) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ \dots & \rightarrow & H_{n-q}(X \setminus A) & \rightarrow & H_{n-q}X & \rightarrow & H_{n-q}(X, X \setminus A) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

mit den gewöhnlichen Poincaré-Isomorphismen in den beiden linken Vertikalen und dem starken Poincaré-Isomorphismus in der rechten Vertikalen. Im Fall  $q = 0$  spezialisiert er zu unserem Satz [TS] 4.3.4 über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten. Ebenso unmittelbar erhalten wir Proposition [TS] 3.3.9 über das Verschwinden der reduzierten Homologie des Komplements  $S^n \setminus A$  eines Hyperkubus  $A$  in einer Sphäre. Der Rückzug liefert ja offensichtlich Surjektionen  $H_1^q S^n \twoheadrightarrow H_1^q A$  für alle  $q, n$  und diese sind Isomorphismen im Fall  $q \neq n$  und haben im Fall  $q = n$  als Kern eine freie abelsche Gruppe vom Rang Eins. Es folgt  $H_q(S^n \setminus A) = 0$  für  $q \neq 0$  und  $H_0(S^n \setminus A) \cong \mathbb{Z}$  und folglich  $\tilde{H}_q(S^n \setminus A) = 0$  für alle  $q$ .

6.3.4. Gegeben eine orientierte Mannigfaltigkeit  $X$  der Dimension  $n$  entspricht unter dem dualisierten Poincaré-Isomorphismus  $P_X^! : H_q^! X \xrightarrow{\sim} H^{n-q} X$  aus 6.3.1 der Erzeuger  $1 \in H^0 X$  einem ausgezeichneten Element

$$z_X \in H_n^! X$$

Dies Element heißt der **Fundamentalzykel von  $X$** . Sie mögen sich zur Übung überlegen, warum dies Element im kompakten beziehungsweise abzählbar basierten Fall unter dem entsprechenden Vergleichsisomorphismus unserem Fundamentalzykel der singulären Theorie aus [TS] 4.3.2 beziehungsweise [TS] 7.3.12 entspricht.

6.3.5. Gegeben eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  mit einer abgeschlossenen orientierten Untermannigfaltigkeit  $A \triangleleft X$  der Kodimension  $p$  liefert unsere Funktorialität des dualisierten Poincaré-Isomorphismus  $P^!$ , wenn wir mit  $z_A$  auch das Bild des Fundamentalzykels von  $A$  in  $H_{n-p}^!(X)$  notieren, in  $H^p(X)$  die Identität

$$P_X^!(z_A) = \tau_{A \subset X}$$

In Worten entspricht also unter dem dualisierten Poincaré-Isomorphismus von  $X$  der Fundamentalzykel von  $A$  dem Fundamentalkozykel von  $A$  in  $X$  aus 5.10.17. Im Fall, daß  $A$  zusätzlich kompakt ist, bezeichnen wir analog mit  $\bar{z}_A \in H_{n-p}(X)$  das Bild des Fundamentalzykels von  $A$  in der Homologie von  $X$ , und erhalten wir ebenso in  $H^p(X)$  die Identität

$$P_X(\bar{z}_A) = \bar{\tau}_{A \subset X}$$

Erklären wir nun die **Schnittprodukte**

$$\begin{aligned} H_{n-a}^!(X) \times H_{n-b}^!(X) &\rightarrow H_{n-a-b}^!(X) \\ H_{n-a}^!(X) \times H_{n-b}^!(X) &\rightarrow H_{n-a-b}^!(X) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

mit Hilfe unserer **Poincaré-Isomorphismen** und des **cup-Produkts** durch die Vorschriften  $P^!(\alpha \cdot \beta) = P^!(\alpha) \cup P^!(\beta)$  beziehungsweise  $P(\alpha \cdot \beta) = P(\alpha) \cup P(\beta)$ , so liefern unsere Erkenntnisse 5.10.21 über das cup-Produkt der Fundamentalkozykel zweier orientierter sich transversal schneidender abgeschlossener orientierter Untermannigfaltigkeiten  $A, B \subset X$  die Identität

$$z_A \cdot z_B = z_{A \cap B}$$

in der lokalendlichen Homologie und im Fall von kompaktem  $B$  etwas feiner die Identität

$$z_A \cdot \bar{z}_B = \bar{z}_{A \cap B}$$

in der Homologie von  $X$ . In Worten ist also bei transversalem Schnitt das Schnittprodukt der Fundamentalkozykel der Fundamentalkozykel des Schnitts, den wir uns dabei mit der Schnittorientierung aus 5.10.21 versehen denken.

6.3.6. Gegeben eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  liefert unser **Schnittprodukt** gefolgt von der Augmentation eine bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} H_{n-q}^!(X) \times H_q(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \odot \beta \end{aligned}$$

Sie heißt die **Schnittpaarung**. Gegeben abgeschlossene orientierte sich transversal schneidende Untermannigfaltigkeiten  $A, B \subset X$  der Dimensionen  $n - q, q$  mit  $B$  kompakt liefert 6.3.5 insbesondere die Formel

$$z_A \odot z_B = \varepsilon(z_{A \cap B})$$

Hier ist  $A \cap B$  eine endliche Menge alias kompakte Nullmannigfaltigkeit und die Schnittorientierung darauf ist eine Abbildung  $\eta : A \cap B \rightarrow \{1, -1\}$  und die Augmentierung des zugehörigen Fundamentalkozykels ergibt sich zu

$$\varepsilon(z_{A \cap B}) = \sum_{x \in A \cap B} \eta(x)$$

Schalten wir unserer Schnittpaarung im ersten Eintrag den Inversen des dualisierten Poincaré-Isomorphismus  $P^! : H_{n-q}^!(X) \xrightarrow{\sim} H^q(X)$  vor, so erhalten wir die kanonische Paarung  $H^q(X) \times H_q(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Analoges gilt mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Krings endlicher homologischer Dimension. Im Fall eines Krings der Charakteristik Zwei brauchen wir noch nicht einmal irgendwelche Orientierbarkeiten vorauszusetzen.

6.3.7. Sei  $X$  eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit. Ist  $H_{q-1}(X)$  eine freie abelsche Gruppe, so liefert nach dem universellen Koeffiziententheorem 6.2.7 die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus  $H^q(X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_q(X), \mathbb{Z})$  und damit induziert auch unsere Schnittpaarung einen Isomorphismus

$$H_{n-q}^!(X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_q(X), \mathbb{Z})$$

Analoges gilt für Koeffizienten in einem Körper  $k$ , da dann die totale Homologie eben immer frei ist. Dann also induziert unsere Schnittpaarung einen Isomorphismus

$$H_{n-q}^!(X; k) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(H_q(X; k), k)$$

Im Fall eines Körpers der Charakteristik Zwei brauchen wir noch nicht einmal  $X$  orientiert vorauszusetzen.

*Beispiel 6.3.8.* Im Fall der Zweimannigfaltigkeit  $X := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  ist die erste Homologie  $H_1(X)$  eine freie abelsche Gruppe mit kleinen Zykeln um die ganzen Zahlen als Repräsentanten einer Basis. Dahingegen ist  $H_1^!(X)$  isomorph zu einem Produkt abzählbar vieler Kopien von  $\mathbb{Z}$ . Genauer erhält man die Elemente der ersten lokalendlichen Homologie, indem man die Fundamentalzykel von vertikalen Halbgeraden betrachtet, die von Punkten  $n \in \mathbb{Z}$  nach oben ins Unendliche laufen, und von ihnen geeignet definierte „unendliche Linearkombinationen“ nimmt.

## 6.4 Vergleich mit der singulären Theorie

6.4.1 (**Singuläre Kohomologie als Hyperkohomologie**). Gegeben ein topologischer Raum  $X$  besteht sein Kogrenzkomplex  $\mathcal{G}_X^*$  aus welchen Garben und ist offensichtlich beschränkt gegen die Pfeile. Die offensichtlichen Quasiisomorphismen  $S^*X \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\text{Ket}}(SX) \xleftarrow{\sim} \mathbb{D}_{\text{Ket}}(GX)$  liefern mithin Isomorphismen

$$H^q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^q(X; \mathcal{G}_X^*)$$

6.4.2 (**Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie**). Gegeben ein lokal singulärzyklischer topologischer Raum  $X$  induziert die Augmentation einen Quasiisomorphismus  $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_X^*$ . Die Isomorphismen aus dem vorhergehenden Beweis liefern für lokal singulärzyklisches  $X$  mithin Isomorphismen

$$H^q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

zwischen der singulären Kohomologie und der Garbenkohomologie.

6.4.3 (**Relative singuläre Kohomologie als Hyperkohomologie**). Gegeben ein topologischer Raum mit einer offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^*X & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_{\text{Ket}}(SX) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{D}_{\text{Ket}}(GX) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^*U & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_{\text{Ket}}(SU) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{D}_{\text{Ket}}(GU) \end{array}$$

mit vertikalen Surjektionen und horizontalen Quasiisomorphismen. Für  $C := X \setminus U$  erhalten wir auf den Kernen der Vertikalen eine Sequenz von Quasiisomorphismen

$$S^*(X, X \setminus C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\text{Ket}}(S(X, X \setminus C)) \xleftarrow{\sim} \Gamma_C \mathcal{G}_X^*$$

Durch Übergang zur Kohomologie erhalten wir, da welche Garben nach ?? entfaltet sind für  $\Gamma_C$ , natürliche Isomorphismen

$$H^q(X, X \setminus C)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_C^q(X; \mathcal{G}_X^*)$$

**6.4.4 (Relative singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie).** Gegeben ein lokal singulärzyklischer topologischer Raum  $X$  induziert die Augmentation einen Quasiisomorphismus  $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_X^*$ . Die Isomorphismen aus dem vorhergehenden Beweis liefern für  $C \not\subseteq X$  mithin Isomorphismen

$$H^q(X, X \setminus C)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H_C^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

zwischen der relativen singulären Kohomologie und der Garbenkohomologie mit Träger in  $C$ .

**6.4.5 (Singuläre kompakte Kohomologie als Hyperkohomologie).** Gegeben ein Hausdorffraum  $X$  ist jedes Kompaktum  $K \subset X$  abgeschlossen und durch Übergang zum filtrierenden Kolimes über alle Kompakta in 6.4.3 erhalten wir Quasiisomorphismen

$$S_!^* X \xrightarrow{\sim} \text{colf}_K \mathbb{D}_{\text{Ket}}(S(X, X \setminus K)) \xleftarrow{\sim} \Gamma_! \mathcal{G}_X^*$$

Die Exaktheit filtrierender Kolimites zeigt mit ?? auch, daß welche Garben auf Hausdorffräumen  $\Gamma_!$ -entfaltet sind. Unsere Quasiisomorphismen induzieren also für jeden Hausdorffraum  $X$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$H_!^q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_!^q(X; \mathcal{G}_X^*)$$

**6.4.6 (Singuläre kompakte Kohomologie als Garbenkohomologie).** Gegeben ein lokal singulärzyklischer topologischer Raum  $X$  induziert die Augmentation einen Quasiisomorphismus  $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_X^*$ . Ist er zusätzlich Hausdorff, so liefern die Isomorphismen aus dem vorhergehenden Beweis mithin einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$H_!^q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H_!^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

zwischen der singulären kompakten Kohomologie und der kompakten Garbenkohomologie.

6.4.7. Um Vergleichsisomorphismen zwischen der singulären Homologie und ihren garbenkohomologischen Analoga zu konstruieren, holen wir weiter aus und konstruieren eine Realisierung der dualisierenden Garbe als „Grenzkomplex“. Gegeben ein Raumpaard  $(X, A)$  erklären wir zunächst den Komplex der **relativen Grenzketten**  $G(X, A)$  in Verallgemeinerung von [TG] 5.1.8 als den Kolimes in Bezug auf die Unterteilungsoperatoren

$$G(X, A) := \operatorname{colf} (S(X, A) \xrightarrow{U} S(X, A) \xrightarrow{U} \dots)$$

Die Exaktheit filtrierender Kolimites liefert eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$G(A) \hookrightarrow G(X) \twoheadrightarrow G(X, A)$$

**Satz 6.4.8 (Ausschneidung für Grenzketten).** *Seien  $(X, A)$  ein Raumpaard und  $L \subset A$  eine Teilmenge, deren Abschluß im Inneren von  $A$  liegt, in Formeln  $\bar{L} \subset A^\circ$ . So liefert die Einbettung  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf den Komplexen von relativen Grenzketten*

$$G(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\sim} G(X, A)$$

6.4.9. Ein Vorteil der Grenzketten besteht darin, daß die Ausschneidungsisomorphismen für Grenzketten bereits auf Kettenniveau existieren und nicht erst in der Homologie. Die Arbeit mit Grenzketten benötigt jedoch mehr Kenntnisse in homologischer Algebra, da ich nicht weiß, ob sie einen Komplex von freien abelschen Gruppen bilden. Ich erwarte eher das Gegenteil.

*Beweis.* Wie beim Beweis der Ausschneidung [TS] 2.4.10 betrachten wir die Überdeckung  $X = A \cup (X \setminus L)$ , geben ihr den Namen  $\mathcal{V}$  und bilden ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} S(A \setminus L) & \hookrightarrow & SA \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^\mathcal{V} X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X \setminus L) & \hookrightarrow & SX \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & SX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X \setminus L, A \setminus L) & \twoheadrightarrow & S(X, A) & \twoheadrightarrow & SX/S^\mathcal{V} X \end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die beiden oberen horizontalen Inklusionen die „diagonalen“ Einbettungen  $z \mapsto (z, z)$  sein sollen, und die folgenden Surjektionen die Differenzen  $(x, y) \mapsto x - y$ . Nach dem Neunerlemma ist die untere Horizontale dann auch exakt. Jetzt gehen wir zum filtrierenden Kolimes unter den Unterteilungsoperatoren über und müssen nur zeigen, daß dieser Kolimes bei  $SX/S^\mathcal{V} X$  verschwindet. Das aber haben wir bereits in [TG] 5.1.10 gezeigt.  $\square$



6.4.10. Für jeden topologischen Raum  $X$  erklären wir in Anlehnung an [TS] 7.3.8 den Komplex der **lokalendlichen Grenzketten** als den inversen Limes über alle Kompakta  $K \subset X$  der Grenzketten relativ zu ihrem Komplement

$$G^!X := \limf_K G(X, X \setminus K)$$

Gegeben ein Hausdorffraum mit einer offenen Teilmenge  $U \Subset X$  induzieren die Ausschneidungsisomorphismen  $G(U, U \setminus K) \xrightarrow{\sim} G(X, X \setminus K)$  für Grenzketten im Fall  $K \subset U$  kompakt, die wir in 6.4.8 hergeleitet hatten, Homomorphismen  $G^!X \rightarrow G^!U$  vom „längeren Limes zum kürzeren Limes“. Wir nennen sie die **Restriktionsabbildungen**.

**Definition 6.4.11.** Unter einer **lokalen Prägarbe** auf einem topologischen Raum  $X$  verstehen wir eine Prägarbe von Mengen  $\mathcal{C}$  derart, daß für jede Familie  $\mathcal{U}$  von offenen Teilmengen von  $X$  mit Vereinigung  $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  die Restriktionsabbildungen eine Injektion

$$\mathcal{C}(V) \hookrightarrow \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}(U)$$

liefern, daß also „Schnitte durch ihre Einschränkungen auf die Mengen einer offenen Überdeckung bereits eindeutig festgelegt werden“. Setzen wir  $\mathcal{U} = \emptyset$ , so erkennen wir insbesondere, daß für jede abelsche lokale Prägarbe gilt  $\mathcal{C}(\emptyset) = 0$ .

**Proposition 6.4.12 (Lokalendliche Grenzketten als Garbe).** *Auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  bilden für jedes  $q$  die lokalendlichen Grenzketten  $U \mapsto G_q^!(U)$  für  $U \Subset X$  mit den in 6.4.10 erklärten Restriktionsabbildungen eine Garbe.*

*Beweis.* Wir beginnen mit beliebigen offenen Teilmengen  $V_1, \dots, V_r$  eines beliebigen Raums  $X$  und bilden die in folgender Darstellung vertikal notierte kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} S(\bigcap V_i) & \hookrightarrow & \bigoplus_i S V_i & \rightarrow & \bigoplus_{i < j} S^\mathcal{V}(V_i \cup V_j) & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ S X & \hookrightarrow & \bigoplus_i S X & \rightarrow & \bigoplus_{i < j} S X & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ S(X, \bigcap V_i) & \hookrightarrow & \bigoplus_i S(X, V_i) & \rightarrow & \bigoplus_{i < j} S X / S^\mathcal{V}(V_i \cup V_j) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

mit der Notation  $\mathcal{V}$  für die Überdeckung durch die  $V_i$  und  $S^\mathcal{V}$  die entsprechenden feinen Ketten. Beide oberen Zeilen sind exakt, also gilt dasselbe auch für die untere Zeile. Gegeben ein offene Überdeckung  $\mathcal{V}$  einer Teilmenge  $A \subset X$  zeigt nun die kurze exakte Sequenz  $SA/S^\mathcal{V}A \hookrightarrow SX/S^\mathcal{V}A \rightarrow SX/SA$  mit [TG] 5.1.10, daß die zweite Abbildung im Kolimes unter iterierter Unterteilung zu einem Isomorphismus  $\text{colf } SX/S^\mathcal{V}A \xrightarrow{\sim} \text{colf } SX/SA$  wird. So erhalten wir aus der Exaktheit

der unteren Zeile unseres Diagramms im Kolimes unter iterierter Unterteilung die Exaktheit der Sequenz von relativen Grenzketten

$$G(X, \bigcap V_i) \hookrightarrow \bigoplus_i G(X, V_i) \rightarrow \bigoplus_{i < j} G(X, V_i \cup V_j) \rightarrow \dots$$

Sei nun  $X$  Hausdorff. Gegeben endlich viele Kompakta  $K_1, \dots, K_r \subset X$  mit Vereinigung  $K$  folgt, daß wir mit den natürlichen Abbildungen eine linksexakte Sequenz

$$G(X, X \setminus K) \hookrightarrow \bigoplus_i G(X, X \setminus K_i) \rightarrow \bigoplus_{i < j} G(X, X \setminus (K_i \cap K_j))$$

erhalten. Sei nun  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  eine offene Überdeckung. Ist  $a \in G^!X$  von Null verschieden, so gibt es  $K \subset X$  kompakt derart, daß das Bild von  $a$  in  $G(X, X \setminus K)$  nicht Null ist. Weiter gibt es  $U_1, \dots, U_r \in \mathcal{U}$ , die  $K$  überdecken, und nach [TS] 7.2.7 gibt es für  $X$  lokal kompakt auch Kompakta  $K_i \subset U_i$  mit Vereinigungsmenge  $K$ . Nach unserer linksexakten Sequenz kann  $a$  auch nicht in allen  $G(U_i, U_i \setminus K_i) \xrightarrow{\sim} G(X, X \setminus K_i)$  auf Null abgebildet werden, also erst recht nicht in allen  $G^!U_i$ . Das zeigt bereits, daß die Prägarbe der lokalendlichen Grenzketten lokal ist. Nun gilt es noch, eine Familie von zusammenpassenden  $a_U \in G^!U$  für  $U \in \mathcal{U}$  zu einem  $a \in G^!X$  zu verkleben. Sie läßt sich aber nach dem Vorhergehenden für jedes Kompaktum  $K \subset X$  jeweils auf genau eine Weise zu einem Element von  $G(X, X \setminus K)$  verkleben und diese Elemente bilden dann zusammen die gesuchte Verklebung im inversen Limes.  $\square$

**6.4.13 (Umindizierung der Grenzkettengarben).** Die Garbe der lokalendlichen Grenzketten vom Grad  $q$  auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  nenne ich die  **$q$ -te Grenzkettengarbe**

$$\mathcal{G}_{q,X}^! : U \mapsto G_q^!(U)$$

Das Differential geht dabei vom Grad  $q$  zum Grad  $q - 1$  und die Grade werden als untere Indizes notiert. Es ist für das folgende günstiger, die Grade als obere Indizes zu notieren und mit  $(-1)$  zu multiplizieren, also  $\mathcal{G}_X^{q,!} := \mathcal{G}_{-q,X}^!$  zu setzen, so daß wir einen Komplex mit Differentialen in Richtung wachsender oberer Indizes erhalten, der aus dem Negativen kommt und im Grad Null endet. Den Komplex dieser Garben nenne ich den **Komplex der Grenzkettengarben** oder kurz den **Grenzkomplex** und notiere ihn

$$\mathcal{G}_X^!$$

Unsere Konstruktionen liefern für jede offene Einbettung  $j : U \hookrightarrow X$  einen ausgezeichneten Isomorphismus  $\mathcal{G}_U^! \xrightarrow{\sim} j^{(*)} \mathcal{G}_X^!$ .

