Übungsblatt 10

Analysis II

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 37:

1. Es sei $\phi \neq D \subseteq \mathbb{R}^2$, D offen und $f : D \to \mathbb{R}$. Unter einer Niveaulinie von f zum Wert $c \in \mathbb{R}$ versteht man die Menge

$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}.$$

   Für die Funktion $f(x, y) := x \cdot y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, skizziere man für $c = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$ die Niveaulinien. Versuchen Sie, aus den Niveaulinien insbesondere in der Umgebung von $(0, 0)$ eine Vorstellung von der Fläche zu gewinnen.

2. Es sei $\alpha > 1$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Es gebe eine Konstante $C > 0$ und eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(\vec{0})$, so daß für alle $\vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{0})$ gilt: $||f(\vec{x})|| \leq C||\vec{x}||^\alpha$. Zeigen Sie, daß dann f in $\vec{0}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung $Df(\vec{0})$.

Aufgabe 38: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit in $(0, 0)$ und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

1. $f(x, y) := |x \cdot y|^{3/4}(1 + \sin(x + y))$
2. $f(x, y) := \sqrt[3]{x^2 + 2y^2}$

Aufgabe 39: Es sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(\vec{x}, t) := t^{-n/2} \cdot \exp\left(-\frac{||\vec{x}||_2^2}{4t}\right).$$

Ferner sei

$$\Delta F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}.$$

Zeigen Sie: F genügt der Differentialgleichung $\Delta F - \frac{\partial F}{\partial t} = 0$.

Aufgabe 40: Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Beweisen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Produktregel

$$(f \cdot g)'(\vec{x_0}) = g(\vec{x_0}) \cdot \mathrm{grad} f(\vec{x_0}) + f(\vec{x_0}) \cdot \mathrm{grad} g(\vec{x_0}).$$

Anleitung: Es werde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(u, v) := u \cdot v$ und $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ durch $G(x_1, \ldots, x_n) := (f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n))$. Wenden Sie nun die Kettenregel an auf die Funktion $F \circ G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$(F \circ G)(x_1 \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$.

Hinweis: Dieses Übungsblatt muß nicht mehr abgegeben werden!