

Algebra und Zahlentheorie WS 2019/20 — Übungsblatt 8

Ausgabe 19.12.19, Abgabe 09.01.20

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html>

Aufgabe 8.1: Zerlegen Sie das Polynom $x^8 - x$ in irreduzible Faktoren über \mathbb{F}_2

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2: Berechnen Sie den Grad des Zerfällungskörpers von $x^3 - 2$ über \mathbb{Q} , \mathbb{F}_3 und \mathbb{F}_7 .

(4 Punkte)

Aufgabe 8.3: Es sei K ein Körper, $P \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n und L/K der Zerfällungskörper von P . Zeigen Sie die Abschätzung $[L : K] \leq n!$.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.4: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine primitive n -te Einheitswurzel. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ eine normale Körpererweiterung von \mathbb{Q} ist.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 8.5: Seien M/L und L/K endliche Körpererweiterungen. Man zeige:

1. Ist M/K normal, so ist auch M/L normal.
2. Geben Sie ein Beispiel für Körper $M \supset L \supset K$ an, bei dem M/L und L/K jeweils normal sind, M/K jedoch nicht normal ist.

Hinweis: Quadratische Körpererweiterungen sind stets normal.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 8.6: Finden Sie eine normale Körpererweiterung von \mathbb{Q} des Grades 3.

Hinweis: Schauen Sie die Untererweiterungen von $\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}$ an, die im reellen Körper enthalten sind.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 8.7: Seien p, q Primzahlen. Man zeige: die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome des Grades p über \mathbb{F}_q ist

$$\frac{q^p - q}{p}.$$

(4 Punkte)