Algebra und Zahlentheorie
WS 2019/20 — Anwesenheitsübungsblatt

27. Oktober 2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html`

Übung A.1: Seien $(M, \top)$ ein Monoid und e sein neutrales Element. Man zeige:
Unser Monoid ist genau dann eine Gruppe, wenn es für jedes $a \in M$ ein $\bar{a} \in M$ gibt mit $\bar{a} \top a = e$, und dies Element $\bar{a}$ ist dann notwendig das Inverse von a in M.
Man zeige stärker: Ist A eine Menge mit assoziativer Verknüpfung $\top$ und existiert ein $e \in A$ mit $e \top a = a \ \forall a \in A$ sowie für jedes $a \in M$ ein $\bar{a} \in M$ mit $\bar{a} \top a = e$, so ist M eine Gruppe.
Hinweis: Man zeige, daß $\bar{a} \top$ bijektiv ist.

Übung A.2: Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ von Gruppen ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn ihr Graph $\Gamma(\varphi) \subset G \times H$ eine Untergruppe des Produkts ist.

Übung A.3: Man zeige, daß in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$ die Doppeltranspositionen zusammen mit dem neutralen Element einen Normalteiler $D \subset \mathcal{S}_4$ bilden, und konstruiere einen Isomorphismus $\mathcal{S}_4/D \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_3$.

Übung A.4: Man zeige: Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch. Genauer haben wir für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Teiler } d \in \mathbb{N} \text{ von } m\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\} \\ d & \mapsto & d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{array}$$

Man folgere, daß jede echte, als da heißt von der ganzen Gruppe verschiedene Untergruppe einer zyklischen Gruppe von Primzahlpotenzordnung $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ in der Untergruppe $p\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ enthalten sein muß.

Übung A.5: Man zeige: Jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}$ ist zyklisch.