Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Dr. Nadja Hempel — Wintersemester 2020/2021

Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 7
Abgabe: 13.01.2021, 14 Uhr
Begründe alle Antworten!

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus unendlich vielen verschiedenen einstelligen Relationszeichen $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besteht. Wir betrachten die $\mathcal{L}$-Theorie T, deren Modelle die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart sind, dass die Interpretationen der Prädikate $P_n^{\mathcal{A}}$ unendliche disjunkte Teilmenge sind (Siehe Aufgabe 1(c) des Blattes 6).

(a) Zeige, dass jedes Modell $\mathcal{M}$ von T eine elementar Erweiterung $\mathcal{N}$ besitzt, so dass die Menge $N \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(P_n^{\mathcal{N}} \cup M)\right)$ Mächtigkeit Kontinuum hat.

(b) Zeige, dass je zwei Modelle $\mathcal{N}_1$ und $\mathcal{N}_2$ von T wie in (a) Back-&-Forth-äquivalent sind.

(c) Schließe daraus, dass T vollständig ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Betrachte die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, +)$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{0, +\}$.

(a) Zeige, dass es für jede natürliche Zahl $d \neq 0$ aus $\mathbb{N}$ eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi_d[x]$ gibt, so dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{N} \models \varphi_d[n] \iff d \text{ teilt } n.$$

(b) Gegeben sei eine Zerlegung der Primzahlen $\mathcal{P}$ in zwei nicht-leeren disjunkten Teilmenge A und B. Zeige, dass es ein Element m in einer elementaren Erweiterung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{N}$ derart gibt, dass die Primzahl p genau dann das Element m *teilt* (im Sinne, dass $\mathcal{M} \models \varphi_p[m]$), wenn p in A liegt. Wenn A endlich ist, lässt sich m explizit beschreiben?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

(a) Zeige, dass die Abstandsfunktion $\begin{array}{rccc} |\cdot|: & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

(b) Zeige, dass die Funktion $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & \underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}_{m \text{ Mal}} \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Betrachte die Funktion $(x,y) \mapsto x^y$.

(c) Zeige, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ primitiv rekursiv ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter erfolgt auf der Lernplattform ILIAS.