Algebra und Zahlentheorie
WS 2019/20 — Übungsblatt 4

Ausgabe 21.11.19, **Abgabe** 28.11.19

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html`

Aufgabe 4.1: Seien R ein Ring und $I, J \subset R$ Ideale. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von R auch Ideale sind.

1. $I \cap J$
2. $I + J := \{a + b \mid a \in I \text{ und } b \in J\}$.
3. $\langle IJ \rangle := \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I \text{ und } b_i \in J\}$.

Zeigen Sie weiter, dass $\langle IJ \rangle \subset I \cap J \subset I + J$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei R ein kommutativer Ring, dessen Charakteristik eine Primzahl p ist. Man zeige, dass der sogenannte **Frobenius-Homomorphismus**

$$F : R \to R$$
$$a \mapsto a^p$$

ein Ringhomomorphismus von R in sich selber ist.
Hinweis: Man verwende, dass die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

offensichtlich in jedem Kring gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.3: Man konstruiere einen Ringisomorphismus zwischen $\mathbb{R}[x]/(x^3 + 1)$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 4.4: Sei A die Teilmenge $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{R}$. Sei $N : A \to \mathbb{Z}$ die Abbildung definiert durch $N(a+b\sqrt{3}) = (a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})$. Man zeige:

1. A ist ein Teilring von $\mathbb{R}$.
2. für alle $x, y \in A$ gilt $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. $x \in A$ ist eine Einheit genau wenn $N(x) = \pm 1$.
4. A hat unendlich viele Einheiten.

(6 Punkte)