Algebra und Zahlentheorie
WS 2019/20 — Anwesenheitsübungsblatt 2

31. Oktober 2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html`

Aufgabe B.1: Man berechne die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{pmatrix} -8 & 6 & -2 & -8 \\ 5 & -3 & -1 & 4 \\ 15 & -1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe B.2: Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Betrachten Sie die Gruppe der Gruppenhomomorphismen $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Die Verknüpfung in $\widehat{G}$ is definiert durch

$$(\phi_1 + \phi_2)(g) = \phi_1(g) + \phi_2(g) \text{ für jede } g \in G \text{ und } \phi_1, \phi_2 \in \widehat{G}.$$

Zeigen Sie, dass $\widehat{G} \cong G$.
Sei $f : G \to H$ eine Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\widehat{f} : \widehat{H} \to \widehat{G}$ definiert durch

$$\widehat{f}(\phi) = \phi \circ f$$

auch eine Gruppenhomomorphismus. Man zeige weiter: falls f surjektiv ist, dann ist $\widehat{f}$ injektiv.

Aufgabe B.3: Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Grp}^{\times} G$ die Gruppe der Gruppeautomorphismen von G.
Sei $\mathrm{Inn}(G) = \{\varphi \in \mathrm{Grp}^{\times} G \mid \varphi(g) = hgh^{-1} \text{ für ein } h \in G\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Inn}(G)$ ein Normalteiler von $\mathrm{Grp}^{\times} G$ ist. $\mathrm{Inn}(G)$ heißt die Gruppe der **inneren Automorphismen** von G.
Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$, wo $Z(G)$ das Zentrum der Gruppe G bezeichnet.

Aufgabe B.4: Man zeige: Sind N und B Gruppen und

$$\tau : B \to \mathrm{Grp}^{\times} N$$

ein Gruppenhomomorphismus alias eine Operation von B auf N durch Gruppenautomorphismen, notiert $(\tau(a))(n) =: ({}^a n)$, so kann man $N \times B$ mit einer Gruppenstruktur versehen vermittels der Vorschrift

$$(m, a)(n, b) = (m({}^a n), ab)$$

Diese Gruppe heißt das oder genauer ein **semidirektes Produkt** von N mit B und wird auch notiert als $N \rtimes B$ (oder genauer $N \rtimes_\tau B$).

Man zeige weiter: Ist $\phi : G \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, N sein Kern und $\psi : B \to G$ eine Spaltung von ϕ (also ein Gruppenhomomorphismus, so dass $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_B$), so erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $\tau : B \to \mathrm{Grp}^{\times} N$ durch $(\tau(b))(n) := \psi(b) n \psi(b)^{-1}$ und die Abbildung $(n, b) \to n\psi(b)$ definiert einen Gruppenisomorphismus

$$N \rtimes_\tau B \to G.$$

Aufgabe B.5: Sei p eine ungerade Primzahl und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}.$$

Hinweis: Wir wissen schon, nach der Vorlesung, dass $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ zyklisch ist. Die Morphismus $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ist surjektiv, so eine Elemente mit Ordung $p-1$ existiert. Dann Zeige man, dass $(1+p)$ Ordung p^{n-1} hat. Dass folge aus $(1 + p^k + \mathbb{Z}p^{k+1})^p \in 1 + p^{k+1} + \mathbb{Z}p^{k+2}$ für jede k.