**Lemma 6.4.14.** *Die Grenzkettengarben lokal kompakter Hausdorffräume sind kompaktweich.*

*Beweis.* Jeder Schnitt einer abelschen Garbe auf einem relativ Hausdorffschen Kompaktum  $K \subset X$  läßt sich auf eine offene Umgebung  $U \supseteq X$  desselben fortsetzen. Wir finden ein Kompaktum  $L$  mit  $K \subset L^\circ \subset L \subset U$  und unsere Fortsetzung liefert ein  $s \in G(U, U \setminus L)$ , für das wir einen Repräsentanten  $\tilde{s} \in GU$  finden. Dieser hinwiederum liefert uns dann die gewünschte globale Fortsetzung unseres auf  $K$  definierten Schnittes.  $\square$

**Lemma 6.4.15.** *Auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum sind alle kompaktweichen abelschen Garben weich.*

*Beweis.* Sei  $X$  unser Raum. Wir finden eine Überdeckung von  $X$  durch eine aufsteigende Folge  $K_0 \subset K_1 \subset \dots$  von Kompakta derart, daß sogar gilt  $K_i \subset K_{i+1}^\circ$  für alle  $i$ . Sei nun  $\mathcal{F}$  unsere kompaktweiche Garbe und  $Z \supseteq X$  abgeschlossen und  $s \in \Gamma(Z; \mathcal{F})$  ein Schnitt über  $Z$ . Sicher können wir  $s|_{(K_0 \cap Z)}$  zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger  $g_0 \in \Gamma_!(X; \mathcal{F})$  ausdehnen. Dann können wir den Nullschnitt auf  $K_0$  mit dem Schnitt  $(s - g_0)$  auf  $K_1 \cap Z$  verkleben zu einem Schnitt  $s_1$  auf  $K_0 \cup (K_1 \cap Z)$  und können diesen ausdehnen zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger  $g_1 \in \Gamma_!(X; \mathcal{F})$ . Dann gilt  $s = g_0 + g_1$  auf  $K_1 \cap Z$  und  $g_1 = 0$  auf  $K_0$ . Dann können wir den Nullschnitt auf  $K_1$  mit dem Schnitt  $s - g_0 - g_1$  auf  $K_2 \cap Z$  verkleben zu einem Schnitt  $s_2$  auf  $K_1 \cup (K_2 \cap Z)$  und können diesen ausdehnen zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger  $g_2 \in \Gamma_!(X; \mathcal{F})$ . Dann gilt  $s = g_0 + g_1 + g_2$  auf  $K_2 \cap Z$  und  $g_2 = 0$  auf  $K_1$ . So machen wir immer weiter. Da alle  $g_{i+1}$  jeweils auf  $K_i$  verschwinden und kompakten Träger haben, ist die Summe  $\tilde{s} := \sum_{i=0}^{\infty} g_i$  ein sinnvoll definierter globaler Schnitt  $\tilde{s} \in \Gamma(X; \mathcal{F})$ . Nach Konstruktion setzt er unseren Schnitt  $s$  fort.  $\square$

**6.4.16 (Lokalendliche singuläre Homologie durch Grenzketten).** Ich erinnere an die lokalendliche Homologie aus [TS] 7.3.2. Gegeben ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  können wir in der Menge aller seiner Kompakta eine konfinale Folge alias ein konfinales abzählbares Teilsystem finden. Nach [TS] 7.1.52 induzieren dann die offensichtlichen natürlichen Kettenabbildungen  $S^!X \rightarrow G^!X$  auf der Homologie Isomorphismen

$$H_q^!(X)_{\text{sing}} = \mathcal{H}_q S^!X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q G^!X$$

Um [TS] 7.1.52 anzuwenden zu dürfen, bemerken wir, daß für Kompakta  $K \subset L \subset X$  die natürlichen Abbildungen Surjektionen  $S_q(X, X \setminus L) \twoheadrightarrow S_q(X, X \setminus K)$  und dann auch Surjektionen  $G_q(X, X \setminus L) \twoheadrightarrow G_q(X, X \setminus K)$  liefern.

**6.4.17 (Offener Rückzug der lokalendlichen singulären Homologie).** Gegeben  $j : U \hookrightarrow Y$  eine offene Einbettung abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffräume induzieren die Restriktionsabbildungen 6.4.10 für lokalendliche

Grenzketten vermittelt der in 6.4.16 erklärten Isomorphismen Abbildungen, den **offenen Rückzug**

$$H_q^!(X)_{\text{sing}} \rightarrow H_q^!(U)_{\text{sing}}$$

**6.4.18 (Lokalendliche singuläre Homologie als Hyperkohomologie).** Gegeben ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  mit  $\Gamma : \text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}$  von endlicher homologischer Dimension konstruieren wir nun einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$H_q^!(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!)$$

zwischen seiner singulären lokalendlichen Homologie und der Hyperkohomologie des Grenzkomplexes. Wir erinnern dazu den Isomorphismus  $H_q^!(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-q}\Gamma(X; \mathcal{G}_X^!)$  aus 6.4.16. Da der Grenzkomplex  $\mathcal{G}_X^!$  nach 6.4.14 aus kompaktheichen und damit nach 6.4.15 sogar aus weichen Garben besteht, liefert die Annahme endlicher homologischer Dimension mit [TD] 3.7.4 einen Isomorphismus  $\mathcal{H}^{-q}\Gamma(X; \mathcal{G}_X^!) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!)$ . Der gesuchte Isomorphismus ergibt sich als deren Verknüpfung. Ist zusätzlich  $j : U \hookrightarrow X$  eine offene Einbettung mit  $j_* : \text{Ab}/_U \rightarrow \text{Ab}/_X$  von endlicher homologischer Dimension, so kommutiert offensichtlich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q^!(X)_{\text{sing}} & \longrightarrow & \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q^!(U)_{\text{sing}} & \longrightarrow & \mathbb{H}^{-q}(U; \mathcal{G}_U^!) \end{array}$$

mit den von unseren Vergleichsisomorphismen induzierten Horizontalen und dem offenen Rückzug 6.4.17 in der linken Vertikale und der vom Isomorphismus  $\mathcal{G}_U^! \xrightarrow{\sim} j^*\mathcal{G}_X^!$  aus 6.4.13 mittels der Sequenz von ansonsten offensichtlichen Morphismen in der derivierten Kategorie

$$\text{fin}_{X^*} \mathcal{G}_X^! \rightarrow \text{fin}_{X^*} j_* j^* \mathcal{G}_X^! \rightarrow \text{fin}_{X^*} j_* \mathcal{G}_U^! \xrightarrow{\sim} \text{fin}_{U^*} \mathcal{G}_U^!$$

durch Anwenden von  $\mathcal{H}^q$  induzierten rechten Vertikalen.

**Lemma 6.4.19 (Kompakte Schnitte von Grenzkettengarben).** Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  liefern die offensichtlichen Abbildungen einen Isomorphismus

$$GX \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(X; \mathcal{G}_X^!)$$

zwischen dem Komplex seiner Grenzketten und dem Komplex der Schnitte mit kompaktem Träger seiner Grenzkettengarben.

*Beweis.* Die Injektivität unserer Abbildung scheint mir offensichtlich. Es bleibt, deren Surjektivität zu zeigen. Ein Schnitt  $s \in \Gamma(X; \mathcal{G}_X^!)$  mit Träger in einem Kompaktum  $L \subset X$  ist nun per definitionem eine verträgliche Familie von Elementen

$s_K \in G(X, X \setminus K)$  für  $K \subset X$  kompakt mit  $s_K = 0$  falls  $K \cap L = \emptyset$ . Für unser  $L$  finden wir nun sicher  $A, B, C \subset X$  kompakt mit  $L \subset A^\circ \subset A \subset B^\circ \subset B \subset C^\circ$  und dann für unser  $s$  einen Repräsentanten  $\tilde{s}_C \in G(X)$  von  $s_C \in G(X, X \setminus C)$ . Da nun gilt  $\tilde{s}_C \mapsto s_R = 0$  für  $R := B \setminus A^\circ$ , finden wir eine Darstellung  $\tilde{s}_C = t + r$  mit  $t \in G(A^\circ)$  und  $r \in G(X \setminus B)$ . Es reicht nun zu zeigen, daß gilt  $t \mapsto s_K$  für alle  $K \subset X$  kompakt. Das ist richtig für  $K = K_1 \subset B^\circ$  nach Konstruktion. Es ist auch richtig für  $K = K_2$  mit der Eigenschaft  $K \cap A = \emptyset$ , dann liefern beide Seiten eben Null. Gilt es für Kompakta  $K_1$  und  $K_2$ , so folgt es für deren Vereinigung wegen der kurzen exakten Sequenz

$$G(X, X \setminus (K_1 \cup K_2)) \hookrightarrow G(X, X \setminus K_1) \oplus G(X, X \setminus K_2) \twoheadrightarrow G(X, X \setminus (K_1 \cap K_2))$$

Da sich aber nun jedes Kompaktum  $K \subset X$  schreiben läßt als  $K_1 \cup K_2$  mit  $K_1 \subset B^\circ$  und  $K_2 \subset X \setminus A$ , folgt die Behauptung.  $\square$

**6.4.20 (Singuläre Homologie als Hyperkohomologie).** Gegeben ein lokal kompakter homologisch kompaktendlicher Hausdorffraum  $X$  konstruieren wir nun einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$H_q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_!^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!)$$

zwischen seiner singulären Homologie und der kompakten Hyperkohomologie seines Grenzkomplexes. Wir finden ja natürliche Isomorphismen

$$GX \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} \Gamma_!(X; \mathcal{G}_X^!) \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} \text{fin}_{X,(!)} \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} \text{fin}_{X,!} \mathcal{G}_X^!$$

mit Lemma 6.4.19 und unseren Erkenntnissen zum unbeschränkten Derivieren linksexakter Funktoren endlicher homologischer Dimension [TD] 3.7.4. Wenden wir darauf  $\mathcal{H}^{-q}$  an, so ergibt sich der gesuchte Isomorphismus.

**6.4.21 (Morphismen aus Eigvorschüben kompaktweicher Garben).** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von lokal kompakten Hausdorffräumen und eine kompaktweiche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  ist auch  $f_{(!)}\mathcal{F}$  kompaktweich nach 5.1.13 und für  $V \Subset Y$  liefert Basiswechsel 4.1.16 einen ausgezeichneten Isomorphismus  $\Gamma_!(V; f_{(!)}\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(f^{-1}(V); \mathcal{F})$ . Ein Morphismus  $\varphi : f_{(!)}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  in eine Garbe  $\mathcal{G} \in \text{Ab}_{/Y}$  ist also nach ?? dasselbe wie die Vorgabe einer Familie von Gruppenhomomorphismen

$$\varphi_V : \Gamma_!(f^{-1}(V); \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_!(V; \mathcal{G})$$

für  $V \Subset Y$ , die verträglich sind mit den Ausdehnungen durch Null. Man beachte, daß wir hier nicht unsere eigentlichen Opkomorphismen alias Eigmorphismen über  $f$  aus ?? beschreiben, die ja vielmehr Garbenhomomorphismen  $\mathcal{G} \rightarrow f_{(!)}\mathcal{F}$  entsprechen. Ein Student mag prüfen, daß wir für kompaktweiche Garben auf lokal kompakten Hausdorffräumen die oppinvertierte Kofaserung zur Eigopkofaserung beschrieben haben, die wir im Fall étaler separierter Morphismen bereits in [TG] 8.4.8 mit der Garbenfaserung identifiziert hatten.

6.4.22 (**Grenzkomplexvorschub**). Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von lokal kompakten Hausdorffräumen erklären wir einen ausgezeichneten Morphismus von Komplexen

$$\text{gkv} = \text{gkv}_f : f_{(!)}\mathcal{G}_X^! \rightarrow \mathcal{G}_Y^!$$

durch die Vorschrift, daß er unter der Beschreibung von Morphismen durch kompakte Schnitte aus 6.4.21 und der Beschreibung der kompakten Schnitte unserer Grenzkettengarben aus 6.4.19 der Gesamtheit der offensichtlichen Abbildungen  $G(f^{-1}(V)) \rightarrow G(V)$  für  $V \Subset Y$  entspricht. Wir nennen diesen Morphismus den **Grenzkomplexvorschub**. Sind unsere Räume zusätzlich homologisch kompaktendlich oder ist auch nur  $f_{(!)}$  von endlicher homologischer Dimension, so induziert unser Morphismus einen Morphismus

$$\text{gkv} = \text{gkv}_f : f!\mathcal{G}_X^! \rightarrow_{\text{Der}} \mathcal{G}_Y^!$$

Ist  $f$  eine offene Einbettung, so prüft man leicht, daß das genau der Morphismus ist, der unter der Adjunktion unserem Isomorphismus  $\mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim} f^{(*)}\mathcal{G}_Y^!$  aus 6.4.13 entspricht.

6.4.23 (**Natürlichkeit des Homologie-Hyperkohomologie-Vergleichs**). Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von lokal kompakten homologisch kompaktendlichen Hausdorffräumen erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} G(X) & \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} & \Gamma_!(X; \mathcal{G}_X^!) & \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} & \text{fin}_{X,(!)} \mathcal{G}_X^! & \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} & \text{fin}_{X,!} \mathcal{G}_X^! \\ & & & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ & & \downarrow & & \text{fin}_{Y,(!)} f_{(!)}\mathcal{G}_X^! & \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} & \text{fin}_{Y,!} f!\mathcal{G}_X^! \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ G(Y) & \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} & \Gamma_!(Y; \mathcal{G}_Y^!) & \xrightarrow{\sim}_{\text{Ket}} & \text{fin}_{Y,(!)} \mathcal{G}_Y^! & \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} & \text{fin}_{Y,!} \mathcal{G}_Y^! \end{array}$$

mit von unserem Grenzkomplexvorschub  $\text{gkv}$  aus 6.4.22 induzierten Vertikalen im Quadrat unten rechts und der offensichtlichen Vertikale links. Unter unserem Isomorphismus 6.4.20 entspricht also der Vorschub auf der singulären Homologie dem von  $\text{gkv}$  auf der Hyperkohomologie des Grenzkomplexes induzierten Morphismus und wir erhalten die Kommutativität der Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_q(X)_{\text{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}_!^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(Y)_{\text{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}_!^{-q}(Y; \mathcal{G}_Y^!) \end{array}$$

mit unseren Vergleichsisomorphismen in den Horizontalen und dem Vorschub auf der Homologie in der linken Vertikalen und der von unserem Grenzkomplexvorschub  $\text{gkv}$  aus 6.4.22 induzierten rechten Vertikale.

6.4.24 (**Natürlichkeit des !-Homologie-Hyperkohomologie-Vergleichs**). Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  eine eigentliche homologisch kompaktendliche Abbildung von abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen mit  $\Gamma : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}$  und  $\Gamma : \text{Ab}_{/Y} \rightarrow \text{Ab}$  von endlicher homologischer Dimension kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q^!(X)_{\text{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}^{-q}(X; \mathcal{G}_X^!) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q^!(Y)_{\text{sing}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}^{-q}(Y; \mathcal{G}_Y^!) \end{array}$$

mit unseren Vergleichsisomorphismen 6.4.18 in den Horizontalen und dem eigentlichen Vorschub der singulären Theorie [TS] 7.3.9 in der linken Vertikalen und der vom Grenzkomplexvorschub  $\text{gkv} : f_! \mathcal{G}_X^! \rightarrow \mathcal{G}_Y^!$  mittels der Identifikation  $f_! \xrightarrow{\sim} f_*$  von der Komposition  $\text{fin}_{X^*} \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim} \text{fin}_{Y^*} f_* \mathcal{G}_X^! \rightarrow \text{fin}_{Y^*} \mathcal{G}_Y^!$  induzierten rechten Vertikale. Das folgt ziemlich direkt aus den Definitionen und soll hier nicht weiter ausgearbeitet werden.

