Übungsblatt 7

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 25:

1. Es seien $\varphi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Es gelte $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \tau$, wobei $\tau : [a,b] \to [c,d]$, $\tau(a) = c$, $\tau(b) = d$ stetig und streng monoton ist. Zeigen Sie: Durchläuft P_1 die Zerlegungen von $[a,b]$ und P_2 diejenigen von $[c,d]$, so gilt
$$\sup_{P_1} L(\varphi_1, P_1) = \sup_{P_2} L(\varphi_2, P_2).$$

2. Es seien φ_1 und φ_2 zwei verschiedene Parameterdarstellungen der glatten Kurve γ. Beweisen Sie, daß die Kurvenlänge $L(\gamma)$ nicht von der Wahl einer solchen Parameterdarstellung abhängt.

Aufgabe 26: Veranschaulichen Sie sich die folgenden Kurven. Welche sind rektifizierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls deren Länge.

1. $\gamma_1 :\ \varphi(t) := (t, t^{3/2}),\ 0 \le t \le 1$

2. $\gamma_2 :\ \varphi(t) := (t\cos t, t\sin t, t),\ 0 \le t \le 2$

3. $\gamma_3 :\ \varphi(t) := (t, t^2 \cos\frac{\pi}{t^2}),\ 0 < t \le 1,\ \varphi(0) := (0,0)$

4. Die Kurve γ_4 sei in Polarkoordinaten $(r(\varphi), \varphi)$ gegeben durch $r(\varphi) := \varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/2$

Aufgabe 27: Es sei $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ferner werde in $\mathbb{R}^2 \backslash \{\vec{0}\}$ ein Vektorfeld $\vec{f}$ gegeben durch
$$\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) := (\varphi(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot x, \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot y).$$

1. Skizzieren Sie das Vektorfeld.

2. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma_1} \vec{f}$, falls $\gamma_1 := \partial K_r(0)$ der positiv (dh. im Gegenuhrzeigersinn) durchlaufene Kreis um Null mit Radius r ist.

3. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma_2} \vec{f}$, falls γ_2 das positiv umlaufene Quadrat mit den Eckpunkten $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$ ist.

Aufgabe 28:

1. Es sei $\vec{f}$ ein stetiges Vektorfeld und γ eine glatte Kurve. Beweisen Sie die folgende Abschätzung für Kurvenintegrale:

$$\left| \int_\gamma \vec{f} \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{\vec{x} \in \gamma} ||\vec{f}(\vec{x})||_2.$$

2. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in D. Ferner sei γ eine glatte Kurve in D mit der Parameterdarstellung $\varphi : [a, b] \to D$. Es gelte $\varphi''(t) = (\mathrm{grad} f)(\varphi(t))$. Ferner sei

$$F(t) := \frac{1}{2} \left\langle \varphi'(t), \varphi'(t) \right\rangle .$$

Beweisen Sie:

$$F(b) - F(a) = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$

Abgabetermin: Donnerstag, 6. Dezember vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.