Übungsblatt 1

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 1:

1. Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x_1 = x_2 \\ 0 & \text{für} \quad x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

   Zeigen Sie mit Hilfe des Riemannschen Integrabilitätskriteriums, daß f über $[0,1]^2$ Riemann-integrierbar ist.

2. Zeigen Sie: $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ bildet eine Menge vom (Lebesgue-) Maß Null, aber nicht vom (Jordan-) Inhalt Null.

Aufgabe 2: Beweisen Sie: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ und jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist die „Hyperebene“

$$H_{j,c} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = c\}$$

eine Menge vom Maß Null. Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt für $n = 2$ und $j = 2$.

Aufgabe 3: Es seien $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ über $[0,1]$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie:

1. Die durch $h(x_1, x_2) := f(x_1)g(x_2)$ definierte Funktion h ist über $[0,1]^2$ Riemann-integrierbar.

2. Es gilt

$$\iint\limits_{[0,1]^2} h(x_1, x_2)\; d(x_1, x_2) = \left(\int_0^1 f(x_1)\; dx_1\right)\left(\int_0^1 g(x_2)\; dx_2\right).$$

3. Berechnen Sie:

$$\iint\limits_{[0,1]^2} x_1 x_2^2 \; d(x_1, x_2).$$

Aufgabe 4: Sei $g : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ über $[0,1]^n$ Riemann-integrierbar. Ferner gelte $g([0,1]^n) \subseteq [a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f \in C[a,b]$, dann ist die Funktion $f \circ g$ über $[0,1]^n$ Riemann-integrierbar.

Abgabetermin: Donnerstag, 25. Oktober vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.