6.4.25 (**Verdierdual des Grenzkomplexes**). Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  bilden unsere Grenzkettengarben nach 6.4.14 einen Komplex  $\mathcal{G}_X^!$  kompaktweicher Garben. Ist unser Raum zusätzlich homologisch kompaktendlich, so liefert 5.11.13 einen Isomorphismus zwischen dem Garbenkomplex mit den Schnittkomplexen  $\mathbb{D}_{\text{Ket}} \Gamma_!(U; \mathcal{G}_X^!)$  und dem Verdierdual des Grenzkomplexes, nach 6.4.19 also einen Isomorphismus

$$d_X : \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} \mathcal{G}_X^*$$

Ich behaupte für diese Isomorphismen und jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von homologisch kompaktendlichen lokal kompakten Hausdorffräumen die Kommutativität in der derivierten Kategorie des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_Y \mathcal{G}_Y^! & \xrightarrow[\sim]{d_Y} & \mathcal{G}_Y^* \\ \mathbb{D} \text{ gkv} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}_Y f_! \mathcal{G}_X^! & \xrightarrow{\sim} & f_* \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^! \xrightarrow[\sim]{f_* d_X} f_* \mathcal{G}_X^* \end{array}$$

mit den hoffentlich offensichtlichen übrigen Pfeilen und insbesondere der durch Rückzug von Koketten gegebenen rechten Vertikale. Das folgt unmittelbar aus der durch 5.11.14 gegebenen Beschreibung des Isomorphismus oben rechts und den Definitionen. Dualisieren wir unser Diagramm und ergänzen es geeignet, so ergibt

sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G}_Y^! & \xrightarrow{\text{ev}} & \mathbb{D}_Y^2 \mathcal{G}_Y^! & \xleftarrow[\sim]{\mathbb{D}d_Y} & \mathbb{D}_Y \mathcal{G}_Y^* \\
 \uparrow \text{gkv} & & \uparrow \mathbb{D}^2 \text{gkv} & & \uparrow \\
 f_! \mathcal{G}_X^! & \xrightarrow{\text{ev}} & \mathbb{D}_Y^2 f_! \mathcal{G}_X^! & \xleftarrow[\sim]{\mathbb{D}_Y f_* \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^!} & \mathbb{D}_Y f_* \mathcal{G}_X^* \\
 \uparrow \text{ev} & & \uparrow & \xleftarrow[\sim]{\mathbb{D}f_* d_X} & \uparrow \\
 f_! \mathcal{G}_X^! & \xrightarrow{f_! \text{ev}} & f_! \mathbb{D}_X^2 \mathcal{G}_X^! & \xleftarrow[\sim]{f_! \mathbb{D}d_X} & f_! \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^*
 \end{array}$$

Sind zusätzlich  $X$  und  $Y$  lokal singulärzyklisch, so liefern die Augmentationen Isomorphismen  $a_X : \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} \mathcal{G}_X^*$  und  $a_Y : \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} \mathcal{G}_Y^*$  und der Morphismus der rechten Vertikale entspricht darunter der Verknüpfung  $\mathbb{Z}_Y \rightarrow f_* f^* \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} f_* \mathbb{Z}_X$  der Einheit der Adjunktion mit dem natürlichen Isomorphismus. Mit 5.10.29 sehen wir, daß die rechte Vertikale in unserem Diagramm unter unseren Isomorphismus dem Morphismus  $f_! \omega_X \rightarrow \omega_Y$  entspricht, den wir als die Komposition  $f_! \omega_X \xrightarrow{\sim} f_! f^! \omega_Y \rightarrow \omega_Y$  erhalten mit der Koeinheit der Adjunktion an zweiter Stelle und dem Bild unter  $f_!$  des natürlichen Morphismus  $\omega_X = \text{fin}_X^! \mathbb{Z}_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} f^!(\text{fin}_Y^! \mathbb{Z}_{\text{top}}) = f^! \omega_Y$  an erster Stelle. Wir erhalten mit unseren Morphismen dann also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_Y^! & \longrightarrow & \omega_Y \\
 \uparrow \text{gkv} & & \uparrow \\
 f_! \mathcal{G}_X^! & \longrightarrow & f_! \omega_X
 \end{array}$$

mit  $g_Y := (\mathbb{D}_Y(a_Y))^{-1} \circ (\mathbb{D}_Y(d_Y))^{-1} \circ \text{ev} : \mathcal{G}_Y^! \rightarrow \omega_Y$  in der oberen Horizontalen und  $f_! g_X$  in der unteren Horizontalen.

**Proposition 6.4.26 (Bidual des Grenzkomplexes).** *Gegeben ein lokal kompakter lokal polyederähnlicher homologisch kompaktendlicher Hausdorffraum  $X$  ist der Grenzkomplex  $\mathcal{G}_X^!$  verdier selbstdual, die kanonische Abbildung ist also ein Isomorphismus*

$$\mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim}_{\text{Der}} \mathbb{D}_X \mathbb{D}_X \mathcal{G}_X^!$$

6.4.27. Insbesondere ist dann der zum Schluß von 6.4.25 betrachtete Morphismus ein Isomorphismus  $g_X : \mathcal{G}_X^! \xrightarrow{\sim} \omega_X$  zwischen dem Grenzkomplex und der dualisierenden Garbe.

*Beweis.* Wir kürzen im folgenden stets  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\text{Ket}}$  ab. Unser Komplex von Grenzkokettengarben hat über  $U \Subset X$  die Schnitte  $\mathcal{G}_X^*(U) = \mathbb{D}GU$ . Gegeben ein Kompaktum  $K \subset U$  liefert die kurze exakte Sequenz der relativen Grenzketten



$G(U \setminus K) \hookrightarrow G(U) \twoheadrightarrow G(U, U \setminus K)$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\mathbb{D}G(U, U \setminus K) \hookrightarrow \mathbb{D}G(U) \twoheadrightarrow \mathbb{D}G(U \setminus K)$$

Im Kolimes über alle Kompakta  $K \subset U$  ergeben sich daraus Isomorphismen  $\operatorname{colim}_K \mathbb{D}G(U, U \setminus K) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(U; \mathcal{G}_U^*)$  und dann durch Dualisieren

$$\mathbb{D}\Gamma_!(U; \mathcal{G}_X^*) \xrightarrow{\sim} \operatorname{limf}_K \mathbb{D}\mathbb{D}G(U, U \setminus K)$$

In ?? haben wir unter den Bedingungen des Satzes einen ausgezeichneten Isomorphismus der dualisierenden Garbe mit dem durch die Schnittkomplexe auf der rechten Seite gegebenen Garbenkomplex konstruiert. Andererseits gibt es für jede offene Teilmenge  $U \Subset X$  einen natürlichen Morphismus

$$\mathcal{G}_X^!(U) = \operatorname{limf}_K G(U, U \setminus K) \rightarrow \operatorname{limf}_K \mathbb{D}\mathbb{D}G(U, U \setminus K)$$

Um den Beweis zu beenden müssen wir nur zeigen, daß jeder Punkt eine offene Umgebung  $U$  besitzt, für die er ein Quasiisomorphismus ist. Wir zeigen das sogar für jede polyederähnliche offene Teilmenge  $U \Subset X$ . Dann gibt es ja eine konfinale Folge von Kompakta von  $K_n \subset U$  mit  $H_q(U, U \setminus K_n)$  endlich erzeugt für alle  $q, n$ . Damit sind aber die natürlichen Abbildungen Quasiisomorphismen  $G(U, U \setminus K_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}\mathbb{D}G(U, U \setminus K_n)$  und dann liefern sie nach [TS] 7.1.52 auch im inversen Limes Quasiisomorphismen.  $\square$

**6.4.28 (Singuläre Homologien als Garbenkohomologien).** Für jeden lokal polyederähnlichen lokal singulärzyklischen kompaktendlichen Hausdorffraum  $X$  liefert unsere Beschreibung 6.4.20 der Homologie als kompakte Hyperkohomologie des Grenzkomplexes zusammen mit dem Isomorphismus 6.4.27 zwischen dem Grenzkomplex und der dualisierenden Garbe einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$H_q(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H_q(X)_{\text{garb}}$$

Ist  $X$  darüberhinaus abzählbar basiert und  $\Gamma : \operatorname{Ab}/_X \rightarrow \operatorname{Ab}$  von endlicher homologischer Dimension, so liefert unsere Beschreibung 6.4.18 der Homologie als Hyperkohomologie des Grenzkomplexes analog einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$H_q^!(X)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H_q^!(X)_{\text{garb}}$$

Aus dem zum Schluß von 6.4.25 gefundenen kommutativen Diagramm folgt schließlich mit 6.4.23 beziehungsweise 6.4.24 beziehungsweise 6.4.18 die Verträglichkeit dieser Vergleichsisomorphismen mit dem Vorschub der Homologie, dem eigentlichen Vorschub der lokalendlichen Homologie sowie dem offenen Rückzug der lokalendlichen Homologie.

6.4.29 (**Relative singuläre Homologie als Garbenkohomologie**). Seien  $X$  ein lokal polyederähnlicher lokal singulärzyklischer kompaktendlicher Hausdorffraum und  $j : U \hookrightarrow X$  die Einbettung einer offenen Teilmenge und  $i : A \hookrightarrow X$  die Einbettung ihres Komplements. Wir erhalten mit der Einheit und der Koeinheit der Adjunktion nach ?? eine kurze exakte Sequenz

$$j_!j^!\mathcal{G}_X^! \hookrightarrow \mathcal{G}_X^! \rightarrow i_*i^*\mathcal{G}_X^!$$

von Garbenkomplexen und nach [TG] 4.8.11 und [TG] 4.8.13 bestehen sie alle aus kompaktweichen abelschen Garben. Nach [TG] 4.8.13 bilden dann die kompakten globalen Schnitte eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und mit 6.4.19 erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} GU & \hookrightarrow & GX & \twoheadrightarrow & G(X, U) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \Gamma_!\mathcal{G}_U^! & \hookrightarrow & \Gamma_!\mathcal{G}_X^! & \twoheadrightarrow & \Gamma_!i^*\mathcal{G}_X^! \end{array}$$

Die letzte Vertikale liefert zusammen mit dem Isomorphismus vom Grenzkomplex in die dualisierende Garbe 6.4.27 einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathbb{H}_1^{-q}(A; \omega_X) \xrightarrow{\sim} H_q(X, X \setminus A)_{\text{sing}}$$

Der Rest des Diagramms zeigt dann auch noch, daß die lange exakte Homologiesequenz darunter der langen exakten Hyperkohomologiesequenz des ersten ausgezeichneten Dreiecks nach 5.2.2 der dualisierenden Garbe  $\omega_X$  zur gegebenen Zerlegung von  $X$  in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge entspricht. Wir haben also mit unseren Vergleichsisomorphismen zur singulären Homologie in den Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow & \mathbb{H}_1^{-q}j_!j^!\omega_X & \rightarrow & \mathbb{H}_1^{-q}\omega_X & \rightarrow & \mathbb{H}_1^{-q}i_*i^*\omega_X & \rightarrow & \mathbb{H}_1^{-q+1}j_!j^!\omega_X & \rightarrow & \dots \\ & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ \dots \rightarrow & H_q U & \rightarrow & H_q X & \rightarrow & H_q(X, U) & \rightarrow & H_{q-1} U & \rightarrow & \dots \end{array}$$

6.4.30 (**Natürlichkeit des Vergleichsisomorphismus nach  $H_q(X, A)$** ). Wir erinnern 5.10.31. Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von lesb-Räumen sowie  $A \sqsubset X, B \sqsubset Y$  abgeschlossene Teilmengen mit  $f^{-1}(B) \subset A$ . Gegeben  $\mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  und  $\mathcal{G} \in \text{Ab}/_Y$  und ein Morphismus  $\varphi : f_!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  in  $\text{Der}(\text{Ab}/_Y)$  hatten wir dort einen ausgezeichneten Morphismus  $\varphi_{\otimes}$  konstruiert, der unter  $\mathcal{H}^{-q}$  ausgezeichnete Morphismen

$$\varphi_{\otimes} : \mathbb{H}_1^{-q}(A; \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{H}_1^{-q}(B; \mathcal{G})$$

liefert. Spezialisieren wir ihn zu dem aus dem offensichtlichen Isomorphismus  $\omega_X \xrightarrow{\sim} f^!\omega_Y$  hervorgehenden Morphismus  $f_!\omega_X \rightarrow \omega_Y$ , so sollten wir unter den

zusätzliche Annahmen an  $X$  und  $Y$  aus 6.4.29 mit unseren Vergleichsisomorphismen in den Horizontalen und dem Vorschub auf der singulären Homologie in der rechten Vertikalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_1^{-q}(A; \omega_X) & \xrightarrow{\sim} & H_q(X, X \setminus A)_{\text{sing}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}_1^{-q}(B; \omega_Y) & \xrightarrow{\sim} & H_q(Y, Y \setminus B)_{\text{sing}} \end{array}$$

erhalten. Ich würde mich freuen, wenn ein Student mir das einmal ausarbeiten könnte.

## 7 Die äquivariante derivierte Kategorie

### 7.1 Ergänzungen zu äquivarianten Garben

### 7.2 Äquivariante Objekte (VERLEGEN!)

7.2.1 (**Kartesische Schnitt als Schmelzfunktor**). Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ist nach 1.2.5 jeder kartesische Lift einer stabil universellen Trennung in  $\mathcal{N}$  eine stabil universelle Trennung in  $\mathcal{M}$ . Insbesondere macht unsere Trennfaserung stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen und hat  $\mathcal{N}$  stabil universelle Trennungen, so auch  $\mathcal{M}$ . Unter dieser Annahme induziert unser Trennfunktor nach [TSK] 1.5.12 folglich einen Trennschmelzfunktor

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

zwischen den jeweiligen Erweiterungen zu Trennschmelzkategorien. Hat darüber hinaus die Basis  $\mathcal{N}$  eindeutige Leertrennungen, so macht der **kartesische Schnitt**  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $X \mapsto \underline{X}$  aus 1.4.4 nach 1.2.5 stabil universelle Trennungen zu stabil universellen Trennungen und induziert folglich einen Trennschmelzfunktor

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$$

Per definitionem ist die Verknüpfung unserer beiden Trennschmelzfunktoren die Identität auf  $\mathcal{N}$ . Jeder Schmelzfunktor macht nun Monoidobjekte zu Monoidobjekten und insbesondere macht der kartesische Schnitt aus jedem Monoidobjekt  $G$  von  $\mathcal{N}$  ein Monoidobjekt  $\underline{G}$  von  $\mathcal{M}$ .

**Definition 7.2.2.** Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  über einer Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen und eindeutigen Leertrennungen und ein Monoidobjekt  $G \in \mathcal{N}$  nennt man ein Objekt  $\mathcal{F}$  der Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  mit  $\underline{G}$ -Operation ein  **$G$ -äquivariantes Objekt von  $\mathcal{M}$** .

7.2.3. Gehört ein  $G$ -äquivariantes Objekt  $\mathcal{F}$  zur Faser  $\mathcal{M}_X$  über  $X \in \mathcal{N}$ , so induziert die  $\underline{G}$ -Operation auf  $\mathcal{F}$  eine  $G$ -Operation auf  $X$  in  $\mathcal{N}$ . Dies Objekt mit  $G$ -Operation in der Basis notieren wir  $G \setminus X$ . Die  $G$ -äquivarianten Objekte von  $\mathcal{M}$  über  $G \setminus X$  bilden selber in offensichtlicher Weise eine Kategorie

$$\mathcal{M}_{G \setminus X}$$

*Beispiel 7.2.4.* Sei speziell  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  eine Trennfaserung über der banalen Trennkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  einer Kategorie  $\mathcal{T}$  mit endlichen Produkten und finalem Objekt  $\text{pt}$ . Ein Monoidobjekt  $G$  von  $\mathcal{T}$  ist dann per definitionem dasselbe wie ein Monoidobjekt der zur Trennschmelzkategorie  $\wedge \mathcal{T}$  gehörigen Schmelzkategorie

und ein  $G$ -äquivariantes Objekt von  $\mathcal{M}$  ist per definitionem ein Objekt zusammen mit einem Morphismus

$$\alpha : \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

in  $\mathcal{M}$  derart, daß die Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (\underline{G} \boxtimes \underline{G}) \boxtimes \mathcal{F} & \longrightarrow & \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & & & \parallel \\ \underline{G} \boxtimes (\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}) & \longrightarrow & \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \underline{\text{pt}} \boxtimes \mathcal{F} & \longrightarrow & \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{F} \end{array}$$

mit den in offensichtlicher Weise erklärten Morphismen kommutieren. Manchen Lesern mag eine Variante dieser Beschreibung vertrauter vorkommen, bei der man  $\text{pr}_1^* \mathcal{F}$  schreibt statt  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$  und so weiter, für  $\text{pr}_1 : G \times X \rightarrow X$  und  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{/X}$ .

*Ergänzung 7.2.5.* Mit Hilfe unseres natürlichen Isomorphismus  $\underline{X} \boxtimes \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_Y^\dagger \mathcal{F}$  aus 1.5.19 für  $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$  können wir unsere Definition 7.2.1 äquivarianter Objekte oder vielmehr ihre für banale Trennkategorien ausbuchstabierte Fassung 7.2.4 in einer Weise fassen, in der sie für eine gewöhnliche Faserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}$  über einer Kategorie mit endlichen Produkten sinnvoll bleibt. Sei dazu  $G \searrow X$  ein Objekt mit der Operation eines Monoids  $(G, m, e)$  in der Basis. Ein  **$G$ -äquivariantes Objekt über  $X$**  ist dann ein Datum  $(\mathcal{F}, \alpha)$  bestehend aus einem Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  über  $X$  und einem Morphismus  $\alpha : \text{pr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  über der Operation  $a : G \times X \rightarrow X$  derart, daß die beiden im folgenden erklärten Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{prr}^\dagger \mathcal{F} & \xrightarrow{\gamma} & \text{pr}^\dagger \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F} \\ \parallel & & & & \parallel \\ \text{prr}^\dagger \mathcal{F} & \xrightarrow{\beta} & \text{pr}^\dagger \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\iota} & \text{pr}^\dagger \mathcal{F} \\ & \searrow & \downarrow \alpha \\ & & \mathcal{F} \end{array}$$

kommutieren. Für das Rechte betrachten wir die Zerlegung  $X \rightarrow G \times X \rightarrow X$  von  $\text{id}_X = \text{pr} \circ e$  für  $e$  gegeben durch das neutrale Element unseres Monoids  $G$  und darüber die Zerlegung der Identität  $\text{id}_{\mathcal{F}} = \tau \circ \iota$  mit  $\tau : \text{pr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  dem Transportmorphismus. So erhalten wir einen wohlbestimmten Morphismus  $\iota$  über  $e$  und das rechte Diagramm fordert die Identität  $\alpha \circ \iota = \text{id}_{\mathcal{F}}$ . Wegen  $a \circ e = \text{id}_X$  ist das schon mal eine sinnvolle Forderung. Im linken Diagramm bezeichne  $\gamma$  denjenigen Morphismus  $\gamma : \text{prr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \text{pr}^\dagger \mathcal{F}$  über dem Morphismus  $(\text{id}_G \times a) : G \times G \times X \rightarrow G \times X$  in der Basis mit  $\tau \circ \gamma = \alpha \circ \tau \circ c$  für die Transportmorphismen  $\tau : \text{pr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  beziehungsweise  $\tau : \text{pr}_{23}^\dagger (\text{pr}^\dagger \mathcal{F}) \rightarrow \text{pr}^\dagger \mathcal{F}$  für  $\text{pr}_{23} : G \times G \times X \rightarrow G \times X$  die Projektion auf die beiden hinteren Faktoren und  $c : \text{prr}^\dagger \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{23}^\dagger \circ \text{pr}^\dagger$  der Identifikation zu  $\text{prr} = \text{pr} \circ \text{pr}_{23}$ . Weiter bezeichne  $\beta : \text{prr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \text{pr}^\dagger \mathcal{F}$  denjenigen Morphismus über dem Morphismus  $m \times \text{id}_X$  in der Basis, der beim Nachschalten des Transportmorphismus  $\tau$  den Transportmorphismus von

$\text{pr}^\dagger \mathcal{F}$  liefert. Die zweite Eigenschaft, die wir fordern, ist dann die Gleichheit  $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$  der mit im vorhergehenden erklärten Morphismen  $\text{pr}^\dagger \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  über dem durch zweimaliges Anwenden der Operation gegebenen Morphismus  $G \times G \times X \rightarrow X$  in der Basis.

