Übungsblatt 10

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 37: Es sei $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ die folgende Zylinderoberfläche:

$$\mathcal{F}_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \le z \le 1\} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{F}_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ z = \pm 1\}.$$

Ferner werde das Vektorfeld $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{f}(x,y,z) := (xy^2, x^2y, y)$.

1. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_{\mathcal{F}} \vec{f}$ direkt.
2. Berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} \vec{f}$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes.

Aufgabe 38: Sei $R > 1$. Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Torus sei gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\phi(u,v) := ((R + \cos v)\cos u, (R + \cos v)\sin u, \sin v),\ u, v \in [0, 2\pi].$$

1. Veranschaulichen Sie sich den Torus.
2. Berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} \vec{f}$ für $\vec{f}(x,y,z) := (x^3, y, -3zx^2)$.

Aufgabe 39: Es sei H_R die obere Halbkugel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $\vec{0}$ und Radius R. $\mathcal{F}$ sei der Teil der Oberfläche von H_R, welcher vom Zylinder

$$Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}\}$$

ausgeschnitten wird. Ferner sei γ die positiv orientierte Randkurve von $\mathcal{F}$. Berechnen Sie $\int_\gamma \vec{f}$ für $\vec{f}(x,y,z) := (xy, y^2, yz)$.

Aufgabe 40: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet und $f \in C^{(2)}(G, \mathbb{R})$ harmonisch in G. Beweisen Sie:

1. Besitzt f in G ein lokales Maximum (Minimum), so ist f auf ganz G konstant.
2. Ist f zusätzlich auf ∂G stetig fortsetzbar und ist f auf ∂G konstant, so ist f auf ganz G konstant.

Abgabetermin: Donnerstag, 10. Januar vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.