

Algebra und Zahlentheorie WS 2019/20 — Übungsblatt 9

Ausgabe 09.01.20, Abgabe 16.01.20

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ws19az.html>

Aufgabe 9.1: Sei $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Berechnen Sie, mit Hilfe der Ableitung, die mehrfache Nullstellen von p .

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2: Zeigen Sie, dass $\bar{\mathbb{Q}}$, der algebraische Abschluss von \mathbb{Q} , abzählbare Kardinalität hat.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.3: Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Man zeige: das Polynom $x^p - a \in K[x]$ ist irreduzibel genau wenn $a \notin K^p$.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.4: Eine algebraische Körpererweiterung derart, daß nur die Elemente des kleinen Körpers über diesem separabel sind, heißt **rein inseparabel**.

Man zeige, daß eine algebraische Erweiterung L/K eines Körpers K der Charakteristik p rein inseparabel ist genau dann, wenn für jedes Element von L die p^r -te Potenz für hinreichend großes r in K liegt. Salopp gesprochen sind also rein inseparable Erweiterungen genau die Erweiterungen, die durch die sukzessive Adjunktion p -ter Wurzeln in Charakteristik p entstehen.

Hinweis: Für ein gewähltes Element $\alpha \in L$ betrachte man sein Minimalpolynom.

(4 Punkte)