**Beispiel 7.2.6 (Äquivariante Objekte der Familientrennfaserung).** Im Fall der Familienfaserung  $\mathcal{C}/\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$  nach [?] ?? zu einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}/_X$  eine Familie  $(\mathcal{F}_x)_{x \in X}$  von Objekten. Operiert dann ein Monoid  $G$  auf  $X$ , so besteht eine äquivariante Struktur aus der Vorgabe von Morphismen  $s(g, x) : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_{gx}$  mit  $s(1, x) = \text{id}$  sowie  $s(h, gx)s(g, x) = s(hg, x)$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$ .

**Beispiel 7.2.7.** Sie mögen zur Übung zeigen, daß die in Bezug auf die Garbenfaserungen  $\text{Ens}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  und  $\text{Ab}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  im Sinne von 7.2.5 äquivalenten Objekte über einem topologischen Raum genau unsere äquivalenten Garben aus ?? beziehungsweise unsere äquivalenten abelschen Garben aus ?? sind.

**Beispiel 7.2.8 (Äquivariante Mengengarben, Variante).** Seien  $G \setminus X$  ein topologischer Raum mit der Operation  $a : G \times X \rightarrow X$  eines topologischen Monoids. Im Fall der Mengengarbenoptrennfaserung  $\text{Ens}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  nach ?? besteht eine  $G$ -äquivariante Mengengarbe auf  $X$  aus dem Datum einer Mengengarbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}/_X$  auf  $X$  und eines Opkomorphismus  $\alpha \in \text{Ens}/_a(G \boxtimes \mathcal{F}, \mathcal{F})$  mit gewissen Eigenschaften. Sind speziell  $G$  und  $X$  diskret, so ist solch ein  $\alpha$  nach 1.7.8 eine Familie von Abbildungen  $\alpha(g, x) : \mathcal{F}_{gx} \rightarrow \mathcal{F}_x$  und die geforderten Verträglichkeiten bedeuten  $\alpha(g, x)\alpha(h, gx) = \alpha(hg, x)$  sowie  $\alpha(1, x) = \text{id}$ . Das ist also dasselbe wie ein äquivalentes Objekt der Familienfaserung der Kategorie  $\text{Ens}^{\text{opp}}$ . Bilden wir die zu  $G \setminus X$  gehörige **Wirkungskategorie**  $X_G$  mit den Punkten  $x \in X$  als Objekten und den Mengen

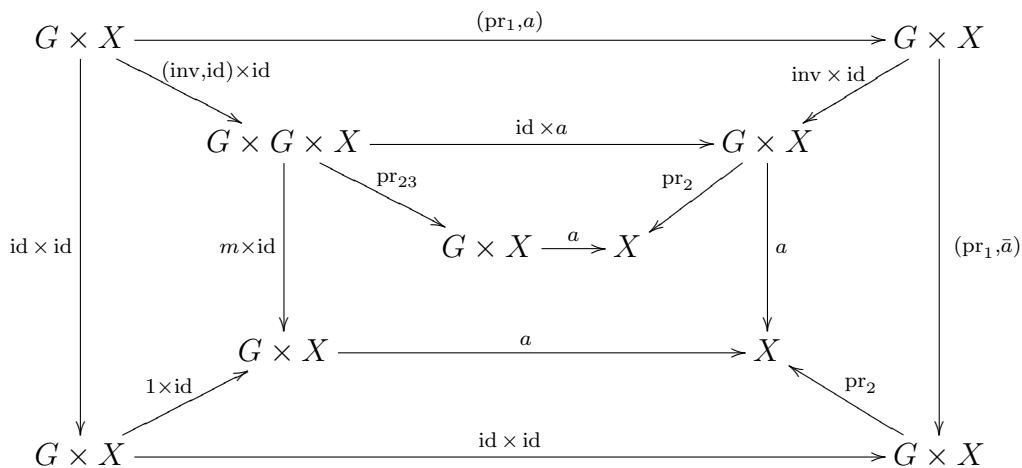
$$X_G(x, y) := \{g \in G \mid gx = y\}$$

als Morphismenmengen, paarweise disjunkt gemacht durch Darankreuzen des Paares  $(x, y)$ , so haben wir natürliche Isomorphismen von Kategorien  $\text{Ens}/_{G \setminus X} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(X_G, \text{Ens})$  und  $\text{Ens}/_{G \setminus X} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(X_G, \text{Ens}^{\text{opp}})$  in Verallgemeinerung unserer Erkenntnisse für Mengengarben aus [TG] 6.2.13.

7.2.9. Operiert eine diskrete Gruppe  $G$  und nicht nur ein Monoid auf einem diskreten Raum  $X$ , so ist die Wirkungskategorie  $X_G$  ein Gruppoid und das Invertieren von Morphismen zusammen mit der Identität auf Objekten liefert einen Isomorphismus  $X_G \xrightarrow{\sim} (X_G)^{\text{opp}}$ . Mit 7.2.8 erhalten wir Isomorphismen von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \text{Ens}/_{G \setminus X} & & (\text{Ens}/_{G \setminus X})^{\text{opp}} \\ \wr \downarrow & & \uparrow \wr \\ \text{Cat}(X_G, \text{Ens}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cat}((X_G)^{\text{opp}}, \text{Ens}^{\text{opp}})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(X_G, \text{Ens}^{\text{opp}})^{\text{opp}} \end{array}$$

**7.2.10 (Der Strukturmorphismus jeder Gruppenoperation ist kartesisch).** Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  über der banalen Trennkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten und  $G \searrow X$  ein Objekt mit Gruppenoperation  $a : G \times X \rightarrow X$  der Basis und  $(\mathcal{F}, \alpha) \in \mathcal{M}_{G \searrow X}$  ein  $G$ -äquivalentes Objekt über  $X$  ist der Morphismus  $\alpha \in \mathcal{M}_a(\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}, \mathcal{F})$  stets kartesisch. Um das zu sehen, betrachten wir in der Basis mit der Notation  $\bar{a}(g, x) := g^{-1}x$  oder besser  $\bar{a} := a \circ (\text{inv} \times \text{id})$  das kommutative Diagramm



Ziehen wir das kommutative Rechteck in  $\mathcal{M}$  über dem inneren Rechteck, das die Assoziativität der Operation zum Ausdruck bringt, zurück auf das äußere Rechteck, so bleibt es kommutativ. Aus offensichtlichen Gründen liefert der Rückzug nach links die Identität auf  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$ . Aufgrund der bei der Definition eines äquivalenten Objekts geforderten Trivialität der Operation der Eins liefert auch der Rückzug nach unten die Identität auf  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$ . Der Rückzug von  $\text{id} \boxtimes \alpha : \underline{G} \boxtimes \underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \rightarrow \underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$  nach oben stimmt überein mit dem Rückzug des Strukturmorphismus  $\alpha$  von der Mitte nach ganz oben. Dieser Rückzug hat also ein Linksinverses, nämlich den Rückzug des Strukturmorphismus auf die rechte Vertikale. Genauso zeigt man, daß er auch ein Rechtsinverses besitzt und folglich ein Isomorphismus  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \underline{G} \boxtimes \mathcal{F}$  über  $(\text{pr}_2, a) : G \times X \rightarrow G \times X$  sein muß. Mithin ist dieser Rückzug kartesisch. Seine Verknüpfung mit der offensichtlichen Trennung  $\underline{G} \boxtimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  über  $\text{pr}_2 : G \times X \rightarrow X$  ist dann als Verknüpfung kartesischer Morphismen wieder kartesisch, und diese Verknüpfung ist gerade unser Strukturmorphismus  $\alpha$ .

*Ergänzung 7.2.11.* Ich wüßte gerne, ob das Vorhergehende genauso gilt für eine beliebige Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  in eine Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen, wenn wir äquivalente Objekte in Bezug auf Hopfobjekte der Basis betrachten, wie sie in [TS] ?? erklärt wurden. Das könnte eine Arbeit für einen Studenten abgeben.

**7.2.12 (Trennfaserung der äquivalenten Objekte).** Gegeben eine Kategorie

$\mathcal{T}$  mit endlichen Produkten bilden wir die Kategorie  $\text{mo}\mathcal{T}$  aller „Objekte mit Operation eines Monoidobjekts“. Morphismen  $G \setminus X \rightarrow H \setminus Y$  sind dabei Paare bestehend aus einem Homomorphismus  $G \rightarrow H$  von Monoidobjekten und einem gewöhnlichen Morphismus  $X \rightarrow Y$  derart, daß die offensichtliche Verträglichkeit erfüllt ist. Auch  $\text{mo}\mathcal{T}$  hat dann endliche Produkte. Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \setminus \mathcal{T}$  erhalten wir eine weitere Trennfaserung

$$\text{mof.}\mathcal{M} \rightarrow \setminus \text{mo}\mathcal{T}$$

mit Faser  $\mathcal{M}_{G \setminus X}$  über  $G \setminus X$  und den hoffentlich offensichtlichen Trennungen. Die Schmelzkategorien der opponierten Fasern notieren wir unseren allgemeinen Konventionen folgend

$$\mathcal{M}_{/G \setminus X}$$

Die Restriktion unserer Trennfaserung auf die banale Trennkategorie der vollen Unterkategorie der Räume mit Gruppenoperation notieren wir

$$\text{gof.}\mathcal{M} \rightarrow \setminus \text{go}\mathcal{T}$$

In diesem Fall werden ja wohl, wenn die Fasern von  $\mathcal{M} \rightarrow \setminus \mathcal{T}$  Multihom haben, auch die Fasern von  $\text{gof.}\mathcal{M} \rightarrow \setminus \text{go}\mathcal{T}$  Multihom haben. Das mag einmal ein Student ausarbeiten, gerne auch zusammen mit 7.2.11.

**7.2.13 (Äquivariante Objekte oppinverser Trennfaserungen).** Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \setminus \mathcal{T}$  über der banalen Trennkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten und  $G \setminus X$  ein Objekt mit Gruppenoperation in der Basis ist nach 7.2.10 der Strukturmorphismus kartesisch. Gegeben  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  entsprechen die Strukturmorphismen, die  $\mathcal{F}$  zu einem äquivarianten Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$  machen, also eineindeutig den Strukturmorphismen, die  $\mathcal{F}$  zu einem äquivarianten Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X^{\text{opi}}$  für die oppinvertierte Trennfaserung  $\mathcal{M}^{\text{opi}} \rightarrow \mathcal{N}$  nach 1.7.3 machen. Aus unserer Erkenntnis 7.2.10 über die Kartesianität des Strukturmorphismus bei unter Gruppen äquivarianten Objekten folgt, daß wir so einen Isomorphismus

$$(\text{gof.}\mathcal{M})^{\text{opi}} \xrightarrow{\sim} \text{gof.}(\mathcal{M}^{\text{opi}})$$

von Trennfaserungen über der banalen Trennkategorie  $\setminus \text{go}\mathcal{T}$  der Objekte mit Gruppenoperation in der Basis erhalten.

*Beispiel 7.2.14.* Die unter Gruppenoperationen äquivarianten Objekte der Mengengarbentrennfaserung und der Mengengarbenoptrennfaserung bilden zueinander oppinverse Trennfaserungen. Einen Schatten dieser Tatsache haben wir bereits in 7.2.9 gesehen, wo wir im diskreten Fall einen Isomorphismus zwischen der Faser der einen und der opponierten Faser der anderen Trennfaserung konstruiert hatten.



7.2.15 (**Äquivariante Objekte auf dem Produkt mit einer Gruppe**). Gegeben eine Trennfaserung  $\mathcal{M} \rightarrow \wedge \mathcal{T}$  über der banalen Trennkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten und  $G$  ein Gruppenobjekt der Basis erhalten wir eine Äquivalenz

$$\underline{G} \boxtimes : \mathcal{M}_{\text{pt}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_{G \setminus G}$$

Genauer behaupten wir, daß wir sogar im Fall eines Monoidobjekts der Basis ein adjungiertes Paar  $(\underline{G} \boxtimes, 1^\dagger)$  von Funktoren zwischen den fraglichen Kategorien erhalten, indem wir den offensichtlichen Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\cong} 1^\dagger(\underline{G} \boxtimes \mathcal{F})$  als Einheit der Adjunktion nehmen und als Koeinheit die Komposition  $\underline{G} \boxtimes 1^\dagger \mathcal{E} \rightarrow \underline{G} \boxtimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  von Morphismen über der Komposition  $G \rightarrow G \times G \rightarrow G$  von  $g \mapsto (g, 1)$  gefolgt von der Verknüpfung unseres Monoids. Im Fall eines Gruppenobjekts ist nach 7.2.10 der Strukturmorphismus kartesisch und deshalb ist auch unsere Koeinheit kartesisch über der Identität, also ein Isomorphismus. Mithin liefert unser adjungiertes Paar wie behauptet eine Äquivalenz von Kategorien. Dieselben Argumente liefern für jedes Objekt  $X$  der Basis eine Äquivalenz von Kategorien

$$\underline{G} \boxtimes : \mathcal{M}_X \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_{G \setminus (G \times X)}$$

## Übungen

Übung 7.2.16. Gegeben  $G \setminus X$  ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Operationen einer diskreten Gruppe und  $k$  ein Kring und  $\chi : G \rightarrow k^\times$  ein Gruppenhomomorphismus bezeichne  $P := G \setminus X$  den Bahnenraum und  $\underline{P}_\chi$  die nach [TG] ?? zugehörige lokal konstante Garbe von  $k$ -Moduln auf  $P$ . Gegeben  $G \setminus X$  und  $H \setminus Y$  topologische Räume mit topologisch freien Operationen diskreter Gruppen und  $R := H \setminus Y$  betrachten wir in der Familienkategorie von  $\wedge \text{moTop}$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P \times R & \rightarrow & P \wedge R \\ \uparrow & & \uparrow \\ (G \times H) \setminus (X \times Y) & \rightarrow & (G \setminus X) \wedge (H \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G \times H) \setminus \text{top} & \rightarrow & (G \setminus \text{top}) \wedge (H \setminus \text{top}) \end{array}$$

Da die Rückzüge längs der oberen Vertikalen nach [TG] 7.1.10 Äquivalenzen sind, liefert unser Diagramm ausgezeichnete Isomorphismen

$$\underline{P}_\chi \boxtimes \underline{R}_\xi \xrightarrow{\cong} \underline{P \times R}_{\chi \otimes \xi}$$

Übung 7.2.17. Ist  $X$  topologische Gruppe und  $G \subset X$  eine diskrete zentrale Untergruppe, so operiert  $G$  nach [TM] 2.1.25 topologisch frei auf  $X$  und ein ähnliches Diagramm wie zuvor liefert für jeden Gruppenhomomorphismus  $\chi : G \rightarrow$

$k^\times$  einen kartesischen Morphismus  $\underline{P} \times_{\underline{P}_{X \otimes X}} \underline{P} \rightarrow \underline{P}_X$  über der Multiplikation der Quotientengruppe  $P := G \backslash X$ . Zusammen mit dem Isomorphismus aus 7.2.16 liefert das einen kartesischen Morphismus

$$\underline{P}_X \boxtimes \underline{P}_X \rightarrow \underline{P}_X$$

über der Multiplikation von  $P$ . Man zeige, daß er  $\underline{P}_X$  zu einem Gruppenobjekt in Garben von  $k$ -Moduln über topologischen Räumen macht. Objekte mit einer Operation dieses Gruppenobjekts heißen  **$X$ - $\chi$ -monodrome Garben**.

7.2.18. Ich erinnere an die Definitionen und ersten Resultate zu äquivarianten Garben aus [TG] 7.1.1 folgende. Die im Anschluß bewiesene Aussage hatten wir in [TG] 7.1.10 nur im Fall der Operation einer diskreten Gruppe diskutiert.

**Satz 7.2.19 (Quotientenäquivalenz).** *Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein topologisch freier  $G$ -Raum  $X$  ist der äquivariante Rückzug unter  $\phi \backslash f$  für  $f : X \rightarrow G \backslash X$  und  $\phi : G \rightarrow 1$  eine Äquivalenz*

$$\text{Ens}_{/G \backslash X} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{G \backslash X}$$

*Beweis.* Nach einigen Vorbereitungen zeigen wir eine noch allgemeinere Aussage in 7.2.25. □

**Lemma 7.2.20 (Freie Quotienten äquivarianter Abbildungen).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X \rightarrow Y$  eine stetige  $G$ -äquivariante Abbildung von  $G$ -Räumen. Ist  $Y$  topologisch frei, so ist auch  $X$  topologisch frei und die offensichtlichen Abbildungen liefern ein kartesisches Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \longrightarrow & Y/G \end{array} \quad \lrcorner$$

*Ergänzung 7.2.21.* Man zeigt unschwer auch eine noch allgemeinere Version: Ist zusätzlich  $H \subset G$  eine Untergruppe, so liefern die offensichtlichen Abbildungen sogar ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X/H & \longrightarrow & Y/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \longrightarrow & Y/G \end{array} \quad \lrcorner$$

Dazu geht man wie beim Beweis des Lemmas vor, ergänzt am Schluß das Diagramm entsprechend, und muß einen Homöomorphismus  $X/H \xrightarrow{\sim} G/H \times X/G$  nachweisen. Das ist aber klar, da  $G \times X/G \rightarrow G/H \times X/G$  final ist, vergleiche [TM] 2.2.4. Ich bin ganz verblüfft, daß man hierfür anscheinend noch nicht einmal voraussetzen muß, daß  $G$  topologisch frei ist als  $H$ -Raum.

