Übungsblatt 14

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 53:

1. Für die beiden Folgen $(a_n)_{n\geq 1},\ (b_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ gelte $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ und $b_n \to b$ $(n \to \infty)$. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab.$$

   Hinweis: $a_k b_{n-k} = (a_k - a) b_{n-k} + a b_{n-k}$.

2. Es seien $\sum_{k\geq 0} a_k$ und $\sum_{k\geq 0} b_k$ zwei konvergente Reihen. Ferner sei

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

   Beweisen Sie: Die Reihe $\sum_{n\geq 0} c_n$ ist $(C,1)$-summierbar zum Wert

$$\left(\sum_{k\geq 0} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k\geq 0} b_k\right).$$

Aufgabe 54: Die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt A-summierbar zum Grenzwert s, falls gilt:

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geq 0} a_n r^n = s.$$

Beweisen Sie: Ist die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ $(C,1)$-summierbar zum Wert s, dann ist die Reihe auch A-summierbar zum gleichen Wert.

Aufgabe 55:

1. Es sei $b > 0$. Beweisen Sie (zum Beispiel durch partielle Integration) die folgende Identität:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t|} \cos(ut)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{u^2 + b^2}.$$
2. Es seien $a, b \in \mathbb{R},\ b > 0$. Beweisen Sie:
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + b^2}\, dx = \frac{\pi}{2b} e^{-b|a|}.$$
Hinweis: Wenden Sie das Fouriersche Integraltheorem auf ein geeignetes f an.

Aufgabe 56: Es sei $f \in \mathcal{L}[a, b]$. Beweisen Sie: Die durch
$$F(x) := \int_a^x f, \qquad x \in [a, b]$$
definierte Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auf $[a, b]$ stetig.

Abgabetermin: Donnerstag, 7. Februar vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.