Übungsblatt 15

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 57: Die Funktion $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ differenzierbar und besitze dort eine beschränkte Ableitung. Zeigen Sie: Es gilt $G' \in \mathcal{L}[a,b]$ und

$$G(b) = G(a) + \int_a^b G'.$$

Anleitung zum Beweis:

1. Setzen Sie $G(x) := G(b)$ für $x > b$ und
$$g_n(x) := \frac{G(x+1/n) - G(x)}{1/n} \quad \text{für} \quad x \in [a,b].$$

2. Zeigen Sie: Für alle $x \in [a,b]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$|g_n(x)| \leq \sup_{a \leq t \leq b} |G'(t)|.$$

3. Zeigen Sie:
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n = \int_a^b G'.$$

4. Beweisen Sie:
$$\int_a^b G(x+1/n)\, dx = \int_{a+1/n}^{b+1/n} G(x)\, dx.$$

Aufgabe 58: Die Folge der Funktionen $f_n \in \mathcal{L}[a,b]$ konvergiere fast überall gegen f, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $|f_n - f| \leq h$ mit einer nichtnegativen Funktion $h \in \mathcal{L}[a,b]$. Zeigen Sie: Dann gehört auch f zu $\mathcal{L}[a,b]$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Aufgabe 59: Sei $0 < a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ und $f \in \mathcal{L}[a, b]$. Ferner sei f in einer (linksseitigen) Umgebung von b nicht Null fast überall. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b t^n f(t)\, dt \right)^{1/n} = b.$$

Aufgabe 60: Es sei

$$\mathcal{L}_2[a, b] := \{f \in \mathcal{L}[a, b],\ ||f||_2 := \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} < \infty\}.$$

1. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(x) := \sin(nx) \in \mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$.
2. Die Menge $\{f_n\}_{n\geq 1}$ ist in dem metrischen Raum $(\mathcal{L}_2[-\pi, \pi], || \cdot ||_2)$ abgeschlossen und beschränkt.
3. Ist die Menge $\{f_n\}_{n\geq 1}$ kompakt, d.h. besitzt jede offene Überdeckung von $\{f_n\}_{n\geq 1}$ eine endliche Teilüberdeckung?

Dieses Übungsblatt muß nicht mehr abgegeben werden.