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $Y = G \times W$  annehmen. Dann entsteht mit dem pull-back ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & G \times X/G & \longrightarrow & G \times W \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & X/G & \longrightarrow & W \end{array}$$

Wir betrachten nun die Abbildung  $\mu : X \rightarrow G$ , die durch die Komposition der oberen Horizontale mit der Projektion auf  $G$  gegeben wird. Sicher gilt  $\mu(gx) = g\mu(x)$ . Folglich ist die Abbildung  $X \rightarrow X$  gegeben durch  $x \mapsto \mu(x)^{-1}x$  konstant auf  $G$ -Bahnen und faktorisiert demnach über eine stetige Abbildung  $\nu : X/G \rightarrow X$ . Man prüft leicht, daß die stetige Abbildung  $G \times X/G \rightarrow X$ ,  $(g, \bar{x}) \mapsto g\nu(\bar{x})$  invers ist zur linken oberen Horizontale  $X \rightarrow G \times X/G$ ,  $x \mapsto (\mu(x), \bar{x})$ .  $\square$

**Korollar 7.2.22.** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von topologisch freien  $G$ -Räumen, die einen Homöomorphismus  $X/G \xrightarrow{\sim} Y/G$  induziert. So ist unsere Abbildung bereits selbst ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Das folgt aus 7.2.20 aus der allgemeinen Erkenntnis [TF] 2.3.4, daß der pull-back eines Isomorphismus stets wieder ein Isomorphismus ist.  $\square$

**Korollar 7.2.23 (Quotienten étaler Abbildungen sind étale).** *Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $X \rightarrow Y$  eine étale Abbildung von  $G$ -Räumen und  $Y$  ein topologisch freier  $G$ -Raum, so ist auch  $X/G \rightarrow Y/G$  étale.*

7.2.24. Die Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  ist étale, nicht aber ihr Quotient nach der Operation durch Addition einer Gerade  $G \subset \mathbb{R}^2$  mit irrationaler Steigung. Es ist also wesentlich, daß die Operation nicht nur abstrakt frei, sondern sogar topologisch frei ist.

*Beweis.* Ist  $Y$  topologisch frei als  $G$ -Raum, so besitzt jeder Punkt von  $Y/G$  eine offene Umgebung  $W \subseteq Y/G$ , auf der die Quotientenabbildung gespalten werden kann durch ein stetiges  $s : W \rightarrow Y$ . Wir können also unser kartesisches Diagramm aus dem Lemma, das wir nun auf der Seite liegend dargestellt haben, ergänzen durch ein kartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/G \\ \downarrow & & \lrcorner & \downarrow & \downarrow \\ W & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y/G \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß die Kompositionen in den Horizontalen offene Einbettungen sind. Ist insbesondere  $X \rightarrow Y$  étale, so auch  $X/G \rightarrow Y/G$ .  $\square$

**Satz 7.2.25 (Verallgemeinerte Quotientenäquivalenz).** *Operiert eine topologische Gruppe  $G$  auf einem Raum  $X$  und ist  $N \subset G$  ein Normalteiler, der sowohl auf  $G$  als auch auf  $X$  topologisch frei operiert, so induziert das Zurückholen mit der Quotientenabbildung  $G \backslash X \rightarrow (N \backslash G) \backslash (N \backslash X)$  eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Ens}_{/(N \backslash G) \backslash (N \backslash X)} \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/G \backslash X}$$

*Beweis.* Wir beginnen mit dem in 7.2.19 beschriebenen Fall  $G = N$  und definieren einen Funktor in die Gegenrichtung mithilfe der étalen Räume, indem wir jeder äquivarianten Garbe  $\bar{\mathcal{F}} \rightarrow X$  die nach 7.2.23 étale Abbildung  $G \backslash \bar{\mathcal{F}} \rightarrow G \backslash X$  zuordnen. Dann zeigen wir, daß er linksadjungiert ist zum Zurückholen. Und schließlich prüfen wir, daß beide Adjunktionsabbildungen stets Isomorphismen sind. Das ist nur lokal zu prüfen, also für  $X = G \times Y$ , und in diesem Fall ist es leicht zu sehen. Für das simultane Wegteilen ergänzen wir unsere Argumentation in der offensichtlichen Weise.  $\square$

**Satz 7.2.26 (Induktionsäquivalenz).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe, die topologisch frei auf  $G$  operiert, und  $Y$  ein  $H$ -Raum. So liefert das Zurückholen längs  $H \backslash Y \rightarrow G \backslash (G \times_{/H} Y)$  eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Ens}_{/G \backslash (G \times_{/H} Y)} \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/H \backslash Y}$$

7.2.27. Ein quasiinverser Funktor kann in der Sprache der étalen Räume explizit beschrieben werden durch die Vorschrift  $\bar{\mathcal{F}} \mapsto G \times_{/H} \bar{\mathcal{F}}$ .

*Beweis.* Wir betrachten zusätzlich  $(G \times H) \backslash (G \times Y)$  mit der Operation gegeben durch  $(g, h)(x, y) := (gxh^{-1}, hy)$  und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (G \times H) \backslash (G \times Y) & \longleftarrow & H \backslash Y \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ H \backslash Y & & G \backslash (G \times_{/H} Y) \end{array}$$

mit der oberen Horizontale gegeben durch  $h \mapsto (h, h)$  und  $y \mapsto (1, y)$ . Die Rückzüge in die obere linke Ecke sind verallgemeinerte Quotientenäquivalenzen 7.2.25. Es folgt, daß erst der Rückzug längs der oberen Horizontale und dann der Rückzug längs der rechten Vertikale auch Äquivalenzen sind.  $\square$

**Beispiel 7.2.28 (Äquivariante Garben auf homogenen Räumen).** Im Spezialfall  $Y = \text{top}$  erhalten wir aus dem Zusammenspiel der Beschreibung [TG] 7.1.2 äquivarianter Garben auf einem Punkt und der Induktionsäquivalenz 7.2.26 für jede

topologisch frei operierende lokal zusammenhängende Untergruppe  $H \subset G$  einer topologischen Gruppe  $G$  eine Äquivalenz

$$(H/H^\circ)\text{-Ens} \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/G \setminus (G/H)}$$

zwischen der Kategorie der Mengen mit einer Operation der Komponentengruppe von  $H$  und der Kategorie der  $G$ -äquivarianten Garben auf dem homogenen Raum  $G/H$ . Insbesondere sind in diesem Fall alle äquivarianten Garben lokal konstant.

*Beispiel 7.2.29.* Die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf der topologischen Gruppe  $\mathbb{R}$  nicht mit der Struktur einer  $\mathbb{R}$ -äquivarianten Garbe in unserem Sinne versehen werden, da sie nicht lokal konstant ist, da aber nach 7.2.28 in dieser Situation jede  $\mathbb{R}$ -äquivariante Garbe lokal konstant ist.

**Proposition 7.2.30 (Volltreues Einschränken).** *Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $\varphi : H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus mit  $G/\varphi(H)$  zusammenhängend, so ist für jeden  $G$ -Raum  $X$  die Restriktion ein volltreuer Funktor*

$$\text{Ens}_{/G \setminus X} \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/H \setminus X}$$

*Beweis.* In der Tat müssen wir nur für jeden  $H$ -äquivarianten Garbenhomomorphismus von  $G$ -äquivarianten Garben  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  und alle  $x \in X$  und  $g \in G$  zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_x & \rightarrow & \mathcal{G}_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{gx} & \rightarrow & \mathcal{G}_{gx} \end{array}$$

kommutiert. Es reicht, wenn wir das zeigen für die mittels  $G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto gx$  auf  $G$  zurückgezogenen Garben. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X = G$  und  $x = e$  annehmen. Dann liefert jedoch die Operation von  $G$  für alle  $y \in \mathcal{F}_e$  eine Fortsetzung zu einem globalen Schnitt von  $\mathcal{F}$ , dessen Bild offen ist in  $\bar{\mathcal{F}}$  als Bild einer étalen Abbildung. Mithin oder auch direkt nach 7.2.26 mit  $Y = \text{top}$  und  $H = 1$  ist  $\bar{\mathcal{F}} \rightarrow G$  und ebenso auch  $\bar{\mathcal{G}} \rightarrow G$  eine triviale Überlagerung. Die Mengen der  $g \in G$ , an denen zwei unter  $\varphi(H)$  äquivariante Decktransformationen übereinstimmen beziehungsweise verschieden sind, sind nach dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts bei Überlagerungen [TF] 3.4.10 offen in  $G$  und sind offensichtlich invariant unter  $\varphi(H)$ . Ist nun  $G/\varphi(H)$  zusammenhängend, so ist die einzige Möglichkeit einer derartigen Zerlegung von  $G$  in zwei offene Teilmengen die Zerlegung in ganz  $G$  und die leere Menge. Das zeigt, daß alle unter  $\varphi(H)$  äquivarianten Garbenhomomorphismen zwischen  $G$ -äquivarianten Garben auf  $G$  bereits  $G$ -äquivariant sein müssen.  $\square$

7.2.31. Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von  $G$ -Räumen und  $\mathcal{F} \in \text{Ens}_{/G \setminus X}$  eine äquivariante Garbe, so erbt der Vorschub  $f_*\mathcal{F} \in$

$\text{Ens}/Y$  in offensichtlicher Weise eine Wirkung von  $G$  als abstrakte Gruppe, die auch mit der Wirkung von  $G$  auf  $Y$  verträglich ist. Um jedoch zu zeigen, daß  $G$  auch mit seiner richtigen Topologie stetig auf dem étalen Raum von  $f_*\mathcal{F}$  operiert, brauchen wir stärkere Voraussetzungen.

**Beispiel 7.2.32 (Schwierigkeiten mit äquivariantem Vorschub).** Daß es im Allgemeinen nicht ganz einfach sein wird, einen Vorschub für äquivariante Garben zu erklären, zeigt das folgende Beispiel. Auf der topologischen Gruppe  $\mathbb{Q}$  betrachte man die konstante Garbe  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$ . Ihr Vorschub unter der Projektion auf einen Punkt ist die abelsche Gruppe der globalen Schnitte  $\Gamma(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}})$ . Dieser Gruppe entspricht jedoch unter der offensichtlichen Operation keine  $\mathbb{Q}$ -äquivariante Garbe, da die fragliche Operation nicht stetig ist für die diskrete Topologie auf  $\Gamma(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}})$ . Ist zum Beispiel  $s \in \Gamma(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}})$  Null auf allen  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $q^2 < 2$  und Eins auf allen  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $q^2 > 2$ , so gibt es keine Umgebung der Null in  $\mathbb{Q}$ , die diesen Schnitt festhält.

**Beispiel 7.2.33 (Alternative Beschreibung äquivarianter Garben).** Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum. Bezeichne  $m, p : G \times X \rightarrow X$  die Operation von  $G$  beziehungsweise die Projektion auf  $X$ . Für jede äquivariante Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}/G \setminus X$  erklären wir einen Garbenisomorphismus

$$s : p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} m^*\mathcal{F}$$

Man bezeichne dazu mit  $q : G \times X \rightarrow G$  die Projektion und betrachte die Abbildung  $(q, m) : (g, x) \mapsto (g, gx)$  und beachte zunächst  $m = p \circ (q, m)$ , so daß es gleichbedeutend gilt, einen Isomorphismus  $p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (q, m)^*(p^*\mathcal{F})$  zu konstruieren. Wir haben nun aber einen natürlichen Isomorphismus  $\text{ét}(p^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} G \times \mathcal{F}$ . Das pull-back-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times \bar{\mathcal{F}} & \rightarrow & G \times \bar{\mathcal{F}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times X & \xrightarrow{(q, m)} & G \times X \end{array}$$

mit  $(g, f) \mapsto (g, gf)$  in der oberen Horizontalen liefert dann den gesuchten Isomorphismus. Im Halm an der Stelle  $(g, x)$  wird unser Isomorphismus  $s$  beschrieben durch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (p^*\mathcal{F})_{(g, x)} & \xrightarrow{s} & (m^*\mathcal{F})_{(g, x)} \\ \downarrow \wr & & \wr \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}_{gx} \end{array}$$

mit den offensichtlichen vertikalen Identifikationen. Ist umgekehrt ein Garbenhomomorphismus  $s : p^*\mathcal{F} \rightarrow m^*\mathcal{F}$  gegeben, so erhalten wir eine stetige Abbildung  $G \times \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$  aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} G \times \bar{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\sim} & \text{ét}(p^*\mathcal{F}) & \xrightarrow{s} & \text{ét}(m^*\mathcal{F}) & \rightarrow & \bar{\mathcal{F}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G \times X & = & G \times X & = & G \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

Hierin können die nicht explizit benannten Abbildungen hoffentlich vom Leser erschlossen werden. Kommt  $s$  bereits von einer äquivarianten Struktur auf  $\bar{\mathcal{F}}$  her, so erhalten wir mit dieser Konstruktion unsere äquivariante Struktur zurück.

## Übungen

*Übung 7.2.34.* Seien  $G$  eine zusammenhängende topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum. Bezeichne  $m, p : G \times X \rightarrow X$  die Operation beziehungsweise die Projektion auf  $X$  und sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$ . Gibt es einen Garbenhomomorphismus  $s : p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} m^*\mathcal{F}$ , der auf  $\{e\} \times X$  zur Identität einschränkt, so besitzt  $\bar{\mathcal{F}}$  genau eine stetige  $G$ -Operation, die  $\mathcal{F}$  zu einer  $G$ -äquivarianten Garbe macht. Hinweis: Man verwende 7.2.33 und ziehe sich auf den Fall  $X = G$  zurück.

*Übung 7.2.35.* Es operiere eine topologische Gruppe  $G$  auf einem Raum  $X$  und es sei  $N \subset G$  ein Normalteiler, der auf  $G$  topologisch frei operiert. Genau dann ist die Operation von  $G$  auf  $X$  topologisch frei, wenn die Operationen von  $N$  auf  $X$  und von  $G/N$  auf  $N \backslash X$  topologisch frei sind.

## 7.3 Äquivariante derivierte Kategorie

7.3.1. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  bezeichne  $\text{Der}(X) := \text{Der}(\text{Ab}/X)$  die derivierte Kategorie der abelschen Kategorie aller abelschen Garben auf  $X$ .

7.3.2. Ich erinnere aus 3.1.2 daran, daß eine stetige Abbildung topologischer Räume  $f : X \rightarrow Y$  **garbenazyklisch** heißt, wenn für jeden Komplex  $\mathcal{F} \in \text{Der}(\text{Ab}/Y)$  die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_* f^* \mathcal{F}$$

liefert. Sie heißt **bagazyklisch**, wenn sie unter jedem Basiswechsel eine garbenazyklische Abbildung liefert. Ein topologischer Raum  $X$  heißt **bagazyklisch**, wenn die konstante Abbildung  $X \rightarrow \text{top}$  die entsprechende Eigenschaft hat.

7.3.3 (**Produkte mit freien  $G$ -Räumen sind frei**). Sei  $G$  eine topologische Gruppe und seien  $P, X$  zwei  $G$ -Räume. Ist  $P$  topologisch frei, so ist auch das Produkt  $P \times X$  mit der diagonalen  $G$ -Operation topologisch frei. In der Tat reicht es aus, das unter der zusätzlichen Annahme  $P = G \times W$  zu zeigen, mit der Operation von  $G$  nur auf dem ersten Faktor. Dann aber erhalten wir einen Homöomorphismus  $G \times W \times X \xrightarrow{\sim} G \times W \times X$  durch die Vorschrift  $(g, w, x) \mapsto (g, w, gx)$ , und unter diesem Homöomorphismus entspricht die  $G$ -Operation nur auf dem ersten Faktor der diagonalen  $G$ -Operation auf dem ersten und letzten Faktor.

7.3.4. Gegeben ein eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  verstehen wir unter einer **Auflösung von  $X$**  einen  $G$ -äquivarianten Morphismus  $p : P \rightarrow X$  von einem topologisch freien  $G$ -Raum nach  $X$ .

**7.3.5 (Äquivalente derivierte Kategorie zu einer Auflösung).** Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  und eine bagazyklische Auflösung  $p : P \rightarrow X$  erklären wir die  $G$ -äquivalente derivierte Kategorie von  $X$  zu  $P$  als die volle Unterkategorie

$$\text{Der}_{G \setminus} (X; P) \subset \text{Der}(G \setminus P)$$

aller Komplexe, deren Rückzug unter  $\text{quot} : P \rightarrow G \setminus P$  isomorph ist zum Rückzug eines Komplexes aus  $\text{Der}(X)$  unter  $p : P \rightarrow X$ . In Formeln setzen wir also

$$\text{Der}_{G \setminus} (X; P) := \{ \mathcal{F} \in \text{Der}(G \setminus P) \mid \exists \mathcal{G} \in \text{Der}(X) \text{ mit } p^* \mathcal{G} \cong \text{quot}^* \mathcal{F} \}$$

*Vorschau 7.3.6.* Im folgenden werden wir zeigen, daß  $\text{Der}_{G \setminus} (X; P)$  in einem noch zu präzisierenden sehr starken Sinne von der bagazyklischen Auflösung  $P$  gar nicht abhängt, so daß wir  $P$  ohne Schaden aus der Notation entfernen dürfen. Jetzt aber versuchen wir erst einmal, die Sinnhaftigkeit unserer Definition durch Beispiele zu illustrieren.

*Beispiel 7.3.7 (Bezug zur äquivalenten Kohomologie).* Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  und eine bagazyklische Auflösung  $p : P \rightarrow X$  gehört für jede abelsche Gruppe  $M$  die konstante Garbe auf  $G \setminus P$  mit Faser  $M$  zu unserer äquivalenten derivierten Kategorie. Wir notieren dies Objekt  $M_X = M_{X;P} \in \text{Der}_{G \setminus} (X; P)$ . Es ist auch klar, daß  $\text{Der}_{G \setminus} (X; P)$  stabil ist unter den homologischen Verschiebungen  $[q]$ . Wir erhalten nun mit der offensichtlichen Verallgemeinerung von ?? auf bagazyklische stetige Abbildungen im letzten Schritt natürliche Isomorphismen

$$\text{Der}_{G \setminus} (X; P)(M_X, M_X[q]) \xrightarrow{\sim} H^q(G \setminus P; M) \xrightarrow{\sim} H_G^q(P; M) \xleftarrow{\sim} H_G^q(X; M)$$

Der Raum der Morphismen von  $M_X$  zu  $M_X[q]$  in unserer äquivalenten derivierten Kategorie ist mithin natürlich isomorph zur  $q$ -ten äquivalenten Kohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $M$ .

*Beispiel 7.3.8 (Äquivalente derivierte Kategorien zur Gruppe  $\mathbb{Z}$ ).* Im Fall der Gruppe  $G = \mathbb{Z}$  können wir  $E = \mathbb{R}$  nehmen und erhalten für jeden  $\mathbb{Z}$ -Raum  $X$  die bagazyklische Auflösung  $P = \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ . Der Quotient  $\mathbb{Z} \setminus P = \mathbb{R} \times_{/\mathbb{Z}} X$  ist dann ein Faserbündel über der Kreislinie  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  mit Faser  $X$ , die „verdrillt ist mit dem durch die Operation von  $1 \in \mathbb{Z}$  gegebenen Automorphismus von  $X$ “. Die äquivalente derivierte Kategorie hinwiederum ist in diesem Fall eine volle Unterkategorie der derivierten Kategorie zur Kategorie aller abelschen Garben auf diesem Faserbündel.

