Übungsblatt 9

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 33: Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $A \subseteq G$ Jordan-meßbar und $\mathring{A}$ ein Gebiet. Die Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ sei auf G stetig partiell differenzierbar. Die Fläche $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^3$ sei in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\}.$$

1. Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ hat den Flächeninhalt

$$O(\mathcal{F}) = \iint_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, d(x, y).$$

2. Verwenden Sie 1., um den Flächeninhalt der Oberfläche des Paraboloids $z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq h$, zu berechnen.

3. Berechnen Sie die Mantelfläche des Kegels der Höhe h, welcher durch Rotation der Geraden $z = hx/r,\ 0 \leq x \leq r$, um die $z-$Achse entsteht. Leiten Sie das Resultat auch mit einer elementar-geometrischen Überlegung her.

Aufgabe 34:

1. Sei $R > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teiles $\mathcal{F}$ der Halbkugeloberfläche

$$H_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\},$$

der vom Zylinder

$$Z_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = Rx\}$$

ausgeschnitten wird.
Hinweis: Zeigen Sie, daß man $\mathcal{F}$ folgendermaßen parametrisieren kann:

$$\phi(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sqrt{R^2 - r^2}),$$

wobei (r, φ) den Bereich

$$B := \{(r, \varphi) \mid r \in [0, R\cos\varphi],\ \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$$

durchläuft.

2. Zeigen Sie: Werden aus der Halbkugel H_K zwei solche Teile herausgeschnitten, dann hat die Restfläche den Inhalt $4R^2$.

Aufgabe 35:

1. Seien $a, b > 0$. Im $\mathbb{R}^3$ sei der Bereich K der Durchschnitt der Mengen

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\} \quad \text{und}$$

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\}.$$

Veranschaulichen Sie sich K. Ist K ein Normalbereich?

2. Nimmt man das Vektorfeld $\vec{f}(x, y, z) := (x, y, z)$ und integriert über die positiv orientierte Oberfläche $\mathcal{F}(K)$ von K, so ergibt sich für das Volumen $V(K)$ von K

$$V(K) = \frac{1}{3} \int\limits_{\mathcal{F}(K)} \vec{f}.$$

3. Berechnen Sie mit Hilfe von 2. das Volumen von K.

Aufgabe 35: Die Differentialgleichung

$$P(x, y) + Q(x, y) \cdot y'(x) = 0$$

heißt in dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ exakt, falls $(P(x, y), Q(x, y))$ in G ein exaktes Vektorfeld ist.

1. Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung

$$(2x^3y^3 - y) + (2x^3y^3 - x) \cdot y'(x) = 0 \qquad (*)$$

in einem Gebiet G exakt ist.

2. Ist $(*)$ nicht exakt, so prüfe man, ob man durch Multiplikation von $(*)$ mit $u_{a,b}(x, y) = x^a y^b$ und geeigneter Bestimmung von a und b eine exakte Differentialgleichung in einem Gebiet erhalten kann.

3. Läßt sich 2. durchführen, so bestimmen Sie in einem Gebiet G eine Stammfunktion $F(x, y)$ von

$$u_{a,b}(x, y) \cdot (P(x, y), Q(x, y)),$$

und geben Sie dort die allgemeine Lösung von $(*)$ in impliziter Form an.

4. Sei $(x_0, y_0) \in G$. Läßt sich eine Lösung von $(*)$ mit $y(x_0) = y_0$ in expliziter Form finden?

Abgabetermin: Donnerstag, 20. Dezember vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.