Mathematisches Institut, Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Klausur: **„Algebra und Zahlentheorie" WS 2019/20**

Datum und Uhrzeit:	03.03.2020 von 09:00 Uhr bis 12:00 Uhr
Prüfungsdauer:	3 Stunden
Raum:	Hörsaal Rundbau, Albertstraße 21
Prüfer:	Prof. Dr. Wolfgang Soergel

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Fach: ....

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Lehramt ☐ sonstiges

Unterschrift: ....

Anmerkungen:

- Füllen Sie dieses Deckblatt vollständig aus.
- Blätter sind mit Namen zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten.**

Prüfungsunfähigkeit

Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Sollten Sie sich während der Prüfung nicht prüfungsfähig fühlen, können Sie aus gesundheitlichen Gründen auch während der Prüfung von dieser zurücktreten. Gemäß der Prüfungsordnungen sind Sie verpflichtet, die für den Rücktritt oder das Versäumnis geltend gemachten Gründe unverzüglich (innerhalb von 3 Tagen) dem Prüfungsamt durch ein Attest mit der Angabe der Symptome schriftlich anzuzeigen und glaubhaft zu machen. Weitere Informationen hierzu können auf den Internetseiten des Prüfungsamtes nachgelesen werden.

	Max. Anzahl Punkte	Erreichte Punkte	Bemerkung
Aufgabe 1	6		
Aufgabe 2	6		
Aufgabe 3	6		
Aufgabe 4	6		
Aufgabe 5	6		
Aufgabe 6	6		
Aufgabe 7	6		
Aufgabe 8	6		
Aufgabe 9	6		
Aufgabe 10	6		
Summe:	**60**		

Note: ....

Klausur eingesehen am: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Algebra und Zahlentheorie
WS 2019/20 — Klausur

03.03.2020

Aufgabe K.1: Berechnen Sie, mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, den größten gemeinsamen Teiler c von 247 und 323 und eine Darstellung von c als ganzzahlige Linearkombination von 247 und 323.

(6 Punkte)

Aufgabe K.2: Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G, so dass G/H genau zwei Elemente hat. Man zeige: H ist ein Normalteiler von G.

(6 Punkte)

Aufgabe K.3: Bestimmen Sie eine 7-Sylow Untergruppe der Gruppe $\mathcal{A}_7$ aller geraden Permutationen von 7 Elementen und berechnen Sie die Anzahl der 7-Sylows.

(6 Punkte)

Aufgabe K.4: Man konstruiere einen Ringisomorphismus zwischen $\mathbb{R}[x]/(x^4+1)$ und $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

(6 Punkte)

Aufgabe K.5: Man stelle

$$X_1^2X_2 + X_2^2X_1 + X_1^2X_3 + X_3^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_2$$

als Polynom in den elementar-symmetrischen Polynomen dar. Was ist die Summe $\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_3^2\lambda_2$, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die drei komplexen Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des Polynoms $X^3 - 4X^2 + 3X + 5$ sind?

(6 Punkte)

Aufgabe K.6: Ist $\sqrt{2} + \sqrt{-2}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$? Wenn ja, was ist sein Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$? Liegt $\sqrt{-2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{-2})$?

(6 Punkte)

Aufgabe K.7: Berechnen Sie den Grad des Zerfällungskörpers von $x^3 + 2$ über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_7$.

(6 Punkte)

Aufgabe K.8: Seien p, q Primzahlen mit $p < q$ und p nicht Teiler von $q - 1$. Sei G eine Gruppe der Ordnung pq. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.

(6 Punkte)

Aufgabe K.9: Man bestimme die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers des Polynoms $X^4 - 3$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ und $\mathbb{Q}(i)$.

(6 Punkte)

Aufgabe K.10: Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und L/K eine Körpererweiterung. Seien $\alpha, \beta \in L \setminus K$, so dass $\alpha^2 \in K$ und $\beta^2 \in K$.

1. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) = K(\beta)$ genau wenn $\alpha^2\beta^2$ ist ein Quadrat in K.
2. Seien $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ quadratfreie Zahlen und paarweise teilfremde. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_k}) : \mathbb{Q}] = 2^k$.
3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_k}, \mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

(6 Punkte)