Algebra und Zahlentheorie
WS 2019/20 — Ubungsblatt 5

Ausgabe 28.11.19, **Abgabe** 05.12.19

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html`

Aufgabe 5.1: Betrachten Sie die Ideale $I = \langle 3{+}24i\rangle$ und $J = \langle 15\rangle$ des Rings der Gauß'chen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$. Finden Sie jeweils einen Erzeuger der Ideale $I+J$ und $I \cap J$.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: Der Quotient eines faktoriellen Rings R nach einem Hauptideal $\langle a\rangle$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn gilt $a = 0$ oder a irreduzibel.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.3: Man zeige, dass $\mathbb{Z}[x]$ kein Hauptidealring ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.4:

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring ist (und damit insbesondere faktoriell) mit der Norm $N(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$.
2. Berechnen Sie eine Zerlegung von 21 in irreduziblen Elementen von $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Hinweis zu 1): Schauen Sie nochmal den Beweis an, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring ist. Ein sehr ähnliches Argument funktioniert hier auch!

(6 Punkte)

Aufgabe 5.5: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ kein faktorieller Ring ist
Hinweis: Wie kann man $4 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ zerlegen? Man benutzt (wie in Ausgabe 4.4): $a + b\sqrt{-3} | c + d\sqrt{-3}$ nur wenn $a^2 + 3b^2 | c^2 + 3d^2$.

(2 Punkte)