

Algebra und Zahlentheorie WS 2019/20 — Übungsblatt 6

Ausgabe 05.12.19, Abgabe 12.12.19

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html>

Aufgabe 6.1: Man zeige, daß das neunte Kreisteilungspolynom $\Phi_9(X) = X^6 + X^3 + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Hinweis: Man substituiere $X = Y + 1$ und wende das Eisensteinkriterium an.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.2: Man stelle $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen dar. Was ist die Summe $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3$ der dritten Potenzen der vier komplexen Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des Polynoms $X^4 + 2X^3 - 4X^2 + X + 3$?

(4 Punkte)

Aufgabe 6.3: Man zeige: Gegeben ein Körper k ist der Ring $k[[X]]$ der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus k ein Hauptidealring, und die Ideale dieses Rings sind das Nullideal sowie die Ideale $\langle X^n \rangle$ für $n \in \mathbb{N}$. Man bespreche die Primfaktorzerlegung in diesem Hauptidealring.

Erinnerung: $k[[X]]$ ist definiert als der Ring aller formalen Potenzreihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$$

mit Addition

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i$$

und Multiplikation

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} \right) X^i$$

(4 Punkte)

Aufgabe 6.4: Der Ring der symmetrischen Funktionen in n Veränderlichen mit Koeffizienten aus \mathbb{Q} wird als Ring erzeugt von \mathbb{Q} und den Potenzsummen $p_k := X_1^k + \dots + X_n^k$ für $1 \leq k \leq n$.

Hinweis: Man zeigt durch Induktion auf k , dass $\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_k] = \mathbb{Q}[s_1, \dots, s_k]$. Um $p_k \notin \mathbb{Q}[s_1, \dots, s_{k-1}]$ zu zeigen, betrachtet man das Polynom $X^n - X^{n-k}$. Was ist der Wert von $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die Nullstellen des Polynoms $X^n - X^{n-k}$ sind?

(4 Punkte)