Übungsblatt 4

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 13: Berechnen Sie das Trägheitsmoment T_z einer Kugel K vom Radius R bezüglich eines Durchmessers. In kartesischen Koordinaten gilt

$$K := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

und

$$T_z := \iiint\limits_K (x^2 + y^2)\ d(x, y, z).$$

Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten (r, ψ_1, ψ_2);

$(x, y, z) = (r \cos\psi_1 \cos\psi_2, r \cos\psi_1 \sin\psi_2, r \sin\psi_1),\ r \geq 0,\ \psi_1 \in [0, \pi],\ \psi_2 \in [0, 2\pi].$

Aufgabe 14:

1. Die Abbildung $\phi : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ werde definiert durch $\phi(r, \varphi) := (r \cos\varphi, r \sin\varphi) = (x, y)$. Sei ferner

   $$T := \{(r, \varphi) \mid \rho_2(\varphi) \leq r \leq \rho_1(\varphi),\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}.$$

   Zeigen Sie:

   $$\iint\limits_{\phi(T)} d(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho_1^2(\varphi) - \rho_2^2(\varphi))\ d\varphi.$$

2. Verwenden Sie 1., um den Flächeninhalt von $\phi(T)$ zu berechnen, wobei T durch $\rho_2(\varphi) :\equiv 0,\ \rho_1(\varphi) := a \cos\varphi,\ \varphi_1 := -\pi/2,\ \varphi_2 := \pi/2$ definiert sei. Welcher Bereich wird durch $\phi(T)$ dargestellt?

Aufgabe 15: Für $R > 0$ sei M_R die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$:

$$M_R := \{(x, y, z) \mid x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} \leq R\}.$$

1. Berechnen Sie $v_3(M_1)$, indem Sie z.B. die Substitution $x = r \cos^3\varphi,\ y = r \sin^3\varphi,\ z = z$ verwenden.

2. Benutzen Sie 1., um $v_3(M_R)$ zu bestimmen.

3. Veranschaulichen Sie sich M_1.

Aufgabe 16: Es sei in der $x - z-$Ebene die Funktion $x = f(z)$ gegeben, wobei $z_1 \leq z \leq z_2$ und $f(z) \geq 0$. Es sei $v_2(\mathcal{F})$ der Flächeninhalt der zwischen der Kurve x und der $z-$Achse liegenden Fläche $\mathcal{F}$. Dann heißt der Punkt (x_s, z_s) mit

$$x_s := \frac{1}{v_2(\mathcal{F})} \int\limits_{\mathcal{F}} x \; d(x,z), \quad z_s := \frac{1}{v_2(\mathcal{F})} \int\limits_{\mathcal{F}} y \; d(x,z)$$

Schwerpunkt von $\mathcal{F}$.

1. Zeigen Sie: Dreht man $\mathcal{F}$ um die $z-$Achse, so gilt für das Volumen V des entstehenden Rotationskörpers

$$V = \pi \int_{z_1}^{z_2} f(z)^2 \; dz.$$

2. Beweisen Sie : Zwischen V, $v_2(\mathcal{F})$ und x_s besteht die Beziehung

$$V = 2\pi \cdot x_s \cdot v_2(\mathcal{F}),$$

d.h. der Rotationskörper hat ein Volumen gleich dem Inhalt von $\mathcal{F}$ multipliziert mit der Länge des Weges, den der Schwerpunkt von $\mathcal{F}$ bei der Rotation beschreibt (sog. „Guldinsche Regel").

3. Berechnen Sie mit Hilfe von 2. das Volumen V_T des Torus T, der durch Rotation eines Kreises vom Radius r entsteht und der die innere Weite $2a$ hat.

Abgabetermin: Donnerstag, 15. November vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.