KATEGORIELLE PRODUKTSTRUKTUREN

Wolfgang Soergel

1. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorielle Produktstrukturen

1.1 Definition einer Schmelzkategorie

1.1.1 (**Motivation**). Gegeben Vektorräume M, N, L über einem Körper k ist es nicht schwer, natürliche Isomorphismen $L \otimes (M \otimes N) \xrightarrow{\sim} (L \otimes M) \otimes N$ und $M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$ und $k \otimes M \xrightarrow{\sim} M$ und $M \otimes k \xrightarrow{\sim} M$ und $\operatorname{Hom}(L \otimes M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(L, \operatorname{Hom}(M, N))$ anzugeben. Dasselbe gilt für Moduln über einem beliebigen Kring k. Dasselbe gilt für Kettenkomplexe oder auch für Komplexe von Moduln über einem beliebigen Kring k oder auch für deren Homotopiekategorien oder auch für deren „derivierte Kategorien", die wir noch gar nicht kennengelernt haben. Um mit diesen ganzen Konstruktionen und vielen weiteren komplizierteren Konstruktionen derselben Bauart rein formal arbeiten zu können, müssen wir auch die Verträglichkeiten zwischen obigen natürlichen Isomorphismen formalisieren, etwa die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & (M \otimes N) \otimes L \arrow[dr] & \\
L \otimes (M \otimes N) \arrow[ur] \arrow[d] & & M \otimes (N \otimes L) \arrow[d] \\
(L \otimes M) \otimes N \arrow[dr] & & (N \otimes L) \otimes M \\
 & N \otimes (L \otimes M) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

In diesem Diagramm sind alle Pfeile abwechselnd als Spezialfälle unserer natürlichen Isomorphismen von eben zu verstehen. Es ist durchaus möglich, eine vollständige Liste der benötigten Verträglichkeiten anzugeben. Das führt, wenn man das Hom erst einmal außen vor läßt, zur Definition der „symmetrischen monoidalen Kategorien". Die „Vollständigkeit" der fraglichen Liste von Verträglichkeiten wird dabei formalisiert im „Kohärenzsatz von MacLane". Wir wählen im folgenden einen anderen Zugang zu diesem Themenkomplex über „Schmelzkategorien" alias „Multikategorien" alias „gefärbte Operaden", der mir flexibler und besser zugänglich scheint. Das folgende ist ein Versuch, diesem Formalismus zu helfen, insoweit erwachsen zu werden, daß sich die Formeln um sich selber kümmern und man ihnen nicht in jedem Einzelfall und für jedes Vorzeichen hinterherrennen muß.

1.1.2 (**Multilineare Abbildungen als Beispiel**). Gegeben $r \geq 0$ und Vektorräume $V_1, \ldots, V_r, W$ über ein- und demselben Körper betrachten wir die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_r \to W$. Im Fall $r = 0$ verstehen wir unter solch einer multilinearen Abbildung einen Vektor aus W. Gegeben weitere multilineare Abbildungen $U_{i,1} \times \ldots \times U_{i,r(i)} \to V_i$, wieder mit $r(i) \geq 0$, können wir in offensichtlicher Weise eine multilineare Abbildung vom Produkt der $U_{i,j}$ nach W erklären, die wir die „Multiverknüpfung" unserer multilinearen Abbildungen nennen. In der folgenden Definition des Begriffs einer „Schmelzkategorie" wird diese Struktur formalisiert. Sie ist in der Mathematik allgegenwärtig. Moduln über Kringen, Komplexe von abelschen Gruppen, Vektorbündel auf topologischen Räumen, glatte Vektorbündel auf Mannigfaltigkeiten, Darstellungen von Gruppen oder Liealgebren und abelsche Garben auf topologischen Räumen sind nur eine kleine Auswahl relevanter Schmelzkategorien. Das fundamentale Beispiel ist für uns erst einmal die Schmelzkategorie der Mengen mit „Funktionen in mehreren Variablen" alias „Multiabbildungen" als Verschmelzungen.

1.1.3. Unter einer **Familie** von Elementen einer Menge $\mathcal{M}$ verstehen wir eine Abbildung von einer Menge nach $\mathcal{M}$. Vielfach verwendet man für eine Familie die Notation $(A_i)_{i \in I}$ mit einer Indexmenge I. Formal ist damit die Abbildung $A : I \to \mathcal{M}$, $i \mapsto A_i$ gemeint. Gegeben eine Familie $A : I \to \mathcal{M}$ bezeichnen wir im folgenden mit $\bar{A}$ ihren Definitionsbereich alias ihre Indexmenge, also die Menge I. Die auf eine Teilmenge $K \subset I$ eingeschränkte Familie notieren wir $A|_K$ und unterscheiden für $i \in I$ zwischen der einelementigen Familie $A|_{\{i\}}$ und dem Objekt A_i. Eine Familie mit einelementiger Indexmenge heiße eine **Einsfamilie**. Eine Familie mit endlicher Indexmenge heiße eine **Kleinfamilie**.

Definition 1.1.4. Eine **Schmelzkategorie** oder ausführlicher **Verschmelzungskategorie** ist ein Datum bestehend aus:

a. Einer Menge $\mathcal{M}$ von **Objekten**. Endliche Familien von Objekten nennen wir gemäß der in 1.1.3 eingeführten Terminologie **Objektkleinfamilien**;

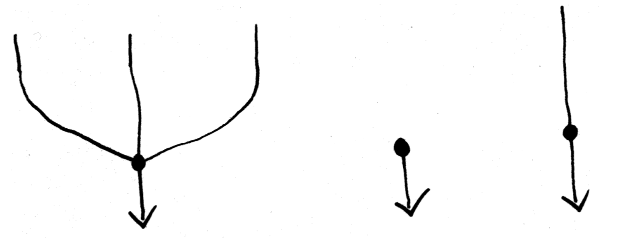
b. Für jede Objektkleinfamilie A und jedes Objekt Y einer Menge $\mathcal{M}(A, Y)$ von **Verschmelzungen**;

c. Für je zwei Objektkleinfamilien A, B und jedes Objekt Z und jede Abbildung $\varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ zwischen den Indexmengen unserer Objektkleinfamilien einer Abbildung, der **Multiverknüpfung von Verschmelzungen längs** φ

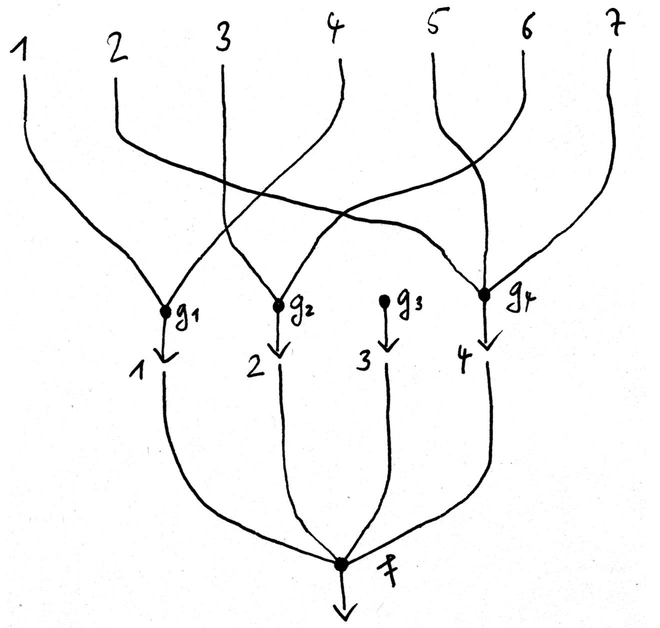
$$\prod_{j \in \bar{B}} \mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j) \times \mathcal{M}(B, Z) \to \mathcal{M}(A, Z)$$

derart, daß unsere Multiverknüpfungen **multiunitärassoziativ** sind in einem Sinne, für dessen Erklärung ich etwas weiter ausholen muß. Wir bilden dafür einen Köcher mit Verknüpfung

$$\mathcal{M}^{\curlyvee}$$



Graphische Darstellung einer 3-Verschmelzung, einer Leerverschmelzung und einer Einsverschmelzung. Ich denke mir die Darstellungen „von oben nach unten“. Jede Verschmelzung einer Objektfamilie mit Indexmenge $\{1, 2, \ldots, r\}$ kriegt salopp gesprochen von oben auf $r \geq 0$ durchnummerierten Eingängen Input und verschmilzt diesen zu einem Output.



Versuch der graphischen Darstellung einer Verschmelzung $f \circ g$. Die Indexabbildung $\bar{g}$ hat im hier dargestellten Fall die Fasern $\{1, 4\}, \{3, 6\}, \emptyset$ und $\{2, 5, 7\}$ über $1, 2, 3$ und 4. Sie seien ermutigt, sich unter den g_i und f erst einmal multilineare Abbildungen vorzustellen.

im Sinne von A.5.6 mit Objektkleinfamilien aus $\mathcal{M}$ als Ecken und Pfeilen $A \to B$ gegeben durch beliebige Paare $(\varphi, \curlyvee(f_j)_{j\in\bar{B}})$ bestehend aus einer Abbildung $\varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ zwischen den Indexmengen und einem Tupel $(f_j)_{j\in\bar{B}}$ von Verschmelzungen $f_j \in \mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j)$ und der offensichtlichen durch unsere Multiverknüpfung von Verschmelzungen erklärte Verknüpfung von Pfeilen. Wir fordern dann als letztes Axiom, daß dieser Köcher mit Verknüpfung $\mathcal{M}^{\curlyvee}$ eine Kategorie sein soll. Es ist diese Eigenschaft unserer Multiverknüpfungen, die ich **multiunitärassoziativ** nenne. Das Symbol $\curlyvee$ schreibe ich nur dazu, um daran zu erinnern, in welchen Kontext wir uns bewegen. Ich diskutiere das später noch ausführlicher.

Beispiel 1.1.5. Wie bereits erwähnt ist das fundamentale Beispiel für uns erst einmal die **kartesische Schmelzkategorie der Mengen**

$$\mathrm{kEns}$$

mit „Funktionen in mehreren Variablen" alias „Multiabbildungen" als Verschmelzungen. Wenn wir es genau nehmen wollen, müssen wir wie bei gewöhnlichen Kategorien auch erst ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ wählen und die Schmelzkategorie $\mathfrak{U}\mathrm{kEns}$ aller Mengen $X \in \mathfrak{U}$ betrachten. Diese Feinheiten will ich im folgenden in der Notation nicht sichtbar machen und denke mir vorerst ein festes Universum $\mathfrak{U}$, aus dem die Grundmengen der Objekte unserer konkreten Beispiele jeweils kommen sollen. Unsere ersten weiteren Beispiele leiten sich davon ab, indem wir stattdessen „Mengen mit Zusatzstrukturen" betrachten und „mit diesen Zusatzstrukturen in geeigneter Weise verträgliche Multiabbildungen". So erklären wir etwa die **Schmelzkategorie der Vektorräume**, indem wir als Objekte alle Vektorräume über einem vorgegebenen Körper k nehmen und als Verschmelzungen alle multilinearen Abbildungen und insbesondere eine Leerverschmelzung in einen Vektorraum W als ein Element von W verstehen oder ganz pedantisch eine Abbildung der einpunktigen Menge nach W. Die Multiverknüpfungen sind die von der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen induzierten. Die so entstehende Schmelzkategorie notieren wir

$$\mathrm{Mod}_k$$

Vorschau 1.1.6. Bei der weiteren Entwicklung der Theorie 1.4.5 werden wir sehen, daß unsere kartesische Schmelzkategorie der Mengen so fundamental gar nicht ist, sondern ihrerseits durch „Invertieren" aus der noch fundamentaleren „banalen Trennkategorie der Mengen" hervorgeht, aber alles zu seiner Zeit.

Ergänzung 1.1.7. Die Definition bliebe sinnvoll, wenn wir darin unendliche Objektfamilien zuließen. Diese Allgemeinheit will ich jedoch vermeiden, solange ich keine überzeugenden Anwendungen kenne. Um mengentheoretischen Bedenken vorzubeugen, mag man als Indexmengen zusätzlich nur gewisse endliche Mengen zulassen, etwa nur Elemente des kleinsten Universums A.9.8, das die leere Menge als Element enthält. So genau wollen wir es aber in diesem Text nicht nehmen.

1.1.8. Verschmelzungen, die von einer Objektfamilie mit r-elementiger Indexmenge ausgehen, nennen wir r-**Verschmelzungen** und insbesondere **Einsverschmelzungen** im Fall $r = 1$ sowie **Zweiverschmelzungen** im Fall $r = 2$. Die von der leeren Objektfamilie ausgehenden Verschmelzungen, also die 0-Verschmelzungen, nennen wir **Leerverschmelzungen**, um den im Fall einer zusätzlichen „additiven Struktur" mißverständlichen Begriff einer „Nullverschmelzung" zu vermeiden.

1.1.9. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ nennen wir die in der Definition beschriebene Kategorie $\mathcal{M}^{\curlyvee}$ die **Familienkategorie** unserer Schmelzkategorie. Im Fall einer Einsfamilie B bestehend aus einem einzigen Objekt B_* werden wir die offensichtlichen Bijektionen

$$\mathcal{M}^{\curlyvee}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A, B_*)$$

in Notation und Sprache im weiteren als Gleichheiten betrachten. Wir erklären den **Indexfunktor** $\mathcal{M}^{\curlyvee} \to \mathrm{Ens}$ durch die Vorschrift, daß er jeder Objektkleinfamilie A ihre Indexmenge $\bar{A}$ zuordnet und jedem Morphismus $f : A \to B$ die zugehörige Abbildung $\bar{f} := \varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ der Indexmengen.

1.1.10. Es gibt in unserer Familienkategorie genau einen Morphismus in die leere Objektfamilie, nämlich die Identität auf der leeren Objektfamilie, gegeben durch das einzige 0-Tupel von Leerverschmelzungen.

1.1.11. Gegeben Objektkleinfamilien $A = (A_i)_{i \in I}$ und $B = (B_j)_{j \in J}$ sowie eine Abbildung $\varphi : I \to J$ und Verschmelzungen $f_j \in \mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j)$ notieren wir den zugehörigen Morphismus der Familienkategorie

$$(\varphi, \curlyvee(f_j))$$

und sagen, er entstehe durch **Vertupeln** oder ausführlicher $\curlyvee$**-Vertupeln** aus den Verschmelzungen f_j.

1.1.12. Eine durch eine einelementige Indexmenge indizierte Objektfamilie nennen wir eine **Einsfamilie**. Die Identität id_A in der Familienkategorie auf einer Einsfamilie entspricht einer Einsverschmelzung $\mathrm{id}_A \in \mathcal{M}(A, A_*)$, die wir die **Identitätsverschmelzung** nennen. Ich will kurz begründen, warum die Identität in der Familienkategorie auf einer beliebigen Objektkleinfamilie B durch das Vertupeln der Identitätsverschmelzungen ihrer Objekte gegeben sein muß, in Formeln

$$\mathrm{id}_B = (\mathrm{id}_{\bar{B}}, \curlyvee(\mathrm{id}_{B_j})_{j \in \bar{B}})$$

In der Tat können wir in der Familienkategorie die Unterkategorie betrachten, bei der wir nur solche Morphismen zulassen, die unter dem Indexfunktor zu Bijektionen werden, und in dieser Unterkategorie ist es klar, daß unser Tupel von Identitätsverschmelzungen die Identität sein muß.

1.1.13. Gegeben eine Objektkleinfamilie $B : J \to \mathcal{M}$ und eine Bijektion $\varphi : I \xrightarrow{\sim} J$ erhalten wir durch das Vertupeln von Identitätsverschmelzungen in der Familienkategorie einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\hat{\varphi} : (B \circ \varphi) \xrightarrow{\sim} B$$

Wir nennen ihn eine **Umindizierung**. Wir haben $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi} = (\varphi \circ \psi)^\wedge$ und $\mathrm{id}^\wedge = \mathrm{id}_B$ und weitere offensichtliche Verträglichkeiten, die ich hier nicht ausschreibe.

1.1.14. Im Spezialfall identischer Indexmengen $J = I$ und unter der Annahme $B = B \circ \varphi$ muß unsere Umindizierung $\hat{\varphi} : B \xrightarrow{\sim} B$ keineswegs die Identität sein, wenn $\varphi : I \xrightarrow{\sim} I$ nicht die Identität ist. Zum Beispiel muß ja eine bilineare Abbildung $b : V \times V \to W$ keineswegs symmetrisch sein, also gilt im allgemeinen $b \neq b \circ \hat{\tau}$ für τ die nichttriviale Permutation einer hier nicht explizit notierten zweielementigen Indexmenge.

1.1.15. Im Fall einer Einsfamilie A von Objekten einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ hängt die Menge $\mathcal{M}(A, Y)$ bis auf eindeutige durch das Vorschalten der einzig möglichen Umindizierungen gegebenen Bijektion nur vom einzigen Element A_* unserer Einsfamilie ab. Gegeben zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{M}$ notieren wir

$$\mathcal{M}(X, Y)$$

die bis auf eindeutige Bijektion wohlbestimmte Menge aller Verschmelzungen $\mathcal{M}(A, Y)$ einer und jeder Einsfamilie A mit einzigem Objekt X nach Y. Zusammen mit der offensichtlichen Verknüpfung erhalten wir so eine Kategorie mit Objektmenge $\mathcal{M}$. Wir nennen sie die **einfache Kategorie** zu unserer Schmelzkategorie und notieren sie $\mathcal{M}$ oder auch

$$\mathrm{E}(\mathcal{M})$$

und nennen ihre Morphismen die **Morphismen unserer Schmelzkategorie**.

1.1.16 (**Notationsfragen**). Im Kontext von Schmelzkategorien verwende ich das Symbol $\curlyvee$ als „Tupeltrenner“ für Objektkleinfamilien und zur Beschreibung von Morphismen der Familienkategorie. Das hat den didaktischen Vorteil, uns daran zu erinnern, daß wir uns im Kontext einer Schmelzkategorie bewegen. Wir verwenden im Kontext von Schmelzkategorien insbesondere die Notation

$$X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r$$

für die durch $\{1, \ldots, r\}$ indizierte Objektfamilie, die durch $i \mapsto X_i$ gegeben wird. Auch ohne die Indizes steht $X \curlyvee Y \curlyvee X$ etwa für die durch $\{1, 2, 3\}$ indizierte Objektfamilie mit $1 \mapsto X, 2 \mapsto Y$ und $3 \mapsto X$ und selbst $X_2 \curlyvee X_1$ will ich als die durch $\{1, 2\}$ indizierte Objektfamilie mit $1 \mapsto X_2, 2 \mapsto X_1$ interpretieren. Die leere Objektfamilie einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ notieren wir $\curlyvee = \curlyvee_{\mathcal{M}}$ und die Menge der Leerverschmelzungen in ein Objekt Y dementsprechend

$$\mathcal{M}(\curlyvee, Y)$$

Gegeben eine Objektfamilie $B = B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r$ und ein Objekt $Y \in \mathcal{M}$ schreiben wir statt $f \in \mathcal{M}(B, Y)$ auch $f : B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r \to Y$. Manchmal verwenden wir die Notation $B \curlyvee T$ für die „um ein Objekt T erweiterte“ Objektkleinfamilie B. Haben wir etwa $B = (B_j)_{j \in J}$, so vereinbaren wir für $B \curlyvee T$ die Indexmenge $(\{1\} \times J) \sqcup \{2\}$ mit $(1, j) \mapsto B_j$ und $2 \mapsto T$ als präziser Beschreibung der Familie $B \curlyvee T$ Manchmal verwenden wir die Notation $A \curlyvee B$ auch für die „disjunkte Vereinigung“ zweier Objektkleinfamilien. Haben wir etwa $A = (A_i)_{i \in I}$ und $B = (B_j)_{j \in J}$, so vereinbaren wir für $A \curlyvee B$ die Indexmenge $(\{1\} \times I) \sqcup (\{2\} \times J)$ mit $(1, i) \mapsto A_i$ und $(2, j) \mapsto B_j$ als präziser Beschreibung der Familie $A \curlyvee B$. Der Leser muß manchmal aus dem Kontext erschließen, welches Symbol eine Objektfamilie meint und welches ein Objekt. Vielfach sind die einzelnen Objekte dann die Symbole mit Indizes oder mit Buchstaben aus dem hinteren Teil des Alphabets und Familien werden mit den Buchstaben A, B, C, D bezeichnet.

1.1.17. Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie und $(\varphi, \curlyvee(f_j)) : A \to B$ ein Morphismus der Familienkategorie $\mathcal{M}^{\curlyvee}$. Steht uns eine ausgezeichnete Anordnung der Indexmenge $\bar{B}$ zur Verfügung, haben wir etwa $\bar{B} = \{1, \ldots, r\}$, so notieren wir den zugehörigen Morphismus der Familienkategorie auch

$$(\varphi, (f_j)) = (\varphi, f_1 \curlyvee \ldots \curlyvee f_r)$$

oder ähnlich. Steht uns zusätzlich auch noch eine ausgezeichnete Anordnung der Indexmenge $\bar{A}$ zur Verfügung, so verwenden wir im Fall einer monoton wachsenden Indexabbildung φ weiter die abkürzende Notation

$$(\varphi, g_1 \curlyvee \ldots \curlyvee g_r) = g_1 \curlyvee \ldots \curlyvee g_r$$

Von einer 2-Verschmelzung $m : X \curlyvee X \to X$ können wir zum Beispiel die **Assoziativität** fordern als die Identität $m \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \curlyvee m)$ von 3-Verschmelzungen $X \curlyvee X \curlyvee X \to X$ und die Notation macht klar, was die zugrundeliegenden Indexabbildungen sein sollen.

1.1.18 (**Diskussion der Notation**). Gegeben $r \in \mathbb{N}$ verwenden wir die Notation $[\![r]\!] := \{1, 2, \ldots, r\}$. Bei der Diskussion simplizialer Strukturen verwendet man meist $[r] := \{0, 1, 2, \ldots, r\}$. Im Zusammenhang mit Schmelzkategorien spielt jedoch auch die leere Familie eine wichtige Rolle. Ich führe die Notation $[\![r]\!]$ ein, um nicht mit $\emptyset = [-1]$ arbeiten zu müssen.

1.1.19. Unter einer **monotonen Schmelzkategorie** verstehen wir ein analoges Datum, bei dem wir in den Axiomen die Vorgabe von Verschmelzungen nur für

Objektkleinfamilien mit ausgezeichneter Anordnung ihrer Indexmenge fordern und Multiverknüpfungen nur längs monotonen Indexabbildungen erklärt sind. Wir konstruieren zu jeder Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ in offensichtlicher Weise eine monotone Schmelzkategorie

$$\mathcal{M}^{\mathrm{mon}}$$

und nennen sie die **Monotonisierung von** $\mathcal{M}$.

1.1.20 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Schmelzkategorie mit einem einzigen Objekt heißt ein **Operad**. Eine monotone Schmelzkategorie mit einem einzigen Objekt heißt ein **monotones Operad**. Andere Quellen nennen unsere Operaden „symmetrische Operaden" und unsere monotonen Operaden schlicht „Operaden". Wieder andere Quellen wie etwa [Lur17] bezeichnen Schmelzkategorien als „gefärbte Operaden" oder „Multikategorien" und unsere Verschmelzungen als „Multimorphismen". Vielfach erklärt man zuerst den Begriff eines Operads als „monotones Operad" und erklärt dann ein symmetrisches Operad als ein Operad zusammen mit Operationen symmetrischer Gruppen, die bei uns dem Vorschalten der Umindizierungsisomorphismen entsprechen und von denen man alle möglichen Verträglichkeiten zu fordern hat, deren Gültigkeit in unserer Darstelllung bereits implizit gesichert ist.

Beispiele 1.1.21. Hier eine kleine Auswahl relevanter Schmelzkategorien.

1. Die **kartesische Schmelzkategorie der Mengen** kEns mit Mengen als Objekten und **Multiabbildungen** alias „Funktionen von mehreren Variablen" als Verschmelzungen, wobei wir eine „Funktion in null Variablen" als ein Element des Wertebereichs verstehen und so in Formeln eine ausgezeichnete Bijektion $\mathrm{kEns}(\curlyvee, X) \stackrel{\sim}{\to} X$ erhalten. Allgemeiner und präziser erklären wir in 1.1.32 die „kartesische Schmelzkategorie" zu jeder Kategorie mit endlichen Produkten;

2. Abelsche Gruppen Ab mit multiadditiven Abbildungen;

3. Darstellungen von Gruppen oder Liealgebren;

4. Teilgeordnete Mengen mit ordnungsverträglichen Multiabbildungen φ, in Formeln $x_1 \leq y_1, \ldots, x_r \leq y_r \;\Rightarrow\; \varphi(x_1, \ldots, x_r) \leq \varphi(y_1, \ldots, y_r)$;

5. $\mathbb{Z}$-filtrierte abelsche Gruppen mit solchen multiadditiven Abbildungen, die ein Tupel von Elementen der Filtrierungsstufen $\leq p, \ldots, \leq q$ auf ein Element der Filtrierungsstufe $\leq (p + \ldots + q)$ abbilden;

6. $\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppen mit solchen multiadditiven Abbildungen, die ein Tupel von homogenen Elementen der Grade $p, \ldots, q$ auf ein homogenes Element vom Grad $p + \ldots + q$ abbilden;

7. Durch ein kommutatives Monoid $(\Gamma, +)$ indizierte Familien von Objekten $(M^\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ bilden ihrerseits einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}^\Gamma$ in natürlicher Weise, wie wir im folgenden genauer ausführen. Als Verschmelzungen $\varphi \in \mathcal{M}^\Gamma(A, Y)$ nehmen wir durch $\alpha \in \mathrm{Ens}(\bar{A}, \Gamma)$ indizierte Tupel von Verschmelzungen
$$\varphi_\alpha \in \mathcal{M}((A_i^{\alpha(i)})_{i\in\bar{A}}, Y^{\mathrm{sum}(\alpha)})$$
mit der Notation $\mathrm{sum}(\alpha) = \sum_{i\in\bar{A}} \alpha(i)$. Die $\mathcal{M}$-Verschmelzung φ_α nennen wir den **α-Anteil** unserer $\mathcal{M}^\Gamma$-Verschmelzung φ. Für die Leerverschmelzungen erhalten wir insbesondere $\mathcal{M}^\Gamma(\curlyvee, (M^\gamma)) := \mathcal{M}(\curlyvee, M^0)$. Die Multiverknüpfung ist die offensichtliche. Unsere Schmelzkategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten abelschen Gruppen erhalten wir zurück als $\mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}}$;

8. Abelsche Garben auf topologischen Räumen;

9. Vektorbündel auf einem vorgegebenen topologischen Raum mit „multilinearen Morphismen von einer Kleinfamilie von Bündeln in ein weiteres Bündel“ als Verschmelzungen;

10. Glatte Vektorbündel auf einer vorgegebenen Mannigfaltigkeit mit „multilinearen glatten Morphismen von einer Kleinfamilie von Bündeln in ein weiteres Bündel“ als Verschmelzungen.

Vorschau 1.1.22 (**Superisierte abelsche Gruppen**). Für uns relevant sind insbesondere die Schmelzkategorie sAb der „superisierten abelschen Gruppen“ und ihre Varianten $\mathrm{sgAb}, \mathrm{Ket}$ und Hot, die wir in 2.1.15 folgende noch ausführlich besprechen werden. Objekte von sAb sind $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppen
$$M = M^{\bar{0}} \oplus M^{\bar{1}}$$
Eine Verschmelzung $\varphi \in \mathrm{sAb}\big((M_i)_{i\in I}, N\big)$ ist eine Vorschrift, die jeder Anordnung ω von I eine multilineare Abbildung $\varphi_\omega \in \mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\big((M_i)_{i\in I}, N\big)$ zuordnet, die homogen ist vom Grad $\bar{0}$, so daß für je zwei Anordnungen ω, η von I und jedes Tupel $(v_i)_{i\in I}$ von homogenen Elementen $v_i \in M_i$ gilt
$$\varphi_\omega\big((v_i)_{i\in I}\big) = \pm\varphi_\eta\big((v_i)_{i\in I}\big)$$
mit dem Signum derjenigen Permutation als Vorzeichen, die die vom Übergang von ω zu η auf den ungeraden Elementen $v_i \in M_i^{\bar{1}}$ induzierte Umordnung beschreibt. Als Multiverknüpfung nehmen wir die normale Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen bei „passender Wahl“ der Anordnungen und verweisen auf 2.1.15 für eine genauere Beschreibung und die Diskussion von Fragen wie Wohldefiniertheit und Multiunitärassoziativität. Das ist salopp gesprochen die Stelle, an der die Vorzeichenfragen der homologischen Algebra ein- für allemal erledigt werden.

Beispiel 1.1.23 (**Beliebige Kategorie als Schmelzkategorie**). Jede Kategorie $\mathcal{C}$ können wir als Schmelzkategorie auffassen, indem wir als Verschmelzungen Tupel von Morphismen nehmen, in Formeln

$$\mathcal{C}(B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r, X) := \prod_{i=1}^{r} \mathcal{C}(B_i, X)$$

Die Multiverknüpfung von Verschmelzungen ist dabei die Offensichtliche. Ich nenne diese Struktur die **banale Struktur einer Schmelzkategorie auf** $\mathcal{C}$ und notiere diese Schmelzkategorie statt $\mathcal{C}$ auch ausführlicher $\curlyvee\mathcal{C}$ oder $\operatorname{ban}^{\curlyvee}(\mathcal{C})$. Umgekehrt nenne ich eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ **banal**, wenn es in jedes Objekt nur genau eine Leerverschmelzung gibt und wir jeweils Bijektionen

$$\mathcal{M}(B, X) \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in \bar{B}} \mathcal{M}(B_j, X)$$

erhalten durch geeignetes Vorschalten von Leerverschmelzungen in alle B_j außer in B_i an der i-ten Stelle.

1.1.24. Man beachte, daß die Morphismen einer banalen Schmelzkategorie zwar durchaus Tupel sind, aber nicht als $\curlyvee$-Tupel mißverstanden oder notiert werden dürfen.

1.1.25. Jede Kategorie $\mathcal{C}$ können wir auch als „Schmelzkategorie mit nur Einsverschmelzungen" auffassen. Diese Struktur nennen wir die **triviale Schmelzkategorie zu** $\mathcal{C}$.

1.1.26. Unter einer **Schmelzunterkategorie** einer Schmelzkategorie verstehen wir die Vorgabe einer Teilmenge der Menge der Objektmenge und von Teilmengen der Mengen von Verschmelzungen zwischen diesen Objekten, die stabil sind unter Multiverknüpfung und alle Identitätsverschmelzungen zu Objekten aus unserer Teilmenge der Menge der Objekte enthalten. Enthält eine Schmelzunterkategorie alle Verschmelzungen der ursprünglichen Schmelzkategorie zwischen den Objekten der Schmelzunterkategorie, so nennen wir sie eine **volle Schmelzunterkategorie**.

Beispiel 1.1.27. Jede Schmelzkategorie enthält als Unterschmelzkategorie die Schmelzkategorie, bei der wir dieselben Einsverschmelzungen nehmen aber sonst nur leere Verschmelzungsmengen. Jede Schmelzkategorie enthält des weiteren als Unterschmelzkategorie auch die Schmelzkategorie, bei der wir dieselben Leerverschmelzungen nehmen aber sonst nur leere Verschmelzungsmengen, oder dieselben Einsverschmelzungen und Leerverschmelzungen aber sonst nur leere Verschmelzungsmengen. Alle diese Unterschmelzkategorien scheinen mir nicht von großem Nutzen zu sein.

1.1.28 (**Quotienten von Schmelzkategorien**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie und sei auf allen ihren Mengen von Verschmelzungen eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben derart, daß jede Multiverknüpfung äquivalenter Verschmelzungen äquivalente Verschmelzungen liefert, in Formeln

$$(f \sim f', g_1 \sim g_1', \ldots, g_r \sim g_r') \Rightarrow f \circ (\psi, g_1 \curlyvee \ldots \curlyvee g_r) \sim f' \circ (\psi, g_1' \curlyvee \ldots \curlyvee g_r')$$

So erhalten wir eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}/\sim$ mit denselben Objekten und Äquivalenzklassen von Verschmelzungen als neuen Verschmelzungen und der koinduzierten Multiverknüpfung in offensichtlicher Weise.

1.1.29. Um den Kopf zu entlasten, führe ich zusätzlich die zu Schmelzkategorien opponierten **Trennkategorien** ein. Sie unterscheiden sich nur dadurch, daß wir Verschmelzungen in der entgegengesetzten Reihenfolge notieren und sie „Trennungen" nennen. Für eine Trennkategorie $\mathcal{T}$ und ein Objekt $T \in \mathcal{T}$ und eine Objektkleinfamilie B aus $\mathcal{T}$ fordern wir in diesem Fall also die Vorgabe einer Menge von **Trennungen**

$$\mathcal{T}(T, B)$$

und für diese Multiverknüpfungen. Bei Trennkategorien verwenden wir das Symbol $\curlywedge$ als Trenner. Gegeben $T, B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{T}$ verwenden wir auch die Notation

$$f : T \to B_1 \curlywedge \ldots \curlywedge B_r$$

für so eine Trennung. Das leere Wort notieren wir in diesem Kontext $\curlywedge$ und schreiben $\mathcal{T}(T, \curlywedge)$ für die Menge der von einem Objekt T ausgehenden Leertrennungen. Die zugehörige **Familienkategorie** notieren wir $\mathcal{T}^{\curlywedge}$. Sie wird angeliefert mit einem ausgezeichneten Funktor $\mathcal{T}^{\curlywedge} \to \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$, den wir wieder den **Indexfunktor** nennen. Analog erklären wir **monotone Trennkategorien**.

Beispiel 1.1.30 (**Beliebige Kategorie als Trennkategorie**). Jede Kategorie $\mathcal{C}$ können wir als Trennkategorie auffassen, indem wir als Trennungen schlicht Tupel von Morphismen betrachten, in Formeln

$$\mathcal{C}(X, B_1 \curlywedge \ldots \curlywedge B_r) := \prod_{i=1}^{r} \mathcal{C}(X, B_i)$$

Die Multiverknüpfung von Trennungen ist dabei die Offensichtliche. Ich nenne diese Struktur die **banale Struktur einer Trennkategorie auf** $\mathcal{C}$ und notiere diese Trennkategorie statt $\mathcal{C}$ auch ausführlicher $\curlywedge\mathcal{C}$ oder $\mathrm{ban}^{\curlywedge}(\mathcal{C})$. Analog wie bei Schmelzkategorien definieren wir auch **banale Trennkategorien**.

Beispiel 1.1.31 (**Opposition von Schmelzkategorien und Trennkategorien**). Zu jeder Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Trennkategorie $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ mit „opponierten Verschmelzungen" als Trennungen. Zu jeder

Trennkategorie $\mathcal{T}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Schmelzkategorie $\mathcal{T}^{\mathrm{opp}}$ mit „opponierten Trennungen“ als Verschelzungen. Diese Konstruktionen sind zueinander invers und wir haben für eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$ offensichtlich $(\curlywedge\mathcal{C})^{\mathrm{opp}} = \curlyvee(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})$.

Beispiel 1.1.32. Jede Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten können wir mit der Struktur einer Schmelzkategorie versehen, indem wir Verschmelzungen als Morphismen aus Produkten erklären, in Formeln

$$\mathcal{C}(B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r, X) := \mathcal{C}(B_1 \times \ldots \times B_r, X)$$

Die Multiverknüpfung ist die Offensichtliche. Ich nenne diese Struktur die **kartesische Schmelzkategorie auf** $\mathcal{C}$ und verwende dafür die Notationen $\mathrm{k}\mathcal{C} = \mathrm{kart}(\mathcal{C})$. Die kartesische Schmelzkategorie der Mengen kEns hatten wir bereits in 1.1.21 als Beispiel angeführt.

Vorschau 1.1.33 (**Kartesische Schmelzkategorien durch Invertieren**). Wir werden zu jeder Trennkategorie mit „stabil universellen Trennungen“ in 1.4.4 ihre „inverse Schmelzkategorie“ einführen. Es erweist sich in dieser Terminologie, daß wir die kartesische Schmelzkategorie $\mathrm{kart}(\mathcal{C})$ durch Invertieren aus der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathcal{C}$ erhalten können, vergleiche 1.4.9.

Beispiel 1.1.34 (**Produkt von Schmelzkategorien**). Gegeben Schmelzkategorien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ erklären wir ihr **Produkt**

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N}$$

mit Paaren (M, N) als Objekten und Paaren von Verschmelzungen als Verschmelzungen und den offensichtlichen weiteren Daten.

Beispiel 1.1.35 (**Multiäquivariante Schmelzkategorie der** Ω**-Mengen**). Gegeben eine Menge Ω erhalten wir auf der Gesamtheit aller Ω-Mengen eine Struktur als Schmelzkategorie durch die Vorschrift, daß wir unter einer Verschmelzung $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ eine Abbildung $f : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ verstehen mit

$$f(ax_1, \ldots, x_r) = \ldots = f(x_1, \ldots, ax_r) = af(x_1, \ldots, x_r)$$

für alle $a \in \Omega$ und $x_i \in X_i$ und alle i mit $1 \leq i \leq r$, die also in Worten „äquivariant ist in jeder Variable“. Wir nennen sie die **multiäquivariante Schmelzkategorie der** Ω**-Mengen** und notieren sie

$$\mathrm{Ens}_{\Omega\curlyvee'}$$

Ihre Verschmelzungen nennen wir **multiäquivariante Multiabbildungen**. Für ihre Leerverschmelzungen gilt $\mathrm{Ens}_{\Omega\curlyvee'}(\curlyvee, Y) \xrightarrow{\sim} Y$ vermittels $f \mapsto f(*)$. Das kleine Strichlein bei $\curlyvee'$ ist ein „Freiheitsstrichlein“. Wenn wir es weglassen, wird meist Ω ein Monoid sein und wir betrachten nur solche Ω-Mengen X, für die die Abbildung $\Omega \times X \to X$ eine Operation des Monoids Ω ist.

Beispiel 1.1.36. Dasselbe geht auch allgemeiner. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und ein Objekt $\Omega \in \mathcal{M}$ erklären wir einen **Ω-Objektmodul** als ein Paar (X, μ) bestehend aus einem Objekt $X \in \mathcal{M}$ und einer Verschmelzung $\mu : \Omega \curlyvee X \to X$ und führen wie zuvor die **multiäquivariante Schmelzkategorie**

$$\mathcal{M}_{\Omega\curlyvee'}$$

der Ω-Objektmoduln ein. Gegeben eine abelsche Gruppe Ω identifiziert man $\mathrm{Ab}_{\Omega\curlyvee'}$ leicht mit der Schmelzkategorie aller Moduln über der Tensoralgebra $\mathrm{T}\Omega$. Multiäquivariante Schmelzkategorien von Moduln über „Abmonoiden" diskutieren wir in 2.2.6 und über „Monoiden" in 3.1.14 und notieren sie dann ohne das „Freiheitsstrichlein" in unserer Notation für Objektmoduln.

Vorschau 1.1.37. In 2.2.12 führen wir die „äquivariante Schmelzkategorie $\mathcal{M}_{C\curlyvee}$ der C-Objektmoduln" eines „Koabmonoids C einer Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$" ein. Sie hat dieselben Objekte wie $\mathcal{M}_{C\curlyvee'}$, hat aber andere Verschmelzungen.

1.1.38. Gegeben eine Trennkategorie $\mathcal{T}$ und ein Objekt $\Omega \in \mathcal{T}$ erklären wir opponiert einen **Ω-Objektkomodul von $\mathcal{T}$** als ein Paar (X, Δ) aus einem Objekt $X \in \mathcal{T}$ und einer Trennung $\Delta : X \to \Omega \curlywedge X$ und betrachten die **multiäquivariante Trennkategorie der Ω-Objektkomoduln**

$$\mathcal{M}_{\Omega\curlywedge'}$$

Übungen

Übung 1.1.39. Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Man zeige, daß ein Morphismus $(\varphi, f_1 \curlyvee \ldots \curlyvee f_r)$ der Familienkategorie $\mathcal{M}^{\curlyvee}$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn φ eine Bijektion ist und alle f_i Einsverschmelzungen, die Isomorphismen der zugehörigen einfachen Kategorie sind.

Übung 1.1.40. In der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie kann jeder Morphismus durch $\curlywedge$-Vertupeln und Verknüpfen erhalten werden aus Leertrennungen, Einstrennungen und Zweitrennungen der Gestalt $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : X \to X \curlywedge X$. Letztere nennen wir **Diagonalzweitrennungen**.

Übung 1.1.41. In der Familienkategorie einer banalen Trennkategorie zu einer Kategorie mit endlichen Produkten kann jeder Morphismus durch $\curlywedge$-Vertupeln und Verknüpfen erhalten werden aus Leertrennungen, Einstrennungen und Zweitrennungen der Gestalt $(\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y) : X \times Y \to X \curlywedge Y$. Letztere nennen wir **Projektionszweitrennungen**. Diese Übung wird sich als ein Spezialfall von 1.2.24 erweisen.

Ergänzende Übung 1.1.42 (**Monotone Schmelzkategorie der Ω-Bimengen**). Gegeben eine Menge Ω verstehen wir unter einer **Ω-Bimenge** eine Menge X mit

Abbildungen $\Omega \times X \to X$ und $X \times \Omega \to X$, die wir durch Hintereinanderschreiben notieren, so daß gilt $(\omega x)\eta = \omega(x\eta)$ für alle $\omega, \eta \in \Omega$ und $x \in X$. Die Ω-Bimengen werden zu einer monotonen Schmelzkategorie, wenn wir Verschmelzungen erklären als Abbildungen

$$\varphi : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$$

mit $\varphi(x_1, \ldots, x_i\eta, x_{i+1}, \ldots, x_r) = \varphi(x_1, \ldots, x_i, \eta x_{i+1}, \ldots, x_r)$ für alle i sowie $\varphi(\omega x_1, \ldots, x_r) = \omega\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ und $\varphi(x_1, \ldots, x_r\eta) = \varphi(x_1, \ldots, x_r)\eta$ für alle $x_i \in X_i$ und $\omega, \eta \in \Omega$. Leerverschmelzungen sind Abbildungen aus dem leeren Produkt $\{*\}$ alias Elemente $y = \varphi(*) \in Y$ mit $\omega y = y\omega$ für alle $\omega \in \Omega$.

Ergänzende Übung 1.1.43 (**Monotone Schmelzkategorie der Bimoduln**). Gegeben ein Ring R bilden die R-Bimoduln eine monotone Schmelzkategorie mit den $\mathbb{Z}$-multilinearen Verschmelzungen von R-Bimengen wie in 1.1.42 als Verschmelzungen.

1.2 Universelle Verschmelzungen

Definition 1.2.1. Eine Verschmelzung $\kappa \in \mathcal{M}(A, T)$ in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ heiße **universell**, wenn für jedes weitere Objekt $Y \in \mathcal{M}$ das Vorschalten von κ eine Bijektion

$$(\circ\kappa) : \mathcal{M}(T, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A, Y)$$

induziert. Eine universelle Verschmelzung (κ, T) ist, wenn sie denn existiert, durch ihre Ausgangsfamilie A bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Wir sagen, eine Schmelzkategorie **habe universelle Verschmelzungen**, wenn es darin zu jeder Objektkleinfamilie eine universelle Verschmelzung gibt.

Definition 1.2.2. Eine Verschmelzung $\kappa \in \mathcal{M}(A, T)$ in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ heiße **stabil universell**, wenn für jede Objektkleinfamilie $B \in \mathcal{M}^{\curlyvee}$ und jedes Objekt $Y \in \mathcal{M}$ das Vorschalten des Morphismus $\kappa \curlyvee \mathrm{id}$ der Familienkategorie eine Bijektion

$$(\circ(\kappa \curlyvee \mathrm{id})) : \mathcal{M}(T \curlyvee B, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A \curlyvee B, Y)$$

zwischen den jeweiligen Mengen von Verschmelzungen induziert. Wir sagen, eine Schmelzkategorie **habe stabil universelle Verschmelzungen**, wenn es darin zu jeder Objektkleinfamilie eine stabil universelle Verschmelzung gibt.

1.2.3. Das Konzept einer stabil universellen Verschmelzung wird sich im folgenden als der wichtigere Begriff erweisen. Das Konzept einer universellen Verschmelzung sehe ich nur als einen didaktisch motivierten Zwischenschritt auf dem Weg dorthin.

Ergänzung 1.2.4. Im Fall einer monotonen Schmelzkategorie muß die Eigenschaft „stabil universell" sorgfältiger formuliert werden in der Weise, daß eine Verschmelzung $B \to T$ stabil universell ist, wenn für beliebige Objektworte $A, C \in$ und jedes Objekt $Y \in \mathcal{M}$ das Vorschalten des Morphismus $\mathrm{id} \curlyvee \kappa \curlyvee \mathrm{id}$ eine Bijektion $\mathcal{M}(A \curlyvee T \curlyvee C, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A \curlyvee B \curlyvee C, Y)$ zwischen den jeweiligen Mengen von Verschmelzungen induziert.

Beispiel 1.2.5 (**Eine universelle aber nicht stabil universelle Verschmelzung**). Ändern wir die Schelzkategorie Mod_k der multilinearen Abbildungen von Vektorräumen über einem Körper k dahingehend ab, daß wir als Leerverschmelzungen nur die Nullvektoren zulassen, so ist eine universelle Leerverschmelzung in der so entstehenden Schmelzkategorie der Nullvektor im Nullvektorraum, aber diese ist nicht stabil universell.

1.2.6 (**Multiverknüpfung stabil universeller Verschmelzungen**). Eine Einsverschmelzung ist genau dann stabil universell, wenn sie in der zugehörigen einfachen Kategorie zu einem Isomorphismus wird. Offensichtlich ist jede stabil universelle Verschmelzung universell. Offensichtlich ist jede Multiverknüpfung stabil universeller Verschmelzungen wieder stabil universell.

Vorschau 1.2.7. In 1.3.8 werden wir lernen, daß in einer Schmelzkategorie mit „Multihom" jede universelle Verschmelzung bereits stabil universell ist. In 1.2.21 dürfen Sie zeigen, daß in einer Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen genau dann alle Verschmelzungen stabil universell sind, wenn jede Multiverknüpfung universeller Verschmelzungen wieder universell ist.

