Algebra und Zahlentheorie
WS 2019/20 — Übungsblatt 11

Ausgabe 23.01.20, **Abgabe** 30.01.20

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html`

Aufgabe 11.1: Sei K der Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 7$ über $\mathbb{Q}$. Man bestimme die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und alle die Teilkörper $L \subset K$, die nicht normal über $\mathbb{Q}$ sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.2: Man bestimme alle Unterkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_{12})$, wobei $\zeta_{12} \in \mathbb{C}$ eine primitive zwölfte Einheitswurzel ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.3: Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Sei f ein separables irreduzibles Polynom vom Grad m. Sei L der Zerfällungskörper von f und seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in L$ die Wurzeln von f. Sei $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Sei

$$\delta = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Man zeige:

1. $\delta^2 \in K$
2. Wenn $|G|$ ungerade ist, dann gilt $\delta \in K$.
3. (**Bonus**) Wenn G zyklisch ist und gerade Ordnung hat, dann gilt $\delta \notin K$.

($4 + \mathbf{2}$ Punkte)

Aufgabe 11.4: Seien L/K eine endliche Körpererweiterung und $K_1, K_2 \subset L$ zwei Zwischenkörper mit K_i/K Galois und $K_1 \cap K_2 = K$. Sei $K_1K_2 \subset L$ der Teilkörper erzeugt von K_1 und K_2. Man zeige:

1. K_1K_2 ist Galois über K
2. Es gilt
$$\mathrm{Gal}(K_1K_2/K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K_1/K) \times \mathrm{Gal}(K_2/K)$$
vermittels der Restriktionen.

Hinweis zu 1). Wenn K_i der Zerfällungskörper von f_i ist, dann ist K_1K_2 der Zerfällungskörper von f_1f_2.

(4 Punkte)