Algebra und Zahlentheorie
WS 2019/20 — Ubungsblatt 12

Ausgabe 30.01.20, **Abgabe** 07.02.20

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html`

Aufgabe 12.1: Wieviele zu 140000 teilerfremde Zahlen a mit $1 \leq a \leq 140000$ gibt es?

(3 Punkte)

Aufgabe 12.2: Bestimmen Sie, mithilfe des Reziprozitätsgesetzes, ob 97 ein Quadrat modulo 131 ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 12.3: Sei $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ und wir nehmen an, dass $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist. Zeigen Sie, dass die die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $f(x)$ isomorph zu eine Untergruppe der Diedergruppe D_4 ist.

Hinweis: a) Der Zerfällungskörper kann nur Grad 4 oder 8 über $\mathbb{Q}$ haben. b) Die 2-Sylow von S_4 ist isomorph zu D_4 .

(4 Punkte)

Aufgabe 12.4: Seien p, q Primzahlen und betrachten Sei $X^p - q \in \mathbb{Q}[X]$. Man zeige:

1. $X^p - q$ ist irreduzibel
2. Der Zerfällungskörper von $X^p - q$ ist $K := \mathbb{Q}(\sqrt[p]{q}, \zeta_p)$, wobei ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel ist.
3. Es gibt eine surjektive Abbildung $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$ mit Kern $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p))$.
4. Es gibt einen Isomorphismus
$$\mathrm{Gal}(K/Q) \cong \mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^\times$$
in Bezug auf die offensichtliche Wirkung von $\mathbb{F}_p^\times$ auf $\mathbb{F}_p$.

Hinweis zu 4): Man wendet Übung B.4 aus dem Anwesenheitsblatt 2 an. Für die Existenz einer Spaltung: aus Transitivität fur jede k existiert $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\zeta_p) = \zeta_p^k$, also existiert eine Elemente von $\mathrm{Gal}(K/Q)$ der Ordnung Vielfache von $p - 1$.

(6 Punkte)