Prof. Dr. R. Wallisser

Analysis I im WS 2000/01

I Von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$

1. Die Axiome von Peano.
2. Das Beweisverfahren durch vollständige Induktion – Addition und Multipliaktion in $\mathbb{N}$.
3. Anordnung von $\mathbb{N}$.
4. Binomialkoeffizienten, binomischer Satz – etwas Kombinatorik.
5. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ – Äquivalenzrelationen in $\mathbb{N}^2$.
6. Der „Ring“ der ganzen Zahlen.
7. Fortsetzung der Anordnung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.
8. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ – Äquivalenzrelationen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
9. Ausdehnung der Anordnung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$.
10. Die Funktion „Betrag“ auf $\mathbb{Q}$.
11. Folgen rationaler Zahlen, die in $\mathbb{Q}$ konvergieren.
12. Cauchyfolgen rationaler Zahlen – Ringeigenschaft der Cauchyfolgen, Idealeigenschaft der Nullfolgen.
13. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen.
14. Die Vollständigkeit des Körpers der reellen Zahlen.
15. Der Satz von der oberen Grenze.
16. Intervallschachtelungen.
17. Dualbrüche.
18. Einige oft gebrauchte Ungleichungen – Bernoullische, Cauchy–Schwarzsche, arithmetisches und geometrisches Mittel.

II Konvergente Folgen und Reihen

1. Folgen reeller Zahlen – Konvergenz, einige Rechenregeln.
2. Monotone Folgen – einige spezielle z.B. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, babylonisches Wurzelziehen
$$\left(a > 0,\ f_0 > 0,\ f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{a}{f_n}\right), n \geq 0\right).$$
3. Teilfolgen – Satz von Bolzano–Weierstraß.
4. Limes inferior bzw. Limes superior.
5. Unendliche Reihen, insbesondere Konvergenzkriterien (Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, Leibnizkriterium).
6. Zum Rechnen mit unendlichen Reihen – Umordnung konvergenter Reihen; Produkte, insbesondere das Cauchyprodukt von Reihen.
7. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, Konvergenz in $\mathbb{C}$.

III Elementare Funktionen

1. Die Exponentialfunktion E im Komplexen, definiert durch $E(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
2. Die Exponentialfunktion im Reellen $E(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, Monotonieeigenschaft, Vergleich des Wachstums mit dem der Monome x^n.
   $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

3. Die trigonometrischen und die hyperpolischen Funktionen – definiert über die Exponentialfunktion im Komplexen z.B. $\sin z := \frac{1}{2i} \left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \sinh z := \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$, Additionstheoreme.

IV Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

§ 1 Der Begriff des Grenzwertes – Äquivalenz von "$\varepsilon - \delta$ Definition" und "Folgen–definition".
§ 2 Einige Beispiele zum Begriff des Grenzwertes.
§ 3 Rechnen mit Grenzwerten.
§ 4 Stetige Funktionen, – Stetigkeit von Potenzreihen, Stetigkeit von exp, sin, cos in ganz $\mathbb{C}$.
§ 5 Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen. – Weierstraßscher Nullstellensatz, Zwischenwertsatz, Extremumssatz, Stetigkeit der Umkehrfunktion.
§ 6 Anwendung der Sätze aus §5 auf $\exp, a^x, \sin, \cos$.

V Differenzierbarkeit

§ 1 Definitionen und einige Beispiele.
§ 2 Rechenregeln für differenzierbare Funktionen.
§ 3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Folgerungen (Monotonie, lokale Extrema).
§ 4 Der verallgemeinerte MWS – die Regel von de l'Hôspital.
§ 5 Taylorpolynom und Taylorreihe.
§ 6 Einige Anwendungen der Taylorentwicklung
– numerische Berechnung von $\sqrt[3]{2}$
– $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x}\right)$
– **Taylorreihe** von $\log(1+x), |x| < 1$.
– numerische Berechnung von $\log 2$
– Binomische Reihe.

VI Einige lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

1. Exponentialprozesse $\big(u'(t) = \alpha u(t)\big)$
– Wachstums– bzw. Zerfallsprozesse.
2. Gestörte Exponentialprozesse $\big(u'(t) = \alpha u(t) + S(t)\big)$.
Lösung mit Hilfe des Verfahrens der Variation der Konstanten.
3. Die Bernoullische Differentialgleichung
$\big(u'(t) = \alpha A u(t) - \alpha u^2(t)\big)$.
4. Einfache lineare Differentialgleichungssysteme, Räuber–Beute–Modelle.

Analysis II im SS 2001

VII Das Riemannsche Integral

§ 1 Definition und Riemannsches Integrabilitätskriterium.
§ 2 Riemann – Integrierbarkeit stetiger Funktionen; gleichmäßige Stetigkeit.
§ 3 Das Riemann–Integral als positives lineares Funktional.
§ 4 Mittelwertsätze der Integralrechnung.
§ 5 Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung.
§ 6 Integrationsregeln.
§ 7 Ableitung der Taylorentwicklung mit Hilfe der Integralrechnung.

VIII Funktionenfolgen, uneigentliche Integrale, gleichmäßige Konvergenz

§ 1 Funktionenfolgen; einige Beispiele.
§ 2 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen; (Cauchy–Kriterium, Majorantenkriterium).
§ 3 Vertauschung von Grenzübergängen bei gleichmäßiger Konvergenz.
§ 4 Anwendung auf Potenzreihen; insbesondere Ableitung der Taylorreihen für arctg x in $|x| < 1$ und für $\arcsin x$ in $|x| < 1$, bzw. für $(1+x)^\alpha$ in $|x| < 1$.
§ 5 Der Abelsche Stetigkeitssatz.
§ 6 Uneigentliche Integrale, als Beispiel die Gammafunktion.
§ 7 Beziehungen zwischen unendlichen Reihen und uneigentlichen Integralen – das Integralkriterium.

