Übungsblatt 6

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 21:

1. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig und stetig partiell nach x differenzierbar. Ferner seien $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in (a, b). Zeigen Sie, daß durch

$$F(x) := \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

eine auf (a, b) differenzierbare Funktion dargestellt wird, und berechnen Sie ihre Ableitung.

2. Untersuchen Sie die Funktion

$$F(x) := \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (1 + |y|)\, dy$$

im Intervall $[-2, 2]$ auf relative Extrema (Randpunkte nicht vergessen).

Aufgabe 22: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^b - x^a}{\log x} & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ b - a & \text{für} \quad x = 1. \end{cases}$$

1. Beweisen Sie: f ist in $[0, 1]$ stetig.

2. Zeigen Sie: Für alle $x \in [0, 1]$ gilt $f(x) = \int_a^b x^y\, dy$.

3. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\, dx.$$

Aufgabe 23:

1. Untersuchen Sie die beiden folgenden uneigentlichen Integrale auf gleichmäßige Konvergenz:

$$\int_0^\infty e^{-xy^2}\,dy \qquad \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy.$$

2. Für $x > 0$ sei

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\,dy.$$

   Ist F differenzierbar? Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\,dy.$$

3. Zeigen Sie, daß

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{x+y}\,dy$$

   für alle $x \geq 0$ gleichmäßig konvergent ist.

Aufgabe 24:

1. Es seien $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ über $[0,\infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\left(\int_0^\infty f\cdot g\right)^2 \leq \left(\int_0^\infty f^2\right)\cdot\left(\int_0^\infty g^2\right).$$

2. Zeigen Sie unter Verwendung der multiplikativen Aufspaltung

$$(\log t)e^{-t}t^{x-1} = e^{-t/2}t^{(x-1)/2}(\log t)e^{-t/2}t^{(x-1)/2}$$

   und mit Hilfe von 1., daß $(\log\Gamma(x))'' \geq 0$ gilt für alle $x > 0$. (Die Gammafunktion ist also logarithmisch konvex).

Abgabetermin: Donnerstag, 29. November vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.