

# Algebra und Zahlentheorie WS 2019/20 — Übungsblatt 1

Ausgabe 30.10.19, Abgabe 07.11.19

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html>

---

**Aufgabe 1.1:** Berechnen Sie, mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, den größten gemeinsamen Teiler  $c$  von 289 und 221 und eine Darstellung von  $c$  als ganzzahlige Linearkombination von 289 und 221.

(4 Punkte)

**Aufgabe 1.2:** Seien  $a, b \in \mathbb{N}$  teilerfremde Zahlen. Man zeige: existieren  $m, n \in \mathbb{N}$  so dass

$$a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 1.3:** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H$  eine Untergruppe von  $G$ , so dass  $G/H$  genau zwei Elemente hat. Man zeige:  $H$  ist ein Normalteiler von  $G$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 1.4:** Gegeben  $x, y$  zwei Elemente endlicher Ordnung in einer abelschen Gruppe  $G$  teilt die Ordnung ihres Produkts das kleinste gemeinsame Vielfache ihrer Ordnungen, und sind die Ordnungen von  $x$  und  $y$  teilerfremd, so gilt sogar  $\text{ord}(xy) = (\text{ord}x)(\text{ord}y)$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 1.5:** In jeder endlichen abelschen Gruppe wird die maximal von einem Gruppenelement erreichte Ordnung geteilt von den Ordnungen aller Gruppenelemente.

Hinweis: Bezeichnet  $M \subset \mathbb{N}$  die Menge aller Ordnungen von Elementen unserer Gruppe, so enthält  $M$  mit jeder Zahl auch alle ihre Teiler. Weiter enthält  $M$  nach Aufgabe 1.4 mit je zwei teilerfremden Zahlen auch ihr Produkt.

(4 Punkte)

**Bemerkung:** Aufgabe 1.4 und 1.5 sind ein Zugang zur wichtigen Erkenntnis, daß endliche Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers stets zyklisch sind.