Übungsblatt 5

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 17: Sei M eine nicht-leere Menge. Unter einer Metrik auf M versteht man eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i): Es gilt $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
(ii): Für alle $x, y \in M$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
(iii): Für alle $x, y, z \in M$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ein metrischer Raum ist ein Paar (M, d), bestehend aus einer nicht-leeren Menge M und einer Metrik d. Eine Folge $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq M$ heißt konvergent gegen $f_0 \in M$, falls $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f_0) = 0$ gilt. Eine Folge $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq M$ heißt Cauchy-Folge in (M, d), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß für alle $n, m > n_0(\varepsilon)$ gilt: $d(f_n, f_m) < \varepsilon$.

1. Zeigen Sie: $(C[a, b], d_\infty)$ mit $d_\infty(f_1, f_2) := \int_a^b |f_1 - f_2|$ ist ein metrischer Raum.

2. Zeigen Sie: In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge. Gilt in $(C[a, b], d_\infty)$ auch die Umkehrung?

Aufgabe 18:

1. Es werde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) := x + \frac{1}{1 + e^x}.$$
Zeigen Sie: Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$. Hat f einen Fixpunkt? Wie ist der Zusammenhang mit dem Banachschen Fixpunktsatz?

2. Es werde die Abbildung $\Omega : (C[0, 1], d_\infty) \to (C[0, 1], d_\infty)$ definiert durch
$$(\Omega f)(x) := \int_0^x f(t)\, dt, \quad x \in [0, 1].$$
Ist Ω kontrahierend? Ist $\Omega \circ \Omega$ kontrahierend?

Aufgabe 19: Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Unter der Laplace-Transformation $L(f) =: F$ auf $(0, \infty)$ versteht man das Integral
$$F(s) := \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx,$$

wenn es für $s > 0$ existiert.

1. Berechnen Sie $L(f_i),\ i = 1, 2$ für $f_1(x) := x^n,\ n \geq 0$ und $f_2(x) := \sin x$.

2. Zeigen Sie: Falls $L(f^{(n)})$ für alle $n \in \{0, 1, 2\}$ existiert, so gilt

$$\begin{aligned} L(f')(s) &= sL(f)(s) - f(0) \\ L(f'')(s) &= s^2 L(f)(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

3. Lösen Sie mit Hilfe von 2. das Anfangswertproblem

$$f'' + f = x, \quad f(0) = 0,\ f'(0) = 2.$$

Aufgabe 20: Es sei

$$\varphi(y) := \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(xy)\, dx.$$

1. Zeigen Sie, daß φ der Differentialgleichung

$$\varphi' + \frac{1}{2} y \cdot \varphi = 0$$

   genügt.

2. Berechnen Sie mit Hilfe von 1. das obige Integral.

Abgabetermin: Donnerstag, 22. November vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.