Algebra und Zahlentheorie
WS 2019/20 — Ubungsblatt 10

Ausgabe 16.01.20, **Abgabe** 23.01.20

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html`

Aufgabe 10.1: Man bestimme die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers des Polynoms $X^4 - 5$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(i)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.2: Sei p ein Primzahl und $\zeta_p \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ ist und berechnen Sie $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$.

Hinweis: Aus Transitivität der Galoisgruppe, existiert für jede i teilerfremd zu p ein Element $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\zeta) = \zeta^i$.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3: Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$. Sei $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation. Man zeige:

1. $\sigma(K) = K$ und so σ definiert ein Element von $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
2. $K^\sigma = K \cap \mathbb{R}$
3. Wenn $[K : \mathbb{Q}]$ ungerade ist, dann ist K in $\mathbb{R}$ enthalten.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.4: Gegeben $n \geq 1$ zeige man, dass $\mathbb{C}(X^n) \subset \mathbb{C}(X)$ eine Galoiserweiterung vom Grad n mit zyklischer Galoisgruppe ist.

Hinweis: Man zeige zuerst, dass $t^n - X^n = \prod_{i=1}^{n}(t - \zeta^i X)$, wobei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel ist, und dass $\mathbb{C}(X)$ Zerfällungskörper von $t^n - X^n$ ist.

(4 Punkte)