Algebra und Zahlentheorie
WS 2019/20 — Übungsblatt 7

Ausgabe 12.12.19, **Abgabe** 19.12.19

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html`

Aufgabe 7.1: Sei $i = \sqrt{-1}$. Ist $\sqrt{2} + i$ algebraisch über $\mathbb{Q}$? Wenn ja, was ist sein Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$? Liegt i in $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$?

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel eine Nullstelle des Polynoms $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

1. Alle Elemente von $\mathbb{Q}(\omega)$ lassen sich eindeutig in der Form $a\omega + b$ schreiben, mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Schreiben Sie das Inverse von $2\omega + 1$ in dieser Form.
2. Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\omega + 2$.
3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3: Sei K ein Körper und seien $P, Q \in K[x]$ irreduzible Polynome mit $\operatorname{grad} P$ und $\operatorname{grad} Q$ teilerfremd. Sei $L = K(\alpha)$ eine Körpererweiterung von K, wobei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von P ist. Dann ist Q auch irreduzibel in $L[X]$.
Hinweis: Wäre sonst β Nullstelle eines irreduziblen Faktors von Q in $L[X]$, so hätte $K(\alpha, \beta)$ zu kleinen Grad über K, denn es umfaßt $K(\alpha)$ und $K(\beta)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.4: Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel alias eine Nullstelle des Polynoms $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

1. Zeigen Sie, dass $\alpha := (\zeta + \zeta^{-1})$ Grad 2 über $\mathbb{Q}$ hat.
2. Zeigen Sie, dass ζ konstruierbar mit Zirkel und Lineal ist.

(Diese Aufgabe zeigt, dass das regelmäßige Fünfeck konstruierbar mit Zirkel und Lineal ist.)
Hinweis zu 1: Man zeigt, dass $x^2 + x - 1$ das Minimalpolynom von α ist.

(4 Punkte)