1.2.8 (**Notationen für stabil universelle Verschmelzungen**). Stabil universelle Verschmelzungen einer Objektkleinfamilie B in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ notieren wir meist $(\kappa, \otimes B)$ und schreiben manchmal $\otimes_{\mathcal{M}}$ und für eine explizite Familie $B = (B_i)_{i \in I}$ auch $\bigotimes_{i \in I} B_i$ oder ausführlicher

$$\kappa = \kappa_B \in \mathcal{M}(B, \otimes B) = \mathcal{M}(B_1 \curlyvee \ldots \curlyvee B_r, B_1 \otimes \ldots \otimes B_r)$$

und nennen sie häufig **Tensorprodukte**. Jeder Morphismus $\phi \in \mathcal{M}^{\curlyvee}(C, B)$ der Familienkategorie von $\mathcal{M}$ induziert, wenn die entsprechenden stabil universellen Verschmelzungen von B und C existieren, in offensichtlicher Weise einen Morphismus $\otimes\phi : \otimes C \to \otimes B$ in der zugrundeliegenden einfachen Kategorie $\mathrm{E}(\mathcal{M})$. Hat unsere Schmelzkategorie stabil universelle Verschmelzungen, so liefert diese Konstruktion einen Funktor $\mathcal{M}^{\curlyvee} \to \mathrm{E}(\mathcal{M})$. Schließlich liefert jede stabil universelle Verschmelzung in der Wortkategorie durch das Vorschalten von Leerverschmelzungen eine Abbildung

$$\mathcal{M}(\curlyvee, B_1) \times \ldots \times \mathcal{M}(\curlyvee, B_r) \to \mathcal{M}(\curlyvee, B_1 \otimes \ldots \otimes B_r)$$

Auch diese Abbildung notieren wir meist mit demselben Symbol wir unsere Verschmelzung, im vorliegenden Fall also $(b_1, \ldots, b_r) \mapsto b_1 \otimes \ldots \otimes b_r$.

Beispiel 1.2.9. Im Fall der Schmelzkategorie der k-Vektorräume ist die kanonische multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_r \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ in das Tensorprodukt aus der linearen Algebra stabil universell und die auf den Leerverschmelzungsmengen induzierte Abbildung ist schlicht ebendieselbe Abbildung aufgefaßt als Abbildung von Mengen, deren Effekt auf Elementen wir bereits in der linearen Algebra $(v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$ notiert hatten. Eine universelle Leerverschmelzung ist speziell die Abbildung $\{*\} \to k$ mit $* \mapsto 1$. Analoges gilt für Moduln über einem beliebigen Kring k bis auf das Detail, daß wir in diesem Fall Tensorprodukte mit mehr als einem Faktor noch nicht eingeführt haben. Das soll in 1.2.17 nachgeholt werden.

1.2.10. Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Gegeben $M \in \mathcal{M}$ und $r \in \mathbb{N}$ notieren wir

$$M^{\curlyvee r} := M \curlyvee M \curlyvee \ldots \curlyvee M$$

die konstante Familie $\{1, \ldots, r\} \to \mathcal{M}$. Existiert eine stabil universelle Verschmelzung für diese Familie, so notieren wir sie $M^{\otimes r} := \otimes(M^{\curlyvee r})$ und nennen sie die **r-te Tensorpotenz von** M und erhalten darauf mit Umindizierung nach 1.1.13 eine Rechtsoperation der Gruppe $\mathcal{S}_r$ aller Permutationen von $\{1, \ldots, r\}$. Gegeben eine endliche Menge I und eine konstante Familie $B : I \to \mathcal{M}$ erhalten wir allgemeiner durch Umindizierung 1.1.13 eine Rechtsoperation von $\mathrm{Ens}^{\times}(I)$ auf $\otimes B$.

1.2.11. Da nach 1.2.6 Multiverknüpfungen stabil universeller Verschmelzungen wieder stabil universell sind, ist für Objekte X, Y, Z einer Schmelzkategorie, für die die entsprechenden stabil universellen Verschmelzungen existieren, auch $\kappa \circ (\kappa \curlyvee \mathrm{id}) : X \curlyvee Y \curlyvee Z \to (X \otimes Y) \otimes Z$ eine stabil universelle Verschmelzung. Dasselbe gilt für $\kappa \circ (\mathrm{id} \curlyvee \kappa)$ und wir erhalten so natürliche Isomorphismen

$$(X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes Y \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$$

Deren Verknüpfung heißt der **Assoziator**.

1.2.12. Das Ziel einer stabil universellen Leerverschmelzung, wenn es sie denn gibt, nennen wir das **Einsobjekt** oder kurz die **Eins** unserer Schmelzkategorie. Wir notieren es $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{\mathcal{M}}$ und notieren die stabil universelle Leerverschmelzung

$$\kappa_{\curlyvee} : \curlyvee \to \mathbb{I}$$

1.2.13. Für jedes Objekt X einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Eins gibt es genau eine Verschmelzung $\kappa : \mathbb{I} \curlyvee X \to X$ mit $\mathrm{id}_X = \kappa \circ (\kappa_{\curlyvee} \curlyvee \mathrm{id}_X) : X \to \mathbb{I} \curlyvee X \to X$. Diese Verschmelzung ist stabil universell und wir erhalten so einen natürlichen Isomorphismus $\mathbb{I} \otimes X \xrightarrow{\sim} X$. Er heißt die **Einsbedingung**.

1.2.14. Die Assoziativität der Multiverknüpfung liefert in Schmelzkategorien viele weitere Verträglichkeiten zwischen stabil universellen Verschmelzungen. Ich will sie vorerst nicht thematisieren. Der Vorteil der Sprache der Schmelzkategorien liegt ja gerade darin, daß diese Verträglichkeiten bereits in die Axiomatik fest mit eingebaut sind und bei Bedarf abgeleitet werden können, a priori aber nicht thematisiert werden müssen.

Beispiele 1.2.15. In Fall einer banalen Schmelzkategorie ist jedes endliche Koprodukt eine stabil universelle Verschmelzung. Im Fall der kartesischen Schmelzkategorie einer Kategorie mit endlichen Produkten ist die „Identität auf dem Produkt" eine stabil universelle Verschmelzung.

1.2.16. Natürlich kann man einen zu unseren universellen beziehungsweise stabil universellen Verschmelzungen opponierten Formalismus auch in der opponierten Situation der Trennkategorien entwickeln. Ich nenne diesen Begriff eine **universelle** beziehungsweise **stabil universelle Trennung**.

1.2.17 (**Längere Tensorprodukte über Kringen**). Gegeben ein Kring k und k-Moduln $V_1, \ldots, V_n$ konstruieren wir nun eine universelle k-multilineare Abbildung

$$\kappa : V_1 \times \ldots \times V_n \to T$$

Wir betrachten dazu den Quotienten $T := k\langle V_1 \times \ldots \times V_n\rangle/U$ des freien k-Moduls F über der Menge $V_1 \times \ldots \times V_n$ nach dem kleinsten Untermodul U, für den die Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_n \to F/U$ multilinear ist. Daß es einen kleinsten Untermodul U mit dieser Eigenschaft gibt, folgt aus der Tatsache, daß der Schnitt über eine beliebige Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Untermoduln mit dieser Eigenschaft stets auch wieder diese Eigenschaft hat. Das hinwiederum folgt aus der Existenz einer k-linearen Einbettung $F/(\bigcap U_i) \hookrightarrow \prod(F/U_i)$, über das Produkt der multilinearen Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_n \to F/U_i$ ja faktorisieren muß. Wir verwenden für unseren universellen Quotienten die Notation

$$V_1 \otimes_k \ldots \otimes_k V_n := F/U$$

Alternativ hätten wir den herauszuteilenden Untermodul U auch ähnlich wie im Fall bilinearer Abbildungen explizit durch Erzeuger beschreiben können, aber wie schon im alten Rom, variatio delectat. Man prüft leicht, daß auch im Fall der Moduln über einem Kring alle universellen Verschmelzungen vereits stabil universell sind.

Beispiel 1.2.18 (**Schmelzkategorie der abelschen Gruppen**). Wir buchstabieren die in 1.2.17 besprochenen allgemeinen Aussagen nocheinmal im Spezialfall des Krings $\mathbb{Z}$ aus, dessen Modulkategorie ja schlicht die Kategorie der abelschen Gruppen ist. Die abelschen Gruppen bilden mithin eine Schmelzkategorie Ab mit den multilinearen Abbildungen als Verschmelzungen. Hierbei verstehen wir multilineare Abbildungen von der leeren Objektfamilie in eine abelsche Gruppe wie zuvor als Elemente von besagter Gruppe oder genauer und ganz pedantisch als Abbildungen der einpunktigen Menge $\{*\}$ dorthin. Die natürlichen multilinearen Abbildungen $\kappa : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ in die Tensorprodukte über $\mathbb{Z}$ sind dann stabil universell. Eine stabil universelle Leerverschmelzung ist die Abbildung $\{*\} \to \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto 1$. Eine alternative universelle Leerverschmelzung wäre die Abbildung $\{*\} \to \mathbb{Z}$ mit $* \mapsto -1$, aber wozu den Teufel am Schwanz ziehen.

Ergänzung 1.2.19. Die Bimoduln über einem beliebigen Ring sind ein Beispiel für eine monotone Schmelzkategorie. Wir führen das hier nicht weiter aus.

1.2.20 (**Symmetrische Potenzen**). Gegeben ein Objekt V einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und $r \geq 0$ nennt man $\mathcal{S}_r$-invariante Verschmelzungen $V^{\curlyvee r} \to X$ **symmetrisch**. Eine symmetrische Verschmelzung $V^{\curlyvee r} \to S$ heißt **universellsymmetrisch**, wenn für jedes Objekt X das Vorschalten eine Bijektion

$$\mathcal{M}(S, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(V^{\curlyvee r}, X)^{\mathcal{S}_r}$$

induziert. Eine universellsymmetrische Verschmelzung ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, wenn sie existiert. Sie heißt **stabil universellsymmetrisch**, wenn sogar für jede weitere Objektkleinfamilie C und jedes Objekt U das Vorschalten eine Bijektion

$$\mathcal{M}(S \curlyvee C, U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(V^{\curlyvee r} \curlyvee C, U)^{\mathcal{S}_r}$$

induziert. Für Schmelzkategorien mit Multihom sind offensichtlich alle universellsymmetrischen Verschmelzungen auch stabil universellsymmetrisch. Wir verwenden

$$\alpha_r : V^{\curlyvee r} \to \mathrm{S}^r V$$

als Notation für die bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte stabil universellsymmetrische Verschmelzung, wenn es sie gibt, und nennen $\mathrm{S}^r V$ die **r-te symmetrische Potenz von** V. Natürlich haben wir $\alpha_0 = \kappa_\curlyvee : \curlyvee \to \mathbb{I}$ und $\alpha_1 = \mathrm{id} : V \to V$. Gibt es alle drei beteiligten stabil universellsymmetrischen Verschmelzungen, so liefern die universellen Eigenschaften, daß α_{r+t} eindeutig faktorisiert in

$$V^{\curlyvee(r+t)} \to \mathrm{S}^r V \curlyvee V^{\curlyvee t} \to \mathrm{S}^r V \curlyvee \mathrm{S}^t V \to \mathrm{S}^{r+t} V$$

mit $\alpha_r \curlyvee \mathrm{id}^{\curlyvee t}$ und $\mathrm{id} \curlyvee \alpha_t$ als ersten beiden Morphismen und einer so erklärten Zweiverschmelzung

$$\beta = \beta_{r,t} : \mathrm{S}^r V \curlyvee \mathrm{S}^t V \to \mathrm{S}^{r+t} V$$

Klar sind auch die „Kommutativität“ $\beta_{t,r} = \beta_{r,t} \circ \tau$ für τ die Vertauschung, die „Unitarität“ $\beta_{0,r} \circ (\kappa_\curlyvee \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id}$ sowie die „Assoziativität“ $\beta_{r,s+t}(\mathrm{id} \curlyvee \beta_{s,t}) = \beta_{r+s,t}(\beta_{r,s} \curlyvee \mathrm{id})$. In einer später eingeführten Terminologie kann das dahingehend zusammengefaßt werden, daß $(\mathrm{S}^r V)_{r\in\mathbb{N}}$ mit den β ein Abmonoid der Schmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{N}$-graduierten Objekte von $\mathcal{M}$ aus 1.1.21 wird. In der Schmelzkategorie der Moduln über einem Kring k sind die $\mathrm{S}^r V$ unsere symmetrischen Potenzen aus der kommutativen Algebra. In der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen sind es die Bahnenräume $X^r/\mathcal{S}_r$ unter der Operation der symmetrischen Gruppe. Für eine Diskussion der „äußeren Potenzen“ verweise ich auf 3.4.4.

Übungen

Übung 1.2.21. Man zeige, daß in einer Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen genau dann alle universellen Verschmelzungen stabil sind, wenn jede Multiverknüpfung von universellen Verschmelzungen wieder universell ist.

Übung 1.2.22. Man zeige, daß eine Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen für alle Familien aus zwei Objekten und für die leere Objektfamilie auch stabil universelle Verschmelzungen für beliebige Objektkleinfamilien hat.

Übung 1.2.23 (**Schmelzkategorien von graduierten abelschen Gruppen**). Gegeben ein abelsches Monoid Γ bilden die Γ-graduierten abelschen Gruppen eine Schmelzkategorie Ab^Γ mit den vom Grad Null homogenen multilinearen Abbildungen als Verschmelzungen. Universelle, ja stabil universelle Verschmelzungen sind die Tensorprodukte mit ihrer natürlichen Γ-Graduierung. Analog erklärt man die Schmelzkategorie Mod_k^Γ der Γ-graduierten Moduln über einem Kring k.

Übung 1.2.24. Bei einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen ensteht jeder Morphismus ihrer Familienkategorie durch $\curlyvee$-Vertupeln und Verknüpfen aus universellen Leerverschmelzungen, universellen Zweiverschmelzungen und beliebigen Einsverschmelzungen. Die Identität auf der leeren Objektfamilie erhalten wir dabei als das leere Tupel von Einsverschmelzungen. Wir erhalten 1.1.41 als Spezialfall.

Ergänzende Übung 1.2.25. Gegeben Ringe R, S sowie Moduln $C \in \mathrm{Mod}\text{-}R$, $D \in R\text{-}\mathrm{Mod}\text{-}S$ und $E \in S\text{-}\mathrm{Mod}$ gibt es genau einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$C \otimes_R (D \otimes_S E) \mapsto (C \otimes_R D) \otimes_S E$$

mit der Eigenschaft, daß mit den offensichtlichen Surjektionen des für die zugrundeliegenden abelschen Gruppen über $\mathbb{Z}$ gebildeten Tensorprodukts $C \otimes D \otimes E$ auf beide Seiten ein kommutatives Dreieck entsteht.

1.3 Multihom

Definition 1.3.1. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$, eine Objektkleinfamilie $B \in \mathcal{M}^{\curlyvee}$ und ein Objekt $Z \in \mathcal{M}$ verstehen wir unter einem **Multi-Hom-Objekt**

$$(B \Rrightarrow Z) = (B \Rrightarrow_{\mathcal{M}} Z) \in \mathcal{M}$$

ein Objekt, das den durch $A \mapsto \mathcal{M}(A \curlyvee B, Z)$ gegebenen Funktor $\mathcal{M}^{\curlyvee} \to \mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$ darstellt. Ein Multihomobjekt kommt also zusammen mit natürlichen Bijektionen $\mathcal{M}(A \curlyvee B, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A, B \Rrightarrow Z)$ und ist als derartiges Datum eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus, wenn es existiert.

1.3.2. Multihomobjekte in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ werden insbesondere angeliefert mit einer natürlichen Bijektion $\mathcal{M}(B, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\curlyvee, B \Rrightarrow Z)$ zwischen der Menge aller Verschmelzungen von einer Objektkleinfamilie zu einem Objekt und der Menge aller Leerverschmelzungen in das entsprechende Multihomobjekt.

1.3.3. Wir sagen, eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ **habe Multihom**, wenn zu jeder Objektkleinfamilie B und jedem Objekt Z das Multihomobjekt $B \Rrightarrow Z$ existiert. Im Fall einer Objektfamilie $B = X$ aus einem einzigen Buchstaben nennen wir das Multihomobjekt $X \Rrightarrow Z$ das **interne Homobjekt** oder kurz **Homobjekt**. Existieren alle Homobjekte, so existieren auch alle Multihom und können induktiv konstruiert werden. Zum Beispiel wird der Funktor $A \mapsto \mathcal{M}(A \curlyvee X \curlyvee Y, Z)$ für feste Objekte X, Y, Z offensichtlich dargestellt durch $X \Rrightarrow (Y \Rrightarrow Z)$, wenn denn die fraglichen Hom-Objekte beide existieren.

Beispiel 1.3.4 (**Multihom im Fall von Vektorräumen**). Die Vektorräume über einem vorgegebenen Körper k bilden, wie bereits in 1.1.5 besprochen, eine Schmelzkategorie Mod_k mit multilinearen Abbildungen als Verschmelzungen, also

$$\mathrm{Mod}_k(W_1 \curlyvee \ldots \curlyvee W_r, V) := \mathrm{Hom}_k^{(r)}(W_1 \times \ldots \times W_r, V)$$

Versehen wir diese Mengen von multilinearen Abbildungen ihrerseits mit ihrer offensichtlichen Struktur als k-Vektorraum, so erhalten wir ein Multihom unserer Schmelzkategorie. In der Tat entsprechen s-lineare Abbildungen

$$U_1 \times \ldots \times U_s \to \mathrm{Hom}_k^{(r)}(W_1 \times \ldots \times W_r, V)$$

eineindeutig $(s + r)$-linearen Abbildungen $U_1 \times \ldots \times U_s \times W_1 \times \ldots \times W_r \to V$. In der Schmelzkategorie Ab der abelschen Gruppen erhalten wir ähnlich ein Multihom, indem wir von der abelschen Gruppe

$$\big((V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r) \Rrightarrow W\big) := \mathrm{Hom}^{(r)}(V_1 \times \ldots \times V_r, W)$$

aller fraglichen multiadditiven Abbildungen ausgehen und sie um die offensichtlichen zusätzlichen Daten ergänzen. Analog erhalten wir Multihom in der Schmelzkategorie der Moduln über einem beliebigen Kring.

Ergänzung 1.3.5. Im Fall einer monotonen Schmelzkategorie muß man unterscheiden zwischen einer „Rechtsversion“ und einer „Linksversion“ von Multihom. Wir verfolgen das hier nicht weiter.

1.3.6. Die Konstruktion interner Homobjekte ist offensichtlich ein Funktor von der vollen Unterkategorie aller Paare in $\mathrm{E}(\mathcal{M})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{E}(\mathcal{M})$, für die eben solch ein Objekt existiert, in die Kategorie $\mathrm{E}(\mathcal{M})$. Er heißt der **interne Hom-Funktor**.

Beispiel 1.3.7. In der kartesischen Schmelzkategorie $\mathrm{kart}(\mathrm{Ens})$ der Mengen ist das Multihomobjekt $B \Rrightarrow Z$ die Menge $\mathrm{Ens}(B_1 \times \ldots \times B_r, Z)$ mit den entsprechenden Zusatzdaten.

1.3.8. In einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom sind offensichtlich alle universellen Verschmelzungen bereits stabil universell.

1.3.9. Existiert für eine Objektkleinfamilie B einer Schmelzkategorie eine stabil universelle Verschmelzung $B \to \otimes B$, so ist für jedes weitere Objekt die Existenz von $B \Rrightarrow Z$ gleichbedeutend zur Existenz von $(\otimes B) \Rrightarrow Z$ und diese beiden Objekte sind kanonisch isomorph.

1.3.10 (**Multihom aus der leeren Objektfamilie**). Für das Multihom aus der leeren Objektfamilie liefert die Definition sowohl die Existenz des fraglichen Multihom als auch einen ausgezeichneten Isomorphismus $(\curlyvee \Rrightarrow Z) \stackrel{\sim}{\to} Z$. Besitzt unsere Schmelzkategorie eine Eins $\mathbb{I} = \otimes \curlyvee$, so erhalten wir mit 1.3.9 weiter einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$(\mathbb{I} \Rrightarrow Z) \stackrel{\sim}{\to} Z$$

Ergänzung 1.3.11. Natürlich kann man einen zu Multihom opponierten Formalismus auch in der opponierten Situation der Trennkategorien entwickeln. Darauf verzichte ich, weil es dieses „opponierte Multihom“ in den im folgenden zu betrachteten Standardsituationen meist entweder gar nicht gibt oder wir uns bereits in der Situation einer „Trennschmelzkategorie“ befinden, in der es vermittels des internen Homs des Schmelzanteils durch die Formel $A \Rrightarrow (B_1 \otimes \ldots \otimes B_r)$ dargestellt werden kann.

Übungen

Übung 1.3.12 (**Tensor-Hom-Adjunktion**). Man zeige, daß eine Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen genau dann Multihom hat, wenn für jedes Objekt X der Funktor $X \otimes$ auf den zugehörigen einfachen Kategorien einen Rechtsadjungierten besitzt. Er wird dann notwendig durch das Bilden des internen Homobjekts $(X \Rrightarrow\ )$ gegeben.

Übung 1.3.13 (**Hom-Hom-Adjunktion**). Gibt es für $Z \in \mathcal{M}$ ein Objekt einer Schmelzkategorie alle internen Homobjekte $X \Rrightarrow Z$, so ist auf den zugehörigen einfachen Kategorien der Funktor $(\Rrightarrow Z) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ linksadjungiert zu $(\Rrightarrow Z)^{\mathrm{opp}} : \mathcal{M}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{M}$.

Übung 1.3.14 (**Multihom von graduierten abelschen Gruppen**). Ist Γ ein abelsches Monoid, so erhält man internes Hom in der Schmelzkategorie Ab^{Γ} aus 1.2.23 durch $(M \Rrightarrow N)^{\gamma} = \prod_{\mu \in \Gamma} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^{\mu}, N^{\mu+\gamma})$.

Übung 1.3.15 (**Auswerten von internem Hom**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Existiert für $X, Y \in \mathcal{M}$ das interne Homobjekt, so erhalten wir eine ausgezeichnete Zweiverschmelzung

$$\mathrm{ev} : X \curlyvee (X \Rrightarrow Y) \to Y$$

per Adjunktion aus der Identität auf $(X \Rrightarrow Y)$. Im Spezialfall der Moduln ist obiger Morphismus das Auswerten von linearen Abbildungen. Wir nennen ihn analog auch im allgemeinen das **Auswerten** oder gleichbedeutend **Evaluieren**. Durch nochmaliges Anwenden der Adjunktion erhalten wir, wenn auch das zweite fragliche interne Homobjekt existiert, einen Morphismus $X \to (X \Rrightarrow Y) \Rrightarrow Y$, der auch das **Auswerten** heißt und im Fall der Vektorräume mit Y dem Grundkörper zur natürlichen Abbildung eines Vektorraums in seinen Bidualraum spezialisiert.

Ergänzung 1.3.16. Gegeben ein Morphismus $S \curlyvee X \to Y$ in einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und ein weiteres Objekt Z derart, daß die internen Hom $X \Rrightarrow Z$ und $Y \Rrightarrow Z$ existieren, erhalten wir eine ausgezeichnete Zweiverschmelzung

$$S \curlyvee (X \Rrightarrow Z) \to (Y \Rrightarrow Z)$$

aus der Dreiverschmelzung $S \curlyvee X \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \to Z$, die durch Vorschalten von $S \curlyvee X \to Y$ aus dem Auswerten 1.3.15 entsteht.

Übung 1.3.17. Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Gegeben Objekte X, Y, Z derart, daß $X \Rrightarrow Y$ und $Y \Rrightarrow Z$ existieren, liefert das Auswerten 1.3.15 natürliche Verschmelzungen

$$X \curlyvee (X \Rrightarrow Y) \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \quad \to \quad Y \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \quad \to \quad Z$$

Existiert auch $X \Rrightarrow Z$, so erhalten wir aus deren Komposition eine natürliche Zweiverschmelzung, das **Verknüpfen von internem Hom**

$$(X \Rrightarrow Y) \curlyvee (Y \Rrightarrow Z) \to (X \Rrightarrow Z)$$

Wenn die entsprechenden Hom-Objekte existieren, erhalten wir daraus hinwiederum natürliche Morphismen $(X \Rrightarrow Y) \to (Y \Rrightarrow Z) \Rrightarrow (X \Rrightarrow Z)$ und $(Y \Rrightarrow Z) \to (X \Rrightarrow Y) \Rrightarrow (X \Rrightarrow Z)$, die man das **Vorschalten** beziehungsweise **Nachschalten von internem Hom** nennen mag.

Übung 1.3.18 (**Tensorieren von internem Hom**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Wenn die fraglichen Multihom und stabil universellen Verschmelzungen existieren, erhalten wir eine ausgezeichnete Zweiverschmelzung

$$(W\Rrightarrow X) \curlyvee (Y\Rrightarrow Z) \;\to\; (W \otimes Y)\Rrightarrow(X \otimes Z)$$

aus der Multiverknüpfung $W \curlyvee Y \curlyvee (W\Rrightarrow X) \curlyvee (Y\Rrightarrow Z) \to X \curlyvee Z \to X \otimes Z$ mit Auswertungen vorne durch Faktorisierung über eine Dreiverschmelzung mit $W \otimes Y$ ganz links und Anwenden der Adjunktion. Im Spezialfall der Vektorräume ist der obige kanonische Morphismus das Tensorieren von linearen Abbildungen. Wir nennen ihn auch im allgemeinen das **Tensorieren**.

Übung 1.3.19 (**Dualisieren**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie mit Eins $\mathbb{I}$. Wir nennen ein Objekt $X \in \mathcal{M}$ **dualisierbar**, wenn das Homobjekt von $X\Rrightarrow\mathbb{I}$ zur Eins existiert. Wir setzen dann

$$X^\vee := (X\Rrightarrow\mathbb{I})$$

Im Fall der Vektorräume ist das der Dualraum und wir nennen es auch im allgemeinen das **duale Objekt zu** X. Jeder Morphismus $f : X \to Y$ von dualisierbaren Objekten induziert durch Funktorialität einen Morphismus $f^\vee : Y^\vee \to X^\vee$. Die Eins selbst ist immer dualisierbar und in 1.3.10 konstruieren wir einen ausgezeichneten Isomorphismus $c : \mathbb{I}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbb{I}$. Sind X und $X^\vee$ dualisierbar, so liefert 1.3.15 einen ausgezeichneten Morphismus $\mathrm{ev} = \mathrm{ev}_X : X \to X^{\vee\vee}$ und sind zusätzlich Y und $Y^\vee$ auch dualisierbar, so gilt $\mathrm{ev}_Y \circ f = f^{\vee\vee} \circ \mathrm{ev}_X$ für alle $f : X \to Y$. Im Fall des Einsobjekts finden wir $\mathrm{ev}_{\mathbb{I}} = c^\vee \circ c^{-1}$. Gegeben eine stabil universelle Verschmelzung $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_r$ dualisierbarer Objekte zu einem dualisierbaren Objekt liefert das Tensorieren von internem Hom 1.3.18 eine ausgezeichnete Verschmelzung

$$X_1^\vee \curlyvee \ldots \curlyvee X_r^\vee \to (X_1 \otimes \ldots \otimes X_r)^\vee$$

Übung 1.3.20 (**Differentielle abelsche Gruppen**). Wir führen die Schmelzkategorie dAb der differentiellen abelschen Gruppen ein. Objekte sind Paare (A, ∂) bestehend aus einer abelschen Gruppe mit einem Endomorphismus, den wir das **Differential** nennen. Verschmelzungen $\varphi : A_1 \curlyvee \ldots \curlyvee A_r \to A$ sind multiadditive Abbildungen $\varphi : A_1 \times \ldots \times A_r \to A$ mit

$$\partial\varphi(a_1, \ldots, a_r) = \varphi(\partial a_1, \ldots, a_r) + \ldots + \varphi(a_1, \ldots, \partial a_r) \quad \forall a_i \in A_i, 1 \leq i \leq r$$

Leerverschmelzungen nach (A, ∂) sind insbesondere Elemente des Kerns von ∂. Man zeige, daß diese Schmelzkategorie universelle Veschmelzungen und Multihom hat und daß das Vergessen des Differentials $\mathrm{dAb} \to \mathrm{Ab}$ mit universellen Verschmelzungen und Multihom verträglich ist. In der in 3.2.12 eingeführten Trminologie ist das die äquivariante Schmelzkategorie der Moduln über dem Ab-Biabmonoid $\mathbb{Z}[\partial]$ der dualen Zahlen.

1.4 Trennschmelzkategorien

1.4.1. Eine Schmelzkategorie heiße ein **Schmelzgruppoid**, wenn alle ihre Verschmelzungen stabil universell sind. Zu jeder Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ erhalten wir ein Schmelzgruppoid $\mathcal{M}^\times$, indem wir nur die stabil universellen Verschmelzungen von $\mathcal{M}$ als Verschmelzungen zulassen. Analog für Trennkategorien.

Definition 1.4.2. Eine **Trennschmelzkategorie** ist ein Datum bestehend aus einer Kategorie $\mathcal{M}$ mit Erweiterungen der Kategorienstruktur sowohl zu einer Struktur als Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen als auch zu einer Struktur als Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen sowie ausgezeichneten Bijektionen

$$i : \mathcal{M}^\times(Y, X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{M}^\times(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y)$$

zwischen stabil universellen Trennungen und stabil universellen Verschmelzungen in die Gegenrichtung, die verträglich sind mit Multiverknüpfungen und die auf stabil universellen Einsverschmelzungen zum Invertieren von Isomorphismen spezialisieren. Wenn wir uns auf die zugrundeliegende Trenn- oder Schmelzkategorie konzentrieren wollen, schreiben wir $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$ beziehungsweise $\mathcal{M}^{\mathrm{s}}$.

Ergänzung 1.4.3. Das Konzept einer Trennschmelzkategorie ist der Versuch einer „ganzheitlichen“ Beschreibung der Struktur, die man in der Literatur meist durch Erzeuger und Relationen beschreibt und eine „symmetrische monoidale Kategorie“ nennt.

1.4.4 (**Ergänzung zu Trennschmelzkategorie**). Jede Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stabil universellen Verschmelzungen läßt sich zu einer Trennschmelzkategorie ergänzen, indem wir die zugehörigen Trennungen $Y \to X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r$ erklären als Morphismen $Y \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_r$. Stabile Trennungen sind dann Isomorphismen $t : Y \stackrel{\sim}{\to} X_1 \otimes \ldots \otimes X_r$. Als $i(t) := t^{-1} \circ \kappa$ nehmen wir die universelle Verschmelzung gefolgt vom Inversen

$$X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \to Y$$

Das ist offensichtlich bis auf eindeutigen Isomorphismus die einzige derartige Ergänzung, genauer haben wir für je zwei Trennschmelzkategorien mit derselben zugrundeliegenden Schmelzkategorie eindeutig bestimmte Bijektionen zwischen ihren Trennungsmengen von einem vorgegebenen Ausgangsobjekt in eine vorgegebene Objektkleinfamilie mit den offensichtlichen Eigenschaften. Es ist deshalb erlaubt, diese bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Struktur mit einem bestimmten Artikel anzusprechen und ihr eine Notation zuzugestehen. Wir notieren diese Trennschmelzkategorie weiter $\mathcal{M}$ und schreiben $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$, wenn wir uns auf ihren Trennanteil konzentrieren wollen. Wir sagen, diese Trennkategorie entstehe durch **Invertieren** unserer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen.

1.4.5. In derselben Weise besitzt jede Trennkategorie $\mathcal{T}$ mit stabil universellen Trennungen bis auf eindeutigen Isomorphismus genau eine Ergänzung zu einer Trennschmelzkategorie, die wir auch wieder $\mathcal{T}$ notieren. Wenn wir uns auf ihren Schmelzanteil konzentrieren wollen, schreiben wir $\mathcal{T}^{\mathrm{s}}$ und sagen, diese Schmelzkategorie entstehe durch **Invertieren** unserer Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen.

1.4.6. Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ erklären wir in der offensichtlichen Weise die **opponierte Trennschmelzkategorie** $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ und vereinbaren die Abkürzungen

$$\mathcal{M}^{\mathrm{os}} := (\mathcal{M}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{s}} \quad \text{sowie} \quad \mathcal{M}^{\mathrm{ot}} := (\mathcal{M}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{t}}$$

Wenn wir von einer Schmelzkategorie mit stabil universellen Verschmelzungen ausgehen, nennen wir $\mathcal{M}^{\mathrm{os}}$ auch die **oppinvertierte Schmelzkategorie**. Ebenso nennen wir für $\mathcal{T}$ eine Trennkategorie mit stabil universellen Trennungen auch $\mathcal{T}^{\mathrm{ot}}$ die **oppinvertierte Trennkategorie**.

1.4.7. Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ hat man quasi per definitionem ausgezeichnete Isomorphismen $(\mathcal{M}^{\mathrm{s}})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ und $(\mathcal{M}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{os}}$ von Trenn- beziehungsweise Schmelzkategorien, die die Objekte festhalten.

Vorschau 1.4.8 (**Multihom und Opponieren**). Sehr oft arbeiten wir im folgenden in einer Trennschmelzkategorie mit Multihom. Diese Situation ist nicht „stabil unter Opponieren“, denn man fordert darin zwar Rechtsadjungierte für $X\otimes$ aber keine Linksadjungierten. Die Symmetrie wird erst wieder hergestellt, wenn wir die „Starrheit“ aller Objekte fordern.

Beispiel 1.4.9 (**Trennschmelzkatgorie zu endlichen Produkten**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten hat die zugehörige banale Trennkategorie stabil universelle Trennungen und kann mithin als Trennschmelzkategorie aufgefaßt werden. Die zugehörige Schmelzkategorie hat dann die Verschmelzungen

$$(\curlywedge\mathcal{C})(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y) = \mathcal{C}(X_1 \times \ldots \times X_r, Y)$$

und erweist sich so als die kartesische Schmelzkategorie $(\curlywedge\mathcal{C})^{\mathrm{s}} = \mathrm{kart}(\mathcal{C})$ von $\mathcal{C}$. Die Trennschmelzkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten notieren wir statt $\curlywedge\mathcal{C}$ oft vereinfachend $\mathcal{C}$.

Beispiel 1.4.10 (**Trennschmelzkatgorie zu endlichen Koprodukten**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Koprodukten hat die zugehörige banale Schmelzkategorie stabil universelle Verschmelzungen und kann mithin als Trennschmelzkategorie aufgefaßt werden. Die zugehörige Trennkategorie hat dann die Trennungen

$$(\curlyvee\mathcal{C})(X, Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r) = \mathcal{C}(X, Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_r)$$

Dieses Beispiel scheint mir eine besonders gute Motivation für die Bezeichnung derartiger Strukturen als Trennkategorie.

Übungen

Übung 1.4.11 (**Funktorkategorie als internes Hom**). Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ betrachten wir die Kategorie $\mathfrak{U}\mathrm{Cat}$ nach **??** aller Kategorien, deren Morphismenmengen und Objektmenge Elemente von $\mathfrak{U}$ sind, mit Funktoren als Morphismen. Ist unser Mengensystem $\mathfrak{U}$ ein Universum, so hat $\mathfrak{U}\mathrm{Cat}$ endliche Produkte alias die zugehörige banale Trennkategorie

$$\curlywedge\mathfrak{U}\mathrm{Cat}$$

stabil universelle Trennungen und kann folglich in im wesentlichen eindeutiger Weise zu einer Trennschmelzkategorie erweitert werden. Sind $\mathfrak{U} \in \mathfrak{V}$ Universen, so gibt es für Objekte $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{U}\mathrm{Cat}$ das interne Hom $\mathcal{A}{\Rrightarrow}\mathcal{B}$ in $\mathfrak{V}\mathrm{Cat}$ und dies interne Hom ist die Funktorkategorie, mit Funktoren als Objekten und Transformationen als Morphismen. Im wesentlichen ist das das Exponentialgesetz für Kategorien aus A.4.6.

1.5 Schmelzfunktoren

Definition 1.5.1. Ein **Schmelzfunktor** $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ von einer Schmelzkategorie in eine weitere Schmelzkategorie ist ein Datum bestehend aus einer Abbildung p der Objektmengen nebst Abbildungen

$$p : \mathcal{M}(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y) \to \mathcal{N}(pX_1 \curlyvee \ldots \curlyvee pX_r, pY)$$

zwischen den entsprechenden Mengen von Verschmelzungen, die verträglich sind mit Multiverknüpfungen und die Identitäten auf Identitäten werfen. Ein Schmelzfunktor induziert in offensichtlicher Weise einen Funktor $p^{\curlyvee} : \mathcal{M}^{\curlyvee} \to \mathcal{N}^{\curlyvee}$ auf den Familienkategorien der jeweiligen Schmelzkategorien. Die Menge der Schmelzfunktoren von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ notieren wir $\mathrm{SCat}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Wir nennen einen Schmelzfunktor **treu**, **volltreu** beziehungsweise eine **Äquivalenz** oder genauer **Schmelzäquivalenz** oder sogar einen **Isomorphismus von Schmelzkategorien**, wenn der zugehörige Funktor auf den Familienkategorien die entsprechende Eigenschaft hat. Analog erklären wir **Trennfunktoren** zwischen Trennkategorien und vereinbaren dafür eine analoge Terminologie.

1.5.2 (**Kriterium für Schmelzfunktoren**). Um zu prüfen, daß eine gegebene Abbildung p auf den Objektmengen zusammen mit Abbildungen p auf den Verschmelzungsmengen wie eben ein Schmelzfunktor ist, reicht es zu prüfen, daß sie (1) Identitäten auf Identitäten wirft, daß sie (2) mit Umindizierungen $\hat{\tau}$ zu Vertauschungen benachbarter Einträge τ verträglich ist und daß sie (3) mit Vorschalten eines Morphismus der Familienkategorie der Gestalt

$$g \curlyvee \mathrm{id} \curlyvee \ldots \curlyvee \mathrm{id} : Z_1 \curlyvee \ldots \curlyvee Z_s \curlyvee X_2 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to X_1 \curlyvee X_2 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r$$

verträglich ist. Das wird der Leser leicht selbst einsehen können.

Beispiel 1.5.3. Jeder Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ induziert einen Trennfunktor $\curlywedge\mathcal{C} \to \curlywedge\mathcal{B}$ zwischen den zugehörigen banalen Trennkategorien und einen Schmelzfunktor $\curlyvee\mathcal{C} \to \curlyvee\mathcal{B}$ zwischen den zugehörigen banalen Schmelzkategorien.

1.5.4 (**Opponieren von Schmelz- und Trennfunktoren**). Jeder Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ induziert einen Trennfunktor

$$p^{\mathrm{opp}} : \mathcal{M}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{N}^{\mathrm{opp}}$$

zwischen den opponierten Trennkategorien. Analoges gilt für Trennfunktoren.

1.5.5. Gegeben $p, q : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ Schmelzfunktoren verstehen wir unter einer **Transformation von Schmelzfunktoren** $\tau : p \Rightarrow q$ eine Vorgabe von Einsverschmelzungen $\tau_M : p(M) \to q(M)$ in $\mathcal{N}$ für alle $M \in \mathcal{M}$, deren $\curlyvee$-Vertupeln eine Transformation $p^{\curlyvee} \Rightarrow q^{\curlyvee}$ zwischen den auf den Familienkategorien induzierten Funktor liefert. Die Gesamtheit aller Schmelzfunktoren $\mathrm{SCat}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ist mit den Transformationen als Morphismen in natürlicher Weise eine Kategorie.

1.5.6. Die Gesamtheit aller Schmelzkategorien bildet mit Schmelzfunktoren als Morphismen selbst eine Kategorie

$$\mathrm{SCat}$$

mit der terminalen Schmelzkategorie als finalem Objekt.

Beispiel 1.5.7. Sei K ein Körper oder allgemeiner ein Kring. Wir bilden die **Matrix-Schmelzkategorie** Mat_K wie folgt: Objekte sind alle natürlichen Zahlen. Als Mengen von Verschmelzungen nehmen wir die Mengen von Multimatrizen

$$\mathrm{Mat}_K(m_1 \curlyvee \ldots \curlyvee m_r, n) := \{T : [\![m_1]\!] \times \ldots \times [\![m_r]\!] \times [\![n]\!] \to K\}$$

Die Multiverknüpfungen werden durch Summation über gleiche Indizes in der hoffentlich offensichtlichen Weise definiert. Wir erhalten dann einen Schmelzfunktor $\mathrm{Mat}_K \to \mathrm{Mod}_K$, der auf Objekten durch $[\![n]\!] \mapsto K^n$ gegeben wird und auf Morphismen leicht vom Leser erraten werden kann. Im Spezialfall $r = 1$ hätten wir $\mathrm{Mat}_K(m, n) = \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ in unserer früheren Notation.

Beispiel 1.5.8 (**Matrix-Schmelzkategorie eines Mengensystems**). Seien K ein Körper oder allgemeiner ein Kring und $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem. Wir bilden die **Matrixschmelzkategorie** $\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K$ wie folgt: Objekte sind alle Mengen aus $\mathfrak{U}$, in Formeln $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{U}\mathrm{Mat} := \mathfrak{U}$. Wir setzen

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K(X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r, Y) := \left\{ \begin{array}{c} \text{Alle Abbildungen} \\ T : X_1 \times \ldots \times X_r \times Y \to K \\ \text{derart, daß es für beliebige } x_1, \ldots, x_r \\ \text{höchstens endlich viele } y \text{ gibt mit} \\ \text{mit } T(x_1, \ldots, x_r, y) \neq 0 \end{array} \right\}$$

Wieder sind die Multiverknüpfungen in der hoffentlich offensichtlichen Weise durch Summation über gleiche Indizes erklärt. Wir erhalten dann einen Schmelzfunktor $\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K \to \mathrm{Mod}_K$, der auf Objekten durch die Konstruktion freier Moduln $X \mapsto \mathrm{Mod}_K^{\curlywedge} X$ über den entsprechenden Mengen gegeben wird und auf Morphismen vom Leser erraten werden mag.

Beispiel 1.5.9 (**Differential der Analysis als Schmelzfunktor**). In der Sprache der Kategorientheorie mag man die Kategorie $\mathcal{D}$ der bepunkteten halboffenen Teilmengen (A, p) normierter reeller Räume X betrachten mit solchen Abbildungen $f : (A, p) \to (B, q)$ als Morphismen, die bei p differenzierbar sind und p auf q abbilden. Dann erhalten wir einen Funktor in die Kategorie der reellen Vektorräume, indem wir jeder bepunkteten halboffenen Teilmenge den Richtungsraum des umgebenden reellen Raums zuordnen und jedem Morphismus sein Differential am ausgezeichneten Punkt. Man mag weiter $\mathcal{D}$ zu einer Schmelzkategorie machen mit Zweiverschmelzungen $(A, p) \curlyvee (B, q) \to (C, r)$ Morphismen $(A \times B, (p, q)) \to (C, r)$ und analog erklärten beliebigen Verschmelzungen. Dann wird unser Differential ein Schmelzfunktor $\mathcal{D} \to \curlyvee\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$ in die banale Schmelzkategorie der reellen Vektorräume.

1.5.10. Analog zu Schmelzfunktoren erklären wir **monotone Schmelzfunktoren** zwischen monotonen Schmelzkategorien und eine Transformation zwischen monotonen Schmelzfunktoren. Jeder Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ induziert einen monotonen Schmelzfunktor $p = p^{\mathrm{mon}} : \mathcal{M}^{\mathrm{mon}} \to \mathcal{N}^{\mathrm{mon}}$ zwischen den zugehörigen Monotonisierungen, den wir die **Monotonisierung** unseres Schmelzfunktors nennen, und jede Transformation induziert eine Transformation zwischen den jeweiligen monotonisierten Schmelzfunktoren.

1.5.11. Gegeben ein Schmelzfunktor p induzieren die universellen Eigenschaften für jede Objektkleinfamilie B, wenn denn die fraglichen stabil universellen Verschmelzungen existieren, einen natürlichen Morphismus $\otimes(pB) \to p(\otimes B)$. Dasselbe gilt für nicht notwendig stabile universelle Verschmelzungen. Unser Morphismus muß kein Isomorphismus sein, wie etwa der Schmelzfunktor der Restriktion $\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$ zeigt. Ist er doch für alle universellen Verschmelzungen ein Isomorphismus, so sagen wir, unser Schmelzfunktor sei **verträglich mit universellen Verschmelzungen**.

1.5.12. Ganz allgemein verstehen wir unter einem **Trennschmelzfunktor** zwischen Trennschmelzkategorien ein Datum bestehend aus einem mit universellen Trennungen verträglichen Trennfunktor und einem mit universellen Verschmelzungen verträglichen Schmelzfunktor, die auf den zugrundeliegenden einfachen Kategorien übereinstimmen. Jeder mit universellen Verschmelzungen verträgliche Schmelzfunktor zwischen Trennschmelzkategorien und jeder mit universellen Trennungen verträgliche Trennfunktor zwischen Trennschmelzkategorien lassen sich offensichtlich auf genau eine Weise zu einem Trennschmelzfunktor fortsetzen. Jeder Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ zwischen Schmelzkategorien mit stabil universellen Verschmelzungen, der mit universellen Verschmelzungen verträglich ist, induziert insbesondere einen Trennfunktor

$$p^{\mathrm{t}} : \mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{N}^{\mathrm{t}}$$

zwischen den zugehörigen Trennkategorien, der seinerseits mit universellen Trennungen verträglich ist. Analoges gilt für Trennfunktoren.

Beispiel 1.5.13. Jeder mit endlichen Produkten verträgliche Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ induziert einen mit universellen Trennungen verträglichen alias einen Trennschmelzfunktor $\curlywedge\mathcal{C} \to \curlywedge\mathcal{B}$. Insbesondere induziert der Funktor $\mathrm{iso} : \mathfrak{U}\mathrm{Cat} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$, der jeder $\mathfrak{U}$-Kategorie die Menge ihrer Isomorphieklassen zuordnet, einen Trennschmelzfunktor $\mathrm{iso} : \curlywedge\mathfrak{U}\mathrm{Cat} \to \curlywedge\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$.

Beispiel 1.5.14 (**Leerverschmelzungsfunktor**). Gegeben $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie erhalten wir stets einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathrm{kEns}$$

in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen, indem wir jedem Objekt $X \in \mathcal{M}$ die Menge $\mathcal{M}(\curlyvee, X)$ der Leerverschmelzungen nach X zuordnen. Dieser Schmelzfunktor ist nur selten verträglich mit universellen Verschmelzungen. Gegeben ein Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bilden die durch p gegebenen Abbildungen $p : \mathcal{M}(\curlyvee, X) \to \mathcal{N}(\curlyvee, pX)$ stets eine Transformation von Schmelzfunktoren

$$\hat{p} : \mathrm{L}_{\mathcal{M}} \Rightarrow \mathrm{L}_{\mathcal{N}} \circ p$$

1.5.15. Gegeben eine Trennkategorie $\mathcal{T}$ erklären wir opponiert den **Leertrennungsfunktor** $\mathrm{L}_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to \mathrm{kEns}^{\mathrm{opp}}$. Er hat die entsprechend opponierten Eigenschaften.

1.5.16. Wir sagen, ein Schmelzfunktor $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ sei **volltreu auf Leerverschmelzungen**, wenn er für alle Objekte $X \in \mathcal{M}$ eine Bijektion

$$\mathcal{M}(\curlyvee, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(\curlyvee, pX)$$

induziert. Der Vergißfunktor $\mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ hat zum Beispiel diese Eigenschaft. Er ist in diesem Fall sogar isomorph zum Leerverschmelzungsfunktor. Allgemeiner ist für jede Schmelzkategorie der Leerverschmelzungsfunktor offensichtlich volltreu auf Leerverschmelzungen.