*Beispiel 7.3.9 (Äquivalente derivierte Kategorien zur Gruppe  $\mathbb{R}$ ).* Im Fall der Gruppe  $G = \mathbb{R}$  können wir auch  $E = \mathbb{R}$  nehmen und erhalten für einen  $\mathbb{R}$ -Raum



$X$  die bagazyklische Auflösung  $P = \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ . Der Quotient  $\mathbb{R} \backslash P = \mathbb{R} \times_{/\mathbb{R}} X$  ist dann eine Faserung über dem Punkt  $\mathbb{R}/\mathbb{R}$  mit Faser  $X$  und kanonisch isomorph zu  $X$  selber. Die äquivariante derivierte Kategorie ist in diesem Fall eine volle Unterkategorie der derivierten Kategorie zur Kategorie aller abelschen Garben auf  $X$ . Dasselbe gilt für jede zusammenziehbare topologische Gruppe  $G$ .

**7.3.10 (Triangulierung der äquivarianten derivierten Kategorien).** Für jeden  $G$ -Raum  $X$  mit bagazyklischer Auflösung  $p : P \rightarrow X$  ist äquivariante derivierte Kategorie  $\text{Der}_{G \backslash}(X; P)$  eine triangulierte Unterkategorie von  $\text{Der}(G \backslash P)$ . In der Tat induziert für  $\mathcal{G} \in \text{Der}(X)$  die Einheit der Adjunktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} p_* p^* \mathcal{G}$$

Die Bedingung, daß es  $\mathcal{G}$  gibt mit  $\text{quo}^* \mathcal{F} \cong p^* \mathcal{G}$ , ist also gleichbedeutend zur Bedingung, daß die Koeinheit der Adjunktion für  $\text{quo}^* \mathcal{F}$  einen Isomorphismus  $p^* p_* \text{quo}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{quo}^* \mathcal{F}$  induziert. Man sieht auch leicht, daß die Abschneide-funktoren  $\tau^{\leq n}$  und  $\tau^{\geq n}$  zu  $\text{Der}(G \backslash P)$  aus ?? die äquivariante derivierte Kategorie erhalten.

**Proposition 7.3.11 (Äquivariante Garben als gewöhnliche Garben).** Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum und  $p : P \rightarrow X$  eine Auflösung von  $X$ , die basisfest final ist mit zusammenhängenden Fasern. So erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Ens}_{/G \backslash X} \xrightarrow{\sim} \{ \mathcal{F} \in \text{Ens}_{G \backslash P} \mid \exists \mathcal{G} \in \text{Ens}_{/X} \text{ mit } p^* \mathcal{G} \cong \text{quo}^* \mathcal{F} \}$$

für  $\text{quo} : P \rightarrow G \backslash P$  der Quotient durch die Vorschrift  $\bar{\mathcal{E}} \mapsto G \backslash (P \times_X \bar{\mathcal{E}})$  auf den étalen Räumen.

*Beweis.* Zunächst prüfen wir, daß unser Funktor überhaupt sinnvoll definiert ist. Nach 7.2.23 ist mit  $P \times_X \bar{\mathcal{E}} \rightarrow P$  auch  $G \backslash (P \times_X \bar{\mathcal{E}}) \rightarrow G \backslash P$  étale. Also ist unser Funktor sinnvoll definiert. Einen quasiinversen Funktor erhält man, indem man bemerkt, daß nach [TG] 4.3.21 die Einheit der Adjunktion eine Isotransformation  $\text{id} \xrightarrow{\sim} p_* p^*$  ist und wir folglich  $\mathcal{G}$  aus  $\mathcal{F}$  zurückgewinnen können als  $\mathcal{G} = p_* \text{quo}^* \mathcal{F}$ . Das zeigt, daß  $\bar{\mathcal{G}}$  zumindest genau eine stetige Operation von  $G^{\text{dis}}$  trägt, die unter Rückzug die Operation von  $G$  auf  $\overline{\text{quo}^* \mathcal{F}} \cong P \times_X \bar{\mathcal{G}}$  als Garbe auf  $P$  wird. Da aber die zurückgeholte Operation stetig ist als Operation von  $G$ , muß auch die Operation auf  $\bar{\mathcal{G}}$  selbst stetig sein, denn sie paßt in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times (P \times_X \bar{\mathcal{G}}) & \rightarrow & P \times_X \bar{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times \bar{\mathcal{G}} & \rightarrow & \bar{\mathcal{G}} \end{array}$$

und die linke Vertikale ist aufgrund unserer Annahmen an  $p$  final. □

**7.3.12 (Äquivariante Garben und äquivariante derivierte Kategorie).** Sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum. Gegeben eine bagazyklische Auflösung  $P \rightarrow X$ , die außerdem basisfest final ist mit zusammenhängenden Fasern, liefern unsere Proposition 7.3.11 eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der äquivarianten abelschen Garben auf einem  $G$ -Raum  $X$  im anschaulichen Sinne [TG] 7.1.4 und der vollen Unterkategorie aller Komplexe  $\mathcal{F} \in \text{Der}_{G \setminus}(X; P)$  der äquivarianten derivierten Kategorie, die exakt sind außerhalb vom Grad Null, alias eine Äquivalenz

$$\text{Ab}_{/G \setminus X} \xrightarrow{\cong} \{\mathcal{F} \in \text{Der}_{G \setminus}(X; P) \mid \mathcal{H}^i \mathcal{F} \neq 0 \Rightarrow i = 0\}$$

Unsere Konstruktion liefert sogar einen triangulierten Funktor  $\text{Der}(\text{Ab}_{/G \setminus X}) \rightarrow \text{Der}_{G \setminus}(X; P)$ . Dieser Funktor ist nur in Ausnahmefällen eine Äquivalenz von Kategorien. Ein solcher Ausnahmefall ist der Fall der trivialen Gruppe  $G = 1$ . In diesem Fall induziert der Rückzug unter  $\text{pr} : P \rightarrow X$  offensichtlich eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\text{Der}(\text{Ab}_{/X}) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{1 \setminus}(X; P)$$

In 7.3.13 zeigen wir, daß es stets bagazyklische Auflösungen gibt, die auch basisfest final sind mit zusammenhängenden Fasern.

**7.3.13 (Bagazyklische Auflösung mit der Milnor-Konstruktion).** Die Milnor-Konstruktion [TG] 7.3.5 liefert zu einer beliebigen topologischen Gruppe  $G$  einen topologisch freien zusammenziehbaren  $G$ -Raum  $EG$ , den abzählbaren Join  $EG = *_{i \in \mathbb{N}} G$  mit seiner Milnor-Topologie. Insbesondere ist  $EG$  nach 3.1.4 basisfest azyklisch im Sinne von 3.1.2. Man nennt  $EG$  auch den „Totalraum des klassifizierenden Bündels“ aus Gründen, die hier nicht diskutiert werden sollen. Diese Konstruktion ist sogar funktoriell in dem Sinne, daß jeder stetige Homomorphismus von topologischen Gruppen  $\phi : G \rightarrow H$  einen Morphismus von Räumen mit Operation  $\phi \setminus E\phi : EG \rightarrow EH$  induziert. Gegeben ein  $G$ -Raum  $X$  ist dann die Projektion  $EG \times X \rightarrow X$  mit der diagonalen  $G$ -Operation vorne offensichtlich eine bagazyklische Auflösung und darüber hinaus basisfest final mit zusammenhängenden Fasern.

**Definition 7.3.14.** Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  erklären wir die  $G$ -äquivariante derivierte Kategorie von  $X$  mithilfe der Milnor-Konstruktion [TG] 7.3.5 eines universellen Bündels  $EG$  als die äquivariante derivierte Kategorie zur bagazyklischen Auflösung  $\text{pr}_X : EG \times X \rightarrow X$  und setzen also in Formeln

$$\begin{aligned} \text{Der}_{G \setminus}(X) &:= \text{Der}_{G \setminus}(X; EG \times X) \\ &= \{\mathcal{F} \in \text{Der}(EG \times_{/G} X) \mid \exists \mathcal{G} \in \text{Der}(X) \text{ mit } \text{pr}_X^* \mathcal{G} \cong \text{quot}^* \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

**Lemma 7.3.15 (Freie Quotienten und Rückzug).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X \rightarrow Y$  eine stetige bagazyklische  $G$ -äquivariante Abbildung von topologisch freien  $G$ -Räumen. So gilt:*

1. *Die induzierte Abbildung  $X/G \rightarrow Y/G$  ist bagazyklisch;*
2. *Ein Objekt  $\mathcal{F} \in \text{Der}(X/G)$  kommt von  $Y/G$  her genau dann, wenn sein Rückzug nach  $X$  von  $Y$  herkommt.*

*Beweis.* Nach Annahme besitzt jeder Punkt von  $Y/G$  eine offene Umgebung  $W \Subset Y/G$ , auf der die Projektion eine stetige Spaltung  $W \hookrightarrow Y$  besitzt. Mit dem entsprechenden Faserprodukt  $F$  erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X/G & \longleftarrow & X & \longleftarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y/G & \longleftarrow & Y & \longleftarrow & W \end{array}$$

In diesem Diagramm ist nach 7.2.20 auch das linke Quadrat kartesisch. Folglich ist auch das einhüllende Rechteck kartesisch und seine Horizontalen sind offene Einbettungen. Die Eigenschaft bagazyklisch ist nun lokal in der Basis und das zeigt die erste Aussage. Weiter zeigt in der Situation von Teil 2 Rückzug auf die rechte Vertikale, daß unser  $\mathcal{F}$  lokal von unten herkommt. Damit aber kommt es nach 3.1.7 auch global von unten her.  $\square$

**Lemma 7.3.16 (Unabhängigkeit von der Wahl der Auflösung).** *Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  und ein Morphismus  $a : P \rightarrow Q$  von bagazyklischen Auflösungen ist der Rückzug auf unseren derivierten Kategorien eine Äquivalenz*

$$\text{Der}_{G \setminus}(X; Q) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{G \setminus}(X; P)$$

7.3.17. Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Raum  $X$  und eine bagazyklische Auflösung  $p : P \rightarrow X$  liefern insbesondere die Rückzüge längs der Projektionen Äquivalenzen von Kategorien

$$\text{Der}_{G \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{G \setminus}(X; EG \times_X P) \xleftarrow{\cong} \text{Der}_{G \setminus}(X; P)$$

*Beweis.* Gegeben bagazyklische Auflösungen  $P, Q$  ist offensichtlich auch ihr Produkt  $P \times_X Q$  mit der diagonalen  $G$ -Wirkung eine bagazyklische Auflösung. Wir beginnen damit, das Lemma im Fall der Projektion  $P \times_X Q \rightarrow Q$  zu zeigen. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G \setminus(P \times_X Q) & \longleftarrow & P \times_X Q & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ G \setminus Q & \longleftarrow & Q & \longrightarrow & X \end{array}$$

sind dann die Vertikalen garbenazyklisch. Damit ist der Rückzug längs jeder Vertikale schon mal ein volltreuer Funktor. Es gilt zu zeigen, daß der Rückzug längs der linken Vertikale auch essentiell surjektiv ist auf den entsprechenden Kategorien. Ein Objekt von  $\text{Der}_{G\setminus}(X; P \times_X Q)$  ist charakterisiert durch die Eigenschaft, daß sein Rückzug nach  $P \times_X Q$  von  $X$  herkommt. A fortiori kommt dieser Rückzug dann auch von  $Q$  her, und dann zeigt Lemma 7.3.15 über freie Quotienten und Rückzug, daß unser Objekt bereits selbst von  $\text{Der}_{G\setminus}(X; Q)$  herkommen muß. Damit ist das Lemma für den durch die Projektion gegebenen Morphismus von bagazyklischen Auflösungen  $\text{pr}_Q : P \times_X Q \rightarrow Q$  gezeigt. Ist  $a : P \rightarrow Q$  ein beliebiger Morphismus von bagazyklischen Auflösungen, so können wir den Morphismus von bagazyklischen Auflösungen  $(\text{id}, a) : P \rightarrow P \times_X Q$  betrachten und wegen  $\text{pr}_P \circ (\text{id}, a) = \text{id}$  muß dann auch der Rückzug mit  $(\text{id}, a)$  eine Äquivalenz von Kategorien  $\text{Der}_{G\setminus}(X; P \times_X Q) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{G\setminus}(X; P)$  sein. Mit  $\text{pr}_Q \circ (\text{id}, a) = a$  folgt das Lemma im allgemeinen.  $\square$

**7.3.18 (Übergang zu Standardauflösungen).** Ist  $G\setminus X \rightarrow H\setminus Y$  ein Morphismus von Räumen mit Gruppenoperation und  $G\setminus P \rightarrow H\setminus Q$  ein Lift zu einem Morphismus von bagazyklischen Auflösungen und  $G\setminus P' \rightarrow H\setminus Q'$  ein weiterer derartiger Lift, so erhalten wir ein Diagramm aus Rückzügen und Isotransformationen

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Der}_{G\setminus}(X; P) & \xrightarrow{\sim} & \text{Der}_{G\setminus}(X; P \times_X P') & \xleftarrow{\sim} & \text{Der}_{G\setminus}(X; P') \\
 \uparrow & \swarrow \sim & \uparrow & \searrow \sim & \uparrow \\
 \text{Der}_{H\setminus}(Y; Q) & \xrightarrow{\sim} & \text{Der}_{H\setminus}(Y; Q \times_X Q') & \xleftarrow{\sim} & \text{Der}_{H\setminus}(Y; Q')
 \end{array}$$

mit Äquivalenzen in den Horizontalen und Rückzügen in den Vertikalen. So sehen wir zum Beispiel, daß wenn wir einen Lift unseres Morphismus zu einem Morphismus von bagazyklischen Auflösungen so finden können, der Rückzug eine Äquivalenz  $\text{Der}_{H\setminus}(Y; Q) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{G\setminus}(X; P)$  induziert, daß er dann für jeden derartigen Lift eine Äquivalenz induziert und damit insbesondere eine Äquivalenz  $\text{Der}_{H\setminus}(Y) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{G\setminus}(X)$  für die mit den Milnorkonstruktionen erklärten äquivarianten derivierten Kategorien.

**7.3.19 (Äquivariante derivierte Kategorien für die triviale Gruppe).** Unsere Äquivalenz zwischen äquivarianten Garben für die triviale Gruppe und gewöhnlichen Garben auf einem Raum  $X$  erhalten wir nocheinmal als die Verknüpfung

$$\text{Der}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{1\setminus}(X; X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{1\setminus}(X)$$

mit dem Rückzug unter dem Morphismus  $E1 \times X \rightarrow X$  von bagazyklischen Auflösungen als zweitem Funktor und dem offensichtlichen ersten Funktor.

7.3.20. Wir definieren die Kategorie  $\text{Topoga}$  aller Tripel  $(P, G, X)$  bestehend aus einem Raum mit Gruppenoperation  $G \setminus X$  und einer **Auflösung**  $P$  von  $X$ . Morphismen  $(P, G, X) \rightarrow (Q, H, Y)$  sind Tripel  $(a, \phi, f)$  mit  $a : P \rightarrow Q$  und  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\phi : G \rightarrow H$  einem stetigen Gruppenhomomorphismus derart, daß  $\phi \setminus f$  sowie  $\phi \setminus a$  Morphismen von Räumen mit Operation sind. Der Rückzug von Garben liefert dann in offensichtlicher Weise eine Trennfaserung über der banalen Trennkategorie unserer Kategorie  $\text{Topoga}$  mit der opponierten Kategorie zu  $\text{Der}_{G \setminus X}(X; P)$  als Faser über  $(P, G, X)$ . Lassen wir als kriech-Morphismen nur Tripel  $(a, \text{id}, f)$  zu mit  $f$  lokal eigentlich separiert und so, daß der Morphismus  $a$  von Auflösungen zusammen mit  $f$  ein kartesisches Diagramm liefert, und notieren diese Unterkategorie  $\text{Topoga}^{\text{les}}$ , so erhalten wir eine verflochtene Trenaustausch-situation

$$(\text{Der}_{\text{Topoga}}^- \rightarrow \text{Topoga} \supset \text{Topoga}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{\text{Topoga}^{\text{les}}}^{-!}, \text{Topoga}^{\text{es}})$$

Bei der zusätzlichen Beschränkung auf kriech-lesb-Morphismen, die wir  $\text{Topoga}^{\text{lesb}}$  notieren, erhalten wir sogar für die unbeschränkten derivierten Kategorien eine verflochtene Trenaustausch-situation

$$(\text{Der}_{\text{Topoga}} \rightarrow \text{Topoga} \supset \text{Topoga}^{\text{lesb}} \leftarrow \text{Der}_{\text{Topoga}^{\text{lesb}}}^!, \text{Topoga}^{\text{esb}})$$

7.3.21 (**Äquivarianter Drei-Funktor-Formalismus**). Bezeichne nun  $\text{Topog}$  die Kategorie der topologischen Räume mit Operation einer topologischen Gruppe. Unsere Trennfaserung  $\text{Der}_{\text{Topog}} \rightarrow \text{Topog}$  aus 7.3.20 ?????????? restringiert zu einer Trennfaserung

$$\text{Der}_{\text{Topog}} \rightarrow \text{Topog}$$

mit der opponierten Kategorie zur äquivarianten derivierten Kategorie  $\text{Der}_{G \setminus X}(X)$  als Faser über  $G \setminus X$ . Wir können also Objekte der äquivarianten derivierten Kategorien tensorieren und zurückziehen sowohl unter stetigen Abbildungen als auch unter stetigen Gruppenhomomorphismen, und diese ganzen Konstruktionen sind miteinander verträglich. Den Rückzug unter einem stetigen Gruppenhomomorphismus  $\phi : H \rightarrow G$  notieren wir

$$\phi^* = \text{res}_G^H : \text{Der}_{G \setminus X}(X) \rightarrow \text{Der}_{H \setminus X}(X)$$

Des weiteren ist für jede unter einer topologischen Gruppe  $G$  äquivariante lokal eigentliche separierte Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  auch die induzierte Abbildung  $EG \times_{/G} X \rightarrow EG \times_{/G} Y$  lokal eigentlich separiert und lokal eigentlicher Basiswechsel zeigt, daß der Eigvorschub mit dieser Abbildung einen Funktor

$$f_! : \text{Der}_{G \setminus X}(X) \rightarrow \text{Der}_{G \setminus Y}(Y)$$

induziert, wenn  $f$  sogar eine lesb-Abbildung ist, und sonst immer noch einen Funktor

$$f_! : \text{Der}_{G \setminus}^+(X) \rightarrow \text{Der}_{G \setminus}^+(Y)$$

Insbesondere erhalten wir so für eine beliebige aber feste topologische Gruppe  $G$ -äquivariante Analoga  $\text{Der}_{//G \setminus \text{Top}}^-$  und  $\text{Der}_{//G \setminus \text{Top}}$  unserer in ?? und 5.5.21 betrachteten verflochtenen Trennaustauschsituationen. Das alles ist jedoch zusätzlich noch verträglich mit dem Rückzug unter stetigen Gruppenhomomorphismen und ist formal eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$(\text{Der}_{//\text{Topog}}^- \rightarrow \text{Topog} \supset \text{Topog}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Topog}^{\text{les}}}^!, \text{Topog}^{\text{es}})$$

mit der Maßgabe, daß wir in  $\text{Topog}^{\text{les}}$  nur lokal eigentliche separierte äquivariante Abbildungen zwischen Räumen mit Gruppenoperation zulassen, bei denen der entsprechende Gruppenhomomorphismus ein Isomorphismus ist, und bei  $\text{Topog}^{\text{es}}$  nur eigentliche derartige Abbildungen. Ebenso erhalten wir eine verflochtene Trennaustauschsituation

$$(\text{Der}_{//\text{Topog}} \rightarrow \text{Topog} \supset \text{Topog}^{\text{les}} \leftarrow \text{Der}_{//\text{Topog}^{\text{lesb}}}^!, \text{Topog}^{\text{esb}})$$

mit unbeschränkten äquivarianten derivierten Kategorien als Fasern, wenn wir in  $\text{Topog}^{\text{lesb}}$  nur lesb-Abbildungen zulassen und ebenso bei  $\text{Topog}^{\text{esb}}$  nur eigentliche lesb-Abbildungen. Salopp gesprochen kann man also mit  $(f^*, \otimes, f_!)$  äquivariant so rechnen, als gebe es die Gruppenoperation gar nicht, und kann dabei die Gruppenoperation zurückziehen unter stetigen Gruppenhomomorphismen  $\text{res}_G^H = \phi^*$ , ohne daß das die restlichen Formeln beeinflußt.

