Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 4
Abgabe: 09.12.2020, 14 Uhr
Begründe alle Antworten!

Aufgabe 1 (12 Punkte).

In der Sprache $\mathcal{L}$, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht, betrachten wir die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A mit genau drei Äquivalenzklassen ist, wobei eine Äquivalenzklassen der Größe 2 ist aber die anderen zwei Äquivalenzklassen unendlich sind.

(a) Gegeben eine n-elementige Teilmenge einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{K}$, wie viele Elemente enthält das Universum der davon erzeugten Unterstruktur?

(b) Zeige, dass die Kollektion partieller Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen zweier beliebigen Strukturen aus $\mathcal{K}$ kein Back-&-Forth-System bildet.

Wir erweitern nun die Sprache zu $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ mit einem neuen Konstantenzeichen c und betrachten die Klasse $\mathcal{K}'$ von $\mathcal{L}'$-Strukturen wie oben derart, dass die Interpretation des Konstantenzeichen c in der endlichen Äquivalenzklasse liegt.

(c) Schreibe eine $\mathcal{L}'$-Theorie T, deren Modelle genau die $\mathcal{L}'$-Strukturen in $\mathcal{K}'$ sind. Ist die Theorie konsistent?

(d) Zeige mit einem Back-&-Forth-System, dass je zwei Modelle der Theorie T elementar äquivalent sind.

(e) Wie viele abzählbare Strukturen (bis auf Isomorphie) gibt es in $\mathcal{K}'$?

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Forme folgende Formeln in pränexe Normalform um:

(a) $\Big(\forall x \forall y \big(f(x) \doteq f(y)\big) \to \exists z \forall u \big(z \doteq f(u)\big)\Big)$.

(b) $\forall x \forall y \Bigg(\neg(x \doteq y) \longrightarrow \forall z \forall u \bigg(\Big(\neg(z \doteq x) \longrightarrow \big(\neg(z \doteq y) \vee (u \doteq y)\big)\Big) \longrightarrow \neg(z \doteq u)\bigg)\Bigg)$.

Beschreibe für jede der obigen Aussagen die Strukturen, welche diese erfüllen.

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Sei $\mathcal{S}$ die Kollektion aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Die Menge $\mathcal{S}$ ist partiell geordnet bezüglich Inklusion (siehe Appendix C im Skript).

(a) Gibt es eine obere Schranke für $\Gamma = \{\emptyset, \{5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 7\}\}$ in $\mathcal{S}$? Gibt es eine einzige obere Schranke?

Bitte wenden!!

(b) Zeige, dass die Kollektion $\Gamma = \{\{0, 1, \ldots, n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ linear geordnet ist. Besitzt Γ eine obere Schranke in $\mathcal{S}$?

(c) Gibt es maximale Elemente in $\mathcal{S}$?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter erfolgt auf der Lernplattform ILIAS.