Beispiel 1.5.17. Es gibt eine **terminale Schmelzkategorie**

$$\mathrm{scat}$$

mit genau einem Objekt $*$ und einelementigen Mengen von Verschmelzungen. Von jeder Schmelzkategorie gibt es genau einen Schmelzfunktor in diese terminale Schmelzkategorie. Der Indexfunktor der terminalen Schmelzkategorie liefert einen Isomorphismus zwischen ihrer Familienkategorie und der Kategorie der endlichen Mengen beziehungsweise derjenigen endlichen Mengen, die wir für die Indizierung erlaubt haben, etwa die Elemente des kleinsten Universums, das die leere Menge als Element enthält. Opponiertes gilt für die **terminale Trennkategorie** tcat.

1.5.18. Ich erinnere „Strukturen“ auf Objekten einer Kategorie, wie sie in A.3.5 diskutiert wurden, und erkläre deren Verallgemeinerung auf den Fall der Schmelzkategorien. Gegeben ein treuer Schmelzfunktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ erklären wir eine $(\mathcal{S}, v)$**-Struktur auf einem Objekt** $M \in \mathcal{M}$ als eine Äquivalenzklasse von Paaren (S, φ) bestehend aus einem Objekt $S \in \mathcal{S}$ und einem Isomorphismus $\varphi : v(S) \xrightarrow{\sim} M$ mit der Maßgabe, daß (S, φ) äquivalent ist zu (T, ψ), wenn es einen Isomorphismus $i : S \xrightarrow{\sim} T$ gibt mit $\varphi \circ v(i) = \psi$. Gegeben eine Verschmelzung $f : M_1 \curlyvee \ldots \curlyvee M_r \to M$ von Objekten von $\mathcal{M}$ mit $(\mathcal{S}, v)$-Strukturen sagen wir, unsere Verschmelzung sei eine $(\mathcal{S}, v)$**-Verschmelzung** oder **verträglich mit den** $(\mathcal{S}, v)$**-Strukturen**, wenn sie für beliebige Wahlen von Repräsentanten (S_i, φ_i) und (S, φ) der jeweiligen $(\mathcal{S}, v)$-Strukturen das Bild unter v einer Verschmelzung $F : S_1 \curlyvee \ldots \curlyvee S_r \to S$ ist, wenn also für diese Daten gilt

$$f \circ (\varphi_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \varphi_r) = \varphi \circ v(F)$$

Die so erklärte **Schmelzkategorie der Objekte von** $\mathcal{M}$ **mit** $(\mathcal{S}, v)$**-Struktur** notieren wir $\mathcal{M}_{(\mathcal{S},v)}$ und erhalten eine Schmelzäquivalenz

$$[v] : \mathcal{S} \xrightarrow{\approx} \mathcal{M}_{(\mathcal{S},v)}$$

in Gestalt eines Schmelzfunktors, der jedem Objekt $S \in \mathcal{S}$ die Äquivalenzklasse des Paars $(S, \mathrm{id}_{v(S)})$ zuordnet. Im Fall des Vergißfunktors $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ ist diese Schmelzäquivalenz in Verallgemeinerung von [LA2] 7.3.7 mit der entsprechenden Sorgfalt in Fragen der Mengenlehre sogar ein Isomorphismus von Schmelzkategorien

$$[v] : \mathfrak{U}\mathrm{Ab} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}\mathrm{kEns}_{(\mathrm{Ab},v)}$$

für jedes vorgegebene Mengensystem $\mathfrak{U}$. Analoges gilt in den meisten konkreten Fällen, die mir in den Sinn kommen.

Übungen

Übung 1.5.19. Gegeben ein Schmelzfunktor F liefern die universellen Eigenschaften für je zwei Objekte X, Y unter der Annahme, daß die fraglichen internen Hom-Objekte existieren, einen natürlichen Morphismus

$$F(X \Rrightarrow Y) \to (FX \Rrightarrow FY)$$

Er muß kein Isomorphismus sein, wie unser Schmelzfunktor $\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$ zeigt. Ist er stets ein Isomorphismus, so sagen wir, unser Schmelzfunktor sei **verträglich mit internem Hom**.

Ergänzende Übung 1.5.20. Seien $L : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und $R : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ Schmelzfunktoren. Unter einer **Adjunktion von Schmelzfunktoren** $\alpha : L \dashv R$ verstehen wir eine Familie von Bijektionen

$$\alpha_{M_1,\ldots,M_r,N} : \mathcal{M}(M_1 \curlyvee \ldots \curlyvee M_r, RN) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(LM_1 \curlyvee \ldots \curlyvee LM_r, N)$$

derart, daß sie in ihrer Gesamtheit eine Adjunktion $(L^{\curlyvee}, R^{\curlyvee})$ der auf den Familienkategorien induzierten Funktoren liefern. Man zeige, daß für jeden Kringhomomorphismus $k \to K$ die Restriktion res_K^k und die Induktion $\mathrm{ind}_k^K = K \otimes_k$ in natürlicher Weise ein adjungiertes Paar $(\mathrm{ind}, \mathrm{res})$ von Schmelzfunktoren zwischen den Schmelzkategorien der K-Moduln beziehungsweise k-Moduln bilden.

Übung 1.5.21 (**Schmelzfunktoren und symmetrische Potenzen**). Gegeben ein Schmelzfunktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und $V \in \mathcal{M}$ haben wir, wenn die symmetrischen Potenzen $\mathrm{S}^r V$ und $\mathrm{S}^r(FV)$ nach 1.2.20 existieren, einen kanonischen Morphismus $\mathrm{S}^r(FV) \to F(\mathrm{S}^r V)$. Auch wenn F mit universellen Verschmelzungen verträglich ist, muß F nicht mit symmetrischen Potenzen verträglich sein, wie das Beispiel des vergeßlichen Funktors von der kartesischen Schmelzkategorie der abelschen Gruppen in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen zeigt.

Beispiel 1.5.22. In der kartesischen Schmelzkategorie mit Multihom der Mengen ist das duale Objekt jeder Menge die einelementige Menge.

Übung 1.5.23 (**Dualisieren als Trennfunktor**). Sei $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie, in der jedes Objekt dualisierbar ist. Man zeige, daß das Dualisieren einen Trennfunktor

$$\mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$$

vom Trennanteil von $\mathcal{M}$ zum Trennanteil von $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ liefert, wenn wir den Effekt auf Trennungen erklären als die Komposition

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathrm{t}}(Y, X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r) \arrow[d, equal] & & \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}(Y^\vee, X_1^\vee \curlywedge \ldots \curlywedge X_r^\vee) \arrow[dd, equal] \\
\mathcal{M}(Y, X_1 \otimes \ldots \otimes X_r) \arrow[d] & & \\
\mathcal{M}((X_1 \otimes \ldots \otimes X_r)^\vee, Y^\vee) \arrow[rr] & & \mathcal{M}(X_1^\vee \curlyvee \ldots \curlyvee X_r^\vee, Y^\vee)
\end{tikzcd}$$

mit dem Vorschalten der in 1.3.19 erklärten Verschmelzung als unterer Horizontale. Unser Dualisieren macht eine universelle Trennung nach $X_1 \curlywedge \ldots \curlywedge X_r$ genau dann zu einer universellen Trennung, wenn unsere Verschmelzung aus 1.3.19 universell ist alias einen Isomorphismus $X_1^\vee \otimes \ldots \otimes X_r^\vee \xrightarrow{\sim} (X_1 \otimes \ldots \otimes X_r)^\vee$ induziert. In 3.3.18 werden wir sehen, daß das etwa dann der Fall ist, wenn alle X_i mit höchstens einer Ausnahme „starr" sind. Natürlich induziert unser Dualisieren $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ opponiert einen Schmelzfunktor $\mathcal{M}^{\mathrm{os}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{s}}$. Im allgemeinen ist unser Dualisieren $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ aber nicht mit universellen Trennungen verträglich und $\mathcal{M}^{\mathrm{os}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{s}}$ gleichbedeutend nicht mit universellen Verschmelzungen.

Übung 1.5.24. Gegeben ein Morphismus $f : M \to N$ in einer Trennschmelzkategorie mit Multihom $\mathcal{M}$ kommutiert mit dem Auswerten $\mathrm{ev} : X \curlyvee X^\vee \to \mathbb{I}$ aus 1.3.15 für $X = M, N$ und den hoffentlich offensichtlichen weiteren Morphismen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
M \curlyvee N^\vee & \to & M \curlyvee M^\vee \\
\downarrow & & \downarrow \\
N \curlyvee N^\vee & \to & \mathbb{I}
\end{array}$$

Übung 1.5.25 (**Funktionenraum als Trennfunktor**). Wir erhalten einen Trennfunktor

$$\mathrm{Fun} : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$$

von der banalen Trennkategorie der Mengen in die Opponierte der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen durch die Vorschrift, daß wir jeder Menge X die Gruppe $\mathrm{Fun}(X) := \mathrm{Ens}(X, \mathbb{Z})$ der $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf X zuordnen und jeder Trennung $X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ gegeben durch ein Tupel von Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ die multilineare Abbildung $(h_1, \ldots, h_r) \mapsto (h_1 \circ f_1) \ldots (h_r \circ f_r)$, die einem Tupel von Funktionen das Produkt der auf X zurückgeholten Funktionen zuordnet. Der Leertrennung $X \to \curlywedge$ wird dabei die durch die konstante Funktion Eins gegebene Leertrennung $\mathrm{Fun}(X) \to \curlywedge$ in der Trennkategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ zugeordnet. In derselben Weise oder auch durch Skalarerweiterung erhalten wir für jeden Kring k einen Trennfunktor

$$\mathrm{Fun} : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{opp}}$$

Wenn wir k spezifizieren wollen, schreiben wir auch $\mathrm{Fun}(X) = \mathrm{Fun}(X;k) = \mathrm{Ens}(X,k)$.

Übung 1.5.26 (**Funktionenraum als Trennfunktor, topologische Variante**). Wir erhalten einen Trennfunktor $\curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{opp}}$ mit $X \mapsto \mathrm{Top}(X,\mathbb{R})$, ja sogar einen Trennfunktor in die Opponierte der Schmelzkategorie der topologischen reellen Vektorräume mit stetigen multilinearen Abbildungen als Verschmelzungen, indem wir unsere Räume von stetigen Funktionen mit ihrer kompakt-offenen Topologie versehen.

Übung 1.5.27 (**Raum von Maßen als Trennschmelzfunktor**). Wir erhalten einen Trennschmelzfunktor

$$\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$$

von der banalen Trennkategorie der Mengen in die Schmelzkategorie der abelschen Gruppen und genauer zwischen deren Erweiterungen zu Trennschmelzkategorien durch die Vorschrift, daß wir jeder Menge X die abelsche Gruppe $\mathrm{Maß}_!(X) := \mathbb{Z}X$ der $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf X mit endlichem Träger alias „kompakt getragenen ganzzahligen Maße“ zuordnen und jeder Verschmelzung $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ alias Abbildung $v : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ die multilineare Abbildung

$$(\mu_1, \ldots, \mu_r) \mapsto v_*(\mu_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mu_r)$$

mit v_* der „Summation über die Fasern von v“ alias dem „direkten Bild von Maßen“. Der universellen Leerverschmelzung, die in der einpunktigen Menge ens landet, wird insbesondere eine universelle Leerverschmelzung alias ein Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Maß}_!(\mathrm{ens})$ aus dem leeren Tensorprodukt abelscher Gruppen zugeordnet. Das Bild des ausgezeichneten Erzeugers $1 \in \mathbb{Z}$ im leeren Tensorprodukt unter diesem Isomorphismus notieren wir $\delta_* \in \mathrm{Maß}_!(\mathrm{ens})$ und nennen es das **Dirac-Maß** auf dem einpunktigen Raum. Einer Leerverschmelzung $\curlyvee \to Y$ alias einem Punkt $y \in Y$ wird folglich diejenige Leerverschmelzung $\curlyvee \to \mathrm{Maß}_!(Y)$ zugeordnet, die durch die charakteristische Funktion des fraglichen Punktes alias sein Diracmaß $\delta_y \in \mathrm{Maß}_!(Y)$ gegeben ist. In derselben Weise oder auch durch Skalarerweiterung erhalten wir für jeden Kring k einen Trennschmelzfunktor

$$\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Mod}_k$$

Wenn wir an die Koeffizienten erinnern wollen, schreiben wir in diesem Zusammenhang ausführlicher $\mathrm{Maß}_!(X) = \mathrm{Maß}_!(X;k)$.

1.5.28 (**Raum von Maßen als Schmelzfunktor**). Bezeichne $\mathrm{Meß}$ die Kategorie der Meßräume. Wir erhalten dann einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{kart}(\mathrm{Meß}) \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$$

durch die Vorschrift, daß wir jedem Meßraum X den Vektorraum $X \mapsto \mathrm{M}(X;\mathbb{R})$ seiner reellen Maße zuordnen und jeder Verschmelzung $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ alias meßbaren Abbildung $v : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ die multilineare Abbildung $(\mu_1, \ldots, \mu_r) \mapsto v_*(\mu_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mu_r)$, die einem Tupel von Maßen das Bildmaß des Produktmaßes zuordnet. Er ist jedoch in dieser Allgemeinheit nicht mehr verträglich mit universellen Verschmelzungen und kann insbesondere nicht mehr zu einem Trennschmelzfunktor erweitert werden. Nach allgemeinen Resultaten der Maßtheorie wird weiter das Bilden der Borel'schen σ-Algebra $\mathrm{Top} \to \mathrm{Meß}$ verträglich mit endlichen kartesischen Produkten, wenn wir es auf die volle unter endlichen Produkten stabile Unterkategorie $\mathrm{Topaz} \subset \mathrm{Topaz}$ der abzählbar basierten topologischen Räume einschränken. So erhalten wir einen Schmelzfunktor $\mathrm{kart}(\mathrm{Topaz}) \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$, $X \mapsto \mathrm{M}(X;\mathbb{R})$.

1.5.29 (**Raum von Maßen als Schmelzfunktor, Variante**). Bezeichne $\mathrm{Meß}$ die Kategorie der Meßräume. Wir erhalten dann einen Schmelzfunktor $\mathrm{kart}(\mathrm{Meß}) \to \mathrm{kart}(\mathrm{Ens})$ durch $X \mapsto \mathrm{M}(X;[0,\infty])$.

1.5.30 (**Raum von Maßen als Schmelzfunktor, topologische Variante**). Die topologischen Räume, in denen alle Kompakta abzählbar basiert sind, bilden eine volle unter endlichen Produkten abgeschlossene Unterkategorie $\mathrm{Topkaz} \subset \mathrm{Top}$ und wir erhalten einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{Maß}_! : \mathrm{kart}(\mathrm{Topkaz}) \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$$

mit der Eigenschaft, daß $\mathrm{Maß}_!$ jedem Raum den Raum der kompakt getragenen reellen Maße zuordnet, also aller Maße, die sich als Bildmaße von reellen Maßen auf Kompakta darstellen lassen. Daraus erhalten wir unsere kompakt getragenen Maße auf diskreten Mengen als Spezialfall zurück. Alternativ können wir auch beliebige lokal kompakte Hausdorffräume und kompakt getragene Radonmaße betrachten. Auch diese bilden einen Schmelzfunktor, der kompakt getragene Maße auf diskreten Mengen verallgemeinert.

Übung 1.5.31 (**Funktionen als duale Maße**). Unser Trennfunktor der Funktionenräume aus 1.5.25 ist isomorph zur Verkettung von Trennfunktoren

$$\curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{ot}}$$

mit $\mathrm{Maß}_!$ als erstem Pfeil und dem Dualisieren 1.5.23 als zweitem Pfeil. Genauer erhalten wir eine Isotransformation zwischen besagten Trennfunktoren durch diejenigen natürlichen Isomorphismen $\mathrm{Fun}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Maß}_!(X)^*$, die von den Paarungen

$$\mathrm{Fun}(X) \times \mathrm{Maß}_!(X) \to \mathbb{Z}$$

vermittels der Vorschrift „multipliziere und summiere die Funktionswerte“ alias „integriere die Funktion nach dem Maß“ herkommen. Analoges gilt mit Koeffizienten in einem beliebigen Kring. Wir erklären in 3.1.28, wie in diesem begrifflichen Rahmen die Struktur auf dem Raum der Maße als Modul über dem Ring der Funktionen zu einem Spezialfall des „abstrakten cap-Produkts“ wird.

2 Vorzeichenfragen und Homotopiekomplexe

2.1 Twist und Superisierung

2.1.1 (**Motivation**). Ich will alle Vorzeichen der homologischen Algebra unter den Teppich kehren, indem ich eine neue Schmelzkategorie einführe, die Schmelzkategorie

$$\mathrm{sgAb}$$

der „supergraduierten abelschen Gruppen". Die Verschmelzungen hängen auch hier von der Reihenfolge der verschmolzenen Faktoren nicht ab, sonst wären ja auch di Axiome einer Schmelzkategorie nicht erfüllt. Stattdessen erklären wir die Verschmelzungen in sgAb selber als Zuordnungen, die jeder Anordnung der Faktoren homogene multiadditive Abbildungen zuordnen derart, daß sich unsere multiadditiven Abbildungen bei einem Wechsel der Anordnung um gewisse wohlbestimmte Vorzeichen ändern. Die ganzen Verträglichkeiten von Vorzeichen, die man üblicherweise zu prüfen hat, werden so in der Aussage kodiert und ein für allemal bewiesen, daß diese Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen tatsächlich eine Schmelzkategorie ist. Komplexe abelscher Gruppen sind in diesem Formalismus „Moduln $K \in \mathrm{sgAb}$ über dem Biabmonoid $D \in \mathrm{sgAb}$ der Differentiale", wie im anschließenden Abschnitt besprochen werden soll.

2.1.2. Gegeben eine endliche Menge I mit einer Abbildung $\pi : I \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die jedem Element eine „Parität" zuordnet, erklären wir für je zwei Anordnungen ω, η von I ein Vorzeichen

$$\mathrm{sgnu}_\pi(\omega, \eta) \in \{1, -1\}$$

als das Signum der von der entsprechenden Umordnung auf den ungeraden Elementen von I alias der auf $\pi^{-1}(\bar{1})$ induzierten Permutation. Wir nennen sgnu das **Paritätssignum**.

Beispiel 2.1.3. Gegeben die zwei Anordnungen $\omega : 3 < 4 < 6 < 7 < 9$ und $\eta : 9 < 4 < 3 < 6 < 7$ auf der fünfelementigen Menge $\{3, 4, 6, 7, 9\}$ mit ihrer offensichtlichen Paritätsabbildung sind $3 < 7 < 9$ und $9 < 3 < 7$ die auf den ungeraden Elementen induzierten Anordnungen. Diese unterscheiden sich um eine gerade Permutation, also haben wir $\mathrm{sgnu}(\omega, \eta) = 1$.

2.1.4. Sei eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ versehen mit je einer Operation der Vorzeichengruppe $\{+, -\}$ auf jeder Verschmelzungsmenge, die wir als das „Ändern des Vorzeichens" ansprechen und notieren. Haben diese Operationen die Eigenschaft, daß „jede Multiverknüpfung ihr Vorzeichen ändert, wenn wir bei genau einer der beteiligten Verschmelzungen das Vorzeichen ändern", so nennen wir $\mathcal{M}$ mit diesen Operationen eine **Schmelzkategorie mit Vorzeichen**.

Vorschau 2.1.5. In der in 2.4.9 eingeführten Terminologie ist eine Schmelzkategorie mit Vorzeichen dasselbe wie eine in der multiäquivarianten Schmelzkategorie $\mathrm{Ens}_{\curlyvee\{+,-\}}$ der $\{+,-\}$-Mengen nach 1.1.35 angereicherte Schmelzkategorie.

2.1.6 (**Twist einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen**). Gegeben eine Schmelzkategorie mit Vorzeichen $\mathcal{M}$ erklären wir eine weitere Schmelzkategorie, ihre **getwistete Verdopplung** oder kurz den **Twist**

$$\mathrm{t}\mathcal{M}$$

von $\mathcal{M}$. Als Objektmenge von $\mathrm{t}\mathcal{M}$ nehmen wir die Menge $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{M}$ aller Paare bestehend aus einer Parität und einem Objekt von $\mathcal{M}$. Die Projektion auf die erste Komponente notieren wir $\mathrm{par} : \mathrm{Ob}(\mathrm{t}\mathcal{M}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und nennen sie **Parität**. Die Projektion auf die zweite Komponente $\mathrm{Ob}(\mathrm{t}\mathcal{M}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ alias das „Vergessen der Parität" notieren wir gar nicht. Die Elemente von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ notieren wir $\bar{0}, \bar{1}$ und unterscheiden sie so von den Elementen unserer Vorzeichengruppe. Gegeben eine Objektkleinfamilie $A := (A_i)_{i\in\bar{A}}$ von $\mathrm{t}\mathcal{M}$ und ein Objekt $Q \in \mathrm{t}\mathcal{M}$ erklären wir die Menge der Verschmelzungen $\mathrm{t}\mathcal{M}(A, Q)$ im Twist durch die Vorschrift

$$\mathrm{t}\mathcal{M}(A, Q) = \emptyset \quad \text{falls} \quad \sum_{i\in\bar{A}} \mathrm{par} A_i \neq \mathrm{par}\, Q$$

und andernfalls als die Menge aller Abbildungen

$$\varphi : \mathrm{Ens}^{\times}([\![r]\!], \bar{A}) \to \mathcal{M}(A, Q) \qquad \text{notiert } \omega \mapsto \varphi_\omega$$

von der Menge aller Anordnungen auf $\bar{A}$ in die Menge der $\mathcal{M}$-Verschmelzungen unserer Objekte mit $\varphi_\omega = \mathrm{sgnu}_{\mathrm{par}\circ A}(\omega, \eta)\varphi_\eta$. Der folgende Satz liefert eine Multiverknüpfung für diese Verschmelzungen, die dann offensichtlich multiunitärassoziativ ist und damit unsere Konstruktion der Schmelzkategorie $\mathrm{t}\mathcal{M}$ zu Ende bringt.

Satz 2.1.7 (**Multiverknüpfung von vertwisteten Verschmelzungen**). *Seien $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie mit Vorzeichen und $(A_i)_{i\in\bar{A}}$ sowie $(B_j)_{j\in\bar{B}}$ Objektkleinfamilien in $\mathrm{t}\mathcal{M}$ und $Q \in \mathrm{t}\mathcal{M}$ ein Objekt und $f : \bar{A} \to \bar{B}$ eine Abbildung der Indexmengen. Gegeben Verschmelzungen $\psi_j \in \mathrm{t}\mathcal{M}(A|_{f^{-1}(j)}, B_j)$ und $\varphi \in \mathrm{t}\mathcal{M}(B, Q)$ gibt es genau eine Verschmelzung $\vartheta \in \mathrm{t}\mathcal{M}(A, Q)$ mit*

$$\vartheta_\kappa = \varphi_\omega \circ \prod_{j\in\bar{B}} (\psi_j)_{\eta(j)}$$

für jede Wahl einer Anordnung ω von $\bar{B}$, je einer Anordnung $\eta(j)$ der Faser $f^{-1}(j)$ und die induzierte Anordnung κ von $\bar{A}$.

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß die durch ϑ_κ gegebene Verschmelzung weder von der Wahl der Anordnung ω auf $\bar{B}$ noch von der Wahl der Anordnungen $\eta(j)$ auf den Fasern $f^{-1}(j)$ von f abhängt. Im Fall der Wahl der Anordnung auf einer der Fasern ist das eh klar, das Signum einer Permutation einer angeordneten Menge, die nur in einem Intervall etwas bewegt, ist dasselbe wie das Signum ihrer Restriktion auf besagtes Intervall. Ändern wir dahingegen die Anordnung auf $\bar{B}$, so gilt es zu beachten, daß das Signum einer Permutation, die aus einer Permutation von Intervallen entsteht, die ihre interne Anordnung behalten, zusammenfällt mit dem Signum der Permutation, die die Umordnung der Intervalle ungerader Länge unter unseren Intervallen beschreibt. □

2.1.8 (**Notationsfragen**). Wir werden noch weitere Schmelzkategorien kennenlernen, bei denen eine Verschmelzung $(A_i)_{i\in\bar{A}} \to Y$ erklärt wird als ein Datum, das jeder Anordnung $\omega : [\![r]\!] \xrightarrow{\sim} \bar{A}$ etwas zuordnet. In diesen Fällen denken wir uns für gewöhnlich implizit eine als Aufzählung hingeschriebene Familie versehen mit der „Leseanordnung, in der der erste Buchstabe das kleinste Element symbolisiert und der letzte Buchstabe das größte“. Mit dieser Konvention auf der linken Seite erhalten wir dann Bijektionen

$$\mathrm{t}\mathcal{M}(P_1 \curlyvee \ldots \curlyvee P_r, Q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(P_1 \curlyvee \ldots \curlyvee P_r, Q)$$

durch die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi_{\mathrm{id}}$ mit $\mathrm{id} : [\![r]\!] \xrightarrow{\sim} [\![r]\!]$ der offensichtlichen Anordnung. Wir sagen dann, die „$\mathcal{M}$-Verschmelzung stelle die $\mathrm{t}\mathcal{M}$-Verschmelzung in der vorgegebenen Anordnung dar“ und ähnlich in vergleichbaren Kontexten.

Beispiel 2.1.9 (**Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten**). Wir betrachten zur kartesischen Schmelzkategorie der Mengen kEns die multiäquivariante Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{\curlyvee\{+,-\}}$ der Mengen mit einer Operation der Vorzeichengruppe und darin die volle Unterkategorie

$$\mathrm{ZEns} \subset \mathrm{kEns}_{\curlyvee\{+,-\}}$$

aller zweielementigen Mengen mit transitiver Operation. Eine Verschmelzung in dieser Schmelzkategorie ist eine Abbildung $f : Y_1 \times \ldots \times Y_r \to X$ mit der Eigenschaft, daß sich bei jeder Änderung an genau einem Eintrag in der Definitionsmenge notwendig auch das Ergebnis ändert. Wir nennen so eine Multiabbildung **antikonstant**. Alle Mengen von Verschmelzungen in ZEns haben damit genau zwei Elemente und das Vertauschen dieser beiden Elemente macht ZEns zu einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen, die sich in 2.4.15 als die „automatische Selbstanreicherung von ZEns“ erweisen wird. Den Twist dieser Schmelzkategorie mit Vorzeichen notieren wir

$$\mathrm{Par} := \mathrm{t}(\mathrm{ZEns})$$

und nennen ihn die **Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten**. Objekte dieser Schmelzkategorie sind Paare bestehend aus einer Parität und einer zweielementigen Menge, die wir als ein „unsere Parität erweiterndes Zusatzdatum“ verstehen.

Beispiel 2.1.10 (**Orientierungsmenge als Schmelzfunktor**). Gegeben ein angeordneter Körper k erinnern wir den Funktor $\mathrm{or}^{\mathrm{alg}} : \mathrm{Modf}_k^\times \to \mathrm{Ens}$ der Orientierungsmenge, der jedem endlichdimensionalen k-Vektorraum die zweielementige Menge seiner beiden Orientierungen zuordnet. Unter einer Orientierung verstehen wir dabei wie üblich eine Abbildung, die jeder angeordneten Basis ein Vorzeichen in einer Weise zuordnet, die mit dem Vorzeichen der Determinante der Basiswechselmatrizen verträglich ist. Wir erweitern ihn nun zu einem Schmelzfunktor

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{or} = \mathrm{or}^{\mathrm{alg}} : & (\curlyvee \mathrm{Modf}_k)^\times & \to & \mathrm{Par} \\ & E & \mapsto & (\dim E + 2\mathbb{Z}, \mathrm{or} E) \end{array}$$

vom Schmelzgruppoid der banalen Schmelzkategorie der endlichdimensionalen k-Vektorräume in unsere Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten. Um so einen Schmelzfunktor anzugeben, müssen wir jeder universellen Verschmelzung $f : V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r \to W$ alias jedem Tupel linearer Abbildungen $f_i : V_i \to W$, die in ihrer Gesamtheit einen Isomorphismus $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \stackrel{\sim}{\to} W$ liefern, eine antikonstante Multiabbildung

$$\mathrm{or}(f) : \mathrm{or} V_1 \times \ldots \times \mathrm{or} V_r \to \mathrm{or} W$$

so zuordnen, daß verschiedene Verträglichkeiten erfüllt sind. Wir wählen $\mathrm{or}(f)$ als die eindeutige antikonstante Multiabbildung mit $\mathrm{or}(f) : (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \mapsto \varepsilon$ falls es angeordnete Basen B_i von V_i der Orientierung ε_i gibt und ε die Orientierung der in der offensichtlichen Weise angeordneten Basis $f_1(B_1) \sqcup \ldots \sqcup f_r(B_r)$ von W ist. Jetzt gilt es, mithilfe des Kriteriums 1.5.2 die Verträglichkeit mit Multiverknüpfungen zu prüfen, was wir dem Leser überlassen.

2.1.11 (**Motivation für das Supergraduieren**). Die Schmelzkategorie der abelschen Gruppen Ab können wir zu einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen machen, indem wir das Nachschalten der Multiplikation mit (-1) als Involution auf den Verschmelzungsmengen auszeichnen. Um die „Schmelzkategorie der Komplexe“ zu definieren, mit der wir in der Homologietheorie bereits ausgiebig gearbeitet haben, gehen wir von einer Variante unserer Twist-Konstruktion aus, die wir das „Supergraduieren“ nennen.

2.1.12 (**Supergraduieren**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Vorzeichen und ein kommutatives Monoid $(\Gamma, +)$ mit einem ausgezeichneten Homomorphismus $\pi : \Gamma \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bilden wir eine weitere Schmelzkategorie, die (Γ, π)**-supergraduierte Version**

$$\mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,\pi)}$$

von $\mathcal{M}$. Als Objektmenge nehmen wir $\mathrm{Ob}(\mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,\pi)}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{M}^\Gamma)$. Unsere neuen Objekte sind also Familien $(M^\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ von Objekten von $\mathcal{M}$ indiziert durch $\gamma \in \Gamma$. Als Verschmelzungen $\varphi \in \mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,\pi)}(A, Y)$ nehmen wir Abbildungen

$$\varphi : \mathrm{Ens}^\times(\llbracket r \rrbracket, \bar{A}) \to \mathcal{M}^\Gamma(A, Y) \quad \text{notiert } \omega \mapsto \varphi_\omega$$

von Anordnungen der Indexmenge der Objektkleinfamilie A, für die wir hier $|\bar{A}| = r$ angenommen haben, in die Menge der Verschmelzungen der Schmelzkategorie der Γ-graduierten Objekte von $\mathcal{M}$ aus 1.1.21 derart, daß für je zwei Anordnungen ω, η und jedes $\alpha : \bar{A} \to \Gamma$ gilt

$$\varphi_{\omega,\alpha} = \mathrm{sgnu}_{\pi\circ\alpha}(\omega, \eta)\varphi_{\eta,\alpha}$$

mit $\varphi_{\omega,\alpha} \in \mathcal{M}((A_i^{\alpha(i)})_{i\in\bar{A}}, Y^{\mathrm{sum}(\alpha)})$ wie in 1.1.21 dem α-Anteil der $\mathcal{M}^\Gamma$-Verschmelzung φ_ω. Die Multiverknüpfungen erklären wir analog zum Fall der vertwisteten Schmelzkategorien 2.1.7 dadurch, daß sie bei der Darstellung bezüglich verträglicher Anordnungen mit den Multiverknüpfungen in $\mathcal{M}^\Gamma$ zusammenfallen. Die Wohldefiniertheit und Multiunitärassoziativität folgen aus den entsprechenden Eigenschaften im Fall von vertwisteten Schmelzkategorien 2.1.7, angewandt auf die $\varphi_{\omega,\alpha}$. Insbesondere hat mit $\mathcal{M}^\Gamma$ auch $\mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,\pi)}$ stabil universelle Verschmelzungen beziehungsweise Multihom.

Beispiel 2.1.13. Im Fall $\pi = 0$ erhalten wir die Schmelzkategorie der Γ-graduierten Objekte zurück, in Formeln $\mathrm{s}\mathcal{M}^{(\Gamma,0)} = \mathcal{M}^\Gamma$.

2.1.14. Im Fall $\Gamma = \mathbb{Z}$ mit $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Projektion verwenden wir die abkürzende Schreibweise

$$\mathrm{sg}\mathcal{M} := \mathrm{s}\mathcal{M}^{(\mathbb{Z},\pi)}$$

und nennen das die Schmelzkategorie der **supergraduierten Objekte von** $\mathcal{M}$. Besonders wichtig ist für uns die Schmelzkategorie sgAb, die wir im folgenden noch ausführlicher diskutieren.

2.1.15. Im Fall $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit $\pi = \mathrm{id}$ der Identität verwenden wir die abkürzende Schreibweise

$$\mathrm{s}\mathcal{M} := \mathrm{s}\mathcal{M}^{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathrm{id})}$$

und nennen $\mathrm{s}\mathcal{M}$ die Schmelzkategorie der **Superobjekte von** $\mathcal{M}$. Im Fall eines Körpers k heißt sMod_k die **Schmelzkategorie der Supervektorräume** über k. Objekte sind $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte k-Vektorräume $W = (W^{\bar{0}}, W^{\bar{1}})$. Vielfach bezeichnet man in diesem Zusammenhang mit W auch die direkte Summe $W = W^{\bar{0}} \oplus W^{\bar{1}}$ mit W. Die Schmelzkategorie

$$\mathrm{sAb}$$

nennen wir die **Schmelzkategorie der superisierten abelschen Gruppen** oder „Super-$\mathbb{Z}$-Moduln“, weil der Begriff der „Supergruppen“ schon anderweitig vergeben ist, vergleiche 3.5.4. Wir erhalten eine Transformation vom Identitätsfunktor auf sAb zu sich selbst, indem wir jedem Objekt $W = W^{\bar{0}} \oplus W^{\bar{1}}$ seine **Vorzeicheninvolution** $\mathrm{diag}(\mathrm{id}, -\mathrm{id})$ zuordnen. Die Notation $\mathbb{Z}^{n|m}$ steht für das Objekt $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m) \in \mathrm{sAb}$. Die Notation $k^{n|m}$ steht allgemeiner für das Objekt $(k^n, k^m) \in \mathrm{sMod}_k$.

Beispiel 2.1.16 (**Supergraduierte abelsche Gruppen**). Wir diskutieren nun die Schmelzkategorie sgAb der supergraduierten abelschen Gruppen. Ihre Objekte sind Familien $(X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von abelschen Gruppen. Einsverschmelzungen $f : X \to Y$ sind Tupel $f = (f^n)$ von Gruppenhomomorphismen $f^n : X^n \to Y^n$. Leerverschmelzungen $f : \curlyvee \to X$ sind Elemente $x \in X^0$. Eine universelle Leerverschmelzung ist die Leerverschmelzung in das Objekt $\mathbb{Z}[0]$ mit $\mathbb{Z}[0]^0 = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[0]^n = 0$ für $n \neq 0$, die gegeben wird durch $1 \in \mathbb{Z}$. Um Zweiverschmelzungen zu erklären, betrachten wir eine Objektkleinfamilie $B = (B_i, B_\iota)$ indiziert durch eine Indexmenge $\bar{B} = \{i, \iota\} = \{\iota, i\}$, die extra so gewählt und angegeben ist, um der Versuchung entgegenzuwirken, sie als mit einer Anordnung versehen betrachen zu wollen. Eine Verschmelzung $f \in \mathrm{sgAb}(B, Y)$ ist dann eine Familie von biadditiven Abbildungen

$$f^{p,q}_\omega : B^p_i \times B^q_\iota \to Y^{p+q}$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und alle Anordnungen ω unserer Indexmenge $\bar{B}$ derart, daß für η, ρ die beiden möglichen Anordnungen gilt $f^{p,q}_\eta = (-1)^{pq} f^{p,q}_\rho$. Vielfach geben wir so eine Verschmelzung schlicht als ein Tupel von biadditiven Abbildungen

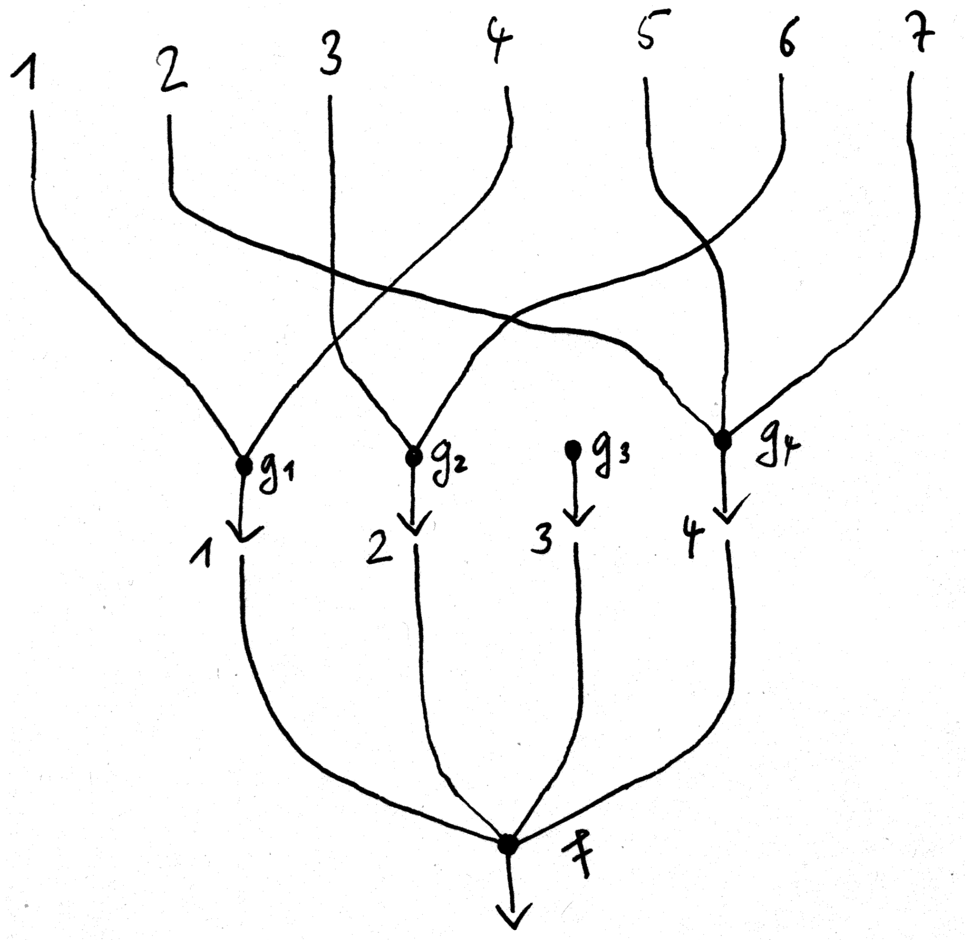
$$f^{p,q} : B^p_i \times B^q_\iota \to Y^{p+q}$$

an und meinen damit $f^{p,q} = f^{p,q}_\omega$ für ω die „Schreibanordnung“, hier also die Anordnung $i < \iota$. Eine universelle, ja eine stabil universelle Zweiverschmelzung von zwei Objekten X, Y landet mit diesen Konventionen im Objekt Z mit den homogenenen Komponenten $Z^n := \bigoplus_{p+q=n} X^p \otimes Y^q$ und wird in den eben besprochenen Konventionen gegeben durch die biadditiven Abbildungen $u : X^p \times Y^q \to Z^{p+q}$ mit $u : (x, y) \mapsto x \otimes y$. Ich schlage vor, das Ziel universeller Verschmelzungen in sgAb und anderen superisierten Schmelzkategorien in Zweifelsfällen

$$\bar{\otimes} = \otimes_{\mathrm{s}}$$

zu notieren und als **Supertensorprodukt** anzusprechen, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & \xrightarrow{\sim} & X \mathbin{\bar{\otimes}} Y \\ \| & & \| \\ Y \otimes X & \xrightarrow{\sim} & Y \mathbin{\bar{\otimes}} X \end{array}$$



Für g_i und f multiadditive Abbildungen von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten abelschen Gruppen, die homogen sind vom Grad Null, alias Verschmelzungen von superisierten abelschen Gruppen gilt nach unserer Regel

$$(f \circ g)(v_1, \ldots, v_7) = \varepsilon f(g_1(v_1, v_4), g_2(v_3, v_6), g_3(*), g_4(v_2, v_5, v_7))$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon = (-1)^{|v_2||v_3|}(-1)^{|v_2||v_4|}(-1)^{|v_2||v_6|}(-1)^{|v_3||v_4|}(-1)^{|v_5||v_6|}.$$

Wir kriegen also anschaulich gesprochen ein Minus für je zwei sich kreuzende Linien, für die die sie belegenden Elemente ungerade sind.

keineswegs kommutiert mit denjenigen Gleichheiten in den Vertikalen, die die Eindeutigkeit universeller Verschmelzungen zum Ausdruck bringen, und den durch die Schreibreihenfolge ausgezeichneten Isomorphismen in den Horizontalen. Vielmehr müssen wir in der linken Vertikale die Abbildung $x \otimes y \mapsto (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ nehmen, damit unser Diagramm kommutiert. Die Schmelzkategorie sgAb der supergraduierten abelschen Gruppen hat auch Multihom. Um das zu zeigen, brauchen wir nach 1.3.12 nur für jedes Objekt X einen Rechtsadjungierten $(X \Rrightarrow\ )$ von $(\ \bar{\otimes} X)$ anzugeben. Dazu erklären wir unseren Funktor durch

$$(X \Rrightarrow Y)^n := \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^i, Y^{i+n})$$

und die Adjunktion durch die Bijektionen

$$\mathrm{sgAb}(Z \bar{\otimes} X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sgAb}(Z, X \Rrightarrow Y)$$

gegeben durch $f = (f^{p,q}) \mapsto \bar{f}$ mit $\bar{f}^n : Z^n \to (X \Rrightarrow Y)^n$ gegeben durch $(\bar{f}^n(z))^i := f^{n,i}(z,\ ) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^i, Y^{i+n})$. Das Prüfen sei dem Leser überlassen. Analoges gilt für die Schmelzkategorie sgMod_k der supergraduierten Moduln über einem Kring k.

Beispiel 2.1.17 (**Maximale äußere Potenz als Schmelzfunktor**). Gegeben ein Körper k liefert die maximale äußere Potenz als homogene Komponente im durch die Dimension gegebenen Grad $V \mapsto (\bigwedge^{\max} V)[-\dim V]$ einen Schmelzfunktor

$$\bigwedge\nolimits^{\max} : (\curlyvee \mathrm{Modf}_k)^{\times} \to \mathrm{sgMod}_k$$

vom Schmelzgruppoid der banalen Schmelzkategorie der endlich erzeugten k-Vektorräume in das Schmelzgruppoid der eindimensionalen supergraduierten k-Vektorräume. Ist k ein angeordneter Körper, so konstruieren wir unschwer von diesem Schmelzgruppoid einen weiteren Schmelzfunktor in die Schmelzkategorie Par der erweiterten Paritäten derart, daß die Verknüpfung unser Schmelzfunktor der Orientierungsmenge aus 2.1.9 ist.

2.1.18 (**Allgemeines zu verträglichen Orientierungen**). In der Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten ist das Quadrat jeder Einsverschmelzung von einem Objekt zu sich selber die Identität. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null ist andererseits jeder unipotente Endomorphismus ein Quadrat. Gegeben ein Körper k der Charakteristik Null und ein Schmelzfunktor $\omega : (\curlyvee \mathrm{Modf}_k)^{\times} \to \mathrm{Par}$ und eine kurze exakte Sequenz $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$ von endlichdimensionalen k-Vektorräumen liefert folglich für jede Spaltung die Komposition

$$\omega(U) \curlyvee \omega(W) \to \omega(U \oplus W) \xrightarrow{\sim} \omega(V)$$

dieselbe antikonstante Abbildung $\omega(U) \times \omega(W) \to \omega(V)$. Ist k ein angeordneter Körper und $\omega := \mathrm{or}$ der durch unsere algebraische Orientierungsmenge gegebene Schmelzfunktor, so ist das eine ausgezeichnete Abbildung, die in einer kurzen exakten Sequenz aus einer Orientierung von Untervektorraum und Quotient eine Orientierung der Mitte macht und die man die „zusammengesetzte Orientierung" nennen mag. Auch im allgemeinen nennen wir Elemente $\varepsilon \in \omega(U), \eta \in \omega(W), \theta \in \omega(V)$ **verträglich**, wenn unter unserer Zweiverschmelzung gilt $(\varepsilon, \eta) \mapsto \vartheta$. Nebenbei bemerkt überlegt man sich auch leicht, daß ω die universelle Leerverschmelzung auf die universelle Leerverschmelzung abbilden muß.

Übungen

Übung 2.1.19. Man zeige, daß die Operation 1.2.10 der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_r$ auf der r-ten Tensorpotenz eines eindimensionalen Vektorraums trivial ist. Man zeige, daß die Operation 1.2.10 der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_r$ auf der r-ten Tensorpotenz des eindimensionalen Supervektorraums $\mathbb{C}^{0|1}$ durch Multiplikation mit dem Signum geschieht.

Übung 2.1.20 (**Einheitengruppoid der superisierten abelschen Gruppen**). Wir betrachten in der Schmelzkategorie der superisierten abelschen Gruppen aus 2.1.15 die volle Schmelzunterkategorie $\mathrm{U(sAb)}$ der Objekte, die als abelsche Gruppen frei sind vom Rang Eins. All diese Objekte sind also isomorph zu $\mathbb{Z}^{1|0}$ oder $\mathbb{Z}^{0|1}$. Sie werden sich in der in 3.3.14 eingeführten Terminologie als die „Einheiten" unserer Schmelzkategorie sAb erweisen, deshalb die Notation U für „unité". Betrachten wir zu dieser Schmelzkategorie der Einheiten das zugehörige Schmelzgruppoid $\mathrm{U}^\times(\mathrm{sAb})$, in dem wir also nur noch die universellen Verschmelzungen von $\mathrm{U(sAb)}$ als Verschmelzungen zulassen, so erhalten wir eine Schmelzäquivalenz

$$\mathrm{U}^\times(\mathrm{sAb}) \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{Par}$$

mit der Schmelzkategorie der erweiterten Paritäten, indem wir jeder unserer freien abelschen Gruppen vom Rang Eins ihre Parität zusammen mit der zweielementigen Menge ihrer Erzeuger zuordnen.

Übung 2.1.21 (**Formeln für supergraduierte abelsche Gruppen**). Wie bereits in 2.1.16 erwähnt erhalten wir ein internes Hom in sgAb durch $(X \Rrightarrow Y)^n := \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^i, Y^{i+n})$ mit $\alpha : \mathrm{sgAb}(Z \curlyvee X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sgAb}(Z, X \Rrightarrow Y)$ gegeben durch $(\alpha f) : z \mapsto (x \mapsto f(z, x))$ für beliebige homogene f, z, x. Man zeige, daß die Evaluation $\mathrm{ev} : X \curlyvee (X \Rrightarrow Y) \to Y$ nach 1.3.15 unter diesen Identifikationen derjenigen biadditiven Abbildung entspricht, die auf homogenen Elementen gegeben wird durch $(x, f) \mapsto (-1)^{|x||f|} f(x)$. Man zeige weiter, daß das Tensorieren von internem Hom $(W \Rrightarrow X) \otimes (Y \Rrightarrow Z) \to (W \otimes Y) \Rrightarrow (X \otimes Z)$

nach 1.3.18 unter diesen Identifikationen derjenigen biadditiven Abbildung entspricht, die auf homogenen Elementen gegeben wird durch $f \otimes g \mapsto (w \otimes y \mapsto (-1)^{|g||w|} f(w) \otimes g(y))$.