7.3.22. Insbesondere liefert der Rückzug auf die triviale Gruppe gefolgt von einem Quasiinversen der Äquivalenz 7.3.12 alias dem Vorschub unter  $E1 \times X \rightarrow X$  einen triangulierten Funktor

$$\text{Der}_{G \setminus}(X) \rightarrow \text{Der}(X)$$

Wir nennen ihn das **Vergessen der Gruppenoperation**. Die Konstruktion zeigt, daß ein Objekt, daß beim Vergessen der Gruppenoperation zu Null wird, bereits Null gewesen sein muß. Mithin müssen auch Morphismen, die beim Vergessen der Gruppenoperation Isomorphismen werden, bereits Isomorphismen gewesen sein. Das Vergessen der Gruppenoperation ist in offensichtlicher Weise verträglich mit unseren Funktoren  $(f^*, \otimes, f_!)$ . Formal ist diese Aussage für die Restriktion  $\text{Der}_{G \setminus}(X) \rightarrow \text{Der}_{1 \setminus}(X)$  auf die triviale Gruppe Teil des äquivarianten Drei-Funktor-Formalismus 7.3.21 und für die Äquivalenzen  $\text{Der}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{1 \setminus}(X)$  Teil des mit Auflösungen angereicherten äquivarianten Drei-Funktor-Formalismus 7.3.20 zusammen mit der Unabhängigkeit 7.3.16 von der Auflösung.

## 7.4 Äquivariante Varianten der Adjungierten

7.4.1. Um die Existenz der Adjungierten  $(f_*, \Rightarrow, f^!)$  zu  $(f^*, \otimes, f_!)$  im äquivarianten Kontext zeigen, benötigen wir zusätzliche Voraussetzungen an unsere Gruppe. Wir werden zeigen, daß es diese Adjungierten im Fall von Liegruppen stets gibt und daß sie in diesen Fällen auch mit dem Zurückziehen der Operation verträglich sind. Die Frage der Existenz von Adjungierten zur Restriktion der Gruppenwirkung diskutieren wir im anschließenden Abschnitt.

**Lemma 7.4.2 (Vertauschen von Rückzug und internem Hom).** *Gegeben ein Faserbündel  $f : X \rightarrow Y$  mit offenlokal bagazyklischer Faser ist für alle  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Der}(\text{Ab}_{/Y})$  der natürliche Morphismus aus 1.5.9 ein Isomorphismus*

$$f^*(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} (f^* \mathcal{F} \Rightarrow f^* \mathcal{G})$$

*Beweis.* Mit unserem Verschwindungskriterium [TD] 3.4.26 können wir uns darauf beschränken, zu zeigen, daß für  $f : X \rightarrow Y$  garbenazyklisch der obige Morphismus einen Isomorphismus  $f_* f^*(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_*(f^* \mathcal{F} \Rightarrow f^* \mathcal{G})$  induziert. Da jedoch die Einheit der Adjunktion in diesem Fall eine Isotransformation  $\text{id} \xrightarrow{\sim} f_* f^*$  ist, reicht es zu zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f_* f^*(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) & \longrightarrow & f_*(f^* \mathcal{F} \Rightarrow f^* \mathcal{G}) \\ \wr \uparrow & & \wr \uparrow \\ (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{F} \Rightarrow f_* f^* \mathcal{G}) \end{array}$$

kommutiert mit der rechten Vertikale aus 1.5.7. Um das zu sehen, dürfen wir die Adjunktion anwenden und statt beiden  $f_*$  in der oberen Horizontale vor beide Ausdruck der unteren Horizontale ein  $f^*$  davorschreiben. Dann steht in der linken Vertikale die Identität und die Kommutativität folgt aus der Definition der beteiligten Morphismen.  $\square$

**Satz 7.4.3 (Äquivarianter Vorschub und internes Hom).** *Gegeben eine offenlokal zusammenziehbare Gruppe  $G$  gilt:*

1. *Für jeden  $G$ -Raum  $X$  ist  $\text{Der}_{G \setminus}(X) \subset \text{Der}(EG \times_{/G} X)$  stabil unter internem Hom  $\Rightarrow$  und insbesondere hat die Schmelzkategorie  $\text{Der}_{G \setminus}(X)$  internes Hom;*
2. *Für jede stetige  $G$ -äquivariante Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von  $G$ -Räumen bildet der Vorschub  $(\text{id} \times_{/G} f)_*$  die Kategorie  $\text{Der}_{G \setminus}(X)$  nach  $\text{Der}_{G \setminus}(Y)$  ab und liefert mithin einen Rechtsadjungierten  $f_*$  von  $f^*$ .*

*Beweis.* Die erste Aussage folgt mit dem Vertauschen von Rückzug und internem Hom 7.4.2 aus der Erkenntnis [TG] 7.3.8, daß mit  $G$  auch  $EG$  offenlokal zusammenziehbar ist. Die zweite Aussage folgt genauso mit gefasertem Basiswechsel 3.2.2.  $\square$

7.4.4. Gegeben ein stetiger Homomorphismus von offenlokal zusammenziehbaren Gruppen  $G \rightarrow H$  liefert die Restriktion  $\text{res}_H^G f^* f_* \Rightarrow \text{res}_H^G$  der Koeinheit der Adjunktion zunächst  $f^* \text{res}_H^G f_* \Rightarrow \text{res}_H^G$  und dann  $\text{res}_H^G f_* \Rightarrow f_* \text{res}_H^G$ . Ich behaupte, daß diese letzte Transformation eine Isotransformation

$$\text{res}_H^G f_* \xrightarrow{\sim} f_* \text{res}_H^G$$

ist. Da unter Restriktion nur Isomorphismen zu Isomorphismen werden, müssen wir unsere Behauptung nur für die triviale Gruppe  $G = 1$  prüfen. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E1 \times X & \rightarrow & EH \times X & \rightarrow & EH \times_{/H} X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E1 \times Y & \rightarrow & EH \times Y & \rightarrow & EH \times_{/H} Y \end{array}$$

Es gilt zu zeigen, daß für  $\mathcal{F} \in \text{Der}_{\setminus H}(X) \subset \text{Der}(EH \times_{/H} X)$  der Basiswechsel zur derivierten Garbenopfaserung im einhüllenden Rechteck einen Isomorphismus liefert. Im rechten Teilrechteck gilt das schon mal nach gefasertem Basiswechsel. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E1 \times X & \rightarrow & EH \times X & \rightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E1 \times Y & \rightarrow & EH \times Y & \rightarrow & Y \end{array}$$

liefert der Basiswechsel zur derivierten Garbenopfaserung sowohl im einhüllenden Rechteck als auch im rechten Teilrechteck einen Isomorphismus, wieder nach gefasertem Basiswechsel. Also induziert er im linken Teilrechteck einen Isomorphismus für alle Objekte, die durch Rückzug von  $X$  herkommen. Setzen wir diese Erkenntnis oben ein, so folgt die Behauptung.

7.4.5. Gegeben ein stetiger Homomorphismus von offenlokal zusammenziehbaren Gruppen  $G \rightarrow H$  liefert die Komposition

$$(\text{res}_H^G \mathcal{F}) \otimes \text{res}_H^G (\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \text{res}_H^G (\mathcal{F} \otimes (\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{H})) \rightarrow \text{res}_H^G \mathcal{H}$$

durch das Herüberschaffen von  $\text{res}_H^G \mathcal{F}$  einen natürlichen Morphismus, von dem ich behaupte, daß er ein Isomorphismus

$$\text{res}_H^G (\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} (\text{res}_H^G \mathcal{F}) \rightrightarrows (\text{res}_H^G \mathcal{H})$$

ist. Da unter Restriktion nur Isomorphismen zu Isomorphismen werden, müssen wir unsere Behauptung nur für die triviale Gruppe  $G = 1$  prüfen. Das geht analog wie in 7.4.4, nur einfacher.



**Lemma 7.4.6.** *Ist  $E$  ein offenlokal bagazyklischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  lesb, so ist die offensichtliche Transformation eine Isotransformation*

$$\mathrm{pr}_X^* f^! \xrightarrow{\cong} (\mathrm{id} \times f)^! \mathrm{pr}_Y^*$$

*Beweis.* Nach unserem Verschwindungskriterium [TD] 3.4.27 reicht es zu zeigen, daß für  $E$  bagazyklisch unsere Transformation unter  $\mathrm{pr}_{X^*}$  eine Isotransformation wird. Das folgt jedoch unmittelbar aus lokal eigentlichem Basiswechsel.  $\square$

**Satz 7.4.7 (Äquivarianter Eigrückzug).** *Gegeben eine Liegruppe  $G$  und eine  $G$ -äquivariante lesb-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von  $G$ -Räumen bildet der Eigrückzug  $(\mathrm{id} \times_{/G} f)^!$  die Kategorie  $\mathrm{Der}_{G \setminus}(Y)$  nach  $\mathrm{Der}_{G \setminus}(X)$  ab und liefert mithin einen Rechtsadjungierten  $f^!$  von  $f$ .*

*Beweis.* Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} EG \times_{/G} X & \xleftarrow{\mathrm{quo}_X} & EG \times X & \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} & X \\ \downarrow \mathrm{id} \times_{/G} f & & \downarrow \mathrm{id} \times f & & \downarrow f \\ EG \times_{/G} Y & \xleftarrow{\mathrm{quo}_Y} & EG \times Y & \xrightarrow{\mathrm{pr}_Y} & Y \end{array}$$

Die horizontalen Abbildungen nach links sind  $d$ -mannigfaltig für  $d = \dim G$  und jede Wahl einer äquivarianten Orientierung von  $G$  liefert eine Trivialisierung ihrer relativen Orientierungsgarbe und damit liefern unsere Erkenntnisse 6.1.8 zum mannigfaltigen Rückzug Isotransformationen  $\mathrm{quo}_Y^* \xrightarrow{\cong} \mathrm{quo}_Y^![-d]$  und  $\mathrm{quo}_X^* \xrightarrow{\cong} \mathrm{quo}_X^![-d]$ . So folgt  $\mathrm{quo}_X^*(\mathrm{id} \times_{/G} f)^! \mathcal{F} \cong (\mathrm{id} \times f)^! \mathrm{quo}_Y^* \mathcal{F}$  für alle  $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(EG \times_{/G} Y)$  und aus  $\mathrm{quo}_Y^* \mathcal{F} \cong \mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G}$  folgt mit unserem Lemma 7.4.6 unmittelbar

$$\mathrm{quo}_X^*(\mathrm{id} \times_{/G} f)^! \mathcal{F} \cong (\mathrm{id} \times f)^! \mathrm{quo}_Y^* \mathcal{F} \cong (\mathrm{id} \times f)^! \mathrm{pr}_Y^* \mathcal{G} \cong \mathrm{pr}_X^* f^! \mathcal{G} \quad \square$$

7.4.8. Gegeben ein stetiger Homomorphismus  $G \rightarrow H$  von mannigfaltigen Gruppen liefert die Restriktion der Koeinheit der Adjunktion  $\mathrm{res}_H^G f_! f^! \Rightarrow \mathrm{res}_H^G$  zunächst  $f_! \mathrm{res}_H^G f^! \Rightarrow \mathrm{res}_H^G$  und dann  $\mathrm{res}_H^G f^! \Rightarrow f^! \mathrm{res}_H^G$ . Ich behaupte, daß diese letzte Transformation eine Isotransformation

$$\mathrm{res}_H^G f^! \xrightarrow{\cong} f^! \mathrm{res}_H^G$$

ist. Da unter Restriktion nur Isomorphismen zu Isomorphismen werden, müssen wir unsere Behauptung nur für die triviale Gruppe  $G = 1$  prüfen. Das geht analog wie wir es in 7.4.4 im Fall des Vorschubs ausgeführt hatten.

## 7.5 Äquivalenzen mit Gruppenwechsel

**Satz 7.5.1 (Quotientenäquivalenz).** *Operiert eine topologische Gruppe  $G$  topologisch frei auf einem topologischen Raum  $X$ , so ist der äquivariante Rückzug eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}_{1\backslash}(G\backslash X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X)$$

*Beweis.* Aufgrund der Unabhängigkeit 7.3.16 von der Wahl der bagazyklischen Auflösung reicht es zu zeigen, daß der äquivariante Rückzug eine Äquivalenz

$$\mathrm{Der}_{1\backslash}(G\backslash X; G\backslash X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X)$$

induziert. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} EG \times_{/G} X & \longleftarrow & EG \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ G\backslash X & \longleftarrow & X & \longrightarrow & X \end{array}$$

Da  $G$  topologisch frei auf  $X$  operiert, ist die linke Vertikale ein Faserbündel mit Faser  $EG$  und ist insbesondere garbenazyklisch. Wir müssen also nur zeigen, daß jedes Objekt links oben, dessen Rückzug in die Mitte von unten herkommt, bereits selbst von unten herkommt. Das aber folgt aus unserem Lemma 7.3.15 über freie Quotienten und Rückzug.  $\square$

**Satz 7.5.2 (Verfeinerte Quotientenäquivalenz).** *Operiert eine topologische Gruppe  $G$  auf einem Raum  $X$  und ist  $H \subset G$  ein Normalteiler, der sowohl auf  $G$  als auch auf  $X$  topologisch frei operiert, so induziert der Rückzug mit der Quotientenabbildung  $G\backslash X \rightarrow (H\backslash G)\backslash(H\backslash X)$  eine Äquivalenz*

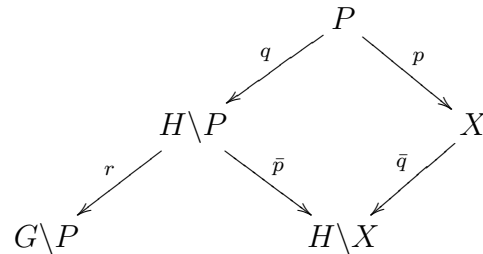
$$\mathrm{Der}_{(H\backslash G)\backslash}(H\backslash X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{G\backslash}(X)$$

*Beweis.* Wir setzen  $P := EG \times X \rightarrow X$ . Nach 7.2.20 erhalten wir ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ H\backslash P & \longrightarrow & H\backslash X \end{array}$$

Hier ist auch die untere Horizontale bagazyklisch, da sie sich lokal in der Basis als Rückzug der oberen Horizontale beschreiben läßt. Es ist leicht zu sehen, daß  $H\backslash P$  topologisch frei ist als  $(H\backslash G)$ -Raum und daß die offensichtliche Abbildung

einen Homöomorphismus  $c : G \backslash P \xrightarrow{\sim} (H \backslash G) \backslash (H \backslash P)$  induziert. Wir betrachten nun das Diagramm



und behaupten, daß das Zurückholen mit  $c$  eine Äquivalenz

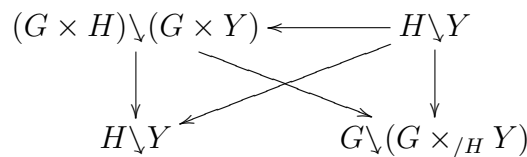
$$\mathrm{Der}_{(H \backslash G) \backslash} (H \backslash X; H \backslash P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{G \backslash} (X; P)$$

induziert. In der Tat, gibt es für  $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}(G \backslash P)$  ein  $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(H \backslash X)$  mit  $r^* \mathcal{F} \cong \bar{p}^* \mathcal{G}$ , so folgt  $(r \circ q)^* \mathcal{F} \cong p^*(\bar{q}^* \mathcal{G})$  und folglich  $\mathcal{F} \in \mathrm{Der}_{G \backslash} (X; P)$ . Gibt es umgekehrt  $\mathcal{G}' \in \mathrm{Der}(X)$  mit  $(r \circ q)^* \mathcal{F} \cong p^* \mathcal{G}'$ , so gibt es nach Lemma 7.3.15 über freie Quotienten und Rückzug ein  $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}(H \backslash X)$  mit  $r^* \mathcal{F} \cong \bar{p}^* \mathcal{G}$ . Der Satz folgt mit 7.3.18.  $\square$

**Satz 7.5.3 (Induktionsäquivalenz).** Gegeben  $H \subset G$  eine Untergruppe, die topologisch frei auf  $G$  operiert, und  $Y$  ein  $H$ -Raum liefert das Zurückholen längs des offensichtlichen Morphismus  $H \backslash Y \rightarrow G \backslash (G \times_{/H} Y)$  eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Der}_{G \backslash} (G \times_{/H} Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{H \backslash} (Y)$$

*Beweis.* Wir betrachten zusätzlich  $(G \times H) \backslash (G \times Y)$  mit der Operation gegeben durch  $(g, h)(x, y) := (gxh^{-1}, hy)$  und erhalten ein kommutatives Diagramm



mit der oberen Horizontale gegeben durch  $h \mapsto (h, h)$  und  $y \mapsto (1, y)$ . Die Rückzüge in die obere linke Ecke sind verallgemeinerte Quotientenäquivalenzen. Es folgt, daß erst der Rückzug längs der oberen Horizontale und dann der Rückzug längs der rechten Vertikale auch Äquivalenzen sind.  $\square$

## 7.6 Vernachlässigen zusammenziehbarer Anteile

**Satz 7.6.1 (Operationen zusammenziehbarer Gruppen).** Operiert eine zusammenziehbare topologische Gruppe  $N$  auf einem topologischen Raum  $X$ , so ist das

Vergessen der Gruppenoperation für  $m, \text{pr} : N \times X \rightarrow X$  die Operation beziehungsweise die Projektion eine Äquivalenz

$$\text{Der}_{N \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \{\mathcal{F} \in \text{Der}(X) \mid m^* \mathcal{F} \cong \text{pr}^* \mathcal{F}\}$$

*Beweis.* Per definitionem ist  $\text{Der}_{N \setminus}(X; N \times X)$  die Kategorie

$$\{\mathcal{F} \in \text{Der}(N \times_{/N} X) \mid \exists \mathcal{G} \in \text{Der}(X) \text{ mit } \text{quo}^* \mathcal{F} \cong \text{pr}^* \mathcal{G}\}$$

Die Multiplikation induziert hier einen Homöomorphismus  $\bar{m} : N \times_{/N} X \xrightarrow{\cong} X$  mit  $\bar{m} \circ \text{quo} = m$ . Jetzt müssen wir nur noch bemerken, daß aus  $m^* \mathcal{F} \cong \text{pr}^* \mathcal{G}$  mit der Einschränkung unter  $X \rightarrow N \times X$  mit  $x \mapsto (1, x)$  folgt  $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ .  $\square$

**Proposition 7.6.2 (Volltreues Einschränken).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe, die auf  $G$  topologisch frei operiert. Ist  $G/H$  bagazyklisch, so ist für jeden  $G$ -Raum  $X$  die Restriktion ein volltreuer Funktor*

$$\text{Der}_{G \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{H \setminus}(X)$$

7.6.3. Den Fall  $H = 1$  haben wir bereits in 7.6.1 behandelt. Ich wundere mich, daß die analoge Aussage in 7.2.30 so viel schwächere Voraussetzungen braucht. Ich wüßte zum Beispiel gerne, ob das Einschränken unter surjektiven Gruppenhomomorphismen volltreu ist, etwa für die Identität auf der Kreislinie, einmal mit der diskreten und einmal mit der üblichen Topologie versehen.

