Übungsblatt 11

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 41:

1. Es seien $u, v \in C^{(2)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Seien ferner

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad \text{und} \qquad \nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

   Beweisen Sie: $\Delta(u \cdot v) = u \cdot \Delta v + 2 \cdot \langle \nabla u, \nabla v \rangle + v \cdot \Delta u$.

2. Sei $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ fest. Für $\vec{x} \in D_{\vec{\xi}} := \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{\xi}\}$ sei

$$P_n(\vec{x}, \vec{\xi}) := \frac{||\vec{\xi}||^2 - ||\vec{x}||^2}{||\vec{x} - \vec{\xi}||^n},$$

   wobei $|| \cdot ||$ die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ sei. Zeigen Sie, daß $P_n(\vec{x}, \vec{\xi})$ auf $D_{\vec{\xi}}$ harmonisch ist.

Aufgabe 42:

1. Es sei f stetig auf $\partial K_r(\vec{a})$. Zeigen Sie, daß das Dirichletsche Randwertproblem

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \ \vec{x} \in K_r(\vec{a}) \qquad \text{und} \qquad u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \ \vec{x} \in \partial K_r(\vec{a})$$

   genau eine Lösung hat.

   Hinweis: Führen Sie das Problem auf die Einheitskugel zurück.

2. Es sei $u : \overline{K_r}(\vec{a}) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig und in $K_r(\vec{a})$ harmonisch. Beweisen Sie, daß dann für alle $\vec{x} \in K_r(\vec{a})$ die sogenannte Poissonsche Integralformel gilt:

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r} \int\limits_{\partial K_r(\vec{a})} P_3(\vec{x} - \vec{a}, \vec{\xi} - \vec{a}) \cdot u(\vec{\xi}) \, do(\vec{\xi}).$$

Aufgabe 43: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig und besitze die Mittelwerteigenschaft, das heißt für jede in D enthaltene abgeschlossene Kugel $\overline{K_r}(\vec{a})$ gelte

$$f(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{||\vec{x}||=1} f(\vec{a} + r\vec{x})\, do(\vec{x}).$$

Zeigen Sie: f ist harmonisch.

Hinweis: Betrachten Sie ein geeignetes Dirichletsches Randwertproblem.

Aufgabe 44: Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und stückweise stetig differenzierbar. Ferner habe g die Periode $p > 0$.

1. Zeigen Sie: $g(x)$ läßt sich durch eine trigonometrische Reihe

$$\hat{g}(x) := \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{p} nx\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} nx\right)\right)$$

darstellen. Geben Sie die Integraldarstellung der Fourier-Koeffizienten $A_0, A_n, B_n,\ n \in \mathbb{N}$, an.

2. Es werde die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf [0,1) definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x \le 1/2 \\ 1 - x & \text{für} \quad 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

und dann auf ganz $\mathbb{R}$ 1-periodisch fortgesetzt. Berechnen Sie explizit die Reihe $\hat{g}(x)$.

3. Leiten Sie aus 2. die folgende Beziehung her:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

Abgabetermin: Donnerstag, 17. Januar vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.