2.2 Abmonoide, Biabmonoide und ihre Moduln

2.2.1. Hier besprechen wir nur kommutative Monoide alias „Abmonoide“ und ihre Moduln und die entsprechenden opponierten Strukturen. Den Fall beliebiger Monoide besprechen wir erst in 3.1.2 folgende.

Definition 2.2.2. Einen Schmelzfunktor der terminalen Schmelzkategorie in eine beliebige Schmelzkategorie $A : \mathrm{scat} \to \mathcal{M}$ nennen wir ein **Abmonoid in** $\mathcal{M}$ oder $\mathcal{M}$**-Abmonoid**. Unter einem **Homomorphismus von Abmonoiden** $A \to B$ verstehen wir eine Transformation der entsprechenden Funktoren.

2.2.3. Diese Terminologie hat die Schwäche, daß ein Abmonoid im hier eingeführten Sinne nicht dasselbe ist wie ein Ab-Monoid in später eingeführter Terminologie. Da sich aber erweisen wird, daß man ein Ab-Monoid auch schlicht einen Ring nennen kann, sollte dieser terminologische Konflikt auszuhalten sein.

2.2.4 (**Abmonoide als Objekte mit Verknüpfung**). Ein Abmonoid $A : \mathrm{scat} \to \mathcal{M}$ wird festgelegt durch das Bild $A = A(*)$ des einzigen Objekts von scat und das Bild

$$m = m_A : A \curlyvee A \to A$$

der einzigen Zweiverschmelzung von scat. So ein Datum (A, m) kommt seinerseits genau dann von einem Abmonoid her, wenn die Kommutativität $m \circ \hat{\tau} = m$, die Assoziativität $m \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \curlyvee m)$ und die Existenz einer „neutralen“ Leerverschmelzung $1 = 1_A : \curlyvee \to A$ mit $m \circ (1 \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id}$ erfüllt sind. Ich nenne 1_A die **Eins von** A. Sie ist eindeutig bestimmt, wenn sie existiert, wie Sie allgemeiner in 3.1.34 zeigen sollen. Die Zweiverschmelzung m heißt die **Verknüpfung** unseres Abmonoids. Ein Morphismus $\varphi : A \to B$ in $\mathcal{M}$ ist genau dann ein Morphismus von Abmonoiden, wenn gilt $\varphi \circ m_A = m_B \circ (\varphi \curlyvee \varphi)$ und $\varphi \circ 1_A = 1_B$. Mehr dazu wird in 3.1.2 folgende diskutiert.

Beispiel 2.2.5 (**Banale Abmonoidobjekte**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ können wir jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ nur auf genau eine Weise als ein $\curlyvee\mathcal{C}$-Abmonoid der zugehörigen banalen Schmelzkategorie auffassen, indem wir die Zweiverschmelzung $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : A \curlyvee A \to A$ als Verknüpfung nehmen. Das folgt daraus, daß für die Eins nur die einzige Leerverschmelzung $\curlyvee \to A$ in Frage kommt. Für diese Strukturen auf zwei Objekten A, B ist jeder Morphismus $f : A \to B$ ein Abmonoidhomomorphismus.

2.2.6 (**Moduln über Abmonoiden**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und darin ein Abmonoid (A, m) verstehen wir unter einem A**-Modul** oder ausführlicher A**-Monoidmodul** ein Objekt $M \in \mathcal{M}$ mitsamt einer Zweiverschmelzung

$$m_M : A \curlyvee M \to M$$

derart, daß gilt $m_M \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m_M \circ (\mathrm{id} \curlyvee m_M)$ im Raum der Verschmelzungen $A \curlyvee A \curlyvee M \to M$ und $m_M \circ (1 \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id}$ im Raum der Verschmelzungen $M \to M$. Unter einer **Verschmelzung von** A**-Moduln** verstehen wir eine Verschmelzung von A-Objektmoduln wie sie bereits in 1.1.36 erklärt wurde. Wir notieren

$$\mathcal{M}_{A\curlyvee}$$

die Schmelzkategorie der A-Monoidmoduln. Per definitionem ist unsere Schmelzkategorie aller A-Moduln über einem Abmonoid A eine volle Schmelzunterkategorie $\mathcal{M}_{A\curlyvee} \subset \mathcal{M}_{A\curlyvee'}$ der multiäquivarianten Schmelzkategorie aller A-Objektmoduln im Sinne von 1.1.36.

Beispiel 2.2.7. Ein Ab-Abmonoid ist ein Kring und die Schmelzkategorie der Moduln $\mathrm{Ab}_{k\curlyvee}$ über einem Kring k ist unsere Schmelzkategorie Mod_k der k-Moduln aus 1.1.5, in Formeln

$$\mathrm{Ab}_{k\curlyvee} = \mathrm{Mod}_k$$

Definition 2.2.8. Einen Trennfunktor $\mathrm{tcat} \to \mathcal{T}$ der terminalen Trennkategorie in eine beliebige Trennkategorie $\mathcal{T}$ nennen wir ein **Koabmonoid in** $\mathcal{T}$ oder auch $\mathcal{T}$**-Koabmonoid**. Unter einem **Homomorphismus von Koabmonoiden** verstehen wir eine Transformation der entsprechenden Funktoren.

2.2.9 (**Koabmonoide als Objekte mit Koverknüpfung**). Ein Koabmonoid C : $\mathrm{tcat} \to \mathcal{T}$ wird festgelegt durch das Bild $C = C(*)$ des einzigen Objekts von tcat und das Bild

$$\Delta = \Delta_C : C \to C \curlywedge C$$

der einzigen Zweitrennung von tcat. So ein Datum (C, Δ) kommt seinerseits genau dann von einem Koabmonoid her, wenn die Kokommutativität $\hat{\tau} \circ \Delta = \Delta$, die Assoziativität $(\Delta \curlywedge \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \curlywedge \Delta) \circ \Delta$ und die Existenz einer Leertrennung $\varepsilon = \varepsilon_C : C \to \curlywedge$ mit $(\varepsilon \curlywedge \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id}$ erfüllt sind. Die Zweitrennung Δ_C heißt die **Koverknüpfung von** C. Ich nenne ε_C die **Koeins von** C.

Beispiel 2.2.10 (**Banale Koabmonoidobjekte**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ können wir jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ auf genau eine Weise als ein Koabmonoidobjekt der zugehörigen banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathcal{C}$ auffassen, indem wir als Koverknüpfung die **Diagonaltrennung** $\Delta := (\mathrm{id}, \mathrm{id}) : A \to A \curlywedge A$ nehmen. Das folgt daraus, daß nur die einzige Leertrennung $A \to \curlywedge$ als Koeins in Frage kommt. Für diese Strukturen auf Objekten A, B ist jeder Morphismus $f : A \to B$ ein Koabmonoidhomomorphismus.

2.2.11 (**Komoduln über Koabmonoiden**). Opponiert zu Moduln über Abmonoiden führen wir **Komoduln über Koabmonoiden** alias **Koabmonoidmoduln** ein und bezeichnen mit $\mathcal{T}_{C\curlywedge}$ die Trennkategorie der Komoduln über einen Koabmonoid C einer Trennkategorie $\mathcal{T}$. Sie ist eine volle Untertrennkategorie $\mathcal{T}_{C\curlywedge} \subset \mathcal{T}_{C\curlywedge'}$ der multiäquivarianten Trennkategorie aller C-Objektkomoduln aus 1.1.38.

2.2.12 (**Äquivariante Verschmelzungen unter Koabmonoid**). Gegeben $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie und C ein Koabmonoid in $\mathcal{M}$ erklären wir nun neu die **äquivariante Schmelzkategorie der C-Objektmoduln**

$$\mathcal{M}_{C\curlyvee\!\searrow}$$

mit C-Objektmoduln von $\mathcal{M}$ als Objekten, also denselben Objekten wie bei der multiäquivarianten Schmelzkategorie der C-Objektmoduln $\mathcal{M}_{C\curlyvee'}$ aus 1.1.36. Verschmelzungen $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ dahingegen werden in $\mathcal{M}_{C\curlyvee\!\searrow}$ erklärt als Verschmelzungen in $\mathcal{M}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \otimes X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \arrow[r] \arrow[d] & C \otimes Y \arrow[dd] \\
C^{\otimes r} \otimes X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \arrow[d] & \\
X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise gegebenen Pfeilen kommutiert. Der Morphismus $C \to C^{\otimes r}$ ist dabei die iterierte Koverknüpfung in unserer Trennschmelzkategorie. Dann hat auch $\mathcal{M}_{C\curlyvee\!\searrow}$ stabil universelle Verschmelzungen und das Vergessen der Operation ist ein mit universellen Verschmelzungen verträglicher Schmelzfunktor

$$\mathcal{M}_{C\curlyvee\!\searrow} \to \mathcal{M}$$

Beispiel 2.2.13 (**Äquivariante Schmelzkategorie der C-Mengen**). Jede Menge C trägt nach 2.2.10 genau eine Struktur als Koabmonoid der banalen Trennschmelzkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$ mit der Diagonale $\Delta : C \to C \times C$ als Komultiplikation. Die Verschmelzungen der zugehörigen äquivarianten Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{C\curlyvee\!\searrow}$ der C-Objektmoduln sind alle Abbildungen $f : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ mit

$$f(cx_1, \ldots, cx_r) = cf(x_1, \ldots, x_r) \quad \forall c \in C, r \in \mathbb{N}, x_i \in X_i$$

Wie nennen sie **C-äquivariante Multiabbildungen**. Die Leerverschmelzungen in $\mathrm{kEns}_{C\curlyvee\!\searrow}$ entsprechen den C-Fixpunkten, genauer induziert für alle $Y \in \mathrm{kEns}_{C\curlyvee\!\searrow}$ die aus 1.1.21 bekannte Bijektion $\mathrm{kEns}(\curlyvee, Y) \xrightarrow{\sim} Y$ eine Bijektion

$$\mathrm{kEns}_{C\curlyvee\!\searrow}(\curlyvee, Y) \xrightarrow{\sim} Y^C$$

Die Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{C\searrow\!\!\!\!\swarrow}$ besitzt im übrigen stabil universelle Verschmelzungen und die zugehörige Trennschmelzkategorie ist als Trennkategorie die banale Trennkategorie der Kategorie der C-Mengen.

2.2.14 (**Biabmonoide und äquivariante Verschmelzungen**). Seien $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie und $C \in \mathcal{M}$ sowohl mit der Struktur eines Koabmonoids als auch mit der Struktur eines Abmonoids versehen. Wir betrachten in der äquivarianten Schmelzkategorie der C-Objekte aus 2.2.12 die volle Unterschmelzkategorie

$$\mathcal{M}_{C\searrow} \subset \mathcal{M}_{C\searrow\!\!\!\!\swarrow}$$

aller der C-Objekte, die sogar C-Moduln sind. Nehmen wir zusätzlich an, daß unsere beiden Strukturen auf C in der Weise miteinander verträglich sind, daß für alle endlichen Mengen I, J die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^{\otimes I} & \to & C^{\otimes (I \times J)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \to & C^{\otimes J} \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise durch die Koabmonoidstruktur gegebenen Horizonalen und durch die Abmonoidstruktur gegebenen Vertikalen kommutieren, so nennen wir C ein **Biabmonoid**. Wenn wir die Kommutativität unseres Diagramms für $|I|, |J| \leq 2$ zeigen, so folgt sie bereits im allgemeinen. Für Moduln über einem Biabmonoid C sind die Ziele ihrer stabil universellen Verschmelzungen in $\mathcal{M}_{C\searrow\!\!\!\!\swarrow}$ bereits selbst Moduln über C, gehören also in Formeln bereits zu $\mathcal{M}_{C\searrow}$, und sind dort a forteriori auch universelle, ja stabil universelle Verschmelzungen.

2.2.15 (**Multiäquivariant versus äquivariant**). Es gilt sorgfältig zu unterscheiden zwischen der multiäquivarianten Schmelzkategorie der Moduln über einem Abmonoid und der äquivarianten Schmelzkategorie der Moduln über einem Biabmonoid. Im Fall eines gewöhnlichen Monoids in der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen sind die Verschmelzungen im multiäquivarianten Fall Multiabbildungen, die „äquivariant sind in jeder Variable“, in Formeln

$$\varphi(x_1, \ldots, gx_i, \ldots, x_r) = g\varphi(x_1, \ldots, x_r) \ \forall i, g$$

Im äquivarianten Fall jedoch sind sie, wenn man als Koverknüpfung einmal die diagonale Einbettung annimmt, Multiabbildungen, die „äquivariant sind für die diagonale Operation“, in Formeln

$$\varphi(gx_1, \ldots, gx_r) = g\varphi(x_1, \ldots, x_r) \ \forall g$$

2.2.16. In vielen Kontexten spricht man von **Darstellungen**, wenn man die äquivariante Schmelzkategorie meint, und von **Moduln**, wenn man die multiäquivariante Schmelzkategorie meint.

Beispiel 2.2.17 (**Äquivariante Schmelzkategorie der C-Mengen**). Jedes Abmonoid $C \in \mathrm{kEns}$ wird mit der banalen Struktur als Koabmonoid der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$ nach 2.2.10 zu einem Biabmonoid. Die zugehörige Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{C\searrow}$ hat als Objekte C-Moduln alias Mengen mit einer Operation des Monoids C und die universelle Verschmelzung von X und Y ist $X \times Y$ mit der „diagonalen" Operation von C, gegeben durch $c(x, y) = (cx, cy)$. Daß das wieder eine Operation des Abmonoids C ist, ist einerseits offensichtlich und andererseits eine formale Konsequenz der Biabmonoidstruktur.

Übungen

Übung 2.2.18 (**Tensorprodukt von Biabmonoiden**). Gegeben Biabmonoide A, B einer Trennschmelzkategorie ist auch $A \otimes B$ mit der offensichtlichen Verknüpfung und Koverknüpfung ein Biabmonoid.

Übung 2.2.19 (**Äußere Algebra als Biabmonoid**). Gegeben ein k-Vektorraum V zeige man, daß die äußere Algebra $\bigwedge V$ mit ihrer offensichtlichen Graduierung ein Biabmonoid der Trennschmelzkategorie sgMod_k ist mit dem durch die Shuffle-Koprodukte $\Delta_n^{p,q}$ gegebenen Koprodukt. Dasselbe gilt allgemeiner für jeden Kring k. Im Fall $V = \mathbb{Z} \in \mathrm{sgMod}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{sgAb}$ erhalten wir so das Biabmonoid der Differentiale $D = \bigwedge \mathbb{Z}$ aus 2.3.1. Im allgemeinen mag man einen Isomorphismus von Biabmonoiden $\bigwedge(V \oplus W) \xrightarrow{\sim} (\bigwedge V) \otimes (\bigwedge W)$ angeben. Insbesondere liefert im endlichdimensionalen Fall jede Wahl einer angeordnetem Basis $v_1, \ldots v_n$ von V einen Isomorphismus von Biabmonoiden $D^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$ für D das Biabmonoid der Differentiale aus 2.3.1 mit Koeffizienten in k.

2.3 Schmelzkategorien von Komplexen

2.3.1 (**Biabmonoid der Differentiale**). In der Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen sgAb aus 2.1.16 betrachten wir das Objekt

$$D$$

mit $D^0 = \mathbb{Z}$ und $D^1 = \mathbb{Z}d$ für einen freien Erzeuger d und $D^q = 0$ sonst. Wir versehen D mit der einzig möglichen Struktur als Abmonoid, für die $1 \in \mathbb{Z} = D^0$ das neutrale Element ist, sowie mit der einzig möglichen Struktur als Koabmonoid, für dessen Koverknüpfung gilt $1 \mapsto 1 \otimes 1$ und $d \mapsto d \otimes 1 + 1 \otimes d$. Man prüft unschwer, daß wir so ein Biabmonoid erhalten. Die einzige substantielle Rechnung dazu ist der Fall $|I| = |J| = 2$ und dabei, daß $d \otimes d$ auch beim Weg über $D^{\otimes(I \times J)}$ in 2.2.14 zu Null gemacht wird. Unter der oberen Horizonale finden wir aber

$$d \otimes d \mapsto 1 \otimes d \otimes 1 \otimes d + 1 \otimes d \otimes d \otimes 1 + d \otimes 1 \otimes 1 \otimes d + d \otimes 1 \otimes d \otimes 1$$

und darauf die Vertikale anwenden bedeutet, die mittleren Einträge zu vertauschen mit Vorzeichen und dann die ersten beiden und die letzten beiden Einträge zu multiplizieren. Das liefert eine Null bei ersten und letzten Term und bei den mittleren Termen ebenso $-d \otimes d + d \otimes d = 0$ wie gewünscht.

2.3.2. Wir erklären die **Schmelzkategorie der Kettenkomplexe** in der Notation aus 2.2.14 als die äquivariante Schmelzkategorie

$$\mathrm{Ket} := \mathrm{sgAb}_{D\searrow}$$

aller supergraduierten abelschen Gruppen mit einer Operation des Biabmonoids D der Differentiale aus 2.3.1.

2.3.3 (**Bezug zwischen unseren beiden Definitionen von Kettenkomplexen**). Einen Komplex (X^q, d^q) im üblichen Sinne verstehen wir als ein Objekt $X = (X^q) \in \mathrm{sgAb}$ mit derjenigen Operation $\mu_X : D \curlyvee X \to X$, die für $x \in X^q$ durch $(d, x) \mapsto d^q(x)$ und $(1, x) \mapsto x$ gegeben wird. So erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Ket}_{\text{bisher}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}(\mathrm{Ket})$$

zwischen der üblichen Kategorie der Kettenkomplexe, die wir hier zur besseren Unterscheidung $\mathrm{Ket}_{\text{bisher}}$ notieren, und der einfachen Kategorie der in 2.3.2 neu erklärten Schmelzkategorie $\mathrm{Ket} := \mathrm{sgAb}_{D\searrow}$. Man sieht leicht ein, daß eine Zweiverschmelzung $\varphi : X \curlyvee Y \to Z$ in Ket repräsentiert wird durch eine vom Grad Null homogene bilineare Abbildung

$$\varphi : X \times Y \to Z$$

mit $d\varphi(x, y) = \varphi(dx, y) + (-1)^{|x|}\varphi(x, dy)$ für x homogen vom Grad $|x|$. Insbesondere ist die durch $(x, y) \mapsto x \otimes y$ gegebene Zweiverschmelzung in den üblichen Tensorkomplex $X \otimes Y$ universell. Ebenso sieht man leicht ein, daß Leerverschmelzungen $\curlyvee \to Z$ in Ket genau diejenigen Leerverschmelzungen von sgAb sind, die durch Zykel aus $\mathcal{Z}^0 X = \ker d^0 \subset X^0$ gegeben werden, wir haben also in Formeln

$$\mathrm{Ket}(\curlyvee, X) = \mathcal{Z}^0 X$$

Insbesondere ist der Nullzykel $1 \in \mathbb{Z}[0]$ im Komplex $\mathbb{I} := \mathbb{Z}[0]$ mit $\mathbb{I}^0 = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{I}^q = 0$ für $q \neq 0$ eine universelle Leerverschmelzung in Ket. Um zu sehen, daß unsere universellen Verschmelzungen auch stabil universell sind, mag man etwa prüfen, daß jede Multiverknüpfung universeller Verschmelzungen universell ist, und das ist nicht schwer, weil man dabei das Differential ignorieren darf. Um zu zeigen, daß unsere Schmelzkategorie Ket internes Hom hat, mag man entweder prüfen, daß unser üblicher Hom-Komplex so ein internes Hom ist, oder die allgemeine Theorie bemühen, die wir in 2.3.4 skizzieren und in 3.2.17 entwickeln.

Vorschau 2.3.4. In 3.2.17 werden wir lernen, daß gegeben ein Biabmonoid D „mit Antipode“ in einer Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom auch $\mathcal{M}_{D\setminus}$ eine Trennschmelzkategorie mit Multihom ist. Wenn wir das einmal wissen, müssen wir nur noch prüfen, daß unser Biabmonoid der Differentiale eine Antipode besitzt, um zu folgern, daß Ket eine Trennschmelzkategorie mit Multihom ist. Genauer wird sich erweisen, daß für unser Biabmonoid der Differentiale der durch $1 \mapsto 1$ und $d \mapsto -d$ gegebene Morphismus eine Antipode ist und daß Antipoden eindeutig bestimmt sind, wenn sie existieren.

2.3.5. Oft sprechen wir statt von Kettenkomplexen auch gleichbedeutend von **differentiellen supergraduierten abelschen Gruppen** oder weniger pedantisch von **differentiellen graduierten Gruppen** und verwenden die alternative Notation $\mathrm{Ket} = \mathrm{dgAb}$. Analog erklärt man die Schmelzkategorie $\mathrm{Ket}_k = \mathrm{dgMod}_k$ der Komplexe von Moduln über einem vorgegebenen Kring k und konstruiert darin internes Hom und universelle Verschmelzungen, die dann auch wieder stabil universell sind.

Übungen

Übung 2.3.6. Gegeben ein Kringhomomorphismus $A \to B$ ist die Erweiterung der Skalare ein mit universellen Verschmelzungen verträglicher Schmelzfunktor

$$B \otimes_A : \mathrm{Ket}_A \to \mathrm{Ket}_B$$

2.4 Anreicherungen und Homotopiekomplexe

2.4.1. Wir besprechen zunächst „additive Strukture“ und „$(\mathcal{S}, v)$-Strukturen“, bevor wir das allgemeine Konzept einer $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie einführen.

2.4.2. Unter einer **additiven Struktur** auf einer Schmelzkategorie verstehen wir die Vorgabe einer Verknüpfung „Addition“ auf allen Verschmelzungsmengen derart, daß alle Multiverknüpfungen multiadditiv werden.

Beispiel 2.4.3 (**Additive Struktur auf** Ab). Der Leerverschmelzungsfunktor der Schmelzkategorie Ab ordnet jeder abelschen Gruppe X die Menge der Abbildungen der einpunktigen Menge in unsere Gruppe zu. Das Auswerten am einzigen Element liefert folglich eine Bijektion $\mathrm{Ab}(\curlyvee, X) \xrightarrow{\sim} v(X)$ mit $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ dem Vergißfunktor. Gegeben eine Kleinfamilie B von abelschen Gruppen und eine abelsche Gruppe Y erhalten wir so zusammen mit 1.3.2 ausgezeichnete Bijektionen

$$v(B \Rrightarrow Y) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ab}(\curlyvee, (B \Rrightarrow Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(B, Y)$$

Indem wir damit die Gruppenstruktur von links nach rechts übertragen, erhalten wir eine additive Struktur auf der Schmelzkategorie Ab. Sie kann auch direkt beschrieben werden dadurch, daß wir die Mengen $\mathrm{Ab}(B, Y)$ von multilinearen Abbildungen mit ihrer von der Addition auf Y induzierten Addition versehen.

Beispiel 2.4.4. Gegeben eine Schmelzkategorie mit Multihom $\mathcal{M}$ und eine Faktorisierung $\mathrm{L} = v \circ \mathrm{H}$ ihres Leerverschmelzungsfunktors über $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ erhalten wir eine additive Struktur auf $\mathcal{M}$, indem wir Additionen auf den Verschmelzungsmengen dadurch festlegen, daß die durch unsere Daten gegebenen Bijektionen $v\mathrm{H}(B \Rrightarrow Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(B, Y)$ Isomorphismen von abelschen Gruppen sein sollen.

2.4.5. Gegeben ein treuer Schmelzfunktor $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$ erklären wir eine $(\mathcal{S}, v)$**-Struktur auf einer Schmelzkategorie** $\mathcal{M}$ als die Vorgabe einer $(\mathcal{S}, v)$-Struktur im Sinne von 1.5.18 auf jeder Verschmelzungsmenge derart, daß alle Multiverknüpfungen mit den jeweiligen $(\mathcal{S}, v)$-Strukturen verträglich sind.

Beispiel 2.4.6. Jede additive Struktur auf einer Schmelzkategorie liefert eine (Ab, v)-Struktur und jede (Ab, v)-Struktur eine additive Struktur in offensichtlicher Weise und diese beiden Konstruktionen sind zueinander invers.

2.4.7. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom und treuem Leerverschmelzungsfunktor $\mathrm{L} : \mathcal{M} \to \mathrm{kEns}$ liefern unsere Bijektionen $\mathrm{L}(B \Rrightarrow X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(B, X)$ aus 1.3.2 eine $(\mathcal{M}, \mathrm{L})$-Struktur auf $\mathcal{M}$.

Beispiel 2.4.8. Die durch 2.4.7 gegebene (Ab, v)-Struktur auf Ab entspricht unter unseren Konstruktionen aus 2.4.6 der in 2.4.3 erklärten additiven Struktur auf Ab.

2.4.9. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{S}$ erklären wir eine $\mathcal{S}$**-Schmelzkategorie** als ein Datum bestehend aus einer Menge $\mathcal{M}$ von Objekten und für jede Objektkleinfamilie $B = (B_j)_{j \in J}$ in $\mathcal{M}$ und jedes Objekt $Y \in \mathcal{M}$ einem **Verschmelzungsobjekt**

$$\mathcal{M}(B, Y) \in \mathcal{S}$$

und für jede weitere Objektkleinfamilie $A = (A_i)_{i \in I}$ und jede Abbildung $\varphi : I \to J$ einer ausgezeichneten $\mathcal{S}$-Verschmelzung mit dem Namen **Multiverknüpfung**

$$\big(\mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j)\big)_{j \in J} \curlyvee \mathcal{M}(B, Y) \to \mathcal{M}(A, Y)$$

der mit $J \sqcup \{J\}$ indizierten Objektkleinfamilie $J \sqcup \{J\} \to \mathcal{S}$ gegeben durch $j \mapsto \mathcal{M}(A|_{\varphi^{-1}(j)}, B_j)$ und $J \mapsto \mathcal{M}(B, Y)$ in das $\mathcal{S}$-Objekt $\mathcal{M}(A, Y)$. Von diesen Daten fordern wir, daß das Analogon der Assoziativitätsbedingung aus unserer Definition 1.1.4 einer Schmelzkategorie erfüllt ist und daß es für jede Einsfamilie A in $\mathcal{M}$ eine Leerverschmelzung $\mathrm{id}_A \in \mathcal{S}(\curlyvee, \mathcal{M}(A, A_*))$ gibt derart, daß die Verknüpfung

$$\mathcal{M}(B, A_*) \to \mathcal{M}(B, A_*) \curlyvee \mathcal{M}(A, A_*) \to \mathcal{M}(B, A_*)$$

mit dem ersten Pfeil gegeben durch id_A und dem zweiten Pfeil durch die Multiverknüpfung in $\mathcal{M}$ stets die Identität auf (B, A_*) ist und daß umgekehrt auch das entsprechende Vorschalten der id_{B_j} die Identität auf $\mathcal{M}(B, A_*)$ induziert. Wenn wir $\mathcal{S}$ nicht spezifizieren wollen, reden wir von einer **angereicherten Schmelzkategorie**. Wenn wir $\mathcal{S}$ in der Notation verdeutlichen wollen, schreiben wir

$$\mathcal{M}/\mathcal{S}$$

Beispiel 2.4.10. Eine gewöhnliche Schmelzkategorie ist dasselbe wie eine kEns-Schmelzkategorie. Eine in Ab angereicherte Schmelzkategorie ist dasselbe wie eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur.

Beispiel 2.4.11. Sei $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$ ein treuer Schmelzfunktor. Wir erinnern aus 1.5.18 die Schmelzkategorie $\mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$ der Mengen mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur. Eine Schmelzkategorie mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur ist dasselbe wie eine in $\mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$ angereicherte Schmelzkategorie. Es ist auch im wesentlichen dasselbe wie eine in $\mathcal{S}$ angereicherte Schmelzkategorie, wie in 2.4.14 ausgeführt wird.

2.4.12 (**Angereicherte Schmelzfunktoren**). Unter einem Schmelzfunktor F von einer $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ in eine $\mathcal{T}$-Schmelzkategorie $\mathcal{N}$ über einem Schmelzfunktor $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ verstehen wir ein Datum bestehend aus einer Abbildung $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ auf den Objektmengen zusammen mit $\mathcal{T}$-Morphismen $F : \varphi(\mathcal{M}(B, Y)) \to \mathcal{N}(B, Y)$, die mit Multiverknüpfungen verträglich sind in der offensichtlichen Weise. Wir notieren so einen Schmelzfunktor

$$F/\varphi : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \mathcal{N}/\mathcal{T}$$

Es ist klar, wie angereicherte Schmelzfunktoren zu verknüpfen sind. Oft werden wir im folgenden angereicherte Schmelzfunktoren zu betrachten haben, die die Identität auf den Objektmengen sind. Wir nennen sie **objektfest**.

2.4.13 (**Umstrukturieren**). Gegeben ein Schmelzfunktor $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ wird aus jeder $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ in offensichtlicher Weise eine $\mathcal{T}$-Schmelzkategorie $\varphi(\mathcal{M})$ mit derselben Menge von Objekten. Wir nennen diese Konstruktion das **Umstrukturieren von $\mathcal{M}$ mit** φ. In dieser Situation ist die Identität auf der Menge der Objekte zusammen mit der Identität auf $\varphi(M)$ für alle Verschmelzungsobjekte M ein objektfester angereicherter Schmelzfunktor

$$U/\varphi : \mathcal{M}/\mathcal{S} \to \varphi(\mathcal{M})/\mathcal{T}$$

2.4.14. Gegeben $(\mathcal{S}, v)$ eine Schmelzkategorie mit einem treuen Schmelzfunktor $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$ liefert jede $\mathcal{S}$-Schmelzkategorie eine Schmelzkategorie mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur durch Umstrukturieren mit der Schmelzäquivalenz $\mathcal{S} \overset{\approx}{\to} \mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$. Ist unsere Schmelzäquivalenz ein Isomorphismus $\mathcal{S} \overset{\sim}{\to} \mathrm{kEns}_{(\mathcal{S},v)}$ von Schmelzkategorien, so können wir diese Umstrukturierung auch rückgängig machen. Zum

Beispiel liefern im Fall der abelschen Gruppen unsere Konstruktionen einen Isomorphismus $\mathrm{Ab} \xrightarrow{\sim} \mathrm{kEns}_{(\mathrm{Ab},v)}$ und in diesem Sinne ist eine in Ab angereicherte Schmelzkategorie dasselbe wie eine Schmelzkategorie mit additiver Struktur.

2.4.15. Aus einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom erhalten wir eine $\mathcal{M}$-Schmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{M}$ mit derselben Objektmenge und mit den fraglichen Multihomobjekten als Verschmelzungsobjekten

$$\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}(B, Y) := (B \Rrightarrow Y)$$

und mit analog zu 1.3.17 erklärten Multiverknüpfungen. Wir nennen diese $\mathcal{M}$-Schmelzkategorie die **Selbstanreicherung von** $\mathcal{M}$. Unsere Bijektionen zwischen Leerverschmelzungen in das Multihom der Verschmelzungsmenge der entsprechenden Objekte $\mathcal{M}(\curlyvee, B \Rrightarrow X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(B, X)$ aus 1.3.2 liefern in ihrer Gesamtheit zusammen mit der Identität auf der Objektmenge einen objektfesten Isomorphismus

$$\mathrm{L}(\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

zwischen der Umstrukturierung der Selbstanreicherung mit dem Leerverschmelzungsfunktor und der ursprünglichen Schmelzkategorie.

2.4.16 (**Selbstanreicherung bei treuem Leerverschmelzungsfunktor**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom und treuem Leerverschmelzungsfunktor notieren wir $\mathcal{M}/\,\mathrm{kEns}_{(\mathcal{M},\mathrm{L})}$ die Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit der in 2.4.7 beschriebenen $(\mathcal{M}, \mathrm{L})$-Struktur. Wir erhalten in diesem Fall einen objektfesten angereicherten Schmelzfunktor

$$\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}/\mathcal{M} \to \mathcal{M}/\,\mathrm{kEns}_{(\mathcal{M},\mathrm{L})}$$

über der Schmelzäquivalenz $[\mathrm{L}] : \mathcal{M} \xrightarrow{\approx} \mathrm{kEns}_{(\mathcal{M},\mathrm{L})}$ nach 1.5.18, der auf den Verschmelzungsmengen aus Isomorphismen in $\mathrm{kEns}_{(\mathcal{M},\mathrm{L})}$ besteht. Unsere beiden angereicherten Schmelzkategorien sind also salopp gesprochen dieselben bis auf die Schmelzäquivalenz $[\mathrm{L}]$ zwischen den anreichernden Schmelzkategorien.

2.4.17 (**Schmelzfunktor der nullten Homologie**). Wir erinnern aus 2.3.2 die Schmelzkategorie mit Multihom Ket der Kettenkomplexe. Ihr Leerverschmelzungsfunktor faktorisiert in offensichtlicher Weise in einen Schmelzfunktor $\mathcal{Z}^0 : \mathrm{Ket} \to \mathrm{Ab}$ gefolgt vom Vergißfunktor $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$. Für jede Verschmelzung $X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee X_r \to Y$ in Ket liefert weiter die auf den Nullzykeln induzierte Verschmelzung $\mathcal{Z}^0 X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{Z}^0 X_r \to \mathcal{Z}^0 Y$ von abelschen Gruppen ihrerseits auf der Homologie eine Verschmelzung

$$\mathcal{H}^0 X_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathcal{H}^0 X_r \to \mathcal{H}^0 Y$$

von abelschen Gruppen. Damit wird auch die nullte Homologie zu einem Schmelzfunktor

$$\mathcal{H}^0 : \mathrm{Ket} \to \mathrm{Ab}$$

2.4.18. Wir erklären die Schmelzkategorie Hot der **Homotopiekomplexe** als die Umstrukturierung

$$\mathrm{Hot} := \mathcal{H}^0(\mathrm{Ket}^{\mathrm{sa}})$$

der Selbstanreicherung von Ket mit dem Schmelzfunktor der nullten Homologie, genauer die Umstrukturierung $v\mathcal{H}^0$ für $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ der Vergißfunktor. In Formeln hat Hot also dieselben Objekte wie Ket und Verschmelzungen in Hot werden erklärt durch

$$\mathrm{Hot}(B, Y) := \mathcal{H}^0(B \Rrightarrow_{\mathrm{Ket}} Y)$$

Universelle Verschmelzungen und Multihomobjekte in Hot erhält man aus den universellen Verschmelzungen und Multihomobjekten in Ket durch Übergang zur Homotopiekategorie, wie sich der Leser leicht überlegen kann. Der Leerverschmelzungsfunktor von Hot ist der Funktor der nullten Homologie, wir haben genauer offensichtliche ausgezeichnete Isomorphismen

$$\mathrm{Hot}(\curlyvee, Y) = \mathcal{H}^0(\curlyvee \Rrightarrow Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 Y$$

Der Leerverschmelzungsfunktor von Hot faktorisiert in offensichtlicher Weise über $v : \mathrm{Ab} \to \mathrm{kEns}$ und diese Faktorisierung versieht nach unseren allgemeinen Überlegungen aus 2.4.4 die Schmelzkategorie Hot mit einer additiven Struktur, die aber auch so bereits offensichtlich war. In derselben Weise erklären wir für jeden Kring k die Mod_k-Schmelzkategorie Hot_k der Homotopiekomplexe von k-Moduln.

Übungen

Übung 2.4.19. Die sogenannte **totale Homologie** $\mathcal{H} := \bigoplus \mathcal{H}^q$ ist ein Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Hot} \to \mathrm{sgAb}$ von der Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe in die Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen. Er macht universelle Leerverschmelzungen zu universellen Leerverschmelzungen, ist aber im allgemeinen nicht verträglich mit universellen Verschmelzungen. Ein allgemeinerer Zugang zu diesem Schmelzfunktor wird in 3.3.16 erklärt.

Übung 2.4.20. Gegeben ein Körper k ist das Bilden der totalen Homologie eine Äquivalenz von Schmelzkategorien

$$\mathcal{H} : \mathrm{Hot}_k \xrightarrow{\approx} \mathrm{sgMod}_k$$

und induziert mithin einen mit universellen Verschmelzungen und internem Hom verträglichen Funktor $\mathcal{H} : \mathrm{Ket}_k \to \mathrm{sgMod}_k$.

Weiterführende Übung 2.4.21. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Gibt es für eine Familie von Komplexen in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ in jedem Grad ein Koprodukt beziehungsweise Produkt der entsprechenden Objekte von $\mathcal{A}$, so bilden diese als Komplex aufgefaßt auch das Koprodukt beziehungsweise Produkt in $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}}$ und der offensichtliche Funktor $\mathrm{Ket}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}$ ist verträglich mit derartigen Koprodukten und Produkten.

3 Mehr zu Schmelzkategorien

3.1 Moduln, Komoduln und Cap-Produkte

3.1.1. Wir erinnern, daß wir nach 1.1.16 mit $X \curlyvee Y$ die durch $\{1, 2\}$ indizierte Familie $1 \mapsto X, 2 \mapsto Y$ bezeichnen.

3.1.2. Unter einer **Verknüpfung** auf einem Objekt A einer Schmelzkategorie verstehen wir eine Zweiverschmelzung $m = m_A : A \curlyvee A \to A$. Ein Objekt mit Verknüpfung nennen wir ein **Magmaobjekt** oder kurz ein **Magma** unserer Schmelzkategorie. Eine Verknüpfung $m : A \curlyvee A \to A$ in einer Schmelzkategorie heißt **assoziativ**, wenn gilt $m \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \curlyvee m)$. Ein Objekt einer Schmelzkategorie mit einer assoziativen Verknüpfung nenne ich ein **Assoziativobjekt**. Unter einer **Eins** eines Magmas A verstehen wir eine Leerverschmelzung $1 = 1_A : \curlyvee \to A$ mit $m \circ (1 \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id} = m \circ (\mathrm{id} \curlyvee 1)$. Ein Assoziativobjekt mit einer Eins nennen wir ein **Monoidobjekt** oder auch kurz ein **Monoid** unserer Schmelzkategorie. Die Eins ist dann nach Übung 3.1.34 eindeutig betimmt.

3.1.3. Wir müssen in Zukunft sorgfältig unterscheiden zwischen der Eins eines Magmaobjekts und dem Einsobjekt einer Schmelzkategorie.

3.1.4. Gegeben zwei Monoide A, B in ein- und derselben Schmelzkategorie verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Monoidobjekten** oder auch **Monoidhomomorphismus** eine Einsverschmelzung $f : A \to B$ mit den Eigenschaften $m_B \circ (f \curlyvee f) = f \circ m_A$ und $f \circ 1_A = 1_B$. Unsere Monoide werden so selbst zu einer Kategorie. Jeder Schmelzfunktor induziert einen Funktor zwischen den jeweiligen Kategorien von Monoiden.

Ergänzung 3.1.5. All diese Begriffe verallgemeinern sich in offensichtlicher Weise auf den Fall monotoner Schmelzkategorien.

3.1.6. Unter Koverknüpfungen, Komagmas, Koassoziativobjekten, Komonoidobjekten und dergleichen in einer Trennkategorie verstehen wir die entsprechenden Begriffe in der dazu opponierten Schmelzkategorie.

3.1.7. Eine Verknüpfung $m : A \curlyvee A \to A$ in einer Schmelzkategorie heißt **kommutativ**, wenn gilt $m = m \circ \hat{\tau}$ für τ die nichttriviale Permutation. Ein Monoid mit kommutativer Verknüpfung nennen wir wie in 2.2.2 ein **Abmonoid**. Unsere Abmonoide bilden eine volle Unterkategorie der Kategorie der Monoide. Jeder Schmelzfunktor induziert einen Funktor zwischen den jeweiligen Kategorien von Abmonoiden. Die opponierte Struktur in einer Trennkategorie nennen wir unseren Konventionen folgend wie in 2.2.8 ein **Koabmonoid**.

3.1.8. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten sind die Magmas, Monoide und Abmonoide der Schmelzkategorie $\mathrm{kart}(\mathcal{C})$ im hier erklärten Sinne genau unsere Magmas, Monoide und Abmonoide von $\mathcal{C}$ im üblichen Sinne.

Beispiele 3.1.9. Die folgende Tabelle faßt einige besonders wichtige Beispiele für Magmas, Monoide und Abmonoide in Schmelzkategorien zusammen.

Schmelzkategorie	Magma	Monoid	Abmonoid
kEns	Magma	Monoid	Abmonoid
$\mathrm{k}\mathcal{C}$	Magma in $\mathcal{C}$	Monoid in $\mathcal{C}$	Abmonoid in $\mathcal{C}$
Ab	$\mathbb{Z}$-Algebra	Ring	Kring
Mod_K	K-Algebra	K-Ringalgebra	K-Kringalgebra
Ab^Γ		Γ-graduierter Ring	Γ-graduierter Kring
sMod_K		Superringalgebra	Superkringalgebra
filAb		filtrierter Ring	filtrierter Kring

Ein Monoidobjekt in der Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen sgAb ist immer noch schlicht ein graduierter Ring, aber so ein Monoidobjekt ist kommutativ genau dann, wenn unser graduierter Ring **superkommutativ** ist in dem Sinne, daß gilt $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ für beliebige homogene Elemente a, b.

3.1.10. Ausgeschrieben ist ein Komonoid einer Trennkategorie $\mathcal{T}$ ein Paar (A, μ) bestehend aus einem Objekt $A \in \mathcal{T}$ und einer Zweitrennung

$$\mu : A \to A \curlywedge A$$

mit dem Namen **Komultiplikation** derart, daß gilt $(\mu \curlywedge \mathrm{id}) \circ \mu = (\mathrm{id} \curlywedge \mu) \circ \mu : A \to A \curlywedge A \curlywedge A$ und daß es eine Leertrennung $\epsilon : A \to \curlywedge$ gibt mit $(\epsilon \curlywedge \mathrm{id}) \circ \mu = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \curlywedge \epsilon) \circ \mu$. Diese Leertrennung ist dann eindeutig bestimmt und heißt die **Koeinheit**. Gilt zusätzlich $\hat{\tau} \circ \mu = \mu$ für $\tau \in \mathcal{S}_2$ das nichtneutrale Element, so ist unser Komonoid ein Koabmonoid.

Beispiel 3.1.11 (**Monaden als Monoide**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ erhalten wir in natürlicher Weise eine monotone Schmelzkategorie $\mathrm{Cat}(\mathcal{C}) := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ mit Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ als Objekten und der Maßgabe, daß eine Verschmelzung von Endofunktoren in einen weiteren Endofunktor dasselbe sein soll wie eine Transformation der Komposition unserer Endofunktoren in den weiteren Endofunktor, in Formeln

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{C})(F_1 \curlyvee \ldots \curlyvee F_r, G) := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C})(F_1 \circ \ldots \circ F_r, G)$$

und insbesondere $\mathrm{Cat}(\mathcal{C})(\curlyvee, G) := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C})(\mathrm{Id}, G)$ für Id der Identitätsfunktor auf $\mathcal{C}$. Die Multiverknüpfung wird der Leser leicht selbst erraten. Die Monoidobjekte dieser monotonen Schmelzkategorie heißen **Monaden**.

Beispiel 3.1.12 (**Einsobjekte als Abmonoidobjekte**). In jeder Schmelzkategorie mit Eins $\mathbb{I}$ macht die offensichtliche Zweiverschmelzung $\mathbb{I} \curlyvee \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ unser Einsobjekt zu einem Abmonoidobjekt.

Beispiel 3.1.13. Unter unserem Trennfunktor $\mathrm{Fun} : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ der Funktionenräume 1.5.25 liefert die banale Struktur auf einer Menge $X \in \curlywedge\mathrm{Ens}$ als Koabmonoid eine Struktur als Koabmonoid der Trennkategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$ auf ihrem Funktionenraum $\mathrm{Fun}(X)$, mithin eine Struktur als Abmonoid der Schmelzkategorie Ab alias eine Struktur als Kring. So erhalten wir ein weiteres Mal die durch punktweise Multiplikation gegebene Ringstruktur auf $\mathrm{Fun}(X) = \mathrm{Ens}(X, \mathbb{Z})$.

3.1.14. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und darin ein Monoid (R, m) verstehen wir unter einem **R-$\mathcal{M}$-Monoidmodul** oder kurz **R-Modul** ein Objekt $M \in \mathcal{M}$ mitsamt einer Zweiverschmelzung

$$m_M : R \curlyvee M \to M$$

mit der Eigenschaft, daß gilt $m_M \circ (m \curlyvee \mathrm{id}) = m_M \circ (\mathrm{id} \curlyvee m_M)$ im Raum der Verschmelzungen $R \curlyvee R \curlyvee M \to M$ und $m_M \circ (e \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id}$ im Raum der Verschmelzungen $M \to M$ für $e : (\curlyvee) \to R$ die Eins von R. Unsere Zweiverschmelzung m_M heißt die **Operation von R auf M**. Jeder Schmelzfunktor F macht R-Objekte zu $F(R)$-Objekten. Ausführlicher nennen wir unsere R-Moduln auch **R-Linksmoduln** und erklären analog **R-Rechtsmoduln** und **R-S-Bimoduln** für zwei Monoide R, S, bei denen wir eben die übliche Verträglichkeit von Rechts- und Linksoperation fordern.

Ergänzung 3.1.15 (**Diskussion der Terminologie**). Wie in 3.1.41 ausgeführt wird kann man R-Rechtsmoduln mit R^{opp}-Linksmoduln identifizieren. Bei konkreten Rechnungen erlaubt jedoch die Arbeit mit Rechtsmoduln oft eine übersichtlichere Darstellung. Allgemeiner kann man Bimoduln als einen Spezialfall von **Multimoduln** M über einer Familie von Monoiden R_i sehen, bei denen eben Modulstrukturen $m_i : R_i \curlyvee M \to M$ vorgegeben sind und für $i \neq j$ die Veträglichkeit $m_i \circ (\mathrm{id} \curlyvee m_j) = m_j \circ (\mathrm{id} \curlyvee m_i) \circ (\tau \curlyvee \mathrm{id}) : R_i \curlyvee R_j \curlyvee M \to M$ gefordert wird. Bei konkreten Rechnungen erlaubt aber die Arbeit mit Bimoduln oft eine übersichtlichere Darstellung. Außerdem bleiben Bimoduln ein sinnvolles Konzept in monotonen Schmelzkategorien, in denen Multimoduln oder opponierte Monoide nicht mehr sinnvoll erklärt werden können.

3.1.16. Seltener betrachten wir **Assoziativmoduln** über Assoziativobjekten, bei denen wir im Unterschied zu Monoidmoduln keine Forderung an die Operation der Eins stellen, die es ja gar nicht geben muß.

3.1.17. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und darin ein Monoid R bilden wir die Schmelzkategorien $\mathcal{M}_{R\curlyvee}$ und $\mathcal{M}_{\curlyvee R}$ der R-Linksmoduln beziehungsweise R-Rechtsmoduln als volle Schmelzunterkategorien der multiäquivarianten Schmelzkategorie aller R-Objektmoduln $\mathcal{M}_{R\curlyvee'}$ nach 1.1.36.

