Übungsblatt 8

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 29: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld ($\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$). Dann nennt man

$$\mathrm{div}\vec{f} := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

die Divergenz und

$$\mathrm{rot}\vec{f} := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

die Rotation des Vektorfeldes $\vec{f}$.

1. Es werde $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{f}(\vec{x}) := -\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||_2^2}.$$

   Berechnen Sie $\mathrm{div}\vec{f}$, $\mathrm{rot}\vec{f}$ und $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{f})$.

2. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $g : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ g) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} =: \Delta g.$$

   Berechnen Sie ferner $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ g)$.

Aufgabe 30: Es sei $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(x, y, z) := (yz, xz + y^2, xy)$.

1. Ist $\vec{f}$ exakt?
2. Geben Sie im Falle der Exaktheit von $\vec{f}$ eine Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an mit $\vec{f} = \mathrm{grad}\ F$.
3. Es sei γ eine glatte Kurve, welche die Punkte (2,0,7) (Anfangspunkt) und (1,3,2) miteinander verbindet. Berechnen Sie $\int_\gamma \vec{f}$.

Aufgabe 31:

1. Die offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ habe die folgende Eigenschaft $(*)$:
   Es gibt keine zwei offene, nicht-leere Mengen G_1 und G_2 mit $G_1 \cap G_2 = \phi$ und $G_1 \cup G_2 = G$. Beweisen Sie:

   (a) Ist $c \in G$ und G_c diejenige Teilmenge von G, welche aus allen Punkten $d \in G$ besteht, die durch einen in G verlaufenden Weg mit c verbunden werden können, so ist G_c eine offene Menge.

   (b) $G_2 := G \backslash G_c$ ist offen.

   (c) G ist wegzusammenhängend.

2. Beweisen Sie: Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend, dann besitzt G die obige Eigenschaft $(*)$.

Aufgabe 32: Faßt man den $\mathbb{R}^2$ als die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ auf und ist f eine in einer offenen Teilmenge D von $\mathbb{C}$ stetige Funktion, so wird das Kurvenintegral längs des glatten Weges γ mit der Parameterdarstellung $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

1. Zerlegen Sie das obige Kurvenintegral in Real- und Imaginärteil, indem Sie f und φ in Real- und Imaginärteil zerlegen.

2. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie für $\varphi(t) := \cos(kt) + i\sin(kt),\ 0 \leq t \leq 2\pi$, das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz.$$

3. Für $0 \leq s \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{C}$, $|c| < 1$ sei

$$H(s) := \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{e^{ikt} - sc}\, dt.$$

   Zeigen Sie, daß $H(s)$ für alle $s \in [0, 1]$ konstant ist und verwenden Sie dies, um das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{z - c}\, dz, \quad |c| < 1$$

   auszurechnen. Hierbei sei γ die gleiche Kurve wie in 2.

Abgabetermin: Donnerstag, 13. Dezember vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.