Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Dr. Nadja Hempel — Wintersemester 2020/2021

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 2

Abgabe: 25.11.2020, 14 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (a) Beschreibe die von der Menge $\mathbb{N}$ erzeugte Unterstruktur der Struktur $\mathbb{Q}$ in der leeren Sprache. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

(b) Die Sprache $\mathcal{L} = \{c, f, g\}$ besteht aus einem Konstanteszeichen c, sowie aus einem einstelligen Funktionszeichen f und aus einem zweistelligen Funktionszeichen g. Betrachte nun die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, 1, x \mapsto x+2, \cdot)$. Beschreibe die von den geraden natürlichen Zahlen erzeugte Unterstruktur von $\mathcal{Q}$. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Wir nehmen an, dass die Sprache $\mathcal{L}$ ein einstelliges Funktionszeichen f enthält.

(a) Sei F eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$, wobei $f^{\mathcal{A}}$ eine surjektive Abbildung auf A definiert. Zeige, dass $f^{\mathcal{B}}$ eine wohldefinierte surjektive Abbildung von der Teilmenge $F(A)$ von B nach $F(A)$. Folgt, dass $f^{\mathcal{B}}$ surjektiv auf B ist?

(b) Sei nun $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen P und Q besteht. Wir betrachten die Klasse $\mathcal{K}$ der $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$, in welchen sich das Grunduniversum in zwei disjunkte Teilmengen $P^{\mathcal{M}}$ und $Q^{\mathcal{M}}$ mit $P^{\mathcal{M}}$ unendlich so zerlegt, dass die Funktion $f^{\mathcal{M}}$ die Identität auf $P^{\mathcal{M}}$, aber die eingeschränkte Abbildung $f^{\mathcal{M}}|_{Q^{\mathcal{M}}} : Q^{\mathcal{M}} \to P^{\mathcal{M}}$ surjektiv ist. Ferner ist jede Faser $(f^{\mathcal{M}})^{-1}(x)$ endlich für x aus $P^{\mathcal{M}}$.

Wir betrachten die abzählbaren $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{K}$ derart, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ genau ein einziges Element in $P^{\mathcal{A}}$ existiert, dessen Faser Größe n hat. Des Weiteren ist $\mathcal{B}$ die abzählbare $\mathcal{L}$-Struktur aus $\mathcal{K}$ derart, dass für jede natürliche Zahl $m \geq 3$ genau ein einziges Element in $P^{\mathcal{A}}$ existiert, dessen Faser Größe m hat. Beachte, dass in $P^{\mathcal{B}}$ kein Element Faser der Größe 2 besitzt!

Zeige, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sich jeweils ineinander einbetten lassen. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sind die Körper $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, -, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ als $\mathcal{L}_{Ring}$-Strukturen isomorph? Sind sie als $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}}$-Strukturen elementar äquivalent?

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** In der Sprache $\mathcal{L}$ sei $F : A \to B$ eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$.

(a) Zeige induktiv über den Aufbau des Termes $t = t[x_1, \dots, x_n]$, dass

$$F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

für alle $a_1, \dots, a_n$ aus A.

(b) Schließe daraus, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

für jede atomare $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter erfolgt auf der Lernplattform ILIAS.