Beispiele 3.1.18. Die folgende Tabelle faßt einige besonders wichtige Beispiele für Monoidmoduln in Schmelzkategorien zusammen.

Schmelzkategorie	Monoid	Objekt mit Operation
kEns	Monoid G	G-Menge
$\mathrm{k}\mathcal{C}$	Monoid G in $\mathcal{C}$	Objekt mit G-Operation
Ab	Ring	Modul
Mod_K	K-Ringalgebra	Modul
Ab_Γ	Γ-graduierter Ring	Γ-graduierter Modul
sMod_K	Superringalgebra	Supermodul
filAb	filtrierter Ring	filtrierter Modul

Beispiel 3.1.19 (**Operation durch das Einsobjekt**). In einer Schmelzkategorie mit Einsobjekt $\mathbb{I}$ ist für jedes Objekt X die offensichtliche Zweiverschmelzung $\mathbb{I} \curlyvee \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ eine Operation des Abmonoidobjekts $\mathbb{I}$ aus 3.1.12. Zum Beispiel trägt jede abelsche Gruppe eine natürliche Struktur als $\mathbb{Z}$-Modul.

3.1.20. Unter einer **Kooperation** eines Komonoids auf einem Objekt einer Trennkategorie verstehen wir eine Operation in der opponierten Schmelzkategorie. Die so erklärten Objekte nenn wir **Komonoidkomoduln** oder kurz **Komoduln**. Zum Beispiel heißt ein Objekt der Trennschmelzkategorie Mod_K mit der Kooperation einer Koringalgebra ein Komodul im üblichen Sinne.

Beispiel 3.1.21. Gegeben ein Morpismus $f : Z \to X$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ wird Z ein Komodul des banalen Koabmonoids $X \in \curlywedge\mathcal{C}$ vermittels der Kooperation $(f, \mathrm{id}) : Z \to X \curlywedge Z$. Wir nennen ihn den **banalen Komodul** zu $Z \in \mathcal{C}_X$.

3.1.22 (**Abstrakte cap-Produkte**). Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom sowie ein Komonoid $A \in \mathcal{M}$ erhalten wir durch das Anwenden des Trennfunktors $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ des Dualisierens nach 1.5.23 stets ein Komonoid $A^\vee$ in $\mathcal{M}^{\mathrm{ot}}$ alias ein Monoid

$$A^\vee \in \mathcal{M}$$

Zusätzlich erhalten wir auf A die Struktur eines $A^\vee$-Bimoduls von $\mathcal{M}$. Die Operation $A^\vee \curlyvee A \to A$ erklären wir dazu als die Komposition

$$A^\vee \curlyvee A \to A^\vee \otimes A \to A^\vee \otimes A \otimes A \to \mathbb{I} \otimes A \to A$$

mit den offensichtlichen äußeren Morphismen und $\mathrm{id} \otimes \tau_{23}\Delta$ als zweitem Morphismus, für $\Delta : A \to A \otimes A$ die Komultiplikation des Komonoidobjekts $A \in \mathcal{M}$, sowie $(\mathrm{ev}\, \tau_{12}) \otimes \mathrm{id}$ als drittem Morphismus, für ev die Evaluation aus 1.3.15 und und τ jeweils die Vertauschung der entsprechenden Tensorfaktoren. Die Operation $A \curlyvee A^\vee \to A$ erklären wir ähnlich als die Komposition

$$A \curlyvee A^\vee \to A \otimes A^\vee \to A \otimes A \otimes A^\vee \to A \otimes \mathbb{I} \to A$$

mit den offensichtlichen äußeren Morphismen und $\tau_{12}\Delta \otimes \mathrm{id}$ als zweitem Morphismus sowie $\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}$ als drittem Morphismus. Um das einzusehen mag man von 1.5.24 ausgehen. Für diese Operationen von $A^\vee$ auf A schlage ich die Bezeichnung **abstraktes cap-Produkt** von links beziehungsweise rechts und die Notation $\cap$ vor. Ist A kokommutativ, so ist auch $A^\vee$ kokommutativ und die Operationen von links und rechts stimmen im Sinne der Gleichheit $\cap \circ \tau = \cap : A^\vee \curlyvee A \to A$ überein. Man prüft für das cap-Produkt von links leicht die Übereinstimmung der beiden Verschmelzungen

$$A^\vee \curlyvee A^\vee \curlyvee A \to \mathbb{I}$$

durch „Produkt der vorderen Einträge gefolgt vom Auswerten $\mathrm{ev} \circ \tau$“ und „Produkt der hinteren Einträge gefolgt vom Auswerten $\mathrm{ev} \circ \tau$“. Diese Erkenntnis mag man die **abstrakte Adjunktionsformel** nennen. Gegeben ein Komonoidmorphismus $f : A \to B$ erhalten wir weiter einen Monoidmorphismus $f^\vee : B^\vee \to A^\vee$ und die **abstrakte Projektionsformel** in Gestalt eines kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
A^\vee \curlyvee A \arrow[d] & B^\vee \curlyvee A \arrow[l] \arrow[r] & B^\vee \curlyvee B \arrow[d] \\
A \arrow[rr] & & B
\end{tikzcd}$$

3.1.23 (**Terminologisches zum dualisierten Komonoid**). Mir ist schmerzlich bewußt, daß es gute Gründe gibt, statt der hier getroffenen Wahl für die Definition des zu einem Komonoid A gebildeten dualen Monoids $A^\vee$ eine andere Wahl zu bevorzugen, bei der $A^\vee$ opponiert wäre zum $A^\vee$ in den hier vereinbarten Konventionen.

Ergänzung 3.1.24. Man kann denselben Formalismus auch in der opponierten Situation entwickeln. In dieser Situation muß dann aber auch das „Opponierte zu Multihom“ zur Verfügung stehen, und das ist in den von uns betrachteten Beispielen eher die Ausnahme als die Regel.

Beispiel 3.1.25 (**Koringalgebra als Modul der dualen Ringalgebra**). Gegeben ein Kring k betrachten wir die Trennschmelzkategorie mit Multihom Mod_k. Ein Komonoid (A, Δ) ist ein k-Modul A zusammen mit einer k-linearen Abbildung $\Delta : A \to A \otimes A$, der **Komultiplikation**, die die **Koassoziativitätsbedingung** $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ erfüllt und für die es eine **Koeins** gibt, also einen Kovektor $\varepsilon : A \to k$ derart, daß aus $\Delta(a) = \sum b_i \otimes c_i$ folgt $a = \sum \varepsilon(b_i)c_i = \sum \varepsilon(c_i)b_i$. Gegeben eine Koringalgebra wird nun A^* eine Ringalgebra, wenn wir sie mit der Multiplikation $A^* \otimes A^* \to A^*$ versehen, die aus der Komultiplikation Δ durch Dualisieren und Vorschalten des offensichtlichen Homomorphismus $A^* \otimes B^* \to (A \otimes B)^*$ im Fall $A = B$ entsteht. Das Einselement ist dann $\varepsilon \in A^*$. In dieser Situation wird A ein A^*-Bimodul mit der Linksoperation $fa := \sum f(c_i)b_i$ für $\Delta(a) = \sum b_i \otimes c_i$ und der Rechtsoperation

$af := \sum f(b_i)c_i$. Diese Bimodulstruktur ist ein Beispiel für unser abstraktes cap-Produkt. Um auch noch die Bedeutung der Adjunktionsformel herauszuarbeiten bemerken wir, daß für jede k-Ringalgebra B ihr Dualraum B^* ein B-Bimodul wird vermittels der Operationen $b\beta := \beta \circ (\cdot b)$ sowie $\beta b := \beta \circ (b\cdot)$ für $b \in B$ und $\beta \in B^*$. Insbesondere wird so auch A^{**} ein A^*-Bimodul. Die Adjunktionsformel kann verstanden werden als die Aussage, daß die kanonische Abbildung $A \to A^{**}$ in unserer speziellen Situation ein Homomorphismus von A^*-Moduln ist. Sie ist sogar, wie man ebensoleicht erkennt, ein Homomorphismus von A^*-Bimoduln.

Beispiel 3.1.26. Wir erinnern für jeden Kring k und jeden k-Modul V das Biabmonoid $\bigwedge V$ in sgMod_k aus 2.2.19. In dieser Situation erhalten wir einen Ringalgebrenisomorphismus $\mathrm{Alt}(V) = \bigoplus \mathrm{Alt}^n V \xrightarrow{\sim} (\bigwedge V)^\vee$ von der Algebra der alternierenden Formen mit dem Shuffle-Dachprodukt und der Graduierung mit $\mathrm{Alt}^n(V)$ homogen vom Grad $-n$ nach $(\bigwedge V)^\vee$ durch die Vorschrift, daß $(\omega, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_n)$ der Abbildung $\mathrm{ev} \circ \tau : (\bigwedge V)^\vee \curlyvee \bigwedge V \to \mathbb{I} = k$ entsprechen soll mit τ der Vertauschung der beiden Faktoren. Unser cap-Produkt von links entspricht dann der Struktur von $\bigwedge V$ als $\mathrm{Alt}(V)$-Modul, unter der die Operation durch **geshuffeltes partielles Einsetzen**

$$\omega \cap (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\, v_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(n)}$$

geschieht. Die Rechtsmodulstruktur kann in diesem Fall durch die Linksmodulstruktur ausgedrückt werden vermittels

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \cap \omega = (-1)^{pn} \omega \cap (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$$

Diese Formel spezialisiert unsere allgemeine Erkenntnis, daß im Fall eines kommutativen Komonoids die „cap-Produkte von links und rechts übereinstimmen“.

Ergänzung 3.1.27. Bourbaki betrachtet in seiner Algèbre, was wir in unserer Terminologie die „cap-Produkte eines Komonoids der Trennschmelzkategorien mit Multihom gAb und sgAb“ nennen würden, und verwendet dafür die Terminologie „produits internes d'une cogèbre“.

Beispiel 3.1.28 (**Raum der Maße als Modul über dem Funktionenring**). Der Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 1.5.27 macht jede Menge X mit ihrer banalen Struktur als Koabmonoid von $\curlywedge\mathrm{Ens}$ zu einem Koabmonoid $A := \mathrm{Maß}_!(X) \in \mathrm{Ab}$. Durch Dualisieren entsteht daraus wie bereits besprochen das Abmonoid $A^\vee = \mathrm{Fun}(X) \in \mathrm{Ab}$ der Funktionen auf X. Unser abstraktes cap-Produkt aus 3.1.22 liefert eine Operation

$$\mathrm{Fun}(X) \curlyvee \mathrm{Maß}_!(X) \to \mathrm{Maß}_!(X)$$

In diesem Fall ist das, wie man unschwer einsieht, schlicht die natürliche Struktur der Gruppe der Maße als Modul über dem Ring der Funktionen. Die abstrakte Adjunktionsformel spezialisiert zur einigermaßen banalen Identität

$$\int (fg)\mu = \int f(g\mu)$$

Beispiel 3.1.29 (**Ein langweiliges cap-Produkt**). In der Trennschmelzkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$ können wir zu jedem Objekt X das banale Koabmonoid betrachten und es zu einem Abmonoid dualisieren, aber unter dieser Konstruktion liefert jede Menge das immergleiche Einheitsmonoid.

3.1.30 (**Variante zum abstrakten cap-Produkt**). Seien eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom gegeben und ein Komonoid A in $\mathcal{M}$ sowie ein A-Rechtskomodul $M \in \mathcal{M}_{\curlywedge A}$. Dann wird M ein $A^\vee$-Modul in $\mathcal{M}$, indem wir die Operation $A^\vee \curlyvee M \to M$ erklären als die Komposition

$$A^\vee \curlyvee M \to A^\vee \otimes M \to A^\vee \otimes A \otimes M \to \mathbb{I} \otimes M \to M$$

mit den offensichtlichen äußeren Morphismen und $\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}$ in der rechten Mitte und $\mathrm{id} \otimes \tau\Delta_M$ in der linken Mitte für $\Delta_M : M \to M \otimes A$ die Kooperation auf M und τ die Vertauschung der beiden Tensorfaktoren. Im Fall $M = A$ spezialisiert das zu unserem abstrakten cap-Produkt aus 3.1.22. Wir nennen auch sie ein abstraktes cap-Produkt.

3.1.31 (**Weitere Variante zum abstrakten cap-Produkt**). Seien gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Multihom und ein Komonoid A in $\mathcal{M}$ sowie ein A-Linkskomodul $M \in \mathcal{M}_{A\curlywedge}$. So erhalten wir eine natürliche Zweiverschmelzung $M^\vee \curlyvee M \to A$ als die Komposition

$$M^\vee \curlyvee M \to M^\vee \otimes M \to M^\vee \otimes M \otimes A \to \mathbb{I} \otimes A \to A$$

mit $\mathrm{id} \otimes \tau\Delta_M$ in der linken Mitte. Im Fall $M = A$ spezialisiert das zu unserem abstrakten cap-Produkt aus 3.1.22. Wir nennen auch sie ein abstraktes cap-Produkt.

Beispiel 3.1.32 (**Varianten zum cap-Produkt im Maße-Funktionen-Fall**). Ist $f : Z \to X$ eine Abbildung und Z der zugehörige banale Komodul nach 3.1.21 über dem banalen Koabmonoid zu $X \in \curlywedge\mathrm{Ens}$, so wird unter dem Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 1.5.27 der Raum von Maßen $\mathrm{Maß}_!(Z)$ ein Komodul zu $\mathrm{Maß}_!(X)$. Vermittels des cap-Produkts wird dann $\mathrm{Maß}_!(Z)$ ein Modul über dem Funktionenring $\mathrm{Fun}(X)$ und man prüft unschwer, daß diese Modulstruktur schlicht die Multiplikation mit der zurückgeholten Funktion ist, $\varphi \cap \mu = (\varphi \circ f)\mu$. Unsere zweite Verschmelzung erweist sich als das Bildmaß in X des Produkts einer Funktion auf Z mit einem Maß auf Z, in Formeln $\psi \cap \mu = f_*(\psi\mu)$.

Beispiel 3.1.33 (**Varianten zum cap-Produkt im topologischen Fall**). Für jedes Raumpaar ist $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : (X, \emptyset) \to (X, A) \curlywedge (X, \emptyset)$ eine Rechtskooperation des banalen Koabmonoids $(X, \emptyset)$ auf (X, A). Für $A \Subset X$ erhalten wir daraus vermittels unseres Trennfunktors der singulären Ketten $\mathrm{S} : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{Hot}$ aus 4.1.16 eine Rechtskooperation von $\mathrm{S}X$ auf $\mathrm{S}(X, A)$. Für beliebiges $A \subset X$ kann man so eine Rechtskooperation immer noch explizit konstruieren als die Komposition

$$\mathrm{S}X \to \mathrm{S}(X \times X, A \times X) \tilde{\to} \mathrm{S}(X, A) \otimes \mathrm{S}(X)$$

des Vorschubs unter der diagonalen Einbettung gefolgt von der von einer und jeder Alexander-Whitney-Transformation induzierten Kettenabbildung. Ebenso erhält man auch eine Linkskooperation. Unser abstrakter Formalismus 3.1.31 macht daraus in Hot eine Operation von S^*X auf $\mathrm{S}(X, A)$ sowie eine ausgezeichnete Verschmelzung $\mathrm{S}^*(X, A) \curlyvee \mathrm{S}(X, A) \to \mathrm{S}X$. Daraus erhalten wir mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}$ unmittelbar das relative cap-Produkt $\mathrm{H}^*(X) \otimes \mathrm{H}(X, A) \to \mathrm{H}(X, A)$ aus der singulären Homologietheorie, das $\mathrm{H}(X, A)$ zu einem Modul über dem Kohomologiering macht, sowie ein weiteres cap-Produkt

$$\mathrm{H}^*(X, A) \otimes \mathrm{H}(X, A) \to \mathrm{H}X$$

Übungen

Übung 3.1.34. Eine Eins eines Magmas in einer Schmelzkategorie ist eindeutig bestimmt, wenn sie denn existiert.

Übung 3.1.35. Die Gesamtheit aller monotonen Schmelzkategorien bildet selbst eine Kategorie

$$\mathrm{MSCat}$$

Deren finales Objekt mscat ist die monotone Schmelzkategorie mit nur einem Objekt und je einer Verschmelzung von jedem Grad $r \in \mathbb{N}$. Gegeben eine monotone Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ konstruiere man eine Bijektion zwischen Schmelzfunktoren $R : \mathrm{mscat} \to \mathcal{M}$ und Monoiden von $\mathcal{M}$.

Übung 3.1.36 (**Produkt von Monoidobjekten**). Existiert für zwei Monoidobjekte A, B einer Schmelzkategorie eine stabil universelle Verschmelzung $A \curlyvee B \to A \otimes B$, so erhalten wir eine Struktur als Monoidobjekt auf $A \otimes B$ in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Sind A und B kommutativ, so auch $A \otimes B$. Zusammen mit $\kappa \circ (\mathrm{id} \curlyvee 1_B) : A \to A \otimes B$ und $\kappa \circ (1_A \curlyvee \mathrm{id}) : B \to A \otimes B$ wird dann $A \otimes B$ ein Koprodukt in der Kategorie der Abmonoidobjekte unserer Schmelzkategorie. Analoges gilt für Komonoidobjekte beziehungsweise Koabmonoidobjekte einer Trennkategorie.

Beispiel 3.1.37. Das Tensorprodukt zweier Ringalgebren über einem Körper ist wieder eine Ringalgebra über besagtem Körper. Andererseits ist auch das Supertensorprodukt zweier $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten Ringalgebren über einem Körper k wieder eine Ringalgebra. Sie hat denselben Vektorraum $A \otimes_k B$ als Grundraum, aber ihr Produkt ist $(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|} ac \otimes bd$. Wir verwenden dafür die Notation $A \bar{\otimes}_k B$.

Übung 3.1.38 (**Endomorphismenobjekte**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie. Gegeben ein Objekt X, für das das Homobjekt $X \Rrightarrow X$ existiert, wird es mit der ausgezeichneten Zweiverschmelzung

$$(X \Rrightarrow X) \curlyvee (X \Rrightarrow X) \to (X \Rrightarrow X)$$

aus 1.3.17 ein Monoidobjekt von $\mathcal{M}$. Wir nennen dies Monoid das **Endomorphismenobjekt von** X und notieren es $\operatorname{End}(X) = \operatorname{End}_{\mathcal{M}}(X)$. Gegeben eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom liefert das Tensorieren von internem Hom 1.3.18 für beliebige Objekt X, Y einen Homomorphismus von Monoidobjekten $\operatorname{End}(X) \otimes \operatorname{End}(Y) \to \operatorname{End}(X \otimes Y)$. Ist X oder Y starr im Sinne von 3.3.3, so ist er ein Isomorphismus

$$\operatorname{End}(X) \otimes \operatorname{End}(Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(X \otimes Y)$$

Übung 3.1.39. Gegeben eine Verknüpfung $m : A \curlyvee A \to A$ auf einem Objekt A einer Schmelzkategorie erklären wir die **opponierte Verknüpfung** $m^{\text{opp}} := m \circ \tau$ für τ die nichttriviale Permutation von zwei Objekten. Unser Objekt A mit dieser Verknüpfung notieren wir A^{opp}. Ist A ein Monoid, so auch A^{opp}. Genau dann ist A in dieser Situation ein Abmonoid, wenn die Identität auf A ein Monoidhomomorphismus $A \to A^{\text{opp}}$ ist.

Übung 3.1.40. Seien $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie mit Multihom und darin $f : R \to S$ Komonoidmorphismus und $M \to N$ ein Homomorphismus über f von einem Komodul über R zu einem Komodul über S der hoffentlich offensichtlichen Weise. So kommutiert mit dem in 3.1.31 konstruierten cap-Produkt das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M^\vee \curlyvee M \arrow[d] & N^\vee \curlyvee M \arrow[l] \arrow[r] & N^\vee \curlyvee N \arrow[d] \\
R \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}$$

Speziell erhalten wir so im topologischen Fall die Verträglichkeit für das Cap-Produkt.

Übung 3.1.41 (**Rechts- und Linksmoduln**). Gegeben eine Schmelzkategorie mit einem Monoid R erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien zwischen der Kategorie der R-Linksmoduln und der R^{opp}-Rechtsmoduln, indem wir jedem M mit Operation $m : R \curlyvee M \to M$ dasselbe Objekt mit der Rechtsoperation $m \circ \tau : M \curlyvee R \to M$ zuordnen.

3.2 Bimonoide und Hopfobjekte

3.2.1. Sei $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie. Ein **Bimonoid in** $\mathcal{M}$ ist ein Tripel (B, m, Δ) bestehend aus einem Objekt B, einer Verknüpfung $m : B \curlyvee B \to B$ und einer Koverknüpfung $\Delta : B \to B \curlywedge B$ derart, daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. (B, m) ist ein Monoid;
2. (B, Δ) ist ein Komonoid;
3. Der induzierte Morphismus $\Delta : B \to B \otimes B$ ist ein Monoidhomomorphismus für die Monoidstruktur auf $B \otimes B$ aus 3.1.36.

Man zeigt dann unschwer , daß zusätzlich gilt:

4. Der von m induzierte Morphismus $m : B \otimes B \to B$ ist ein Komonoidhomomorphismus für die Komonoidstruktur auf $B \otimes B$ aus 3.1.36;
5. Der vom neutralen Element $e : \curlyvee \to B$ induzierte Morphismus $\mathbb{I} \to B$ ist ein Komonoidmorphismus für die Komonoidstruktur auf $\mathbb{I}$ aus 3.1.12;
6. Die Koeins $\eta : B \to \mathbb{I}$ von (B, Δ) ist ein Monoidmorphismus für die Monoidstruktur auf $\mathbb{I}$ aus 3.1.12.

Ein Bimonoid heißt kommutativ, wenn das zugrundeliegende Monoid kommutativ ist. Ein Bimonoid heißt kokommutativ, wenn das zugrundeliegende Komonoid kokommutativ ist. Ein Bimonoid, dessen Verknüpfung und Koverknüpfung beide kommutativ sind, ist dasselbe wie ein Biabmonoid im Sinne von 2.2.14.

3.2.2. Gegeben ein Bimonoid (B, m, Δ) einer Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ ist $(B, \Delta^\circ, m^\circ)$ ein Bimonoid der opponierten Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$.

Beispiel 3.2.3. Jedes Monoid (G, m) der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen wird mit der Diagonaltrennung $\Delta := (\mathrm{id}, \mathrm{id}) : G \to G \curlywedge G$ als Koverknüpfung zu einem Bimonoid (G, m, Δ) der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$. Dasselbe gilt für jedes Monoid der kartesischen Schmelzkategorie einer beliebigen Kategorie mit endlichen Produkten.

Beispiel 3.2.4. Ein Bimonoid der Trennschmelzkategorie Mod_k der Moduln über einem Kring k nennen wir eine k**-Biringalgebra**. Ausgeschrieben ist das ein k-Modul A mit einer Multiplikation, die ihn zu einer Ringalgebra macht, sowie einer Komultiplikation, die ihn zu einer Koringalgebra macht derart, daß die Komultiplikation ein Homomorphismus von Ringalgebren ist für die Multiplikation

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

auf $A \otimes A$ und die Koeins ein Homomorphismus von Ringalgebren $A \to k$. In der Literatur heißt diese Struktur meist kürzer eine „Bialgebra“, aber das paßt nicht zu unserem sehr allgemeinen Verständnis des Begriffs einer Algebra als „Magma einer Modulschmelzkategorie“. Gegeben eine endlichdimensionale Biringalgebra über einem Körper ist ihr Dualraum in natürlicher Weise wieder eine Biringalgebra.

3.2.5. Jeder Trennschmelzfunktor macht Bimonoide zu Bimonoiden. Insbesondere macht unser Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 1.5.27 jedes Monoid G zu einer $\mathbb{Z}$-Biringalgebra. Die zugehörige Ringalgebra ist unser Monoidring $\mathbb{Z}G$, die Komultiplikation macht $\sum a_g \delta_g$ zu $\sum a_g \delta_g \otimes \delta_g$.

Definition 3.2.6. Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ verstehen wir unter einem **Hopf-Objekt von** $\mathcal{M}$ ein Bimonoid (H, m, Δ), für das ein Morphismus $S : H \to H$ existiert derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[r, "S\otimes\mathrm{id}"] & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \mathbb{I} \arrow[r, equal] & \mathbb{I} \arrow[r, "1"] & H \\
 & H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes S"'] & H \otimes H \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Solch ein S ist dann eindeutig bestimmt, vergleiche Übung 3.2.20, und heißt auch in dieser Allgemeinheit **Antipode**.

Beispiel 3.2.7. Jede Gruppe (G, m) wird zu einem Hopfobjekt (G, m, Δ) der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$, indem wir als Koverknüpfung die Diagonaltrennung $\Delta := (\mathrm{id}, \mathrm{id}) : G \to G \curlywedge G$ ergänzen. Die Antipode ist in diesem Fall das Invertieren $S = \mathrm{inv} : G \to G$. Dasselbe gilt für jedes Gruppenobjekt einer beliebigen Kategorie mit endlichen Produkten.

Beispiel 3.2.8 (**Äußere Algebra als Hopfobjekt**). Das Biabmonoid D der Differentiale 2.3.1 ist ein Hopfobjekt der Schmelzkategorie der graduierten Paritätsgruppen sgAb mit Antipode $S : 1 \mapsto 1, d \mapsto -d$. Allgemeiner ist für jeden Kring k und jeden k-Modul V das Biabmonoid $\bigwedge V$ aus 2.2.19 ein Hopfobjekt von sgMod_k mit Antipode S gegeben durch $(-1)^n : \bigwedge^n V \to \bigwedge^n V$.

Beispiel 3.2.9. Gegeben ein Kring k heißt ein Hopfobjekt der Trennschmelzkategorie Mod_k eine **Hopf-Algebra**. Gegeben eine endlichdimensionale Hopfalgebra über einem Körper ist ihr Dualraum in natürlicher Weise wieder eine Hopfalgebra.

3.2.10. Jeder Trennschmelzfunktor macht Hopfobjekte zu Hopfobjekten. Insbesondere macht unser Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 1.5.27 jede

Gruppe G zu einer $\mathbb{Z}$-Hopfalgebra. Die zugeörige Ringalgebra ist unser Gruppenring $\mathbb{Z}G$, die Komultiplikation macht $\sum a_g \delta_g$ zu $\sum a_g \delta_g \otimes \delta_g$ und die Antipode macht $\sum a_g \delta_g$ zu $\sum a_g \delta_{g^{-1}}$.

Beispiel 3.2.11 (**Symmetrische Algebra als Hopfalgebra**). Gegeben ein Vektorraum V wird die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ eine Hopfalgebra mit der Komultiplikation $\Delta : \mathrm{S}V \to \mathrm{S}V \otimes \mathrm{S}V$ gegeben durch $v \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$ für $v \in V$. Allgemeiner wird für einen beliebigen Modul V über einem beliebigen Kring k so die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ eine k-Hopfalgebra.

Beispiel 3.2.12 (**Differentielle abelsche Gruppen als Biabmonoid-Moduln**). Wir erhalten ein Ab-Biabmonoid mit Antipode, indem wir den Polynomring $\mathbb{Z}[\partial]$ in einer Variablen mit der Komultiplikation mit $\partial \mapsto \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial$ versehen. Die Antipode wird dann beschrieben durch $\partial \mapsto -\partial$. Das ist ein Spezialfall von 3.2.11. Die Schmelzkategorie der Moduln über diesem Biabmonoid ist unsere Schmelzkategorie der differentiellen abelschen Gruppen 1.3.20.

Beispiel 3.2.13 (**Symmetrische Algebra als Hopfobjekt**). Gegeben ein Vektorraum V wird die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ ein Hopfobjekt der Trennschmelzkategorie gAb, wenn wir $\mathrm{S}V$ mit der natürlichen Graduierung versehen, bei der wir V in den Grad Eins setzen, und mit derselben Komultiplikation wie im ungraduierten Fall .

Beispiel 3.2.14. Typische Beispiele für Hopfalgebren sind universelle Einhüllende von Liealgebren. Mehr zu Hopfalgebren findet man etwa in [Kas95].

Vorschau 3.2.15. Jetzt muß man sich mal überlegen, daß für jeden Kring k und jedes Objekt $V \in \mathrm{sgMod}_k$ die Summe der symmetrischen Potenzen $\mathrm{S}V$ ein Hopfobjekt ist in natürlicher Weise. Das verallgemeinert 3.2.8 und 3.2.11 und muß seinerseits auf Einhüllende von Liealgebrenobjekten und noch allgemeinere Schmelzkategorien verallgemeinert werden. Das will ich aber jetzt nicht ausführen.

3.2.16 (**Kohomologie topologischer Gruppen**). Jede topologische Gruppe G kann nach 3.2.7 als Hopfobjekt der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Top}$ aufgefaßt werden. Ist k ein Körper und $\mathrm{H}^*G := \mathrm{H}^*(G; k)$ endlichdimensional, so ist nach der Künnethformel der Kohomologie der Trennfunktor

$$\mathrm{H}^* : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgMod}_k^{\mathrm{opp}}$$

verträglich mit universellen Trennungen in endlich viele Kopien von G. Insbesondere macht er G zu einem Hopfobjekt H^*G der Trennkategorie $\mathrm{sgMod}_k^{\mathrm{opp}}$ alias der Schmelzkategorie sgMod_k.

3.2.17 (**Äquivariante Verschmelzungen unter kokommutativem Bimonoid**). Seien $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie und $C \in \mathcal{M}$ ein kokommutatives Bimonoid. Wir betrachten in der äquivarianten Schmelzkategorie der C-Objekte aus

2.2.12 die volle Unterschmelzkategorie

$$\mathcal{M}_{C\searrow} \subset \mathcal{M}_{C\searrow'}$$

aller der C-Objekte, die sogar C-Moduln sind. So sind in Verallgemeinerung von 2.2.14 die Ziele der stabil universellen Verschmelzungen in $\mathcal{M}_{C\searrow'}$ bereits selbst Moduln über C, gehören also in Formeln bereits zu $\mathcal{M}_{C\searrow}$, und sind dort a forteriori universelle, ja stabil universelle Verschmelzungen.

3.2.18 (**Internes Hom für Moduln über kokommutativem Hopfobjekt**). Seien $\mathcal{M}$ eine Trennschmelzkategorie und $C \in \mathcal{M}$ ein kokommutatives Hopfobjekt. Besitzt $\mathcal{M}$ internes Hom, so besitzt auch $\mathcal{M}_{C\searrow}$ internes Hom. Genauer erhalten wir ein internes Hom $X \Rrightarrow Y$ für $X, Y \in \mathcal{M}_{C\searrow}$, indem wir das interne Hom in $\mathcal{M}$ mit einer Modulstruktur $C \curlyvee (X \Rrightarrow Y) \to (X \Rrightarrow Y)$ versehen. So eine Verschmelzung entspricht unter Adjunktion einem Morphismus $C \otimes (X \Rrightarrow Y) \otimes X \to Y$. Wir erhalten ihn als die Verknüpfung

$$\begin{array}{rcll} C \otimes X \otimes (X \Rrightarrow Y) & \to & C \otimes C \otimes X \otimes (X \Rrightarrow Y) & \text{mit } (\mathrm{id} \otimes S)\Delta \text{ vorne,} \\ & \to & C \otimes X \otimes (X \Rrightarrow Y) & \text{mit der Operation auf } X, \\ & \to & C \otimes Y & \text{mit dem Auswerten,} \\ & \to & Y & \text{mit der Operation auf } Y. \end{array}$$

Der Leser mag ausschreiben, daß das in der Tat auf $X \Rrightarrow Y$ eine Struktur als C-Modul ist und daß sich unter der Adjunktion $(\otimes X, X \Rrightarrow)$ Modulmorphismen entsprechen. Als Spezialfall erhalten wir das interne Hom von Komplexen.

Ergänzung 3.2.19. Alles hier Gesagte gilt opponiert genauso für Komoduln über einem kommutativen Bimonoid. Allerdings gilt es zu beachten, daß gegeben eine Trennschmelzkategorie mit internem Hom die opponierte Trennschmelzkategorie keineswegs wieder internes Hom haben muß. So braucht etwa die Existenz von internem Hom in der Trennschmelzkategorie der algebraischen Darstellungen einer algebraischen Gruppe zusätzliche Argumente und folgt nicht wie im Fall von Darstellungen von Liealgebren aus dem allgemeinen Formalismus.

Übungen

Übung 3.2.20 (**Eindeutigkeit von Antipoden**). Man zeige die in 3.2.6 behauptete Eindeutigkeit der Antipode, wenn sie denn existiert. Hinweis: Man orientiere sich am Fall von Gruppenobjekten und untersuche für zwei Antipoden S_1, S_2 die Verknüpfung $H \to H \otimes H \otimes H \to H \otimes H \otimes H \to H$ von dreifacher Komultiplikation gefolgt von $S_1 \otimes \mathrm{id} \otimes S_2$ gefolgt von dreifacher Multiplikation.

3.3 Starrheit

Definition 3.3.1. Ein Objekt X einer Schmelzkategorie heißt **universell tensorierbar**, wenn es mit jedem weiteren Objekt Y eine stabil universelle Zweiverschmelzung $X \curlyvee Y \to X \otimes Y$ besitzt.

3.3.2. Gegeben eine Schmelzkategorie mit Eins $\mathcal{M}$ und die volle Unterkategorie $\mathcal{M}^{\mathrm{ut}}$ der universell tensorierbaren Objekte erhalten wir durch $X \mapsto (X\otimes)$ einen volltreuen Funktor $\mathcal{M}^{\mathrm{ut}} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{Cat}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ zwischen den zugrundeliegenden gewöhnlichen Kategorien. Ich erinnere an unsere Konvention, „bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Objekte“ als gleich zu behandeln. In dieser Konvention ist dann auch $(X\otimes)$ ein wohldefinierter Funktor.

Definition 3.3.3. Ein Objekt X einer Schmelzkategorie mit Eins heißt **starr**, wenn es universell tensorierbar ist und es dazu ein **Adjunktionsdatum** (X^*, γ) gibt bestehend aus einem weiteren universell tensorierbaren Objekt X^* und einer Adjunktion

$$\gamma : (X^*\otimes) \dashv (X\otimes)$$

Ein Adjunktionsdatum zu X ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus aufgrund der Eindeutigkeit von Adjungierten und unserer volltreuen Einbettung $X \mapsto (X\otimes)$ nach 3.3.2.

3.3.4. Ein **Starrheitsdatum** in einer Schmelzkategorie mit Eins ist ein Quadrupel (X, X^*, α, β) aus universell tensorierbaren Objekten X, X^* und Morphismen $\alpha : \mathbb{I} \to X^* \otimes X$ sowie $\beta : X \otimes X^* \to \mathbb{I}$ derart, daß die Kompositionen

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \alpha} X \otimes X^* \otimes X \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_X} X$$

$$X^* \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}_{X^*}} X^* \otimes X \otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*} \otimes \beta} X^*$$

die Identität auf X beziehungsweise X^* sind. Gegeben ein Adjunktionsdatum (X^*, γ) für X in einer Schmelzkategorie mit Eins erhalten wir ein Starrheitsdatum für X, indem wir als α die Einheit der Adjunktion ausgewertet auf $\mathbb{I}$ nehmen gefolgt von der Einsbedingung und als β die Koeinheit der Adjunktion mit der invertierten Einsbedingung vorgeschaltet, aufgrund der allgemeinen Beschreibung einer Adjunktion durch ihre Einheit und Koeinheit. Gegeben ein Starrheitsdatum für X erhalten wir umgekehrt ein Adjunktionsdatum für X wieder nach der allgemeinen Beschreibung einer Adjunktion durch ihre Einheit und Koeinheit und diese beiden Konstruktionen sind zueinander invers. Ein Objekt X einer Schmelzkategorie mit Eins ist also genau dann starr, wenn es sich zu einem Starrheitsdatum ergänzen läßt, und auch dieses Starrheitsdatum wird durch X eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

3.3.5 (**Erhaltung von Starrheit unter Schmelzfunktoren**). Ein mit stabil universellen Verschmelzungen verträglicher Schmelzfunktor zwischen Schmelzkategorien mit Eins macht offensichtlich jedes Starrheitsdatum zu einem Starrheitsdatum und damit starre Objekte zu starren Objekten.

3.3.6. Es wird sich gleich herausstellen, daß jedes Starrheitsdatum (X, X^*, α, β) die Existenz des internen Homobjekts $(X \Rrightarrow \mathbb{I})$ impliziert und einen ausgezeichneten Isomorphismus $X^* \xrightarrow{\sim} X^\vee = (X \Rrightarrow \mathbb{I})$ liefert. Sobald das gezeigt ist, geben wir die Notation X^* wieder auf.

3.3.7. In einer Schmelzkategorie mit Eins ist mit X ist auch X^* starr. Genauer entsteht aus jedem Starrheitsdatum (X, X^*, α, β) durch das Nachschalten der Vertauschungen τ ein Starrheitsdatum $(X^*, X, \beta\tau, \tau\alpha)$, wie nebenstehende Graphik veranschaulichen mag. Wir erhalten so einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$X^{**} \xrightarrow{\sim} X$$

Beispiele 3.3.8. In der Schmelzkategorie der Vektorräume über einem vorgegebenen Körper sind die starren Objekte genau die endlichdimensionalen Vektorräume und die durch X bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmten Daten (X^*, α, β) sind der Dualraum $X^\top$, die Expansion der Identität und die Evaluation. Sie entsprechen unter der Identifikation von $X \otimes X^*$ mit dem Raum der Endomorphismen von X der durch id_X gegebenen Einbettung des Grundkörpers und der Spur. In der kartesischen Schmelzkategorie der Mengen ist „die" einelementige Menge das einzige starre Objekt. Beides folgt leicht aus dem anschließenden Satz.

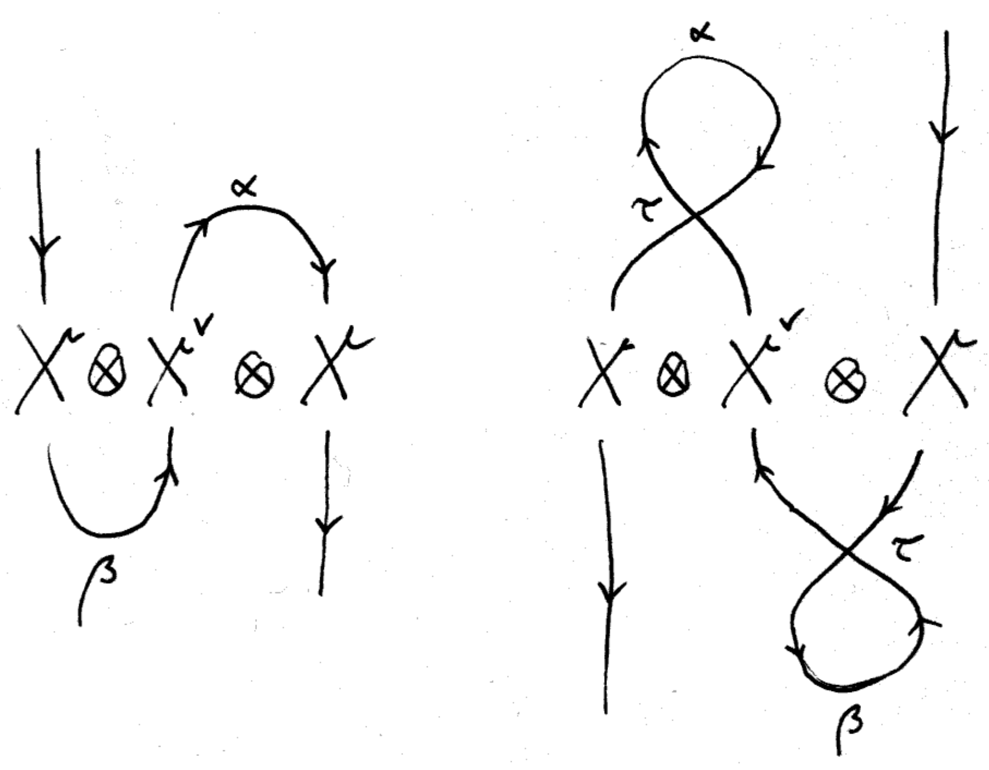
Satz 3.3.9 (**Starrheit und Homobjekte**). *Ein Objekt X einer Schmelzkategorie mit Eins ist genau dann starr, wenn für alle Y das Homobjekt $X \Rrightarrow Y$ und stabil universelle Zweiverschmelzungen $X \otimes Y$ sowie $(X \Rrightarrow \mathbb{I}) \otimes Y$ existieren und wir für jedes Y einen Isomorphismus*

$$(X \Rrightarrow \mathbb{I}) \otimes Y \;\xrightarrow{\sim}\; (X \Rrightarrow Y)$$

erhalten durch Anwenden auf $X \otimes (X \Rrightarrow \mathbb{I}) \otimes Y \to \mathbb{I} \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y$ der Tensor-Hom-Adjunktion, wobei der erste Pfeil vom Auswerten $X \otimes (X \Rrightarrow \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ herkommt.

Beweis. Gegeben (X, X^*, α, β) ein Starrheitsdatum und A eine Objektkleinfamilie und Y ein Objekt betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}(A \curlyvee (X \otimes X^*), Y \otimes X^*) & \to & \mathcal{M}(A \curlyvee \mathbb{I}, Y \otimes X^*) \\
\uparrow & & \downarrow \wr \\
\mathcal{M}(A \curlyvee X \curlyvee X^*, Y \otimes X^*) & & \mathcal{M}(A, Y \otimes X^*) \\
\uparrow & & \downarrow \\
\mathcal{M}(A \curlyvee X, Y) & \leftarrow & \mathcal{M}(A \curlyvee X, Y \otimes X^* \otimes X)
\end{array}$$



Versuch einer graphischen Darstellung des Rechenwegs beim Nachweis, daß aus $(\beta \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \otimes \alpha) = \mathrm{id}_X$ folgt $(\mathrm{id}_X \otimes \beta\tau)(\tau\alpha \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X$.

aus hoffentlich offensichtlichen Abbildungen. Man prüft leicht, daß es zueinander inverse Bijektionen zwischen $\mathcal{M}(A \curlyvee X, Y)$ und $\mathcal{M}(A, Y \otimes X^*)$ induziert und daß $Y \otimes X^*$ zusammen mit diesen Bijektionen ein internes Homobjekt $(X \Rrightarrow Y)$ ist. Setzen wir hier $Y = \mathbb{I}$ ein, so erhalten wir einen ausgezeichneten Isomorpismus $X^* \xrightarrow{\sim} X^\vee$ und die restlichen in der Proposition für starre Objekte behaupteten Aussagen. Gelten umgekehrt diese Aussagen, so liefern sie uns die universelle Tensorierbarkeit des Objekts $X^\vee$ und eine Adjunktion $(X \otimes, X^\vee \otimes)$ und damit ist X starr. □

Übungen

Übung 3.3.10. Man zeige für eine beliebige Schmelzkategorie mit Eins, daß das Zielobjekt jeder stabil universellen Verschmelzung starrer Objekte auch selbst wieder starr ist.

Übung 3.3.11 (**Ein selbstbiduales aber nicht starres Objekt**). In der Schmelzkategorie gMod_k der $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorräume über einem Körper k ist das Objekt X bestehend aus einer Kopie von k in jedem Grad nicht starr, aber dennoch ist der natürliche Morphismus in das Bidual ein Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} X^{\vee\vee}$.

Übung 3.3.12. Gegeben ein starres Objekt X einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Eins erklären wir die **Spur**

$$\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_X : (X \Rrightarrow X) \to \mathbb{I}$$

als den Morphismus, der unter unserem Isomorphismus $(X \Rrightarrow \mathbb{I}) \otimes X \xrightarrow{\sim} (X \Rrightarrow X)$ aus 3.3.9 dem Auswerten $X \otimes (X \Rrightarrow \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ entspricht. Dieser Morphismus liefert unter dem Leerverschmelzungsfunktor nach 1.3.2 zusammen mit weiteren natürlichen Isomorphismen eine ausgezeichnete Abbildung

$$\mathrm{tr} : \mathcal{M}(X, X) \to \mathcal{M}(\curlyvee, \mathbb{I})$$

und auch diese nennen wir eine **Spur**. Man zeige, daß das im Fall der Schmelzkategorie der k-Vektorräume die Spur aus der linearen Algebra $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to k$ ist und im Fall der Schmelzkategorie der Supervektorräume die sogenannte **Superspur** $\mathrm{str} : \mathrm{End}(V) \to k$ gegeben durch $\mathrm{str}(A) := \mathrm{tr}(A_{\bar{0}}^{\bar{0}}) - \mathrm{tr}(A_{\bar{1}}^{\bar{1}})$ in hoffentlich selbsterklärender Notation.

Übung 3.3.13. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Schmelzfunktor von Schmelzkategorien mit Eins, der universelle Leerverschmelzungen zu universellen Leerverschmelzungen macht. Sei $(X, X^\vee, \alpha, \beta)$ ein Starrheitsdatum. Unser Funktor F mache X und $X^\vee$ zu universell tensorierbaren Objekten und induziere für alle Y Isomorphismen $FX \otimes FY \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$ und $F(X^\vee) \otimes FY \xrightarrow{\sim} F(X^\vee \otimes Y)$. So macht F jedes Starrheitsdatum zu einem Starrheitsdatum und macht insbesondere starre Objekte zu starren Objekten. Des weiteren existieren unter diesen Annahmen für starres X

und beliebiges Y die internen Homs $F(X \Rrightarrow Y)$ und $FX \Rrightarrow FY$ und der natürliche Morphismus ist ein Isomorphismus

$$F(X \Rrightarrow Y) \stackrel{\sim}{\to} FX \Rrightarrow FY$$

und $F(\mathrm{tr}_X) : F(X \Rrightarrow X) \to F(\mathbb{I})$ entspricht unter diesen Identifikationen tr_{FX}.

Übung 3.3.14 (**Negative Tensorpotenzen von Einheiten**). Sei eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit Eins gegeben. Ein Objekt E heißt eine **Einheit**, wenn es universell tensorierbar ist und es ein universell tensorierbares Objekt F gibt mitsamt einem Isomorphismus $E \otimes F \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{I}$. Man zeige, daß jede Einheit starr und so nach 3.3.9 „universell hombar" ist und daß der offensichtliche Morphismus $\mathbb{I} \to (E \Rrightarrow E)$ für jede Einheit E ein Isomorphismus $\mathbb{I} \stackrel{\sim}{\to} (E \Rrightarrow E)$ ist. Gegeben eine Einheit E erkläre man für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Tensorpotenz $E^{\otimes n}$, indem man für negatives n die Vereinbarung $E^{\otimes n} := (E^{\vee})^{\otimes(-n)}$ trifft. Man zeige, daß es dann genau ein Datum von Isomorphismen $\alpha_{n,m} : E^{\otimes n} \otimes E^{\otimes m} \stackrel{\sim}{\to} E^{\otimes(n+m)}$ gibt, das für $n, m \geq 0$ aus den offensichtlichen Isomorphismen besteht und die Assoziativitäten $\alpha_{n,m+l} \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha_{m,l}) = \alpha_{n+m,l} \circ (\alpha_{n,m} \otimes \mathrm{id})$ für alle $n, m, l \in \mathbb{Z}$ gelten. Das kann dahingehend zusammengefaßt werden, daß $(E^{\otimes n})_{n \in \mathbb{Z}}$ mit den α ein Abmonoid der Schmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}$ der $\mathbb{Z}$-graduierten Objekte von $\mathcal{M}$ aus 1.1.21 wird.

