Übungsblatt 13

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 49:

1. Es sei $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Die Funktion $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ werde in $[-\pi, \pi)$ definiert durch $f(x) := \cos(\lambda x)$. Zeigen Sie, daß f die folgende Fourier-Entwicklung besitzt:

$$\cos(\lambda x) = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\sin(\lambda\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx)}{\lambda^2 - k^2}.$$

2. Setzen Sie in 1. $x = \pi$ und $\lambda = y$ und leiten Sie für alle $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ die folgende Darstellung ab:

$$\cot(\pi y) - \frac{1}{\pi y} = \frac{2y}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{y^2 - k^2}.$$

Aufgabe 50:

1. Es sei $0 < a < x < 1$. Zeigen Sie:

$$\pi \int_a^x \left(\cot(\pi t) - \frac{1}{\pi t} \right) dt = \log\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) - \log\left(\frac{\sin(\pi a)}{\pi a} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k^2 - x^2}{k^2 - a^2} \right).$$

2. Beweisen Sie mit Hilfe von 1. die folgende Produktformel:

$$\sin(\pi x) = \pi x \cdot \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right).$$

Was erhält man für $x = 1/2$?

Aufgabe 51: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, daß f dann auch stückweise stetig ist.

Aufgabe 52: Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und 2π-periodisch. Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x+n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zuerst für die Funktion $f(x) = \exp(ikx),\ k \in$

$\mathbb{Z}$ und verwenden Sie dann, daß sich jede stetige 2π-periodische Funktion gleichmäßig durch trigonometrische Funktionen approximieren läßt. **Abgabetermin:**

Donnerstag, 31. Januar vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.