Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Dr. Nadja Hempel — Wintersemester 2020/2021

Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 8
Abgabe: 20.01.2021, 14 Uhr
Begründe alle Antworten!

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}_{\text{Graph}} = \{R\}$ die Graphensprache, welche aus einem zweistelligen Relation R für die Kantenrelation besteht. Beachte, dass eine Kante aus zwei verschiedenen Elementen besteht!

Ein Zufallsgraph ist ein (nicht-leerer) Graph X derart, dass es für je zwei endliche disjunkte Teilmengen A und B von X einen Punkt x aus X gibt, welcher in Relation mit jedem Element aus A aber mit keinem Element aus B liegt.

(a) Gibt es endliche Zufallsgraphen?

(b) Gib eine $\mathcal{L}_{\text{Graph}}$-Theorie T an, welche die Klasse aller Zufallsgraphen axiomatisiert.

(c) Betrachte die $\mathcal{L}_{\text{Graph}}$-Struktur $\mathcal{N}$ mit Universum $\mathbb{N}$ und

$$R^{\mathcal{N}}(n,m) \iff [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1,$$

wobei $[n]_i$ aus $\{0,1\}$ der i-te Koeffizient der binären Darstellung der natürlichen Zahl $n = \sum_{i=0}^{k} [n]_i \cdot 2^i$ ist, mit $k \geq 0$. Zeige, dass $\mathcal{N}$ ein Modell der Theorie T ist.

(d) Zeige mit Hilfe eines Back-&-Forth-Systems, dass T vollständig ist.

(e) Zeige, dass es eine elementaren Erweiterung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{N}$ mit einem neuen Element x gibt, das mit keinem Element aus $\mathcal{N}$ verbunden ist. Gibt es ein solches x aus $\mathcal{M}$, welches sogar mit keinem Element aus $\mathcal{M}$ verbunden ist?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Seien A und B Teilmengen von $\mathbb{N}^k$ derart, dass $|A \cap B| \leq 4$ und die Mengen $A \cup B$ sowie B rekursiv sind. Zeige, dass A rekursiv sein muss. Muss A primitiv rekursiv sein?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

(a) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$g(x_1, \ldots, x_k, y) = \sum_{z<y} f(x_1, \ldots, x_k, z)$$

auch (primitiv) rekursiv ist, wobei die leere Summe Wert 0 hat.

(b) Zeige, dass die Teilmenge von $\mathbb{N}$, welche aus den Potenzen von 2 besteht, primitiv rekursiv ist.

(c) Schließe daraus, dass die Funktion $x \mapsto$ Anzahl von Potenzen von 2, welche echt kleiner als x sind, eine primitiv rekursive Funktion ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter erfolgt auf der Lernplattform ILIAS.