Übung 3.3.15. Eine Einheit E einer Schmelzkategorie mit Vorzeichen und Eins heiße eine **Signumseinheit**, wenn auf $E \otimes E$ die Vertauschung das Negative der Identität ist. Ein typisches Beispiel ist das Objekt $\mathbb{Z}[1] \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$ der Schmelzkategorie der Komplexe abelscher Gruppen. Gegeben eine Signumseinheit zeige man für Morphismen $f : E^{\otimes n} \to \mathbb{I}$ und $g : E^{\otimes m} \to \mathbb{I}$ die Identität

$$g \circ (\mathrm{id} \otimes f) = (-1)^{nm} f \circ (\mathrm{id} \otimes g)$$

von in hoffentlich offensichtlicher Weise notierten Morphismen $E^{\otimes(n+m)} \to \mathbb{I}$.

Übung 3.3.16 (**Schmelzfunktor der graduierten Leerverschmelzungen**). Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit additiver Struktur und Eins und eine Signumseinheit $E \in \mathcal{M}$ erhalten wir einen Schmelzfunktor $\mathcal{M} \to \mathrm{sgAb}$ mit der Notation $[q]X := E^{\otimes q} \otimes X$ durch die Vorschrift

$$X \mapsto \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}(\curlywedge, [q]X)$$

Unser Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Hot} \to \mathrm{sgAb}$ der totalen Kohomologie aus 2.4.19 kann als ein Spezialfall dieser allgemeinen Konstruktion verstanden werden.

Übung 3.3.17 (**Verträglichkeiten für das Tensorieren von internem Hom**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom. Man zeige die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} W^\vee \otimes X \otimes Y^\vee \otimes Z & \to & (W \otimes Y)^\vee \otimes (X \otimes Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (W \Rrightarrow X) \otimes (Y \Rrightarrow Z) & \to & (W \otimes Y) \Rrightarrow (X \otimes Z) \end{array}$$

mit dem Tensorieren 1.3.18 von internem Hom in der unteren Horizontale und für $W^\vee \otimes Y^\vee \to (W \otimes Y)^\vee$ und den in 3.3.9 beschriebenen Morphismen $W^\vee \otimes X \to (W \Rrightarrow X)$.

Übung 3.3.18 (**Starrheit und Tensorieren von internem Hom**). Sei $\mathcal{M}$ eine Schmelzkategorie mit Eins. Gegeben Objekte $A, B, X, Y \in \mathcal{M}$ mit X, Y starr derart, daß $A \Rrightarrow B$ existiert, existiert auch $(X \otimes A) \Rrightarrow (Y \otimes B)$ und der in 1.3.18 erklärte Morphismus ist ein Isomorphismus

$$(X \Rrightarrow Y) \otimes (A \Rrightarrow B) \xrightarrow{\sim} (X \otimes A) \Rrightarrow (Y \otimes B)$$

Speziell erhalten wir für jede Einheit E natürliche Isomorphismen $E \otimes (A \Rrightarrow B) \xrightarrow{\sim} A \Rrightarrow (E \otimes B)$ und $E^\vee \otimes (A \Rrightarrow B) \xrightarrow{\sim} (E \otimes A) \Rrightarrow B$. Hinweis: Man gehe von 1.3.3 aus. Auch 3.3.17 mag helfen.

Übung 3.3.19 (**Starrheit von Homotopiekomplexen**). Man zeige, daß gegeben ein Morphismus $A \to B$ von starren Objekten der Schmelzkategorie Hot auch der Abbildungskegel starr ist. Man zeige, daß ein Objekt der Schmelzkategorie Hot genau dann starr ist, wenn seine totale Kohomologie eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist.

3.4 Äußere Algebra*

3.4.1. Wir nennen ein Objekt einer Schmelzkategorie eine **Schmelznull**, wenn es in dieses Objekt von jeder Objektkleinfamilie genau eine Verschmelzung gibt und ebenso von jeder Objektkleinfamilie, in der dieses Objekt vorkommt, in jedes weitere Objekt genau eine Verschmelzung. Insbesondere ist eine Schmelznull stets ein Nullobjekt der zugrundeliegenden einfachen Kategorie. Gegeben eine Schmelzkategorie mit Nullobjekt heißt eine Verschmelzung **Null**, wenn sie über das Nullobjekt faktorisiert.

3.4.2. Gegeben ein Einsmorphismus $f : X \to Y$ in einer Schmelzkategorie mit Schmelznull nennen wir einen Morphismus $g : Y \to K$ einen **Schmelzkokern** von f, wenn jede Verschmelzung $Y \curlyvee Y_1 \curlyvee \ldots \curlyvee Y_r \to Z$ mit $r \geq 0$, die unter Vorschalten von $f \curlyvee \mathrm{id} \curlyvee \ldots \curlyvee \mathrm{id}$ zu Null wird, eindeutig über $g \curlyvee \mathrm{id} \curlyvee \ldots \curlyvee \mathrm{id}$ faktorisiert. In einer Schmelzkategorie mit Multihom sind alle Kokerne der zugrundeliegenden einfachen Kategorie auch Schmelzkokerne.

3.4.3. Gegeben ein Morphismus $f : V \to W$ einer Ab-Kategorie $\mathcal{A}$ heißt ein Morphismus $g : K \to V$ ein **Kern von** f, wenn für alle Objekte L das Nachschalten von g eine Bijektion

$$(\circ g) : \mathcal{A}(L, K) \xrightarrow{\sim} \{h \in \mathcal{A}(L, V) \mid f \circ h = 0\}$$

induziert. Ein Kern ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus als Objekt von $\mathcal{A}_V$, wenn er existiert. Wir notieren ihn $\ker(f)$. Jede Ab-Katgorie können wir um ein Nullobjekt ergänzen, wenn sie keines haben sollte, und nach dieser Ergänzung fallen dann auch unsere beiden Begriffe eines Kerns zusammen.

Ergänzung 3.4.4 (**Äußere Potenzen**). Gegeben eine Ab-Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stabil universellen Verschmelzungen sowie $V \in \mathcal{M}$ und $r \in \mathbb{N}$ mag man für jede Transposition $\tau \in \mathcal{S}_r$ den Endomorphismus $\tau - \mathrm{id} \in \mathcal{M}(V^{\otimes r})$ betrachten. Hat $\tau - \mathrm{id}$ einen Kern im Sinne von 3.4.3, so nennen wir eine Verschmelzung

$$\alpha \in \mathcal{M}(V^{\curlyvee r}, W)$$

alternierend, wenn der induzierte Morphismus $\bar{\alpha} \in \mathcal{M}(V^{\otimes r}, W)$ für jede Transposition τ auf $\ker(\tau - \mathrm{id})$ verschwindet. Die Menge der alternierenden r-Verschmelzungen notieren wir $\mathrm{Alt}^r(V, W)$. Eine Veschmelzung $\alpha : \mathcal{M}(V^{\curlyvee r}, \Lambda)$ heiße weiter **universell-alternierend**, wenn für jedes Objekt X das Vorschalten von α eine Bijektion

$$\mathcal{M}(\Lambda, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^r(V^{\curlyvee r}, X)$$

induziert. Eine universellalternierende Verschmelzung ist in offensichtlicher Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, wenn sie existiert. Sie heißt **stabil universellalternierend**, wenn sogar für jede weitere Objektkleinfamilie C und jedes Objekt U das Vorschalten eine Bijektion

$$\mathcal{M}(\Lambda \curlyvee C, U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^r(V^{\curlyvee r} \curlyvee C, U)$$

ist, mit der sich hoffentlich von selbst verstehenden erweiterten Bedeutung von Alt^r auf der rechten Seite. Für Schmelzkategorien mit Multihom sind offensichtlich alle universellalternierenden Verschmelzungen auch stabil universellalternierend. Wir verwenden

$$\alpha_r : V^{\curlyvee r} \to \bigwedge^r V$$

als Notation für die bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte stabil universellalternierende Verschmelzung, wenn es sie gibt, und nennen $\bigwedge^r V$ die **r-te äußere Potenz von** V. Natürlich haben wir $\alpha_0 = \kappa_{\curlyvee} : \curlyvee \to \mathbb{I}$ und $\alpha_1 = \mathrm{id} : V \to V$. Gibt es alle drei beteiligten stabil universellalternierenden Verschmelzungen, so liefern die universellen Eigenschaften, daß α_{r+t} eindeutig faktorisiert in

$$V^{\curlyvee(r+t)} \to \bigwedge^r V \curlyvee V^{\curlyvee t} \to \bigwedge^r V \curlyvee \bigwedge^t V \to \bigwedge^{r+t} V$$

mit $\alpha_r \curlyvee \mathrm{id}^{\curlyvee t}$ und $\mathrm{id} \curlyvee \alpha_t$ als ersten beiden Morphismen und einer so erklärten Zweiverschmelzung

$$\beta = \beta_{r,t} : \bigwedge^r V \curlyvee \bigwedge^t V \to \bigwedge^{r+t} V$$

Klar sind auch die „Antikommutativität" $\beta_{t,r} = (-1)^{rt}\beta_{r,t} \circ \tau$ für τ die Vertauschung, die „Assoziativität" $\beta_{r,s+t}(\mathrm{id} \curlyvee \beta_{s,t}) = \beta_{r+s,t}(\beta_{r,s} \curlyvee \mathrm{id})$ sowie die „Unitarität" $\beta_{0,r} \circ (\kappa_{\curlyvee} \curlyvee \mathrm{id}) = \mathrm{id}$. In einer später eingeführten Terminologie kann das dahingehend zusammengefaßt werden, daß $(\bigwedge^r V)_{r\in\mathbb{N}}$ mit den β ein Monoid der Schmelzkategorie $\mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{N}$-graduierten Objekte von $\mathcal{M}$ aus 1.1.21 wird, ja ein Abmonoid der graduiert superisierten Schmelzkategorie $\mathrm{s}\mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ aus 2.1.14. In der Schmelzkategorie der Moduln über einem Kring k sind die $\bigwedge^r V$ unsere äußeren Potenzen.

Ergänzung 3.4.5 (**Äußere Potenzen als symmetrische Potenzen**). Gegeben eine in $\mathbb{Z}[1/2]$-Moduln angereicherte Schmelzkategorie sollte die r-te äußere Potenz eines Objekts zusammenfallen mit der r-ten symmetrischen Potenz desselben Objekts mit ungerader Parität in der zugehörigen Schmelzkategorie von Superobjekten 2.1.15. Genaueres mag einmal ein Student ausarbeiten.

3.5 Terminologische Experimente*

3.5.1 (**Versuch einer Terminologie**). Hier lege ich noch den Versuch einer kohärenten Terminologie für verschiedene von einer Schmelzkategorie, Trennkategorie oder Trennschmelzkategorie abgeleitete Kategorien nieder.

- Man beschreibe mit einem der Vokale e, i oder o das Verhältnis von Multiplikation und Komultiplikation, so beide vorhanden sein sollten, und zwar

  e für den Fall keiner Verträglichkeitsforderung und auch wenn eine der beiden Strukturen gar nicht gefordert wird;

  i für die übliche Verträglichkeit;

  o für die übliche Verträglichkeit und die zusätzliche Forderung nach der Existenz einer Antipode;

- Man setze davor beziehungsweise danach beziehungsweise sowohl als auch einen der Konsonanten k oder b zur Beschreibung der Komultiplikation beziehungsweise Multiplikation, und zwar

  k für den Fall einer kommutativen Verknüpfung oder Koverknüpfung;

  b für den Fall einer beliebigen Verknüpfung oder Koverknüpfung.

- Man verwende a priori die stärkstmögliche Bezeichnung.

Beispiel 3.5.2. Im Fall einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ finden wir die folgende Übersetzungstabelle.

neue Notation	Bezeichnung in Worten
$\mathrm{eb}(\mathcal{M})$	Monoidobjekte von $\mathcal{M}$
$\mathrm{ek}(\mathcal{M})$	Abmonoide von $\mathcal{M}$

Beispiel 3.5.3. Im Fall der Trennschmelzkategorie $\curlywedge\mathrm{Ens}$ finden wir die folgende Übersetzungstabelle.

neue Terminologie	übliche Terminologie
$\mathrm{kok}(\curlywedge\mathrm{Ens})$	abelsche Gruppen
$\mathrm{kob}(\curlywedge\mathrm{Ens})$	beliebige Gruppen
$\mathrm{kik}(\curlywedge\mathrm{Ens})$	abelsche Monoide
$\mathrm{kib}(\curlywedge\mathrm{Ens})$	beliebige Monoide

Man erinnere dabei, daß für $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten in $\curlywedge\mathcal{C}$ jedes Objekt genau eine Struktur als Komonoid hat und daß diese kommutativ und funktoriell ist. Abelsche Monoide hätten wir demnach statt mit $\mathrm{kik}(\curlywedge\mathrm{Ens})$ auch mit $\mathrm{ek}(\curlywedge\mathrm{Ens})$ oder $\mathrm{bik}(\curlywedge\mathrm{Ens})$ notieren können, aber wir wollen ja a priori die stärkstmögliche Bezeichnung verwenden.

Beispiel 3.5.4. Im Fall der Trennschmelzkategorie Ab finden wir die folgende Übersetzungstabelle.

neue Terminologie	übliche Terminologie
$\mathrm{eb}(\mathrm{Ab})$	Ringe
$\mathrm{ek}(\mathrm{Ab})$	Kringe
$\mathrm{beb}(\mathrm{Ab})$	Hopfalgebren über $\mathbb{Z}$
$\mathrm{bok}(\mathrm{Ab})$	affine Gruppenschemata
$\mathrm{kok}(\mathrm{Ab})$	abelsche affine Gruppenschemata
$\mathrm{bik}(\mathrm{Ab})$	affine Monoidschemata

Affine Supergruppenschemata oder kurz Supergruppen über einem Körper k sind in dieser Terminologie Objekte von $\mathrm{bok}(\mathrm{sMod}_k)$.

3.5.5 (**Iteration von** kok). Gegeben eine Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ machen wir $\mathrm{kok}(\mathcal{M})$ zu einer Schmelzkategorie, indem wir nur solche $\mathcal{M}$-Verschmelzungen

$$A_1 \curlyvee \ldots \curlyvee A_r \to Y$$

erlauben, für die für alle i kommutiert

$$\begin{array}{ccc} A_1 \otimes \ldots \otimes A_i \otimes A_i \otimes \ldots \otimes A_r \to & & A_1 \otimes \ldots \otimes A_i \otimes \ldots \otimes A_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 \otimes A_1 \otimes \ldots \otimes A_i \otimes A_i \otimes \ldots \otimes A_r \otimes A_r & \to Y \otimes Y \to & Y \end{array}$$

Hier wird die linke Vertikale gegeben durch die Koverknüpfungen aller Objekte außer A_i und die obere Horizontale durch die Verknüpfung von A_i und die anderen Pfeile sind die offensichtlichen. Es müßte aber einmal geprüft werden, daß auch in dieser Allgemeinheit die Multiverknüpfung von Verschmelzungen wieder eine Verschmelzung ist. Das könnte vielleicht ein Student ausschreiben. Delikater ist die Frage, ob man vernünftige Annahmen an eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ finden kann, unter denen $\mathrm{kok}(\mathcal{M})$ wieder eine Trennschmelzkategorie ist und eventuell sogar dieselben vernünftigen Annahmen erfüllt, so daß man iterativ

$$\mathrm{kok}^n(\mathcal{M})$$

bilden könnte. Bisher beobachte ich nur amüsiert, daß $\mathrm{kok}(\curlywedge\mathrm{Ens}) = \mathrm{Ab}$ die Schmelzkategorie der abelschen Gruppen ist und $\mathrm{kok}^2(\curlywedge\mathrm{Ens}) = \mathrm{kok}(\mathrm{Ab})$ etwas Absonderliches: Objekte sind wohl affine abelsche Gruppenschemata, Leerverschmelzungen Elemente des zugrundeliegenden Krings, Einsverschmelzungen Homomorphismen des zugrundeliegenden Krings, Zweiverschmelzungen biadditive Abbildungen $A \times B \to C$ alias Gruppenhomomorpismen $A \otimes B \to C$, wir notieren sie etwa $(a, b) \mapsto a * b$, mit $a * (b_1 b_2) = (a_{(1)} * b_1)(a_{(2)} * b_2)$ und $(a_1 a_2) * b = (a_1 * b_{(1)})(a_2 * b_{(2)})$ mit $a \mapsto \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ die übliche Notation für eine Koverknüpfung. Ich frage mich, ob da mehr dahinter steckt und ob und wenn ja wie man diese Beobachtung ausnutzen kann.

Übungen

Übung 3.5.6 (**Additive Struktur auf** $\mathrm{kok}(\mathcal{M})$). Man zeige, daß für jede Trennschmelzkategorie $\mathcal{M}$ die Schmelzkategorie $\mathrm{kok}(\mathcal{M})$ eine additive Struktur erhält, indem wir für Verschmelzungen $\phi, \psi : X \curlyvee Y \to Z$ ihre Summe $\phi + \psi$ erklären als die Vernüpfung

$$X \curlyvee Y \to X \curlyvee X \curlyvee Y \curlyvee Y \to X \curlyvee Y \curlyvee X \curlyvee Y \to Z \curlyvee Z \to Z$$

von Koverknüpfung auf X und Y, Umordnen, $(\phi \curlyvee \psi)$ und Verknüpfung auf Z und analog für Verschmelzungen von beliebigen Objektkleinfamilien. Der durch das Vergessen der zusätzlichen Daten gegebene Schmelzfunktor $v : \mathrm{kok}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ ist volltreu auf Leerverschmelzungen.

4 Bezug zur Homologietheorie

4.1 Homologie als Schmelzfunktor

4.1.1. Wir betrachten die Kategorie Top^r aller r-Tupel topologischer Räume, bilden dazu die Funktorkategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}^r} = \mathrm{Cat}(\mathrm{Top}^r, \mathrm{Ab})$ aller von dort ausgehenden Funktoren in die Kategorie der abelschen Gruppen, und bilden schließlich zu dieser Kategorie mit additiver Struktur die Homotopiekategorie

$$\mathrm{Hot}\left(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}^r}\right)$$

mit ihrer induzierten additiven Struktur.

Satz 4.1.2 (Eilenberg-Zilber, Variante). *Für $r \geq 0$ gibt es in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}\left(\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}^r}\right)$ zwischen den beiden Objekten $(\otimes\mathrm{S}) : (X_1, \ldots, X_r) \mapsto \mathrm{S}X_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}X_r$ und $(\mathrm{S}\times) : (X_1, \ldots, X_r) \mapsto \mathrm{S}(X_1 \times \ldots \times X_r)$ genau einen Morphismus, der auf der nullten Homologie dieselben Abbildungen induziert wie die offensichtlichen Isomorphismen $\mathrm{S}_0X_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}_0X_r \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_0(X_1 \times \ldots \times X_r)$, und dieser Morphismus ist in besagter Homotopiekategorie ein Isomorphismus*

$$(\otimes\mathrm{S}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{S}\times)$$

4.1.3. Die Umkehrabbildung $(\mathrm{S}\times) \xrightarrow{\sim} (\otimes\mathrm{S})$ zu diesem Isomorphismus nennen wir die **Alexander-Whitney-Transformation** in Homotopiekategorien, ihre Effekte im Fall spezieller Räume **Alexander-Whitney-Abbildungen**.

Beweis. Man zeigt das genau wie im Fall $r = 2$. Man beachte, wie die Aussage im Fall $r = 0$ zu allgemeinen Erkenntnissen über die Homologie eines Punktes spezialisiert. □

Korollar 4.1.4 (Singuläre Ketten als Trennschmelzfunktor). *Wir erhalten einen Trennschmelzfunktor*

$$\mathrm{S} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$$

von der banalen Trennkategorie der Kategorie der topologischen Räume in die Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Gruppen, genauer zwischen den zugehörigen Trennschmelzkategorien, indem wir jedem Tupel $v = (v_1, \ldots, v_r)$ stetiger Abbildungen $v_i : X \to Y_i$ die Komposition

$$\mathrm{S}X \to \mathrm{S}(Y_1 \times \ldots \times Y_r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}Y_r$$

von Vorschub und Alexander-Whitney-Abbildung 4.1.3 zuordnen.

Beweis. Die Gesamtheit der r-Trennungen $\mathrm{S}v$ aus unserem Korollar für festes r kann nach 4.1.2 eindeutig dadurch charakterisiert werden, daß sie einerseits natürlich ist, also für jede Sammlung kommutativer Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \stackrel{v_i}{\to} & Y_i \\ \downarrow f & & \downarrow g_i \\ X' & \stackrel{v_i'}{\to} & Y_i' \end{array}$$

von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen ein homotopiekommutatives Diagramm liefert, und daß andererseits die davon induzierten Abbildungen $\mathrm{H}_0 X \to \mathrm{H}_0 Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{H}_0 Y_r$ von den offensichtlichen Abbildungen $\mathrm{S}_0 X \to \mathrm{S}_0(Y_1 \times \ldots \times Y_r) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{S}_0 Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}_0 Y_r$ herkommen. Auf die Gesamtheit der Verknüpfungen für festes s und eine feste Indexabbildung $\bar{u} : [\![r]\!] \to [\![s]\!]$ einer s-Trennung gefolgt von einer Trennung über $\bar{u}$ trifft aber diese Charakterisierung auch zu, weil wir in der Mitte ja auch geeignete Produkte der Räume am Ende einfügen können. Daß unser Trennfunktor dann verträglich ist mit universellen Trennungen, ist eh klar. □

4.1.5. Man beachte, daß in der Situation des Korollars die Bilder der Trennungen zwar auf der nullten Homologie durch die einfache Vorschrift $[x] \mapsto [v_1(x)] \otimes \ldots \otimes [v_r(x)]$ gegeben werden, daß sie aber aber auf höheren Homologien nur im Fall von Körperkoeffizienten sinnvoll definiert sind und dann eine kompliziertere Beschreibung benötigen als „Vorschub längs $(v_1, \ldots, v_r); X \to Y_1 \times \ldots \times Y_r$ gefolgt von der Umkehrung der durch das Kreuzprodukt der Homologie gegebenen Isomorphismen".

4.1.6 (**Singuläre Ketten für diskrete Räume**). Schränken wir unseren Trennschmelzfunktor aus 4.1.4 auf diskrete Räume ein, so fällt er zusammen mit unserem Trennschmelzfunktor $\mathrm{Maß}_! : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ aus 1.5.27 gefolgt vom offensichtlichen volltreuen Trennschmelzfunktor $\mathrm{Ab} \stackrel{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{Hot}$.

4.1.7 (**Singuläre Ketten des einpunktigen Raums**). Der universellen Leertrennung $\mathrm{top} \to \curlywedge$ in der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Top}$ wird nach 4.1.4 unter dem Trennfunktor der singulären Ketten eine universelle Leertrennung der Trennschmelzkategorie Hot zugeordnet, also ein Isomorphismus $\mathrm{S}(\mathrm{top}) \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{Z}[0]$ zur Eins der Homotopiekategorie. Man sieht leicht ein, daß dieser Isomorphismus durch die Augmentation repräsentiert wird.

4.1.8 (**Homologie als Schmelzfunktor**). Wir erhalten einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{H} := \mathcal{H} \circ \mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{sgAb}$$

von der kartesischen Schmelzkategorie der topologischen Räume in die Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen, indem wir unseren Trennschmelzfunktor $\curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$ in die Homotopiekomplexe aus 4.1.4 mit dem

Schmelzfunktor $\mathcal{H} : \mathrm{Hot} \to \mathrm{sgAb}$ der totalen Homologie aus 2.4.19 verknüpfen. Da diese Schmelzfunktoren beide universelle Leerverschmelzungen zu universellen Leerverschmelzungen machen, gilt dasselbe für H und wir erhalten einen ausgezeichneten Isomorphismus $\mathrm{H}(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[0]$ in sgAb. Das durch die universelle Leerverschmelzung gegebene Element alias das Urbild von $1 \in \mathbb{Z}$ unter diesem Isomorphismus ist unser kanonischer Erzeuger der nullten Homologie des einpunktigen Raums $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$, wie der Leser leicht prüfen wird.

4.1.9 (**Das Kreuzprodukt und seine Eigenschaften**). Per definitionem ordnet unser Schmelzfunktor der Homologie der universellen Zweiverschmelzung $X \curlyvee Y \to X \times Y$, die durch die Identität auf $X \times Y$ gegeben ist, diejenige Zweiverschmelzung $\mathrm{H}X \curlyvee \mathrm{H}Y \to \mathrm{H}(X \times Y)$ in sgAb zu, die der durch die Schreibreihenfolge gegebenen Anordnung das Kreuzprodukt der Homologie

$$\mathrm{H}X \times \mathrm{H}Y \to \mathrm{H}(X \times Y)$$

zuordnet. Eine Einsverschmelzung $f : X \to Y$ wird darunter zur auf der Homologie induzierten Abbildung $f_* : \mathrm{H}X \to \mathrm{H}Y$ und die universelle Leerverschmelzung $\curlyvee \to \mathrm{top}$ zum kanonischen Erzeuger $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$. Unser Schmelzfunktor liefert mithin, um nicht zu sagen beinhaltet, was wir in unserer Formelsammlung für das Kreuzprodukt der Homologie die Assoziativität, Eins, Antikommutativität und Natürlichkeit genannt hatten. Das wird im folgenden ausgeführt.

4.1.10 (**Natürlichkeit des Kreuzprodukts**). Gegeben zwei stetige Abbildungen $f : X \to X'$ und $g : Y \to Y'$ haben wir für beliebige $c \in \mathrm{H}_p X$ und $d \in \mathrm{H}_q Y$ in $\mathrm{H}_{p+q}(X' \times Y')$ die Gleichheit

$$(f_* c) \times (g_* d) = (f \times g)_*(c \times d)$$

Das folgt auch ohne alle Verschmelzung aus der Natürlichkeit der Eilenberg-Zilber-Abbildung. In der Sprache der Verschmelzungen entsteht diese Identität durch das Anwenden des Schmelzfunktors der Homologie auf das kommutative Diagramm der Familienkategorie

$$\begin{array}{ccc} X \curlyvee Y & \xrightarrow{\mathrm{u}} & X \times Y \\ \downarrow {\scriptstyle f \curlyvee g} & & \downarrow {\scriptstyle f \times g} \\ X' \curlyvee Y' & \xrightarrow{\mathrm{u}} & X' \times Y' \end{array}$$

mit den universellen Zweiverschmelzungen in den Horizontalen, genauer durch das Einsetzen von Elementen oben links und das Verfolgen ihrer Bilder unter beiden Verknüpfungen nach unten rechts.

4.1.11 (**Einheit des Kreuzprodukts**). Für $\delta \in \mathrm{H}_0(\mathrm{top})$ den kanonischen Erzeuger der Homologie eines Punktes und X ein beliebiger Raum und $q \in \mathbb{N}$ und

$c \in \mathrm{H}_q(X)$ gelten unter Unterdrückung der Notation für die von den offensichtlichen Homöomorphismen $\mathrm{pr}_1 : X \times \mathrm{top} \stackrel{\sim}{\to} X$ und $\mathrm{pr}_2 : \mathrm{top} \times X \stackrel{\sim}{\to} X$ auf der Homologie induzierten Isomorphismen die Gleichheiten

$$\delta \times c = c = c \times \delta$$

Sie entstehen durch das Anwenden des Schmelzfunktors der Homologie auf das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id} \curlyvee \mathrm{n}"] \arrow[d, "\mathrm{n} \curlyvee \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & X \curlyvee \mathrm{top} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
\mathrm{top} \curlyvee X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

der Familienkategorie mit $\mathrm{n} : \curlyvee \to \mathrm{top}$ der universellen Leerverschmelzung, genauer durch das Einsetzen von Elementen oben links und Verfolgen ihrer Bilder unter den Verknüpfungen nach unten rechts.

4.1.12 (**Assoziativität des Kreuzprodukts**). Gegeben topologische Räume X, Y, Z und zugehörige Homologieklassen a, b, c gilt in der Homologie von $X \times Y \times Z$ unter Unterdrückung der Notation für die von den natürlichen Identifikationen $(X \times Y) \times Z \stackrel{\sim}{\to} X \times Y \times Z \stackrel{\sim}{\to} X \times (Y \times Z)$ auf der Homologie induzierten Isomorphismen die Identität

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Sie entsteht durch das Anwenden des Schmelzfunktors der Homologie auf das kommutative Diagramm der Familienkategorie

$$\begin{tikzcd}
X \curlyvee Y \curlyvee Z \arrow[r] \arrow[d] & X \curlyvee (Y \times Z) \arrow[d] \\
(X \times Y) \curlyvee Z \arrow[r] & X \times Y \times Z
\end{tikzcd}$$

und das Einsetzen von Elementen oben links und das Verfolgen ihrer Bilder unter den Verknüpfungen nach unten rechts.

4.1.13 (**Graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts**). Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\tau : X \times Y \stackrel{\sim}{\to} Y \times X$ die Vertauschung $(x, y) \mapsto (y, x)$. Für beliebige homogene Homologieklassen $c \in \mathrm{H}X$ und $d \in \mathrm{H}Y$ gilt in $\mathrm{H}(Y \times X)$ bei kommutativem Koeffizientenring R die Identität

$$\tau_*(c \times d) = (-1)^{|c||d|} d \times c$$

Sie bringt zum Ausdruck, daß eine Zweiverschmelzung in sgAb eben eine Vorschrift ist, die jeder Anordnung der Faktoren eine bilineare Abbildung zuordnet derart, daß gewisse Vorzeichenregeln erfüllt sind, und daß wir das Kreuzprodukt mit Bezug auf die Schreibreihenfolge im kartesischen Produkt erklärt hatten.

4.1.14 (**Künnethformel mit Körperkoeffizienten**). Die Homologie von X mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe M kann in unserer neuen Sprache durch die Formel $\mathrm{H}(X; M) = \mathcal{H}(\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} M)$ ausgedrückt werden. Für Koeffizienten in einem Körper k ist der Schmelzfunktor der Homologie sogar verträglich mit universellen Verschmelzungen als die Komposition

$$\mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{Hot} \to \mathrm{Hot}_k \xrightarrow{\approx} \mathrm{sgMod}_k$$

von Schmelzfunktoren, die jeweils verträglich sind mit universellen Verschmelzungen nach 4.1.4, 2.3.6 und 2.4.20. Diese Aussage beinhaltet unsere Künnethformel mit Körperkoeffizienten $\mathrm{H}(X; k) \otimes_k \mathrm{H}(Y; k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}(X \times Y; k)$.

Vorschau 4.1.15. Wir konstruieren in **??** sogar einen monotonen Schmelzfunktor von monotonen Schmelzkategorien

$$\mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top})^{\mathrm{mon}} \to \mathrm{Ket}^{\mathrm{mon}}$$

vermittels der offensichtlichen Verallgemeinerung der üblichen expliziten Eilenberg-Zilber-Abbildung auf endlich viele Faktoren mit der Eigenschaft, daß er den von unserem Schmelzfunktor $\mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{Hot}$ aus 4.1.4 induzierten monotonen Schmelzfunktor liftet. Es ist jedoch nicht möglich, unseren ursprünglichen Schmelzfunktor $\mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{Hot}$ aus 4.1.4 zu einem Schmelzfunktor $\mathrm{S} : \mathrm{kart}(\mathrm{Top}) \to \mathrm{Ket}$ zu liften. Dem steht die Existenz nichttrivialer sogenannter „Massey-Produkte“ entgegen, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Übungen

Übung 4.1.16. Wir erklären die **Trennkategorie der Raumpaare** $\mathrm{Top}^{\subset}$ durch die Vorschrift, daß eine Trennung $(X, U) \to (Y_1, V_1) \curlywedge \ldots \curlywedge (Y_r, V_r)$ ein Tupel von stetigen Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ ist mit $U \subset f_1^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f_r^{-1}(V_r)$. Von (X, U) geht mithin genau eine Leertrennung aus im Fall $U = \emptyset$ und keine Leertrennung sonst, denn die Vereinigung über eine leere Mengenfamilie ist die leere Menge. Universell sind die Trennungen

$$(Y_1 \times \ldots \times Y_r, U) \to (Y_1, V_1) \curlywedge \ldots \curlywedge (Y_r, V_r)$$

mit $U := \mathrm{pr}_1^{-1} V_1 \cup \ldots \cup \mathrm{pr}_r^{-1} V_r$ der Menge aller Punkte des Produkts, bei denen mindestens eine Koordinate zum entsprechenden V_i gehört. Speziell ist die einzige Leertrennung $(\mathrm{top}, \emptyset) \to \curlywedge$ universell und im Fall $(Y_1, V_1) = (Y_2, V_2) = ([0, 1], \{0, 1\})$ geht die universelle Zweitrennung aus von $([0, 1]^2, U)$ mit U der Vereinigung der Randkanten des Einheitsquadrats. Unsere universellen Trennungen sind offensichtlich sogar stabil universell, unsere Trennkategorie $\mathrm{Top}^{\subset}$ ist also eine Trennschmelzkategorie mit Verschmelzungen $(X_1, U_1) \curlyvee \ldots \curlyvee (X_r, U_r) \to$

(Y, V) allen stetigen Abbildungen $X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt $(x_1, \ldots, x_r)$ in V landet, bei dem mindestens eine der Koordinaten x_i zur entsprechenden Teilmenge U_i gehört. Wir nennen sie die **Trennschmelzkategorie der Raumpaare**

$$\mathrm{Top}^{\subset}$$

Ein Leerverschmelzung $\curlyvee \to (Y, V)$ in $\mathrm{Top}^{\subset}$ ist per definitionem ein Morphismus $(\mathrm{top}, \emptyset) \to (Y, V)$ alias ein Punkt von Y. Man zeige, daß der Schmelzfunktor der singulären Ketten einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{S} : \mathrm{Top}^{\subset} \to \mathrm{Hot}$$

induziert mit $(X, U) \mapsto \mathrm{S}(X, U)$. Durch Nachschalten von $\mathcal{H}$ erhalten wir einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{H} : \mathrm{Top}^{\subset} \to \mathrm{sgAb}$$

mit $(X, U) \mapsto \mathrm{H}(X, U)$, der viele Eigenschaften des Kreuzprodukts der relativen Homologie zusammenfaßt. Unser Schmelzfunktor S ist sogar verträglich mit universellen Verschmelzungen, wenn wir ihn auf die Schmelzkategorie $\mathrm{Top}^{\Subset}$ der Raumpaare (X, U) mit offener Teilmenge $U \Subset X$ einschränken. Insbesondere erhalten wir so einen Trennschmelzfunktor

$$\mathrm{S} : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{Hot}$$

In einer anderen Richtung zeigen unsere Argumente auch, daß jede stabil universelle Verschmelzung von Raumpaaren unter S stabil universell in Hot bleibt, wenn bei nur einem der Ausgangs-Raumpaare die ausgezeichnete Teilmenge nicht leer ist.

Übung 4.1.17 (**Topologische Orientierungsmenge als Schmelzfunktor**). Wir erhalten einen Schmelzfunktor

$$\mathrm{or}^{\mathrm{top}} : (\curlyvee \mathrm{Modf}_{\mathbb{R}})^{\times} \to \mathrm{Par}$$

vom banalen Schmelzgruppoid der endlichdimensionalen reellen Vektorräume in unsere erweiterten Paritäten aus 2.1.9 durch die Vorschrift, daß wir jedem reellen Vektorraum V endlicher Dimension d die Parität seiner Dimension zusammen mit der Menge der beiden Erzeuger von $\mathrm{H}_d(V, V \backslash 0)$ zuordnen und jeder Verschmelzung $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \xrightarrow{\sim} W$ diejenige Verschmelzung von erweiterten Zahlen, die durch die vom Kreuzprodukt auf der relativen Homologie induzierte Abbildung gegeben wird. Zwischen diesem Schmelzfunktor und dem Schmelzfunktor

$$\mathrm{or} = \mathrm{or}^{\mathrm{alg}} : (\curlyvee \mathrm{Modf}_{\mathbb{R}})^{\times} \to \mathrm{Par}$$

der algebraischen Orientierungsmenge aus 2.1.10 gibt es genau zwei Isotransformationen. Wir zeichnen eine von ihnen als unsere **Standardtransformation**

$$\mathrm{std} : \mathrm{or}^{\mathrm{alg}} \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{or}^{\mathrm{top}}$$

dadurch aus, daß darunter die Standardorientierung von $\mathbb{R}$ demjenigen Erzeuger $\tau \in \mathrm{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash 0)$ entspricht, der durch die Klasse des relativen Einszykels $[-1, 1]$ gegeben wird, also durch die affine Abbildung $\Delta_1 \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{e}_0 \mapsto -1$ und $\mathrm{e}_1 \mapsto 1$. Das bedeutet, daß die algebraische Standardorientierung auf $\mathbb{R}^n$ für alle n unter unserer ausgezeichneten Isotransformation dem Erzeuger $\tau^{\times n}$ von $\mathrm{H}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash 0)$ entspricht.

Übung 4.1.18. Gegeben orientierte reelle Vektorräume $U \subset V$ endlicher Dimension liefert 2.1.18 eine ausgezeichnete Orientierung auf dem Quotienten V/U und vermittels des von der Projektion induzierten Isomorphismus

$$\mathrm{H}_d(V, V\backslash U) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{H}_d(V/U, (V/U)\backslash 0)$$

einen ausgezeichneten Erzeuger der linken Seite für $d = \dim_{\mathbb{R}}(V/U)$. Er stimmt im Fall $\mathbb{R}^m \times 0^d \subset \mathbb{R}^n$ mit den jeweiligen Standardorientierungen überein mit $1^{\times m} \times \tau^{\times d}$ für $1 \in \mathrm{H}_0(\mathbb{R}, \emptyset)$ der natürliche Erzeuger und $\tau \in \mathrm{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash 0)$ wie in 4.1.17.

Übung 4.1.19 (**Formeln für mengenwertige Schmelzfunktoren**). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit je einem ausgezeichneten Produkt $X \times Y$ für jedes Paar (X, Y) von Objekten und ausgezeichnetem finalen Objekt fin. Jeder Schmelzfunktor

$$S : \mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathrm{kart}(\mathrm{Ens})$$

liefert einen gewöhnlichen Funktor $M : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$, den wir auf Morphismen $M(f) = f_*$ notieren werden, sowie Abbildungen $M(X) \times M(Y) \to M(X \times Y)$, $(a, b) \mapsto a \boxtimes b$ und ein ausgezeichnetes Element $\delta \in M(\mathrm{fin})$ derart, daß für dieses Datum $(M, \boxtimes, \delta)$ die folgenden Verträglichkeiten gelten:

Natürlichkeit: Gegeben Morphismen $f : X \to Z$ und $g : Y \to W$ in $\mathcal{C}$ haben wir für beliebige $a \in M(X)$ und $b \in M(Y)$ in $M(Z \times W)$ die Gleichheit

$$(f_*a) \boxtimes (g_*b) = (f \times g)_*(a \boxtimes b)$$

Eins: Gegeben $X \in \mathcal{C}$ und $a \in M(X)$ und gilt

$$(\mathrm{pr}_X)_*(a \boxtimes \delta) = a$$

Assoziativität: Gegeben Objekte $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ und dazu jeweils Elemente a, b, c von $M(X), M(Y), M(Z)$ sowie $\mathrm{ass} : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ der offensichtliche Isomorphismus gilt

$$\mathrm{ass}_*((a \boxtimes b) \boxtimes c) = a \boxtimes (b \boxtimes c)$$

Kommutativität: Gegeben $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ der Vertauschungsmorphismus und $a \in M(X)$ sowie $b \in M(Y)$ gilt

$$\tau_*(a \boxtimes b) = b \boxtimes a$$

Sei nun $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit je einem ausgezeichneten Produkt $X \times Y$ für jedes Paar (X, Y) von Objekten und einem ausgezeichneten finalen Objekt fin. Man zeige, daß umgekehrt jedes Datum $(M, \boxtimes, \delta)$ wie oben von einem wohlbestimmten Schmelzfunktor $S : \mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathrm{kart}(\mathrm{Ens})$ herkommt. In der Praxis verwenden wir für S und M für gewöhnlich dieselbe Bezeichnung. Analoges gilt für Schmelzfunktoren $\mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathrm{sgAb}$ und ist die Bedeutung unserer Formelsammlung für das Kreuzprodukt der Homologie.

Übung 4.1.20 (**Formeln für allgemeinere Schmelzfunktoren**). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit je einem ausgezeichneten Produkt $X \times Y$ für jedes Paar (X, Y) von Objekten und ausgezeichnetem finalen Objekt fin. Analoges zu 4.1.19 gilt für Schmelzfunktoren $\mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathcal{S}$ in allgemeine Schmelzkategorien $\mathcal{S}$ mit einem ausgezeichneten treuen Schmelzfunktor $v : \mathcal{S} \to \mathrm{kEns}$. Sie entsprechen Tupeln $(M, \boxtimes, \delta)$ mit $M : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ einem Funktor der zugrundeliegenden einfachen Kategorien, Zweiverschmelzungen $M(X) \curlyvee M(Y) \to M(X \times Y)$ und einer Leerverschmelzung $\delta : \curlyvee \to M(\mathrm{fin})$ derart, daß die obigen Verträglichkeiten für vM gelten. Für einen Schmelzfunktor $\mathrm{kart}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ab}$ etwa muß man nur zusätzlich fordern, daß M ein Funktor $M : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ ist und $\boxtimes$ für alle X, Y eine bilineare Abbildung $M(X) \times M(Y) \to M(X \times Y)$. Das ist die Bedeutung der Formeln für verschiedene Arten von Maßen.

Übung 4.1.21 (**Formeln für allgemeinere Schmelzfunktoren, Variante**). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit je einem ausgezeichneten Produkt $X \times Y$ für jedes Paar (X, Y) von Objekten und ausgezeichnetem finalen Objekt fin.

4.2 Kohomologie als Trennfunktor

4.2.1. Man erinnere aus 1.5.25 den Trennfunktor $\mathrm{Fun} : \curlywedge\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{ot}}$ der Funktionenräume. Im folgenden erweitern wir ihn zu einem Trennfunktor $\curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$ von der banalen Trennkategorie der topologischen Räume in die Opponierte der Schmelzkategorie der supergraduierten abelschen Gruppen. Im diskreten Fall haben wir bereits in 1.5.31 diskutiert, wie man den Trennfunktor der

Funktionenräume durch Dualisieren aus dem Trennschmelzfunktor der Räume von kompakt getragenen Maßen erhalten kann. Dort war das eher ein Umweg zum Ausprobieren der Konzepte. Hier wird es ein Zugang zur Kohomologie, der es mir besonders gut erlaubt, meine Anschauung für Homologie auf die Kohomologie zu übertragen.

4.2.2 (**Trennfunktor der singulären Koketten**). Verknüpfen wir den Trennschmelzfunktor der singulären Ketten $\mathrm{S} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$ aus 4.1.4 mit dem Dualisieren $\mathrm{Hot}^{\mathrm{t}} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$, so erhalten wir einen Trennfunktor

$$\mathrm{S}^* : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$$

von der banalen Trennkategorie der topologischen Räume in die Opponierte der Schmelzkategorie der Homotopiekomplexe abelscher Gruppen. Wir nennen diesen Trennfunktor den **Trennfunktor der singulären Koketten** und verwenden im folgenden die abkürzende Notation $\mathrm{S}^*X = \mathrm{S}^\vee X := (\mathrm{S}X)^\vee$. Per definitionem ordnet unser Trennfunktor einer Trennung $X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ in $\curlywedge\mathrm{Top}$ alias einem Tupel stetiger Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ als Trennung in $\mathrm{Hot}^{\mathrm{opp}}$ alias Verschmelzung in Hot die Komposition

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}^\vee Y_1 \times \ldots \times \mathrm{S}^\vee Y_r & & & & \mathrm{S}^\vee X \\
\downarrow & & & & \uparrow \\
\mathrm{S}^\vee Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}^\vee Y_r & \to & (\mathrm{S}Y_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}Y_r)^\vee & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{S}(Y_1 \times \ldots \times Y_r)^\vee
\end{array}$$

zu mit einem dualisierten Eilenberg-Zilber-Isomorphismus als drittem Morphismus. Nach 1.5.23 macht unser Trennfunktor darüber hinaus eine universelle Trennung in eine Kleinfamilie $Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ topologischer Räume zu einer universellen Trennung in $\mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$, wenn die $\mathrm{S}Y_i \in \mathrm{Hot}$ mit höchstens einer Ausnahme freie Homologiegruppen von endlichem Rang haben, denn dann liefern die üblichen Argumente Homotopieäquivalenzen dieser Komplexe mit ihrer Homologie und folglich ist in unserem Diagramm auch der erste Morphismus der unteren Horizontale eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere macht unser Trennfunktor die universelle Leertrennung $\mathrm{top} \to \curlywedge$ zu einer universellen Leertrennung $\mathrm{S}^*(\mathrm{top}) \to \curlywedge$ und induziert mithin einen Isomorphismus $\mathrm{S}^*(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[0]$. Dasselbe gilt mit Koeffizienten in einem beliebigen Kring k und wir erhalten auch in dieser Allgemeinheit einen Trennfunktor

$$\mathrm{S}_k^* : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}_k^{\mathrm{ot}}$$

Auch er macht eine universelle Trennung in eine Kleinfamilie $Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ topologischer Räume zu einer universellen Trennung, wenn die $\mathrm{H}_n(Y_i; k)$ für alle i mit höchstens einer Ausnahme endlich erzeugt und frei oder allgemeiner endlich erzeugt und projektiv sind. Die universelle Leertrennung induziert insbesondere einen Isomorphismus $\mathrm{S}_k^*(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} k[0]$ von Homotopiekomplexen.

