Übungsblatt 2

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 5: Die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \text{ oder } y \notin \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0 \\ 1 - 1/q & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \text{ und } y \in \mathbb{Q},\ x = p/q,\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. f ist stetig in allen Punkten der Menge
$$M := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\}.$$
2. Die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist eine Nullmenge des $\mathbb{R}^2$.
3. Sei $x = p/q,\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1$. Existiert das Riemann-Integral
$$\int_0^1 f(p/q, y)\, dy?$$

Aufgabe 6: Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ seien ∂A und ∂B Nullmengen. Zeigen Sie:

1. $\partial(A \cup B)$ und $\partial(A \cap B)$ sind Nullmengen.
2. Sind A und B zusätzlich beschränkt, so gilt
$$v_n(A \cup B) \leq v_n(A) + v_n(B).$$
3. Gilt zusätzlich noch $A \cap B = \phi$, dann ist $v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B)$.

Aufgabe 7: Welche der folgenden Mengen sind Jordan-meßbar?

1. Für $a_i > 0,\ 1 \leq i \leq n$, sei
$$M_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 \leq 1\}$$
2. $$M_2 := \bigcup \{\{r\} \times [0,1] \mid r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}.$$

Aufgabe 8: Seien $a, b, c > 0$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$T_{A,z} := \int_A (x^2 + y^2)\, d(x,y,z)$$

des Quaders

$$A := \{(x,y,z) \in [0,a] \times [0,b] \times [0,c]\}$$

bezüglich der $z-$Achse.

Abgabetermin: Mittwoch, 31. Oktober vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.