*Beweis.* Die Projektion  $EG \times_{/H} X \rightarrow EG \times_{/G} X$  ist eine Faserung mit Faser  $G/H$  und damit nach 3.1.5 garbenazyklisch. Das Zurückholen darunter liefert mithin einen volltreuen Funktor  $\text{Der}(EG \times_{/G} X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}(EG \times_{/H} X)$  und a forteriori auch einen volltreuen Funktor

$$\text{Der}_{G \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{H \setminus}(X; EG \times X).$$

Mit dem Übergang zu Standardauflösungen 7.3.18 folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 7.6.4 (Irrelevante Operationen).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum und  $N \subset G$  ein zusammenziehbarer Normalteiler, der trivial auf  $X$  und topologisch frei auf  $G$  operiert. So ist der Rückzug eine Äquivalenz*

$$\text{Der}_{(N \setminus G) \setminus}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{G \setminus}(X)$$

*Beweis.* Jede Auflösung  $P \rightarrow X$  können wir faktorisieren als  $P \rightarrow N \setminus P \rightarrow X$ . Die Komposition ist bagazyklisch und die erste Abbildung desgleichen, also ist

auch die zweite Abbildung bagazyklisch und somit eine  $(N \setminus G)$ -Auflösung von  $X$ . Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G \setminus P & \longleftarrow & P & \longrightarrow & X \\ \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \\ (N \setminus G) \setminus (N \setminus P) & \longleftarrow & N \setminus P & \longrightarrow & X \end{array}$$

Da die mittlere Vertikale garbenazyklisch ist, müssen zwei Objekte unten, deren Rückzüge oben isomorph sind, bereits unten isomorph gewesen sein. Der Satz folgt.  $\square$

**Korollar 7.6.5 (Quotienten nach zusammenziehbaren Gruppen).** *Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum und  $N \subset G$  ein zusammenziehbarer Normalteiler, der topologisch frei auf  $X$  und  $G$  operiert. So ist der Rückzug eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}_{G \setminus} (N \setminus X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{G \setminus} (X)$$

*Beweis.* Die Verknüpfung von Rückzügen

$$\mathrm{Der}_{(N \setminus G) \setminus} (N \setminus X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{G \setminus} (N \setminus X) \rightarrow \mathrm{Der}_{G \setminus} (X)$$

ist unsere verallgemeinerte Quotientenäquivalenz und der Erste unserer Funktoren ist eine Äquivalenz nach 7.6.4. Das Korollar folgt.  $\square$

## 7.7 Danksagung

7.7.1. Eine wesentliche Quelle und Motivation waren für mich die Lecture Notes von Bernstein und Lunts [BL94].

## 8 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich vielen, insbesondere Olaf Schnürer und Bernhard Link. Der Inhalt geht im wesentlichen zurück auf Grothendieck, Deligne und Verdier [Gro72]. Sehr nützlich waren mir die Darstellungen von Godement [God64] und Kashiwara-Schapira [KS90] und Skripten von Milicic und Hörmann zu derivierten Kategorien. Die Argumente zu unbeschränkten Auflösungen kommen aus [Spa88, Bek00]. Hilfreich waren auch die Texte des Stacks-Projektes. Bei der Behandlung der Verdier-Dualität halte ich mich eng an [SS15]. Die Vereigentlichung kommt aus der Dissertation von Maximilian Gerhards [Ger18]. Die Formulierung der Verträglichkeiten mit Hilfe von Schmelzkategorien habe ich von Fritz Hörmann [Hoe17] gelernt und für die hier relevanten Anwendungen so dargestellt, daß man dabei ohne Zweikategorien auskommt.

## Literatur

- [AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie*, Wolfgang Soergel.
- [Bek00] Tibor Beke, *Sheafifiable homotopy model categories*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **129** (2000), no. 3, 447–475.
- [BL94] Joseph N. Bernstein and Valery Lunts, *Equivariant sheaves and functors*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1578, Springer, 1994.
- [Ger18] Maximilian Gerhards, *Funktorialitäten für relative topologische Gruppen*, Dissertation in Freiburg, sollte bald erscheinen auf <http://www.freidok.uni-freiburg.de/>, 2018.
- [God64] Roger Godement, *Théorie des faisceaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1252, Hermann Paris, 1964.
- [Gro72] Alexander Grothendieck, *SGA 4*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer, 1972.
- [Gro86] ———, *Récoltes et Semailles*, Im Netz verfügbar, 1985-1986.
- [Hir75] Heisuke Hironaka, *Triangulations of algebraic sets*, Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, pp. 165–185.
- [Hoe17] Fritz Hoermann, *Fibered multiderivators and (co)homological descent*, Theory Appl. Categ **32** (2017), no. 38, 1258–1362.
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren, vol. 292, Springer, 1990.
- [LA1] *Skriptum Lineare Algebra I*, Wolfgang Soergel.
- [RV04] Günther Richter and Alexander Vauth, *Fibrewise sobriety.*, Categorical structures and their applications. Proceedings of the North-West European category seminar, Berlin, Germany, March 28–29, 2003, River Edge, NJ: World Scientific, 2004, pp. 265–283.
- [Spa88] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Math. **65** (1988), no. 2, 121–154.
- [SS15] Olaf M. Schnürer and Wolfgang Soergel, *Proper base change for separated locally proper maps*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova (2015).

- [TD] *Skriptum Derivierte Kategorien und Funktoren*, Wolfgang Soergel.
- [TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*, Wolfgang Soergel.
- [TG] *Skriptum Garbenkohomologie*, Wolfgang Soergel.
- [TM] *Skriptum Topologie und kompakte Gruppen*, Wolfgang Soergel.
- [TS] *Skriptum Singuläre Homologie*, Wolfgang Soergel.
- [TSF] *Skriptum Grothendieck's sechs Funktoren*, Wolfgang Soergel.
- [TSK] *Skriptum Kategorielle Produktstrukturen*, Wolfgang Soergel.



## **Indexvorwort**

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das  $\cup$  dem Buchstaben u oder das  $\subset$  dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa  $\zeta$  unter z und  $\omega$  unter o.

## Index

- $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur
    - relative, 26
  - $\Rightarrow_X$  internes Hom in Faser, 20
  - $\mathcal{T}^n$ , 78
  - $\phi^*$ 
    - Zurückholen von Schnitten, 142
  - $f^!$  Eigrückzug
    - auf derivierten Kategorien, 132
  - $f^!$  eigentlicher Rückzug
    - Schnitte mit Träger, 133
  - $\underline{X}$  Einsobjekt, 18
  - $\underline{X}$  konstantes Objekt, 16
  - $\odot$  Schnittpaarung, 165
  - $\otimes$  Tensorprodukt
    - $\otimes_X$  relatives in Trennfaserung, 18
  - $\mathcal{F}_{UCX}$  Ausdehnung durch Null, 146
  - $\sqsubset$  Vereigentlichung, 71
  - $\times$  externes Produkt
    - der lokalen Kohomologie, 121, 123
  - $\boxtimes$  äußeres Produkt
    - in Trennfaserung, 23
  - $\boxtimes$  bei Trennfaserung und Schmelzkofaserung, 11
- abelsche Garben
  - Schmelzkategorie, 6
- additive Struktur
  - relative, 25
- äquivariant
  - derivierte Kategorie, 192, 194
  - Objekt, 180, 181
- angereichert
  - relativ, 27
- Augmentation, 156
- Ausgangskante, 89, 100
- Ausschneidung für Grenzketten, 168
- Austauschsituation, 88, 99
  - verflochtene, 90, 101
- bagazyklisch, 57, 191
- Basis
  - einer Austauschsituation, 88, 99
  - einer Trennaustauschsituation, 109
- basisfest
  - garbenazyklisch, 57
- Basiswechsel
  - eigentlicher abstrakter, 91, 102
- Boxprodukt, 23
- $c_*(V)$  totale Chern'sche Klasse, 66
- Chern'sche Klasse, 66
  - totale, 66
- cup-Produkt
  - der lokalen Kohomologie, 121
  - Operation auf kompakter Kohomologie, 121
- $\mathbb{D}_X$  Verdier-Dualität, 134
- $\text{Der}_{/X}$ , 47
- $\text{Der}_{//\text{Gek}}$ , **54**
- $\text{Der}_{//\text{Top}}$ , **52**
- $\text{Der}(\text{Ab})$ 
  - als Schmelzkategorie, 43
- $\text{Der}(\text{Ab}_{/X})$ 
  - als Schmelzkategorie, 47
- derivierte abelsche Gruppen
  - als Schmelzkategorie, 43
- derivierte Moduln
  - als Schmelzkategorie, 45
- Derivierter gefasertes Basiswechsel, 59
- $\text{Der}(k\text{Mod})$ 
  - als Schmelzkategorie, 45
- $\text{Der}(k\text{-Mod}_{/X})$ 
  - als Schmelzkategorie, 51
- dualisierende Garbe, 134
- eigentlich
  - lokal, 69

Eigomorphismus, 88, 99, 109  
 Eigopkofaserung  
     der Homotopiekomplexe, 81  
 Eigrückzug, 132, 134  
 Eigvorschub  
     in Austauschsituation, 88, 99  
 externes Produkt  
     der lokalen Kohomologie, 121, 123  
 Familientrennfunktor, 30  
 Faser  
     von Trennfunktor, 18  
 Faserprodukt  
     von Kategorien, 33  
 faserrückzugstabil  
     über anderem System, 78  
 faserweise kompaktweich, 77  
 flach  
      $k$ -flach, Garbe, 128  
     abelsche Garbe, 7  
 flachwelk, 116  
 Fundamentalkozykel, 138  
     von Untervarietät, 141  
 Fundamentalzykel, 164  
 Garbe der unstetigen Schnitte, 114  
 garbenazyklisch  
     basisfest, 57  
     stetige Abbildung, 57, 191  
     topologischer Raum, 57  
 Garbenhomkomplex  
     derivierter, 48  
 Garbenopfaserung  
     derivierte, 36  
 Garbenoptrennfaserung, 10  
 Gek gekringte Räume, 13  
 Gekkk konstant kohärent gekringte Räume,  
     125  
 gekringter Raum, 13  
 geringter Raum, 13  
     konstant geringter Raum, 125  
 gkv Grenzkomplexvorschub, 174  
 Godement-Auflösung, 115  
 Grenzketten  
     relative, 168  
 Grenzkettengarbe, 170  
 Grenzkomplex, 170  
 Grenzkomplexvorschub, 174  
 $\mathbb{H}$  Hyperkohomologie, 37  
 $H_q(X)_{\text{garb}}$  garbentheoretische Homologie, 153  
 $H_q^!(X)_{\text{garb}}$  garbentheoretische lokalendliche Homologie, 153  
 $\underline{\text{Hom}}$  Hom-Garbe, 7  
 $\mathcal{H}\text{om}$  Hom-Garbe, 7  
 Hom-Garbe, 7  
 homologisch kompaktendlich, 82  
 homotopieflach  
     Komplex von Modulgarben, 49  
 Hyperkohomologie, 37  
 Induktionsäquivalenz, 188, 203  
 invertiert  
     Schmelzkofaserung, 29  
     Trennfaserung, 29  
 kartesisch  
     Verschmelzung, 8  
 kartesischer Schnitt  
     einer Trennfaserung, 16  
 kkRing, 12  
 kokartesisch  
     Verschmelzung, 8  
 kompaktendlich, homologisch, 82, 134  
 kompaktweich  
      $f$ -kompaktweich, 77  
     faserweise, 77  
     schwach, 81  
 konstant  
     Objekt, 17  
 Kreuzprodukt  
     der Garbenkohomologie, 60

Kringo opponierte Kringe, 16  
 Künnethformel  
     der kompakten Kohomologie, 119  
 Leray-Hirsch, 63  
     Variante, 63  
 les lokal eigentlich separiert, 70  
 les-Abbildung, 70  
 lesb, 82  
     Abbildung, 82  
     Raum, 82  
 lesb-Abbildung  
     eigentliche, 82  
 lesb-kompaktweich, 125  
 lesbf-Morphismus, 130  
 Lesmonomorphismus, 111  
 Lesmorphismus, 88, 99, 109  
 Linksanpassung, 37  
 linkskohärent, 128  
 Linksoresystem  
     faserweises, 33  
 lokal  
     Prägarbe, 169  
 lokal eigentlich, 69  
 Lokalgarbe, 120, 137  
 Lokalisierung  
     einer Schmelzkategorie, 42  
 mannigfaltig  
     stetige Abbildung, 151  
 Maß $\mathbb{R}$  reele Maßräume, 12  
 Mengengarbenoptrennfaserung, 9  
 Mengengarbentrennfaserung, 9  
 Mod $_{K\text{ring}}$  Schmelzkategorie, 12  
 Mod $_{kkR\text{ring}}$  Schmelzkategorie, 12  
 Modul  
     in additiver Kategorie, 128  
 Modulgarbe, 14  
 Moduloptrennfaserung, 16  
 monodrom  
     Garbe, 186  
 Morphismus  
     von geringten Räumen, 13  
 $\otimes_X$  Verschmelzung in Faser, 109  
 $\omega_X$  dualisierende Garbe, 134  
 Oresystem  
     faserweises, 33  
 orientierbar  
     mannigfaltige Abbildung, 152, 157  
 Orientierung  
     von mannigfaltiger Abbildung, 152,  
     157  
     zurückgezogene, 153  
 Orientierungsmenge  
     topologische, 123  
 Orientierungsgarbe  
     relative, 152  
 $\text{or}^{\text{top}}(V)$  Orientierungsmenge von  $V$ ,  
     123  
 $P_X$  Poincaré-Isomorphismus, 162  
 $P_X^!$  dualisierter Poincaré-Isomorphi-  
     mus, 162  
 Poincaré-Dualität  
     starke dualisierte, 163  
 polyederähnlich, 155  
 Pontrjagin-Klasse, 68  
 Prägarbe  
     lokale, 169  
 Projektionsformel, 77, 111  
 Rechtsanpassung, 37  
 Rechtsoresystem  
     faserweises, 33  
     globales, 33  
 regulär  
     Funktionen, 13  
 $R\mathcal{H}\text{om}(A, D)$  derivierter Garbenhom-  
     komplex, 48  
 Rückholkante, 89, 100  
 Rückholquadrat, 89, 100  
 Rückzug

eigentlicher, 132  
 von Funktor, 34  
 rückzugstabil, 78  
 Schmelzkofaserung, 8  
   invertierte, 29  
 Schmelzvorschub, 8  
 Schnittmultiplizität  
   lokale, 138  
 Schnittorientierung, 124, 139  
 Schnittpaarung, 165  
 Schnittplättung, 139  
 Schnittprodukt, 165  
 $\text{skwflAb}/X$  schwach kompaktweiche flache Garben, 116  
 Strukturgarbe, 13  
 Tensorproduktgarbe, 6  
 Topog Räume mit Gruppenoperation, 65, 197  
 transversaler Schnitt, 139  
 Trennaustauschsituation, 109  
   verflochtene, 110  
   mit Adjungierten, 134  
 Trennfaserung, 8  
   invertierte, 29  
   mit Vorschub, 18  
 Trennrückzug, 8  
 Trennschmelzfakofaserung, 29  
 Trennschnitt, 16  
   kartesischer, 16  
 Trennverflechtung, 110  
 Umstrukturieren, 27  
 Unterkofaserung  
   volle, 37  
 Verdier-Dualität, 134  
 Verdierdualität  
   relative, 135  
 Vereigentlichung, 71  
 Verflechtung  
   für Trennaustauschsituation, 110  
   lokalisiertes, 93, 104  
   von Faserung und Kofaserung, 89, 100  
 Verflechtungsquadrat, 89, 100  
    $r$ -Verflechtungsquadrat, 110  
   kokartesisches, 90, 101  
 verflochten  
   Austauschsituation, 90, 101  
 Verknüpfungsorientierung, 153  
 Vorschieben  
   eigentliches, 159  
 Vorschub, 134  
   zu Trennfaserung, 18  
 Whitney  
   Summenformel, 67  
 Wirkungskategorie, 182  
 $\mathbb{Z}_{U \subset X} := i_! \mathbb{Z}_U$ , 144