4.2.3 (**Singuläre Kohomologie als Trennfunktor**). Schalten wir hinter unseren Trennfunktor der singulären Koketten $\mathrm{S}^* : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$ aus 4.2.2 noch den Opponierten des Schmelzfunktors der totalen Homologie $\mathcal{H} : \mathrm{Hot} \to \mathrm{sgAb}$ alias den Trennfunktor $\mathcal{H}^{\mathrm{opp}}$ dahinter, so erhalten wir einen Trennfunktor

$$\mathrm{H}^* = \mathrm{H}^*_{\mathrm{sing}} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$$

Wir nennen ihn die **Kohomologie** oder ausführlicher **singuläre Kohomologie**. Noch genauer setzen wir $\mathrm{H}^q X := \mathcal{H}^q(\mathrm{S}^* X)$ und nennen diese abelsche Gruppe die **q-te Kohomologiegruppe von** X. Die von der universellen Zweitrennung $X \times Y \to X \curlywedge Y$ induzierte Zweiverschmelzung ist das Kreuzprodukt der Kohomologie. Auch der Trennfunktor der Kohomologie macht universelle Trennungen zu universellen Trennungen, wenn die $\mathrm{H}_n(Y_i; k)$ für alle i mit höchstens einer Ausnahme endlich erzeugt und frei oder allgemeiner endlich erzeugt und projektiv sind, macht insbesondere die universelle Leertrennung $\mathrm{top} \to \curlywedge$ zu einer universellen Leertrennung und induziert so einen Isomorphismus $\mathrm{H}^*(\mathrm{top}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[0]$. Das Urbild von $1 \in \mathbb{Z}$ nennen wir den **kanonischen Erzeuger** $1 \in \mathrm{H}^0(\mathrm{top})$. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ bezeichnen wir mit $f^* : \mathrm{H}^q Y \to \mathrm{H}^q X$ die induzierte Abbildung auf der Kohomologie. Sie heißt das **Zurückholen**. Analoges gilt für Kohomologie $\mathrm{H}^q(X; k) := \mathcal{H}^q\, \mathrm{S}^*(X; k)$ mit Koeffizienten in einem beliebigen Kring k.

4.2.4 (**Singuläre Kohomologie mit Körperkoeffizienten**). Ich erinnere daran, daß nach 2.4.20 im Fall eines Körpers k die totale Kohomologie eine Äquivalenz von Schmelzkategorien $\mathcal{H} : \mathrm{Hot}_k \xrightarrow{\approx} \mathrm{sgMod}_k$ liefert. Wir erhalten so für jeden Komplex $S \in \mathrm{Ket}_k$ von k-Vektorräumen einen natürlichen Isomorphismus $\mathcal{H}^q(S^\vee) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{H}^{-q} S)^\vee$ zwischen der Kohomologie des dualen Komplexes und dem Dualen der Kohomologie. Das bedeutet insbesondere natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{H}^q(X; k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X; k)^*$$

zwischen der Kohomologie und dem Dualraum der Homologie. Ich kann mir die höheren Kohomologiegruppen ab $q \geq 2$ nur vorstellen als den Dualraum in diesem Sinne der für mich vergleichsweise anschaulichen Homologiegruppen.

4.2.5 (**Künnethformel**). Für Körperkoeffizienten finden wir, daß der Trennfunktor der Kohomologie $\mathrm{H}^*(\ ; k) : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{sgMod}_k^{\mathrm{ot}}$ universelle Trennungen zu universellen Trennungen macht, wann immer die Komplexe der singulären Ketten mit Koeffizienten in k aller Zielräume bis auf höchstens eine Ausnahme nur endlichdimensionale Homologievektorräume haben. Insbesondere erhalten wir so, wann immer alle $\mathrm{H}^m(X; k)$ oder alle $\mathrm{H}^n(Y; k)$ endlichdimensionale k-Vektorräume sind, einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{H}^*(X; k) \otimes_k \mathrm{H}^*(Y; k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(X \times Y; k)$$

4.2.6. Die banale Struktur auf einem topologischen Raum $X \in \mathrm{Top}$ als Koabmonoid von $\curlywedge\mathrm{Top}$ im Sinne von 2.2.10 induziert durch Anwenden des Trennfunktors der Kohomologie 4.2.3 auf seiner Kohomologie H^*X eine Struktur als Koabmonoid von $\mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$ alias eine Struktur als Abmonoid von sgAb alias eine Struktur als superkommutativer graduierter Ring. Dieser Ring H^*X heißt der **Kohomologiering von** X. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Homomorphismus von graduierten Ringen $f^* : \mathrm{H}^*Y \to \mathrm{H}^*X$ in die Gegenrichtung, den **Rückzug**. Die Multiplikation des Kohomologierings wird oft

$$\cup$$

notiert und das **cup-Produkt** genannt. Wir werden den Kohomologiering im folgenden noch genauer studieren und auch explizitere Beschreibungen dafür herleiten. Zur Übung dürfen Sie zeigen, daß im Fall des einpunktigen Raums der kanonische Erzeuger die Eins des Kohomologierings ist.

4.2.7 (**Trennfunktor der Kohomologie und cup-Produkt**). Aus den Definitionen folgt unmittelbar, daß eine Trennung $(f_1, \ldots, f_r) : X \to Y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge Y_r$ in der banalen Trennkategorie der topologischen Räume unter dem Trennfunktor der Kohomologie auf diejenige Trennung von $\mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$ abgebildet wird, die derjenigen Verschmelzung ihrer Kohomologien $\mathrm{H}^*Y_1 \curlyvee \ldots \curlyvee \mathrm{H}^*Y_r \to \mathrm{H}^*X$ entspricht, die ein Tupel $(c_1, \ldots, c_r)$ von Kohomologieklassen auf das cup-Produkt $f_1^*c_1 \cup \ldots \cup f_r^*c_r$ ihrer jeweiligen Rückzüge in H^*X wirft.

4.2.8 (**Kronecker-Paarung**). Wir erinnern aus 1.3.15 im Kontext einer allgemeinen Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom das Auswerten $D^\vee \curlyvee D \to \mathbb{I}$. Wenden wir es in der Schmelzkategorie Hot auf den Komplex $\mathrm{S}X$ der singulären Ketten eines topologischen Raums X an, so erhalten wir eine Zweiverschmelzung $\mathrm{S}^*X \curlyvee \mathrm{S}X \to \mathbb{Z}[0]$ in Hot. Diese hinwiederum liefert unter dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}$ der Homologie bilineare Paarungen, die **Kronecker-Paarungen**

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{H}^qX \times \mathrm{H}_qX \to \mathbb{Z}$$

Beispiel 4.2.9 (**Homologie als Modul über dem Kohomologiering**). Jeder topologische Raum X ist in banaler Weise ein Koabmonoid in $\curlywedge\mathrm{Top}$ und liefert unter dem Trennschmelzfunktor $\mathrm{S} : \curlywedge\mathrm{Top} \to \mathrm{Hot}$ der singulären Ketten ein Koabmonoid $R := \mathrm{S}X \in \mathrm{Hot}$. Durch Dualisieren entsteht daraus wie besprochen ein Abmonoid $\mathrm{S}^*X \in \mathrm{Hot}$ und unser abstraktes cap-Produkt aus 3.1.22 spezialisiert zu einer Operation

$$\mathrm{S}^*X \curlyvee \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X$$

in Hot. Diese Operation in Hot liefert unter dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}$ eine Operation des Kohomologierings auf der Homologie und das ist das cap-Produkt. Die Adjunktionsformel für das topologische cap-Produkt entsteht ebenso aus unserer abstrakten Adjunktionsformel 3.1.22 durch Anwenden von $\mathcal{H}$. Die Projektionsformel für das topologische cap-Produkt schließlich entsteht aus der abstrakten Projektionsformel 3.1.22, indem wir eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ als Morphismus der zugehörigen banalen Koabmonoide in $\curlywedge\mathrm{Top}$ auffassen, darauf den Trennschmelzfunktor S der singulären Ketten anwenden, die abstrakte Projektionsformel zu diesem Koabmonoidmorphismus in Hot hinschreiben und mit dem Schmelzfunktor $\mathcal{H}$ zur Homologie übergehen.

Übungen

Übung 4.2.10 (**Relative Kohomologie als Trennfunktor**). Wir erinnern den Trennschmelzfunktor $\mathrm{S} : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{Hot}$ der relativen singulären Ketten in Bezug auf eine offene Teilmenge aus 4.1.16. Er ist insbesondere verträglich mit universellen Trennungen. Halten wir den Trennfunktor des Dualisierens dahinter, erhalten wir einen weiteren Trennfunktor, den Trennfunktor

$$\mathrm{S}^* : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{Hot}^{\mathrm{ot}}$$

der relativen singulären Koketten in Bezug auf eine offene Teilmenge. Halten wir zusätzlich die Homologie $\mathcal{H}^{\mathrm{opp}}$ dahinter, so erhalten wir wieder einen Trennfunktor, den Trennfunktor

$$\mathrm{H}^* : \mathrm{Top}^{\Subset} \to \mathrm{sgAb}^{\mathrm{ot}}$$

der Kohomologie relativ zu einer offenen Teilmenge. Per definitionem ist eine Trennung $(Z, W) \to (X, U) \curlywedge (Y, V)$ in $\mathrm{Top}^{\Subset}$ ein Paar von stetigen Abbildungen $f : Z \to X$ und $g : Z \to Y$ mit $(f, g)(W) \subset (X \times V) \cup (U \times Y)$. Unser Trennfunktor beinhaltet für $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ offene Teilmengen topologischer Räume eine ausgezeichnete Abbildung

$$\mathrm{H}^*(X, U) \otimes \mathrm{H}^*(Y, V) \to \mathrm{H}^*(X \times Y, (X \times V) \cup (U \times Y))$$

und für $U, V \Subset X$ offene Teilmengen ein- und desselben Raums durch Nachschalten des Rückzugs längs der Diagonale eine natürliche Abbildung $\mathrm{H}^*(X, U) \otimes \mathrm{H}^*(X, V) \to \mathrm{H}^*(X, U \cup V)$. Noch spezieller beinhaltet er für $U \Subset X$ eine Struktur auf $\mathrm{H}^*(X, U)$ als $\mathrm{H}^*(X)$-Modul. Auf jedem Paar $(X, U) \in \mathrm{Top}^{\Subset}$ haben wir zwar eine banale Komultiplikation und diese ist auch assoziativ und kommutativ, aber eine Koeins besitzt dieses Magma nur im Fall $U = \emptyset$.

Ergänzende Übung 4.2.11. In 4.1.16 hatten wir gesehen, daß sogar für ein beliebiges Raumpaar (X, A) die Verschmelzung auf den singulären Ketten Homotopieäquivalenzen $\mathrm{S}X^{\otimes r} \otimes \mathrm{S}(X, A) \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{S}(X^{\times(r+1)}, X^{\times r} \times A)$ induziert. Man zeige, daß die durch Dualisieren und Rückzug längs der Diagonale gegebene Abbildung $\mathrm{S}^*X \otimes \mathrm{S}^*(X, A) \to \mathrm{S}^*(X, A)$ unter Übergang zur Kohomologie für ein beliebiges Raumpaar die relative Kohomologie $\mathrm{H}^*(X, A)$ zu einem Modul über dem Kohomologiering H^*X macht.

5 Danksagung

Die Bedeutung der Schmelzkategorien habe ich von Fritz Hörmann gelernt. Für Schmelzkategorien war auch Leinster [Lei04] hilfreich, bei der Diskussion von Starrheit Deligne [Del90]. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich . . .

A Kategorien und Funktoren

Hier werden Konventionen zu Kategorien und Funktoren niedergelegt.

A.1 Kategorien

Definition A.1.1. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ ist ein Datum bestehend aus

a. einer Menge $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ von **Objekten**;

b. einer Menge $\mathcal{C}(X,Y)$ von **Morphismen** für je zwei Objekte $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$;

c. einer Abbildung $\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z),\ (f,g) \mapsto g \circ f$ für je drei Objekte $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, genannt die **Verknüpfung** von Morphismen,

derart, daß folgende Axiome erfüllt sind:

1. Die Morphismenmengen sind paarweise disjunkt;

2. Die Verknüpfung ist **assoziativ**, es gilt also $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für Morphismen f, g und h, wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind;

3. Für jedes Objekt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X,X)$, die **Identität auf** X, so daß gilt $\mathrm{id}_X \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_X = g$ für Morphismen f und g wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind. Die üblichen Argumente zeigen, daß es für jedes X höchstens einen derartigen Morphismus geben kann, womit auch die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt wäre.

A.1.2. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ Objekte. Statt $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ sagen wir auch, f sei ein **Morphismus von** X **nach** Y und schreiben kurz

$$f : X \to Y$$

Statt id_X schreiben wir oft nur id. Statt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ schreiben wir oft kürzer $X \in \mathcal{C}$.

Beispiel A.1.3 (**Kategorie der Mengen**). Als erstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie $\mathcal{C} := \mathrm{Ens}$ aller Mengen eingeführt. Das ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, da die „Gesamtheit aller Mengen“ nicht als Menge angesehen werden darf. Um diese Untiefen der Logik zu umschiffen, betrachten wir feiner ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ alias eine Menge $\mathfrak{U}$ von Mengen und erklären die Kategorie $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ aller Mengen $X \in \mathfrak{U}$. Ihre Objekte sind beliebige Mengen $X \in \mathfrak{U}$, in Formeln

$$\operatorname{Ob}(\mathfrak{U}\mathrm{Ens}) := \mathfrak{U}$$

Für je zwei Objekte alias je zwei Mengen $X, Y \in \mathfrak{U}$ erklären wir die Morphismenmenge als die Menge aller Abbildungen von X nach Y, in Formeln

$$\mathfrak{U}\mathrm{Ens}(X, Y) := \mathrm{Ens}(X, Y)$$

Die Verknüpfung ordnet jedem Paar (f, g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu. Daß diese Daten unsere Axiome erfüllen, scheint mir offensichtlich. Unser $\mathrm{id}_X \in \mathfrak{U}\mathrm{Ens}(X, X)$ ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_X(x) = x \; \forall x \in X$.

Vorschau A.1.4 (**Mengen, Klassen, Universen**). In vielen Quellen umschifft man die in A.1.3 angesprochenen Untiefen der Logik, indem man nicht fordert, daß die Objekte einer Kategorie eine Menge bilden, sondern stattdessen, daß sie eine „Klasse" bilden sollen. Das hat den Vorteil, daß man die Kategorie aller Mengen bilden kann. Es hat den Nachteil, daß man den Begriff einer Klasse einführen muß und erklären muß, wie man damit umgeht. Statt mit „Klassen" werden wir zu gegebener Zeit mit „Universen" arbeiten, die in A.9.3 eingeführt werden. Für unsere Bedürfnisse läuft das auf dasselbe hinaus und erspart uns die Vertreibung aus dem Paradies der Mengenlehre. Ich werde aber oft kategorientheoretische Sprache auch in einem weiteren Sinn als „Metasprache" verwenden und dabei derartige Feinheiten kurzerhand ignorieren.

Beispiel A.1.5. Zu jedem Monoid M können wir die Kategorie $[M]$ mit einem einzigen Objekt $*$ bilden, deren Morphismen die Elemente von besagtem Monoid sind mit der Verknüpfung in unserem Monoid als Verknüpfung von Morphismen. Wir nennen sie die **Ein-Objekt-Kategorie** unseres Monoids. Umgekehrt ist für jedes Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge $\mathcal{C}(X, X)$ mit der von der Kategorienstruktur herkommenden Verknüpfung ein Monoid. In diesem Sinne ist also eine Kategorie mit einem einzigen Objekt nichts anderes als ein Monoid. Das Monoid der Morphismen von einem Objekt X zu sich selber in einer Kategorie $\mathcal{C}$ nennen wir das Monoid der **Endomorphismen** von X und kürzen es in Zukunft oft ab mit

$$\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, X)$$

Beispiel A.1.6. Sei K ein Körper oder allgemeiner ein Ring. Wir erklären die **Matrixkategorie** $\mathrm{Mat} = \mathrm{Mat}_K = \mathrm{Mat}(K)$ über K durch die Vorschriften

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Mat}_K) := \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \mathrm{Mat}_K(m, n) := \mathrm{Mat}(n \times m; K)$$

mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung.

Beispiel A.1.7 (**Teilgeordnete Menge als Kategorie**). Jede teilgeordnete Menge $(A, \leq)$ kann als Kategorie aufgefaßt werden wie folgt: Objekte sind die Elemente von A; Morphismen gibt es jeweils einen von einem Element zu jedem kleineren und zu sich selber; und die Verknüpfung von Morphismen ist die einzig Mögliche.

Kategorie	Morphismen	Kürzel
{Mengen}	alle Abbildungen	Ens
{teilgeordnete Mengen}	monoton wachsende Abbildungen	Ord
{Monoide}	Morphismen von Monoiden	Mon
{Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Grp
{abelsche Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Ab
{topologische Räume}	stetige Abbildungen	Top
{bepunktete Mengen}	Abbildungen, die den Basispunkt erhalten	Ens^*
{bepunktete Räume}	stetige Abbildungen, die den Basispunkt erhalten	Top^*
{K-Vektorräume}	K-lineare Abbildungen	K-Mod, Mod_K
{Affine Räume über K}	affine Abbildungen	K-Aff, Aff_K
{nicht unitäre Ringe}	Rng-Homomorphismen	Rng
{Ringe}	Ringhomomorphismen	Ring
{kommutative Ringe}	Ringhomomorphismen	Kring
{K-Algebren}	K-Algebren-Homomorphismen	K-Alg, Alg_K
{K-Ringalgebren}	K-Ringalgebren-Homomorphismen	K-Ralg, Ralg_K
{K-Kringalgebren}	K-Kringalgebren-Homomorphismen	K-Kralg, Kralg_K

Hier einige Beispiele von Kategorien. Als Verknüpfung von Morphismen ist für die Kategorien dieser Liste stets die Komposition von Abbildungen gemeint. Um logische Abstürze zu vermeiden, müssen wir uns genauer stets ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ dazudenken, aus dem die zugrundeliegende Menge der jeweiligen Struktur kommen muß und das wir in der Notation meist unterschlagen. Wenn wir es doch notieren wollen, schreiben wir

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$$

und dergleichen. Wir denken uns das Mengensystem $\mathfrak{U}$ meist als ziemlich riesig und fordern zumindest implizit für gewöhnlich, daß es unter dem Bilden von Teilmengen stabil sein möge und die reellen Zahlen enthält. Etwas genauer werden wir zu gegebener Zeit fordern, daß es ein „Universum“ sein soll.

Beispiel A.1.8 (**Kategorie der Vektorräume**). Als nächstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_K$ aller Vektorräume über einem Körper K eingeführt. Die Notation Mod_K für Vektorräume über K steht dabei für ihre alternative Bezeichnung als K**-Moduln**. Wieder gerät man dabei in Untiefen der Logik. Um diese zu umschiffen betrachten wir wieder ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ und erklären dazu eine Kategorie

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$$

Als Objekte dieser Kategorie nehmen wir alle K-Vektorräume, deren Grundmenge zu unserem Mengensystem $\mathfrak{U}$ gehört. Für je zwei Vektorräume $V, W \in \mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$ erklären wir die Morphismenmenge als die Menge aller linearen Abbildungen, in Formeln

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K(V, W) := \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

Die Verknüpfung ordnet wieder jedem Paar (f, g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu. Die Axiome sind offensichtlich erfüllt.

A.1.9 (**Verwendung des Symbols** Hom). Das Symbol „Hom“ für Mengen von Morphismen versuche ich nach Möglichkeit zu vermeiden: Ich will es reservieren für die sogenannten „internen Hom-Räume“. Darunter versteht man Vorschriften, die in sehr speziellen Situationen zwei Objekten einer Kategorie ein Drittes zuordnen, im Fall der Vektorräume etwa die Morphismenmenge mit ihrer natürlichen Vektorraumstruktur. Wenn die Morphismenmenge als Menge gemeint ist, sollte ich $\mathrm{Mod}_K(V, W)$ schreiben, aber das halte ich im Fall der Vektorräume nicht durch. Das Kürzel „Mod“ mit etwelchen oberen und unteren Indizes wird stets für Kategorien von abelschen Gruppen mit Zusatzstrukturen stehen, meist Operationen von Ringen oder Gruppen. Gehen diese Zusatzstrukturen aus dem Kontext hervor, so lasse ich die entsprechenden Indizes auch manchmal weg. Für abelsche Gruppen ohne Zusatzstrukturen benutze ich stets das Kürzel „Ab“.

Definition A.1.10.

1. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie heißt ein **Isomorphismus** oder **Iso** und als Adjektiv **iso**, wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Wir notieren Isomorphismen oft $f : X \xrightarrow{\sim} Y$;
2. Zwei Objekte X und Y einer Kategorie heißen **isomorph**, wenn es einen Iso $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt. Man schreibt dann auch kurz $X \cong Y$.

Beispiele A.1.11. Isomorphismen in der Kategorie der Mengen nennt man Bijektionen, Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume Homöomorphismen, Isomorphismen in der Kategorie der Vektorräume Vektorraumisomorphismen.

A.1.12. Kategorien, in denen alle Morphismen Isomorphismen sind, heißen **Gruppoide**. Kategorien, in denen es außer den Identitäten keine Morphismen gibt, heißen **diskret**. Natürlich ist jede diskrete Kategorie ein Gruppoid.

A.1.13. Unter einer **Unterkategorie** einer Kategorie versteht man ein Paar bestehend aus einer Teilmenge der Objektmenge nebst Teilmengen der Morphismenmengen für je zwei Objekte unserer Teilmenge der Objektmenge derart, daß die offensichtlichen Bedingungen erfüllt sind. Eine Unterkategorie heißt **voll**, wenn die fraglichen Teilmengen der Morphismenmengen jeweils aus allen Morphismen in der ursprünglichen Kategorie bestehen.

A.1.14. Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ erklären wir eine Unterkategorie, die **Isomorphismenkategorie** $\mathcal{C}^\times$ von $\mathcal{C}$, durch die Vorschrift, daß sie dieselben Objekte haben soll, aber nur die Isomorphismen von $\mathcal{C}$ als Morphismen. Die Menge aller Isomorphismen von einem Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ in ein Objekt Y derselben Kategorie notieren wir folgerichtig $\mathcal{C}^\times(X,Y)$. Die Isomorphismen von einem Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ auf sich selber heißen die **Automorphismen** von X. Sie bilden stets eine Gruppe, die **Automorphismengruppe** $\mathcal{C}^\times(X)$ von X. Für die Automorphismengruppe $\mathrm{Mod}_k^\times(V)$ eines k-Vektorraums V hatten wir die Notation $\mathrm{GL}(V)$ vereinbart, für die Automorphismengruppe $\mathrm{Ens}^\times(X)$ einer Menge X die Bezeichnung als „Gruppe der Permutationen von X“.

Definition A.1.15. Ein Objekt F einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **final**, wenn es für alle $X \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus von X nach F gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(X,F)| = 1 \quad \forall X \in \mathcal{C}$$

Definition A.1.16. Ein Objekt K einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **kofinal** oder gleichbedeutend **initial**, wenn es für alle $Y \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus von K nach Y gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(K,Y)| = 1 \quad \forall Y \in \mathcal{C}$$

Beispiele A.1.17 (**Finale und kofinale Objekte in Kategorien von Mengen**). Ist $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem, das nicht nur aus der leeren Menge besteht, so sind die finalen Objekte von $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ genau die einpunktigen Mengen aus $\mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem, das nicht nur aus einelementigen Mengen besteht, so ist die leere Menge ist das einzige kofinale Objekt von $\mathfrak{U}\mathrm{Ens}$, wenn sie denn zu unserem Mengensystem $\mathfrak{U}$ dazugehört.

A.1.18 (**Weitere Notationen**). Zwischen je zwei finalen beziehungsweise kofinalen Objekten gibt es offensichtlich genau einen Isomorphismus. Wir erlauben uns deshalb, etwas lax von *dem* finalen beziehungsweise *dem* kofinalen Objekt zu reden, und bezeichnen „das“ finale Objekt mit $\mathrm{pt} = \mathrm{pt}(\mathcal{C})$ für „Punkt“ oder $\mathrm{fin}(\mathcal{C})$ und Morphismen dahin mit fin für „final“. Meist verwenden wir als Bezeichnung des finalen Objekts die kleingeschriebene Bezeichnung der Kategorie, etwa top für den einelementigen topologischen Raum oder ens für die einelementige Menge. Morphismen vom finalen Objekt zu einem beliebigen Objekt notieren wir gerne em wie „embedding" mit einem Index, der angibt, welcher Morphismus genau gemeint ist. Gegeben eine Menge X und ein Element $x \in X$ meint etwa $\mathrm{em}_x : \mathrm{ens} \to X$ die Einbettung der einelementigen Menge mit Bild x. Wir bezeichnen mit $\mathrm{ini} = \mathrm{ini}(\mathcal{C})$ das initiale Objekt einer Kategorie $\mathcal{C}$, wenn es denn ein solches gibt.

Übungen

Übung A.1.19. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er ein **Rechtsinverses** und ein **Linksinverses** besitzt, wenn es also Morphismen $g, h \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $h \circ f = \mathrm{id}_X$, und unter diesen Voraussetzungen gilt bereits $g = h$. Wir nennen diesen Morphismus dann den **inversen Morphismus zu** f und notieren ihn f^{-1}. Derartige Rechtsinverse bezeichnet man auch oft als **Schnitt** oder **Spaltung**. Allgemeiner nennt man jeden Morphismus **rechtsspaltend**, der ein Linksinverses besitzt, und jeden Morphismus **linksspaltend**, der ein Rechtsinverses besitzt

Übung A.1.20. Kann ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie sowohl durch Vorschalten eines Morphismus $g \in \mathcal{C}(W, X)$ als auch durch Nachschalten eines Morphismus $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$ zu einem Isomorphismus gemacht werden, so muß er bereits selbst ein Isomorphismus gewesen sein.

Übung A.1.21. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f : X \to Y$ ein Morphismus. Man zeige, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Vorschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Z)$ induziert. Man zeige dual, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Nachschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Z, Y)$ induziert. Allgemeinere Aussagen in dieser Richtung macht das sogenannte Yoneda-Lemma A.8.2.

Übung A.1.22. Man finde finale und kofinale Objekte in den Kategorien der Gruppen, Ringe, topologischen Räume und Vektorräume aus einem vorgegebenen Mengensystem $\mathfrak{U}$.

A.2 Funktoren

Definition A.2.1. Ein **Funktor** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer Kategorie $\mathcal{A}$ in eine Kategorie $\mathcal{B}$ ist ein Datum bestehend aus

a. einer Abbildung $F = F_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, $X \mapsto FX$;

b. einer Abbildung $F = F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \to \mathcal{B}(FX, FY)$, $f \mapsto Ff$ für je zwei Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, derart, daß gilt:

1. $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$ für beliebige verknüpfbare Morphismen f und g aus der Kategorie $\mathcal{A}$;

2. $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$ für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$.

Ich nenne in diesem Zusammenhang $\mathcal{A}$ die **Ausgangskategorie** und $\mathcal{B}$ die **Zielkategorie** des Funktors F.

Beispiel A.2.2. Gegeben ein Körper K erhalten wir einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_K & \to & \mathrm{Mod}_K \\ & & \\ n & \mapsto & K^n \\ A \downarrow & \mapsto & (A\circ) \downarrow \\ m & \mapsto & K^m \end{array}$$

von der Matrixkategorie A.1.6 über K in die Kategorie der K-Vektorräume, indem wir wie angedeutet jedem Objekt n der Matrixkategorie den Vektorraum K^n zuordnen und jeder Matrix die durch diese Matrix gegebene lineare Abbildung. Wir nennen ihn den **Realisierungsfunktor**.

A.2.3. Man gibt bei einem Funktor F meist nur die Abbildung $X \mapsto FX$ auf den Objekten an in der Hoffnung, daß vom Leser erraten werden kann, welche Abbildung $f \mapsto Ff$ auf den Morphismen gemeint ist.

A.2.4. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ haben wir den **Identitätsfunktor** $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ von besagter Kategorie zu sich selber. Sind $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren, so ist auch $G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein Funktor.

Lemma A.2.5 (**Funktoren erhalten Isomorphie**). *Ein Funktor bildet stets Isomorphismen auf Isomorphismen ab. Insbesondere haben isomorphe Objekte unter einem Funktor stets isomorphe Bilder.*

Beweis. Sei F unser Funktor. Mithilfe unserer Bedingung $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ schließen wir:

$$\begin{array}{rl} f \text{ ist Isomorphismus} & \Rightarrow \text{ Es gibt } g \text{ mit } f \circ g = \mathrm{id} \text{ und } g \circ f = \mathrm{id} \\ & \Rightarrow (Ff) \circ (Fg) = \mathrm{id} \text{ und } (Fg) \circ (Ff) = \mathrm{id} \\ & \Rightarrow Ff \text{ ist Isomorphismus.} \end{array}$$

□

Beispiel A.2.6. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ bildet man die **opponierte Kategorie** $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$. Man setzt dazu

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} := \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$$

und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ als die vertauschte Verknüpfung. Wir notieren einen Morphismus f als f°, wenn er in der opponierten Kategorie aufgefaßt werden soll, und haben also in Formeln $g^\circ \circ f^\circ := (f \circ g)^\circ$.

Definition A.2.7. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{\mathrm{opp}}$ heißt auch ein **kontravarianter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$**.

A.2.8. Ausgeschrieben besteht ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ demnach aus einer Abbildung $F : \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ sowie für je zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{A}$ einer Abbildung $F : \mathcal{A}(X, Y) \to \mathcal{B}(FY, FX)$ derart, daß gilt $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ und $F(f \circ g) = Fg \circ Ff$ für alle verknüpfbaren Morphismen f, g.

Beispiel A.2.9. Gegeben Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bildet man ihr **Produkt**, eine weitere Kategorie $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, wie folgt: Man setzt $\mathrm{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) := \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \times \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, erklärt Morphismen in der Produktkategorie als Paare von Morphismen in den Ausgangskategorien, und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in der Produktkategorie in der offensichtlichen Weise.

Beispiel A.2.10. Das „Vergessen der Gruppenstruktur“ ist ein Funktor $v : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Mengen. Es gibt noch viele weitere derartige **Vergiß-Funktoren**.

Beispiel A.2.11. Jeder Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ liefert in offensichtlicher Weise einen Funktor $F^{\mathrm{opp}} : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{opp}}$ zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien. Oft notiert man ihn auch einfach F.

Definition A.2.12. Eine **Orientierung** eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem angeordneten Körper ist eine Vorschrift ε, die jeder angeordneten Basis $\mathcal{A}$ unseres Vektorraums ein Vorzeichen $\varepsilon(\mathcal{A}) \in \{+1, -1\}$ zuordnet und zwar so, daß für je zwei angeordnete Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ die Determinante der Basiswechselmatrix das Vorzeichen $\varepsilon(\mathcal{A})\varepsilon(\mathcal{B})$ hat, in Formeln

$$\varepsilon(\mathcal{A})\varepsilon(\mathcal{B}) = \mathrm{sign}(\det {}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}})$$

Gegeben ein angeordneter Körper K bezeichnen wir diejenige Orientierung des K^n als die **Standardorientierung**, die der Standardbasis das Vorzeichen $+1$ zuordnet. Unter der **Standardorientierung des Nullraums** verstehen wir diejenige Orientierung, die der einzigen angeordneten Basis $\emptyset$ das Vorzeichen $+1$ zuordnet.

Beispiel A.2.13. Gegeben ein Körper K bezeichne Modf_K mit f für „finitely generated“ die Kategorie der endlich erzeugten K-Vektorräume und $\mathrm{Modf}_K^\times$ die zugehörige Isomorphismenkategorie. Gegeben ein angeordneter Körper K ist das Bilden der Orientierungsmenge ein Funktor

$$\mathrm{or} : \mathrm{Modf}_K^\times \to \mathrm{Ens}^\times$$

Er ordnet jedem endlichdimensionalen K-Vektorraum die zweielementige Menge seiner beiden Orientierungen zu.

Definition A.2.14. 1. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **treu**, wenn er Injektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ auf den Morphismen induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$.

2. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **voll**, wenn er auf den Morphismenmengen Surjektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \twoheadrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$.

3. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **volltreu**, wenn er voll und treu ist, wenn er also er Bijektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FA, FA')$ auf den Morphismenmengen induziert. Ich notiere volltreue Funktoren gerne $\overset{\sim}{\hookrightarrow}$.

4. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **essentiell surjektiv**, wenn er eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert, wenn es also in Formeln für alle $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $FA \cong B$.

5. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn er volltreu und essentiell surjektiv ist. Ich notiere Äquivalenzen von Kategorien $\overset{\approx}{\to}$. Die doppelte Schlange soll andeuten, daß dieser Begriff schwächer ist als der Begriff eines Isomorphismus von Kategorien, wie er im Anschluß eingeführt wird.

6. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt ein **Isomorphismus von Kategorien**, wenn er bijektiv ist auf Objekten und auf Morphismen, wenn er also ein Isomorphismus ist in der Kategorie der Kategorien aus A.2.18. Ich notiere Isomorphismen von Kategorien $\xrightarrow{\sim}$.

Beispiel A.2.15. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien $[\mathcal{C}(X)] \xrightarrow{\sim} \{X\}$ zwischen der Ein-Objekt-Kategorie des Monoids der Endomorphismen von X und der vollen Unterkategorie von $\mathcal{C}$ mit dem einzigen Objekt X, indem wir die Identität auf den Morphismenmengen und die einzig mögliche Abbildung auf den Objektmengen nehmen.

Beispiel A.2.16. Sei K ein Körper. Wir betrachten die Kategorie Modf_K aller endlichdimensionalen K-Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Dann ist unser Realisierungsfunktor $n \mapsto K^n$ aus A.2.2 eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Mat}_K \overset{\approx}{\to} \mathrm{Modf}_K$$

zwischen unserer Matrixkategorie Mat_K und der Kategorie der endlich erzeugten K-Vektorräume, aber unser Funktor ist natürlich kein Isomorphismus von Kategorien.

Ergänzendes Beispiel A.2.17 (**Die Matrixkategorie eines Mengensystems**). Gegeben ein Körper K und ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ bilden wir die **abstrakte Matrixkategorie** $\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K$ wie folgt: Objekte sind alle Mengen aus $\mathfrak{U}$, in Formeln

$\mathrm{Ob}(\mathfrak{U}\mathrm{Mat}) := \mathfrak{U}$. Die Morphismenmengen erklären wir durch die Vorschrift

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K(X,Y) := \left\{ T : X \times Y \to K \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Für jedes } x \in X \text{ gilt} \\ T(x,y) = 0 \text{ für fast alle } y \in Y \end{array} \right\}$$

Zumindest im Fall, daß $\mathfrak{U}$ keine überabzählbaren Mengen enthält, mag man sich als Elemente dieser Morphismenmengen Matrizen mit möglicherweise unendlich vielen Zeilen und Spalten aber höchstens endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen in jeder Spalte denken. Die Verknüpfungen werden in der hoffentlich offensichtlichen Weise durch Summation über gleiche Indizes erklärt. Wir erhalten dann einen Funktor $\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K \to \mathrm{Mod}_K$, der auf Objekten durch die Konstruktion freier Vektorräume $X \mapsto K\langle X\rangle$ über den entsprechenden Mengen gegeben wird und auf Morphismen leicht vom Leser erraten werden kann. Ist $\mathfrak{U}$ ein „Universum“ im Sinne von A.9.3, das den Körper K enthält, so erweist sich dieser Funktor sogar als eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathfrak{U}\mathrm{Mat}_K \stackrel{\approx}{\to} \mathfrak{U}\mathrm{Mod}_K$$

A.2.18. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ verstehen wir unter einer **$\mathfrak{U}$-Kategorie** eine Kategorie $\mathcal{C}$, bei der für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die Morphismenmenge zu unserem Mengensystem $\mathfrak{U}$ gehört, in Formeln $\mathcal{C}(X,Y) \in \mathfrak{U}$, und bei der die Menge der Objekte unserer Kategorie eine Teilmenge von $\mathfrak{U}$ ist, in Formeln $\mathcal{C} \subset \mathfrak{U}$. Die letzte Forderung ist nicht wesentlich, da wir ja andernfalls schlicht unsere Objekte mit ihren Identitätsmorphismen identifizieren können. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ bildet die Gesamtheit aller $\mathfrak{U}$-Kategorien selbst eine Kategorie

$$\mathfrak{U}\mathrm{Cat}$$

mit den $\mathfrak{U}$-Kategorien als Objekten und Funktoren als Morphismen. Die Menge aller Funktoren von einer Kategorie $\mathcal{A}$ in eine Kategorie $\mathcal{B}$ notieren wir dementsprechend

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})$$

Formal verwenden wir die Notation $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} := \bigsqcup_{X,Y} \mathcal{C}(X,Y)$ für die Menge aller Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$, und die Menge der Funktoren ist für uns eine Teilmenge $\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \subset \mathrm{Ens}(\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}, \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}) \times \mathrm{Ens}(\mathrm{Mor}\,\mathcal{A}, \mathrm{Mor}\,\mathcal{B})$. In A.4.5 werden wir eine Kategorie erklären, deren Objekte gerade die Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ alias die Elemente von $\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ sind, aber alles zu seiner Zeit.

Beispiel A.2.19. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ und eine $\mathfrak{U}$-Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist die Zuordnung $Y \mapsto \mathcal{C}(X,Y)$ ein Funktor $\mathcal{C}(X,\ ) : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ und die Zuordnung $Y \mapsto \mathcal{C}(Y,X)$ ein Funktor $\mathcal{C}(\ ,X) : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}^{\mathrm{opp}}$.

Beispiel A.2.20 (**Funktoren zwischen Einobjektkategorien**). Gegeben Monoide G, H und die zugehörigen Einobjekttategorien $[G], [H]$ nach A.1.5 erhalten wir in der offensichtlichen Weise eine Bijektion zwischen der Menge aller Monoidhomomorphismen $G \to H$ und der Menge aller Funktoren $[G] \to [H]$, in Formeln also eine Bijektion

$$\mathrm{Mon}(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}([G], [H])$$

Übungen

Übung A.2.21. Hat ein Funktor sogar die Eigenschaft, daß alle Morphismen, die er auf Isomorphismen abbildet, bereits zuvor Isomorphismen gewesen sein müssen, so nennt man ihn **konservativ**. Man gebe Beispiele für konservative und nichtkonservative Funktoren.

Übung A.2.22. Jede Äquivalenz von Kategorien induziert eine Bijektion zwischen den zugehörigen Isomorphieklassen von Objekten. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen k-Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, alias durch Elemente von $\mathbb{N}$, alias durch Isomorphieklassen der Matrixkategorie.

Übung A.2.23 (**Zwei aus Drei für Äquivalenzen von Kategorien**). Seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Sind zwei der drei Funktoren F, G, GF Äquivalenzen von Kategorien, so auch der Dritte.

Übung A.2.24. Bilden wir zu einer Kategorie eine volle Unterkategorie, indem wir aus jeder Isomorphieklasse von Objekten ein Objekt willkürlich auswählen, so ist der Einbettungsfunktor eine Äquivalenz von Kategorien.

Übung A.2.25. Sind in einer Kategorie $\mathcal{C}$ je zwei Objekte isomorph, so ist für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$[\mathcal{C}(X)] \xrightarrow{\approx} \mathcal{C}$$

zwischen der Ein-Objekt-Kategorie des Endomorphismenmonoids $\mathcal{C}(X)$ von X und unserer Kategorie.

Übung A.2.26. Gegeben Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ liefert jedes Paar (F, G) von Funktoren $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ einen wohlbestimmten Funktor in die Produktkategorie $(F, G) : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

A.3 Objekte mit Zusatzstrukturen*

A.3.1. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ erklären wir eine $(\mathcal{S}, v)$**-Struktur auf** X als eine Äquivalenzklasse von Paaren (S, φ) bestehend aus einem Objekt $S \in \mathcal{S}$ und einem Isomorphismus $\varphi : v(S) \xrightarrow{\sim} X$ mit der Maßgabe, daß (S, φ) äquivalent ist zu (T, ψ), wenn es einen Isomorphismus $i : S \xrightarrow{\sim} T$ gibt mit $\varphi = \psi \circ v(i)$.

Beispiel A.3.2. Wir erhalten für jede Menge X eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Verknüpfungen auf X, die X zu einer Gruppe machen, und der Menge aller (Grp, v)-Strukturen auf X für $v : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ der Vergißfunktor.

Beispiel A.3.3. Wir erhalten für jede Menge X eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Topologien auf X und der Menge aller (Top, v)-Strukturen auf X für $v : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$ der Vergißfunktor.

Beispiel A.3.4. Sei k ein Körper. Wir erhalten für jede abelsche Gruppe X eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Abbildungen $k \times X \to X$, die als Multiplikation mit Skalaren die Gruppe X zu einem k-Vektorraum machen, und der Menge aller (Mod_k, v)-Strukturen auf X für $v : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Ab}$ der Vergißfunktor.

A.3.5. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ und ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ von Objekten mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur sagen wir, unser Morphismus sei **verträglich mit der $(\mathcal{S}, v)$-Struktur**, wenn für beliebige Wahlen von Repräsentanten (S, φ) und (T, ψ) der jeweiligen $(\mathcal{S}, v)$-Strukturen auf X und Y unser f das Bild unter v eines Morphismus $F : S \to T$ ist, genauer $f = \psi \circ v(F) \circ \varphi^{-1}$. Offensichtlich ist die Identität auf einem Objekt mit jeder $(\mathcal{S}, v)$-Struktur auf besagtem Objekt verträglich und die Verknüpfung von verträglichen Morphismen ist wieder verträglich. Die so erklärte Kategorie der **Objekte von $\mathcal{C}$ mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur** notieren wir

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$$

Wir erhalten eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{S} \stackrel{\approx}{\to} \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ durch die Vorschrift $S \mapsto (S, \mathrm{id}_{v(S)})$.

Beispiel A.3.6. Die Kategorie $\mathrm{Ens}_{(\mathrm{Grp},v)}$ aller Mengen mit (Grp, v)-Struktur ist isomorph zur Kategorie aller Gruppen vermittels des Funktors, der jeder Menge mit (Grp, v)-Struktur dieselbe Menge mit ihrer durch A.3.2 gegebenen Verknüpfung zuordnet.

A.3.7. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ nennen wir einen Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ **initial**, wenn für alle $W \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ gilt

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(W, X) = \{e \in \mathcal{C}(W, X) \mid fe \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(W, Y)\}$$

Initiale Morphismen heißen oft **Einbettungen**. Es ist klar, daß jede Verknüpfung initialer Morphismen initial ist und daß eine Verknüpfung von zwei Morphismen in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ nur dann initial sein kann, wenn der erste initial ist. Einen Morphismus in $\mathcal{S}$ nennen wir **v-initial**, wenn er unter v einen $(\mathcal{S}, v)$-initialen Morphismus induziert.

Beispiel A.3.8. Im Fall der Mengen mit (Grp, v)-Struktur sind genau die injektiven mit der Struktur verträglichen Abbildungen initial. Ist in der Tat $f : X \hookrightarrow Y$

ein Gruppenhomomorphismus und W eine Gruppe, so ist eine Abbildung $e : W \to X$ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $fe : W \to Y$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

A.3.9. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ und ein Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ und eine $(\mathcal{S}, v)$-Struktur auf Y gibt es höchstens eine $(\mathcal{S}, v)$-Struktur auf X derart, daß f initial wird. In der Tat, repräsentieren (S, φ) und (T, ψ) zwei derartige Strukturen, so muß die Identität auf X verträglich sein sowohl als Morphismus $(X, S, \varphi) \to (X, T, \psi)$ als auch als Morphismus in die Gegenrichtung und daraus folgt leicht, daß diese beiden Daten dieselbe Struktur repräsentieren. Wir nennen sie die **induzierte Struktur** oder die **initiale Struktur** auf X.

Beispiel A.3.10. Im Fall der Mengen mit (Top, v)-Struktur alias topologischen Räume heißt unsere induzierte Struktur die Initialtopologie und im Fall der Einbettung einer Teilmenge auch die induzierte Topologie oder Spurtopologie oder Teilraumtopologie. In dieser Situation gibt es stets eine initiale Struktur.

Beispiele A.3.11. Im Fall des Vergessens der Verknüpfung $v : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ existiert eine induzierte Struktur genau für diejenigen Abbildungen, die injektiv sind und deren Bild eine Untergruppe ist. Die induzierte Struktur ist dann die induzierte Gruppenstruktur. Eine Teilmenge $X \subset Y$ einer Menge Y mit $(\mathcal{S}, v)$-Struktur nennt man ganz allgemein ein **$(\mathcal{S}, v)$-Unterobjekt**, wenn sie eine induzierte Struktur besitzt. Beispiele sind Untergruppen, Untervektorräume, affine Teilräume, Unterringe und so weiter.

A.3.12. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ ist auch $v^{\mathrm{opp}} : \mathcal{S}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ ein treuer Funktor und wir erhalten in der offensichtlichen Weise einen Isomorphismus von Kategorien

$$(\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}_{(\mathcal{S}^{\mathrm{opp}},v^{\mathrm{opp}})}$$

Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ mit f° initial in Bezug auf die jeweiligen $(\mathcal{S}^{\mathrm{opp}}, v^{\mathrm{opp}})$-Strukturen nennen wir **final**. Ausgeschrieben bedeutet das, daß für jedes weitere Objekt $Z \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ gilt

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(Y, Z) = \{g \in \mathcal{C}(Y, Z) \mid gf \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}(X, Z)\}$$

Finale Morphismen heißen oft **Quotienten**. Es ist klar, daß jede Verknüpfung finaler Morphismen final ist und daß eine Verknüpfung von zwei Morphismen in $\mathcal{C}_{(\mathcal{S},v)}$ nur dann final sein kann, wenn der zweite final ist. Einen Morphismus in $\mathcal{S}$ nennen wir **v-final**, wenn er unter v einen $(\mathcal{S}, v)$-finalen Morphismus induziert.

A.3.13. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ und ein Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ und eine $(\mathcal{S}, v)$-Struktur auf X gibt es höchstens eine $(\mathcal{S}, v)$-Struktur auf Y derart, daß f final wird. Wir nennen sie die **koinduzierte Struktur** oder die **finale Struktur** auf Y.

Beispiel A.3.14. Im Fall der Mengen mit (Top, v)-Struktur alias topologischen Räume heißt unsere koinduzierte Struktur die Finaltopologie und insbesondere im Fall von surjektiven Abbildungen auch die Quotiententopologie.

Beispiele A.3.15. Im Fall des Vergessens der Verknüpfung $v : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ existiert eine koinduzierte Struktur genau für diejenigen Abbildungen von einer Gruppe in eine Menge, die faktorisieren in einen surjektiven Gruppenhomomorphismus gefolgt von einer Bijektion, und die koinduzierte Struktur ist die von einer und jeder derartigen Bijektion induzierte Gruppenstruktur.

Übungen

Übung A.3.16. Gegeben ein treuer Funktor $v : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$, der zusätzlich konservativ ist, kann die Identität auf einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ nicht für zwei unterschiedliche $(\mathcal{S}, v)$-Strukturen (S, φ) und (T, ψ) auf X ein Morphismus $(X, S, \varphi) \to (X, T, \psi)$ sein.

A.4 Transformationen

Definition A.4.1. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren. Eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ ist eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathcal{A}$ einen Morphismus $\tau_X \in \mathcal{B}(FX, GX)$ zuordnet derart, daß für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$ das Rechteck

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "\tau_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{B}$ kommutiert. In Formeln meint das die Gleichheit $(Gf) \circ \tau_X = \tau_Y \circ (Ff)$ in der Morphismenmenge $\mathcal{B}(FX, GY)$. Ob ein Doppelpfeil eine Transformation von Funktoren oder vielmehr eine Implikation meint, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sind alle τ_X Isomorphismen, so nenne ich τ eine **Isotransformation** und notiere sie $\overset{\sim}{\Rightarrow}$, aber diese Terminologie ist nicht gebräuchlich. In der Literatur spricht man eher von einem **Isomorphismus von Funktoren** oder auch von einer **Äquivalenz von Funktoren**. Gibt es zwischen zwei Funktoren eine Isotransformation, so heißen sie **isomorph**.

