Übungsblatt 3

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 9: Es seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und Jordan-meßbar. Zeigen Sie:

1. $A \times B := \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \vec{x} \in A,\ \vec{y} \in B\}$ ist Jordan-meßbar.
2. $v_{n+m}(A \times B) = v_n(A) \cdot v_m(B)$

Aufgabe 10: Es sei $I^{(n)}$ ein $n-$dimensionales Intervall. Ferner sei die Funktion $f : I^{(n)} \to \mathbb{R}$ stetig auf $I^{(n)}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\vec{x_0} \in I^{(n)}$, so daß gilt:

$$\int\limits_{I^{(n)}} f = f(\vec{x_0}) \cdot v_n(I^{(n)}).$$

Aufgabe 11:

1. Es sei $C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ |x| + |y| \leq 1\}$. Berechnen Sie:
$$\iint\limits_{C_1} e^{x+y}\ d(x, y).$$
2. Es sei $C_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2},\ 1/2 \leq y \leq 1\}$. Berechnen Sie:
$$\iint\limits_{C_2} xy\ d(x, y).$$

Aufgabe 12: Es sei $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R},\ c > 0$. Ferner sei $A_n(c)$ der $n-$Simplex mit den Ecken $\vec{0}, c\vec{e_1}, \dots, c\vec{e_n}$, d.h.

$$A_n(c) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leq c,\ 0 \leq x_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}.$$

Berechnen Sie das $n-$dimensionale Volumen $v_n(A_n(c))$.

Abgabetermin: Donnerstag, 8. November vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.