IX Konvergenz und Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

§ 1 Normen im $\mathbb{R}^n$ – speziell p–Normen, $1 \le p \le \infty$, Höldersche Ungleichung.
§ 2 Konvergente Folgen in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$, Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$, Äquivalenz der Normen des $\mathbb{R}^n$, Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$.
§ 3 Einige topologische Grundbegriffe im $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$; ε–Umgebung, innerer Punkt, Häufungspunkt, offene bzw. abgeschlossene Menge.
§ 4 Kompakte Mengen; Cantorscher Durchschnittssatz, Äquivalenz von folgenkompakt, überdeckungskompakt (Heine–Borel) und abgeschlossen und beschränkt im $\mathbb{R}^n$.
§ 5 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen.

X Differenzierbare Abbildungen

§ 1 Definition und einige Eigenschaften.
§ 2 Richtungsableitungen, Jacobi–Matrix.
§ 3 Partielle Differenzierbarkeit und (totale) Differenzierbarkeit.
§ 4 Die Kettenregel für differenzierbare Abbildungen.
§ 5 Der Mittelwertsatz bei reellwertigen Funktionen mehrerer reeller Variablen.
§ 6 Partielle Ableitungen höherer Ordnung. – Satz von Schwarz über gemischte partielle Ableitungen.
§ 7 Der Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Variablen.
§ 8 Relative Extrema, Hesse–Matrix.

XI Implizite Funktionen, Umkehrabbildungen

§ 1 Problemstellung
§ 2 Der Banachsche Fixpunktsatz.
§ 3 Über die Auflösung einer Gleichung $F(x, y) = 0$.
§ 4 Über die Auflösung von n nicht linearen Gleichungen in $n + m$ Variablen.
§ 5 Differenzierbarkeit der Auflösung aus § 4.
§ 6 Umkehrbarkeit von Abbildungen.
§ 7 Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Analysis III im WS 2001/02

XII Das Riemannsche Integral im $\mathbb{R}^n$

§ 1 Definition und einige Beispiele.
§ 2 Mengen vom Maß bzw. Inhalt Null.
§ 3 Zusammenhang von Riemann–Integrierbarkeit und Stetigkeit.
§ 4 Integration über beschränkte Mengen des $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe der charakteristischen Funktion.
§ 5 Der Satz von Fubini – das Prinzip von Cavalieri.
§ 6 Die Transformationsformel für Gebietsintegrale.
§ 7 Anwendungen von § 6 (z.B. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$)
§ 8 Parameterabhängige Integrale (auch uneigentliche) – gleichmäßige Konvergenz, Vertauschung von Limes und Integral bzw. Differentiation und Integration, Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Gamma– bzw. Betafunktion.

XIII Vektoranalysis

§ 1 Kurven im $\mathbb{R}^n$ – "Aquivalenzklassen von Wegen", Länge einer Kurve z.B. der Zykloide.
§ 2 Kurvenintegrale.
§ 3 Wegunabhängigkeit der Kurvenintegrale – Potentialfelder.
§ 4 Integrabilitätsbedingungen für Vektorfelder.
§ 5 Wegunabhängigkeit und Integrabilität – einfach zusammenhängende Gebiete, Homotopie.
§ 6 Oberflächenintegrale – glatte Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$ und deren Inhalt.
§ 7 Die Integralsätze von Gauß und Stokes für Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.
§ 8 Harmonische Funktionen – insbesondere Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen, Greensche Formeln.

XIV Fourierreihen

§ 1 Motivation (Lösung der Schwingungsgleichung). Begriff einer Fourierreihe (reelle und komplexe Schreibweise) – Orthogonalitätsrelationen, Eindeutigkeit bei $C_{2\pi}$.
§ 2 Ein Satz von Dirichlet über die Konvergenz der Fourierreihe 2π–periodischer Funktionen mit stückweise glatter Ableitung.
§ 3 Der Riemannsche Lokalisationssatz und einige Konvergenzkriterien z.B. dasjenige von Dini.
§ 4 Konstruktion eines $f \in C_{2\pi}$, dessen Fourierreihe in Null divergiert.
§ 5 Cesàro–Summierbarkeit der Fourierschen Reihe – ein Satz von Fejér.
§ 6 Zwei Beweise des Approximationssatzes von Weierstraß.
§ 7 Approximation im quadratischen Mittel von $f \in \mathbb{R}_{2\pi}$ durch die Fourierreihe $\hat{f}$.
§ 8 Fourierintegrale für über $\mathbb{R}$ absolut uneigentlich Riemann–integrierbare Funktionen.

XV Das Lebesguesche Integral

§ 1 Zwei Sätze über die Konvergenz fast überall monotoner Folgen Riemann– integrierbarer Funktionen mit beschränkter Integralfolge.
§ 2 Oberfunktionen Riemann–integrierbarer Funktionen – die Erweiterung des Riemannschen Integrals auf solche Funktionen.

§ 3 Definition des Lebesgueschen Integrals und einige Eigenschaften.
§ 4 Der Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz.
§ 5 Die Sätze von Fatou und Lebesgue.
§ 6 Die Vollständigkeit von $L_2[a, b]$ – der Satz von Riesz–Fischer.