A.4.2 (**Diskussion der Doppelpfeil-Notation**). Ich finde die Notation von Transformationen durch Doppelpfeile didaktisch hilfreich in derselben Weise wie die Notation $\vec{v}$ für Vektoren am Anfang der linearen Algebra. Andererseits werden wir sie nicht konsequent durchhalten können und das ist auch nicht sinnvoll, denn wie in A.4.5 erklärt können auch die Transformationen als Morphismen einer Kategorie aufgefaßt werden, der „Funktorkategorie“.

A.4.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere Transformationen meist „natürliche Transformationen“. Diese Terminologie schien mir jedoch unnötig umständlich und entspricht auch nicht meinem Sprachempfinden: Ich möchte zum Beispiel unter der „natürlichen“ Transformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie aller $\mathbb{R}$-Vektorräume in den Bidualraumfunktor gerne die in A.4.4 gegebene Transformation verstehen, die zwar keineswegs die einzige Transformation zwischen diesen Funktoren ist, aber vielleicht schon die „natürlichste“.

Beispiel A.4.4 (**Evaluation als Transformation**). Gegeben ein Körper K bezeichne $B : \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$ den **Bidualraumfunktor**, der jedem K-Vektorraum V seinen Bidualraum $BV := V^{\top\top}$ zuordnet. So bilden die Evaluationsabbildungen $\mathrm{ev}_V : V \to V^{\top\top}, v \mapsto (f \mapsto f(v))$ in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$\mathrm{ev} : \mathrm{Id} \Rightarrow B$$

und eine Isotransformation zwischen den Restriktionen dieser Funktoren auf die Kategorie der endlichdimensionalen K-Vektorräume. Oft formalisiert man Situationen dieser Art nicht bis ins Letzte aus und spricht von **kanonischen Abbildungen** beziehungsweise **kanonischen Isomorphismen**, wenn bei formalerer Betrachtung Abbildungen $\tau_X : FX \to GX$ oder Isomorphismen $\tau_X : FX \xrightarrow{\sim} GX$ gemeint sind, die in ihrer Gesamtheit eine Transformation beziehungsweise Isotransformation von Funktoren $\tau : F \stackrel{\sim}{\Rightarrow} G$ bilden.

A.4.5 (**Kategorien von Funktoren**). Sind $\tau : F \Rightarrow G$ und $\sigma : G \Rightarrow H$ Transformationen, so ist auch $\sigma \circ \tau : F \Rightarrow H$ gegeben durch $(\sigma \circ \tau)_X := \sigma_X \circ \tau_X$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie von F eine Transformation. Des weiteren gibt es für jeden Funktor F die **identische Transformation** $\mathrm{id} = \mathrm{id}_F$ von besagtem Funktor zu sich selber, gegeben durch $(\mathrm{id}_F)_X := \mathrm{id}_{FX}$ für jedes Objekt X der Ausgangskategorie unseres Funktors. Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien, so bilden die Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sogar selbst eine Kategorie, mit Funktoren als Objekten und Transformationen als Morphismen und der eben erklärten Verknüpfung von Transformationen als Verknüpfung von Morphismen. Ich verwende für diese **Funktorkategorie** verschiedene Notationen. Erst einmal dieselbe Notation $\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wie für die Menge der Objekte, dann die Notation $\underline{\mathrm{Cat}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wenn es darum geht, die Zusatzstruktur als Kategorie zu betonen, weiter die Notation $(\mathcal{A} \Rrightarrow \mathcal{B})$, weil es sich um einen Spezialfall von „internem Hom“ erweisen wird, und als besonders kurze Form die exponentielle Notation $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, so daß etwa für Funktoren $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ die Menge der Transformationen

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(F, G) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F, G)$$

notiert werden kann. Wenn die Kategorien selber durch größere Ausdrücke gegeben werden, sind für die Menge der Transformationen auch abkürzende Notationen wie etwa $\mathrm{Trans}(F,G)$ sinnvoll und üblich. Unsere Isotransformationen sind genau die Isomorphismen der Funktorkategorie.

Ergänzung A.4.6 (**Exponentialgesetz für Kategorien**). Man zeige, daß man für je drei Kategorien $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ eine Bijektion

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\underline{\mathrm{Cat}}(\mathcal{B},\mathcal{C}))\stackrel{\sim}{\to}\mathrm{Cat}(\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mathcal{C})$$

erhält durch die Vorschrift $F\mapsto\tilde{F}$ mit $\tilde{F}(A,B)=(F(A))(B)$ auf Objekten und eine vom Leser zu spezifizierende Vorschrift auf Morphismen. Man baut diese auch leicht zu einem Isomorphismus von Kategorien aus, und das folgt alternativ auch aus allgemeinen Aussagen zu „internem Hom", wie sie etwa in 1.4.11 diskutiert werden.

Beispiel A.4.7. Seien $F,G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ Funktoren und $\tau:F\Rightarrow G$ eine Transformation. Gegeben ein weiterer Funktor $H:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Transformation $H\tau:HF\Rightarrow HG$. Gegeben ein weiterer Funktor $K:\mathcal{D}\to\mathcal{A}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise ebenso eine Transformation $\tau K:FK\Rightarrow GK$. Offensichtlich liefern diese Konstruktionen ihrerseits Funktoren $\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})\to\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ und $\mathrm{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})\to\mathrm{Cat}(\mathcal{D},\mathcal{B})$ zwischen den entsprechenden Funktorkategorien, die wir als das **Nachschalten von** H beziehungsweise **Vorschalten von** K bezeichnen.

A.4.8 (**Schwierigkeiten der Notation**). Die Notationen τK und $H\tau$ führen leicht zu Verwirrung, sobald nicht aus der Art der Symbole heraus klar ist, welche Symbole Funktoren und welche Transformationen darstellen. Ich kenne keine generelle Lösung für diese Schwierigkeiten der Notation. In diesem Abschnitt habe ich versucht, eine gewisse Übersichtlichkeit dadurch zu erreichen, daß ich systematisch lateinische Großbuchstaben für Funktoren und kleine griechische Buchstaben für Transformationen verwende.

Übungen

Übung A.4.9. Sind zwei Funktoren isomorph und ist der eine eine Äquivalenz von Kategorien, so auch der andere.

Übung A.4.10. Gegeben ein Monoid G heißt eine Abbildung $\phi:X\to Y$ von G-Mengen **äquivariant**, wenn gilt $\phi(gx)=g\phi(x)$ für alle $g\in G$ und $x\in X$. Die G-Mengen mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden dann eine Kategorie, für die ich die beiden Notationen $G\text{-Ens}=\mathrm{Ens}_{G\backslash}$ verwende. Bilden wir zu unserem Monoid G die Ein-Objekt-Kategorie $[G]$, so liefert der hoffentlich offensichtliche Funktor einen Isomorphismus von Kategorien

$$G\text{-Ens}\stackrel{\sim}{\to}\mathrm{Cat}([G],\mathrm{Ens})$$

Übung A.4.11. Man zeige: Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es eine Äquivalenz von Kategorien in die Gegenrichtung $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt nebst einer Isotransformation $\tau : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \stackrel{\sim}{\Rightarrow} GF$. Die Äquivalenz G oder genauer das Paar (G, τ) heißt dann ein **quasiinverser Funktor zu** F. Man zeige weiter: Zu jedem Paar (G, τ) wie eben gibt es genau eine Isotransformation $\eta : FG \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ mit $(\eta F) \circ (F\tau) = \mathrm{id}_F$.

Übung A.4.12. Man zeige: Genau dann ist ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt derart, daß FG isomorph ist zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{B}$ und GF isomorph zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{A}$.

Übung A.4.13. Man zeige: Gegeben eine Äquivalenz von Kategorien $F : \mathcal{A} \stackrel{\approx}{\to} \mathcal{B}$ und ein Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ nebst einer Isotransformation $\tau : FG \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien und (G, τ) quasiinvers zu F.

Übung A.4.14 (**Äquivalenzen von Funktorkategorien**). Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und ist $K : \mathcal{A}' \stackrel{\approx}{\to} \mathcal{A}$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Vorschalten von K eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{Cat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich $H : \mathcal{B} \stackrel{\approx}{\to} \mathcal{B}'$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von H eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

A.5 Köcher

A.5.1. Für den Begriff einer Transformation ist noch größerer Allgemeinheit natürlich und sinnvoll, wie hier kurz skizziert werden soll.

Definition A.5.2. Ein **Köcher** ist ein Datum $\mathcal{Q} = (P, E, a, e)$ bestehend aus zwei Mengen P, E und zwei Abbildungen $a, e : P \to E$. Wir nennen die Elemente von E die **Ecken** oder auch **Punkte** des Köchers und die Elemente von P seine **Pfeile**. Für einen Pfeil $\vec{p} \in P$ nennen wir $a(\vec{p}\,)$ seinen **Anfangspunkt** und $e(\vec{p}\,)$ seinen **Endpunkt**. Ein **Morphismus** F von unserem Köcher in einen weiteren Köcher (P', E', a', e') ist ein Paar bestehend aus einer Abbildung $F : P \to P'$ und einer Abbildung $F : E \to E'$ derart, daß gilt $Fa = a'F$ und $Fe = e'F$. Wir erhalten so die Kategorie der Köcher

$$\mathrm{Car}$$

Ähnlich wie bei Kategorien schreiben wir auch gerne abkürzend $\mathcal{Q}$ für die Eckenmenge eines Köchers $\mathcal{Q} = (P, E, a, e)$ und $\mathcal{Q}(x, y)$ für die Menge der Pfeile mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.

A.5.3. Auf Englisch sagt man **quiver**, auf Französisch **carquois**. Auf Englisch heißen die Ecken **vertices** und die Pfeile **arrows** oder **edges**.

A.5.4. Jede Kategorie liefert einen Köcher, mit den Objekten als Ecken und den Morphismen als Pfeilen. Zu jeder Menge Ω bilden wir den **Ein-Punkt-Köcher** $[\Omega]$, mit nur einem Punkt $*$ und für jedes $\omega \in \Omega$ einem Pfeil von diesem Punkt zu sich selbst. Ein Köcher heißt **endlich**, wenn er nur endlich viele Punkte und Pfeile hat. Manche Autoren nennen einen Köcher auch ein **Diagrammschema**. Ein Köchermorphismus von einem Köcher in eine Kategorie heißt eine **Darstellung unseres Köchers** in besagter Kategorie oder auch eine **Realisierung unseres Diagrammschemas** in besagter Kategorie oder, wenn wir auf das zugrundeliegende Diagrammschema nicht Bezug nehmen wollen, ein **Diagramm** in besagter Kategorie.

Ergänzung A.5.5. Bezeichne $\rightrightarrows$ die Kategorie mit zwei Objekten Pf, Ec und vier Morphismen, von denen Zwei die Identitäten sind und Zwei von Pf nach Ec gehen und „Anfang" und „Ziel" heißen mögen. Dann kann die Kategorie der Köcher verstanden werden als die Funktorkategorie $\mathrm{Cat}(\rightrightarrows, \mathrm{Ens})$.

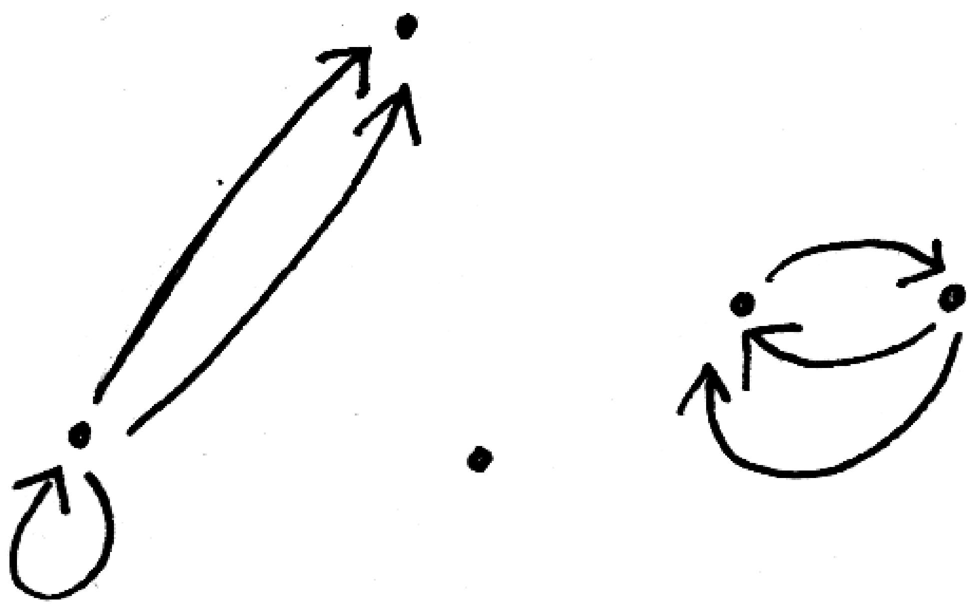
Ergänzung A.5.6. Eine **Verknüpfung auf einem Köcher** $\mathcal{Q}$ ist eine Sammlung von Abbildungen $\mathcal{Q}(x,y) \times \mathcal{Q}(y,z) \to \mathcal{Q}(x,z)$ für alle $x,y,z \in \mathcal{Q}$. Einen Köcher mit Verknüpfung nennen wir auch einen **Magmaoid**. Ein **Morphismus von Magmaoiden** ist ein Köchermorphismus, der mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Eine Kategorie ist in dieser Terminologie Magmaoid, das noch zusätzliche Eigenschaften hat, die man „Assoziativität" und „Existenz von Identitätspfeilen" nennen mag und die wir zur Bedingung **unitärasoziativ** zusammenfassen.

Definition A.5.7. Seien $\mathcal{Q}$ ein Köcher, $\mathcal{B}$ eine Kategorie und $F, G : \mathcal{Q} \to \mathcal{B}$ Köchermorphismen. Eine **Transformation** $\tau : F \Rightarrow G$ ist eine Vorschrift, die jeder Ecke $x \in \mathcal{Q}$ einen Morphismus $\tau_x \in \mathcal{B}(F(x), G(x))$ zuordnet derart, daß für jeden Pfeil $\vec{p} : x \to y$ in unserem Köcher $\mathcal{Q}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\tau_x} & G(x) \\ {\scriptstyle F(\vec{p})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\vec{p})} \\ F(y) & \xrightarrow{\tau_y} & G(y) \end{array}$$

in unserer Kategorie $\mathcal{B}$ kommutiert. Sind alle τ_x Isomorphismen, so heißt τ eine **Isotransformation**. Die Menge aller Transformationen bezeichnen wir mit $\mathrm{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{B})(F, G)$ oder $\mathrm{Trans}_{\mathcal{Q}\to\mathcal{B}}(F, G)$ oder abkürzend mit $\mathrm{Trans}_{\mathcal{Q}}(F, G)$ oder auch nur mit $\mathrm{Trans}(F, G)$.

A.5.8. Wie in A.4.5 die Funktoren bilden für jeden Köcher $\mathcal{Q}$ und jede Kategorie $\mathcal{C}$ die Köchermorphismen $\mathcal{Q} \to \mathcal{C}$ die Objekte einer Kategorie $\mathrm{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$ mit Transformationen als Morphismen.



Veranschaulichung eines endlichen Köchers mit 5 Ecken und 6 Pfeilen.

Übungen

Übung A.5.9. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Köcher und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Kategorien. Ist $K : \mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ ein Isomorphismus von Köchern, so liefert das Vorschalten von K einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathrm{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Car}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich $H : \mathcal{B} \xrightarrow{\approx} \mathcal{B}'$ eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von H eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

Übung A.5.10. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{Q}$ Köcher und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{Q}$ ein Köchermorphismus, der für je zwei Ecken $x, y \in \mathcal{C}$ eine Surjektion $\mathcal{C}(x, y) \twoheadrightarrow \mathcal{Q}(x, y)$ induziert. Gegeben eine Verknüpfung auf $\mathcal{C}$ gibt es höchstens eine Verknüpfung auf $\mathcal{Q}$ derart, daß F ein Morphismus von Magmaoiden wird. Wenn es solch eine Verknüpfung gibt, heißt unser Köchermorphismus **angepaßt an die Verknüpfung** und die fragliche Verknüpfung auf $\mathcal{Q}$ die **auf $\mathcal{Q}$ koinduzierte Verknüpfung**. Ist unser Magmaoid $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so auch der Köcher $\mathcal{Q}$ mit der koinduzierten Verknüpfung.

A.6 Produkte und Koprodukte in Kategorien

Definition A.6.1. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X, Y Objekte von $\mathcal{C}$. Ein **Produkt** von X und Y ist ein Datum (P, p, q) bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p : P \to X$ und $q : P \to Y$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $Z \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $a : Z \to X$, $b : Z \to Y$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $c : Z \to P$ mit $p \circ c = a$ und $q \circ c = b$. Wir notieren diesen Morphismus dann $c = (a, b)$ oder, ganz pedantisch und wenn wir ihn von den Morphismen aus einem Koprodukt absetzen wollen, als Spalte $c = (a, b)^\top$.

Beispiele A.6.2. In der Kategorie der Mengen ist das sogenannte kartesische Produkt $P = X \times Y$ mit p, q den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt von X und Y. Analoges gilt in der Kategorie der Vektorräume, der Gruppen, der Ringe, der Monoide, der abelschen Gruppen, und vielen weiteren Strukturen der Bauart „Menge mit ausgezeichneten Verknüpfungen und speziellen Elementen“.

A.6.3 (**Eindeutigkeit von Produkten**). Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer (P, p, q) und $(\tilde{P}, \tilde{p}, \tilde{q})$ zwei mögliche Produkte der Objekte X und Y, so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $c : \tilde{P} \to P$ mit $p \circ c = \tilde{p}$ und $q \circ c = \tilde{q}$ und ebenso genau ein $d : P \to \tilde{P}$ mit $\tilde{p} \circ d = p$ und $\tilde{q} \circ d = q$. Weiter gibt es auch genau ein $f : P \to P$ mit $p \circ f = p$ und $q \circ f = q$, und da sowohl $f = \mathrm{id}$ als auch $f = c \circ d$

diese Bedingung erfüllen, folgt $c \circ d = \mathrm{id}$. Ebenso erhalten wir $d \circ c = \mathrm{id}$, mithin sind c und d zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$(X \times Y, \mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)$$

oder auch noch ausführlicher $X \times^{\mathcal{C}} Y$. Morphismen in das Produkt schreiben wir auch (a, b). Sind schließlich Morphismen $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ gegeben und existieren die Produkte $X \times Y$ und $X' \times Y'$, so benutzen wir die Abkürzung $(f \circ \mathrm{pr}_X, g \circ \mathrm{pr}_Y) = f \times g$ und nennen diesen Morphismus den **Produktmorphismus**

$$f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$$

Definition A.6.4. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor. Sind in $\mathcal{A}$ Morphismen $p : P \to X$ und $q : P \to Y$ gegeben, so erhalten wir Morphismen $Fp : FP \to FX$ und $Fq : FP \to FY$ in $\mathcal{B}$. Wenn das Produkt $FX \times FY$ existiert, erhalten wir so auch einen Morphismus $(Fp, Fq) : FP \to FX \times FY$. Wenn schließlich auch das Produkt $X \times Y$ existiert, so erhalten wir, indem wir es als unser P nehmen, in unserer ausführlichen Notation einen natürlichen Morphismus

$$F(X \times^{\mathcal{A}} Y) \to FX \times^{\mathcal{B}} FY$$

A.6.5. Der Morphismus von eben muß im allgemeinen kein Isomorphismus sein. Im Fall des Vergißfunktors von Vektorräumen über einem vorgegebenen Körper zu Mengen ist er jedoch stets ein Isomorphismus von Mengen alias eine bijektive Abbildung.

A.6.6. Produkte können auch für allgemeine Familien von Objekten ein- und derselben Kategorie erklärt werden, wie im folgenden ausgeführt werden soll. Wir besprechen dies Konzept zunächst im Fall der Kategorie der Mengen.

A.6.7 (**Produkte von Mengen, Variante**). Man kann auch für eine beliebige Familie von Mengen $(X_i)_{i \in I}$ eine neue Menge bilden als die Menge aller Tupel $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in X_i$ für alle $i \in I$. Diese **Produktmenge** notiert man

$$\prod_{i \in I} X_i$$

und die Projektionsabbildungen werden mit $\mathrm{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ oder ähnlich bezeichnet. Wieder können wir für beliebige Abbildungen $f_i : Z \to X_i$ eine Abbildung $f = (f_i)_{i \in I} : Z \to \prod_{i \in I} X_i$ definieren durch die Vorschrift $f(z) = (f_i(z))_{i \in I}$ und jede Abbildung von einer Menge Z in ein Produkt ist von dieser Form mit $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$. In Formeln ausgedrückt liefert das Nachschalten der Projektionen also für jede Menge Z eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ens}\left(Z, \prod_{i \in I} X_i\right) & \stackrel{\sim}{\to} & \prod_{i \in I} \mathrm{Ens}(Z, X_i) \\ f & \mapsto & (\mathrm{pr}_i \circ f) \end{array}$$

Definition A.6.8. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathcal{C}$. Ein **Produkt** der X_i ist ein Datum $(P,(p_i)_{i\in I})$ bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p_i : P \to X_i$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $Y \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $q_i : Y \to X_i$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $q : Y \to P$ mit $p_i \circ q = q_i \; \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann $q = (q_i)_{i\in I}$ oder ganz pedantisch auch schon mal $q = (q_i)^{\top}_{i\in I}$.

A.6.9 (**Eindeutigkeit von Produkten, Variante**). Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer $(P,(p_i))$ und $(\tilde{P},(\tilde{p}_i))$ zwei mögliche Produkte der Objekte X_i, so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $\tilde{p} : \tilde{P} \to P$ mit $p_i \circ \tilde{p} = \tilde{p}_i$ und ebenso genau ein $p : P \to \tilde{P}$ mit $\tilde{p}_i \circ p = p_i$. Weiter gibt es auch genau ein $f : P \to P$ mit $p_i \circ f = p_i$, und da sowohl $f = \mathrm{id}$ als auch $f = \tilde{p} \circ p$ diese Bedingung erfüllen, folgt $\tilde{p} \circ p = \mathrm{id}$. Ebenso erhalten wir $p \circ \tilde{p} = \mathrm{id}$, mithin sind p und $\tilde{p}$ zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$\left(\prod_{i\in I} X_i, (\mathrm{pr}_i)_{i\in I}\right)$$

oder $\prod^{\mathcal{C}}$, wenn wir auch noch die Kategorie $\mathcal{C}$ spezifizieren wollen, oder im Fall endlicher angeordneter Familien $X_1 \times \ldots \times X_n$ und benutzen für die Projektionen manchmal auch die Notation pr_{X_i}. Morphismen in das Produkt schreiben wir im Fall endlicher angeordneter Familien auch $(q_1, \ldots, q_n)$ oder ganz pedantisch als Spalte $(q_1, \ldots, q_n)^{\top}$.

A.6.10 (**Umindizierung**). Die Frage der Abhängigkeit eines Produkts von der Wahl der Indexmenge ist subtiler als es auf den ersten Blick scheinen mag. Natürlich liefert jede Umindizierung vermittels einer Bijektion zwischen der Indexmenge und einer weiteren Menge einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen den jeweiligen Produkten. Jedoch liefert die Umindizierung vermittels einer Permutation der Indexmenge im allgemeinen nicht die Identität auf dem jeweiligen Produkt.

A.6.11 (**Produkte über leere Familien**). Das Produkt über eine leere Familie von Mengen erklärt man als „die“ einpunktige Menge. Damit wird das Bilden von Produkten von Mengen „assoziativ“ in der Weise, daß wir bei einer Familie $(I_j)_{j\in J}$ von Indexmengen mit disjunkter Vereinigung $I = \bigsqcup_j I_j$ stets eine kanonische Bijektion

$$\prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\sim} \prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in I_j} X_i\right)$$

haben. Das Produkt über eine leere Familie in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ verstehen wir analog als „das“ finale Objekt, da dann die offensichtliche Abbildung auch in diesem Fall Bijektionen $\mathcal{C}(Y, \prod_{i\in I} X_i) \overset{\sim}{\to} \prod_{i\in I} \mathcal{C}(Y, X_i)$ liefert. Wenn wir sagen, eine Kategorie **habe Produkte** oder auch nur **habe endliche Produkte**, so meinen wir stets implizit, daß auch die Existenz eines finalen Objekts mit gefordert sein soll.

A.6.12. Produkte in der opponierten Kategorie heißen „Koprodukte“. Im folgenden schreiben wir das aus.

Definition A.6.13. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$. Ein **Koprodukt** der X_i ist ein Datum $(K, (\mathrm{in}_i)_{i\in I})$ bestehend aus einem Objekt $K \in \mathcal{C}$ und Morphismen $\mathrm{in}_i : X_i \to K$ derart, daß gilt: Ist $Z \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f_i : X_i \to Z$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $f : K \to Z$ mit $f \circ \mathrm{in}_i = f_i \ \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann auch $(f_i)_{i\in I}$ und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann damit ein Morphismus aus einem Koprodukt und wann ein Morphismus in ein Produkt gemeint ist. Wenn es drauf ankommt, mag ein Morphismus in ein Produkt eben als Spalte mit einem hochgestellten $\top$ notiert werden und ein Morphismus aus einem Koprodukt als Zeile. Wir notieren Koprodukte $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ oder ausführlicher $\bigsqcup_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ und bei endlich vielen Faktoren auch $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$. Ein leeres Koprodukt ist dasselbe wie ein initiales Objekt.

Beispiel A.6.14 (**Disjunkte Vereinigungen von Mengen**). Das Koprodukt in der Kategorie der Mengen über eine beliebige Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Mengen heißt ihre **disjunkte Vereinigung**

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i := \bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\})$$

Das Anhängen der Indizes auf der rechten Seite ist hier nur eine Vorsichtsmaßnahme für den Fall, daß unsere Mengen nicht disjunkt gewesen sein sollten. Jede derartige disjunkte Vereinigung ist versehen mit Inklusionsabbildungen $\mathrm{in}_j : X_j \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$. Weiter können wir für beliebige Abbildungen $f_i : X_i \to Z$ in eine Menge Z die Abbildung $f : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to Z$ bilden durch die Vorschrift $f(x) = f_i(x)$ für $x \in X_i$, und jede Abbildung der disjunkten Vereinigung in eine Menge Z ist von dieser Form mit $f_i = f \circ \mathrm{in}_i$. In Formeln ausgedrückt liefert das Vorschalten der Injektionen also für jede Menge Z eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ens}\left(\bigsqcup_{i\in I} X_i, Z\right) & \overset{\sim}{\to} & \prod_{i\in I} \mathrm{Ens}(X_i, Z) \\ f & \mapsto & (f \circ \mathrm{in}_i) \end{array}$$

Die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen $X_1, \ldots, X_n$ notieren wir auch $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$.

A.6.15 (**Notationen für disjunkte Vereinigungen**). Gegeben eine Menge X und dariin eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Teilmengen schreiben wir statt $\bigcup_{i\in I} X_i$ auch $\bigsqcup_{i\in I} X_i$, wenn wir zusätzlich andeuten wollen, daß unsere Teilmengen paarweise disjunkt sind. In der Tat ist die Eigenschaft, paarweise disjunkt zu sein, ja gleichbedeutend dazu, daß die offensichtliche Abbildung $\bigsqcup_{i\in I} X_i \to X$ eine Bijektion $\bigsqcup_{i\in I} X_i \stackrel{\sim}{\to} \bigcup_{i\in I} X_i$ liefert. In derselben Weise verwenden wir bei endlich vielen Teilmengen $X_1, \ldots, X_n$ einer gegebenen Menge die Notation $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$. In der Literatur werden statt $\sqcup$ alternativ auch die Symbole $\dot\cup$ und $\uplus$ verwendet.

A.6.16. Wie in A.6.4 im Fall von zwei Faktoren besprochen erhalten wir für einen Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Objekten von $\mathcal{A}$, wenn Produkte der X_i und der FX_i existieren, einen natürlichen Morphismus

$$F\left(\prod X_i\right) \to \prod FX_i$$

Ist er stets ein Isomorphismus, so sagen wir, der Funktor F sei **verträglich mit beliebigen Produkten**. Gilt das nur für Produkte endlicher Familien, so sagen wir, unser Funktor sei **verträglich mit endlichen Produkten**. Bereits die Verträglichkeit mit endlichen Produkten schließt die Eigenschaft mit ein, daß finale Objekte auf finale Objekte abgebildet werden. Dual erklären wir die Verträglichkeit mit beliebigen beziehungsweise endlichen Koprodukten.

A.7 Algebren

A.7.1. Sei K ein Körper. Ganz allgemein bezeichnet man einen K-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$ als eine K-**Algebra** und versteht unter einem **Algebrenhomomorphismus** in eine weitere K-Algebra eine K-lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Gegeben zwei K-Algebren A, B bezeichnen wir mit $\mathrm{Alg}_K(A, B)$ die Menge der Algebrenhomomorphismen von A nach B.

A.7.2. Ist die Verknüpfung einer Algebra assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Üblich ist in diesem Zusammenhang die Konvention, daß man eine Algebra stets als assoziativ versteht, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht. Gibt es für diese Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation ein Ring ist. Ich schlage deshalb vor, derartige Algebren **Ringalgebren** und im Fall, daß sie auch noch kommutativ sind, **Kringalgebren** zu nennen. Unter einem **Homomorphismus von Ringalgebren** verstehen wir einen Algebrenhomomorphismus, der auch ein Ringhomomorphismus ist. Wir können diese Abbildungen sowohl charakterisieren als Algebrenhomomorphismen, die das Einselement auf das Einselement werfen, als auch als Ringhomomorphismen, die über dem Grundkörper linear sind. Wir vereinbaren für die Menge der Ringalgebrenhomomorphismen von einer K-Ringalgebra A in eine K-Ringalgebra B die Notation $\mathrm{Ralg}_K(A, B)$. Sind beide beteiligten Algebren sogar Kringalgebren, so schreiben wir für diese Menge auch$\mathrm{Kralg}_K(A, B)$.

A.7.3 (**Diskussion der Terminologie**). Für den Begriff einer Algebra sind in der Literatur leider auch viele andere Konventionen gebräuchlich, bei denen mehr oder weniger der oben explizit aufgeführten zusätzlichen Eigenschaften bereits für eine Algebra implizit mit gefordert werden.

A.7.4. Eine **Unteralgebra** einer Algebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum. Eine **Unterringalgebra** einer Ringalgebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum, der das Eins-Element enthält. Beide Begriffsbildungen ordnen sich der allgemeinen Begriffsbildung A.3.11 eines Unterobjekts unter.

A.8 Yonedalemma

A.8.1. Einen Funktor von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie von Mengen nennen wir kurz einen **Mengenfunktor auf** $\mathcal{C}$. Gegeben ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ und eine $\mathfrak{U}$-Kategorie bildet die Menge aller Funktoren $\mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ mit den Transformationen als Morphismen eine Kategorie $\mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$. Jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ liefert einen derartigen Mengenfunktor $\check{X} = X^\vee$ gegeben durch $\check{X} : A \mapsto \mathcal{C}(X, A)$.

Proposition A.8.2 (Yoneda-Lemma). *Seien $\mathfrak{U}$ ein Mengensystem, $\mathcal{C}$ eine $\mathfrak{U}$-Kategorie, $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ ein Mengenfunktor auf $\mathcal{C}$. So liefert die Abbildungsvorschrift $\tau \mapsto \tau_X(\mathrm{id}_X)$ eine Bijektion*

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})(\check{X}, F) \stackrel{\sim}{\to} F(X)$$

zwischen der Menge aller Transformationen $\check{X} \Rightarrow F$ und der Menge $F(X)$.

Vorschau A.8.3. Sie mögen als Übung A.8.14 zeigen, inwiefern diese Bijektionen natürlich sind in X und F.

A.8.4. Die zur Kategorie dieser Mengenfunktoren auf $\mathcal{C}$ opponierte Kategorie

$$\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}^\vee_{\mathfrak{U}} := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})^{\mathrm{opp}}$$

kann man als eine „Vervollständigung“ von $\mathcal{C}$ interpretieren. In der Tat liest sich unser Yoneda-Lemma in dieser Notation als eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(F, \check{X}) \stackrel{\sim}{\to} F(X)$.

Spezialisieren wir zu $F = \check{Y}$, so erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Y, X)$, von der man leicht zeigt, daß sie zur offensichtlichen Abbildung $\mathcal{C}(Y, X) \to \mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X})$ invers ist. So folgt, daß die Vorschrift $X \mapsto \check{X}$ einen volltreuen Funktor $\mathcal{C} \stackrel{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^\vee$ induziert, die **Yoneda-Einbettung**. Im weiteren lassen wir das Mengensystem $\mathfrak{U}$ wieder in den Hintergrund treten und ignorieren es meist in unserer Notation.

A.8.5 (**Diskussion der Notation**). Die hier verwendeten Notationen $\mathcal{C}^\vee$ und das in A.8.10 eingeführte $\mathcal{C}^\wedge$ sind genau umgekehrt wie in [KS90]. Dafür stimmt die Notation $\mathcal{C}^\wedge$ dann mit der in [Gro72] verwendeten Notation überein, und auch die Autoren von [KS90] verwenden in [KS00] letztere Notation, die mit der unseren übereinstimmt.

A.8.6 (**Das Yonedalemma im Fall einer Einobjektkategorie**). Im Spezialfall einer Einobjektkategorie $\mathcal{C} = [G]$ ist das Yonedalemma besonders leicht einzusehen: Es besagt dann im Lichte von A.4.10, daß die äquivarianten Abbildungen von einem Monoid G in eine beliebige G-Menge F festgelegt sind und festgelegt werden können durch das Bild des neutralen Elements.

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die andere Richtung. Für beliebiges $a \in F(X)$ betrachten wir dazu die Abbildungen

$$\begin{array}{rlcl} \tau_Y : & \mathcal{C}(X, Y) & \to & F(Y) \\ & f & \mapsto & (Ff)(a) \end{array}$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie eine Transformation $\tau : \check{X} \Rightarrow F$ bilden, die wir mit $\hat{\tau}(a)$ bezeichnen. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß die Abbildung $a \mapsto \hat{\tau}(a)$ invers ist zu unserer Abbildung $\tau \mapsto \hat{a}(\tau) := \tau_X(\mathrm{id}_X)$ aus der Proposition. Dafür müssen wir also prüfen, daß gilt $a = \hat{a}(\hat{\tau}(a))$ für alle $a \in F(X)$ und $\tau = \hat{\tau}(\hat{a}(\tau))$ für alle Transformationen $\tau : \check{X} \Rightarrow F$. Das überlassen wir dem Leser. $\square$

Definition A.8.7.

1. Diejenigen Mengenfunktoren auf $\mathcal{C}$, die isomorph sind zu Mengenfunktoren im Bild von $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^\vee$, heißen **darstellbare Funktoren**.
2. Ist genauer ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ isomorph zu $\check{X} = \mathcal{C}(X, \ )$ für ein $X \in \mathcal{C}$, so sagen wir, der **Funktor F werde dargestellt durch das Objekt X**.
3. Ist noch genauer $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ ein Mengenfunktor und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $a \in F(X)$ ein Element, das unter der Bijektion aus dem Yoneda-Lemma einer Isotransformation $\mathcal{C}(X, \ ) \stackrel{\sim}{\Rightarrow} F$ entspricht, so sagen wir, der **Funktor F werde strikt dargestellt durch das Paar (X, a)**. Ausgeschrieben bedeutet das, daß die Vorschrift $f \mapsto (Ff)(a)$ für alle $Y \in \mathcal{C}$ eine

Bijektion $\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{\sim} F(Y)$ liefert. Oft lassen wir das „strikt" aber auch weg.

Beispiel A.8.8. Der Vergißfunktor $\mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Ens}$ von den K-Vektorräumen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar $(K, 1)$ oder auch durch jeden anderen eindimensionalen Vektorraum zusammen mit einem beliebigen von Null verschiedenen Element.

Beispiel A.8.9. Der Vergißfunktor $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ von den Gruppen in die Mengen wird strikt dargestellt durch das Paar $(\mathbb{Z}, 1)$ oder auch durch jedes andere Paar (Z, e) bestehend aus einer unendlich zyklischen Gruppe und einem Erzeuger derselben.

A.8.10. In derselben Weise kann man für jede $\mathfrak{U}$-Kategorie $\mathcal{C}$ auch die Kategorie

$$\mathcal{C}^\wedge = \mathcal{C}^\wedge_{\mathfrak{U}} := \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$$

aller kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \to \mathfrak{U}\mathrm{Ens}$ betrachten und erhält mit $X \mapsto \mathcal{C}(\ , X)$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$, die **Ko-Yoneda-Einbettung**. Wieder heißen die Funktoren im Bild dieser Einbettung **darstellbare Funktoren** oder, wenn wir es ganz genau nehmen wollen, **kodarstellbare Funktoren**. Die Objekte von $\mathcal{C}^\wedge$ werden Sie später vielleicht einmal unter der Bezeichnung als „mengenwertige Prägarben auf $\mathcal{C}$" wiedertreffen. Notieren wir wieder zu $X \in \mathcal{C}$ mit $\hat{X} \in \mathcal{C}^\wedge$ den zugehörigen Funktor $\hat{X} : A \mapsto \mathcal{C}(A, X)$, so liefert diesmal das Auswerten auf id_X eine Bijektion $\mathcal{C}^\wedge(\hat{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

A.8.11. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ kann man leicht explizite Isomorphismen von Kategorien $(\mathcal{C}^\vee)^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})^\wedge$ und $(\mathcal{C}^\wedge)^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})^\vee$ angeben. In diesem Sinne sind unsere beiden Konzepte zueinander dual.

Vorschau A.8.12. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist die volltreue Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ verträglich mit Produkten, wann immer diese in $\mathcal{C}$ existieren. Ebenso ist die volltreue Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$ verträglich mit Koprodukten, wann immer diese in $\mathcal{C}$ existieren.

Übungen

Übung A.8.13 (**Yoneda-Einbettungen und Exponentialgesetz**). Das Exponentialgesetz A.4.6 spezialisiert zu Bijektionen

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{C}, \mathrm{Ens}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ens}))$$

In der Mitte betrachten wir nun den Mengenfunktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} : (X, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$ der Morphismen. Man prüfe, daß er rechts der Koyonedaeinbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\wedge$ aus A.8.10 entspricht und links dem Opponierten der Yonedaeinbettung $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\vee$.

Übung A.8.14 (**Natürlichkeit im Yoneda-Lemma**). Man zeige, daß für jede Kategorie $\mathcal{C}$ die Bijektionen des Yoneda-Lemmas A.8.2 eine Isotransformation zwischen der beiden Wegen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens}) & \to & \mathrm{Ens} \\ \uparrow & & \| \\ \mathcal{C} \times \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens}) & \to & \mathrm{Ens} \end{array}$$

liefert, also zwischen den beiden Funktoren $\mathcal{C} \times \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$, die durch $(X, F) \mapsto \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})(\check{X}, F)$ und $(X, F) \mapsto F(X)$ gegeben werden. Insbesondere liefern sie dann auch eine Isotransformation zwischen den Funktoren $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$ gegeben durch $(X, Y) \mapsto \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})(\check{X}, \check{Y})$ und $(X, Y) \mapsto \check{Y}(X) = \mathcal{C}(Y, X)$ und wir sehen so ein weiteres Mal, daß $X \mapsto \check{X}$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \stackrel{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$ ist.

Übung A.8.15 (**Eindeutigkeit darstellender Objekte**). Wird ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ strikt dargestellt durch das Paar (X, a) und durch das Paar (Y, b), so gibt es genau einen Isomorphismus $i : X \stackrel{\sim}{\to} Y$ mit der Eigenschaft $F(i) : a \mapsto b$.

Übung A.8.16. Welche Mengenfunktoren werden durch finale und initiale Objekte dargestellt oder kodargestellt?

Übung A.8.17. Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und $U \subset V$ ein Teilraum. Welchen Mengenfunktor stellt der Quotient V/U dar?

Übung A.8.18. Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Welchen Mengenfunktor stellt die Tensoralgebra dar?

Ergänzende Übung A.8.19. Welchen Mengenfunktor stellt das Produkt im Sinne von A.8.7 dar?

Ergänzende Übung A.8.20. Seien K ein endlicher Körper und Mat_K die Matrixkategorie aus A.1.6 und $\mathfrak{U}$ eine Menge derart, daß Mat_K eine $\mathfrak{U}$-Kategorie ist. Gilt $X \in \mathfrak{U} \Rightarrow |X| < \infty$, so liefert der offensichtliche Funktor

$$\mathrm{Mat}_K \to \mathrm{Mat}_K^{\wedge} = \mathrm{Cat}(\mathrm{Mat}_K^{\mathrm{opp}}, \mathfrak{U}\mathrm{Ens})$$

eine Äquivalenz von Mat_K mit der vollen Unterkategorie aller mit endlichen Produkten verträglichen Funktoren. Gibt es zwar unendliche, aber keine überabzählbaren Mengen $X \in \mathfrak{U}$, so ist die volle Unterkategorie aller mit endlichen Produkten verträglichen Funktoren aus $\mathrm{Mat}_K^{\wedge}$ äquivalent zur Kategorie aller abzählbaren K-Vektorräume. Analoge Aussagen gelten für andere Kardinalitäten und mutatis mutandis auch für unendliche Körper.

A.9 Universen

A.9.1. Um diese Leitplanken zur Vermeidung logischer Abstürze zu beschreiben, erfinde ich das Wort **Mengel** als zusammenfassende Bezeichnung für Mengen und Elemente von Mengen, die ja in unserer Terminologie selbst wieder Mengen sein dürfen, aber eben nicht sein müssen. Diese Terminologie ist allerdings nicht gebräuchlich.

Ergänzung A.9.2. Baut man die Mengenlehre im Rahmen der Logik systematisch auf, so verwendet man statt unserem „Mengel" schlicht das Wort **Menge**. Aufgrund der Vereinbarung, daß zwei Mengen gleich sind genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben, kann es dann nur eine einzige Menge geben, die kein Element hat. Man notiert sie wieder $\emptyset$.

Definition A.9.3. Ein **Universum** ist eine Menge $\mathfrak{U}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $x \in M$ und $M \in \mathfrak{U}$ implizieren zusammen $x \in \mathfrak{U}$;
2. $x \in \mathfrak{U} \Rightarrow \{x\} \in \mathfrak{U}$;
3. $A \in \mathfrak{U} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \mathfrak{U}$;
4. Gegeben $I \in \mathfrak{U}$ und eine Abbildung $f : I \to \mathfrak{U}$ gilt $\left(\bigcup_{i \in I} f(i)\right) \in \mathfrak{U}$.

Ergänzung A.9.4 (**Diskussion der Terminologie**). Diese Definition steht fast genauso bei Grothendieck [Gro72, Exposé I]. Abweichend will Grothendieck nur die leere Menge nicht als Universum zulassen und fordert statt unserer zweiten Bedingung scheinbar stärker $x, y \in \mathfrak{U} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{U}$. Da jedoch für jedes nichtleere Universum gilt $\emptyset \in \mathfrak{U}$ und folglich $\{\emptyset\} \in \mathfrak{U}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathfrak{U}$, ergibt sich das wegen $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$ aus dem letzten Axiom, angewandt auf die Abbildung $f : \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \to \mathfrak{U}$ mit $f(\emptyset) = \{x\}$ und $f(\{\emptyset\}) = \{y\}$.

A.9.5 (**Elemente eines Universums versus Teilmengen eines Universums**). Gegeben ein Universum $\mathfrak{U}$ gilt es genau zu unterscheiden zwischen Mengeln $x \in \mathfrak{U}$, die Elemente des Universums sind, und Mengeln $M \subset \mathfrak{U}$, die nur Teilmengen des Universums sind. Nach dem ersten Axiom ist jedes Element eines Universums, wenn es denn eine Menge ist, auch eine Teilmenge besagten Universums, aber das Umgekehrte gilt nicht. Die Formel $M := \{x \in \mathfrak{U} \mid x \notin x\}$ definiert dann eine Teilmenge $M \subset \mathfrak{U}$, die kein Element von $\mathfrak{U}$ zu sein braucht, und die Formel $A := \{M \subset \mathfrak{U} \mid M \notin M\}$ definiert eine Menge A, die keine Teilmenge von $\mathfrak{U}$ zu sein braucht, so daß keine dieser beiden Formeln auf einen Widerspruch führt.

A.9.6 (**Stabilitäten eines Universums**). Wenn wir mit Kuratowski $(x, y) := \{x, \{y\}\}$ setzen, erhalten wir sofort $x, y \in \mathfrak{U} \Rightarrow (x, y) \in \mathfrak{U}$. Das Produkt von je zwei

Mengen, die Elemente unseres Universums sind, ist auch selbst Element unseres Universums, zum Beispiel indem wir die Vereinigung erst über alle $x \in X$ und dann über alle $y \in Y$ der Mengen $\{(x, y)\}$ bilden. Weiter ist mit je zwei Mengen $X, Y \in \mathfrak{U}$ auch die Menge der Abbildungen $\mathrm{Ens}(X, Y)$ Element von $\mathfrak{U}$ und dasselbe gilt für jedes Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ mit $I \in \mathfrak{U}$ und $X_i \in \mathfrak{U}$ für alle $i \in I$. Ebenso folgt, daß jede Teilmenge eines Elements unseres Universums wieder ein Element unseres Universums ist.

A.9.7 (**Existenz von Universen**). Die Annahme, daß jede Menge Element eines Universums ist, müssen wir der Mengenlehre als zusätzliches Axiom hinzufügen. Es scheint nicht auf Widersprüche zu führen, hat aber die bemerkenswerte Konsequenz, daß es zu jeder Menge ein kleinstes Universum gibt, zu dem sie als Element gehört, eben den Schnitt aller Universen, zu denen sie als Element gehört. Insbesondere ist natürlich auch jedes Universum Element eines Universums. Gegeben ein Körper k und ein Universum $\mathfrak{U}$ mit $k \in \mathfrak{U}$ können wir dann auf der Kategorie $k\text{-}\mathfrak{U}\mathrm{Mod}$ der k-Vektorräume, deren zugrundeliegende Menge zu $\mathfrak{U}$ gehört, in der Tat den Dualraumfunktor erklären.

A.9.8. Das kleinste Universum, das die leere Menge als Element enthält, besteht aus endlichen Mengen.

Literatur

[Del90] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 111–195.

[Gro72] Alexander Grothendieck, *SGA 4*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer, 1972.

[Kas95] Christian Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer, 1995.

[KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren, vol. 292, Springer, 1990.

[KS00] ———, *Categories and sheaves*, Grundlehren, vol. 332, Springer, 2000.

[LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*, Wolfgang Soergel.

[Lei04] Tom Leinster, *Higher operads, higher categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 298, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Lur17] Jacob Lurie, *Higher algebra*, 2017, Available on the web.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das $\cup$ dem Buchstaben u oder das $\subset$ dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index